ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VIÈTE TRONG CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

Tạp chí và tư liệu toán học sưu tầm và tổng hợp
Hướng tới VMO 2020

Ngày 14 tháng 12 năm 2019

Tóm tắt nội dung

Trong chương trình toán lớp 9, chúng ta đã được tìm hiểu đến một định lý cực kì nổi tiếng đó là định lý Viète, tuy nhiên ứng dụng của nó không chỉ có là biểu diễn mối quan hệ của các nghiệm trong phương trình đa thức, mà còn ứng dụng trong nhiều mảng khác như số học, đa thức,... Ở bài viết này, chúng tôi sẽ giới thiệu cho bạn đọc một số các bài toán số học có sử dụng định lý Viète và nâng cao hơn nữa là phương pháp bước nhảy Viète - *Vieta Jumping* - để giải quyết các bài toán số học hay và khó. Trong bài viết có tham khảo các tư liệu trong và ngoài nước, các bạn xem ở mục tài liệu tham khảo ở cuối bài viết. Mọi ý kiến thắc mắc, đóng góp vui lòng gửi về địa chỉ.

1. **Doãn Quang Tiến.** fb.com/profile.php?id=100016406718327
2. **Nguyễn Minh Tuấn.** fb.com/tuankhmt.fpt

1 Nhà toán học Francois Viète.

Francois Viète (1540-1603) là nhà toán học Pháp vĩ đại. Ông là người đầu tiên đưa ra các kí hiệu bằng chữ, do thế, người ta gọi ông là người cha của môn Đại số. Tên tuổi của ông gắn liền với một định lí về nghiệm số của phương trình mà học sinh lớp 9 đều biết đó là định lí Viète, nhưng công lao của ông to lớn hơn nhiều.

Ông vốn là một trạng sư, từng làm “cố vấn cơ mật” cho các triều vua Henry III và Henri IV. Giữa những bộn rộn của công việc ở cung đình, hễ có ít phút rảnh rỗi là ông lại giải trí bằng cách... nghiên cứu Toán học! Trong cuộc chiến tranh Pháp... Tây Ban Nha thời ấy, quân Tây Ban Nha thường liên lạc với những kẻ nội phản trong nước Pháp bằng các mật thư. Vì được viết bằng các mật mã gồm toàn các chữ số, nên các mật thư ấy hầu như không thể khám phá được.

Biết vị “cố vấn” Viète thích toán, vua Henry III đã nhờ ông thử dò tìm “chìa khóa” các mật thư này. Nhận lời, suốt hai tuần lễ, ông làm việc quên ăn quên ngủ. Cuối cùng, chính Viète đã xé tung tấm màn bí mật: ông đã tìm ra quy luật thay thế các chữ và số trong cách viết mật thư. Đọc được các mật thư, quân Pháp đã làm thất bại hoàn toàn những mưu đồ của Tây Ban Nha. Về phía địch, chúng gắng dò tìm nguyên nhân: cuối cùng chúng biết được những kí hiệu đã bị phơi trần, dù nhiều lần thay đổi mật mã, và kẻ tìm ra bí mật là Francois Viète! Quân Tây Ban Nha tuyên bố Viète là kẻ tử thù và đã xử án hỏa thiêu vắng mặt ông, nhưng bản án dã man đó không bao giờ thực hiện được. Không chỉ quan tâm sâu sắc đến Đại số; nghiên cứu các phương trình, Viète còn nghiên cứu cả Hình học và Lượng giác. Ông cũng đã khảo cứu kĩ lưỡng nhiều công trình của các nhà toán học thời cổ.

Phần lớn cuộc đời của Viète bị các công việc pháp lí của nghề trạng sư chiếm mất nên khó có thể tưởng tượng ông đã lấy đâu ra thời gian để làm nên những công trình toán học của mình. Bí quyết của ông chính là khả năng tập trung cao độ khi làm việc. Người ta còn kể lại, lúc gặp được một vấn đề thú vị, ông có thể ngồi ở bàn làm việc suốt ba ngày đêm liền.

2 Định lý Viète.

Định lý Viète được trình bày trong sách giáo khoa toán 9 - tập 2, cho ta mối quan hệ giữa các nghiệm của phương trình bậc hai và các hệ số của nó. Sau đây ta sẽ nhắc lại nó.

Định lý Viète. Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì tổng và tích của chúng là

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ngược lại nếu có hai số x_1 và x_2 thỏa mãn $S = x_1 + x_2$ và $P = x_1.x_2$ thì x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$.

Chú ý rằng trong khi giải toán, đôi khi ta không quan tâm tới giá trị của x_1 và x_2 mà chỉ cần quan tâm đến 2 giá trị tổng và tích của chúng, từ đó ta có những đánh giá cần thiết. Ngoài ra cũng từ định lí Viète ta nhận thấy nếu một phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm x_1 thì nó sẽ có thêm một nghiệm x_2 nữa. Ngoài ra ta có thể mở rộng định lý cho phương trình đa thức bậc n bất kì. Cho phương trình $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0, a_n \neq 0$. Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n nghiệm của phương trình trên, khi đó thì

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Nhân toàn bộ vế phải ra, chúng ta sẽ có công thức Viète, được phát biểu như sau

$$\begin{cases} a = a_n \\ -a(x_1 + x_2 + ... + x_n) = a_{n-1} \\ \cdots \\ \cdots \\ (-1)^{n-1}a(x_1x_2...x_{n-1} + x_1x_2...x_{n-2}x_n + ... + x_2x_3...x_n) = a_1 \\ (-1)^n a(x_1x_2...x_n) = a_0 \end{cases}$$

và trong hàng k bất kỳ, vế phải của đẳng thức là $a_{n-k}a_{n-k}$ còn vế trái được tính theo công thức $(-1)^k a$ *nhân với tổng của các tích từng cụm* $(n-k)$ *các nghiệm của phương trình trên.* ∇

3 Các bài toán cơ bản.

Sau đây ta sẽ đi tìm hiểu một vài ví dụ trước khi đi tìm hiểu về phương pháp bước nhảy Viète.

Bài toán 1. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + m + 2 = 0$ có các nghiệm đều nguyên.

Lời giải

Lời giải 1. Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta = m^2 - 4\,(m+2) \geqslant 0$. Phương trình đầu có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là tồn tại số nguyên k sao cho $m^2 - 4\,(m+2) = k^2$. Ta có

$$m^2 - 4\,(m+2) = k^2 \Leftrightarrow (m - 2 + k)\,(m - 2 - k) = 12$$

Đến đây ta có một chú ý rằng, theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = m$, do vậy mà m sẽ là số nguyên. Từ đây do m và k là các số nguyên nên ta tìm được $m = -2$ hoặc $m = 6$. Ta xét các trường hợp.

1. Với $m = -2$ thì ta được phương trình $x^2 + 2x = 0$, khi đó tìm được hai nghiệm nguyên là $x_1 = 0$ và $x_2 = -2$.

2. Với $m = 6$ thì ta được phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$, khi đó ta được hai nghiệm nguyên là $x_1 = 2$ và $x_2 = 8$.

Như vậy đến đây bài toán đã được giải quyết. $\square$

Lời giải 2. Theo định lý Viète với hai nghiệm $x_1; x_2$ thì ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = m + 2 \end{cases} \quad (1)$$

Do đó nếu ta tìm được các nghiệm nguyên của phương trình thì ta sẽ tìm được giá trị của m. Điều này làm ta có ý tưởng giải phương trình nghiệm nguyên 2 ẩn x_1 và x_2. Từ (1) ta được

$$x_1.x_2 - (x_1 + x_2) = 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3$$

Khi đó $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ là các ước của 3, lại có $3 = 1.3 = -1.(-3)$. Đến đây việc tìm hai nghiệm $x_1; x_2$ hoàn toàn đơn giản và qua đó ta tìm được các giá trị m là $m = -2$ và $m = 6$. $\square$

! **Nhận xét.** Ở lời giải 1 sẽ có một số học sinh mắc sai lầm là chưa chỉ ra được m là số nguyên vì đề bài không có đề cập. Do đó ta phải sử dụng định lí Viète để chỉ ra điều này.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình $\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

Lời giải

Trước tiên ta sẽ đưa bài toán về việc giải phương trình nghiệm nguyên. Ta biến đổi

$$\begin{cases} xy + (y + x)z = 8 \\ x + y = 5 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + (5 - z)z = 8 \\ x + y = 5 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 - (5 - z)z \\ x + y = 5 - z \end{cases}$$

Theo định lí Viète thì x và y là hai nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 - (5 - z)t + 8 - (5 - z)z = 0$, trong đó z là tham số. Phương trình có nghiệm thì $\Delta \geqslant 0$ hay ta được

$$3z^2 - 10z + 7 \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant z \leqslant \frac{7}{3}$$

Do z nguyên nên $z = 1$ hoặc $z = 2$. Ta xét các trường hợp sau.

- Với $z = 1$, khi đó phương trình trở thành $t^2 - 4t + 4 = 0$, đến đây ta tìm được $x = y = 2$ thỏa mãn.
- Với $z = 2$ khi đó phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0$, đến đây ta tìm được $x = 2; y = 1$ hoặc $x = 1; y = 2$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên là $(x; y; z) = (2; 2; 1), (1; 2; 2), (2; 1; 2)$. $\square$

Bài toán 3. Giải phương trình $x^2 - mx + n = 0$, biết phương trình có hai nghiệm nguyên dương phân biệt và m, n là hai số nguyên tố.

Lời giải

Với bài toán này nếu dùng công thức nghiệm để xác định nghiệm của phương trình thì sẽ gây cho ta nhiều khó khăn do phương trình có đến hai tham số. Do vậy ta sẽ sử dụng định lý Viète. Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho $(x_1 < x_2)$. Ta biết rằng một số nguyên tố khi viết thành tích hai số thì một thừa số là 1 và một thừa số là chính nó. Để ý ta lại thấy theo định lí Viète thì $x_1x_2 = n$. Do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng định lí Viète giả quyết bài toán. Thật vậy theo định lí Viète ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = n \end{cases}$$

Do n là một số nguyên tố nên ta được $x_1 = 1; x_2 = n$, suy ra $m = n + 1$, do vậy m và n là hai số tự nhiên liên tiếp nên ta được $n = 2; m = 3$, thử lại ta thấy tỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 4. Cho phương trình $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$, trong đó m và n là các tham số nguyên. Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số.

Lời giải

Để chứng minh được $m^2 + n^2$ là hợp số thì một suy nghĩ hết sức tự nhiên đó là xây dựng biểu thức $m^2 + n^2$ theo các nghiệm của phương trình đề rồi từ đó phân tích biểu thức nghiệm thành nhân tử. Có hai ý tưởng để xây dựng biểu thức $m^2 + n^2$ đó là áp dụng công thức nghiệm để tìm các nghiệm của phương trình rồi từ đó tính $m^2 + n^2$ hoặc áp dụng định lí Viète. Rõ ràng trong hai ý tưởng đó việc áp dụng định lí Viète giúp ta xây dựng biểu thức nghiệm mà không chứa các căn bậc hai.
Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên, theo định lí Viète ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{2} \\ x_1.x_2 = n + 4 \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$m^2 + n^2 = (2x_1 + 2x_2)^2 + (x_1x_2 - 4)^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2x_1^2 + x_2^2x_1^2 + 16 = \left(x_1^2 + 4\right)\left(x_2^2 + 4\right)$$

Do $x_1; x_2$ là các số nguyên nên $x_1^2 + 4; x_2^2 + 4$ là các số nguyên dương lớn hơn 1.
Từ đó ta được $m^2 + n^2$ là hợp số. □

!

Nhận xét. Xét $2m = a + b; 2n = a - b$, khi đó từ $m^2 + n^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$, ta có bài toán sau.

Bài toán. Cho phương trình $4x^2 + (a + b)x + 2(a - b) + 16 = 0$, trong đó a và b là các tham số nguyên. Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên, chứng minh rằng $\dfrac{a^2 + b^2}{2}$ là hợp số.

Bài toán tương tự. Giả sử phương trình bậc hai $x^2 + ax + b + 1 = 0$, trong đó a, b là các tham số nguyên, đồng thời $b \neq -1$ có hai nghiệm đều là số nguyên khác 0, chứng minh rằng $a^2 + b^2$ là hợp số.

Bài toán 5. Tìm các số nguyên dương a và b, trong đó $(a \geqslant b)$ sao cho phương trình bậc hai $x^2 - abx + a + b = 0$ có các nghiệm đều là số nguyên.

Lời giải

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta = (ab)^2 - 4(a + b) \geqslant 0$, giả sử phương trình có hai nghiệm nguyên $x_1; x_2\,(x_1 \leqslant x_2)$, khi đó theo định lí Viète ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = ab \\ x_1.x_2 = a + b \end{cases}$$

Do a và b là các số nguyên dương nên suy ra các nghiệm $x_1; x_2$ cũng là các số nguyên dương. Ta chú ý rằng với hai số lớn hơn 2 thì tích của chúng bao giờ cũng lớn hơn tổng của chúng. Do đó ta nghĩ đến chứng minh một trong bốn số dương trên không vượt quá 2.
Thật vậy, nếu $a > 2; b > 2$ thì ta có $ab > 2a; ab > 2b$ nên $2ab > 2(a + b)$ hay $ab > a + b$.
Nếu cả bốn số dương $x_1; x_2; a; b$ đều lớn hơn 2 thì $x_1.x_2 > x_1 + x_2$ và $ab > a + b$, khi đó định lí Viète trên không thể xảy ra. Như vậy trong bốn số dương $x_1; x_2; a; b$ tồn tại ít nhất một số không vượt quá 2. Theo giả thiết và theo cách chọn hai nghiệm $x_1; x_2$ thì trong hai số x_1 và b có ít nhất một số không lớn hơn 2. Do vai trò của hai số x_1 và b là như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $0 < x_1 \leqslant 2$, đến đây ta xét từng trường hợp của x_1.

1. Nếu $x_1 = 1$, khi đó từ $\begin{cases} x_1 + x_2 = ab \\ x_1.x_2 = a + b \end{cases}$ ta suy ra $\begin{cases} 1 + x_2 = ab \\ x_2 = a + b \end{cases}$, từ đó ta được $ab - a - b = 1$, suy ra $(a-1)(b-1) = 2$. Chú ý $a \geqslant b$ nên từ phương trình trên ta được $a = 3; b = 2$, khi đó ta tìm được $x_2 = 3$.

2. Nếu $x_1 = 2$, tương tự như trường hợp trên ta tìm được các cặp số nguyên dương $(a;b)$ thỏa mãn là $(a;b) = (5;1), (2;2)$.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Bài toán 6. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho tồn tại số tự nhiên m thỏa mãn

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{m^2+1}{m+1}$$

Lời giải

Quan sát hệ thức $\dfrac{pq}{p+q} = \dfrac{m^2+1}{m+1}$ thì hai đại lượng pq và $p+q$ làm ta liên tưởng đến hệ thức Viète. Nếu $\dfrac{m^2+1}{m+1}$ là phân số tối giản thì từ hệ thức của bài toán ta được

$$\begin{cases} p + q = m + 1 \\ pq = m^2 + 1 \end{cases}$$

Còn nếu $\dfrac{m^2+1}{m+1}$ chưa tối giản thì chỉ cần rút gọn ta cũng được một hệ điều kiện tương tự. Vấn đề là ta cần kiểm tra xem phân số $\dfrac{m^2+1}{m+1}$ có rút gọn được hay không.

- Nếu $p = q$ thì từ $\dfrac{pq}{p+q} = \dfrac{m^2+1}{m+1}$ ta được

$$p = \frac{2\left(m^2+1\right)}{m+1} = 2m - 2 + \frac{4}{m+1}$$

  Do $m \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $(m+1) \mid 4 \Rightarrow m = 0; m = 1; m = 3$. Từ đó ta tìm được $p = 2; p = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $p \neq q$ thì pq và $p+q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p+q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q. Gọi r là một ước chung của m^2+1 và $m+1$. Khi đó ta có

$$r \mid [(m+1)(m-1)] \Rightarrow r \mid \left(m^2 - 1\right)$$

  Do đó $r \mid \left[\left(m^2+1\right) - \left(m^2-1\right)\right] \Rightarrow r \mid 2$ suy ra $r = 1$ hoặc $r = 2$.

  1. Với $r = 1$ suy ra $\begin{cases} p + q = m + 1 \\ pq = m^2 + 1 \end{cases}$, khi đó p và q là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - (m+1)x + m^2 + 1 = 0$$

     Ta có $\Delta = -3m^2 + 2m - 3 = -(m-1)^2 - \left(2m^2 + 2\right) < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

  2. Với $r = 2$ suy ra $\begin{cases} 2pq = m^2 + 1 \\ 2(p+q) = m + 1 \end{cases}$, khi đó p và q là hai nghiệm của phương trình

$$2x^2 - (m+1)x + m^2 + 1 = 0$$

     Ta có $\Delta = -7m^2 + 2m - 7 = -(m-1)^2 - \left(6m^2 + 6\right) < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy bộ các số nguyên tố cần tìm là $(p;q) = (2;2), (5;5)$. □

Bài toán 7. Tìm số nguyên tố p để $p^2 - p + 1$ là lập phương của một số nguyên tố khác.

