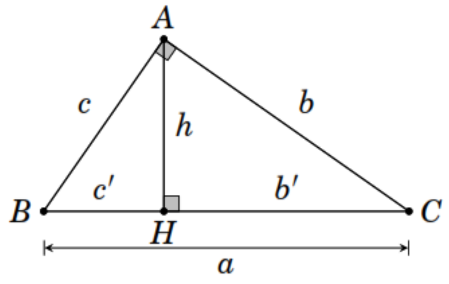
Chương 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Mở đầu



Từ hình vẽ bên, ta có

- Cạnh góc vuông: AB, AC.
- Cạnh huyền: BC.
- Đường cao: AH.
- HA là hình chiếu của AB trên cạnh BC.
- HC là hình chiếu của AC trên cạnh BC.
- Định lý Py-ta-go: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

1. Hệ thức liên hệ giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

- Trong tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của nó trên cạnh huyền.

$$BA^2 = BH \cdot BC \text{ hay } c^2 = c' \cdot a;$$

$$CA^2 = CH \cdot CB \text{ hay } b^2 = b' \cdot a.$$

2. Hệ thức liên quan đến đường cao

Trong một tam giác vuông

- Bình phương độ dài đường cao bằng tích hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

$$AH^2 = HB \cdot HC \text{ hay } h^2 = b' \cdot c'.$$

- Tích độ dài đường cao với cạnh huyền bằng tích độ dài hai cạnh góc vuông.

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ hay } a \cdot h = b \cdot c.$$

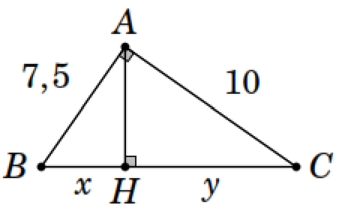
- Nghịch đảo bình phương độ dài đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \text{ hay } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

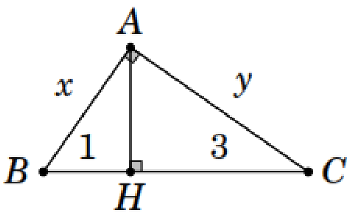
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng và các yếu tố khác dựa vào hệ thức liên hệ giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền
▪ Vận dụng định lý Py-ta-go để tính cạnh thứ ba (nếu cần). ▪ Vận dụng các hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác.

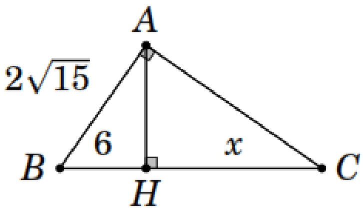
Ví dụ 1. Tính các độ dài x, y trong hình bên.



a)



b)



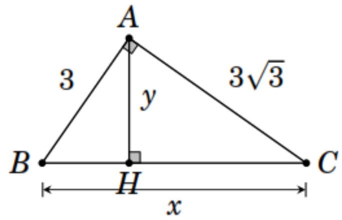
c)

Ví dụ 2. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{4}{9}$. Tính tỉ số hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

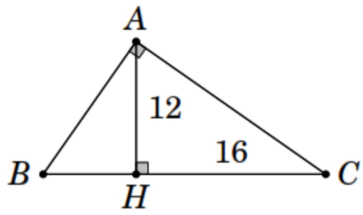
Ví dụ 3. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{3}{4}$, cạnh huyền dài 10cm. Tính độ dài các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Dạng 2: Tính độ dài dựa vào hệ thức liên quan đến đường cao
▪ Vận dụng các hệ thức liên quan đến đường cao và định lý Py-ta-go.

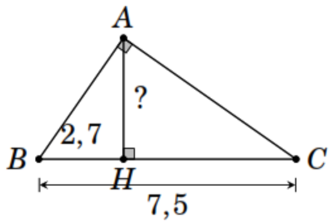
Ví dụ 4. Tính độ dài x, y trong hình bên.



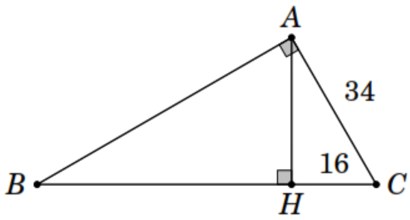
Ví dụ 5. Tính diện tích tam giác ABC trong hình bên.



Ví dụ 6. Tính độ dài AH trong hình bên.



Ví dụ 7. Tính tích $HA \cdot HB \cdot HC$ trong hình bên.



Dạng 3: Chứng minh các hệ thức hình học
▪ Vận dụng linh hoạt các hệ thức liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông.   ▪ Nếu cần thì có thể vẽ thêm đường phụ (thường là đường cao) sao cho hình vẽ xuất hiện tam giác vuông để vận dụng các hệ thức.

Ví dụ 8. Cho hình thang $ABCD\,(AB\,||\,CD)$ có $\hat{D}=90^\circ$ và $AC \perp BD$. Chứng minh rằng AD là trung bình nhân của hai đáy.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường cao BE và CD. Từ B vẽ một đường thẳng song song với CD cắt tia AC tại F. Chứng minh rằng $AC^2 = AE \cdot AF$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng $DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao AD và BE. Cho biết $BE = 2k$; $BC = 2m$; $AD = n$. Chứng minh rằng $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

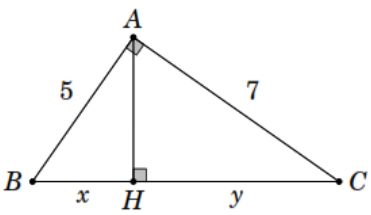
....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

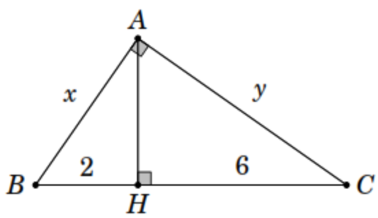
Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$, đường cao AH. Lấy điểm M trên đoạn thẳng HC sao cho $HM = AH$. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với BC, cắt AC tại D. Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}$.

....

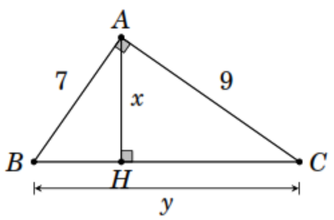
Bài 2. Tính x, y trong hình vẽ sau



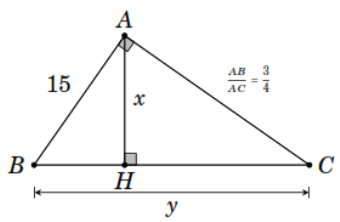
a)



b)



c)



d)

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HK \perp AB\,(K \in AB)$. Chứng minh rằng

a) $AB \cdot AK = BH \cdot HC$;

b) $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{HB}{HC}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh $BC = 5$ cm và tỉ số hai hình chiếu của AB, AC trên cạnh huyền bằng $\dfrac{9}{16}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 15$ cm; $BC = 25$ cm. Tính độ dài hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền và tính đường cao tương ứng với cạnh huyền.

Bài 6. Hình thang $ABCD\,(AB \parallel CD)$ có $AD = 5\,\text{cm}$; $AC = 12\,\text{cm}$ và $CD = 13\,\text{cm}$. Biết diện tích hình thang là 45cm^2.

a) Tính chiều cao của hình thang.

b) Chứng minh rằng $AB = \dfrac{1}{2}CD$.

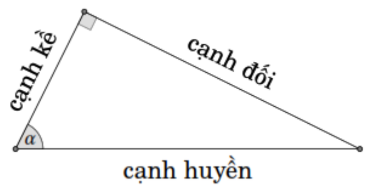
Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$ $(D \in AB, E \in AC)$. Chứng minh rằng $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{AB^3}{AC^3}$.

--- HẾT ---

Bài 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa



- Với α là góc nhọn trong tam giác vuông ta có
- $\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$;
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$;
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$;
- $\cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$.

Cách ghi nhớ

"Tìm *sin* lấy đối chia huyền,
Cô-sin hai cạnh kề huyền chia nhau,
Còn *tang* thì phải tính sao?
Đối trên kề dưới chia nhau ra liền,
Cô-tang cũng dễ ăn tiền,
Kề trên đối dưới chia liền bạn ơi!"

2. Một số hệ thức và tính chất cơ bản

- Với hai góc nhọn α, β và $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì

$$\sin\alpha = \cos\beta;\ \cos\alpha = \sin\beta;\ \tan\alpha = \tan\beta;\ \cot\alpha = \cot\beta.$$

Với góc nhọn $\alpha\left(0^\circ < \alpha < 90^\circ\right)$, ta có

- $0 < \sin\alpha < 1; 0 < \cos\alpha < 1$.
- Nếu α tăng thì $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$ tăng; còn $\cos\alpha$ và $\cot\alpha$ giảm.
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
- $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$;
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

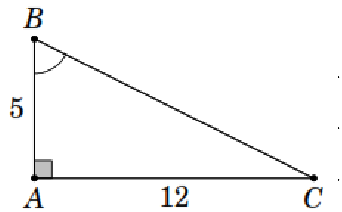
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh

- Bước 1: Tính độ dài cạnh thứ ba theo định lý Py-ta-go (nếu cần).
- Bước 2: Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn theo yêu cầu đề bài.

