ỨNG DỤNG CỦA NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP, SỐ HỌC, HÌNH HỌC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ

CHỦ ĐỀ 1:

CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP, SỐ HỌC VÀ HÌNH HỌC

I. Nguyên lí Dirichlet.

Nguyên lí Dirichlet - còn gọi là nguyên lí chim bồ câu (The Pigeonhole Principle) hoặc nguyên lý những cái lồng nhốt thỏ hoặc nguyên lí sắp xếp đồ vật vào ngăn kéo (The Drawer Principle) - đưa ra một nguyên tắc về phân chia phần tử các lớp.

• **Nguyên lý Dirichlet cơ bản:** Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

• **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:** Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật. (Ở đây $\left\lceil x \right\rceil$ là số nguyên nhỏ nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x)

• **Nguyên lí Dirichlet mở rộng:** Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\frac{n+m-1}{m} \right]$ con thỏ.

• **Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp:** Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử của B, thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B.

II. Phương pháp ứng dụng.

Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng như đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lí Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, điều đó được thể hiện qua hệ thống bài tập sau:

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt "thỏ" vào "chuồng" và thoả mãn các điều kiện:

+ Số 'thỏ" phải nhiều hơn số chuồng.

+ "Thỏ" phải được nhốt hết vào các "chuồng", nhưng không bắt buộc chuồng nào cũng phải có thỏ.

Thường thì phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các nguyên lý khác.

III. Một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Cho bảng ô vuông kích thước 10.10 gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Lời giải

Xét hình vuông cạnh $2x2$, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng $10x10$ được chia thành 25 hình vuông có cạnh $2x2$ nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 0 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần

Ví dụ 2. Giả sử 1 bàn cờ hình chữ nhật có 3x7 ô vuông được sơn đen hoặc trắng. Chứng minh rằng với cách sơn màu bất kì thì trong bàn cờ luôn tồn tại hình chữ nhật gồm các ô ở 4 góc là các ô cùng màu.

Lời giải

Mẫu sơn màu có thể xảy ra với bàn cờ này có dạng từ 1 đến 8. Giả sử một trong số các cột thuộc dạng 1. Bài toán sẽ được chứng minh nếu tất cả các cột còn lại thuộc dạng 1, 2, 3 hoặc 4. Giả sử tất cả các cột còn lại thuộc dạng 5, 6, 7, 8 khi đó theo nguyên lí Dirichlet thì hai trong số sau cột có 2 cột cùng 1 dạng và như vậy bài toán cũng được chứng minh

Chứng minh hoàn toàn tương tự nếu 1 cột có dang 8. Giả sử không có cột nào trong các cột 1, 8 thì theo nguyên lí Dirichlet cũng có 2 cột cùng dạng và bài toán cũng đựoc chứng minh

Ví dụ 3. Trong hình chữ nhật kích thước 1.2 ta lấy $6n^2+1$ điểm với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại 1 hình tròn có bán kính $\frac{1}{n}$ chứa không ít hơn 4 trong số các điểm đã cho.

Lời giải

Chia các cạnh của hình chữ nhật thành n đoạn và 2n đoạn bằng nhau ,mỗi đoạn có độ dài $\frac{1}{n}$. Nối các điểm chia bằng các đường thẳng song songvới các cạnh của hình chữ nhật ta được $n.2n=2n^2$ hình vuông nhỏ với cạnh là $\frac{1}{n}$. Nếu mỗi hình vuông chứa không quá 3 điểm thì tổng số điểm đã cho không quá $3.2n^2=6n^2$(trái với giả thiết). Do đó phải tồn tại 1 hình vuông chứa không ít hơn 4 điểm. Rõ ràng hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$ nội tiếp đường tròn bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{2n}$ và đường tròn này được chứa trong đường tròn đồng tâm bán kính $\frac{1}{n}$.

Ví dụ 4. Cho bảng vuông gồm n.n ô vuông. Mỗi ô vuông ghi một trong các số 1; 0; 2. Chứng minh rằng không tìm được bảng vuông nào mà tổng các số trên cột, trên hàng, trên đường chéo là các số khác nhau.

Lời giải

Do trong các ô có thể nhận một trong ba số 0; 1; 2 nên có thể có trường hợp tất cả các ô của một hàng hoặc một cột hoặc một đường chéo nhận giá trị 0 hoặc nhận giá trị 2.

Do đó tổng các số trên cột hoặc trên hàng hoặc trên đường chéo có giá trị nhỏ nhất là $0.n = 0$ và giá trị lớn nhất là $2.n = 2n$. Như vậy các tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo có thể nhận $2n+1$ giá trị là $0;1;2;...;2n$

Do bảng ô vuông n.n nên sẽ có n hàng, n cột và hai đường chéo. Do đó sẽ có $2n+2$ tổng nhận một trong $2n+1$ giá trị số nguyên từ 0 đến 2n. Theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất 2 tổng có giá trị bằng nhau. Điều này có nghĩa là không tìm được bảng vuông nào mà tổng các số trên cột, trên hàng, trên đường chéo là các số khác nhau.

Ví dụ 5. Ở vòng chung kết cờ vua có 8 bạn tham gia. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận và người nào cũng phải gặp đủ 7 đấu thủ của mình. Chứng minh rằng trong mọi thời điểm của cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Lời giải

Giả sử số trận thi đấu của các bạn tham gia thi đấu cờ vua là $a_1;a_2;...;a_8$. Do hai bạn thi đấu với nhau một trận nên ta có $0 \le a_i \le 7, \forall 1 \le i \le 8$. Xét các trường hợp sau:

- Tính đến thời điểm đó có một bạn chưa đấu trận nào suy ra không có bạn nào đấu đủ 7 trận.

Khi đó $0 \le a_i \le 6, \forall 1 \le i \le 8$ do đó tồn tại $a_k = a_m$ có nghĩa là có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

- Tính đến thời điểm đang xét, mỗi bạn đều đã đấu ít nhất một ván.

Khi đó ta có $0 \le a_i \le 7, \forall 1 \le i \le 8$, do đó tồn tại $a_k = a_m$ có nghĩa là có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho 40 số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{19}$ và $b_1, b_2, ..., b_{21}$ thoả mãn hai điều kiện:

$$1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{19} \le 200 \text{ và } 1 \le b_1 < b_2 < ... < b_{21} \le 200$$

Chứng minh rằng tồn tại bốn số $a_i; a_j; b_k; b_p$ với $1 \le i, j \le 19; 1 \le k, p \le 21$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_i < a_j; b_k < b_p \\ a_j - a_i = b_p - b_k \end{cases}$$

Lời giải

Xét các tổng có dạng $a_m + b_n$ với $a_m \in \{a_1; a_2; ...; a_{19}\}$ và $b_n \in \{b_1; b_2; ...; b_{21}\}$.

Do tập hợp $\{a_1; a_2; ...; a_{19}\}$ có 19 phần tử và tập hợp $\{b_1; b_2; ...; b_{21}\}$ có 21 phần tử nên, nên ta có tất cả $19.21 = 399$ tổng dạng $a_m + b_n$ như thế.

Chú ý rằng $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{19} \le 200$ và $1 \le b_1 < b_2 < ... < b_{21} \le 200$ nên $2 \le a_m + b_n \le 400$. Nên các tổng $a_m + b_n$ nhận các giá trị nguyên dương từ 2 đến 400. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu các tổng trên nhận đủ 399 giá trị từ 2 đến 400. Khi đó từ giả thiết cảu bài toán ta được

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 2 \\ a_{19} + b_{21} = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 = 1 \\ a_{19} = b_{21} = 200 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra được $\begin{cases} a_1 < a_{19}; b_1 < b_{21} \\ a_{19} - a_1 = b_{21} - b_1 = 199 \end{cases}$

- Nếu các tổng trên không nhận đủ 399 giá trị từ 2 đến 400. Khi đó với 399 tổng thì theo nguyên lí Dirichlet sẽ tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Không mất tính tổng quát ta giả sử hai tổng đó là $\begin{cases} a_i < a_j; b_k < b_p \\ a_j + b_k = b_p + a_i \end{cases}$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a_i < a_j; b_k < b_p \\ a_j - a_i = b_p - b_k \end{cases}$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 7. Trong một cuộc tranh giải vô địch quốc gia về bóng đá có 20 đội tham gia. Số nhỏ nhất các trận đấu là bao nhiêu để trong 3 đội bất kỳ luôn tìm được 2 đội đã chơi với nhau.

Lời giải

Ta chia 20 đội thành 2 nhóm, mỗi nhóm 10 đội và chỉ các đội trong cùng1 nhóm mới thi đấu với nhau. Rõ ràng cách sắp xếp này thoả mãn các điều kiện của bài toán và tất cả có 90 trận đấu. Ta chứng minh rằng nếu các điều kiện của bài toán thoả mãn thì số trận đấu sẽ lớn hơn hoặc bằng 90.

Giả sử ngược lại ta tìm đội một A đấu số trận $k \le 8$. Ta ký hiệu các đội đã đấu với A là X. Các đội không đấu với A là Y, khi đó $X = k; Y = 19 - k$. Dĩ nhiên các đội trong Y sẽ đấu với nhau nếu không hai đội thuộc Y và A sẽ là 3 đội mà không có đội nào chơi với nhau. Giả sử trong X có P cặp không chơi với nhau. Do đó mỗi đội Y phải đấu với mỗi đội trong P cặp đó của X và mỗi đội trong X có mặt không quá $k - 1$ cặp trong số P cặp (X có tất cả k đội). Vì vậy giữa các đội của X và Y đấu số trận bé hơn hoặc bằng $\frac{19-k}{k-1}$. Mặt khác do $k \le 8$ nên $\frac{19-k}{k-1}.P \ge P$.

Như vậy nếu thay các trận của các đội trong X đấu với các đội trong Y bởi các trận đấu cần thiết sẽ giảm đi. Như vậy số trận đấu cần phải tiến hành là:

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(19-k)(18-k)}{2} = k^2 - 18k + 9.19 = (k-9)^2 + 90 \ge 90$$

Vậy số các trận đấu ít nhất cần phải tiến hành là 90

Ví dụ 8. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn tồn tại ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

Lời giải

Xét tập hợp 39 số tự nhiên liên tiếp $S=\{a_1;a_2;...;a_{39}\}$, $(a_{i+1}=a_i+1, 1\le i\le 38)$

Trong tập $\{a_1;a_2;...;a_{20}\}$ luôn tồn tại hai số có tận cùng là 0 và hơn kém nhau 10. Do đó trong hai số này tồn tại ít nhất một số có chữ số hàng chục nhỏ hơn 9, kí hiệu số đó là

$$A=\overline{Bc0}\left(0\le c\le 8, c\in\mathbb{N}, B\in\mathbb{N}\right)$$

Xét 11 số $A;A+1;A+2;...;A+9;A+19$. Nhận xét rằng:

+ 11 số trên thuộc tập S.

+ 11 số đó có tổng các chữ số là 11 số tự nhiên liên tiếp vì các tổng đó là:

$s(A);s(A)+1;s(A)+2;...;s(A)+9;s(A)+10$,với $s(A)$ là tổng các chữ số của A.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số chia hết cho 11.

Do vậy, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 9. Cho tập $A=\{1;2;3;...;16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố.

Lời giải

Nếu a,b chẵn thì a^2+b^2 là hợp số. Do đó nếu tập con X của A có hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra $k\ge 9$. Ta chứng tỏ $k=9$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Điều đó có ý nghĩa là với mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kỳ của A luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a,b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố.

Để chứng minh khẳng định trên ta chia tập A thành các cặp hai phần tử phân biệt a, b mà a^2+b^2 là một số nguyên tố, ta có tất cả 8 cặp $(1;4),(2;3),(5;8),(6;11),(7;10),(9;16),(12;13),(14;15)$. Theo nguyên lý Dirichlet thì 9 phần tử của X có hai phần tử cùng thuộc một cặp và ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10. Cho 2014 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2014 hoặc có một số số mà tổng của các số ấy chia hết cho 2014.

Lời giải

Gọi 2014 số tự nhiên đã cho là $a_1, a_2, \cdots, a_{2014}$.

Xét dãy $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; ...; $S_{2014} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 2014 ta có các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu có một số hạng nào của dãy chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.

- Trường hợp 2: Nếu không có số hạng nào của dãy chia hết cho 2014 thì vì có tất cả 2014 phép chia mà số dư chỉ gồm $1, 2, ..., 2013$ do đó theo nguyên lý Dirichle có ít nhất hai số hạng của dãy có cùng số dư khi chia cho 2014. Gọi hai số hạng đó là S_i và S_j.