Lời giải

Do p là số nguyên tố nên ta được $p \mid q-1$ hoặc $p \mid q^2+q+1$. Đến đây ta sẽ chứng minh $p \mid q-1$ không xẩy ra. Thật vậy. nếu $p \mid q-1$ thì ta được $q-1 = kp, k \in \mathbb{N}$, do đó $q = kp+1$. Khi đó từ $p^2 - p + 1 = q^3$ ta được

$$p^2 - p + 1 = (kp+1)^3 \Leftrightarrow p^2 - p + 1 = k^3p^3 + 3k^2p^2 + 3kp + 1$$

Nhận thấy với $k \geqslant 2$ thì hiển nhiên

$$p^2 - p + 1 < k^3p^3 + 3k^2p^2 + 3kp + 1$$

Từ đó suy ra được $k \leqslant 1$.

1. Với $k = 0$, khi đó ta được $p^2 - p + 1 = 1 \Leftrightarrow p(p-1) = 0$, điều này vô lí do p là số nguyên tố.
2. Với $k = 2$, khi đó ta được
$$p^3 - 2p^2 + 4p = 0 \Leftrightarrow p^2 - 2p + 4 = 0$$
không tồn tại p thỏa mãn.

Vậy với $p \mid q-1$ thì không tồn tai số nguyên tố p thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Như vậy ta phải có $p \mid q^2+q+1$, khi đó $(p, q-1) = 1$ và có $(q-1) \mid p(p-1)$ nên $q-1 \mid p-1$. Đặt $p = (q-1)k+1$ với $k \in \mathbb{N}$, khi đó từ $p \mid q^2+q+1$ ta suy ra được $\dfrac{q^2+q+1}{(q-1)k+1}$ là số nguyên dương hay ta được

$$\frac{q^2+qk+k}{qk-k+1} = q + 2 + \frac{3k-q-2}{qk-k+1}$$

là số nguyên dương. Từ đó ta phải có $|3k-q-2| \geqslant qk-k+1$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $3k-q-2 \geqslant qk-k+1$, khi đó ta được $k(4-q) \geqslant q+3$. Từ đó nếu $q \geqslant 4$ thì ta được $k(4-q) < q+3$, điều này mâu thuẫn. Do đó ta suy ra được $q < 4$, mà ta lại có $q > 1$ nên $q = 2$ hoặc $q = 3$.
  1. Khi $q = 2$ thì từ $p^2 - p + 1 = q^3$ ta được $p(p-1) = 7$, phương trình vô nghiệm.
  2. Khi $q = 3$ thì từ $p^2 - p + 1 = q^3$ ta được $p(p-1) = 26$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $3k-k-2 \leqslant -(qk-k+1)$ thì ta suy ra được
$$2 + q - 3k \geqslant qk - k + 1 \Rightarrow k(q+2) \leqslant q+1$$
Điều này vô lí.
- Nếu $3k-q-2 = 0 \Rightarrow q = 3k-2$, khi đó từ $p = (q-1)k+1$ ta được $p = 3k(k-1)+1 = 3k^2-3k+1$ và đồng thời có
$$q^2 + q + 1 = (3k-2)^2 + (3k-2) + 1 = 9k^2 - 9k + 3$$
Từ đó suy ra
$$\frac{q^2+q+1}{p} = \frac{9k^2-9k+3}{3k^2-3k+1} = 3$$
Do đó từ $p(p-1) = (q-1)\left(q^2+q+1\right)$ ta được $p-1 = 3(q-1)$ nên suy ra ra được $(k-1)(k-3) = 0$. Từ đó ta được $k = 1$ hoặc $k = 3$.
  1. Với $k = 1$ thì $p = q$, khi đó ta được $p^2 - p + 1 = p^3 \Leftrightarrow p\left(p^2 - p + 1\right) = 1$, điều này vô lí.
  2. Với $k = 3$ thì $p = 3q-2$, khi đó ta được $9q^2 - 15q + 7 = q^3 \Leftrightarrow (q-1)(q-7) = 0$ nên $q = 1$ hoặc $q = 7$. Thử trực tiếp ta được $q = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta được $p = 19$.

Vậy $p = 19$ là số nguyên tố duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 8. Cho $x = a + b - c; y = c + a - b; z = b + c - a$ với a, b, c là các số nguyên tố. Giả sử rằng $x^2 = y$ và $\sqrt{z} - \sqrt{y}$ là bình phương của một số nguyên tố. Tìm giá trị của biểu thức

$$T = (a + 2)(b - 10)(c + 2)$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\begin{cases} 2a = x + y \\ 2b = x + z \\ 2c = y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = x + x^2 \\ 2b = x + z \\ 2c = x^2 + z \end{cases}$$

Xét phương trình bậc 2 là $x^2 + x = 2a \Leftrightarrow x^2 + x - 2a = 0$. Dễ thấy $\Delta = 8a + 1 > 0$ nên nên phương trình có hai nghiệm phân biệt. Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1 và x_2. Như vậy nếu một trong hai nghiệm là số nguyên thì nghiệm còn lại cũng nguyên. Chú ý rằng a là số nguyên tố nên ta nghĩ đến sử dụng định lí Vièete để xác định các nghiệm. Theo định lí Vièete ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1.x_2 = -2a \end{cases}$$

Do 2 và a là số nguyên tố nên từ $x_1.x_2 = -2a$ ta được $x_1 \in \{-2; -a; 2; a\}$. Ta xét các trường hợp sau.

- Nếu $x_1 = -2$, khi đó ta tìm được $a = 1$ không phải là số nguyên tố.
- Nếu $x_1 = -a$, khi đó ta được $a^2 - 3a = 0$, do a là số nguyên tố nên $a = 3$. Từ đó ta tìm được hai nghiệm của phương trình là $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$.
- Nếu $x_1 = 2$, khi đó ta tìm được $a = 3$, từ đó ta tìm được hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = -3$.
- Nếu $x = a$, khi đó ta được $a^2 - a = 0$ nên $a = 0$ và $a = 1$, loại vì không phải là số nguyên tố.

Vậy phương trình trên có hai nghiệm nguyên là $x = 2$ và $x = -3$, đồng thời ta có $a = 3$. Bây giờ ta sẽ xác định các số nguyên tố b, c ứng với mỗi trường hợp.

1. Với $x = 2$ khi đó ta được $y = 4$. Do đó $\sqrt{z} - 2 = p^2$ với p là số nguyên tố. Do x là số chẵn và $2b = x + z$ nên z là số chẵn. Khi đó p là số chẵn, dẫn đến $p = 2$. Khi đó ta được $z = 36$, suy ra $c = 20$, loại do c không phải là số nguyên tố.
2. Với $x = -3$, khi đó ta được $y = 9$. Do đó $\sqrt{z} - 3 = p^2$ với p là số nguyên tố. Do x là số lẻ và $2b = x + z$ nên z là số chẵn. Khi đó p là số chẵn, dẫn đến $p = 2$. Khi đó ta được $z = 49$, suy ra $c = 29$ và $b = 23$ là các số nguyên tố.

Như vậy ta tính được $T = (a + 2)(b - 10)(c + 2) = (3 + 2)(23 - 10)(29 + 2) = 2015$. □

Bài toán 9. Tìm các cặp số nguyên $(a; b)$ sao cho hai số $a^2 + 4b$ và $b^2 + 4a$ đều là số chính phương.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh các cặp số sau thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$(a; b) = (0; k^2), (k^2; 0), (-4; -4), (-5; -6), (-6 - 5), (k; 1 - k), (1 - k, k), k \in Z$$

Thật vậy, do vai trò của a và b như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $|a| \geqslant |b|$.

- Nếu $b = 0$, khi đó để $a^2 + 4b$ và $b^2 + 4a$ đều là số chính phương thì $a = k^2$ với k là số nguyên.
- Nếu $b \neq 0$, khi đó biểu thức $a^2 + 4b$ là ta liên tưởng đến biệt thức Δ của phương trình $x^2 + ax - b = 0$.

Do $\Delta = a^2 + 4b$ là số chính phương nên phương trình trên sẽ có hai nghiệm nguyên là x_1 và x_2. Theo định lí Viète ta được

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} \geqslant \left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| \geqslant 1$$

Từ đó suy ra một trong hai nghiệm nguyên của phương trình trên, chẳng hạn x_1 thỏa mãn $|x_1| \leqslant 2$. Từ đó ta được $x_1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau.

1. Nếu $x_1 = 2$, khi đó từ phương trình $x^2 + ax - b = 0$ ta được $b = 2a + 4$. Suy ra

$$b^2 + 4a = (2a + 4)^2 + 4a = 4a^2 + 20a + 16 = (2a + 5)^2 - 9$$

là số chính phương. Đặt $(2a + 5)^2 - 9 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$, từ đó ta được $(2a + 5 - y)(2a + 5 + y) = 9$. Lúc này tìm được $a = -4$ và $a = -1$.

- Với $a = -4$, khi đó $a = -4$. Từ đó ta được $(a; b) = (-4; -4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Với $a = -1$, khi đó $b = 2$. Trường hợp này loại do không thỏa mãn $|a| \geqslant |b|$.

2. Nếu $x_1 = -2$, khi đó từ phương trình $x^2 + ax - b = 0$ ta được $b = 4 - 2a$. Suy ra

$$b^2 + 4a = (4 - 2a)^2 + 4a = 4a^2 - 12a + 16 = (2a - 3)^2 + 7$$

là số chính phương. Đặt $(2a - 3)^2 + 7 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$, từ đó ta được $(y - 2a - 3)(y - 2a + 3) = 7$. Giải phương trình trên ta được $(a; b) = (3; -2), (0; 4)$, trong đó nghiệm $(0; 4)$ bị loại do không thỏa mãn $|a| \geqslant |b|$. Chú ý là $(3; -2)$ có dạng $(k; 1 - k)$.

3. Nếu $x_1 = 1$, khi đó từ phương trình $x^2 + ax - b = 0$ ta được $b = a + 1$. Suy ra

$$b^2 + 4a = (a + 1)^2 + 4a = a^2 + 6a + 1 = (a + 3)^2 - 8$$

là số chính phương. Đặt $(a + 3)^2 - 8 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$, từ đó ta được $(a + 3 - y)(a + 3 + y) = 8$. Giải phương trình trên ta được $(a; b) = (-6; -5), (0; 1)$, trong đó nghiệm $(0; 1)$ bị loại do không thỏa mãn $|a| \geqslant |b|$.

4. Nếu $x_1 = -1$, khi đó từ phương trình $x^2 + ax - b = 0$ ta được $b = 1 - a$. Suy ra

$$b^2 + 4a = (1 - a)^2 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$$

là số chính phương và

$$a^2 + 4b = a^2 + 4(1 - a) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

cũng là số chính phương. Do đó $(a; b) = (k; 1 - k)$ với k là số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý với $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $(b; a)$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do vậy kết hợp các trường hợp lại ta được các cặp số nguyên $(a; b)$ như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 10. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn

$$\frac{a^2 - 1}{5a} = \frac{b^2 - 1}{5b} = \frac{c^2 - 1}{4c} = \frac{d^2 - 1}{4d} = p$$

trong đó p là số nguyên dương. Chứng minh rằng $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d)$ là một số chính phương.

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$a^2 + 5pa - 1 = b^2 + 5pb - 1 = 0; c^2 + 4pc - 1 = d^2 + 4pd - 1 = 0$$

Xét hai phương trình bậc hai ẩn x là $x^2 + 5px - 1 = 0$ và $x^2 + 4px - 1 = 0$. Khi đó ta thấy a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 5px - 1 = 0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4px - 1 = 0$. Theo định lý Viète ta được

$$\begin{cases} a + b = -5p \\ ab = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} c + d = -4p \\ cd = -1 \end{cases}$$

Ta có $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = \left[ab - (a + b)c + c^2\right]\left[ab + (a + b)d + d^2\right]$. Áp dụng các hệ thức Viète trên ta được

$$\left[ab - (a + b)c + c^2\right]\left[ab + (a + b)d + d^2\right] = \left(c^2 + 5pc - 1\right)\left(d^2 - 9pd - 1\right)$$

Chú ý rằng $\left(c^2 + 5pc - 1\right)\left(d^2 - 9pd - 1\right) = \left(c^2 + 4pc - 1 + pc\right)\left(d^2 + 4pd - 1 - 9pd\right)$, và đồng thời kết với $c^2 + 4pc - 1 = d^2 + 4pd - 1 = 0$ ta được

$$(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = -9p^2cd = 9p^2 = (3p)^2$$

Vậy $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d)$ là một số chính phương. □

4 Phương pháp bước nhảy Viète - Vieta Jumping.

Đây là một phương pháp mạnh để xử lý lớp phương trình Diophantine bậc hai trở lên. Sau đây ta sẽ tìm hiểu về phương pháp giải của nó.

Phương pháp. Ta tiến hành qua 2 bước sau.

1. **Bước 1.** Cố định một giá trị nguyên mà đề bài cho, rồi giả sử tồn tại một cặp nghiệm thỏa mãn một vài điều kiện mà không làm mất tính tổng quát của bài toán.
2. **Bước 2.** Dựa vào định lý Viète để tìm các mối quan hệ và sự mâu thuẫn, từ đó tìm được kết luận của bài toán.

Một trong các bài toán nổi tiếng nhất để minh họa cho phương pháp này và luôn xuất hiện trong bất kì các tài liệu nói về vấn đề này, mà mỗi khi nhắc tới học sinh chuyên toán không thể không biết đó chính là bài toán trong kì thi IMO 1988. ∇

Bài toán 1 [IMO 1988]. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $ab + 1 \mid a^2 + b^2$. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ là số chính phương.

Lời giải

Bàn luận. Đây chính là bài toán khó nhất kì thi năm đó, và chỉ có mười một học sinh cho lời giải hoàn chỉnh của bài toán. Trong số 11 học sinh giải được bài toán đó, Việt Nam chúng ta có một đại diện chính là Giáo sư Ngô Bảo Châu. Sau đây là lời giải cho bài toán này.

Lời giải. Đặt $k = \dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$, khi đó theo phương pháp đã đề cập tới ở trên, ta cố định k, sau đó xét tất cả các cặp (a, b) nguyên dương thỏa mãn phương trình

$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

Hay có nghĩa là ta xét tập $S = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid k = \dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}\right\}$. Vì S là tập các cặp số nguyên dương nên luôn tồn tại một cặp (a_0, b_0) trong S mà $a_0 + b_0$ thỏa mãn $a_0 \geqslant b_0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét phương trình

$$\frac{x^2+b_0^2}{xb_0+1}=k \Leftrightarrow x^2-kx.b_0+b_0^2-k=0$$

là một phương trình bậc hai ẩn x. Ta đã biết rằng phương trình trên có một nghiệm là a_0. Như vậy theo định lý Viète thì tồn tại nghiệm a_1 thỏa mãn phương trình bậc hai với ẩn x trên và

$$a_1=kb_0-a_0=\frac{b_0^2-k}{a_0}$$

Từ đây ta có a_1 cũng là số nguyên. Ta chứng minh a_1 không âm. Thật vậy, nếu $a_1<0$ thì

$$a_1^2-kb_0a_1+b_0^2-k \geqslant a_1^2+k+b_0^2-k>0$$

điều này mâu thuẫn. Do đó ta có $a_1 \geqslant 0$. Đến đây ta xét $a_1>0$ thì (a_1,b_0) là một cặp thuộc S. Theo định nghĩa của (a_0,b_0) ta có

$$a_0+b_0 \leqslant a_1+b_0 \Rightarrow a_0 \leqslant a_1$$

Mặt khác cũng theo định lí Viète thì

$$a_0^2 \leqslant a_0a_1=b_0^2-k<b_0^2 \Rightarrow a_0<b_0$$

điều này trái với giả thiết ban đầu. Do đó $a_1=0$, vì vậy suy ra $k=b_0^2$ là một số chính phương, ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét. Trong bài toán này, ta đã sử dụng tới nguyên lí cực hạn: Trong tập hợp các số nguyên dương thì luôn tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất. Mệnh đề trên không những hữu dụng trong các lớp bài toán này mà còn trong nhiều bài toán tổ hợp, tổ hợp số học và số học. Bài toán các bạn sẽ tìm hiểu sau đây cũng là một kết quả rất nối tiếng.