Ví dụ 1. Tam giác ABC vuông tại A, $AB = 1,5$; $BC = 3,5$. Tính tỉ số lượng giác của góc C rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc B.

Ví dụ 2. Tính tỉ số lượng giác của góc B trong hình bên.



Ví dụ 3. $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2AB$. Tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Ví dụ 4. Tam giác ABC cân tại A, có $BC = 6$, đường cao $AH = 4$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B.

....

....

....

....

....

....

....

....

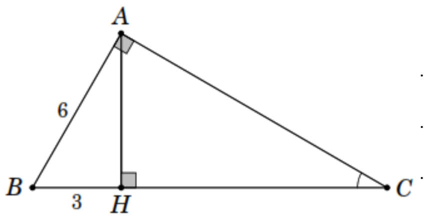
....

....

....

....

Ví dụ 5. Tính $\tan C$ trong hình bên.



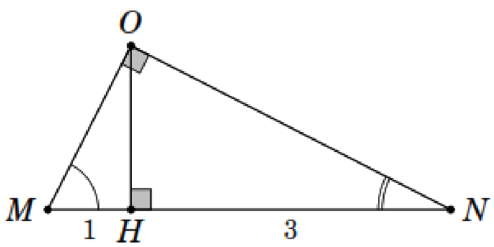
....

....

....

....

Ví dụ 6. Tính $\sin M + \cos N$ trong hình bên.



....

....

....

....

....

....

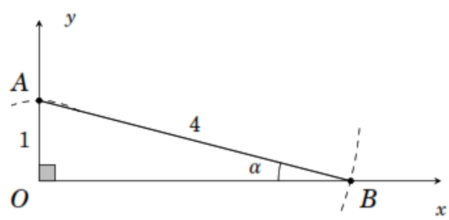
....

Dạng 2: Dựng góc nhọn α khi biết tỉ số lượng giác của góc nhọn đó bằng $\frac{m}{n}$.
▪ Dựng một tam giác vuông có cạnh là m và n rồi vận dụng định nghĩa để nhận ra góc α.

Ví dụ 7. Dựng góc α, biết $\sin\alpha = 0,25$.

Lời giải

Ta có $0,25 = \frac{1}{4}$.



Dựng góc vuông xOy;

Trên cạnh Ox đặt $OA = 1$;

Dựng đường tròn $(A;4)$ cắt cạnh Oy tại B.

Khi đó $\widehat{ABO} = \alpha \left(\text{vì } \sin\alpha = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{1}{4} \right)$.

Ví dụ 8. Dựng góc α, biết $\cos\alpha = 0,75$.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 9. Dựng góc α, biết $\tan\alpha = 1,5$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 10. Dựng góc α, biết $\cot\alpha = 2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3: Chứng minh hệ thức lượng giác

- Sử dụng định nghĩa và một số hệ thức lượng giác cơ bản để chứng minh.

Ví dụ 11. Cho góc nhọn α. Chứng minh rằng

a) $\sin\alpha < \tan\alpha$;

b) $\cos\alpha < \cot\alpha$.

Ví dụ 12. Chứng minh các hệ thức

a) $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

b) $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

b) $\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1} = \dfrac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$.

....

....

....

....

....

Ví dụ 14. Chứng minh rằng $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 15. Chứng minh rằng $\dfrac{1-4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4: Biết một giá trị lượng giác của góc nhọn, tính các tỉ số lượng giác khác của góc đó
▪ Vận dụng các hệ thức cơ bản đã học.

Ví dụ 16. Cho biết $\sin\alpha = 0,6$; tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 17. Cho biết $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; tính $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 18. Cho biết $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tính $\cot\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

....

....

....

....

....

Ví dụ 19. Cho biết $\cot x = 2$, tính $\tan x$, $\sin x$, $\cos x$.

....

....

....

....

Dạng 5: Tính giá trị lượng giác với các góc đặc biệt (không dùng máy tính hoặc bảng số)
▪ Căn cứ vào bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt $30^\circ; 45^\circ; 60^\circ$.   ▪ Căn cứ vào tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.   ▪ Căn cứ vào các hệ thức lượng giác cơ bản.

Ví dụ 20. Tính giá trị của biểu thức

a) $M = 4\cos^2 45^\circ + \sqrt{3}\cot 30^\circ - 16\cos^3 60^\circ$;

b) $N = \dfrac{2\sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos 60^\circ}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 21. Tính giá trị của biểu thức

a) $P=\sin^2 30^\circ-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ+\sin^2 60^\circ$;

b) $Q=\cos^2 25^\circ-\cos^2 35^\circ+\cos^2 45^\circ-\cos^2 55^\circ+\cos^2 65^\circ$.

Ví dụ 22. Tính giá trị của biểu thức sau với $0^0<\alpha<90^\circ$:

$$A=\cos^2\alpha-\tan 60^\circ+\cot 45^\circ-2\sin 30^\circ+\cos^2\alpha\cdot\tan^2\alpha.$$

Ví dụ 23. Rút gọn các biểu thức sau với $0^\circ<\alpha<90^\circ$

a) $B=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

b) $C=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Ví dụ 24. Cho biểu thức $A == \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}$.

a) Chứng minh rằng $A = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

b) Tính giá trị của A, biết $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Dạng 6: So sánh các tỉ số lượng giác mà không dùng máy tính hoặc bảng số
▪

Ví dụ 25. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

a) $\sin 70^\circ, \cos 30^\circ, \cos 40^\circ, \sin 51^\circ$;

b) $\cos 34^\circ, \sin 57^\circ, \cot 32^\circ$.

Ví dụ 26. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

a) $\cot 40^\circ, \sin 40^\circ, \cot 43^\circ, \tan 42^\circ$;

b) $\tan 52^\circ, \cot 63^\circ, \tan 72^\circ, \cot 31^\circ, \sin 27^\circ$.

Ví dụ 27. Cho $25^\circ < \alpha < 50^\circ$, hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự giảm dần:

$$\sin\alpha;\ \cos\left(\alpha+40^\circ\right);\ \tan\left(\alpha+10^\circ\right).$$

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 28. So sánh hai số m và n, biết $m=\dfrac{\sin 50^\circ}{\cos 65^\circ}$; $n=\dfrac{\cot 70^\circ}{\tan 35^\circ}$.

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 7: Tìm góc nhọn α thỏa đẳng thức cho trước

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để biến đổi về dạng cơ bản
- Dùng MTBT hoặc bảng giá trị lượng giác các góc đặc biệt để tìm.

Cách dùng MTBT tìm α khi biết $\sin\alpha$ (tương tự đối với $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$)

Nếu $\sin\alpha=m$ thì bấm các phím sau

$$\boxed{\text{shift}}\boxed{\sin}\boxed{m}\boxed{=}\boxed{\circ\,'''}.$$

Ví dụ 29. Tìm góc nhọn x, biết

a) $4\sin x-1=1$;

b) $2\sqrt{3}-3\tan x=\sqrt{3}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình bên. Tính $\sin C$ và $\tan B$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2. Chứng minh đẳng thức $\dfrac{1-2\cdot\cos^2\alpha}{1+2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Cho góc nhọn α.

a) Biết $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, hãy tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

b) Biết $\tan\alpha=2$, hãy tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy

a) Tính giá trị của biểu thức $M=\sin^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ+\cos^2 60^\circ+\sin^2 70^\circ$.

b) Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần $\sin 41^\circ$; $\cos 58^\circ$; $\cot 49^\circ$; $\cos 75^\circ$; $\sin 25^\circ$.

....

....

....

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC, độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt bằng a, b, c.

a) Chứng minh rằng $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

b) Chứng minh rằng nếu $a+b=2c$ thì $\sin A+\sin B=2\sin C$.

--- HẾT ---

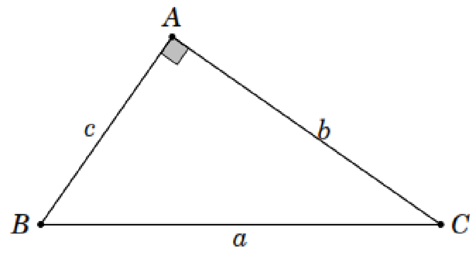
Bài 4-5. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG ỨNG DỤNG THỰC TẾ CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng

- Tích của cạnh huyền với sin của góc đối hoặc cô-sin của góc kề.
- Tích của cạnh góc vuông kia với tang góc đối hoặc cô-tang góc kề.



Trong hình bên, ta có

$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$; $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$;

$c = c \cdot \sin C = a \cdot \cos B$; $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.

2. Giải tam giác vuông

- Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc còn lại của tam giác vuông đó khi biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Giải tam giác vuông

- Vận dụng các công thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để tìm cạnh.
- Vận dụng công thức liên hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông để tìm cạnh.
- Vận dụng các tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính góc.

Lưu ý:

- Nếu cho trước 1 góc nhọn thì nên tìm góc nhọn còn lại.
- Nếu cho trước hai cạnh thì dùng định lý Py-ta-go tìm cạnh thứ hai.

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3,5$ và $AC = 4,2$.

Ví dụ 2. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3,0$ và $BC = 4,5$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $\hat{B} = 50^\circ$ và $AB = 3,7$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết $\hat{B} = 57^\circ$ và $BC = 4,5$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = 2,5$, $BH = 1,5$. Tính $\hat{B}$, $\hat{C}$ và AC.