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \le i < j \le 2014$ thì

$$S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \text{ và } S_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_j$$

Lúc đó $S_j - S_i \,\vdots\, 2014 \Rightarrow a_{i+1} + \cdots + a_j \,\vdots\, 2014$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 11. Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Lời giải

Ta chứng minh từ 5 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3. Thật vậy, mỗi số tự nhiên khi chia cho 3 thì có phần dư là 0, 1 hoặc 2

Nếu trong 5 số dư có một số bằng 0, một số bằng 1, một số bằng 2 thì tổng của ba số tự nhiên tương ứng với ba số dư này là chia hết cho 3

Nếu 5 số dư chỉ nhận không quá 2 trong 3 số 0, 1, 2 thì theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại 3 số dư nhận cùng một giá trị và tổng của ba số tự nhiên tương ứng là chia hết cho 3

Từ 53 số tự nhiên đã cho chọn được 3 số mà tổng của chúng là a_1 chia hết cho 3. Xét 50 số còn lại chọn được 3 số mà tổng là a_2 chia hết cho 3. Lặp lại lập luận này từ 53 số ta chọn được 17 bộ, mỗi bộ gồm 3 số có tổng lần lượt là a_1, a_2, … a_{17} sao cho mỗi tổng đều chia hết cho 3.

Chứng minh tương tự nhận thấy từ 5 số tự nhiên bất kì mà mỗi số đều chia hết cho 3 ta chọn được 3 số có tổng chia hết cho 9. Vậy từ 17 số ta chọn được 5 bộ mỗi bộ gồm 3 số có tổng lần lượt là $b_1, b_2, \ldots, b_5$ sao cho $b_i \vdots 9$ với $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Từ 5 số chia hết cho 9 là $b_1, b_2, \ldots, b_5$ chọn được 3 số mà tổng của chúng là chia hết cho 27. Tổng của 3 số này chính là tổng của 27 số ban đầu. Vậy từ 53 số tự nhiên bất kì luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Ví dụ 12. Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt(hai đội bất kì thi đấu với nhau đúng một trận).

a) Chứng minh rằng sau bốn vòng đấu(mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội đôi một chưa thi đấu với nhau

b) Khẳng định còn đúng không nếu mỗi đội thi đấu đúng 5 trận.

Lời giải

a) Có 12 đội mà mỗi đội thí đấu đúng 4 trận nên luôn tìm được hai đội chưa thi đấu với nhau. Gọi hai đội đó là A và B. Vì A và B thi đấu đúng 4 trận nên trong 10 đội còn lại luôn tìm được ít nhất hai đội chưa thi đấu với cả A và B. Gọi một trong hai đội đó là C. Ba đội A, B, C chưa thi đấu với nhau một trận nào nên ba đội A, B, C là ba đội cần tìm.

b) Ta chia 12 đội bóng trên thành hai nhóm, mỗi nhóm 6 đội. Trong mỗi nhóm đôi một thi đấu với nhau. Như vậy trong 12 đội này, mỗi đội thi đấu đúng 5 trận. Xét ba đội tùy ý, theo nguyên lí Dirichlet luôn tìm được hai đội cùng nhóm. Như vậy trong ba đội bóng bất kì luôn tìm được hai đội thí đấu với nhau. Do đó khẳng định trên không còn đúng nếu mỗi đội thi đấu đúng 5 trận.

Ví dụ 13. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3;6;9\}$.

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet thì trong 700 số có ít nhất $\left[\frac{700}{3}\right] + 1 = 234$ số có cùng số dư khi chia cho 3. Gọi 234 số đó là $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{234} \le 2006$. Giả sử không tồn tại hai số $a_i; a_j$ nào thỏa mãn $a_i - a_j \in \{3;6;9\}$ do đó $a_i - a_j \ge 12$ (vì $(a_i - a_j) \vdots 3$ và $a_i \ne a_j$). Trong 234 số trên, hai số kề nhau hơn kém nhau ít nhất 12 đơn vị nên $a_{234} - a_1 \ge 233.12 = 2796 > 2006$, điều này vô lý.

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Chú ý:

+ Ta có thể làm chặt bài toán bằng cách giảm số các số cho ban đầu hoặc tăng giá trị cho các số có thể nhận.

Ta có thể làm chặt bài toán bằng cách thay 700 số thành 504 số. Gọi 504 số nguyên dương đôi một khác nhau đã cho là $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_{504} \le 2006$. Xét $504 \times 4 = 2016$ số nguyên dương như sau:

a_1	a_2	...	a_{503}	a_{504}
$a_1 + 3$	$a_2 + 3$	...	$a_{503} + 3$	$a_{504} + 3$

a_1+6	a_2+6	$\dots$	$a_{503}+6$	$a_{504}+6$
a_1+9	a_2+9	$\dots$	$a_{503}+9$	$a_{504}+9$

Vì các số trong bảng trên nhận các giá trị nguyên từ 1 đến $2006+9=2015$ nên theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất $\left[\frac{2016}{2015}\right]+1=2$ số nhận cùng một giá trị hay có hai số bằng nhau, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 14. Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải

Gọi các số đã cho là $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5$ vì các số này không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3 nên các số này đều có dạng $a_i=2^{x_i}.3^{y_i}$ với $x_i;y_i$ là các số tự nhiên.

Xét 5 cặp số $(x_1;y_1),(x_2;y_2),(x_3;y_3),(x_4;y_4),(x_5;y_5)$ mỗi cặp số này nhận giá trị một trong bốn trường hợp sau (số chẵn; số chẵn), (số chẵn; số lẻ), (số lẻ; số lẻ) và (số lẻ; số chẵn) nên theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất 2 cặp số trên nhận cùng một dạng giá trị. Không mất tính tổng quát khi giả sử $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ cùng nhận giá trị dạng(số chẵn; số lẻ). Khi đó x_1+x_2 và y_1+y_2 đều là số chẵn nên $a_1.a_2=2^{x_1}.3^{y_1}.2^{x_2}.3^{y_2}=2^{x_1+x_2}.3^{y_1+y_2}$ là một chính phương. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 15. Cho lưới ô vuông kích thước $5x5$. Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số $1;0;-1$. Xét tổng của các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Lời giải

Có tất cả 12 tổng gồm 5 tổng theo cột, 5 tổng theo hàng và 2 tổng theo đường chéo. Mỗi tổng gồm năm số hạng mà mỗi số hạng nhận một trong ba số là 1 hoặc 0 hoặc -1. Do mỗi tổng là một số nguyên.

Gọi các tổng đó là S_i với $i = 1;2;3;...;12$ thỏa mãn $-5 \le S_i \le 5$.

Vậy S_i có thể nhận trong mười một giá trị $-5;-4;-3;...;0;1;...;5$.

Mà ta lại có 12 tổng S_i nên theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 16. Cho $n \ge 3$ số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ đôi một khác nhau. Tìm giá trị lớn nhất của n sao cho tổng của ba số bất kỳ trong n số đó luôn là một số nguyên tố.

Lời giải

Dễ thấy với $n = 3$ ta luôn tìm được các số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $n \ge 4$ ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $n = 4$, ta tìm được bốn số nguyên dương 1, 3, 7, 9 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Với $n \ge 5$, ta sẽ chứng minh luôn tìm được ba số có tổng lớn hơn 3 và chia hết cho 3.

Thật vậy, một số nguyên khi chia cho 3 có thể có số dư là hoặc 0 hoặc 1 hoặc 2. Theo nguyên lý Dirichlet thì trong 5 số nguyên dương bất kỳ có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3.

+ Nếu có nhiều hơn 2 số có cùng số dư khi chí cho 3 thì có ít nhất 3 số có cùng số dư khi chia cho 3. Chọn 3 số này thì tổng của chúng chia hết cho 3.

+ Nếu có đúng 2 số có số dư r với $r \in \{0;1;2\}$ thì loại hai số này, khi đó ta còn lại 3 số có số dư khác r. Theo nguyên lý Dirichlet thì có ít nhất 2 số có cùng số dư khác r và một số còn lại có số dư khác số dư của hai số này. Như vậy trong 5 số đó luôn tồn tại 3 số có 3 số dư khác nhau khi chia cho 3. Chọn 3 số này thì tổng của chúng chia hết cho 3.

Do đó trong 5 số nguyên dương ta luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 3 và tổng này lớn hơn 3 nên nó không phải là số nguyên tố. Từ đó suy ra $n \ge 5$ thì không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $n = 4$.

Ví dụ 17. Mỗi đỉnh của hình lập phương được điền một trong các số $1;2;3;4;5;6;7;8$. Hai đỉnh khác nhau điền hai số khác nhau. Người ta tính tổng hai số ở hai đỉnh kề nhau. Chứng minh rằng trong các tổng tính được có ít nhất hai tổng bằng nhau.

Lời giải

Do mỗi đỉnh của hình lập phương nhận các giá trị khác nhau từ các số $1;2;3;4;5;6;7;8$. Do ta tính tổng hai số ở hai đỉnh kề nhau nên ta có 12 tổng. Khi đó mỗi tổng là một số nguyên dương nhận các giá trị thuộc tập $\{3;4;5;...;13;14;15\}$. Ta sẽ chứng minh trong 12 tổng này không thể đồng thời nhận các giá trị 3, 4, 5 ,6 và không thể đồng thời nhận các giá trị 12, 13, 14, 15.

Thật vậy, giả sử có các tổng nhận các giá trị 3, 4, 5, 6. Ta kí hiệu đỉnh K là đỉnh được điền số K.

Ta có $3 = 1 + 2; 4 = 1 + 3$ nên đỉnh 1 và đỉnh 2 kề nhau, đỉnh 1 kề với đỉnh 3. Do đó đỉnh 2 và đỉnh 3 không kề nhau. Vì $5 = 1 + 4$ hoặc $5 = 2 + 3$, nhưng đỉnh 2 và đỉnh 3 không kề nhau nên đỉnh 1 và đỉnh 4 kề nhau. Do đó đỉnh 1 lần lượt kề với đỉnh 2, đỉnh 3, đỉnh 4, suy ra đỉnh 1 không kề với đỉnh 5, đỉnh 2 không kề với đỉnh 4. Vì vậy không xuất hiện tổng có giá trị bằng 6.

Với các tổng nhận các giá trị 12, 13, 14, 15 ta chứng minh hoàn toàn tương tự.

Từ đó suy ra 12 tổng nhận không quá 11 giá trị nên theo nguyên lí Dirichslet có ít nhất hai tổng bằng nhau.

Ví dụ 18. Cho tập hợp $X=\left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{2024}\right\}$. Chứng minh rằng trong 90 số khác nhau bất kỳ được lấy ra từ tập X luôn tồn tại hai số x và y sao cho $\left|x-y\right|<\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chia 2012 số $1;\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{2012}$ thành 44 đoạn gồm $\left[\sqrt{1};\sqrt{3}\right],\left[\sqrt{4};\sqrt{8}\right],...,\left[\sqrt{1936};\sqrt{2012}\right]$.

Các đoạn trên có dạng tổng quát là $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{\left(k+1\right)^2-1}\right]$.

Như vậy 90 số thuộc tập hợp X nằm trong 44 đoạn trên. Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ba số trong 90 số trên nằm trong cùng một đoạn. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là x, y, z và chúng nằm trong đoạn $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{\left(k+1\right)^2-1}\right]$.

Chia đoạn $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{\left(k+1\right)^2-1}\right]$ thành hai đoạn là $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{k^2+k}\right]$ và $\left[\sqrt{k^2+k};\sqrt{\left(k+1\right)^2-1}\right]$

Khi đó theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số nằm trên cùng một đoạn. Giả sử hai số đó là x và y. Khi đó

- Nếu x và y nằm trên đoạn $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{k^2+k}\right]$ thì ta được

$$\left|x-y\right|\le\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2}<\sqrt{k^2+k+\frac{1}{4}}-\sqrt{k^2}=k+\frac{1}{2}-k=\frac{1}{2}$$

- Nếu x và y nằm trên đoạn $\left[\sqrt{k^2+k};\sqrt{\left(k+1\right)^2-1}\right]$ thì ta được

$$\left|x-y\right|\le\sqrt{\left(k+1\right)^2-1}-\sqrt{k^2+k}=\frac{\left(k+1\right)^2-1-k^2-k}{\sqrt{\left(k+1\right)^2-1}+\sqrt{k^2+k}}<\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 19. Cho A là tập hợp gồm 6 phần tử bất kỳ của tập hợp $\{0;1;2;...;14\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con B_1, B_2 của tập hợp A(B_1, B_2 khác nhau và khác rỗng) sao cho tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_1 bằng tổng tất cả các phần tử của tập hợp B_2.

Lời giải

Do A là tập hợp có 6 phần tử nên số tập hợp con khác rỗng và khác A của tập hợp A là $2^6 - 2 = 62$.

Xét tập hợp X là tập hợp con bất kì trong 62 tập hợp con trên và $S(X)$ là tổng các phần tưt của X.

Tập hợp X có nhiều nhất 5 phần tử thuộc tập hợp $\{0;1;2;...;14\}$ nên ta có

$$0 \le S(X) \le 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60.$$

Như vậy với 62 tập hợp con của A như trên thì tồng tại 62 tổng không vượt quả 60.

Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại hai tổng có giả trị bằng nhau. Điều đó chứng tỏ tồn tại hai tập hợp con

B_1, B_2 của tập hợp A có tổng các phần tử của chúng bằng nhau.

Ví dụ 20. Trong hình vuông cạnh bằng 1 ta đặt 51 điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất 3 trong số 51 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh bằng $\frac{1}{5}$. Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại ít nhất một hình vuông nhỏ chứa ít nhất ba điểm trong số 51 điểm đó. Ta kí hiệu hình vuông đó là C. Khi đó hình vuông nhỏ C có đường chéo là $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Đường tròn ngoại tiếp hình vuông nhỏ (C) có bán kính $\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \le \frac{1}{7}$. Vậy ba điểm nói trên nằm trong hình tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp hình vuông nhỏ đó có bán kính $\frac{1}{7}$.

Tổng quát hóa bài toán: Dựa vào bài giải bài toán trên ta có thể tổng quát hóa bài toán trên với a là kích thước của cạnh hình vuông, m là số điểm đặt bất kì, phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất n trong số m điểm đó nằm trong một hình trong bán kính $\frac{a^2}{\sqrt{2.\left[\frac{m}{n-1}\right]}}$. (Trong đó kí hiệu [a] là phần nguyên của a).

Lời giải

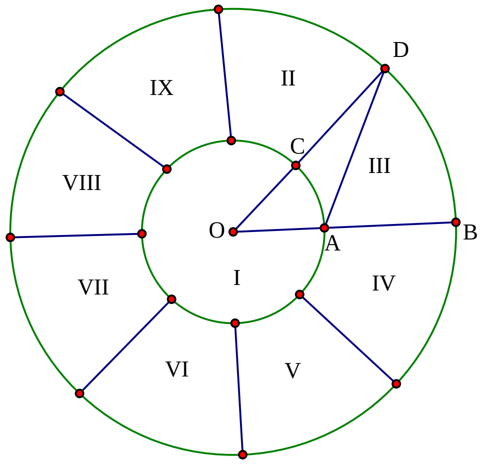
Chia hình vuông đã cho thành $\left[\frac{m}{n-1}\right]$ hình vuông con bằng nhau có cạnh bằng $\frac{a^2}{\sqrt{\left[\frac{m}{n-1}\right]}}$.

Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ít nhất một hình vuông nhỏ có chứa ít nhất n điểm trong số m điểm đó. Ta kí hiệu đó là hình vuông C. Đường tròn ngoại tiếp (C) có bán kính $\frac{a^2}{\sqrt{2.\left[\frac{m}{n-1}\right]}} \le \frac{a^2}{\sqrt{2.\left[\frac{m}{n-1}\right]}}$. Vậy n điểm trên nằm trong hình tròn đồng tâm với đường tròn (C) có bán kính $\frac{a^2}{\sqrt{2.\left[\frac{m}{n-1}\right]}}$.

Ví dụ 21. Trong hình tròn đường kính bằng 5 có 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bé hơn hoặc bằng 2.

Lời giải

Thật vậy, trong đường tròn tâm O đường kính 5, vẽ đường tròn đồng tâm và đường kính 2. Chia hình tròn đã cho thành 9 phần(xem hình vẽ) đường tròn đường kính 2 và 8 phần bằng nhau II, III, …, IX mà mỗi phần là $\frac{1}{8}$ hình vành khăn. Rõ ràng phần I có đường kình bằng 2. Xét chẳng hạn hình III, ta kí hiệu là ABCD (có là $\frac{1}{8}$ hình vành khăn). Ta hãy tính đường kính của nó. Có thể thấy ngay đường kính của III là $d = AC = BD$.



Vì $DOA = 45^o$, nên $d^2 = DA^2 = DO^2 + AO^2 - 2DO.OA.\cos45^0$

Hay ta được $d^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2 - 2\frac{5}{2}.1.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{24}{4} + 1 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Tù đó suy ra $d^2 < \frac{29}{4} - \frac{5}{2}.1,4$ nên $d < 2$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm rơi vào một trong các miền I, II, III, … , IX có đường kính bằng 2, còn các miền II, …, IX có đường kính bằng nhau và bằng $d < 2$, từ đó suy ra tồn tại hai trong số 10 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 2. Đó chính là điều cần chứng minh.

Ví dụ 22. Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Lời giải

Lấy A là một trong số 25 điểm đã cho. Xét hình tròn $O_1(A;1)$ có tâm A bán kính 1. Chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra như sau:

+ Thứ nhất: Nếu tất cả các điểm đã cho nằm trong $O_1(A;1)$ thì kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.

+ Thứ hai: Tồn tại điểm B khác điểm A và B thuộc trong số 25 điểm đã cho, sao cho B không nằm trong đường tròn $O_1(A;1)$, khi đó ta có $AB>1$.

Xét hình tròn $O_2(B;1)$ có tâm B bán kính 1. Lấy C là điểm bất kì trong số 25 điểm đã cho sao cho C khác A và khác B. Theo giả thiết và $AB>1$ ta có $\text{Min}\{CA;CB\}<1$.

Vì thế C thuộc đường tròn $O_1(A;1)$ hoặc C thuộc đường tròn $O_2(B;1)$.

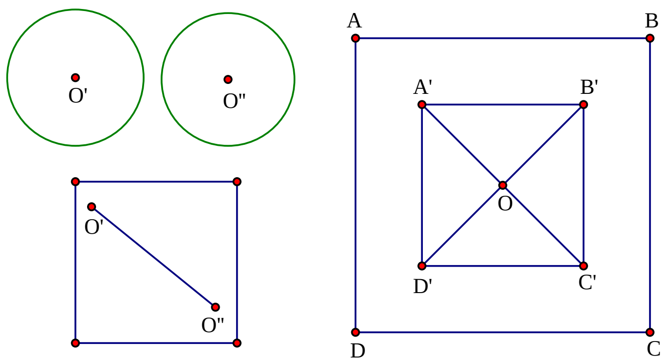
Điều này chứng tỏ rằng các hình tròn $O_1(A;1)$ và $O_2(B;1)$ chứa tất cả 25 điểm đã cho. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet thì ít nhất 1 trong hai hình tròn trên chứa 13 điểm đã cho. Đó là điều phải chứng minh.

Bài toán tổng quát: Cho $2n+1$ điểm trên mặt phẳng với $n\ge 3$. Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Khi đó tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn $n+1$ điểm đã cho.

Ví dụ 23. Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp năm hình tròn bán kính bằng 1 sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm chung.

Lời giải

Giả sử hình vuông ABCD có tâm O và cạnh a, chứa năm hình tròn không cắt nhau và đều có bán kính bằng 1. Vì cả năm hình tròn này đều nằm trọn trong hình vuông, nên các tâm của chúng nằm trong hình vuông $A'B'C'D'$ có tâm O và cạnh $a-2$, ở đây $A'B'//AB$. Các đường thẳng nối các



trung điểm của các cạnh đối diện của hình vuông A′B′C′D′ chưa A′B′C′D′ thành 4 hình vuông nhỏ.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong 4 hình vuông nhỏ mà trong hình vuông này chứa ít nhất hai trong số 5 tâm hình tròn nói trên(không mất tính tổng quát ta giả sử là O′ và O″).

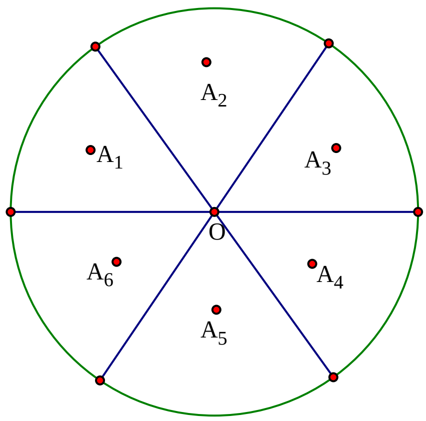
Để ý rằng vì không có hai hình tròn nào(trong số năm hình tròn) cắt nhau nên $O'O'' \geq 2$

Mặt khác do O′ và O″ cùng nằm trong một hình vuông nhỏ(cạnh của hình vuông nhỏ đó bằng $\frac{a-2}{2}$) nên ta lại có $O'O'' \leq \frac{a-2}{2}.\sqrt{2}$. Từ đó ta suy ra được $\frac{a-2}{2}.\sqrt{2} \geq 2 \Rightarrow a \geq 2\sqrt{2}+2$.

Vậy mọi hình vuông cạnh a thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta đều có $a \geq 2\sqrt{2}+2$. Bây giờ xét hình vuông ABCD có $a = 2\sqrt{2}+2$. Xét năm hình tròn có tâm là O, A′, B′, C′, D′ (xem hình vẽ) , thì mọi yêu cầu của đề bài thỏa mãn. Tóm lại, hình vuông có kích thước bé nhất cần tìm là hình vuông với cạnh $a = 2\sqrt{2}+2$.

Ví dụ 24. Chứng minh rằng trong một hình tròn bán kính 1, không thể chọn được quá 5 điểm mà khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Lời giải



Chia hình tròn thành 6 hình quạt bằng nhau (tâm các hình quạt đều tại tâm O đã cho). Ta biết rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong một hình quạt nhỏ hơn hoặc bằng 1, vì thế từ giả thiết suy ra tại mỗi hình quạt có không quá 1 điểm rơi vào. Giả thiết phản chứng chọn được quá năm điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vì lí do trên nên số điểm không thể quá 7(vì nếu số điểm chọn được mà lớn hơn hoặc bằng 7 thì theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai điểm được chọn nằm trong một cung hình quạt,

mà điều này mâu thuẫn với nhận xét trên.).

Vậy từ giả thiết phản chứng suy ra tồn tại sáu điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ và mỗi điểm nằm trong một hình quạt sao cho khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Do $A_1OA_2 + A_2OA_3 + A_3OA_4 + A_4OA_5 + A_5OA_6 + A_1OA_6 = 360^0$.

Khi đó suy ra $\mathrm{Min} A_iOA_{i+1} \le \dfrac{360^0}{6} = 60^0, i = \overline{1,6}$ (ở đây đặt $A_7 \equiv A_1$).

Xét tam giác A_kOA_{k+1} với $k \in \{1;2;3;4;5;6\}$ và $A_7 \equiv A_1$, sao cho $\mathrm{Min} A_iOA_{i+1} = A_kOA_{k+1}$

Khi đó $A_kOA_{k+1} \le 60^0$.

Vì $OA_k \le 1;\ OA_{k+1} \le 1;\ A_kOA_{k+1} \le 60^0$ nên từ đó suy ra

$A_kOA_{k+1} \le \mathrm{Max}\left\{A_kA_{k+1}O; OA_kA_{k+1}\right\}$.

Từ đó theo mối liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác A_kOA_{k+1}, thì

$A_kA_{k+1} \le \max\left\{OA_k, OA_{k+1}\right\} \le 1$.

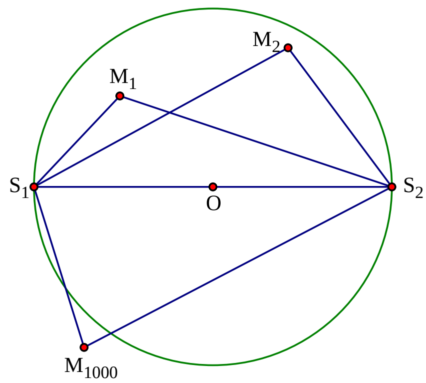
Điều này mâu thuẫn với $A_kA_{k+1} > 1$ (vì hệ sáu điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài). Từ đó ta thấy giả thiết phản chứng là sai. Điều đó có nghĩa là không thể chọn quá 5 điểm thỏa mãn yêu cầu để bài.

Ví dụ 25. Cho 1000 điểm $M_1, M_2, ..., M_{1000}$ trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính bằng 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho

$SM_1 + SM_2 + ... + SM_{1000} \ge 1000$.

Lời giải

Xét một đường kính S_1S_2 tùy ý của đường tròn bán kính bằng 1, ở đây S_1, S_2 là hai đầu của đường kính. Khi đó ta có $S_1S_2 = 2$, nên ta có



$$\begin{cases} S_1M_1 + S_2M_1 \geq S_1S_2 = 2 \\ S_1M_2 + S_2M_2 \geq S_1S_2 = 2 \\ \qquad \ldots \\ S_1M_{1000} + S_2M_{1000} \geq S_1S_2 = 2 \end{cases}$$

Cộng từng vế của 1000 bất đẳng thức trên ta có:

$$(S_1M_1 + S_1M_2 + \ldots + S_1M_{1000}) + (S_2M_1 + S_2M_2 + \ldots + S_2M_{1000}) \geq 2000$$

Từ đó theo nguyên lí Dirichlet suy ra trong hai tổng

$$(S_1M_1 + S_1M_2 + \ldots + S_1M_{1000});\ (S_2M_1 + S_2M_2 + \ldots + S_2M_{1000})$$

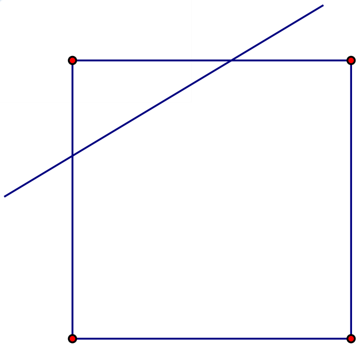
có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000.