Bài toán 2 [Phương trình Markov]. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^2+y^2+z^2=3xyz.$$

Lời giải

Bàn luận. Đây là một phương trình cực kì nổi tiếng, xuất hiện trong luận án tiến sĩ tại trường Đại học Saint Petersburg với chủ đề "Dạng toàn phương xác định dương" của nhà toán học Andrei Andreevich Markov (1856 - 1922) - nhà toán học nổi tiếng người Nga. Luận án tiến sĩ của Markov đã giải quyết được một số vấn đề khó trong "Lý thuyết số" và mở ra một hướng nghiên cứu trong toán học, đó là "Lý thuyết xấp xỉ Diophant". Phương trình Markov - một phương trình Diophant bậc hai đặc biệt đóng vai trò chủ đạo trong các nghiên cứu của Markov về các dạng toàn phương.
Lời giải. Ta thấy rằng phương trình Markov có một nghiệm $(1,1,1)$. Đặt

$$S=\{(x,y,z);x,y,z\in\mathbb{Z}^+ \mid x^2+y^2+z^2=3xyz\}$$

là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Markov thì $S\neq\varnothing$. Do vai trò của x,y,z trong phương trình là như nhau, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $x\leqslant y\leqslant z$. Với mỗi cặp $(x,y,z)\in S;(x',y',z')\in S$ ta định nghĩa $(x,y,z)>(x',y',z')$ nếu $x+y+z>x'+y'+z'$. Markov đã dùng ý tưởng "thông minh"sau để chứng minh có vô hạn bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn phương trình trên. Với mỗi nghiệm $(x_n,y_n,z_n)\in S$ ta xây dựng bộ nghiệm mới như sau: Ta coi x_n là ẩn và các biến còn lại là các tham số thì rõ ràng phương trình bậc hai

$$x^2-3y_nz_nx+y_n^2+z_n^2=0$$

có một nghiệm là x_n, nên nó có nghiệm thứ hai là x'. Theo định lý Viète, ta có

$$x_n+x'=3y_nz_n \text{ và } x_nx'=y_n^2+z_n^2 \tag{1}$$

Từ đây ta được x' là một số nguyên dương, kết hợp với giả thiết $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ và (1) ta được

$$x' = \frac{y_n^2 + z_n^2}{x_n} \geqslant \frac{2x_n^2}{x_n} = 2x_n > x_n.$$

Đặt $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = (x', y_n, z_n)$ thì $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ là một nghiệm của phương trình Markov. Cách xây dựng này cho ta một dãy vô hạn các nghiệm của phương trình Markov vì các nghiệm tiếp theo lớn hơn các nghiệm trước theo định nghĩa thứ tự ở trên. Do đó phương trình Markov có vô số nghiệm. Ta thấy ý tưởng của Markov trong chứng minh trên là coi một biến là nghiệm của tam thức bậc hai khi cố định các nghiệm còn lại để từ đó xây dựng nghiệm mới từ một nghiệm đã biết bằng các định lí Viète. Cụ thể ta xét phương trình Diophant là phương trình bậc hai đối với một biến nào đó, chẳng hạn $x_1^2 + G(x_2, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ là phương trình bậc 2 ẩn x_1. Nếu phương trình này có nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thì rõ ràng a_1 là nghiệm phương trình $X^2 + G(a_2, a_3, \ldots, a_n) = 0$. Phương trình trên phải còn một nghiệm nữa là a_1'. Kết hợp với định lý Viète và dữ kiện của đầu bài ta sẽ xây dựng bộ $(a_1', a_2, \ldots, a_n)$ là nghiệm của phương trình trên. □

Nhận xét. Thông qua 2 bài toán đầu tiên, ta đã phần nào hiểu được ý tưởng của phương pháp này, bài toán thứ 3 sau đây là bài toán tổng quát của bài toán này, nó sẽ trả lời cho ta câu hỏi "Nếu tổng các bình phương S ba số nguyên dương chia hết cho tích P của chúng thì khi đó thương số $\dfrac{S}{P}$ bằng bao nhiêu?".

Bài toán 3. Tìm tất cả các số nguyên dương k để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Lời giải 1. Trước tiên ta thấy rằng với $k = 1$ phương trình đã cho có nghiệm $(3; 3; 3)$ và với $k = 3$ thì phương trình có nghiệm $(1; 1; 1)$. Như vậy với $k = 1$ hoặc $k = 3$ thì phương trình luôn có nghiệm nguyên dương. Bây giờ ta cần kiểm tra xem với $k \neq 1$ và $k \neq 3$ thì phương trình có nghiệm nguyên dương không. Giả sử với $k \neq 1$ và $k \neq 3$ phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương là $(x_0; y_0; z_0)$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \leqslant y_0 \leqslant z_0$ và $x_0 + y_0 + z_0$ có giá trị bé nhất. Ta xét các trường hợp.

1. Nếu $y_0 < z_0$, ta xét phương trình bậc hai $z^2 - kx_0y_0z + x_0^2 + y_0^2 = 0$. Khi đó phương trình có một nghiệm là z_0. Theo định lí Viète thì phương trình có một nghiệm nữa là z_1. Như vậy thì

$$\begin{cases} z_0 + z_1 = kx_0y_0 \\ z_0z_1 = x_0^2 + y_0^2 \end{cases},$$

từ đó suy ra

$$z_1 = kx_0y_0 - z_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0}$$

Ta thấy z_1 nhận giá trị nguyên dương nên $(x_0; y_0; z_1)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình ban đầu. Từ điều giả sử ta có

$$x_0 + y_0 + z_0 \leqslant x_0 + y_0 + z_1$$

nên $z_0 \leqslant z_1$. Do đó ta được

$$x_0^2 + y_0^2 - kx_0y_0 = z_0z_1 - z_1 - z_0 = (z_1 - 1)(z_0 - 1) - 1 \geqslant y_0^2 - 1$$

Suy ra $1 \geqslant x_0 (ky_0 - x_0) \geqslant x_0 (kx_0 - x_0) \geqslant x_0$. Do x_0 là số nguyên dương nên ta được $x_0 = 1$. Từ đây ta đưa phương trình ban đầu về thành $y^2 + z^2 + 1 = kyz$. Đến đây ta cần chỉ ra rằng phương trình $y^2 + z^2 + 1 = kyz$ có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi $k = 3$, tuy nhiên điều này đơn giản nếu ta sử dụng phương pháp bước nhảy Viète. Do đó điều này mâu thuẫn với $k \neq 3$.

2. Nếu $y_0 = z_0$ thì ta có

$$2y_0^2 - kx_0^2y_0^2 + x_0^2 = 0 \Rightarrow x_0^2 = y_0^2(kx_0 - 2) \geqslant x_0^2(kx_0 - 2)$$

Từ đó dẫn đến $3 \geqslant kx_0$, mà ta lại có $kx_0 > 2$ nên $kx_0 = 3$, suy ra $k = 1$ hoặc $k = 3$, điều này trái với $k \neq 1$ và $k \neq 3$.

Vậy với $k \neq 1$ và $k \neq 3$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương. Như vậy với $k = 1$ hoặc $k = 3$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương. □

Lời giải 2. Với $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$x^2 - kxyz + y^2 + z^2 = 0. \tag{1}$$

Giả sử k là số nguyên dương sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên dương. Cố định k và xét tập hợp

$$S = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \mid x^2 - kxyz + y^2 + z^2 = 0\}.$$

Theo điều giả sử ở trên thì $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt tồn tại $(x_0, y_0, z_0) \in S$ sao cho $x_0 + y_0 + z_0$ là nhỏ nhất. Ta thấy rằng, nếu $(x_0, y_0, z_0) \in S$ thì các hoán vị của nó cũng thuộc S, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0$. Phương trình

$$f(x) = x^2 - xky_0z_0 + y_0^2 + z_0^2 = 0$$

hiển nhiên có một nghiệm x_0. Gọi nghiệm còn lại là x_1, theo định lý Viète, ta có

$$x_0 + x_1 = ky_0z_0; x_0x_1 = y_0^2 + z_0^2.$$

Từ đây, ta được x_1 không âm, do đó $(x_1, y_0, z_0) \in S$, theo cách xác định của bộ (x_0, y_0, z_0) thì ta thu được $x_1 + y_0 + z_0 \geqslant x_0 + y_0 + z_0$ hay $x_1 \geqslant x_0$. Do đó ta có

$$x_1 \geqslant x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0. \tag{2}$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai và từ (2) ta được

$$0 \leqslant f(y_0) \leqslant y_0^2 - ky_0^2z_0 + 2y_0^2 = y_0^2(3 - kz_0).$$

Suy ra $kz_0 \leqslant 3 \Rightarrow k \leqslant kz_0 \leqslant 3$ mà $k \in \mathbb{Z}^+$ nên $k \in \{1, 2, 3\}$.

1. Nếu $k = 1$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x = y = z = 3$.
2. Nếu $k = 2$, thì từ $kz_0 \leqslant 3$ ta được $z_0 = 1$ khi đó ta có $(x_0 - y_0)^2 + 1 = 0$, mâu thuẫn.
3. Nếu $k = 3$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x = y = z = 1$.

Vậy với $k \in \{1, 3\}$ thì phương trình có nghiệm nguyên dương. □

!

Nhận xét. Trong lời giải 1 ta có đề cập tới một kết quả đó là *Phương trình $y^2 + z^2 + 1 = kyz$ có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi $k = 3$*, đây là bài toán trong đề thi HSG toán 9 Tỉnh Thanh Hóa 2015 – 2016. Sau đây ta sẽ cùng xét tới bài toán này.

Bài toán 4. Tìm các số nguyên dương m để phương trình $x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Với các nghiệm nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình, giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm thỏa mãn $x_0 + y_0$ nhỏ nhất. Do vai trò của x và y trong phương trình là như nhau nên không mất tính tổng quát

ta có thể giả sử $x_0 \leqslant y_0$.
Xét phương trình bậc hai có ẩn y là

$$y^2 - mx_0y + x_0^2 + 1 = 0$$

La có y_0 là một nghiệm của phương trình trên. Ta gọi nghiệm còn lại là y_1. Khi đó theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} y_0 + y_1 = mx_0 \\ y_0.y_1 = x_0^2 + 1 \end{cases}$$

Dễ dàng nhận thấy y_1 có giá trị nguyên và từ cách chọn $(x_0; y_0)$ ta suy ra được $y_0 \leqslant y_1$. Đến đây ta xét các trường hợp sau.

1. Nếu $x_0 = y_0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $m = 2 + \dfrac{1}{x_0^2}$. Nên để m và x_0 có giá trị nguyên thì $x_0 = 1$ và $m = 3$.
   Với $m = 3$ ta thấy $(x;\, y) = (1;\, 1)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.
2. Nếu $y_0 = y_1$ thì từ $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ hay
   $$(y_0 - x_0)(y_0 + x_0) = 1$$
   Từ đó ta suy ra được
   $$\begin{cases} y_0 - x_0 = 1 \\ y_0 + x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$
   Trường hợp này loại vì $(x_0; y_0)$ nguyên dương.
3. Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ khi đó ta được
   $$y_0 \geqslant x_0 + 1; y_1 \geqslant x_0 + 2$$
   Kết hợp với $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ ta được $x_0^2 + 1 \geqslant x_0^2 + 3x_0 + 2 \Rightarrow 3x_0 + 1 \leqslant 0$, điều này vô lý vì $x_0 > 0$.

Như vậy để phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương thì $m = 3$ và khi đó phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x;\, y) = (1;\, 1)$. □

Bài toán 5. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 + y^2 + x + y = kxy$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Gọi (x_0, y_0) là bộ nghiệm nguyên dương của phương trình thỏa mãn $x_0 + y_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_0 \geqslant y_0 \geqslant 1$. Xét phương trình bậc hai ẩn x

$$x^2 + y_0^2 + x + y_0 = kxy_0 \Leftrightarrow x^2 + x(1 - ky_0) + y_0^2 + y_0 = 0$$

Phương trình bậc hai này hiển nhiên có một nghiệm x_0, gọi nghiệm còn lại là x_1. Theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = ky_0 - 1 & (1) \\ x_0x_1 = y_0^2 + y_0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có x_1 nguyên, từ (2) ta có x_1 dương. Như vậy (x_1, y_0) cũng là một nghiệm thỏa mãn phương trình, mặt khác, do tính nhỏ nhất của tổng $x_0 + y_0$ mà ta có $x_1 \geqslant x_0$. Do đó từ (1), ta có

$$ky_0 - 1 \geqslant 2x_0 \Rightarrow \frac{2x_0}{y_0} + \frac{1}{y_0} \leqslant k$$

Ta có

$$k = \frac{x_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} = \left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{2y_0}\right) + \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{x_0} + \frac{1}{2y_0} \leqslant \frac{k}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow k \leqslant 5 \Rightarrow k \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

1. Với $k = 1$, ta có $x^2 + y^2 + x + y = xy$, phương trình này vô nghiệm nguyên dương vì
$$x^2 + y^2 + x + y \geqslant 2xy + x + y > xy$$
2. Với $k = 2$, tương tự như trên, ta cũng lập luận được phương trình này vô nghiệm nguyên dương.
3. Với $k = 3$, phương trình có nghiệm nguyên dương $(2; 2)$.
4. Với $k = 4$ thì phương trình có nghiệm $(1; 1)$.
5. Với $k = 5$, dấu bằng phải đồng thời xảy ra ở các điểm
$$\frac{x}{y} + \frac{1}{2y} = \frac{k}{2} = \frac{5}{2}, \frac{1}{x} = 1, \frac{1}{2y} = 1, \frac{y}{x} = 1$$
Dễ thấy không tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn tất cả các điều trên. Trường hợp này bị loại.

Vậy các giá trị của k thỏa mãn là $k \in \{3; 4\}$. □

Bài toán 6 [IMO 2007]. Cho trước a, b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $4ab - 1$ là ước số của $(4a^2 - 1)^2$ thì $a = b$.

Lời giải

Theo giả thiết thì $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$ nên ta có $4ab - 1$ là ước của
$$b^2(4a^2 - 1)^2 - (4ab - 1)(4a^3b - 2ab + a^2) = (a - b)^2.$$
Đến đây ta đặt $k = \dfrac{(a - b)^2}{4ab - 1}$ thì $k \in \mathbb{Z}^+$. Cố định k và xét tập hợp
$$S = \left\{(a, b); a, b \in \mathbb{Z}^+; a \neq b \mid a^2 - 2ab(2k + 1) + b^2 + k = 0\right\}$$
Giả sử $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt tồn tại cặp số $(a_0, b_0) \in S$ sao cho $a_0 \neq b_0$ và $a_0 + b_0$ nhỏ nhất. Chú ý rằng, nếu $(a_0, b_0) \in S$ thì $(b_0, a_0) \in S$, do vậy không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0 > b_0$. Phương trình $T^2 - 2Tb_0(2k + 1) + b_0^2 + k = 0$ có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lý Viète ta có
$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 2b_0(2k + 1) \\ a_0a_1 = b_0^2 + k. \end{cases} \tag{1}$$
Suy ra a_1 là số nguyên không âm, do đó $(a_1, b_0) \in S$, theo cách xác định (a_0, b_0) thì
$$a_1 + b_0 \geqslant a_0 + b_0 \Leftrightarrow a_1 \geqslant a_0.$$
Kết hợp với (1) ta được
$$a_0 = \frac{b_0^2 + k}{a_1} \leqslant \frac{b_0^2 + k}{a_0} \Leftrightarrow k \geqslant a_0^2 - b_0^2.$$
Như vậy ta suy ra
$$\frac{(a_0 - b_0)^2}{4a_0b_0 - 1} = k \geqslant a_0^2 - b_0^2 = (a_0 - b_0)(a_0 + b_0).$$
Mặt khác lại do $a_0 > b_0$ nên $a_0 - b_0 \geqslant 1$, vì vậy
$$a_0 - b_0 \geqslant (a_0 + b_0)(4a_0b_0 - 1) > a_0 + b_0,$$
điều này là mâu thuẫn, do đó điều giả sử là sai hay $S \neq \varnothing$. □

Bài toán 7. Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương sao cho $k = \dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ là số nguyên thì $k = 5$.

Lời giải

Lời giải 1. Đẳng thức đề bài tương đương với $a^2 - kab + b^2 + k = 0$. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geqslant b$. Do a, b là các số nguyên dương và $ab \neq 1$ nên ta xét $a = 2; b = 1$ thì được $k = 5$.
Như vậy ta cần chứng minh là với $a + b > 3$ thì $k = 5$, giả sử cặp số dương $(a_0; b_0)$ có tổng nhỏ nhất thỏa mãn bài toán. Khi đó ta được

$$a_0^2 - ka_0b_0 + b_0^2 + k = 0$$

Xét phương trình bậc 2 ẩn x là

$$a^2 - kab + b^2 + k = 0$$

Ta thấy rằng a_0 là một nghiệm của phương trình. Như vậy theo định lí Viète thì phương trình trên còn có nghiệm là a_1, khi đó ta có $a = kb_0 - a_0$ hay ta có cặp số $(kb_0 - a_0; b_0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo điều giả sử ta có $a_0 \leqslant kb_0 - a_0$ hay $\dfrac{a_0}{b_0} \leqslant \dfrac{k}{2}$. Từ $k = \dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ ta suy ra

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{a_0} + \frac{k}{a_0b_0} = k.$$

Do $\dfrac{a_0}{b_0} \leqslant \dfrac{k}{2}$ và $a_0b_0 \geqslant 3$ nên $k \leqslant \dfrac{k}{2} + 1 + \dfrac{k}{3}$ hay $k \leqslant 6$. Mặt khác ta lại có

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{a_0} \geqslant 2$$

nên $k \geqslant 3$. Như vậy ta được $3 \leqslant k \leqslant 6$.

1. Với $a = 3; b = 1$ ta tìm được $k = 5$.
2. Với $a = b = 2$ hay $a = 4; b = 1$ thì không tìm được giá trị của k.
3. Với $ab \geqslant 5$, lại dùng đánh giá tương tự như trên ta có $k \leqslant 3$. Xét $k = 3$ thì $a^2 + 3ab + b^2 = 3$, ta thấy không có cặp số dương $(a; b)$ thỏa mãn.