....

....

....

....

Dạng 2: Giải tam giác nhọn
▪ Bước 1: Vẽ đường cao để vận dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông. ▪ Bước 2: Tính đường cao rồi tính các độ dài cạnh hay góc trong tam giác đã cho. ***Lưu ý***: Dùng đường cao làm trung gian để tính các độ dài cạnh hoặc số đo góc. ▪ Nếu tam giác cho trước một cạnh (hoặc một góc) thì khi vẽ đường cao không thể chia đôi cạnh đó (hoặc góc đó) vì như vậy sẽ khó khăn cho việc tính toán.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $\hat{B}=65^\circ$, $\hat{C}=45^\circ$ và $AB=2,8\text{cm}$. Tính các góc và cạnh còn lại của tam giác đó (gọi là giải tam giác ABC).

Ví dụ 7. Giải tam giác ABC biết $\hat{B}=65^\circ$, $\hat{C}=40^\circ$ và $BC=4,2\text{cm}$.

Ví dụ 8. Giải tam giác nhọn ABC biết $AB = 2,1$, $AC = 3,8$ và $\hat{B} = 70^\circ$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

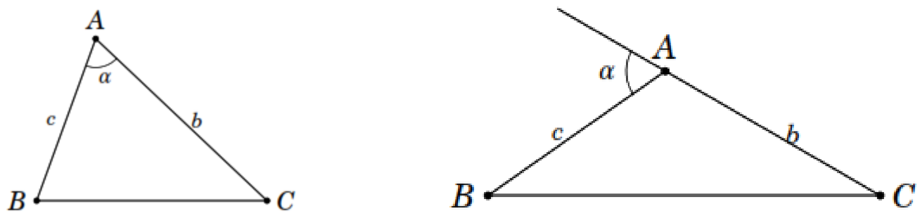
....

....

....

Dạng 3: Tính diện tích tam giác, tứ giác
▪ Tính các yếu tố cần thiết rồi thay vào công thức tính diện tích và thực hiện phép tính.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC như hình vẽ bên. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC có diện tích là $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

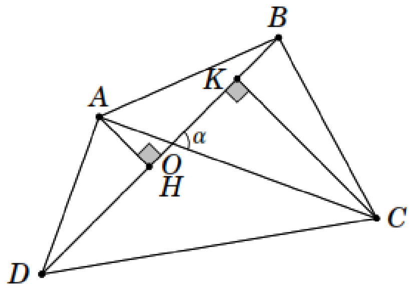
....

....

....

Nhận xét: Qua ví dụ này ta có thêm một cách tính diện tích tam giác. Diện tích tam giác bằng nửa tích hai cạnh nhân với sin của góc nhọn xen giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh đó.

Ví dụ 10. Tứ giác $ABCD$ như hình vẽ phía dưới. Biết $AC = 3,8$, $BD = 5,0$ và $\alpha = 65^{\circ}$. Tính diện tích của tứ giác đó.

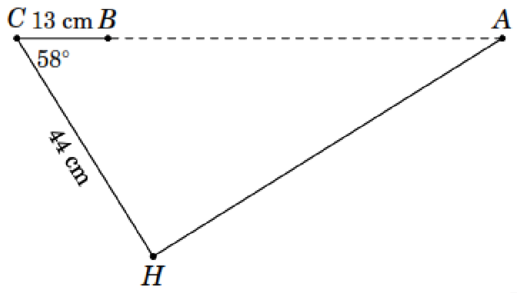


Ví dụ 11. Tam giác ABC có $\hat{B} + \hat{C} = 60^{\circ}$, $AB = 3$, $AC = 6$. Tính độ dài đường phân giác AD.

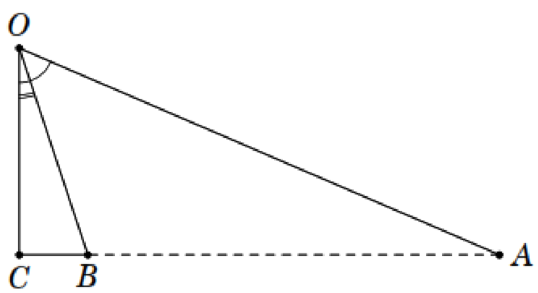
Ví dụ 12. Hình bình hành $ABCD$ có $AC \perp AD$ và $AD = 3,5$, $\hat{D} = 50^{\circ}$. Tính diện tích của hình bình hành.

Dạng 4: Ứng dụng thực tế của hệ thức lượng trong tam giác vuông
▪ Vẽ lại hình vẽ theo yêu cầu bài toán (chú ý tạo ra tam giác vuông). ▪ Xác định các yếu tố cần thiết rồi tính theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác hoặc sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để tìm góc.

Ví dụ 13. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B trên một bờ hồ nước sâu, biết $\hat{C} = 58^\circ$, $CB = 13\text{m}$, $CH = 44\text{m}$ như hình bên.



Ví dụ 14. Trong hình vẽ bên dưới, tính chiều rộng AB của con sông, biết $OC = 47\text{m}$, $\widehat{AOC} = 74^\circ$, $\widehat{BOC} = 23^\circ$.



....

Ví dụ 15. Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là a như hình vẽ bên dưới. Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α. Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $a = 120\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết

a) $AB = 2,7$ và $AC = 4,5$; b) $AC = 4,0$ và $BC = 4,8$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết

a) $BC = 4,5$ và $\hat{C} = 35^\circ$; b) $AB = 3,1$ và $\hat{B} = 65^\circ$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao BH. Biết $\hat{A} = 50^\circ$, $BH = 2,3$. Tính chu vi của ΔABC.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Hình thang $ABCD$ có $\hat{A}=\hat{D}=90^\circ$. Biết $AB=2,6$, $CD=4,7$ và $\hat{C}=35^\circ$. Tính diện tích hình thang.

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC, $AB>AC$, đường cao AH và đường trung tuyến AM. Gọi α là số đo góc $\widehat{HAM}$.

a) Chứng minh rằng $HB-HC=2HM$;

b) Chứng minh rằng $\tan\alpha=\dfrac{\cot B-\cot C}{2}$.

....

Bài 6. Giải tam giác nhọn ABC biết $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = 3,0$ và $BC = 4,5$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 7. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 38^\circ$, $AB = 3,5$, $AD = 3,1$. Tính diện tích hình thang đó.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

D. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Các cạnh của một tam giác vuông có độ dài 4cm; 6cm và 6cm. Hãy tính góc nhỏ nhất của tam giác đó.

Bài 9. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 21$ cm, $\hat{C} = 40^\circ$. Hãy tính các độ dài

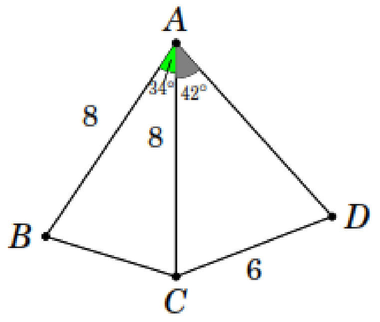
a) AC; b) BC; c) Phân giác BD.

Bài 10. Cho hình bên, biết: $AB = AC = 8$ cm, $CD = 6$ cm, $\widehat{BAC} = 34^\circ$ và $\widehat{CAD} = 42^\circ$. Hãy tính

a) Độ dài cạnh BC;

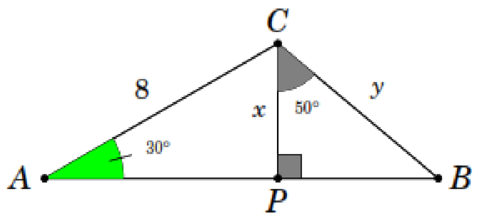
b) $\widehat{ADC}$;

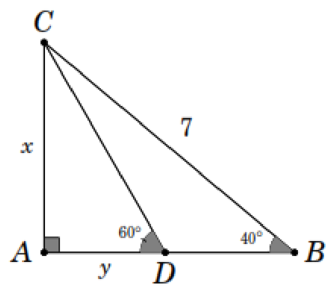
c) Khoảng cách từ điểm B đến cạnh AD.



Bài 11. Trong một tam giác ABC có $AB = 11$ cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, N là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Hãy tính AN, AC.

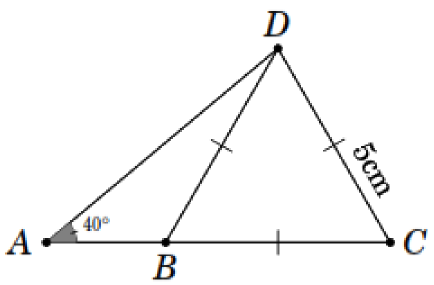
Bài 12. Tìm x và y trong các hình sau





Bài 13. Cho tam giác BCD đều cạnh 5 cm và $\widehat{DAB} = 40^\circ$. Hãy tính

a) AD; b) AB.



--- HẾT ---

Bài. ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Xem lại phần kiến thức trọng tâm của các bài đã học

- Hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác.
- Tỉ số lượng giác của góc nhọn.
- Hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: So sánh các tỉ số lượng giác

Ví dụ 1. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần $\cos 72^\circ$, $\sin 65^\circ$, $\sin 10^\circ$, $\cot 25^\circ$, $\sin 40^\circ$.