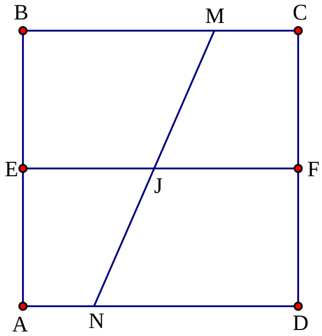
Giả sử $S_1M_1 + S_1M_2 + \ldots + S_1M_{1000} \geq 1000$. khi đó lấy $S = S_1$. Đó là điều phải chứng minh.

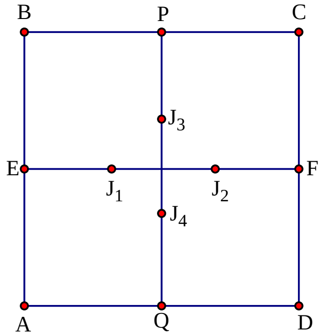
Bài toán tổng quát: Cho n điểm $M_1, M_2, \ldots, M_n$ trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính bằng 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho $SM_1 + SM_2 + \ldots + SM_n \geq n$.

Ví dụ 26. Cho chín đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Lời giải







Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải là chia hình vuông thành hai tứ giác). Vì lẽ đó, mọi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và dĩ nhiên không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N.

Ta có $\frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}.AB.\left(BM+AN\right)}{\frac{1}{2}.CD.\left(MC+ND\right)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{EJ}{JF}=\frac{2}{3}$, ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng.

Gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD. Gọi J_1,J_2,J_3,J_4 là các điểm sao cho J_1,J_2 nằm trên EF và J_3,J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn

$$\frac{EJ_1}{J_1F}=\frac{FJ_2}{J_2F}=\frac{PJ_3}{J_3Q}=\frac{QJ_4}{J_4P}=\frac{2}{3}.$$

Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1,J_2,J_3,J_4 nói trên. Vì có chín đường thẳng, nên theo nguyên lí dirichlet phải tồn tại ít nhất một trong 4 điểm J_1,J_2,J_3,J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong 9 đường thẳng đã cho đi qua. Vậy có ít nhất 3 đường thẳng trong 9 đường thẳng đã cho đi qua một điểm.

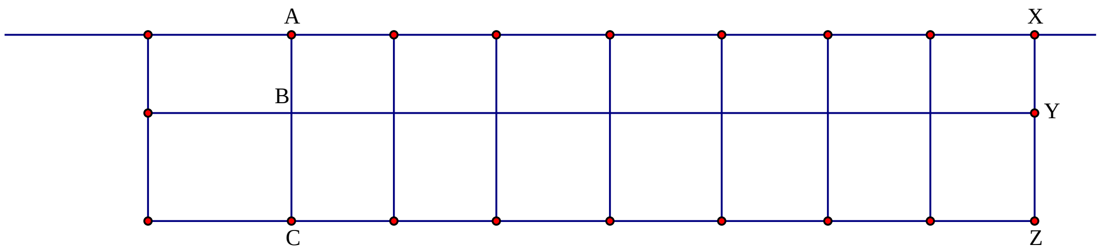
Bài toán tổng quát 1: Cho $4n+1(n\ge 2)$ đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất $n+1$ đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Bài toán tổng quát 2: Cho $4n+r(n\ge 2, r\ge 1)$ đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình Chữ nhật thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất $n+1$ đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 27. Giả sử mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong 2 màu đen và trắng. Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.

Lời giải

Giả sử ta có một lưới ô vuông tạo bởi 3 đường nằm ngang và 9 đường thẳng đứng, mỗi nút lưới được tô bởi một màu trắng hoặc đen.



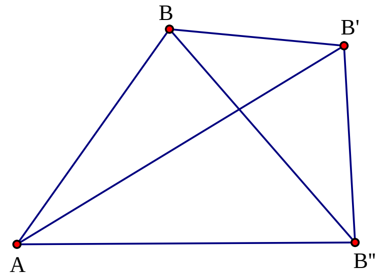
Xét 3 nút lưới của một đường dọc, mỗi nút có hai cách tô màu nên mỗi bộ ba nút trên đường dọc ấy có $2.2.2=8$ cách tô màu. Có 9 đường dọc, mỗi đường có 8 cách tô màu nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai đường có cách tô màu như nhau. Chẳng hạn hai bộ ba điểm đó là A, B, C và X, Y, Z.

Vì 3 điểm A, B, C chỉ được tô bởi hai màu nên tồn tại hai điểm cùng màu, chẳng hạn B và C khi đó hình chữ nhật BYZC có 4 đỉnh cùng một màu.

Ví dụ 28. Trong mặt phẳng cho 6 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được tô màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là các đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được tô cùng một màu.

Lời giải

Xét A là một trong số 6 điểm đã cho. Khi đó xét năm đoạn thẳng(mỗi đoạn thẳng nối điểm A với năm điểm còn lại). Vì mỗi đoạn thẳng được tô chỉ màu đỏ hoặc màu xanh, nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất ba trong năm đoạn nói trên cùng màu. Giả sử đó là các đoạn AB, AB′ và AB″ và có thể cho rằng chúng cùng màu xanh. Chỉ có hai trường hợp sau xảy ra:

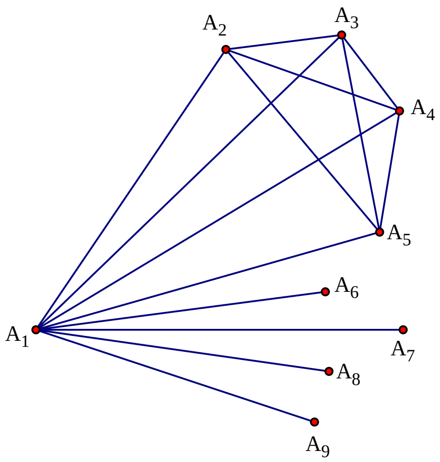


- Trường hợp 1: Nếu ít nhất một trong ba đoạn BB′, B′B″, B″B màu xanh, thì tồn tại một tam giác với ba cạnh xanh và kết luận của bài toán đúng trong trường hợp này.

- Trường hợp 2: Nếu không phải như vậy, tức là BB′, B′B″, B″B màu đỏ , thì ba điểm phải tìm là B, B′,B″ vì BB′B″ là tam giác có ba cạnh màu đỏ. Đpcm.

Ví dụ 29. Trên mặt phẳng cho 18 điểm, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nối từng cặp điểm với nhau và tô màu cho mọi đoạn thẳng thu được một trong hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tập điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo của nó cùng màu.

Lời giải



Giả sử $A_i\left(i=\overline{1,18}\right)$ là 18 điểm đã cho. Xuất phát từ A_1 có 17 đoạn thẳng $A_1A_i\left(i=\overline{2,18}\right)$. Mười bảy đoạn thẳng đó chỉ có hai màu xanh hoặc đỏ, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất chín đoạn thẳng cùng màu.

Không giảm tính tổng quát giả sử đó là các đoạn thẳng $A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_{10}$ và chúng cùng màu đỏ. Xét chín điểm $A_2, A_2, ..., A_{10}$ chỉ có thể xảy ra hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Hoặc là tồn tại điểm $A_j\left(2\le j\le 10\right)$ sao cho trong tám đoạn thẳng $A_jA_k\left(2\le k\le 10, k\ne j\right)$ có ít nhất bốn đoạn màu đỏ. Không mất tính tổng quát có thể cho là $A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, ..., A_2A_6$ màu đỏ. Đến đây lại chỉ còn hai khả năng:

+ Hoặc là mọi đoạn thẳng $A_3A_4, A_3A_5, A_3A_6, A_4A_5, A_4A_6, A_5A_6$ đều màu xanh. Khi đó $A_3A_4A_5A_6$ là tứ giác xanh thỏa mãn yêu cầu.

+ Tồn tại một đoạn thẳng $A_i, A_j\left(3\le i<j\le 6\right)$ màu đỏ. Khi đó $A_1A_2A_iA_j$ $\left(3\le i<j\le 6\right)$ là tứ giác đỏ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Hoặc là với mọi điểm $A_j\left(2\le j\le 10\right)$, thì trong tám đoạn thẳng $A_jA_k\left(2\le k\le 10, k\ne j\right)$ có tối đa ba đoạn màu đỏ mà thôi. Khi đó phải tồn tại một điểm (chẳng hạn A_2) mà trong các đoạn $A_2A_k\left(3\le k\le 10, k\ne j\right)$ có tối đa hai đoạn màu đỏ thôi (thật vậy, nếu với mọi $A_j\left(2\le j\le 10\right)$ mà có đúng ba đoạn $A_jA_k\left(2\le k\le 10, k\ne j\right)$ màu đỏ, thì số đoạn thẳng màu đỏ nối trong nội bộ 9 điểm đó là $\frac{9.3}{2}$ là số nguyên. Vô lí. Vì $A_2A_k\left(3\le k\le 10, k\ne j\right)$ có tối đa hai đoạn màu đỏ mà thôi, nên trong số các đoạn

$A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, ..., A_2A_{10}$ có ít nhất sáu đoạn màu xanh. Không mất tính tổng quát ta cho $A_2A_5, A_2A_6, ..., A_2A_{10}$ màu xanh.

Xét sáu điểm $A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$. Đó là sáu điểm mà trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, và mỗi đoạn thẳng nối hai điểm chỉ có hai màu xanh hoặc đỏ. Theo bài 19 thì luôn luôn tồn tại ít nhất một tam giác mà ba đỉnh chọn trong $\{A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$ sao cho ba cạnh cùng màu. Lại có hai khả năng:

+ Giả sử tồn tại tam giác $A_i, A_j, A_k\ (5 \le i < j < k \le 10)$ màu xanh. Khi đó tứ giác $A_2A_iA_jA_k$ với $5 \le i < j < k \le 10$ là tứ giác xanh thỏa mãn yêu cầu đề bài.

+ Nếu tồn tại tam giác $A_i, A_j, A_k\ (5 \le i < j < k \le 10)$ màu đỏ, thì $A_1A_iA_jA_k$ là tứ giác cần tìm.

Như vậy ta luôn chứng minh được tồn tại một tứ giác mà các đỉnh của nó nằm trong tâm điểm đã cho sao cho cạnh và đường chéo cùng màu.

Ví dụ 30. Cho 6 điểm trong mặt phẳng sao cho bất kì ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác có các cạnh chiều dài khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh là cạnh nhỏ nhất của một tam giác vừa là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

Lời giải

Trong mỗi ta giác ta tô màu đỏ cạnh nhỏ nhất của tam giác và tô màu xanh hai cạnh kia. Ta cần chứng minh tồn tại một tam giác có các cạnh cùng màu đỏ. Gọi sáu điểm đã cho là A, B, C, D, E, F.

Từ điểm A trong sáu điểm đã cho ta nối với năm điểm còn lại, khi đó ta được cạnh cạnh.

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong năm cạnh này ít nhất có cạnh cạnh cùng màu. Không mất tính tổng quát ta giả sử ba cạnh đó là AB, AC, AD. Khi đó ta có các trường hợp sau:

- Nếu AB, AC, AD cùng màu đỏ. Khi đó nếu tam giác BCD có các cạnh cùng màu đỏ, giả sử đó là BC thì ta có tam giác ABC có các cạnh cùng màu đỏ.

• Nếu AB, AC, AD cùng màu xanh. Khi đó nếu tam giác BCD có các cạnh cùng màu đỏ thì cạnh lớn nhất của tam giác này là cạnh cần tìm.

Ví dụ 31. Trong một cuộc họp có 6 đại biểu. Người ta nhận thấy cứ ba người bất kỳ thì có hai người quen nhau. Chứng minh rằng có ba người đôi một quen nhau.

Lời giải

Các đại biểu tương ứng với 5 điểm A, B, C, D, E, F. Hai đại biểu X và Y nào đó mà quen nhau thì ta tô đoạn thẳng XY bằng màu xanh còn nếu X vá Y không quen nhau thì tô đoạn XY màu đỏ. Xét 5 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF. Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại ba đoạn cùng màu.

• Nếu AB, AC, AD màu xanh. Xét ba điểm B, C, D. Vì 3 đại biểu nào cũng có hai người quen nhau suy ra một trong ba đoạn BC, CD, DB màu xanh. Giả sử BC màu xanh, khi đó ta có ba đoạn thẳng AB, BC, CA có màu xanh, do đó A, B, C đôi một quen nhau.