Do đó suy ra $ab \geqslant 6$. Thử với $a = 6; b = 1$ hoặc $a = 3; b = 2$ đều không thỏa nên ta lại được $ab \geqslant 7$. Lại dùng đánh giá như trên ta được suy ra $k \leqslant \dfrac{14}{5}$, điều này mâu thuẫn với k nguyên và lớn hơn 2. Vậy chỉ có $k = 5$ thỏa mãn bài toán. □

Lời giải 2. Đặt $k = \dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ thì k là số nguyên dương. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$k = \frac{a^2+b^2}{ab-1} \geqslant \frac{2ab}{ab-1} = 2 + \frac{2}{ab-1} > 2$$

hay $k \geqslant 3$. Nếu $a = b$ thì ta được $k = 2 + \dfrac{2}{a^2-1} < 3$, mâu thuẫn.
Ta sẽ chứng minh $k = 5$. Thật vậy, cố định k và xét tập hợp

$$S = \left\{(a, b); a, b \in \mathbb{Z}^+ \mid k = \frac{a^2+b^2}{ab-1}\right\}$$

Theo giả thiết $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt tồn tại cặp số $(a_0, b_0) \in S$ sao cho $a_0 \neq b_0$ và $a_0 + b_0$ nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0, b_0) \in S$ thì $(b_0, a_0) \in S$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0 > b_0$. Nhận thấy rằng phương trình

$$\frac{T^2+b_0^2}{Tb_0-1} = k \Leftrightarrow T^2 - kTb_0 + b_0^2 + k = 0$$

có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lý Viète ta có

$$a_0 + a_1 = kb_0; a_0a_1 = b_0^2 + k.$$

Từ đây, ta được $a_1 \in \mathbb{Z}^+$, do đó $(a_1, b_0) \in S$, theo cách xác định (a_0, b_0) thì $a_1 + b_0 \geqslant a_0 + b_0$ hay $a_1 \geqslant a_0$. Vì $a_0 > b_0$ nên $a_0 \geqslant b_0 + 1$, từ đó ta thu được:

$$b_0^2 + k - kb_0 = a_0a_1 - a_0 - a_1 = (a_0 - 1)(a_1 - 1) - 1 \geqslant b_0^2 - 1.$$

Do đó $k(b_0 - 1) \leqslant 1$. Nếu $b_0 \neq 1$ theo chứng minh trên thì $k(b_0 - 1) \geqslant 3 > 1$, vì vậy ta phải có $b_0 = 1$. Khi đó $a_0 + a_1 = k$ và $a_0a_1 = k + 1$, suy ra

$$a_0a_1 - a_0 - a_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a_0 - 1)(a_1 - 1) = 2$$

mà $a_1 \geqslant a_0$ nên $a_0 = 2, a_1 = 3$, từ đây ta được

$$k = a_0 + a_1 = 5.$$

Như vậy, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 8. Tìm tất cả các giá trị k sao cho phương trình $(x + y + z)^2 = kxyz$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Ta gọi k là giá trị cần tìm và $(x_0; y_0; z_0)$ nghiện nguyên dương của phương trình $(x + y + z)^2 = kxyz$ có $x_0 + y_0 + z_0$ nhỏ nhất. Khi đó không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0$. Phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$x^2 - (kyz - 2y - 2z)\, x + (y + z)^2 = 0$$

Theo định lí Viète ta có

$$x_1 = ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0 - x_0 = \frac{(y_0 + z_0)^2}{x_0}$$

cũng là nghiệm của phương trình trên, suy ra $(x_1; y_0; z_0)$ là nghiệm của phương trình đầu. Ngoài ra ta cũng suy ra được x_1 nguyên dương, hay nói cách khác $(x_1; y_0; z_0)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình đầu. Từ tính nhỏ nhất của $x_0 + y_0 + z_0$ ta có được $x_1 \geqslant x_0$, suy ra

$$ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0 - x_0 \geqslant x_0 \text{ và } \frac{(y_0 + z_0)^2}{x_0} \geqslant x_0$$

Từ bất đẳng thức thứ 2 ta có $y_0 + z_0 \geqslant x_0$, áp dụng bất đẳng thức thứ nhất ta được $ky_0z_0 \geqslant 4x_0$. Chia 2 vế của

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2x_0y_0 + 2y_0z_0 + 2z_0x_0 = kx_0y_0z_0$$

cho $x_0y_0z_0$ ta thu được

$$\frac{x_0}{y_0z_0} + \frac{y_0}{x_0z_0} + \frac{z_0}{x_0y_0} + \frac{2}{z_0} + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{y_0} = k$$

Như vậy ta được $\frac{k}{4} + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 \geqslant k$ hay $k \leqslant \frac{32}{3}$, suy ra $k \leqslant 10$. Chú ý rằng nếu $x_0 = 1$ thì $y_0 = z_0 = 1$ suy ra $k = 9$. Nếu $k \neq 9$ thì $x_0 \geqslant 2$ và đánh giá ở trên trở thành $\frac{k}{4} + 1 + \frac{1}{2} + 2 + 1 + 2 \geqslant k$, như thế thì ta suy ra được $k \leqslant \frac{26}{3}$ nên $k \leqslant 8$. Giá trị $k = 10$ bị loại. Ta xét các trường hợp sau.

1. Với $k = 1$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(9; 9; 9)$.
2. Với $k = 2$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(4; 4; 8)$.

3. Với $k = 3$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(3; 3; 3)$.
4. Với $k = 4$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(2; 2; 4)$.
5. Với $k = 5$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(1; 4; 5)$.
6. Với $k = 6$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(1; 2; 3)$.
7. Với $k = 8$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(1; 1; 2)$.
8. Với $k = 9$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn $(1; 1; 1)$.

Bây giờ ta cần chứng chứng minh được rằng trường hợp $k = 7$ phương trình không có nghiệm nguyên dương. Thật vậy, giả sử với $k = 7$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương $(x_0; y_0; z_0)$ có các tính chất như trên. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}7 = \frac{(x_0+y_0+z_0)^2}{x_0y_0z_0} &= \frac{x_0}{y_0z_0} + \frac{y_0}{z_0x_0} + \frac{z_0}{x_0y_0} + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{y_0} + \frac{2}{z_0} \\ &< \frac{1}{y_0} + \frac{1}{z_0} + \frac{y_0+z_0}{y_0z_0} + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{y_0} + \frac{2}{z_0} \leqslant \frac{10}{z_0}\end{aligned}$$

Do đó ta có $z_0 < \dfrac{10}{7}$ nên $z_0 = 1$, khi đó ta có

$$7 < \frac{3}{x_0} + \frac{3}{y_0} + \frac{4}{1} \Rightarrow 1 < \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} \leqslant \frac{2}{y_0} \Rightarrow y_0 < 2$$

Từ đó tại được $y_0 = 1$. Như vậy ta có

$$7 = \frac{(x_0+y_0+z_0)^2}{x_0y_0z_0} = \frac{(x_0+2)}{x_0} = \frac{4}{x_0} + x_0 + 4 \geqslant 2.\sqrt{\frac{4}{x_0}.x_0} + 4 = 8$$

Như vậy khi $k = 7$ thì phương trình không có nghiệm nguyên dương.
Vậy các giá trị k cần tìm là $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$. □

Bài toán tương tự.

1. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $(x+y+z)^2$ chia hết cho xyz. Tính các giá trị của $A = \dfrac{(x+y+z)^2}{xyz}$.
2. Chứng minh rằng phương trình $(x+y+z)^2 = 7xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài toán 9. Chứng minh rằng phương trình $(x+y+z)^2 = 7xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Gọi $(x'; y'; z')$ là một nghiệm thỏa mãn phương trình với z' là số nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x' \leqslant y' \leqslant z'$, khi đó ta có

$$z' \mid (x'+y'+z')^2 \Rightarrow z \mid (x'+y')^2 + 2z'(x'+y') + z'^2 \Rightarrow z' \mid (x'+y')^2$$

Ta xét phương trình bậc hai ẩn z là $z^2 - (7x'y' - 2x' - 2y')z + (x'+y')^2 = 0$, hiển nhiên phương trình này có một nghiệm z', nên theo định lí Viète thì nghiệm còn lại của nó là $\dfrac{(x'+y')^2}{z'} \in \mathbb{Z}$.
Như vậy $\left(x'; y'; \dfrac{(x'+y')^2}{z'}\right)$ cũng là một bộ số thỏa mãn phương trình. Nếu giả sử

$$x' + y' < z' \Rightarrow \frac{(x'+y')^2}{z'} < z'$$

thì vô lí vì $(x'; y'; z')$ cũng là một bộ số thỏa mãn phương trình và vì tính nhỏ nhất của z'. Do đó phải có $z' \leqslant x' + y'$. Khai triển phương trình ban đầu và chia hai vế của nó cho $x'y'z'$ ta được

$$\begin{aligned} 7 \leqslant \frac{x'}{y'z'} + \frac{y'}{z'x'} + \frac{z'}{x'y'} + \frac{2}{x'} + \frac{2}{y'} + \frac{2}{z'} &\leqslant \frac{1}{z'} + \frac{1}{x'} + \frac{x'+y'}{x'y'} + \frac{2}{x'} + \frac{2}{y'} + \frac{2}{z'} \\ &= \frac{4}{x'} + \frac{3}{y'} + \frac{3}{z'} \leqslant \frac{10}{x'} \Rightarrow x' \leqslant \frac{10}{7} \Rightarrow x' = 1 \end{aligned}$$

Khi đó ta được $y' \leqslant z' \leqslant y' + 1 \Rightarrow z' = y \vee z' = y' + 1$. Xét các trường hợp

1. Nếu $z' = y'$ thì ta có phương trình

   $$(1 + 2z')^2 = 7z'^2 \Leftrightarrow 3z'^2 - 4z' - 1 = 0 \Leftrightarrow z' = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

   trường hợp này loại.

2. Nếu $z' = y' + 1$ thì ta có phương trình

   $$(2 + 2z')^2 = 7z'(z' + 1) \Leftrightarrow 3z'^2 - z' - 4 = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{-1; \frac{4}{3}\right\}$$

Như vậy không tồn tại nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho. □

Bài toán 10 [VMO 2012]. Xét các số tự nhiên lẻ a, b thỏa mãn $a \mid b^2 + 2$ và $b \mid a^2 + 2$. Chứng minh rằng a, b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = 1 \\ v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, \ \forall n \geqslant 2 \end{cases}$$

Lời giải

Đầu tiên ta sẽ đi chứng minh rằng $b \mid a^2 + 2 \ \wedge a \mid b^2 + 2 \Leftrightarrow ab \mid a^2 + b^2 + 2$. Thật vậy, ta có

$$b \mid a^2 + 2 \ \wedge a \mid b^2 + 2 \Rightarrow ab \mid \left(a^2 + 2\right)\left(b^2 + 2\right) \Rightarrow ab \mid 2\left(a^2 + b^2 + 2\right)$$

Do a, b lẻ nên $ab \mid a^2 + b^2 + 2$. Ngược lại nếu có $ab \mid a^2 + b^2 + 2$ thì dễ dàng suy ra ngay được $b \mid a^2 + 2$ và $a \mid b^2 + 2$. Từ đó giả thiết đề bài tương đương với việc tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$a^2 + b^2 + 2 = kab.$$

Sử dụng phương pháp bước nhảy Viète ta sẽ đi chứng minh $k = 4$. Cố định k và xét tập

$$S = \left\{a, b \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^2 \mid \ k = \frac{a^2 + b^2 + 2}{ab} \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Trong S ta chọn ra cặp (A, B) sao cho tổng $A + B$ là nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A \geqslant B$. Xét phương trình bậc hai ẩn t, $t^2 - ktB + B^2 + 2 = 0$. Dễ thấy phương trình này có một nghiệm là A, gọi nghiệm còn lại là t_0. Theo ***định lí Vième*** ta có

$$\begin{cases} t_0 + A = kB \\ t_0 A = B^2 + 2 \end{cases}$$

Từ đây suy ra được t_0 nguyên dương. Chú ý vì $A + B$ là nhỏ nhất nên ta được $t_0 \geqslant A$.
Suy ra $t_0 + A = kB \geqslant 2A$ hay $\dfrac{A}{B} \leqslant \dfrac{k}{2}$.
Nếu có một trong hai số a, b bằng 1, giả sử $b = 1$ thì $ka = a^2 + 3$, dễ suy ra $k = 4$.
Nếu cả hai số $a, b \geqslant 2$. Ta có $A \geqslant B \geqslant 2$. Thì

$$k = \frac{A}{B} + \frac{B}{A} + \frac{2}{AB} \leqslant \frac{k}{2} + 1 + \frac{2}{2.2} \Leftrightarrow k \leqslant 3$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$kab = a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2(ab+1) \Rightarrow k \geqslant 3$$

lúc này ta được $k = 3$. Khi đó $A^2 + B^2 + 2 = 3AB$. Từ đẳng thức này dễ dàng suy ra phải có một trong hai số chia hết cho 3, giả sử $3 \mid A$ thì $A \geqslant 3$. Nếu $B = 1$ ta gặp mâu thuẫn, do đó $B \geqslant 2$. Tức $AB \geqslant 6$. Tuy nhiên

$$3 = \frac{A}{B} + \frac{B}{A} + \frac{2}{AB} \leqslant \frac{3}{2} + 1 + \frac{2}{6}$$

Điều này vô lí. Vậy $k = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm. Ta chứng minh xong việc các số a, b thỏa giả thiết thì cũng phải thỏa mãn phương trình

$$a^2 + b^2 + 2 = 4ab \qquad (1)$$

Bài toán sẽ hoàn tất nếu ta chỉ rằng nếu cặp (a, b) bất kỳ thỏa mãn (1) thì sẽ luôn tồn tại số tự nhiên n sao cho $a = x_n, b = x_{n+1}$. Giả sử (u_0, u_1) là một cặp số nguyên dương bất kỳ thỏa (1). Ta hoàn toàn có quyền giả sử $u_0 > u_1$. Nếu $u_0 = 1$ thì $u_1 = 1$, tức tồn tại $n = 1$ để $u_0 = v_1, u_1 = v_2$. Tương tự khi xét $u_1 = 1$. Do đó ta chỉ cần xét $u_0, u_1 > 1$. Khi đó ta chọn cặp $(u_1, u_2) = (u_1, 4u_1 - u_0)$, dễ thấy u_1, u_2 nguyên dương và (u_1, u_2) cũng thỏa mãn (1). Lúc này ta chú ý $4u_1 - u_0 < u_0$ vì

$$4u_1 - u_0 = \frac{u_1^2 + 2}{u_0} - u_0 = \frac{2 - (u_0 - u_1)(u_0 + u_1)}{u_0} \leqslant 0.$$

Suy ra $u_1 + u_2 = u_1 + (4u_1 - u_0) < u_1 + u_0$. Tương tự ta cũng chọn được cặp $(u_2, u_3) = (u_2, 4u_2 - u_1)$ cũng thỏa u_2, u_3 nguyên dương, cũng thỏa (1) và $u_2 + u_3 < u_1 + u_2 < u_1 + u_0$. Cứ tiếp tục quá trình này, ta được

$$... < u_i + u_{i+1} < ... < u_1 + u_2 < u_1 + u_0$$

Thế nhưng $u_1 + u_0 > 2$ nên phải tồn tại k sao cho $u_k + u_{k+1} = 2$, suy ra $u_k = u_{k+1} = 1$. Tức là ta có $u_k = v_2, u_{k+1} = v_1$. Ta có thể thấy được cách xác định u_n là như sau

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \text{ hay } u_n = 4u_{n+1} - u_{n+2}.$$

Từ đó ta có

$$u_{k-1} = 4u_k - u_{k+1} = 4v_2 - v_1 = v_3$$
$$u_{k-2} = 4u_{k-1} - u_k = 4v_3 - v_2 = v_4$$
$$...$$
$$u_1 = 4u_2 - u_3 = 4v_k - v_{k-1} = v_{k+1}$$

Như vậy tồn tại $n = k + 1$ để với cặp (u_0, u_1) bất kỳ thỏa (1) thì ta có $(u_1, u_0) = (v_{k+1}, v_{k+2})$. □

Bài toán tương tự [Canada MO 1998]. Cho m là một số nguyên dương. Dãy số (u_n) với $n \geqslant 0$ được xác định như sau

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = m \\ u_{n+1} = m^2 u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

với mọi $n \geqslant 1$. Chứng minh rằng, các cặp số (a, b) với $a, b \in \mathbb{Z}^+, a \geqslant b$, là nghiệm của phương trình $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$ khi và chỉ khi $(a, b) = (u_n, u_{n+1})$ với mọi số tự nhiên n.