...

...

...

...

Ví dụ 2. So sánh

a) $\sin 55^\circ$; $\cos 55^\circ$; $\tan 55^\circ$.

b) $\cot 20^\circ$; $\sin 20^\circ$; $\cos 20^\circ$.

...

...

...

...

Ví dụ 3. Cho $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Chứng minh rằng

a) $\sin\alpha < \cos\alpha$.

b) $\tan\alpha < \cot\alpha$.

...

...

...

...

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} > \hat{C}$. Hãy sắp xếp theo thứ tự tăng dần $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$, $\sin C$, $\cos C$, $\cot C$.

...

...

...

...

...

...

...

...

Dạng 2: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức lượng giác

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức

a) $\sin^2\alpha\cdot\cot^2\alpha-\cos^2\alpha+1$.

b) $\left(\tan\alpha-\cot\alpha\right)^2-\left(\tan\alpha+\cot\alpha\right)^2$.

c) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha$.

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6. Tính giá trị của biểu thức

a) $\sin30^\circ+\cos60^\circ-\tan45^\circ+4\cos^2 30^\circ$.

b) $\cos^2 30^\circ-\cot^2 60^\circ+\tan^2 30^\circ-1$.

c) $\dfrac{\cot^2 45^\circ-\cos^2 45^\circ}{2\sin^2 60^\circ}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7. Tính giá trị của biểu thức

a) $\cos^2 33^\circ+\cos^2 41^\circ+\cos^2 49^\circ+\cos^2 57^\circ$.

b) $\sin^2 35^\circ+\sin^2 39^\circ+\sin^2 43^\circ+\sin^2 47^\circ+\sin^2 51^\circ+\sin^2 55^\circ$.

....
....
....
....
....

Dạng 3: Tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $\hat{A}=44^{\circ}$; $AH=9\text{cm}$. Tính chu vi tam giác ABC.

Ví dụ 9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $\hat{C}=36^{\circ}$; $\hat{D}=50^{\circ}$. Biết $AB=4\text{cm}$, $AD=6\text{cm}$. Tính chu vi hình thang.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HM \perp AB$; $HN \perp AC$. Biết $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$.

a) Tính độ dài MN.

b) Tính số đo các góc của tam giác AMN.

c) Tính diện tích tứ giác $BMNC$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 4\text{cm}$. Vẽ đường cao AH; vẽ $HI \perp AB$, $HK \perp AC$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $AIHK$.

....

Dạng 4: Chứng minh hệ thức giữa các tỉ số lượng giác

Ví dụ 12. Chứng minh hệ thức $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha} = \cot^4\alpha.$

....

Ví dụ 13. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha$;

b) $\sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha = 2$;

c) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$;

d) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha = \sin^3\alpha$.

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=5$ cm, $AC=12$ cm và $BC=13$ cm. Giá trị của $\sin C$ bằng

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $\frac{1}{13}$. **C.** $\frac{12}{13}$. **D.** $\frac{5}{13}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos B=\frac{AB}{BC}$. **B.** $\cos B=\frac{AC}{AB}$. **C.** $\cos B=\frac{AB}{AC}$. **D.** $\cos B=\frac{AC}{BC}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $\sin B=\frac{AB}{BC}$. **B.** $\sin B=\frac{AB}{AC}$. **C.** $\tan B=\frac{AB}{AC}$. **D.** $\cos B=\frac{AB}{AC}$.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos 35^\circ > \sin 40^\circ$. **B.** $\sin 35^\circ > \cos 40^\circ$.

C. $\sin 35^\circ < \sin 40^\circ$. **D.** $\cos 35^\circ > \cos 40^\circ$.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Hệ thức nào đây **sai**?

A. $AC^2 = BC.HC$. **B.** $AH^2 = AB.AC$.

C. $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$. **D.** $AH^2 = HB.HC$.

Câu 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Biết $BH=3{,}2\text{cm}; BC=5\text{cm}$ thì độ dài AB bằng

A. 8 cm. **B.** 16 cm. **C.** 1,8 cm. **D.** 4 cm.

Câu 7: Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ACB}=30^\circ$, cạnh $AB=5$ cm. Độ dài cạnh AC là

A. 10 cm. **B.** $\frac{5}{\sqrt{3}}$ cm. **C.** $5\sqrt{3}$ cm. **D.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

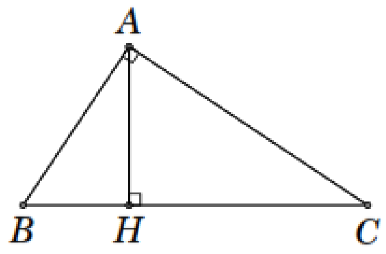
Câu 8: Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết $\sin B=\frac{1}{3}$, khi đó $\tan A$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 9: Cho $\triangle ABC$ cân tại A, $\widehat{BAC}=120^\circ$, $BC=12$ cm. Tính độ dài đường cao AH.

A. $AH=3$ cm. **B.** $AH=2\sqrt{3}$ cm. **C.** $AH=4\sqrt{3}$ cm. **D.** $AH=6$ cm.

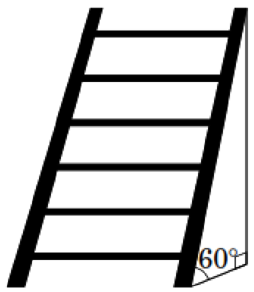
Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (hình bên). Đẳng thức nào sau đây là **sai**?



A. $\sin B = \dfrac{AH}{AB}$. **B.** $\tan \widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AH}$.

C. $\cos C = \dfrac{HC}{AC}$. **D.** $\cot \widehat{HAC} = \dfrac{AH}{AC}$.

Câu 11: Một cái thang dài 4 cm đặt dựa vào tường, biết góc giữa thang và mặt đất là 60°. Khoảng cách d từ chân thang đến tường bằng bao nhiêu?



A. $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m. **B.** $d = 2\sqrt{3}$ m.

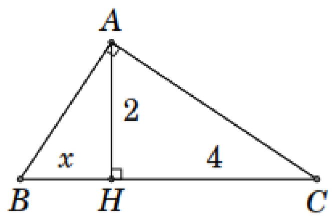
C. $d = 2\sqrt{2}$ m. **D.** $d = 2$ m.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2\sqrt{5}a$, $AC = 5\sqrt{3}a$. Kẻ AK vuông góc với BC, với K nằm trên cạnh BC. Tính AK theo a.

A. $AK = \dfrac{19\sqrt{57}}{10}a$. **B.** $AK = \dfrac{\sqrt{95}}{2}a$.

C. $AK = \dfrac{10\sqrt{57}}{19}a$. **D.** $AK = \dfrac{5\sqrt{57}}{19}a$.

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 2$, $HC = 4$. Đặt $BH = x$ (hình bên). Tính x.



A. $x = \dfrac{1}{2}$. **B.** $x = 1$.

C. $x = \dfrac{16}{3}$. **D.** $x = 4$.

Câu 14: Cho $\widehat{xOy} = 45^\circ$. Trên tia Oy lấy hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$ cm. Tính độ dài hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên Ox.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ cm. **C.** 1 cm. **D.** $\dfrac{1}{2}$ cm.

Câu 15: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH và đường trung tuyến AM ($H, M \in BC$). Biết chu vi của tam giác là 72 cm và $AM - AH = 7$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S = 48$ cm^2. **B.** $S = 108$ cm^2. **C.** $S = 148$ cm^2. **D.** $S = 144$ cm^2.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Cho biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

a) Tính $\sin\alpha$. b) Chứng minh rằng $\tan\alpha = 4\sin\alpha$.

....

....

....

....

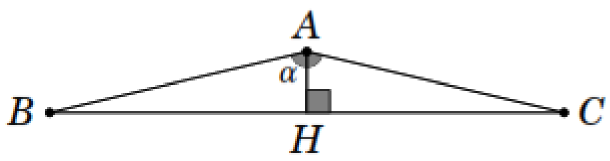
....

....

....

....

Bài 2. Xem hình bên và tính góc tạo bởi hai mái nhà AB và AC, biết rằng mỗi máy nhà dài 2,34m và cao 0,8m.



....

....

....

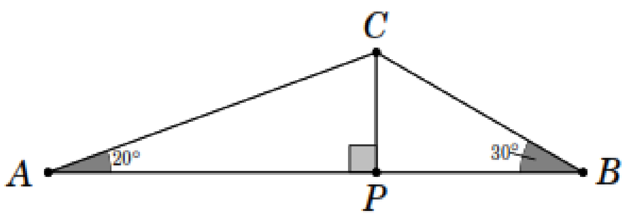
....

....

....

Bài 3. Tam giác ABC có $\hat{A} = 20^{\circ}$, $\hat{B} = 30^{\circ}$, $AB = 6$ cm. Đường vuông góc kẻ từ C đến AB cắt AB tại P (hình vẽ bên). Hãy tìm

a) AP, BP; b) CP.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Tính độ dài các cạnh và số đo các góc nhọn của tam giác ABC vuông tại A trong hình bên

....