• Còn nếu AB, AC, AD màu đỏ, khi đó với ba điểm A, B, C thì ta có đoạn BC màu xanh, với ba điểm A, C, D thì ta có đoạn CD màu xanh và với ba điểm A, B, D thì ta có đoạn BD màu xanh. Như vậy ba đoạn thẳng BC, CD, CB có màu xanh nên B, C, D đôi một quen nhau.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 32. Chứng minh rằng từ sáu số vô tỉ tùy ý có thể chọn ra được ba số (ta gọi ba số đó là a, b,c) sao cho $a+b, b+c, c+a$ cũng là số vô tỉ.

Lời giải

Xét trên mặt phẳng sáu điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Với mỗi điểm ta sẽ gắn cho nó một số vô tỉ. Như vậy sáu điểm được gắn sáu số vô tỉ đã cho. Hai điểm mang số a và b sẽ được nối với nhau bằng một đoạn thẳng màu đỏ nếu $a+b$ là số vô tỉ, còn sẽ có màu xanh khi $a+b$ là số hữu tỉ.

Theo đề bài tồn tại ít nhất một tam giác cùng màu. Giả sử tam giác đó có ba đỉnh được gắn số là a, b, c.

Chỉ có hai khả năng xảy ra như sau:

+ Nếu tam giác đó là tam giác xanh. Khi ấy $a+b, b+c, c+a$ là 3 số hữu tỉ.

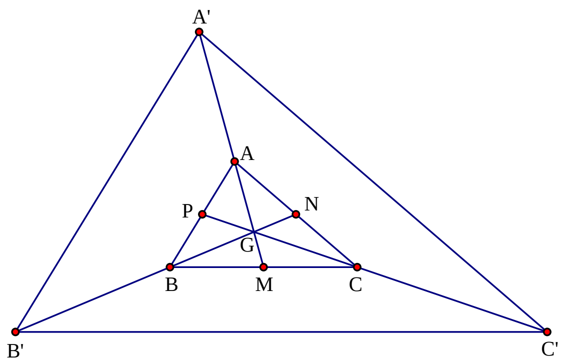
Lúc này $(a+b)+(b+c)-(c+a)=2b$ cũng là một số hữu tỉ. Điều này vô lí vì b là số vô tỉ.

+ Nếu tam giác đỏ là tam giác đỏ. Khi ấy $a+b, b+c, c+a$ là 3 số vô tỉ. Khi đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 33. Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Lời giải

Lấy năm điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh, mà theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại ba điểm trong số đó cùng màu. Giả sử đó là ba điểm A, B, C có màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra:



+ Nếu G có màu đỏ. Khi đó A, B, C, G cùng đỏ và bài toán đã được giải.

+ Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn $AA'=3GA$, $BB'=3GB$, $CC'=3GC$. Khi đó gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì

$A'A=3AG=6GM \Rightarrow A'A=2AM.$

Tương tự $B'B=2BN$, $CC'=2CP$. Do đó các tam giác A'BC, B'AC, C'AB tương ứng nhận A, B, C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng có các tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp sau có thể xảy ra:

- Nếu A', B', C' cùng xanh. Khi đó tam giác A'B'C' và trọng tâm G có cùng màu xanh.

• Nếu ít nhất một trong các điểm A′, B′, C′ có màu đỏ. Không mất tính tổng quát giả sử A′ đỏ. Khi đo tam giác A′BC và trọng tâm A màu đỏ.

Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Ví dụ 34. Để khuyến khích phong trào học tập , một trường THCS đã tổ chức 8 đợt thi cho các học sinh. Ở mỗi đợt thi , có đúng 3 học sinh được chọn để trao giải . Sau khi tổ chức xong 8 đợt thi , người ta nhận thấy rằng với 2 đợt thi bất kỳ luôn có đúng 1 học sinh được trao giải ở cả 2 đợt thi đó. Chứng minh rằng:

a) Có ít nhất 1 học sinh được trao giải ít nhất 4 lần .

b) Có đúng một học sinh được trao giải ở tất cả 8 đợt thi.

Lời giải

Ta biểu diễn mỗi học sinh bằng một điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Ở mỗi đợt thi có đúng ba học sinh được trao giải nên ta nối ba điểm biểu thị ba học sinh bằng một tam giác(không nối hai điểm bất kì), có 8 đợt trao giải nên ta có 8 tam giác. Hai đợt thi bất kì luôn có đúng một học sinh được trao giải ở cả hai đợt tương ứng với hai tam giác bất kì luôn có một điểm chung.

a) Xét tam giác ABC bất kì trong 8 tam giác trên, vì 7 tam giác mỗi tam giác đều có một đỉnh chung với tam giác ABC, theo nguyên lí Dirichlet trong ba điểm A, B, C có ít nhất một điểm là đỉnh chung của 4 tam giác, điều này tương ứng với có ít nhất một học sinh được trao giải ít nhất 4 lần.

b) Không mất tính tổng quát ta giả sử A là đỉnh chung của 4 tam giác, ta chứng minh tất cả các tam giác đều nhận A làm đỉnh chung.

Xét tam giác DEF bất kì, nếu tam giác này trùng với A thì tam giác này sẽ có đỉnh chung với bốn tam giác mà đã có đỉnh chung là A, điều này là vô lí vì hai tam giác bất kì chỉ có một điểm chung. Vậy cả 8 tam giác đều có đỉnh chung là A, điều này tương ứng với có dúng một học sinh được trao giải trong cả tám lần.

Ví dụ 35. Cho điểm $M(x;y)$ trên mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm nguyên nếu cả x và y đều là các số nguyên. Tìm số nguyên dương bé nhất sao cho từ mỗi bộ n điểm nguyên đều tìm được bộ ba điểm nguyên là đỉnh của một tam giác có diện tích nguyên (trong trường hợp ba điểm thẳng hàng thì coi diện tích tam giác bằng 0)

Lời giải

Xét tam giác ABC với tọa độ $A\left(x_1;\ y_1\right), B\left(x_2;\ y_2\right), C\left(x_3;\ y_3\right)$

Khi đó ta được $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left[\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)\right]$

Xét tam giác bất kì có tọa độ các đỉnh là các điểm nguyên, khi đó luôn tồn tại có cạnh song song với các trục tọa độ thỏa mãn một đỉnh của hình chữ nhật tròng với một đỉnh của tam giác và hai đỉnh còn lại nằm trên hai cạnh của hình chữ nhật hoặc trùng với hai đỉnh của hình chữ nhật

Xét hình bên, khi đó ta được $\begin{cases} x_1\le x_3\le x_2 \\ y_1\le y_2\le y_3 \end{cases}$

Ta có $S_{APQR}=\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)$ và $S_{ABC}=S_{APQR}-S_{APC}-S_{BCQ}-S_{ABR}$

Với $S_{APC}=\frac{1}{2}\left[\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)\right]$, $S_{BCQ}=\frac{1}{2}\left[\left(x_2-x_3\right)\left(y_3-y_2\right)\right]$, $S_{ABR}=\frac{1}{2}\left[\left(x_2-x_3\right)\left(y_2-y_3\right)\right]$

$$\begin{aligned} S_{ABC}&=S_{APQR}-S_{APC}-S_{BCQ}-S_{ABR} \\ &=\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\frac{\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)+\left(x_2-x_3\right)\left(y_3-y_2\right)+\left(x_2-x_3\right)\left(y_2-y_3\right)}{2} \\ &=\frac{1}{2}\left[\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right] \end{aligned}$$

Do đó ta được $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left[\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right]$

Với $n\le 2$, không tồn tại tam giác

Với $n=3$, chọn $A\left(1;0\right), B\left(0;1\right), C\left(0;0\right)$ ta được $S_{ABC}=\frac{1}{2}$ (loại)

Với $n=4$, chọn $A\left(1;0\right), B\left(1;1\right), C\left(0;1\right), D\left(0;0\right)$ ta được $S=\frac{1}{2}$ với S là diện tích một tam giác bất kì(loại)

Với $n=5$, ta có với mỗi điểm $M(x;\,y)$ tồn tại một trong bốn dạng x và y cùng chẵn, x và y cùng le, x lẻ và y chẵn, x chẵn và y lẻ. Với 5 điểm như trên theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại hai đểm cùng dạng. Không mất tính tổng quát ta giả sử đó là hai điểm A và B

Khi đó $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]$

Vì A và B cùng dạng nên $x_2-x_1 \vdots 2;\ y_2-y_1 \vdots 2$

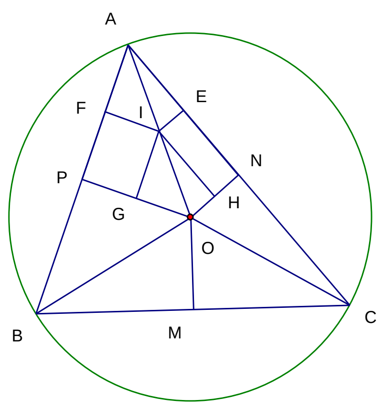
Do đó $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]$ là số nguyên

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 5.

Ví dụ 36. Cho tam giác nhọn ABC có $BAC=60^o$, $BC=2\sqrt{3}$ cm. Bên trong tam giác này cho 13 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong 13 điểm ấy luôn tìm được 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1cm.

Lời giải

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Do tam giác ABC nhọn nên O nằm trong tam giác ABC. Vì $BAC=60^0$ nên $MOC=60^0$, suy ra $OA=OB=OC=\frac{MC}{\sin 60^0}=2$. Vì O nằm trong tam giác ABC và $OM\perp BC,\ ON\perp AC,\ OP\perp AB$. Suy ra tam giác ABC được chia thành 3 tứ giác ANOP, BMOP, CMON nội tiếp các đường tròn có đường kính 2 (đường kính lần lượt là OA, OB, OC).



Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một trong 3 tứ giác này chứa ít nhất 5 điểm trong 13 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác ANOP.

Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, AP, PO, ON và I là trung điểm OA, suy ra $IA=IP=IO=IN=1$.

Khi đó tứ giác ANOP được chia thành 4 tứ giác AEIF, FIGP, IGOH, IHNE nội tiếp các đường tròn có đường kính 1.

Theo nguyên lý Đirichlê, tồn tại ít nhất một trong 4 tứ giác này chứa ít nhất 2 điểm trong 5 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác AEIF chứa 2 điểm X, Y trong số 13 điểm đã cho.

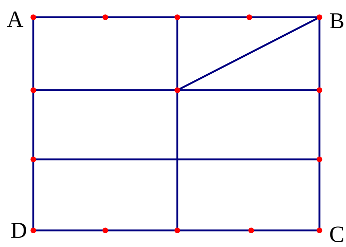
Vì X, Y nằm trong tứ giác AEIF nên X, Y nằm trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác này, do đó XY không lớn hơn đường kính đường tròn này, nghĩa là khoảng cách giữa X, Y không vượt quá 1.

Ví dụ 36. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 3$, $BC = 4$.

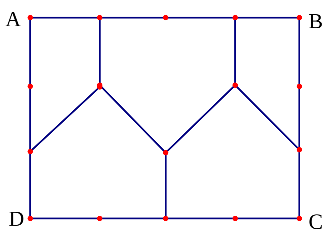
a) Chứng minh rằng từ 7 điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật luôn tìm được hai điểm mà khoảng các của chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$.

b) Chứng minh rằng khẳng định ở câu a vẫn đúng nếu có đúng 6 điểm nằm trong hình chữ nhật ABCD.

Lời giải



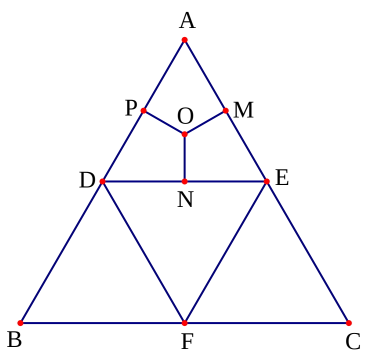
a) Chia hình chữ nhật ABCD thành 6 hình chữ nhật có kích thức 1x2. Vì 7 chia 6 dư 1 nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại hai điểm cùng nằm trong một hình chữ nhật. Gọi hai điểm đó là A′ và B′ khi đó ta được $A'B' \le \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Do đó ta có khoảng cách giữa hai điểm A và B không vượt quá $\sqrt{5}$.



b) Chia hình chữ nhật thành 5 hình đa giác như hình vẽ. Vì 6 chia 5 dư 1 nên theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại hai điểm nằm trong cùng một đa giác. Gọi hai điểm đó là M và N. Ta dễ dàng chứng minh được $MN \le \sqrt{5}$. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 67. Cho 13 điểm phân biệt nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều có cạnh bằng 6cm. Chứng minh răng luôn tồn tại hai điểm trong số 13 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Lời giải



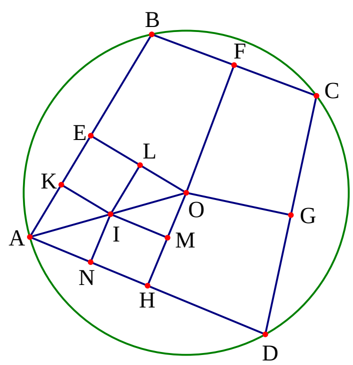
Chia tam giác đều ABC cạnh 6cm thành bốn tam giác đều cạnh 3cm.Theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất bốn điểm thuộc cùng một tam giác đều canh 3cm. Giả sử có 4 điểm thuộc tam giác đều ADE cạnh 3cm.