Bài toán 11 [Vietnam TST 1992]. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình

$$x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0. \qquad (1)$$

Lời giải

Lời giải và bình luận bài toán này chúng tôi xin được trích từ chuyên đề bước nhảy Viète của thầy **Hà Tuấn Dũng - Khoa Toán - ĐH Sư Phạm Hà Nội 2.**
Đầu tiên, chúng ta chứng minh bổ đề.
Bổ đề. Xét hai dãy số (u_n) và (v_n) được xác định như sau

$$\begin{aligned}&u_0=1, u_1=2, u_{n+2}=5u_{n+1}-u_n, \forall n=0,1,\ldots;\\&v_0=1, v_1=3, v_{n+2}=5v_{n+1}-v_n, \forall n=0,1,\ldots\end{aligned}$$

Khi đó, với mọi $n\in\mathbb{N}$ các cặp số (u_n,u_{n+1}) và (v_n,v_{n+1}) là nghiệm nguyên dương của (1).
Chứng minh. Ta sẽ chứng minh mệnh đề sau bằng phương pháp quy nạp toán học.
Với $n=0$, ta có $u_1^2+u_0^2-5u_0u_1=-5$. Do đó (u_0,u_1) là nghiệm của phương trình (1). Như vậy, mệnh đề đúng với $n=0$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n=k>0$, tức là

$$u_k^2+u_{k+1}^2-5u_ku_{k+1}+5=0.$$

Khi đó

$$u_{k+1}^2+u_{k+2}^2-5u_{k+1}u_{k+2}=u_{k+2}(u_{k+2}-5u_{k+1})+u_{k+1}^2=u_{k+1}^2+u_k^2-5u_ku_{k+1}.$$

Từ giả thiết quy nạp, ta được

$$u_{k+1}^2+u_{k+2}^2-5u_{k+1}u_{k+2}+5=0.$$

Do đó (u_{k+1},u_{k+2}) cũng là nghiệm của phương trình (1). Theo nguyên lý quy nạp toán học thì mệnh đề đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh tương tự, ta cũng thu được với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì (v_n,v_{n+1}) là nghiệm của phương trình (1). Từ công thức xác định số hạng tổng quát của hai dãy số (u_n) và (v_n) ta được các số hạng của hai dãy đều là các số nguyên dương. Do đó, các cặp số (u_n,u_{n+1}) và (v_n,v_{n+1}) là nghiệm nguyên dương của phương trình (1). Như vậy bổ đề được chứng minh. ∇
Quay lại bài toán. Xét tập hợp

$$S=\{(a,b);a,b\in\mathbb{Z}^+\mid a^2-5ab+b^2+5=0\}.$$

Với $(a,b)\in S$ nếu $a=b$ thì ta có

$$3a^2-5=0\Rightarrow a^2=\frac{5}{3},$$

điều này mâu thuẫn. Do đó $a\neq b$. Ta thấy rằng $(a,b)\in S$ thì $(b,a)\in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử rằng với mọi $(a,b)\in S$ thì $a<b$. Với (a,b) là một phần tử bất kì thuộc S. Xét dãy số (a_n) được xác định như sau

$$a_0=b, a_1=a, a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ta có $b(5a-b)=a^2+5>0\Rightarrow 5a>b$. Từ công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n) ta được $a_n\in\mathbb{Z}^+$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Ta có $(a_0,a_1)=(a,b)\in S$, giả sử $(a_k,a_{k+1})\in S$ với mọi $k\geqslant 1$, khi đó

$$a_{k+1}^2+a_{k+2}^2-5a_{k+1}a_{k+2}=a_{k+2}(a_{k+2}-5a_{k+1})+a_{k+1}^2=a_{k+1}^2+a_k^2-5a_ka_{k+1}.$$

Từ đây ta được $(a_{k+1},a_{k+2})\in S$, theo nguyên lý quy nạp toán học thì $(a_n,a_{n+1})\in S,\forall n\in\mathbb{N}$. Nếu $a=1$ thì từ (1) ta được $b^2-5b+6=0\Leftrightarrow b\in\{2,3\}$..

1. Nếu $b=2$ ta có $(a,b)=(u_0,u_1)$.
2. Nếu $b=3$ thì $(a,b)=(v_0,v_1)$.

Ta xét trường hợp $a>1$, khi đó $(4a-b)(a-b)=3a^2-5>0$, mà $a<b$ nên $4a<b$, mà $a_0>a_1$ nên từ đây ta được $a_n>a_{n+1}$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Như vậy với $a>1$ thì dãy (a_n) là một dãy giảm ngặt, nên phải tồn tại một chỉ số k sao cho $a_0>a_1>\cdots>a_{k+1}=1$. Do (a_k,a_{k+1}) là một nghiệm của phương trình (1) nên ta có $a_k\in\{2,3\}$. Với $a_k=2$ thì ta có $a_{k+1}=u_0$, $a_k=u_1$, khi đó $a_{k-1}=5a_k-a_{k+1}=u_2$, từ đó ta được $a_i=u_{k+1-i}$. Tương tự với $a_k=3$ thì (a,b) là các số hạng liên tiếp trên dãy (v_n). Như vậy, các bộ (u_n, u_{n+1}) và (v_n, v_{n+1}) (với mọi $n \in \mathbb{N}$) là tập tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (1). □

Nhận xét. Ta thiết lập quan hệ thứ tự trên S như sau nếu $(x, y) \in S, (x', y') \in S$ thì

$$(x, y) > (x', y') \Leftrightarrow x > x' \text{ và } y > y'$$

Từ một nghiệm bất kì của phương trình (1) bằng phương pháp bước nhảy Viète ta thiết lập được mới nhỏ hơn nghiệm (a, b) theo quan hệ thứ tự nói trên. Từ nghiệm mới vừa thu được này ta lại xây dựng nghiệm mới nhỏ hơn, cứ tiếp tục quá trình như vậy đến khi không thể xây dựng được nữa. Khi đó, ta thu được nghiệm nhỏ nhất. Dãy (a_n) đã mô tả các nghiệm của phương trình (1) được xây dựng từ quá trình trên và được xây dựng dựa vào các tính chất: a, b là hai số hạng đầu tiên của dãy: (a_i, a_{i+1}) là một nghiệm của phương trình (1). Để xác định được công thức truy hồi của dãy (a_n) ta đã sử dụng phương pháp bước nhảy Viète. Xét phương trình

$$T^2 - 5Ta_{n+1} + a_{n+1}^2 + 5 = 0$$

có một nghiệm là a_n, gọi nghiệm còn lại là a_{n+2} thì theo hệ thức Viète ta có

$$\begin{cases} a_n + a_{n+2} = 5a_{n+1} \\ a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 5 \end{cases} \tag{2}$$

Từ đây, ta có a_{n+2} là số nguyên dương, do đó (a_n, a_{n+2}) cũng là một nghiệm của phương trình, và từ (2) ta được $a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n$. Sau khi thu được nghiệm nhỏ nhất, ta xây dựng các nghiệm của phương trình từ nghiệm nhỏ nhất đó thông qua hai dãy (u_n) và (v_n).

Bài toán 12 [VMO 2002]. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương k sao cho phương trình

$$(x + y + z + t)^2 = k^2 xyzt$$

có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Biến đổi phương trình ban đầu về dạng

$$x^2 + (2y + 2z + 2t - k^2 yzt)x + (y + z + t)^2 = 0$$

Trong các nghiệm nguyên dương của phương trình, ta chọn ra bộ nghiệm (x_0, y_0, z_0, t_0) có tổng $x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ nhỏ nhất. Khi đó dễ thấy x_0 là một nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 + (2y_0 + 2z_0 + 2t_0 - k^2 y_0 z_0 t_0)x + (y_0 + z_0 + t_0)^2 = 0 \tag{*}$$

Gọi nghiệm còn lại của $(*)$ là x_1, theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = k^2 y_0 z_0 t_0 - 2y_0 - 2z_0 - 2t_0 & (1) \\ x_0 . x_1 = (y_0 + z_0 + t_0)^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có x_1 nguyên và từ (2) ta có x_1 dương. Như vậy (x_1, y_0, z_0, t_0) cũng là một bộ số thỏa $(*)$, nhưng vì tính nhỏ nhất của tổng $x_0 + y_0 + z_0 + t_0$ mà ta có $x_1 \geqslant x_0$. Do đó từ (2) ta suy ra

$$x_1 = \frac{(y_0 + z_0 + t_0)^2}{x_0} \geqslant x_0 \Rightarrow y_0 + z_0 + t_0 \geqslant x_0$$

Kết hợp với (1) ta được

$$k^2 y_0 z_0 t_0 - 2y_0 - 2z_0 - 2t_0 - x_0 \geqslant x_0 \Rightarrow k^2 y_0 z_0 t_0 \geqslant 2x_0 + 2(y_0 + z_0 + t_0) \geqslant 4x_0.$$

Chia hai vế của đẳng thức $x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2+2x_0y_0+2x_0z_0+2x_0t_0+2y_0z_0+2y_0t_0+2z_0t_0=k^2x_0y_0z_0t_0$ cho $x_0y_0z_0t_0$, ta được

$$\frac{x_0}{y_0z_0t_0}+\frac{y_0}{x_0z_0t_0}+\frac{z_0}{x_0y_0t_0}+\frac{t_0}{x_0y_0z_0}+\frac{2}{z_0t_0}+\frac{2}{y_0t_0}+\frac{2}{y_0z_0}+\frac{2}{x_0t_0}+\frac{2}{x_0z_0}+\frac{2}{x_0y_0}=k^2$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0 \geqslant t_0 \geqslant 1$. Khi đó suy ra

$$\frac{x_0}{y_0z_0t_0} \leqslant \frac{k^2}{4}\ ,\frac{y_0}{z_0t_0x_0} \leqslant \frac{1}{z_0t_0} \leqslant 1\ ,\frac{z_0}{x_0y_0t_0} \leqslant \frac{1}{x_0t_0} \leqslant 1,\quad \frac{t_0}{x_0y_0z_0} \leqslant \frac{1}{x_0y_0} \leqslant 1$$

Như vậy ta được

$$k^2 \leqslant \frac{k^2}{4}+1+1+1+2+2+2+2+2+2=\frac{k^2}{4}+15 \Rightarrow k^2 \leqslant 20 \Rightarrow k \in \{1,2,3,4\}$$

1. Nếu $k=1$, phương trình có nghiệm $(4,4,4,4)$.
2. Nếu $k=2$, phương trình có nghiệm $(2,2,2,2)$.
3. Nếu $k=3$, phương trình có nghiệm $(1,1,2,2)$.
4. Nếu $k=4$, phương trình có nghiệm $(1,1,1,1)$.

Như vậy để phương trình có nghiệm nguyên dương thì tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của k là $k \in \{1,2,3,4\}$. □

Bài toán 13 [IMO 2003]. Hãy tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ là một số nguyên dương.

Lời giải

Giả sử tồn tại cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn điều kiện bài toán. Đặt $k=\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ thì k là một số nguyên dương. Cố định k và xét tập hợp

$$S=\{(a,b);a,b\in\mathbb{Z}^+ \mid a^2-2akb^2+k(b^3-1)=0\}.$$

Như vậy ta ta có $S \neq \varnothing$. Do $k\in\mathbb{Z}^+$ nên với $(a,b)\in S$ ta có $2ab^2-b^3+1>0$ suy ra

$$b^2(2a-b)>-1 \Rightarrow b^2(2a-b)\geqslant 0.$$

Do đó $2a=b$ hoặc $2a>b$. Nếu $2a>b$ thì do $k\geqslant 1$ nên ta được

$$a^2 \geqslant 2ab^2-b^3+1 > b^2(2a-b)\geqslant b^2.$$

Từ đó suy ra nếu $(a,b)\in S$ thì $2a=b$ hoặc $a>b$. Gọi (a_0,b_0) là một phần tử bất kì thuộc S. Xét phương trình $T^2-2Tkb_0^2+k(b_0^3-1)=0$ là phương trình bậc hai ẩn T có một nghiệm là a_0. Gọi nghiệm còn lại a_1, theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} a_0+a_1=2kb_0^2 \\ a_0a_1=k\left(b_0^3-1\right) \end{cases} \tag{1}$$

Như vậy ta được $a_1\in\mathbb{Z}$ và $a_1\geqslant 0$. Nếu $a_1=0$, thì từ (1) ta có $b_0=1$ và $a_0=2k$, như thế thì $(2k,1)$ là một cặp số thỏa mãn điều kiện bài toán. Nếu $a_1\in\mathbb{Z}^+$ thì $(a_1,b_0)\in S$. Không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1\geqslant a_0$. Chú ý rằng, theo nhận xét ở trên thì $2a_0=b_0$ hoặc $a_0>b_0$. Nếu $a_0>b_0$ thì ta có ngay $a_1\geqslant a_0>b_0$, kết hợp với (1) ta thu được

$$kb_0^2 \leqslant a_1=\frac{k(b_0^3-1)}{a_0}\leqslant\frac{k(b_0^3-1)}{b_0}<kb_0^2.$$

Điều này mâu thuẫn. Với $2a_0=b_0$ thì ta được $(k,2k)$ là một cặp số thỏa mãn điều kiện bài toán. Từ hệ thức $a_0a_1=k(b_0^3-1)$ ta thu được $(8k^3-1,2k)$ là một cặp số cần tìm. Vậy các cặp số (a,b) thỏa mãn điều kiện bài toán $(2k,1)$, $(k,2k)$ và $(8k^3-1,2k)$ với k là số nguyên không âm.

Bài toán 14. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2+t^2-Nxyzt-N=0$ trong đó N là một số nguyên dương cho trước.

a) Chứng tỏ rằng, có vô số giá trị nguyên dương N để phương trình trên có nghiệm nguyên dương (nghĩa là mỗi nghiệm gồm 4 số nguyên dương x, y, z, t).

b) Cho $N = 4^k(8m+7)$ với k, m là các số nguyên không âm. Chứng minh rằng, khi đó phương trình trên không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

a) Biến đổi phương trình tương đương

$$x^2+y^2+z^2+t^2-Nxyzt-N=0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow t(t-Nxyzt) = N-\left(x^2+y^2+z^2\right) \tag{2}$$

Với ba số nguyên dương bất kỳ a, b, c và $N = a^2+b^2+c^2$ thì dễ thấy phương trình (2) có nghiệm

$$x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c, t_0 = Nabc = \left(a^2+b^2+c^2\right)abc \tag{*}$$

Chú ý rằng khi hoán vị bốn số $a, b, c, Nabc$ ta lại được nghiệm (x_1, y_1, z_1, t_1) của phương trình (1).

b) Giả sử phương trình (1) có nghiệm nguyên dương, chọn (x_0, y_0, z_0, t_0) là nghiệm nguyên dương của (1) sao cho tổng $x_0+y_0+z_0+t_0$ là số nguyên dương nhỏ nhất. Không làm mất tính chất tổng quát, giả sử rằng $x_0 \leqslant y_0 \leqslant z_0 \leqslant t_0$. Ta sẽ chứng minh rằng với $N \geqslant 7$ thì nghiệm nguyên dương của phương trình (1) với $x_0 \leqslant y_0 \leqslant z_0 \leqslant t_0$ nếu có phải có dạng $(*)$ như trên.

Theo giả thiết t_0 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2 - Nx_0y_0z_0t + x_0^2+y_0^2+z_0^2-N = 0 \tag{3}$$

Phương trình (3) có nghiệm thứ hai t_1 thoả mãn

$$\begin{cases} t_1 + t_0 = N\left(x_0y_0z_0\right) & (4) \\ t_1 \cdot t_0 = x_0^2+y_0^2+z_0^2-N & (5) \end{cases}$$

Từ (4) suy ra $t_1 \in \mathbb{Z}$. Lại theo giả thiết ta có

$$N\left(1+x_0y_0z_0t_1\right) = t_1^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2 > 0$$

nên ta được $t_1 > -\dfrac{1}{x_0y_0z_0}$, vì $t_1 \in \mathbb{Z}$ nên $t_1 \geqslant 0$. Giả sử $t_1 > 0$ khi đó (x_0, y_0, z_0, t_1) là nghiệm nguyên dương của (1). Do cách chọn (x_0, y_0, z_0, t_0) thì

$$x_0+y_0+z_0+t_1 \geqslant x_0+y_0+z_0+t_0 \Rightarrow t_1 \geqslant t_0$$

Từ đó theo (5) ta có

$$t_0^2 \leqslant t_1t_0 = x_0^2+y_0^2+z_0^2-N < x_0^2+y_0^2+z_0^2 \leqslant 3z_0^2$$

Ta có

$$N\left(1+x_0y_0z_0^2\right) \leqslant N\left(1+x_0y_0z_0t_0\right) = x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2 \leqslant z_0^2+z_0^2+z_0^2+3z_0^2 = 6z_0^2$$

Từ đó, do $N \geqslant 7$, nên ta suy ra được

$$N\left(1+x_0y_0z_0^2\right) \leqslant 6z_0^2 < Nz_0^2 \Rightarrow 1+x_0y_0z_0^2 < z_0^2$$

Điều vô lý này chứng tỏ $t_1 > 0$ là sai, suy ra $t_1 = 0$. Từ $(4), (5)$ suy ra

$$\begin{cases} N = x_0^2+y_0^2+z_0^2 \\ t_0 = Nx_0y_0z_0 \end{cases}$$

là nghiệm $(*)$ của phương trình (1). Với $N = 4^k(8m+7) \geqslant 7$, áp dụng kết quả trên thì $N = x^2+y^2+z^2$. Do đó nếu chứng minh được phương trình $x^2+y^2+z^2 = 4^k(8m+7)$ không có nghiệm nguyên dương thì phương trình (1) cũng không có nghiệm nguyên dương. Ta xét các trường hợp sau.