Bài 5. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AD = 2,1\text{cm}$; $CD = 6,0\text{cm}$ và $\hat{D} = 48^\circ$.

a) Tính độ dài AB .

b) Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 8\,\text{cm}$.

a) Tính BC , $\hat{B}$, $\hat{C}$;

b) Phân giác của $\hat{A}$ cắt BC tại D . Tính BD , CD .

c) Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB , AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Tính chu vi và diện tích của tứ giác $AEDF$?

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $\tan\frac{B}{2}=\frac{AC}{AB+BC}$.

--- HẾT ---

Chương 2

ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. SỰ XÁC ĐỊNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Khái niệm

- Đường tròn tâm O bán kính R $(R>0)$ là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

2. Vị trí tương đối giữa điểm và đường tròn

- Điểm M nằm trong đường tròn $(O;R)$ khi $OM<R$.
- Điểm M nằm trên đường tròn $(O;R)$ khi $OM=R$.
- Điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ khi $OM>R$.

3. Cách xác định đường tròn

Một đường tròn được xác định khi

- Biết tâm và bán kính đường tròn.
- Biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn.
- Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác. Khi đó tam giác được gọi là tam giác nội tiếp đường tròn.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác.
- Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.
- Nến tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

4. Tâm đối xứng

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm đối xứng của đường tròn là tầm đối xứng của hình tròn đó.

5. Trục đối xứng

- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Xác định tâm và bán kính của đường tròn đi qua nhiều điểm
▪ Dựa vào định nghĩa đường tròn: Nếu một điểm cách đều các điểm còn lại thì điểm đó chính là tâm của đường tròn.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 6 cm. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2: Xác định vị trí của điểm và đường tròn
Muốn xác định vị trí của điểm M và đường tròn (O), ta làm như sau ▪ Bước 1: Xác định khoảng cách từ M đến tâm O của đường tròn. ▪ Bước 2: Dựa vào kết quả so sánh của OM và bán kính R của đường tròn mà kết luận.

Ví dụ 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định vị trí tương đối của điểm $M(1;1)$, $N(2;0)$, $P(2;3)$ đối với $(O;2)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo, $OA = 2\sqrt{2}$ cm. Vẽ đường tròn (A ; 4 cm). Xác định vị trí tương đối của các điểm A, B, C, D với đường tròn $(O;4$ cm).

....

....

Dạng 3: Dựng đường tròn thỏa mãn yêu cầu cho trước

- Xem phần kiến thức trọng tâm.

Ví dụ 6. Cho góc xAy nhọn và hai điểm B, C thuộc tia Ay. Dựng đường tròn tâm O đi qua hai điểm B, C sao cho O nằm trên tia Ax.

Ví dụ 7. Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy xác định lại tâm và bán kính của hình tròn đó.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Tìm tâm và bán kính của đường tròn đi qua 4 điểm A, B, C, D.

....

....

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB. M là điểm nằm bên ngoài đường tròn sao cho MA, MB cắt nửa đường tròn lần lượt tại N, P.

a) Chứng minh $BN \perp MA$, $AP \perp MB$;

b) Gọi K là giao điểm của BN và AP. Chứng minh $MK \perp AB$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Cho $\triangle MNP$ cân tại N, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao NH cắt đường tròn tại K.

a) Chứng minh NK là đường kính của (O);

b) Tính số đo $\widehat{NPK}$;

c) Biết $MP = 24$ cm, $NP = 20$ cm. Tính NH và bán kính của đường tròn (O).

....

....

....

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có $BC=36$ cm, đường cao $AH=12$ cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bài 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$, $BC=b$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

....

....

Bài 7. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Trên cạnh AC lấy điểm M. Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F. Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 8. Chứng minh rằng bốn trung điểm của bốn cạnh hình thoi cùng thuộc một đường tròn.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 9. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đều, cạnh 3 cm.

....

....

Bài 10. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho các điểm $M(-1;-2)$, $N(1;2)$ và $P(-5;0)$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Bài 11. Cho tam giác MNP có $MN = MP = a$ và $\widehat{NMP} = 120^\circ$. Gọi O là tâm và r là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP. Tính tỉ số $\dfrac{d}{r}$ với $d = NP$.

....

....

Bài 12. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm M, N sao cho M nằm trong và N nằm ngoài $(O;R)$. Hãy so sánh $\widehat{OMN}$ và $\widehat{ONM}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 13. Cho tam giác ABC, đường cao BH. Lấy một điểm M trên cạnh AB ($M \neq A$, $M \neq B$). Qua B kẻ tia Bx vuông góc với tia CM tại K. So sánh BC và HK.

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 14. Cho tam giác MNP vuông tại M, $NP = 2a$. Trên cạnh MN lấy điểm A ($A \neq M$, $A \neq N$). Qua trung điểm I của NP vẽ tia Ix vuông góc với IA. Tia Ix cắt đường thẳng MP tại B. Xác định vị trí của điểm A để độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

....

....

....

....

....

....

....

Bài 15. Bốn đỉnh của một hình chữ nhật kích thước 5×12 cùng nằm trên một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Bài 16. Cho hình thoi $ABCD$. Đường trung trực của cạnh BC cắt đường thẳng AC tại M và cắt đường thẳng BD tại N. Chứng minh rằng M và N lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ABC.

--- HẾT ---

Bài 2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

- Trong các dây của đường tròn, đường kính là dây lớn nhất.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: So sánh các đoạn thẳng
▪ Sử dụng kiến thức liên hệ giữa đường kính và dây.

Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh

a) ốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn;

b) $DE < BC$;

c) $DE < AH$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Đường thẳng đi qua O vuông góc với CD tại M cắt AK tại N. Chứng minh

a) $AN = NK$; b) $MH = MK$; c) $CH = DK$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính MN, dây CD. Các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt MN ở H và K. Chứng minh $MH = NK$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đường tròn tâm O, có bán kính $OA = 4$ cm. Dây BC vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Tính độ dài BC.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm I nằm bên trong đường tròn.

a) Hãy nêu cách dựng dây CD nhận I làm trung điểm;

b) Tính độ dài dây CD khi $R=5$ cm, $OI=3$ cm.

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA=11$ cm. Lấy M thuộc OA sao cho $OM=7$ cm. Qua M vẽ dây $CD=18$ cm. Kẻ $OH\perp CD$ ($H\in CD$). Tính

a) OH, HM;

b) MC, MD.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Vẽ cung tròn tâm B, bán kính R, cung này cắt đường tròn (O) ở C và D.

a) Tứ giác $OCBD$ là hình gì? Vì sao?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CDB}$, $\widehat{CDO}$, $\widehat{ODA}$;

c) Chứng minh $\triangle ACD$ là tam giác đều.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Cho đường tròn (O), dây cung MN. Kẻ $OI \perp MN$ ($I \in MN$), lấy hai điểm H, K đối xứng với nhau qua I. Chứng minh tứ giác $MHNK$ là hình bình hành.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn;

b) So sánh độ dài AC và BD;

c) Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

....

....

....

....

....

....

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AK, dây MN không cắt đường kính AK. Gọi I, P lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ A và K đến MN. Chứng minh $MI = NP$.

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính MN. Trên MN lấy điểm H, K sao cho $MH = NK$. Qua H, K kẻ các đường thẳng song song với nhau, chúng cắt nửa đường tròn lần lượt tại C và D. Chứng minh HC và KD vuông góc với CD.

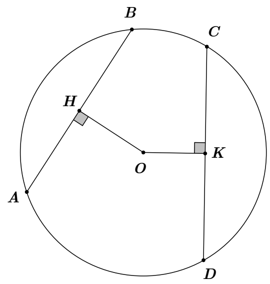
....

--- HẾT ---

Bài 3. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Trong một đường tròn:
  - ✓ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
  - ✓ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn
  - ✓ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
  - ✓ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
▪ Áp dụng liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O, 10\text{ cm})$, dây $AB = 16$ cm.

a) Tính khoảng cách từ O đến dây AB;

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 2$ cm. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh $CD = AB$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) có các dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD.Chứng minh

a) $MH = MK$; b) $MA = MC$.

....

....

....

....

Dạng 2: So sánh độ dài các đoạn thẳng
▪ Dựa vào kiến thức trọng tâm.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây AB vuông góc với OM tại M. Vẽ dây HK bất kì qua M và không vuông góc với OM. Hãy so sánh độ dài dây AB và HK.

Ví dụ 4. Cho AB và CD là hai dây của đường tròn $(O;R)$ sao cho AB và CD cắt nhau tại điểm I nằm trong đường tròn. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Biết $AB > CD$, chứng minh $IH > IK$.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đường tròn $(O;25\text{ cm})$. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40 cm, 48 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây ấy.

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm A, B bất kì nằm trên $(O;R)$. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$ và AM, BN cắt nhau tại điểm C nằm trong đường tròn. Chứng minh:

a) OC là phân giác của $\widehat{AOB}$;

b) $OC \perp AB$.

Bài 3. Cho đường tròn $(O;10\text{ cm})$, điểm M cách O là 8 cm.

a) Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M;

b) Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.

Bài 4. Cho đường tròn (O), các dây $AB = 24$ cm, $AC = 20$ cm ($\widehat{BAC} < 90^\circ$ và điểm O nằm trong $\widehat{BAC}$). Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến AB bằng 8 cm.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại C;

b) Tính bán kính của đường tròn.