Chia tam giác đều ADE cạnh 3cm thành ba phần như hình vẽ(với M, N, P lần lượt là trung điểm của AE, ED, DA và O là trọng tâm tam giác ADE). Khi đó mỗi phần của tam giác ADE là một tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất hai điểm thuộc cùng một phần ,hai điểm này có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{3}\,\text{cm}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 38. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn bán kính 2cm. Chứng minh rằng trong số 17 điểm $A_1; A_2; ...; A_{17}$ bất kỳ nằm trong tứ giác ABCD luôn có thể tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa hai điểm đó không lớn hơn 1cm.

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Xét trường hợp điểm O nằm trong tứ giác ABCD

Gọi E, F, G, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên AB, BC, CD và DA.

Khi đó tứ giác AEOH, BEFO, CFOG và DGOH là bốn tứ giác này đều là tứ giác nội tiếp đường tròn bán kính 1cm.

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong bốn tứ giác trên

Có một tứ giác chứa ít nhất 5 điểm trong 17 điểm $A_1;A_2;...;A_{17}$ không mất tính tổng quát khi giả sử năm điểm $A_1;A_2;A_3;A_4;A_5$ nằm trong tứ giác AEOH.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEOH thì I là trung điểm của OA. Gọi K, L, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên AE, EO, OH và HA. Khi đó bốn tứ giác AKIN, ELIK, OLIM, HMIN đều là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính 1cm.

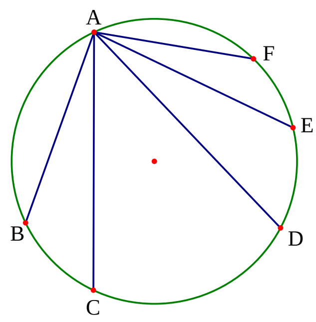
Theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất hai điểm trong năm điểm $A_1;A_2;A_3;A_4;A_5$ nằm trong tứ giác AKIN hoặc tứ giác ELIK hoặc tứ giác OLIM hoặc tứ giác HMIN. Hai điểm này có khoảng cách không lớn hơn 1cm. Ta có điều phải chứng minh.

- Trường hợp 2: Xét trường hợp điểm O nằm trên cạch hoặc bên ngoài tứ giác ABCD. Khi đó chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta cũng được điều phải chứng minh.

Ví dụ 39. Trên đường tròn cho 16 điểm được tô bởi một trong ba màu xanh hoặc đỏ hoặc vàng (mỗi điểm một màu). Mỗi đoạn thẳng nối hai điểm trong 16 điểm trên được tô màu tím hoặc nâu (mỗi đoạn thẳng một màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu ta luôn chọn được một tam giác có ba đỉnh cùng màu và ba cạnh cùng màu.

Lời giải

Trên đường tròn 16 điểm tô bởi ba màu xanh hoặc đỏ hoặc vàng và do $16 = 3.5 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet ta có ít nhất 6 điểm cùng màu.



Giả sử 6 điểm đó là A, B, C, D, E cùng màu đỏ như hình vẽ. Nối AB, AC, AD, AE, AF ta được 5 đoạn thẳng tô bởi hai màu nên theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất 3 đoạn thẳng cùng màu.

Giả sử AB, AC, AD có cùng màu nâu. Khi đó ta có các trường hợp sau.

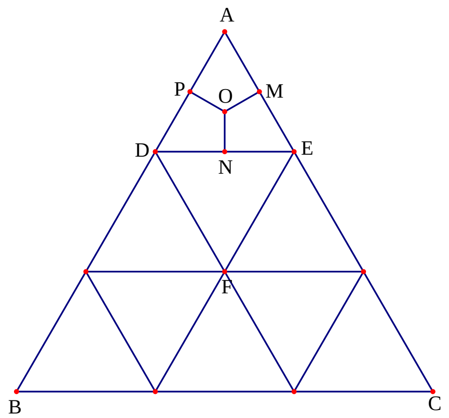
• Trường hợp 1: Nếu một trong ba đoạn BC, BD hoặc CD có màu nâu thì ta có một tam giác có ba đỉnh màu đỏ và ba cạnh màu nâu.

• Trường hợp 2: Nếu cả ba đoạn BC, BD và CD được tô màu tím thì ta được tam giác BCD có ba đỉnh màu đỏ và ba cạnh màu tìm.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 40. Đặt 28 điểm vào tam giác đều cạnh $6\sqrt{3}$ cm. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm trong 28 đã cho khoảng cách không vượt quá 2cm.

Lời giải



Chia tam giác đều ABC cạnh $6\sqrt{3}$ cm thành chín tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$ cm. Theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất bốn điểm thuộc cùng một tam giác đều canh $2\sqrt{3}$ cm. Giả sử có 4 điểm thuộc tam giác đều ADE cạnh $2\sqrt{3}$ cm.

Chia tam giác đều ADE cạnh $2\sqrt{3}$ cm thành ba phần như hình vẽ(với M, N, P lần lượt là trung điểm của AE, ED, DA và O là trọng tâm tam giác ADE). Khi đó mỗi phần của tam giác ADE là một tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $2\,\text{cm}$.

Theo nguyên lí Dirichlet thì có ít nhất hai điểm thuộc cùng một phần, hai điểm này có khoảng cách không vượt quá 2 cm. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 41. Cho 33 điểm hình vuông có cạnh bằng 4, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ và tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không ba điểm trong các điểm trên nằm trong phần chung của ba đường tròn có tâm chính là ba điểm trên.

Lời giải

Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông, khi đó mỗi hình vuông nhỏ có cạnh bằng 1.

Do $33 = 2.16 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet thì luôn tồn tại ba điểm cùng nằm trong một hình vuông. Giả sử ba điểm đó là A, B, C cùng nằm trong hình vuông MNPQ. Ta có đường chéo $MP = \sqrt{2}$ và mọi điểm E thuộc hình vuông MNPQ đều có $\sqrt{2} = MP > AE$. Khi đó đường tròn $\left(A; \sqrt{2}\right)$ sẽ phủ kín hình vuông MNPQ. Hoàn toàn tương tự thì các hình vuông $\left(B; \sqrt{2}\right)$ và $\left(C; \sqrt{2}\right)$ cũng sẽ phủ kín hình vuông MNPQ. Như vậy cả ba đường tròn trên cùng chứa hình vuông MNPQ. Từ đó ta được hình vuông MNPQ nằm trong phần chung của ba đường tròn trên. Mà ba điểm A, B, C cùng nằm trong hình vuông MNPQ nên chúng mằn trong phần chung của ba đường tròn $\left(A; \sqrt{2}\right)$, $\left(B; \sqrt{2}\right)$ và $\left(C; \sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 42. Trong một bàn cờ $8x8$ ta đánh giấu tất cả tâm của các ô. Tồn tại hay không 13 đường thẳng chia bàn cờ thành các phần sao cho mỗi phần chứa không quá một điểm được đánh dấu.

Lời giải

Giả sử tồn tại 13 đường thẳng $l_1; l_2; ...; l_{13}$ chia bàn cờ thành các phần sao cho mỗi phần chứa không quá một điểm được đánh dấu. Gọi tâm của 28 ô biên lần lượt là $A_1; A_2; A_3; ...; A_{28}$. Và xét 28 đoạn thẳng A_iA_{i+1} với $i = 1; 2; ...; 28$, ta quy ước $A_{29} = A_1$.

Dễ thấy mỗi đường thẳng trong 13 đường thẳng $l_1; l_2; ...; l_{13}$ cắt không quá hai trong 28 đoạn thẳng A_iA_{i+1} nói trên. Như vậy luôn tồn tại một đoạn thẳng tròn 28 đoạn thẳng trên không bị cắt bởi đường thẳng nào từ các đường thẳng đã cho. Giả sử đoạn thẳng đó là A_iA_j, khi đó hai điểm A_i và A_j nằm trong cùng một phần. Điều này mâu thuẫn với giả sử ban đầu.

Vậy không tồn tại 13 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 43. Trong mặt phẳng cho n đường thẳng sao cho đôi một không song song với nhau. Chứng minh rằng tồn tại góc giữa hai đường thẳng nào đó không lớn hơn $\frac{180^0}{n}$.

Lời giải

Cho điểm O tùy ý trong mặt phẳng. Qua O vẽ n đường thẳng $d_1;d_2;d_3;...;d_n$ lần lượt song song với n đường thẳng đã cho (ta luôn làm được điều này do n điểm đã cho đôi một không song song với nhau)

Gọi α_i là góc tạo bởi hai đường thẳng d_i và d_{i+1}.

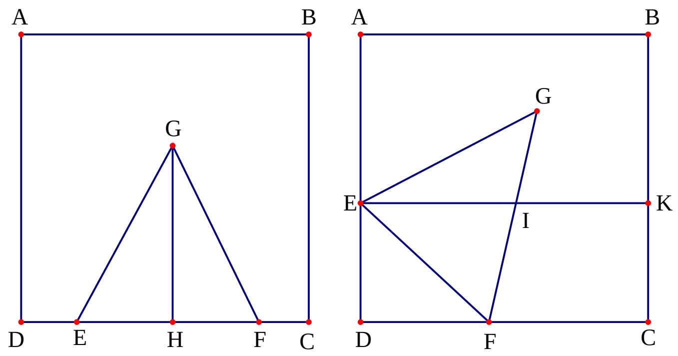
Khi đó ta có $2\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n\right)=360^0$ nên ta được $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n=180^0$.

Từ đó theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một góc $\alpha_j \le \frac{180^0}{n}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 44. Trong hình vuông có cạnh bằng 1 cho 33 điểm bất kì. Chứng minh rằng trong các điểm đã cho bao giờ cũng tìm được ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{32}$.

Lời giải

Chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn đoạn thẳng bằng nhau, khi đó ta được 16 hình vuông có diện tích bằng $\frac{1}{16}$. Do có 33 điểm nên theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại ba điểm cũng nằm trong một hình vuông nhỏ có diện tích bằng $\frac{1}{16}$.



Không mất tính tổng quát ta giả sử ba điểm đó là G, E, F và hình vuông có diện tích bằng $\frac{1}{16}$ chứa ba điểm đó là ABCD. Từ đó ta được $S_{GEF} \le \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Ta xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Tam giác GEF có một cạnh nằm trên một cạnh của hình vuông ABCD.

Giả sử EF nằm trên CD. Kẻ GH vuông góc với CD tại H, ta có $S_{GEF} = \frac{1}{2}GH.EF$.

Mà ta có $GH \le AD$ và $EF \le CD$ nên ta được $S_{GEF} \le \frac{1}{2}AD.CD = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{32}$.

- Trường hợp 2: Tam giác GEF không có cạnh nào nằm trên cạnh của hình vuông ABCD.

Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt GF và BC lần lượt tại I và K. Hoàn toàn tong tự như trên ta chứng minh được $S_{EGI} \le \frac{1}{2}S_{AEKB}; S_{EFI} \le \frac{1}{2}S_{EDCK}$, do đó ta được

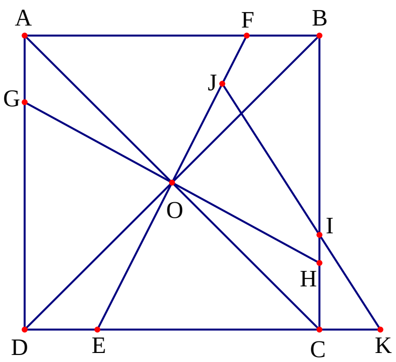
$S_{GEF} \le \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{32}$.

Ví dụ 45. Trong hình vuông cạnh 12 chứa 2014 điểm. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác đều cạnh 11 phủ kín 504 điểm trong 2014 điểm đã cho.

Lời giải

Lấy J trên OF sao cho $EJ = 11$. Ta thấy

$$\sin FEC = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow FEC = 60^0$$



Trên tia EC lấy K sao cho $EK = EJ = 11$. Ta có tam giác JEK đều cạnh 11. Ta đi chứng minh tam giác JEK phủ kín tứ giác OHCE.

Gọi giáo điểm của JK với BC là I. Suy ra ta được

$$IC = KC\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(5 - 2\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3} - 6 = 6 - 2\sqrt{3} = CH$$

Do $CH < CI$ nên H nằm giữa C và I.Suy ra tam giác JEK phủ kín hoàn toàn tứ giác OHCE.