1. Khi $k=0$ ta có $x^2+y^2+z^2=8m+7$ hay $x^2+y^2+z^2\equiv 7(\mathrm{mod}8)$. Trong ba số x,y,z phải có một số lẻ hoặc cả ba số lẻ. Nếu số a lẻ thì $a^2\equiv 1 \pmod 8$, do đó $x^2+y^2+z^2\neq 7(\mathrm{mod}8)$.
2. Khi $k>0$ ta có
$$x^2+y^2+z^2=4^k(8m+7) \tag{**}$$
hay $x^2+y^2+z^2\equiv 0(\mathrm{mod}4)$. Trong ba số x,y,z phải có một số chẵn hoặc ba số chẵn. Nếu có một số chẵn, còn hai số a,b lẻ thì $a^2+b^2\equiv 2(\mathrm{mod}4)$, suy ra $x^2+y^2+z^2\neq 7(\mathrm{mod}8)$. Nếu x,y,z đều chẵn, đặt $x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1$ thì $(**)$ tương đương với
$$x^2+y^2+z^2=4^{k-1}(8m+7)$$
Sau k lần biến đổi như thế ta có $x^2+y^2+z^2=8m+7$, nhưng phương trình này vô nghiệm nguyên dương như khi xét $k=0$.

Bài toán được giải quyết. □

5 Các bài toán tổng hợp.

5.1 Đề bài

Câu 1. Cho a,b,k là các số nguyên dương thỏa mãn $k=\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab+1}$. Chứng minh rằng k là một số chính phương.
Câu 2. Cho các số nguyên dương a,b thỏa mãn $\dfrac{ab(5a^2+5b^2-2)}{5ab-1}\in\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $a=b$.
Câu 3. Cho các số nguyên dương x,y,A thỏa mãn hệ thức $A=\dfrac{x^2+y^2+30}{xy}$. Chứng minh rằng A là lũy thừa bậc năm của một số nguyên.
Câu 4. Cho các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$ nhận giá trị nguyên dương. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$ có thể biểu diễn được thành tổng của hai số chính phương.
Câu 5. Cho a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn $0<a^2+b^2-abc\leqslant c$. Chứng minh rằng a^2+b^2-abc là số chính phương.
Câu 6. Cho $m>n$ là các số nguyên dương lẻ và n^2-1 chia hết cho m^2-n^2+1. Chứng minh rằng m^2-n^2+1 là một số chính phương.
Câu 7. Cho x và y là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện x^2+y^2+1 chia hết cho $2xy+1$. Chứng minh rằng $x=y$.
Câu 8. Cho a,b là các số nguyên dương lẻ thỏa mãn a^2+2 chia hết cho b và b^2+2 chia hết cho a. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+b^2+2}{ab}$ là số chính phương.
Câu 9. Cho các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $b^2+1=ac$ và $c^2+1=bd$. Chứng minh rằng $a+c=3b$ và $b+d=3c$.
Câu 10. Giả sử phương trình $x^2+y^2+x+y+1=xyz$ có nghiệm nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của z.
Câu 11. Tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x+1$ chia hết cho y và $y+1$ chia hết cho x.
Câu 12. Tìm các số nguyên dương x,y để x^2+2 chia hết cho $xy+1$.
Câu 13. Tìm tất cả các số có ba chữ số chia hết cho 11 sao cho thương số của phép chia số đó cho 11 bằng tổng bình phương của các chữ số của số đó.
Câu 14 [Kiran Kedlaya]. Cho các số nguyên dương a,b,c là thỏa mãn $(ab+1)(bc+1)(ca+1)$ là số chính phương. Chứng minh rằng ba số $ab+1; bc+1; ca+1$ đều là số chính phương.
Câu 15. Tồn tại hay không năm số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5$ thỏa mãn hệ điều kiện
$$\begin{cases} a_2^2+1=(a_1+1)(a_3+1)\\ a_3^2+1=(a_2+1)(a_4+1)\\ a_4^2+1=(a_3+1)(a_5+1)\end{cases}$$

5.2 Hướng dẫn giải - Lời giải

Câu 1. Cho a, b, k là các số nguyên dương thỏa mãn $k = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{ab + 1}$. Chứng minh rằng k là một số chính phương.

Lời giải. Trước tiên ta sẽ cố định k và xét tập

$$S = \left\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab + 1}\right\}$$

Giả sử phản chứng k không là số chính phương, khi đó trong các phần tử của S ta chọn ra cặp (A, B) thỏa mãn điều kiện $A + B$ là nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $A > B > 0$. Xét phương trình bậc hai ẩn x

$$k = \frac{x^2 + xB + B^2}{xB + 1} \Leftrightarrow x^2 + (B - kB)x + B^2 - k = 0$$

Phương trình này hiển nhiên có hai nghiệm là A và x_0, khi đó theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_0 + A = kB - B & (1) \\ x_0.A = B^2 - k & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta suy ra được x_0 là số nguyên.

1. Nếu $x_0 < 0$ thì $x_0 \leqslant -1 \Rightarrow x^2 - (Bk - B)x + B^2 - k \geqslant x^2 + (Bk - B) + B^2 - k > 0$, điều này là mâu thuẫn.
2. Nếu $x_0 = 0$ thì $k = B^2$ là một số chính phương, trường hợp này loại.
3. Nếu $x_0 > 0$ thì $(x_0, B) \in S$.

Như vậy ta được

$$x_0 + B = \frac{B^2 - k}{A} + B < \frac{B^2}{A} + B < \frac{A^2}{A} + B = A + B$$

điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của tổng $A + B$. Do đó giả thiết phản chứng là sai, từ đó ta có k phải là một số chính phương. □

Câu 2. Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $\dfrac{ab(5a^2 + 5b^2 - 2)}{5ab - 1} \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $a = b$.

Lời giải. Vì $\gcd(ab, 5ab - 1) = 1$ nên ta có $\dfrac{5a^2 + 5b^2 - 2}{5ab - 1} \in \mathbb{Z}$. Đặt $\dfrac{5a^2 + 5b^2 - 2}{5ab - 1} = k \in \mathbb{Z}$, ta dễ dàng có được

$$5(a^2 + b^2) - 2 \geqslant 10ab - 2 > 5ab - 1 \Rightarrow k = \frac{5a^2 + 5b^2 - 2}{5ab - 1} > 1 \Rightarrow k \geqslant 2.$$

Xét tập $S = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid k = \dfrac{5a^2 + 5b^2 - 2}{5ab - 1} \in \mathbb{Z}\right\}$. Cố định k và trong các phần tử của S, ta chọn ra cặp số (A, B) nguyên dương thỏa mãn tổng $A + B$ nhỏ nhất. Gỉa sử $A \neq B$, không mất tính tổng quát, xét $A > B$. Xét phương trình bậc hai ẩn x

$$\frac{5x^2 + 5B^2 - 2}{5xB - 1} = k \Leftrightarrow 5x^2 - 5xBk + 5B^2 + k - 2 = 0$$

Dễ thấy phương trình này có một nghiệm là A, gọi nghiệm còn lại là x_0. Theo định lí Viète, ta có

$$\begin{cases} A + x_0 = Bk & (1) \\ Ax_0 = \dfrac{5B^2 + k - 2}{5} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có x_0 nguyên.

1. Nếu $x_0 < 0$ thì $x_0 \leqslant -1 \Rightarrow 5x_0^2 - 5x_0Bk + 5B^2 + k - 2 \geqslant 5 + 5Bk + 5B^2 + k - 2 > 0$, điều này là mâu thuẫn.
2. Nếu $x_0 > 0$ thì $(x_0, B) \in S$. Khi đó do tính nhỏ nhất của tổng $A + B$ mà ta có
$$\begin{aligned} x_0 \geqslant A \Rightarrow \frac{5B^2 + k - 2}{5A} \geqslant A &\Leftrightarrow \frac{5A^2 + 5B^2 - 2}{5AB - 1} - 2 \geqslant 5(A - B)(A + B) \\ &\Leftrightarrow \frac{5(A - B)^2}{5AB - 1} \geqslant 5(A - B)(A + B) \\ &\Leftrightarrow A - B \geqslant (A + B)(5AB - 1). \end{aligned}$$
Rõ ràng điều này vô lí.

Như vậy phải có $x_0 = 0$, suy ra $5B^2 = 2 - k \geqslant 0$, lại có $k \geqslant 2$, do đó $k = 2$. Suy ra
$$\frac{5a^2 + 5b^2 - 2}{5ab - 1} = 2 \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$
Bài toán được giải quyết. □

Câu 3. Cho các số nguyên dương x, y, A thỏa mãn hệ thức $A = \dfrac{x^2 + y^2 + 30}{xy}$. Chứng minh rằng A là lũy thừa bậc năm của một số nguyên.

Lời giải. Gọi $(x_0; y_0)$ là cặp số thỏa mãn đề bài và có tổng $x_0 + y_0$ nhỏ nhất. Ta giả sử $x_0 \leqslant y_0$. Xét phương trình bậc hai ẩn y
$$y^2 - A.x_0.y + x_0^2 + 30 = 0 \tag{*}$$
Vì $(x_0; y_0)$ thỏa mãn đề bài nên y_0 là một nghiệm của phương trình $(*)$. Gọi nghiệm còn lại là y_1. Theo định lí Viète ta có
$$\begin{cases} y_0 + y_1 = Ax_0 & (1) \\ y_0y_1 = x_0^2 + 30 & (2) \end{cases}$$
Ta có $x_0, y_0, A \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) suy ra $y_1 \in \mathbb{Z}$. Các cặp $(x_0; y_0)\,; (x_0; y_1)$ đều thỏa mãn $(*)$ mà $x_0 + y_0$ nhỏ nhất nên ta được
$$x_0 + y_0 \leqslant x_0 + y_1 \Leftrightarrow y_0 \leqslant y_1.$$
Như vậy $x_0 \leqslant y_0 \leqslant y_1$. Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Nếu $x_0 = y_0$ khi đó ta thay vào A thì ta được
$$A = 2 + \frac{30}{x_0^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow A = 32$$
- **Trường hợp 2**. Nếu $y_0 = y_1$ thì từ (2) ta được
$$x_0^2 + 30 = y_0^2 \Leftrightarrow (y_0 + x_0)(y_0 - x_0) = 30$$
Dễ thấy $y_0 + x_0; y_0 - x_0$ cùng tính chẵn lẻ mà $30 = 1.30 = 2.15 = 5.6 = 3.10$. Trường hợp này không xảy ra.
- **Trường hợp 3.** Nếu $x_0 < y_0 < y_1$, thì ta suy ra
$$\begin{cases} y_0 \geqslant x_0 + 1 \\ y_1 \geqslant x_0 + 2 \end{cases}$$
Do đó từ (2) suy ra
$$x_0^2 + 30 \geqslant (x_0 + 1)(x_0 + 2) \Leftrightarrow x_0 \leqslant 9$$
Khi $x_0 = 9$ thì từ (2) suy ra $y_0y_1 = 9^2 + 30 = 111$, vì $y_0 < y_1 \Rightarrow (y_0; y_1) = (1; 111); (3; 37)$. Điều này là vô lí vì phải có $x_0 < y_0$. Tương tự khi xét $x = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$. Tất cả đều dẫn đến vô lí. Trường hợp này loại.

Do đó ta luôn có $A = 32 = 2^5$ là lũy thừa bậc năm của một số nguyên. □

Câu 4. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$ nhận giá trị nguyên dương. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$ có thể biểu diễn được thành tổng của hai số chính phương.

Lời giải. Ta đặt $n = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz+1}$, khi đó ta sẽ chứng minh n là tổng của hai số chính phương. Viết lại đẳng thức trên thành $x^2+y^2+z^2 = n\left(xyz+1\right)$. Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là một bộ số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán, điều đó có nghĩa là

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2 = n\left(x_0y_0z_0+1\right)$$

Hay ta viết lại được

$$x_0^2 - nx_0y_0z_0 + y_0^2 + z_0^2 - n = 0$$

Xét phương trình bậc hai $x^2 - nxy_0z_0 + y_0^2 + z_0^2 - n = 0$, khi đó ta thấy x_0 là một nghiệm của phương trình. Theo định lí Viète thì ngoài nghiệm x_0 phương trình còn có một nghiệm nữa, ta gọi nghiệm đó là x_1. Như vậy theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_0 = ny_0z_0 \\ x_1x_0 = y_0^2 + z_0^2 - n \end{cases}$$

Từ hệ thức trên ta suy ra được x_1 nhận giá trị nguyên. Không mất tính tổng quát ta chọn $x_0+y_0+z_0$ bé nhất và $x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0$. Ta xét các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Nếu $y_0^2+z_0^2 < n$, khi đó x_1 là số nguyên âm. Từ đó suy ra

  $$0 = x_1^2 - ny_0z_0x_1 + y_0^2 + z_0^2 - n \geqslant x_1^2 + n + y_0^2 + z_0^2 - n = x_1^2 + y_0^2 + z_0^2 > 0$$

  điều này vô lí.

- **Trường hợp 2.** Nếu $y_0^2+z_0^2 > n$, khi đó x_1 là số nguyên dương. Khi đó $(x_1; y_0; z_0)$ là một bộ số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo cách chọn $(x_0; y_0; z_0)$ ta suy ra được $x_0 \leqslant x_1$. Khi đó từ định lí Viète ta có

  $$y_0^2 + z_0^2 - n - ny_0z_0 = \left(x_0-1\right)\left(x_1-1\right) - 1 \geqslant \left(x_0-1\right)^2 - 1$$

  Ta lại xét 2 khả năng sau.

  1. Nếu $x_0 > y_0$ thì ta được $\left(x_0-1\right)^2 - 1 \geqslant y_0^2 - 1$. Do đó

     $$y_0^2 + z_0^2 - n - ny_0z_0 \geqslant y_0^2 - 1$$

     Từ đó suy ra $z_0^2 + 1 \geqslant ny_0z_0 + n \geqslant n\left(z_0^2+1\right)$, như vậy ta có $n = 1$.

  2. Nếu $x_0 = y_0$, khi đó ta được $2y_0^2 + z_0^2 = n\left(y_0^2z_0+1\right)$. Do đó

     $$z_0^2 = y_0^2\left(nz_0-2\right) + n \geqslant z_0^2\left(nz_0-2\right) + n > z_0^2\left(nz_0-2\right)$$

     Từ đây ta suy ra được $nz_0 < 3$ nên $n = 1$ hoặc $n = 2$, chú ý rằng $n = 1 = 0^2 + 1^2$ và $n = 2 = 1^2 + 1^2$.

- **Trường hợp 3.** Nếu $y_0^2 + z_0^2 = n$ thì có nghĩa là n viết được thành tổng của hai số chính phương.

Vậy bài toán được chứng minh xong. □

Câu 5. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $0 < a^2+b^2-abc \leqslant c$. Chứng minh rằng a^2+b^2-abc là số chính phương.

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $0 < a^2 + b^2 - abc \leqslant c$ mà $k = a^2 + b^2 - abc$ không phải là số chính phương. Khi đó ta có $0 < k \leqslant c$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geqslant b$. Xét phương trình bậc hai ẩn x là

$$x^2 - bcx + b^2 - k = 0$$

Khi đó a là một nghiệm của phương, khi đó theo định lí Viète thì phương trình còn có một nghiệm nữa là $x = a_1$. Từ đó ta được

$$\begin{cases} a + a_1 = bc \\ a.a_1 = b^2 - k \end{cases}$$

Như vậy ta suy ra a_1 là số nguyên.

1. Nếu $a_1 = 0$, khi đó từ hệ thức $a.a_1 = b^2 - k$ ta được $k = b^2$ là số chính phương, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên.
2. Nếu $a_1 < 0$, khi đó $k = a_1^2 + b^2 - a_1 bc \geqslant a_1^2 + b^2 + bc > c$, mâu thuẫn do $0 < k \leqslant c$.

Như vậy ta được a_1 là số nguyên dương. Cũng theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{b^2 - k}{a} \\ \dfrac{b^2 - k}{a} < a \end{cases} \Rightarrow a_1 < a$$

Ta thấy cặp số $(a_1; b)$ cũng là một nghiệm. Khi đó ta có $a_1 + b < a + b$, điều này sẽ vô lí khi ta chọn cặp số $(a; b)$ với $a + b$ bé nhất. Như vậy không thể tồn tại k để $k = a^2 + b^2 - abc$ không phải là số chính phương. Như vậy $a^2 + b^2 - abc$ phải là số chính phương. □

Câu 6 [Taiwan MO 1998]. Cho $m > n$ là các số nguyên dương lẻ và $n^2 - 1$ chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$. Chứng minh rằng $m^2 - n^2 + 1$ là một số chính phương.