....

....

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho đường tròn $(O, 10 \text{ cm})$, dây $AB = 16$ cm. Vẽ dây CD song song với AB. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh ba điểm O, H, K thẳng hàng;

b) Biết O nằm giữa H, K và khoảng cách giữa hai dây AB, CD bằng 14 cm. Tính độ dài dây CD.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 6. Cho đường tròn (O), các dây AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Chứng minh:

a) MO là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây cung AB và CD;

b) $MA = MC$ và $MB = MD$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O;r)$ và $(O;R)$ với $R > r$. Hai dây AB, CD thuộc đường tròn $(O;r)$ sao cho $AB > CD$. Đường thẳng AB cắt $(O;R)$ tại M và N, đường thẳng CD cắt $(O;R)$ tại H và K. Kẻ $OI \perp AB(I \in AB)$, $OJ \perp CD(J \in CD)$. So sánh các độ dài:

a) OI và OJ; b) MN và HK.

Bài 8. Cho $\triangle MNP$ có $\hat{M} > \hat{N} > \hat{P}$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi OH, OI, OK theo thứ tự là khoảng cách từ O đến MN, NP, MP. So sánh các độ dài OH, OI và OK.

--- HẾT ---

Bài 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

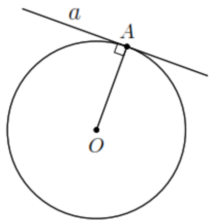
A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

- Cho đường tròn (O;R) và một đường thẳng bất kì. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng đó. Ta có bảng vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Cắt nhau	2	$d < R$
Tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Không giao nhau	0	$d > R$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn



Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

- So sánh d và R rồi kết luận dựa vào phần kiến thức trọng tâm.

Ví dụ 1. Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng):

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5 cm	3 cm	
6 cm		Tiếp xúc nhau
4 cm	8 cm	

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A;3)$ và các trục tọa độ.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3. Cho điểm A cách đường thẳng Δ là 3 cm. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính 3 cm. Chứng minh đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (A).

....

....

Dạng 2: Bài toán liên quan đến tính độ dài
▪ Nối tâm và tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và định lý Py-ta-go.

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M nằm ngoài (O) sao cho $MO=2R$. Kẻ tiếp tuyến MA với (O) (A là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn thẳng MA theo R.

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB=2R$. Từ A kẻ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy điểm C sao cho $AC=R$. Tính độ dài đoạn thẳng BC theo R.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(a;b)$. Xác định điều kiện của a,b để đường tròn $(A;5)$ thỏa mãn:

a) Cắt trục Oy; b) Cắt trục Ox; c) Tiếp xúc với Ox.

Bài 2. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\hat{A}=\hat{D}=90^\circ$). Biết $AB=4$ cm, $BC=13$ cm và $CD=9$ cm. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC. Chứng minh AD tiếp xúc với (O).

....

Bài 3. Cho đường tròn $(O;15\text{ cm})$ có dây $AB=24$ cm. Gọi H là trung điểm của AB, tia OH cắt (O) tại C, tiếp tuyến của (O) tại C cắt OA, OB lần lượt tại E, F. Tính độ dài OH và EF.

....

Bài 4. Cho điểm O cách đường thẳng xy là 5 cm.

a) Chứng minh $(O;13\text{ cm})$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt;

b) Gọi hai giao điểm của (O) với xy là B, C. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

....

....

....

Bài 5. Cho đường tròn tâm O bán kính 6 cm. Điểm A nằm ngoài đường tròn và $OA=10$ cm. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) trong đó B là tiếp điểm. Tính chu vi tam giác ABO.

....

....

....

....

....

....

....

....

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 6. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $B(2;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(B;3)$ và các trục tọa độ.

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 7. Cho điểm B cách đường thẳng a là 5 cm. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính 7 cm. Chứng minh đường thẳng a cắt đường tròn (B) tại hai điểm phân biệt.

....

....

....

....

Bài 8. Cho đường tròn (O) bán kính 6 cm và điểm A cách O là 10 cm. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

....

....

....

....

....

Bài 9. Cho đường tròn tâm O bán kính 3 cm và điểm M nằm trên đường tròn đó. Từ M vẽ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy điểm P sao cho $MP = 4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng PO.

....

--- HẾT ---

Bài 5. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- *Dấu hiệu 1*: Nếu một đường thẳng đi qua một điểm thuộc đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.
- *Dấu hiệu 2*: Nếu khoảng cách từ tâm của một đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn thì đường thẳng đó là tiếp tuyến của đường tròn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

- Để chứng minh đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại tiếp điểm C, ta có thể làm theo một trong hai cách
- Cách 1: Chứng minh C nằm trên (O) và $OC \perp a$ tại C.
- Cách 2: Kẻ $OH \perp a$ tại H và chứng minh $OH = OC = R$.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, kẻ đường cao AH, vẽ đường tròn $(A;AH)$. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn (A).

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $BC = 5$ cm, $CA = 4$ cm, $AB = 3$ cm. Vẽ đường tròn $(C;CA)$. Chứng minh BA là tiếp tuyến của đường tròn (C).

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, các đường phân giác trong $\hat{B}$, $\hat{C}$ cắt nhau tại I. Gọi H là hình chiếu của I trên BC, vẽ đường tròn tâm I, bán kính IH. Chứng minh AB, AC tiếp xúc với (I).

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh

a) Đường tròn tâm O đường kính AI đi qua K;

b) HK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Dạng 2: Bài toán liên quan đến tính độ dài

- Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và sử dụng các công thức về hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài.

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB}=30^\circ$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM=R$. Chứng minh

a) MC là tiếp tuyến của (O);

b) $MC=R\sqrt{3}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AB. Chứng minh

a) CB là tiếp tuyến của đường tròn (A);

b) CD là tiếp tuyến của đường tròn (A).

....

....

....

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Vẽ đường tròn $(M;MH)$. Chứng minh AC tiếp xúc với (M).

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường tròn $(B;BA)$ và đường tròn $(C;CA)$, chúng cắt nhau tại điểm D (D khác A). Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 4. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt (O) tại C. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Cho đường tròn tâm (O), đường kính $AB = 2R$ và d là tiếp tuyến tại B của (O). Trên (O) lấy điểm C sao cho $BC = R$, tia AC cắt d tại E.

a) Tính số đo các góc của tam giác ABC;

b) Tính độ dài BE theo R;

c) Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 6. Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) và đường kính BOD của (O). Đường thẳng qua O và vuông góc với OA cắt AC tại E. Chứng minh

a) $\triangle ABO = \triangle ACO$; b) OE là tia phân giác của $\widehat{COD}$; c) ED là tiếp tuyến của (O).

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ đường tròn $(B;BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ đường tròn tâm O, đường kính AB. Chứng minh DA, BC là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 9. Cho tam giác ABC vông tại B, tia phân giác góc A cắt BC tại D. Vẽ đường tròn tâm D, bán kính DB. Chứng minh AC tiếp xúc với đường tròn (D).

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AD. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh

a) Đường tròn tâm O đường kính AC đi qua D;

b) MD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 11. Cho đường tròn (O,R) có dây AB không là đường kính. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của (O);

b) Cho bán kính của (O) bằng $15\,\text{cm}$ và dây $AB = 24\,\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OC.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 12. Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, vẽ dây AB sao cho $AB = R$. Gọi K là điểm đối xứng với O qua A.

a) Chứng minh KB là tiếp tuyến của (O);

b) Tính độ dài đoạn thẳng KB theo R.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

--- HẾT ---

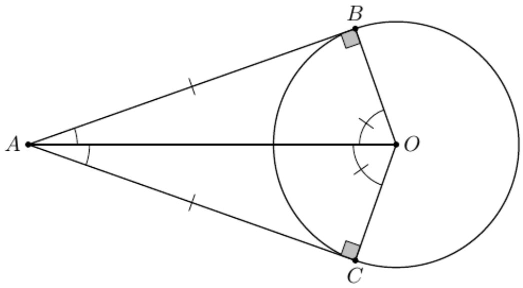
Bài 6. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

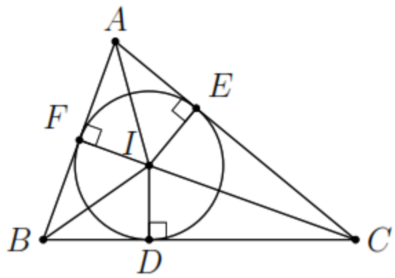
Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua hai điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.



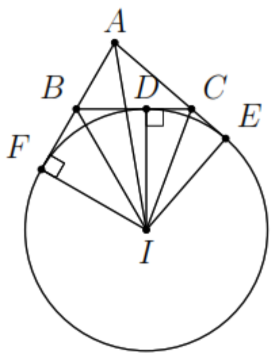
2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.