Do vai trò của các tứ giác OHCE, OEDG, OGAF, OFBH là như nhau.

Áp dụng nguyên lý Dirichlet ta suy ra: luôn tồn tại $\left[\frac{2014}{4}\right] + 1 = 504$ điểm trong 2014 điểm đã cho nằm trong một trong các tứ giác OHCE, OEDG, OGAF hoặc OFBH.

Vậy luôn tồn tại một tam giác đều cạnh 11 phủ kín 504 điểm trong 2014 điểm đã cho.

Ví dụ 46. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có độ dài cạnh huyền bằng 2015. Trong tam giác ABC lấy ABC lấy 2031121 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm có khoảng cách không lớn hơn 1.

Lời giải

Chia cạnh huyền BC thành 2015 đoạn thẳng bằng nhau, mỗi đoạn thẳng có dộ dài bằng 1. Từ các điểm chia đó vẻ các đường thẳng song song với hai cạnh AB và AC ta được 2015 tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1 và $\left(2014 + 2013 + \ldots + 1\right)$ hình vuông có đường chéo bằng 1.

Do đó trong tam giác ABC có tất cả $2015 + \frac{1}{2}2014.2015 = 2031120$ hình (vừa hình vuông có đường chéo bằng 1 vừa tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1).

Như vây theo nguyên lý Dirchhlet thì trong 2031121 điểm sẽ tồn tại ít nhất hai điểm nằm trong một hình nào đó.

Với hai điểm đó thì khoảng cách của nó không lớn hơn 1

Ví dụ 47. Trong mặt phẳng cho 9 điểm có tọa độ nguyên, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi trong số các tam giác được tạo thành từ 3 trong 9 điểm đó có ít nhất bao nhiêu tam giác có diện tích nguyên?

Lời giải

Với tam giác ABC có tọa độ đỉnh $A(x_A;\, y_A)$, $B(x_B;\, y_B)$, $C(x_C;\, y_C)$ thì

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)\right| \ (1)$$

• Xét 9 điểm A, B, C, D, F, G, H, I có tọa độ nguyên thì tọa độ của mỗi điểm sẽ thuộc một trong các dạng sau: (chẵn, chẵn), (lẻ, lẻ), (lẻ, chẵn), (chẵn, lẻ). Do đó theo nguyên lí Dirichlets tồn tại ít nhất $\left[\frac{9}{4}\right] + 1 = 3$ điểm thuộc cùng một dạng, tức là tọa độ cùng tính chẵn lẻ, giả sử đó là A, B, C.

• Với hai điểm A, B có tọa độ cùng tính chẵn lẻ thì $y_B - y_A$ và $x_B - x_A$ đều là số chẵn nên diện tích tam giác có cạnh AB đều nguyên (do(1)). Tương tự diện tích các tam giác có cạnh là AC, BC đều nguyên.

• Với mỗi 2 trong 3 điểm A, B, C kết hợp với 6 điểm còn lại thì được 6 tam giác có diện tích nguyên. Vậy có ít nhất $3.6 + 1 = 19$ tam giác có diện tích nguyên.

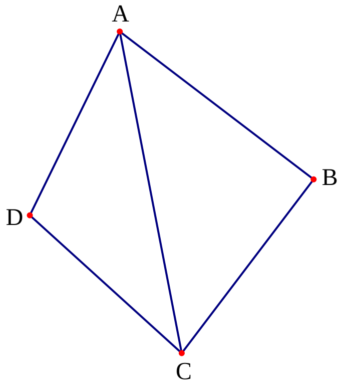
Ví dụ 48. Cho 19 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, nằm trong một hình lục giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác mà đỉnh là ba trong 19 điểm trên có ít nhất một góc không lớn hơn 45^0 và nằm trong đường tròn bán kính nhỏ hơn $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Vẽ các đường chéo của lục giác đều. Các đường chéo này chia lục giác đều thành 6 tam giác bằng nhau mỗi cạnh tam giác có độ dài bằng 1. Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 19 điểm luôn tồn tại bốn điểm nằm tròn một tam giác đều.

Giả sử bốn điểm cùng nằm trong một tam giác đều là A, B, C, D. Ta xét các vị trí của bốn điểm A, B, C, D theo các trường hợp sau:

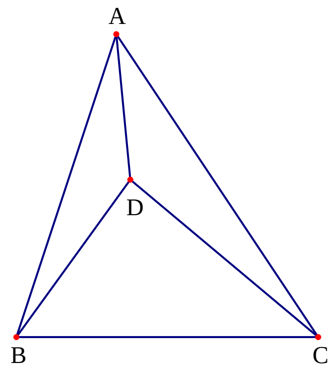
- Trường hợp 1: Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ giác lồi. Khi đó ta có $A + B + C + D = 360^0$.



Như vậy trong bốn góc trên tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng 90^0, giả sử đó là góc A. Khi đó ta có $DAC + CAB \le 90^0$ nên một trong hai góc $DAC; CAB$ có một góc không lớn hơn 45^0.

Như vậy một trong hai tam giác ADC và ABD có một góc không lớn hơn 45^0.

- Trường hợp 2: Trong bốn điểm A, B, C, D có một điểm nằn trong tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại. Giả sử điểm D nằm trong tam giác ABC.



+ Nếu $BDC \ge 90^0$ thì ta được $DBC + DCB \le 90^0$ nên một trong hai góc $DBC; DCB$ không lớn hơn 45^0. Suy ra tam giác BCD thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $BDC < 90^0$ thì ta được $BAC < 90^0$, do đó $CAD + BAD < 90^0$

Từ đó ta được một trong hai góc $CAD; BAD$ không lớn hơn 45^0 hay một trong hai tam giác ADC và ADB thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Mạt khác ta giác đều có cạnh bằng một nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mà $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{5}$ nên ta có điều phải chứng minh.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó(có thể là 0 trận).

Bài 2. Một bà mẹ chiều con nên ngày nào cũng cho con ăn ít nhất một chiếc kẹo. Để hạn chế, mỗi tuần bà cho con không ăn quá 12 chiếc kẹo. Chứng minh rằng trong một số ngày liên tiếp nào đó bà mẹ đã cho con tổng số 20 chiếc kẹo.

Bài 3. Chứng minh rằng trong 2001 người bất kỳ, luôn có ít nhất hai người có số người quen bằng nhau(số người quen chỉ tính trong nhóm)

Bài 4. Trong một thời gian nọ của một lớp học Toán có một nhóm gồm 5 học sinh mà cứ mỗi người trong nhóm này thì rơi vào trong trạng thái ngủ gục trong lớp đúng 2 lần. Với mỗi cặp học sinh, đều có cả hai cùng ngủ gục một lần. Chứng minh rằng tại một thời điểm nào đó có ba học sinh trong nhóm đó đồng thời ngủ gục .

Bài 5. Có 5 người đấu cờ với nhau. Hãy xác định kết quả của tất cả các trận đấu nếu biết rằng mỗi người chơi một lần với 4 người kia và số điểm của mỗi người nhận được đều khác nhau. Ngoài ra:

a) Người xếp thứ nhất không hoà trận nào.

b) Người xếp thứ nhì không thua trận nào.

c) Người xếp thứ tư không thắng trận nào.

Bài 6. Các học sinh được phát bài kiểm tra với mỗi môn một bài và trong $n(n \geq 3)$ môn học. Biết rằng với một môn học bất kỳ có đúng 3 học sinh đạt điểm tối ưu, còn với hai môn tuỳ ý thì có đúng 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong cả hai môn đó. Hãy xác định số n bé nhất sao cho từ các điều kiện trên có thể suy ra rằng có đúng 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong cả n môn học.

Bài 7. Cho m máy tính và n máy in $(m > n)$ mỗi sợi dây cáp chỉ nối được một máy tính và một máy in. Tại một thời điểm bất kỳ mỗi máy tính chỉ có thể điều khiển được một máy in và người lại mỗi máy in chỉ in được cho một máy tính. Hỏi phải dùng ít nhất là bao nhiêu sợi dây cáp để n máy tính bất kỳ có thể đồng thời in được?

Bài 7. Kì thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Long An năm nay có 529 học sinh đến từ 16 địa phương khác nhau tham dự. Giả sử điểm bài thi môn Toán của mỗi học sinh đều là số nguyên lớn hơn 4 và bé hơn hoặc bằng 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 học sinh có điểm môn Toán giống nhau và cùng đến từ một địa phương.

Bài 8. Xét 20 số nguyên dương đầu tiên 1, 2, 3, …, 20. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Với mỗi cách lấy ra k số phân biệt từ 20 số trên, đều lấy được hai số phân biệt a và b sao cho $a+b$ là một số nguyên tố.

Bài 9. Cho tập hợp $X=\left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{2024}\right\}$. Chứng minh rằng trong 45 số khác nhau bất kỳ được lấy ra từ tập X luôn tồn tại hai số x, y sao cho $\left|x-y\right|<1$.

Bài 10. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn $\left(13579^n-1\right)$ chia hết cho 3^{13579}.

Bài 11. Trong một cái bát hình vuông cạnh 18 cm có 128 hạt vừng. Chứng minh rằng tồn tại hai hạt vừng có khoảng cách tới nhau nhỏ hơn 2 cm.

Bài 12. Bên trong tam giác đều ABC cạnh 1 đặt 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 0,5.

Bài 13. Cho hình tròn có bán kính n, ở đây n là số nguyên dương. Trong hình tròn có 4n đoạn thẳng đều có độ dài bằng 1. Cho trước một đường thẳng d. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng d′ hoặc song song với d, hoặc là vuông góc với d sao cho d′ cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho.

Bài 14. Cho một bảng có kích thước $2n\times 2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Bài 15. Chứng minh rằng trong mọi đa giác lồi với số cạnh chẵn, tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.

Bài 16. Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.

Bài 17. Giả sử 1 bàn cờ hình chữ nhật có 3x7 ô vuông được sơn đen hoặc trắng. Chứng minh rằng với cách sơn màu bất kì, trong bàn cờ luôn tồn tại hình chữ nhật gồm các ô ở 4 góc là các ô cùng màu.

Bài 18. Trong một tờ giấy hình vuông bằng giấy có cạnh bằng 12 cm có 31 lỗ kim châm. Chứng minh rằng ta vẫn có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn có bán kính 1 cm mà không chứa một lỗ kim châm nào.

Bài 19. Cho hình tròn (C) có diện tích bằng 8, đặt 17 điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Bài 20. Trong hình vuông cạnh bằng 15 đặt 20 hình vuông nhỏ cạnh bằng 1 và từng đôi một không cắt nhau. Chứng minh rằng trong hình vuông lớn có thể đặt một hình tròn bán kính 1 sao cho nó không cắt hình vuông nào.

Bài 21. Trong mặt phẳng cho tập S gồm 8065 điểm đôi một phân biệt mà diện tích của mỗi tam giác có 3 đỉnh thuộc tập S đều không lớn hơn 1 (quy ước nếu 3 điểm thẳng hàng thì diện tích của tam giác tạo bởi 3 điểm này bằng 0). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác T có diện tích không lớn hơn 1 chứa ít nhất 2017 điểm thuộc tập S (mỗi điểm trong số 2017 điểm đó nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác T).

Bài 22. Cho tam giác đều MNP có cạnh bằng 2 cm. Lấy n điểm thuộc các cạnh hoặc ở phía trong tam giác đều MNP sao cho khoảng cách giửa hai điểm tuỳ ý lớn hơn 1 cm (với n là số nguyên dương). Tìm n lớn nhất thoả mãn điều kiện đã cho.

Bài 23. Trên mặt phẳng cho 25 điểm phân biệt và trong ba điểm bất kì bao giờ cũng tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm trong các điểm trên.

Bài 24. Cho điểm P nằm trong đa giác lồi 2n cạnh. Vẽ các đường thẳng đi qua P và mỗi đỉnh của đa giác. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được một cạnh của đa giác sao cho không một đường thẳng nào trong các đường thẳng trên có điểm chung với cạnh đó.

Bài 25. Cho 19 điểm phân biệt nằm trong một tam giác đều có cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Bài 26. Trong hình vuông cạnh bằng 1 cho 5 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng, trong các điểm đã cho có thể tìm được 2 điểm sao cho khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 27. Cho tam giác nhọn ABC có $BAC = 60^0$ và $BC = 2\sqrt{3}cm$. Bên trong tam giác này cho 2017 điểm bất kì. Chứng minh rằng trong 2017 điểm ấy luôn tìm được 169 điểm mà khoảng cách giữa hai điểm trong chúng không lớn hơn 1cm.