Lời giải. Theo giả thiết ta có $n^2 - 1$ chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$ nên ta được $m^2 - \left(m^2 - n^2 + 1\right)$ chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$. Từ đó suy ra

$$\left(m^2 - n^2 + 1\right) \mid m^2$$

Từ điều trên ta suy ra tồn tại k để

$$m^2 = k\left(m^2 - n^2 + 1\right)$$

Ở đây ta chú ý rằng $m^2 = \left(\dfrac{m+n}{2} + \dfrac{m-n}{2}\right)^2$ và $m^2 - n^2 + 1 = 4.\dfrac{m+n}{2}.\dfrac{m-n}{2} - 1$. Do m và n là các số nguyên dương lẻ, lại có $m > n$ nên $\dfrac{m+n}{2}; \dfrac{m-n}{2}$ là các số nguyên dương, đặt $x = \dfrac{m+n}{2}; y = \dfrac{m-n}{2}$, khi đó ta được

$$(x + y)^2 = k(4xy + 1)$$

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh rằng $4xy + 1$ là số chính phương, tuy nhiên trước tiên ta cần phải chứng minh k là số chính phương. Thật vậy, giả sử cặp số nguyên dương $(x_0; y_0)$ với $x_0 + y_0$ nhỏ nhất thỏa mãn thỏa đẳng thức trên, khi đó ta có

$$(x_0 + y_0)^2 = k(4x_0 y_0 + 1)$$

Xét phương trình bậc hai ẩn x là $x^2 - (4k - 2) y_0 x + y_0^2 - k = 0$. Khi đó x_0 là một nghiệm của phương trình trên. Như vậy theo định lí Viète thì phương trình còn có một nghiệm nữa là x_1, lúc này ta có

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = (4k - 2) y_0 \\ x_0.x_1 = y_0^2 - k \end{cases}$$

Từ hệ thức thứ nhất $x_0 + x_1 = (4k - 2) y_0$ ta suy ra được x_1 là số nguyên. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x_1 < 0$ thì từ hệ thức thứ hai $x_0.x_1 = y_0^2 - k$ ta được $y_0^2 - k < 0 \Rightarrow y_0^2 < k$, ta suy ra
$$x_1^2 - (4k-2)\,y_0x_1 + y_0^2 - k = (x_1+y_0)^2 + k\,(-4x_1 - 1) > 0$$
điều này mâu thuẫn vì x_1 là nghiệm của phương trình.
- Nếu $x_1 = 0$, khi đó từ $x_0.x_1 = y_0^2 - k$ ta được $y_0^2 - k = 0 \Rightarrow k = y_0^2$ là số chính phương.
- Nếu $x_1 > 0$ thì ta được $y_0^2 - k > 0 \Rightarrow k > y_0^2$. Khi đó $(x_1; y_0)$ là một nghiệm của phương trình $(x+y)^2 = k\,(4xy+1)$. Theo cách chọn cặp số $(x_0; y_0)$ ta có
$$x_0 + y_0 \leqslant x_1 + y_0 \Rightarrow y_0 \leqslant x_0 \leqslant x_1$$
Kéo theo $y_0^2 - (4k-2)\,y_0^2 + y_0^2 - k = (4-4k)\,y_0^2 - k \geqslant 0$, điều này vô lí vì k là số nguyên dương.

Vậy ta được k là số chính phương nên dẫn đến $m^2 - n^2 + 1$ là số chính phương. □

Câu 7. Cho x và y là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + 1$ chia hết cho $2xy + 1$. Chứng minh rằng $x = y$.

Lời giải. Do $2xy + 1 \mid x^2 + y^2 + 1$ nên ta đặt $k = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{2xy + 1}$ với k là số nguyên dương. Nhận thấy khi $x = y$ thì $k = 1$ và ngược lại vẫn đúng. Do đó ta đi chứng minh $k = 1$. Giả sử cặp số nguyên dương $(a_0; b_0)$ với $a_0 + b_0$ bé nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 \geqslant b_0$. Xét phương trình
$$k = \frac{x^2 + b_0^2 + 1}{2xb_0 + 1} \Leftrightarrow x^2 - 2kb_0x + b_0^2 + 1 - k = 0$$
Khi đó ta có
$$\Delta' = b_0^2k^2 - b_0^2 - 1 + k = (k-1)\left[b_0^2\,(k+1) + 1\right] \geqslant 0$$
Do đó phương trình luôn có nghiệm. Dễ thấy a_0 là một nghiệm của phương trình nên theo định lí Viète thì phương trình còn có thêm một nghiệm nữa là a_1. Khi đó ta có
$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 2kb_0 \\ a_0.a_1 = b_0^2 - k + 1 \end{cases}$$
Từ hệ thức thứ nhất ta được a_1 là số nguyên. Giả sử $a_1 < 0$, khi đó
$$a_1^2 - 2kb_0a_1 + b_0^2 + 1 - k > a_1^2 + 2kb_0 + b_0^2 + 1 - k > 0$$
điều này vô lí vì a_1 là một nghiệm của phương trình $x^2 - 2kb_0x + b_0^2 + 1 - k = 0$, suy ra $a_1 \geqslant 0$. Ta xét các trường hợp sau.

- **Trường hợp 1.** Nếu $a_1 = 0$, khi đó ta được $a_1b_0 = 0$, điều này dẫn đến $xy = 0$.
- **Trường hợp 2.** Nếu $a_1 > 0$, khi đó nếu $a_0 > b_0$ thì ta được
$$a_1 + b_0 = \frac{b_0^2 - k + 1}{a_0} + b_0 < \frac{a_0^2 - 1 + 1}{a_0} + b_0 = a_0 + b_0$$
Đều này mâu thuẫn với các chọn $(a_0; b_0)$ với $a_0 + b_0$ bé nhất.

Như vậy $a_0 = b_0$, suy ra $k = \dfrac{2a_0^2 + 1}{2a_0^2 + 1} = 1$. Do đó ta được $x = y$. □

Câu 8. Cho a, b là các số nguyên dương lẻ thỏa mãn $a^2 + 2$ chia hết cho b và $b^2 + 2$ chia hết cho a. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2 + b^2 + 2}{ab}$ là số chính phương.

Lời giải. Ta thấy rằng a, b là 2 số nguyên tố cùng nhau. Thật vậy nếu $d = (a, b)$ thì do $b \mid a^2 + 2$ nên $d \mid a^2 + 2$, lại có $d \mid a$ nên $d \mid 2$. Mặt khác a, b là số lẻ nên suy ra $d = 1$. Do $b \mid a^2 + 2$ và $a \mid b^2 + 2$ nên

$$ab \mid \left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right) \Leftrightarrow ab \mid 2a^2 + 2b^2 + 4$$

Do a và b là số lẻ nên suy ra $ab \mid a^2 + b^2 + 2$. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $a^2 + b^2 + 2 = kab$. Bây giờ ta sẽ đi chứng minh k là số chính phương. Trước tiên thử một vài giá trị đặc biệt ta nhận thấy được $k = 4$. Đến đây thì tư tưởng giống như các ví dụ trên đó là sử dụng định lý Vièta đển chứng minh $k = 4$ thỏa mãn bài toán. Giả sử cặp số dương $(a_0; b_0)$ với $a_0 + b_0$ nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là ta sẽ có

$$a_0^2 + b_0^2 + 2 - ka_0b_0 = 0$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_0 \geqslant b_0$. Xét phương trình bậc hai ẩn a

$$a^2 - kb_0a + b_0^2 + 2 = 0$$

Khi đó ta thấy a_0 là một nghiệm của phương trình trên. Khi đó theo định lí Viète thì phương trình trên còn có một nghiệm nữa, ta gọi là a_1, từ đó ta có

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = kb_0 \\ a_0 + a_1 = b_0^2 + 2 \end{cases}$$

Từ hệ thức trên ta thu được a_1 là số nguyên dương. Như vậy cặp số $(a_1; b_0)$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo cách chọn cặp số $(a_0; b_0)$ ta được

$$a_0 + b_0 \leqslant a_1 + b_0 \Rightarrow a_0 \leqslant a_1$$

Từ đó ta có

$$a_0 = kb_0 - a_1 \leqslant kb_0 - a_0 \Rightarrow \frac{a_0}{b_0} \leqslant \frac{k}{2}$$

Mặt khác từ điều kiện $a_0^2 + b_0^2 + 2 - ka_0b_0 = 0$ ta lại được

$$\frac{a_0}{b_0} + \frac{b_0}{a_0} + \frac{2}{a_0b_0} = k$$

Do $\dfrac{a_0}{b_0} \leqslant \dfrac{k}{2}$ nên $k \leqslant \dfrac{k}{2} + 2 + 1$ hay $k \leqslant 6$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$a_0^2 + b_0^2 \geqslant 2a_0b_0 \Rightarrow k > 2$$

Đến đây ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $k = 3$, khi đó ta được $a_0^2 + b_0^2 + 2 = 3a_0b_0$. Từ đó suy ra $3 \mid a_0^2 + b_0^2 + 2$ Do số chính phương chia 3 dư 1 nên trong hai số chính phương a_0^2 và b_0^2 phải có một số chia hết cho 3 và một số không chia hết cho 3. Từ đó suy ra vế phải chia hết cho 9 còn vế trái không chia hết cho 9. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

2. Nếu $k \neq 4$, khi đó từ $\dfrac{a_0}{b_0} + \dfrac{b_0}{a_0} + \dfrac{2}{a_0b_0} = k$ ta được $(a_0; b_0) \neq (1; 1)$.

Như vậy ta được $k \leqslant \dfrac{k}{2} + 1 + 1$ hay $k \leqslant 4$, do đó $k = 5$ và $k = 6$ không thỏa mãn bà toán. Vậy ta suy ra được chỉ có $k = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 9. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $b^2 + 1 = ac$ và $c^2 + 1 = bd$. Chứng minh rằng $a + c = 3b$ và $b + d = 3c$.

Lời giải. Từ giả thiết ta thấy $(b, c) = 1$. Thật vậy, gọi $(b, c) = k$ khi đó ta có

$$\begin{cases} b = b'k \\ c = c'k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kac' \mid k^2b'^2 + 1 \\ kdb' \mid k^2c'^2 + 1 \end{cases}$$

Từ đó ta được $k^2adb'c' \mid \left(k^2b'^2+1\right)\left(k^2c'^2+1\right)$, suy ra

$$k^2 \mid \left(k^2b'^2+1\right)\left(k^2c'^2+1\right) \Rightarrow k^2 \mid k^4b'^2c'^2+k^2b'^2+k^2c'^2+1 \Rightarrow k^2 \mid 1 \Rightarrow k=1$$

Hơn nữa từ giả thiết ta lại có $\begin{cases} b^2+1=ac \\ c^2+1=bd \end{cases}$ do vậy ta được $\begin{cases} b \mid c^2+1 \\ c \mid b^2+1 \end{cases}$.
Như vậy $ab \mid b^2+c^2+1$ hay $b^2+c^2+1=mbc$ với số nguyên dương m nào đó. Đến đây sử dụng kết quả của **bài toán 4** trong phần **bước nhảy Viète** ta có được $m=3$, khi đó thì $b^2+c^2+1=3bc$. Từ đây suy ra

$$\begin{cases} b^2+1=ac \\ c^2+1=bd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+c^2+1=c^2+ac \\ b^2+c^2+1=b^2+bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac+c^2=3bc \\ b^2+bd=3bc \end{cases}$$

Hay ta được $\begin{cases} a+c=3b \\ b+d=3c \end{cases}$, vậy bài toán được chứng minh. □

Câu 10. Giả sử phương trình $x^2+y^2+x+y+1=xyz$ có nghiệm nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của z.

Lời giải. Trước tiên ta giả sử cặp số nguyên dương $(x_0;y_0)$ với x_0+y_0 nhỏ nhất thỏa mãn thỏa đẳng thức trên. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \geqslant y_0$, khi đó ta được

$$x_0^2+y_0^2+x_0+y_0+1=zx_0y_0$$

Xét phương trình bậc hai ẩn x là

$$y^2+(1-zx_0)\,y+x_0^2+x_0+1=0$$

Khi đó y_0 là một nghiệm của phương trình trên, mà theo hệ thức Viète thì phương trình còn có một nghiệm nữa là y_1. Do đó ta được

$$\begin{cases} y_0+y_1=zx_0-1 \\ y_0.y_1=x_0^2+x_0+1 \end{cases}$$

Từ các hệ thức trên ta suy ra được y_1 có giá trị nguyên dương. Khi đó xặp số nguyên dương $(y_1;x_0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Theo cách chọn cặp số $(x_0;y_0)$ ta suy ra được $y_0 \leqslant y_1$. Ta xét các trường hợp sau.

- Nếu $x_0=y_0$ thì từ $x_0^2+y_0^2+x_0+y_0+1=zx_0y_0$ ta suy ra

  $$2x_0^2+2x_0+1=zx_0^2$$

  Từ đó ta được $x_0=y_0=1$ và $z=5$.

- Nếu $x_0>y_0$ thì ta được $y_0<x_0<y_1$, khi đó ta được

  $$x_0^2+(1-zx_0)\,x_0+x_0^2+x_0+1<0 \Rightarrow x<2+\frac{2}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}$$

  Đến đây ta xét các giá trị $x_0 \geqslant 2$ đều không tìm được z thỏa mãn.

Như vậy $z=5$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Câu 11. Tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x+1$ chia hết cho y và $y+1$ chia hết cho x.

Lời giải. Do $x+1$ chia hết cho y và $y+1$ chia hết cho x nên ta được $(x+1)(y+1)$ chia hết cho xy. Từ đó suy ra

$$xy \mid (x+y+1) \Rightarrow xy \mid (x+y+1)^2$$

Đến đây biến đổi tiếp ta được $xy \mid \left(x^2+y^2+2x+2y+1\right)$. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $x^2+y^2+2x+2y+1=kxy$. Giả sử cặp số nguyên dương $(x_0;y_0)$ với x_0+y_0 nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó ta được

$$x_0^2+y_0^2+2x_0+2y_0+1-kx_0y_0=0$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \geqslant y_0$. Xét phương trình bậc hai ẩn x là

$$x^2+(2-ky_0)\,x+(y_0+1)^2=0$$

Khi đó x_0 là một nghiệm của phương trình. Như vậy theo định lí Viète thì phương trình trên còn có một nghiệm khác là x_1. Do đó ta được

$$\begin{cases} x_0+x_1=ky_0-2 \\ x_0.x_1=(y_0+1)^2 \end{cases}$$

Từ hệ thức $x_0+x_1=ky_0-2$ ta suy ra được x_1 là số nguyên. Từ hệ thức $x_0.x_1=(y_0+1)^2$ ta suy ra được x_1 là số nguyên dương. Chú ý rằng lúc này cặp số nguyên dương $(x_1;y_0)$ thỏa mãn bài toán. Ta có

$$x_0+y_0 \leqslant x_1+y_0 \Rightarrow x_0 \leqslant x_1$$

do vậy ta được $y_0 \leqslant x_0 \leqslant x_1$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $x_0=y_0$, khi đó ta được

   $$2x_0^2+4x_0+1=kx_0^2 \Rightarrow k=2+\frac{1}{x_0^2}+\frac{4}{x_0}$$

   Do k là số nguyên dương nên ta suy ra được $x_0=1$ thỏa mãn, do đó suy ra $x_0=y_0=1$ thỏa mãn bài toán.

2. Nếu $x_0=x_1>y_0 \geqslant 1$, khi đó từ $x_0.x_1=(y_0+1)^2$ ta được $x_0=y_0+1$. Thay vào hệ thức $x_0+x_1=ky_0-2$ ta được

   $$2x_0=k\,(x_0-1)-2 \Leftrightarrow k=2+\frac{4}{x_0-1}$$

   Do k và x_0 là các số nguyên dương nên ta tìm được $x_0=2$, $x_0=3$ và $x_0=5$, tương ứng thì $y_0=1$, $y_0=2$ và $y_0=4$. Tuy nhiên khi thử vào bài toán thì ta thấy có hai cặp số nguyên dương thỏa mãn đó là $(2;1)\,,(3;2)$.

3. Nếu $x_1>x_0>y_0>1$, khi đó ta được $x_1 \geqslant x_0+1 \geqslant y_0+2$. Từ đó ta được

   $$x_0.x_1 \geqslant (y_0+2)\,(y_0+1)>(y_0+1)^2$$

   Do đó trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy các cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $(x;y)=(1;1)\,,(1;2)\,,(2;1)\,,(2;3)\,,(3;2)$. □

Câu 12. Tìm các số nguyên dương x,y để x^2+2 chia hết cho $xy+1$.