3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.
- Với mỗi tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp góc A là giao điểm của hai đường phân giác góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác trong của góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc
▪ Vận dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh AO là trung trực của đoạn thẳng BC;

b) Vẽ đường kính CD của (O). Chứng minh $BD \parallel OA$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Điểm M thuộc (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D.

a) Chứng minh $CD = AC + BD$; b) Chứng minh $OC \perp AM$;

c) Gọi E là giao điểm của AM và OC, F là giao điểm của BM và OD. Tứ giác $MEOF$ là hình gì? Tại sao?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng. Tính số đo góc

Vận dụng các kiến thức sau

- Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.
- Tính chất của đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp.
- Hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O,R) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho $OA=2R$. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh tam giác ABC đều;

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC theo R.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn (I,r) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F.

a) Tứ giác $AEIF$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh $BC=BF+CE$;

c) Chứng minh $r=\dfrac{AB+AC-BC}{2}$.

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm M. Qua O kẻ đường thẳng song song với AM cắt BM tại C.

a) Chứng minh $CM = CO$;

b) Kẻ $OD \parallel BM$ với D thuộc AM. Tứ giác $OCMD$ là hình gì? Vì sao?

Bài 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) trong đó B, C là các tiếp điểm.

a) Chứng minh OA là trung trực của đoạn thẳng BC;

b) OA cắt BC ở H. Biết $OB = 4$ cm, $OH = 2$ cm. Tính

i) Chu vi và diện tích tam giác ABC.

ii) Diện tích tứ giác $ABOC$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm D thuộc cung nhỏ BC kẻ tiếp tuyến với (O), tiếp tuyến này cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh chu vi tam giác AMN bằng $2AB$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn $(A;AH)$. Từ B và C kẻ các tiếp tuyến BM, CN với (A) (M, N là các tiếp điểm khác H). Chứng minh

a) $BC = BM + CN$.

b) $\widehat{MBC}+\widehat{NCB}=180^{\circ}$, từ đó suy ra $BM \parallel CN$.

c) M, A, N thẳng hàng.

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax. Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax tại C.

a) Chứng minh OC là trung trực của đoạn thẳng AM;

b) Chứng minh $BM \parallel OC$.

....

....

....

....

....

....

....

Bài 6. Cho đường tròn (O), các điểm B, C thuộc (O) sao cho $\widehat{BOC}=90^{\circ}$. Hai tiếp tuyến tại B và C thuộc (O) cắt nhau ở A.

a) Tứ giác $ABOC$ là hình gì? Tại sao?

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của (O). Tiếp tuyến tại M vủa (O) cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh $DE=BD+CE$;

c) Biết bán kính đường tròn (O) bằng 5 cm. Tính chu vi của tam giác ADE.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 7. Cho đường tròn (O). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến ME, MF (E, F là các tiếp điểm). Biết $OE=3$ cm, $OM=5$ cm.

a) Tính độ dài EF;

b) Tính chu vi và diện tích tam giác MEF.

....

....

Bài 8. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

a) Chứng minh $BC = BP + CN$;

b) Chứng minh $AN = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$;

c) Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm. Tính độ dài CM.

....
....
....
....
....

--- HẾT ---

Bài 7. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

- Hai đường tròn có hai điểm chung gọi là hai đường tròn *cắt nhau*.
- Hai đường tròn chỉ có một điểm chung được gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau*. Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*.
- Hai đường tròn không có điểm chung được gọi là hai đường tròn *không giao nhau*.

2. Tính chất đường nối tâm

- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây cung ấy.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh song song, vuông góc.
▪ Vận dụng tính chất của đường nối tâm; các dấu hiệu chứng minh song song; định lí Py-ta-go; tính chất hình hình thang; tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau…

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc nhau tại A (A nằm giữa O và O'). Một đường thẳng đi qua A cắt $(O;R)$ tại B và cắt $(O';r)$ tại C. Chứng minh $OB \parallel O'C$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ các đường kính AOC, $AO'D$. Chứng minh:

a) $AB \perp BC$. b) C, B, D thẳng hàng. c) $OO' \parallel CD$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
▪ Vận dụng tính chất của đường nối tâm; các dấu hiệu chứng minh song song; định lí Py-ta-go; tính chất hình hình thang; tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau…

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn $(O;10\ \text{cm})$ và $(O';8\ \text{cm})$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Biết $AB = 12$ cm, tính đoạn nối tâm OO'.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với AI, cắt đường tròn (O) và (O') tại C và D ($C, D \neq A$). Chứng minh $AC = AD$.

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại điểm A sao cho O' nằm giữa O và A. Gọi M là một điểm bất kì nằm trên (O) $(M \neq A)$, AM cắt (O') tại B. Chứng minh rằng $O'B \parallel OM$.

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(I;r)$ cắt nhau tại M và N, trong đó I thuộc đường tròn (O) và $R > r$. Kẻ đường kính IOK của đường tròn (O).

a) Chứng minh KM, KN là các tiếp tuyến của (I).

b) Đường vuông góc với MI tại I cắt KN tại J. Chứng minh $JI = JK$.

c) Đường vuông góc với KM tại K cắt IN tại P. Chứng minh ba điểm O, J, P thẳng hàng.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OO', gọi C là điểm đối xứng với A qua I. Chứng minh:

a) $BC \perp AB$. b) $AOCO'$ là hình bình hành. c) $OO'BC$ là hình thang cân.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A (A nằm giữa O và O'). Một đường thẳng đi qua A cắt (O) tại B, cắt (O') tại C. Vẽ tiếp tuyến Bx tại B của (O), vẽ tiếp tuyến Cy tại C của (O'). Chứng minh $Bx \parallel Cy$.

....

....

....

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O;15\ \text{cm})$ và $(O';13\ \text{cm})$ cắt nhau tại hai điểm A,B sao cho O và O' nằm khác phía đối với AB. Biết $AB = 24\ \text{cm}$. Tính độ dài OO'.

....

....

....

....

--- HẾT ---

Bài 8. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN (TT)

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)(R>r)$	**Số điểm chung**	**Hệ thức giữa OO' với R và r**	**Số tiếp tuyến chung**
Hai đường tròn cắt nhau.	2	$R-r<OO'<R+r$	2
Hai đường tròn tiếp xúc nhau ▪ Tiếp xúc ngoài. ▪ Tiếp xúc trong.	1	 $OO'=R+r$ $OO'=R-r$	 1
Hai đường tròn không giao nhau. ▪ Ngoài nhau. ▪ Đựng nhau. ▪ Đồng tâm.	0	 $OO'>R+r$ $OO'<R-r$ $OO'=0$	 4 0 0

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

- Vận dụng lý thuyết về vị trí tương đối của hai đường tròn ở phần kiến thức trọng tâm.

Ví dụ 1. Điền vào ô trống trong bảng, biết rằng hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ có $OO'=d, R>r$.

Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d,R,r	Số tiếp tuyến chung
Đựng nhau			
		$d=R+r$	
Tiếp xúc trong			
Ngoài nhau			
Cắt nhau			

Ví dụ 2. Điền các từ thích hợp vào chỗ trống (…):

a) Tâm của đường tròn có bán kính bằng 2 cm tiếp xúc ngoài với đường tròn ($O;3$ cm) nằm trên ...

....

b) Tâm của đường tròn có bán kính bằng 5 cm tiếp xúc trong với đường tròn ($O;8$ cm) nằm trên …

....

Dạng 2: Các bài toán liên quan đến hai đường tròn tiếp xúc nhau

- Vận dụng tính chất đường nối tâm, tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau; tính chất tiếp tuyến chung của hai đường tròn; hệ thức lượng trong tam giác vuông…

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi MN là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn với $M \in (O)$ và $N \in (O')$.

a) Tính số đo $\widehat{MAN}$.

b) Tính độ dài MN biết $OA = 9$ cm; $O'A = 4$ cm.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(O;OA)$ và đường tròn tâm I có đường kính OA.

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở M. Chứng minh $AM = MD$.

....

....

....

....

....

....

....

....

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đường tròn $(O;9$ cm$)$ và $(O';3$ cm$)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai bán kính OB và $O'C$ song song với nhau và thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ OO'.

a) Tính số đo của $\widehat{BAC}$.

b) Gọi I là giao điểm của BC và OO'. Tính độ dài OI.

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(R < OM < 3R)$. Vẽ đường tròn $(M;2R)$.

a) Hai đường tròn (O) và (M) có vị trí tướng đối như thế nào với nhau?

b) Gọi K là một giao điểm của hai đường tròn trên. Vẽ đường kính KOH của đường tròn (O). Chứng minh $NH = NM$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là hình chiếu của H trên AB, E là hình chiếu của H trên AC. Gọi (O) là tâm đường tròn kính HB, (O') là tâm đường tròn đường kính HC. Chứng minh:

a) Điểm D thuộc đường tròn (O), điểm E thuộc đường tròn (O');

b) Hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài;

c) AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó;

d) $AH = DE$;

e) DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O');

f) Diện tích của tứ giác $DEOO'$ bằng nửa diện tích của tam giác ABC.

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, $AO'C$. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn, $D \in (O)$ và $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính số đo của $\widehat{DAE}$.

b) Tứ giác $ADME$ là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Bài 5. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Dây AB của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C và D. Chứng minh $AC = BD$.

....

....

....

....