Lời giải. Ta biến đổi giả thiết thành $x^2-mxy+2-m=0$, khi đó giả sử cặp số nguyên dương $(x_0;y_0)$ với x_0+y_0 bé nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là ta có $x_0^2+2=m\,(x_0y_0+1)$. Xét phương trình bậc hai ẩn x là

$$x^2-mxy_0-m+2=0$$

Khi đó x_0 là một nghiệm của phương trình trên. Theo định lí Viète thì phương trình trên còn có một nghiệm nữa, gọi nghiệm đó là x_1. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_0+x_1=my_0 \\ x_0.x_1=2-m \end{cases}$$

Từ hệ thức $x_0 + x_1 = my_0$ ta suy ra x_1 là số nguyên. Mặt khác nếu $x_1 < 0$, khi đó ta được $x_1 \leqslant -1$. Do đó

$$x_1^2 - mx_1y_0 - m + 2 \geqslant x_1^2 + my_0 - m + 2 > 0$$

Điều này mâu thuẫn với x_1 là nghiệm của phương trình trên. Như vậy $x_1 \geqslant 0$ hay x_1 là số nguyên không âm. Do đó từ hệ thức $x_0.x_1 = 2 - m$ ta được

$$2 - m \geqslant 0 \Rightarrow m \in \{1; 2\}$$

Ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $m = 1$, khi đó ta được $x(x - y) = -1$ nên ta được $x = 1; y = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
2. Nếu $m = 2$, khi đó $x(x - 2y) = 0$. Lại do $x \neq 0$ nên suy ra $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$. Do đó $x = 2k; y = k$ với k là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn là $(x; y) = (1; 2), (2k; k)$ với k là số nguyên dương. □

Câu 13. Tìm tất cả các số có ba chữ số chia hết cho 11 sao cho thương số của phép chia số đó cho 11 bằng tổng bình phương của các chữ số của số đó.

Lời giải. Gọi số có ba chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A = \overline{abc}$. Trong đó các chữ số thỏa mãn

$$a \in \{1; 2; ...9\}; b, c \in \{0; 1; 2; ...9\}$$

Do A chia hết cho 11 nên ta được $a - b + c$ chia hết cho 11. Kết hợp với $a \in \{1; 2; ...9\}; b, c \in \{0; 1; 2; ...9\}$ ta suy ra được $a - b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 11$. Như vậy ta đi xét hai trường hợp sau

- Với $a - b + c = 0$, khi đó ta được $b = a + c$. Ta có $A = 100a + 10b + c = 99a + 10b + a + c = 99a + 11b$. Khi A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

  $$\frac{A}{11} = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 9a + b = a^2 + b^2 + c^2$$

  Kết hợp với $b = a + c$ ta được

  $$9a + (a + c) = a^2 + (a + c)^2 + c^2 \Leftrightarrow 10a + c = 2a^2 + 2ac + 2c^2$$

  Do $a \geqslant 1$ nên suy ra

  $$10a + c \geqslant 2a^2 + 2c + 2c^2 \Rightarrow 2c^2 + c \leqslant 10a - 2a^2 \leqslant \frac{25}{2}$$

  Do vậy mà $2c^2 + c \leqslant 12 \Rightarrow c \leqslant 2$. Cũng từ $10a + c = 2a^2 + 2ac + 2c^2$ ta suy ra được c là số chẵn. Từ đó ta được $c = 0$ hoặc $c = 2$. Ta xét 2 khả năng.

  1. Với $c = 0$, khi đó ta được $a = b$ nên số cần tìm có dạng $A = \overline{aa0}$. Do đó

     $$\frac{A}{11} = 50 = 2a^2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a = b = 5$$

     Từ đó ta tìm được $A = 550$.
  2. Với $c = 2$, khi đó từ $10a + c = 2a^2 + 2ac + 2c^2$ ta được

     $$10a + 2 = 2a^2 + 4ac + 8 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 3 = 0$$

     Nhận thấy phương trình trên không có nghiệm nguyên dương nên không tồn tại số A thỏa mãn bài toán.

- Với $a-b+c=11$, khi đó ta được $b+11=a+c$. Do a,b,c là các chữ số nên từ $b+11=a+c$ ta suy ra được $a\geqslant 2$. Ta có

$$A=100a+10b+c=99a+10b+a+c=99a+11b+11$$

Ta xét các khả năng sau.

1. Xét $a=2$, khi đó $c=9;b=0$. Ta được $A=209$ không thỏa mãn bài toán.
2. Xét $a=3$, khi đó ta được $c=8;b=0$ hoặc $c=9;b=1$. Ta được $A=308$ hoặc $A=319$ không thỏa mãn.
3. Xét $a\geqslant 4$, khi đó A chia 11 thì thương số của phép chia bằng tổng bình phương các chữ số của A nên ta được

$$\frac{A}{11}=a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow 9a+b+1=a^2+b^2+c^2$$

Kết hợp với $b=a+c-11$ ta được

$$\begin{aligned}&9a+(a+c-11)+1=a^2+(a+c-11)^2+c^2\\&\Leftrightarrow 10a+c-10=2a^2+2ac+2c^2-22(a+c)+121\\&\Leftrightarrow 32a+23c-131=2a^2+2ac+2c^2\end{aligned}$$

Do $a\geqslant 4$ nên suy ra

$$32a+23c-131\geqslant 2a^2+8c+2c^2\Rightarrow 2c^2-15c\leqslant 32a-2a^2-131\leqslant -3$$

Do đó suy ra $2c^2-15c\leqslant -3\Rightarrow c\leqslant 7$. Từ $32a+23c-131=2a^2+2ac+2c^2$ ta suy ra được c là số lẻ. Do đó ta được $c=1;3;5;7$. Đến đây xét các trường hợp của c thì được $b=0;a=8$ thỏa mãn.

Do đó số cần tìm là $A=803$.

Vậy các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là 550 và 803. □

Câu 14 [Kiran Kedlaya]. Cho các số nguyên dương a,b,c là thỏa mãn $(ab+1)(bc+1)(ca+1)$ là số chính phương. Chứng minh rằng ba số $ab+1;bc+1;ca+1$ đều là số chính phương.

Lời giải. Từ giả thiết ta nhận thấy để chứng minh $ab+1;bc+1;ca+1$ đều là số chính ta cần chỉ ta được ba số $ab+1;bc+1;ca+1$ nguyên tố với nhau theo từng đôi một. Tuy nhiên với lượng thông tin hạn chế từ giả thiết ta không thể chứng minh được nhận định trên. Với ý tưởng sử dụng định lí Viète, ta cần tạo ra một phương trình bậc hai có nghiệm nguyên và có biệt thức Δ có chứa biểu thức $(ab+1)(bc+1)(ca+1)$. Ngoài ra do ta cần chứng minh $ab+1;bc+1;ca+1$ đều là số chính phương nên khi biến đổi phương trình bậc hai thì cần chứa các đại lượng $ab+1;bc+1;ca+1$. Xét phương trình bậc hai ẩn t sau

$$\begin{aligned}&t^2+a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca+ta+tb+tc)-4abct-4=0\\&\Leftrightarrow t^2-2t(a+b+c+2abc)+a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)-4=0\end{aligned}$$

Ta nhận thấy phương trình bậc hai trên tương đương với ba phương trình sau

$$\begin{aligned}(a+b-c-t)^2&=4(ab+1)(ct+1)\\(a+c-b-t)^2&=4(ac+1)(bt+1)\\(b+c-a-t)^2&=4(bc+1)(at+1)\end{aligned}$$

Giải phương trình bậc hai trên ta được

$$\left\{\begin{array}{l}t_1=a+b+c+2abc+2\sqrt{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}\\t_2=a+b+c+2abc-2\sqrt{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}\end{array}\right.$$

Do $(ab+1)(bc+1)(ca+1)$ là số chính phương nên t nhận các giá trị nguyên. Từ ba phương trình trên ta được

$$4^3(ab+1)(ac+1)(bc+1)(ct+1)(bt+1)(at+1)$$

là số chính phương, do đó $(ct+1)(bt+1)(at+1)$ là số chính phương, ta lại có

$$at+1\geqslant 0; bt+1\geqslant 0; ct+1\geqslant 0$$

nên $at+1\geqslant 0; bt+1\geqslant 0; ct+1\geqslant 0$. Trong các bộ số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn bài toán ta xét bộ số $(a;b;c)$ sao cho $a+b+c$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát ta chọn $c=\max\{a;b;c\}$. Dễ thấy $a=b=c=1$ không thỏa mãn bài toán nên $c=\max\{a;b;c\}>1$, do đó $t\geqslant\dfrac{-1}{\max\{a;b;c\}}>-1$. Ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $t=0$, khi đó từ phương trình bậc hai ta được

   $$(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)+4\Leftrightarrow(a+b-c)^2=4(ab+1)$$

   Suy ra $ab+1$ là số chính phương. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $bc+1; ca+1$ là các số chính phương.

2. Nếu $t>0$, khi đó do $a+b+c$ có giá trị nhỏ nhất nên ta được $t\geqslant c$ và t chỉ nhận một trong hai giá trị

   $$\begin{cases} t_1=a+b+c+2abc+2\sqrt{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}\\ t_2=a+b+c+2abc-2\sqrt{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}\end{cases}$$

   Mà theo định lí Viète ta có

   $$t_1t_2=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)-4\leqslant c^2-a(2c-a)-b(2c-b)<c^2$$

   Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Nên trường hợp này không có giá trị t thỏa mãn.

Như vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn. □

Câu 15. Tồn tại hay không năm số nguyên dương $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$ thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} a_2^2+1=(a_1+1)(a_3+1)\\ a_3^2+1=(a_2+1)(a_4+1)\\ a_4^2+1=(a_3+1)(a_5+1)\end{cases}$$

Lời giải. Trước hết ta kiểm tra tính chẵn lẻ của các số đã cho trước khi có các đánh giá hợp lí. Giả sử a_1 là số lẻ, khi đó a_2 là số lẻ nên a_2^2+1 chia 4 dư 2, từ đó suy ra a_3+1 là số lẻ, dẫn đến a_3 là số chẵn. Điều này vô lý vì a_2+1 là số chẵn nên không thể là ước của số lẻ a_3^2+1. Do vậy a_1 phải là số chẵn. Lập luận hoàn toàn tương tự ta được $a_2; a_3; a_4; a_5$ cùng là số chẵn. Đặt $a_2=x; a_3=y$. Khi đó từ hệ điều kiện trên ta được $\left(y^2+1\right)\,\vdots\,(x+1)$ và $\left(x^2+1\right)\,\vdots\,(y+1)$. Ta sẽ chứng minh rằng không tồn tại cặp số chẵn x và y thỏa mãn điều trên.

Giả sử tồn tại cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $\left(y^2+1\right)\,\vdots\,(x+1)$ và $\left(x^2+1\right)\,\vdots\,(y+1)$, khi đó ta được

$$\left(y^2+1+x^2-1\right)\,\vdots\,(x+1)\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)\,\vdots\,(x+1)$$

Tương tự ta cũng có $\left(x^2+y^2\right)\,\vdots\,(y+1)$. Gọi $d=(x+1,y+1)$, khi đó d là ước của $x^2+1; y^2+1; x^2+y^2$. Do đó

$$\left[x^2+1+y^2+1-\left(x^2+y^2\right)\right]\,\vdots\,d\Rightarrow 2\,\vdots\,d$$

Như vậy thì $d=1$ hoặc $d=2$. Mà $x+1; y+1$ là các số lẻ, do đó ta được $d=1$ hay $x+1; y+1$ nguyên tố cùng nhau. Từ đó dẫn đến

$$\left(x^2+y^2\right)\,\vdots\,(x+1)(y+1)$$

Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$x^2+y^2=k\left(x+1\right)\left(y+1\right)$$

Trong các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn ta chọn cặp số nguyên dương $(x_0;y_0)$ với x_0+y_0 bé nhất. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \geqslant y_0$. Xét phương trình bậc hai ẩn x là

$$x^2-k\left(y_0+1\right)x+y_0^2-k\left(y_0+1\right)=0$$

Khi đó x_0 là một nghiệm của phương trình. Theo định lí Viète thì còn có một nghiệm nữa là x_1. Khi đó ta có

$$\begin{cases} x_0+x_1=k\left(y_0+1\right) \\ x_0x_1=y_0^2-k\left(y_0+1\right) \end{cases}$$

Nếu $x_1=0$, khi đó từ $x_0x_1=y_0^2-k\left(y_0+1\right)$ ta được $y_0^2=k\left(y_0+1\right)$ nên suy ra $y_0^2\,\vdots\,(y_0+1)$, điều này vô lí vì y_0 và y_0+1 nguyên tố cùng nhau. Do đó $x_1 \neq 0$. Mặt khác ta có

$$\left(x_0+1\right)\left(x_1+1\right)=x_0x_1+x_0+x_1+1=y_0^2+1$$

nên x_1+1 là số lẻ. Do đó $x_1>0$ là số chẵn. Đồng thời ta cũng có

$$x_1+1=\frac{y_0^2+1}{x_0+1}\leqslant\frac{y_0^2+1}{y_0+1}\leqslant y_0\leqslant x_0$$

Như vậy cặp số $(y_0;x_1)$ là một nghiệm của

$$x^2+y^2=k\left(x+1\right)\left(y+1\right)$$

Cặp số $(y_0;x_1)$ thỏa mãn $y_0+x_1\leqslant y_0+x_0$, điều này vô lí vì ta đã chọn x_0+y_0 bé nhất. Vậy điều ta giả sử là sai hay không tồn tại các số chẵn x,y thỏa mãn. Như vậy không tồn tại năm số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

!

Nhận xét. Từ bài toán này, ta có thể giải được các bài toán tương tự sau.

1. Cho các số nguyên dương x,y thỏa mãn x^2+1 chia hết cho $y+1$ và y^2+1 chia hết cho $x+1$. Chứng minh rằng x và y là các số lẻ.
2. Tìm số nguyên dương k để phương trình $x^2+y^2=k\left(x+1\right)\left(y+1\right)$ có nghiệm nguyên dương.
3. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho tồn tại số nguyên dương $a_1;a_2;...;a_n$ thỏa mãn

$$a_k^2=\left(a_{k-1}+1\right)\left(a_{k+1}+1\right)$$

với các số $2\leqslant k\leqslant n-1$.

6 Bài tập tự luyện.

Câu 1. Tìm tất cả các số tự nhiên a,b,c sao cho tồn tại số nguyên dương n,m,k thỏa mãn các điều kiện sau

$$a=\frac{m^2+b}{2m};b=\frac{n^2+c}{2n};c=\frac{k^2+a}{2k}$$

Câu 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$.

Câu 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3\left(x^2-xy+y^2\right)=7\left(x+y\right)$.

Câu 4 [Putnam 1998]. Chứng minh rằng với mỗi số thực N thì phương trình

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$$

có nghiệm (a_1,a_2,a_3,a_4) với a_1,a_2,a_3,a_4 là các số nguyên lớn hơn N.

Câu 5. Giả sử bốn số nguyên a,b,c,d đôi một khác nhau và thoả mãn hệ điều kiện sau

$$\begin{cases} a^2-2ac-5d=b^2-2bc-5d=0 \\ c^2-2ca-5b=d^2-2bd-5b=0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là một hợp số.
Câu 6. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2=0$.
Câu 7 [Turkey National Olympiad 2015]. Với m, n là các số nguyên dương sao cho

$$k=\frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4}$$

cũng là số nguyên. Chứng minh rằng k là số chính phương.
Câu 8. Cho p là một số nguyên dương. Giả sử phương trình $x^2+px+1=0$ có hai nghiệm là $a_1; a_2$ và phương trình $x^2+qx+1=0$ có hai nghiệm $b_1; b_2$. Chứng minh rằng

$$\left(a_1-b_1\right)\left(a_2-b_1\right)\left(a_1+b_2\right)\left(a_2+b_2\right)$$

là hiệu của hai số chính phương.
Câu 9. Tìm các cặp số nguyên $(a; b)$ sao cho hai số a^2+4b và b^2+4a đều là số chính phương.
Câu 10. Tìm các chữ số a, b, c, d, e thỏa mãn điều kiện $\overline{ab}+\overline{cde}=\sqrt{\overline{abcde}}$.
Câu 11. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn a^2+b^2 chia hết cho ab. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

Câu 12 [Đề thi trường Đông phía Bắc 2015]. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2-(k^2-4)y^2+24=0$ có nghiệm nguyên dương.
Câu 13. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2+y^2+1=3xy$ là $(x, y)=(F_{2k-1}, F_{2k+1})$ với F_n là số Fibonacci.
Câu 14. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình sau có nghiệm nguyên dương

$$x^2+y^2=n(x+1)(y+1).$$

Câu 15. Giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $b+1 \mid a^2+1, a+1 \mid b^2+1$. Chứng minh rằng a, b đều là các số lẻ.
Câu 16. Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương sao cho $k=\dfrac{a^2+b^2+6}{ab}$ nguyên thì $k=8$.
Câu 17. Chứng minh rằng có vô số cặp số nguyên dương $(a; b)$ thỏa mãn $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}=4$.

CHÚC CÁC BẠN THI TỐT!

Tài liệu

[1] Bước nhảy Viète - Hà Tuấn Dũng, Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

[2] Bước nhảy Viète - Phạm Huy Hoàng, Chuyên đề số học Mathscope.

[3] Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Văn Ngọc, Vũ Kim Thủy - Bài giảng số học. NXB Giáo dục 1996.

[4] Vận dụng định lí Viète giải các bài toán số học - Nguyễn Công Lợi.

[5] Lời giải và bình luận VMO 2012 - Trần Nam Dũng. Diễn đàn Mathscope, 2012.

[6] The Method of Vieta Jumping - Yimin Ge, Mathematical Reflections 5 (2007).

[7] A Rational Function Whose Integral Values Are Sums of Two Squares - Sam Vandervelde.

[8] Diễn đàn AoPS Online, `https://artofproblemsolving.com/community`.

[9] Diễn đàn toán học Việt Nam - VMF, `https://diendantoanhoc.net/`.