--- HẾT ---

Bài. ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

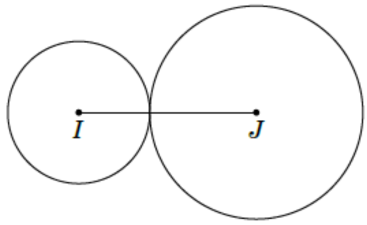
- Xem lại kiến thức trọng tâm từ bài 1 đến bài 8.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [TS10 Cần Thơ, 2018-2019]

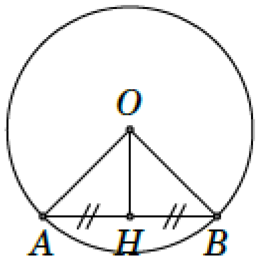
Cho hai đường tròn $(I;2\text{ cm})$ và $(J;3\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài nhau (như hình bên dưới). Độ dài đoạn nối IJ bằng



A. 1 cm. **B.** 5 cm.
C. 10 cm. **D.** 13 cm.

Câu 2: [TS10 Phú Yên, 2018-2019]

Cho đường tròn tâm O đường kính 10 cm. Gọi H là trung điểm của dây AB (hình bên). Tính độ dài đoạn OH, biết $AB = 6$ cm.



A. $OH = 4$ cm. **B.** $OH = 8$ cm.
C. $OH = 16$ cm. **D.** $OH = 64$ cm.

Câu 3: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho đường tròng $(O;2\text{ cm})$, hai điểm A, B thuộc đường tròn và sđ $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$. Độ dài d của dây cung AB là bao nhiêu?

A. $d = 2$ cm. **B.** $d = 4$ cm. **C.** $d = 5$ cm. **D.** $d = 3$ cm.

Câu 4: [TS10 Phú Thọ, 2018-2019]

Cho đường tròn tâm I, bán kính $R = 5$ cm và dây cung $AB = 6$ cm. Tính khoảng cách d từ I tới đường thẳng AB.

A. $\text{d} = 4$ cm. **B.** $\text{d} = \sqrt{34}$ cm. **C.** $\text{d} = 2$ cm. **D.** $\text{d} = 1$ cm.

Câu 5: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho đường tròn $(O,5\text{ cm})$ và dây cung $AB = 8$ cm. Tính khoảng cách d từ tâm O đến dây cung AB.

A. $d = 3$ cm. **B.** $d = 6$ cm. **C.** $d = 4$ cm. **D.** $d = 5$ cm.

Câu 6: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho đường tròn $(O;15\text{cm})$, dây $AB = 24$ cm. Một tiếp tuyến của đường tròn song song với AB cắt các tia OA, OB theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài EF.

A. $EF = 40$ cm. **B.** $EF = 38$ cm. **C.** $EF = 36$ cm. **D.** $EF = 42$ cm.

Câu 7: [TS10 Cần Thơ, 2018-2019]
Trong một đường tròn, xét các khẳng định sau:

(I): Đường kính là dây cung lớn nhất.

(II): Dây nhỏ hơn thì gần tâm hơn.

(III): Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

(IV): Tiếp tuyến vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

Số khẳng định đúng là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

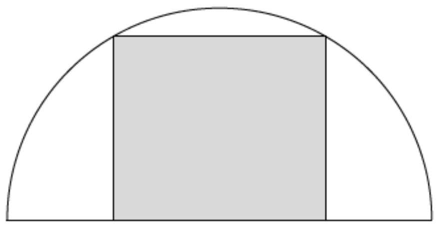
Câu 8: [TS10 Hưng Yên, 2018-2019]
Có hai đường tròn $(O;4$ cm) và đường tròn $(I;2$ cm), biết $OI = 6$ cm. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 9: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]
Cho hai đường tròn (O; 4 cm) và (O'; 3 cm) có $OO' = 5$ cm. Hai đường tròn trên cắt nhau tại A và B. Tính độ dài AB.

A. $AB = 3,2$ cm. **B.** $AB = 4,8$ cm. **C.** $AB = 2,4$ cm. **D.** $AB = 3,6$ cm.

Câu 10: [TS10 Hưng Yên, 2018-2019]
Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính 1m, người ta cắt ra một hình chữ nhật (phần tô đậm như hình vẽ).



Phần hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể cắt được là

A. $1,6\text{m}^2$. **B.** $0,5\text{m}^2$. **C.** 1m^2. **D.** 2m^2.

Câu 11: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]
Cho tam giác ABC, biết $\widehat{B} = 60°$, $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC = 2\sqrt{7}$ cm. **B.** $AC = \sqrt{52}$ cm. **C.** $AC = 4\sqrt{5}$ cm. **D.** $AC = 2\sqrt{3}$ cm.

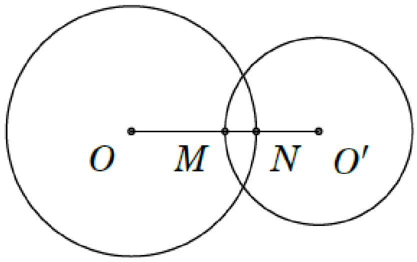
Câu 12: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]
Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 4$ cm. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt Ax, By theo thứ tự ở D, C. Tính diện tích của hình thang $ABCD$, biết chu vi của nó bằng 14 cm.

A. $S=20\ \text{cm}^2$. **B.** $S=10\ \text{cm}^2$. **C.** $S=12\ \text{cm}^2$. **D.** $S=16\ \text{cm}^2$.

Câu 13: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]
Cho tam giác ABC có $AB=20$ cm, $BC=12$ cm, $CA=16$ cm. Tính chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho

A. 16π cm. **B.** 20π cm. **C.** 13π cm. **D.** 8π cm.

Câu 14: [TS10 Phú Yên, 2018-2019]
Cho đường tròn $(O,6\text{ cm})$ và đường tròn $(O',5\text{ cm})$ có đoạn nối tâm $OO'=8$ cm. Biết đường tròn (O) và (O') cắt OO' lần lượt tại N, M (hình bên). Tính độ dài MN.



A. $MN=4$ cm. **B.** $MN=3$ cm.
C. $MN=2$ cm. **D.** $MN=1$ cm.

Câu 15: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]
Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài dây cung chung CF của đường tròn đường kính BE và đường tròn đường kính CD.

A. $CF=a$. **B.** $CF=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $CF=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $CF=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

II. TỰ LUẬN

Bài 1. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax, By. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại C, D.

a) Chứng minh $CD=AC+BD$.

b) Tính số đo góc $\widehat{COD}$.

c) Chứng minh $AC\cdot BD=R^2$.

d) Vẽ đường tròn tâm I, đường kính CD. Chứng minh AB là tiếp tuyến của (I).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh OA là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

c) Biết $OA = 10$ cm, $OB = 6$ cm. Tính độ dài đoạn BC.

d) Đường tròn (O) cắt đoạn OA tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC $(B\in(O), C\in(O'))$ với hai đường tròn. Tiếp tuyến chung tại A của (O) và (O') cắt BC tại M.

a) Chứng minh $MA=MB=MC$ và $\widehat{BAC}=90^\circ$.

b) Tính số đo của $\widehat{OMO'}$.

c) Chứng minh OO' tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

d) Biết $R=9$ cm, $R'=4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng BC.

....

....

....

....

....

Bài 4. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Điểm C nằm trên đường tròn (C khác A, B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Vẽ đường tròn tâm I đường kính HA và đường tròn tâm K đường kính HB. CA cắt (I) tại M (khác A), CB cắt (K) tại N (khác B).

a) Tứ giác $CMHN$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của (I) và (K).

c) Chứng minh AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN.

d) Biết $HA = \frac{R}{2}$. Tính diện tích tứ giác $IMNK$ theo R.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến Ax. Điểm C nằm trên nửa đường tròn sao cho $AC = R$.

a) Tính số đo các góc của tam giác ABC.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt Ax tại D. Chứng minh OD song song với BC.

c) Tia BC cắt Ax tại E. Chứng minh $DE = DA$.

d) Kẻ $CH \perp AB$ với H thuộc AB, BD cắt CH tại I. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Bài 6. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến d và d' với (O). Đường thẳng Δ thay đổi qua O cắt d tại M và cắt d' tại P. Từ O vẽ một tia vuông góc với MP cắt d' tại N.

a) Chứng minh $OM = OP$ và tam giác MNP cân.

b) Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên MN. Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Chứng minh $MN = AM + BN$.

d) Chứng minh $AM \cdot BN$ không đổi khi đường thẳng Δ quay quanh O.

....

....

....

....

....

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và điểm C là một điểm nằm trên (O) (C khác A, B). Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AC tại K và cắt (O) tại I (I khác B). Gọi D là giao điểm của AI và BC.

a) Chứng minh tam giác ABD cân.

b) Chứng minh DK vuông góc với AB.

c) Gọi E là điểm đối xứng của K qua I. Tứ giác $AEDK$ là hình gì? Vì sao?

d) Chứng minh EA là tiếp tuyến của (O).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài 8. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC $(B\in(O), C\in(O'))$ với hai đường tròn. Tiếp tuyến chung ngoài tại A của (O) và (O') cắt BC tại D.

a) Chứng minh $\triangle ODO'$ là tam giác vuông.

b) Gọi E là giao điểm của OD và AB, gọi F là giao điểm của $O'D$ và AC. Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh BC tiếp xúc với đường tròn đường kính OO'.

d) Chứng minh $BC = 2\sqrt{R\cdot R'}$.

....

....

....

....

--- HẾT ---