Bài 28. Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào thuộc cùng một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm bên trong đường tròn

Bài 29. Trong hình chữ nhật có chiều dài và rộng lần lượt bằng 4 và 3 cho 49 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các đỉnh thuộc 49 điểm trên mà diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}\cdot$

Bài 30. Trong tam giác đều có cạnh bằng 8 đặt 193 điểm phân biệt. Chứng minh tồn tại 2 điểm trong 193 điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 31. Trên cùng một mặt phẳng cho 4033 điểm, biết rằng 3 điểm bất kì trong 4033 điểm trên luôn chọn được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong các điểm nói trên có ít nhất 2016 điểm nằm trong đường tròn bán kính 1.

Bài 32. Trong mặt phẳng cho 2015 điểm. Mỗi điểm là tâm một đường tròn đi qua một điểm cố định O. Chứng minh rằng từ những hình tròn tạo ra có thể chọn được 5 hình tròn mà chúng phủ tất cả 2015 điểm.

Bài 33. Có 6 đội bóng thi đấu với nhau(mỗi đội phải đấu 1 trận với 5 đội khác). Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài 34. Bên trong hình lục giác đều có cạnh bằng 2 cho 81 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình vuông có cạnh bằng 1 (kể cả biên) chứa ít nhất 6 điểm trong số các điểm đã cho.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Số lần gặp nhau mà mỗi đội có, có thể nhận 15 giá trị khác nhau: 0; 1; 2; ...; 14. Trong trường hợp này không thể áp dụng nguyên tắc Dirichlet được vì số đội cũng là 15. Hai trường hợp 0 trận và 14 trận không thể xảy ra đồng thời vì nếu có một đội nào chưa đấu trận nào thì đồng thời không thể có một đội nào đó đã đấu hết 14 trận, ngược lại nếu có một đội đã đá 14 trận thì không thể có 1 đội chưa đá một trận nào. Vì vậy số lần gặp nhau mà mỗi đội đã thực hiện trong thực tế có thể nhận thêm 14 giá trị từ 0 đến 13 hoặc từ 1 đến 14. Khi đó theo nguyên tắc Dirichlet ta luôn có thể tìm được hai đội có cùng một số trận đấu .

Bài 2. Xét 21 ngày liên tiếp kể từ một ngày thứ hai nào đó. Gọi S(n) là tổng số kẹo mà bà mẹ đã cho con tính đến ngày thứ n $\left(1\le n\le 21\right)$.

Ta có $S\left(m\right)\ne S\left(n\right),\forall m\ne n\quad\left(1\le m,n\le 21\right)$ và $1\le S\left(n\right)\le 3.12=36$.

Vì có 21 ngày và chú ý rằng $0<S\left(m\right)-S\left(n\right)<36$ nên tồn tại $m>1$ sao cho

$$S\left(m\right)\equiv S\left(n\right)\left(\bmod 20\right)\Rightarrow S\left(m\right)-S\left(n\right)\vdots 20\Rightarrow S\left(m\right)-S\left(n\right)=20$$

Như vậy từ ngày $n+1$ đến ngày thứ m, bà mẹ đã cho con tổng cộng đúng 20 chiếc kẹo.

Bài 3. Gọi số người quen của A_i là a_i, khi đó ta có $0\le a_i\le 2001$ với $1\le i\le 2001$. Xét các trường hợp:

- Tồn tại một người trong 2001 không quen ai, suy ra không có ai quen cả 2000 người còn lại trong nhóm.

Khi đó đó ta có $0\le a_i\le 1999$ với $1\le i\le 2001$ từ đó suy ra tồn tại hai số $a_k=a_m$ với $1\le k,m\le 2001$ hay tồn tại hai người có số người quen bằng nhau

- Mỗi người đều quen ít nhất một người suy ra, khi đó ta có $0\le a_i\le 2000$ với $1\le i\le 2001$ từ đó suy ra tồn tại hai số $a_k=a_m$ với $1\le k,m\le 2001$ hay tồn tại hai người có số người quen bằng nhau

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 4. Giả sử ngược lại rằng không hề có chuyện 3 học sinh đồng thời ngủ gục. Ta sẽ chứng minh điều này mâu thuẫn.

Thật vậy, trong khoảng thời gian có hai người đồng thời ngủ gục, 3 người còn lại tỉnh táo. Theo đề bài, mỗi học sinh trong nhóm đều ngủ gục đúng hai lần nên một trong hai người(đang ngủ gục) sẽ có lúc lại ngủ gục với một trong 3 người còn lại. Như vậy nhiều nhất sẽ có tất cả là 9 khoảng thời gian diễn ra ngủ gục từng cặp. Nhưng nhóm này có 5 học sinh nên số cặp là học sinh có thể ra là 10, mà chỉ có nhiều lắm là 9 khoảng thời gian. Do vậy sẽ có ít nhất một cặp không đồng thời ngủ gục. Ta có điều mâu thuẫn.

Bài 5. Theo điều kiện của bài ra ta thấy ngay người xếp thứ nhất thắng người xếp thứ ba, thứ tư, thứ năm và được tất cả 3 điểm. Còn người thứ nhì thắng người xếp thứ nhất. Người thứ nhì hòa trong các trận đấu với người xếp thứ ba, thứ tư, thứ năm và nhận 2,5 điểm.

Những người còn lại chỉ nhận số điểm lớn nhất lần lượt là 2; 1; 5; 1. Ta chứng minh họ không thể nhận ít hơn.

Thật vậy, vì có 5 người nên họ chơi tất cả 10 trận và nhận tất cả 10 điểm. Nhưng người xếp thứ nhất và thứ nhì đã nhận 5,5 điểm nên ba người còn lại nhận 4,5 điểm. Mặt khác $2+1,5+1=4,5$ nên họ không thể nhận ít hơn. Như vậy, do người thứ tư không thắng trận nào nên anh ta hoàvới người xếp thứ ba và thứ năm. Còn lại người thứ ba thắng người thứ năm.

Bài 6. Ta biểu thị mỗi học sinh bằng một điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu hai học sinh đạt điểm tối ưu ở một môn nào đó, ta nối hai điểm tương ứng lại với nhau. Khi đó, theo đề bài, mỗi môn học sẽ cho tương ứng duy nhất một tam giác vàbất cứ hai tam giác nào cũng có đúng một đỉnh chung.

Chú ý rằng nếu như bốn tam giác có chung một đỉnh thì tất cả các tam giác đều có chung đỉnh đó, bởi vì nếu không thì tam giác thứ năm sẽ có chung đỉnh với mỗi một trong bốn tam giác đó. Như vậy tam giác thứ năm này sẽ có bốm đỉnh, điều này mâu thuẫn.

Bây giờ nếu $n \geq 8$ thì một tam giác sẽ có chung một đỉnh với mỗi một trong 7 tam giác còn lại. Theo nguyên lí Dirichlet thì một trong các đỉnh của nó sẽ có chung đỉnh với ít nhất ba tam giác khác, tức là tồn tại 4 tam giác có chung một đỉnh.

Cuối cùng ví dụ sau đây chứng tỏ rằng trường hợp $n = 7$ không thỏa mãn đề bài. Trong bảng dưới đây ta dùng dấu chéo ($\times$) để chỉ học sinh đạt điểm tối ưu ở môn học tương ứng

Học sinh / Môn học	1	2	3	4	5	6	7
I	x	x	x				
II	x			x	x		
III		x		x		x	
IV			x	x			x
V	x					x	x
VI		x			x		x
VII			x		x	x	

Như vậy giá trị nhỏ nhất của n là 8.

Bài 7. Ta xét một cách nối thoả mãn đề bài như sau: Với n máy tính đầu tiên mỗi máy nối với một máy in, còn với $m - n$ máy tính còn lại, mỗi máy nối với tất cả n máy in.

Khi đó số dây cáp cần dùng trong cách nối này là $S = n + n(m-n) = n(m-n+1)$

Ta sẽ chứng minh rằng nếu số dây cáp $S < n(m-n+1)$ thì không thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thật vậy, nếu $S < n(m-n+1)$ thì có ít nhất một máy in x nào đó được nối với không quá $m-n$ máy tính. Từ đó suy ra rằng có m máy tín mà trong số đó có máy nào nối với máy in x, điều này có nghĩa là máy tính đó không thể nào đồng thời in được.

Tóm lại số sợi dây cáp ít nhất cần phải dùng là $S = n(m-n+1)$

Bài 7. Ta có 529 học sinh có điểm bài thi từ 5 điểm đến 10 điểm. Theo nguyên lý Dirichlet ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau (từ 5 điểm đến 10 điểm).

Ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau và đến từ 16 địa phương. Theo nguyên lý Dirichlet tìm được 6 em có cùng điểm thi môn toán và đến từ cùng một địa phương.

Bài 8. Xét tập hợp $\{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20\}$, ta thấy tổng của hai phần tử bất kì của tập hợp này đều không phải là số nguyên tố. Do đó $k \geq 11$, ta sẽ chứng minh $k = 11$ là số nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, ta chia tập hợp $A = \{1;2;3;...;20\}$ thành 10 cặp số sau:

$$(1,2),(3,16),(4,19),(5,6),(7,10),(8,9),(11,20),(12,17),(13,18),(14,15)$$

Tổng của hai số trong mỗi cặp số trên là số nguyên tố. Khi đó mỗi tập con của A có 11 phần tử thì tồn tại ít nhất hai phần tử thuộc cùng vào một trong 10 cặp số trên. Suy ra trong A luôn có hai phần tử phân biệt có tổng là một số nguyên tố.

Bài 9. Chia 2012 số $1;\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{2024}$ thành 44 đoạn gồm $\left[\sqrt{1};\sqrt{3}\right],\left[\sqrt{4};\sqrt{8}\right],...,\left[\sqrt{1936};\sqrt{2024}\right]$. Các đoạn trên có dạng tổng quát là $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$.

Như vậy 45 số thuộc tập hợp X nằm trong 44 đoạn trên. Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại hai số trong 45 số trên nằm trong cùng một đoạn. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là x, y và chúng nằm trong đoạn $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$.

Khi đó ta có $|x-y| \leq \sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2} < \sqrt{(k+1)^2}-\sqrt{k^2} = k+1-k = 1$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 10. Đặt $a = 3^{13579}$, khi đó ta được $(a,13579) = 1$.

Xét $a+1$ số có dạng $13579; 13579^2; 13579^3; ...; 13579^{a+1}$.

Chia $a+1$ số trên cho $a = 3^{13579}$ ta được $a+1$ số dư . Mà trong phép chia cho a thì có a số dư. Như vậy Trong $a+1$ số dư như trên tồn tại hai số dư bằng nhau hay tong tại hai số trong dãy số trên có cùng số dư khi chia cho a. Giả sử hai số đó là 13579^m và 13579^p với $m > p$.

Khi đó ta được $\left(13579^m - 13579^p\right) \vdots a$ hay $13579^p\left(13579^{m-p} - 1\right) \vdots a$.

Do $(a,13579) = 1$ nên $\left(a,13579^p\right) = 1$, suy ra $\left(13579^{m-p} - 1\right) \vdots a$

Điều này có nghĩa là tông tại số có dạng $\left(13579^n - 1\right)$ chia hết cho 3^{13579}.

Bài 11. Lấy mỗi hạt vừng làm tâm dựng hình tròn bán kính 1 cm. Các hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông có cạnh 20cm thu được từ hình vuông đã cho bằng cách tịnh tiến bốn cạnh của nó một khoảng 1cm ra phía ngoài. Tổng diện tích của các hình tròn bán kính 1cm này là $128\pi > 402{,}112 > 400$. Do đó tổng diện tích các hình tròn này lớn hơn diện tích hình vuông cạnh 20 cm.

Bài 12. Các đường trung bình của tam giác đều cạnh 1 sẽ chia nó ra làm 4 tam giác đều cạnh 0,5.

Do đó trong một tam giác nhỏ đó có ít nhất 2 điểm đã cho, và các điểm đó không thể rơi vào các đỉnh của tam giác ABC.Vậy khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 0,5.

Bài 13. Giả sử AB là đoạn thẳng có độ dài bằng 1, a và a′ là hai đường thẳng bất kì vuông góc với nhau. Gọi A′B′ và A″B″ là các hình chiếu của AB lên a và a′. Khi đó ta có: $A'B' + A''B'' \geq AB$ hay $A'B' + A''B'' \geq 1$.

Áp dụng vào bài toán ta gọi d" là đường thẳng bất kì vuông góc với d. Chiếu vuông góc tất cả 4n đoạn thẳng lên d và d". từ (1) suy ra tổng độ dài hình chiếu của tất cả 4n đoạn thẳng không bé hơn 4n.

Vì vậy, theo nguyên lí Dirichlet trong hai đường thẳng d và d" có ít nhất một đường thẳng mà tổng độ dài của hình chiếu các đoạn thẳng lên nó không bé hơn 2n. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là d.

Mặt khác, mỗi đoạn thẳng đầu nằm trọn trong hình tròn bán kính n (đường kính 2n), nên hợp các hình chiếu của chúng trên d có độ dài không vượt quá 2n.

Vì vậy, theo nguyên lí dirichlet trên d tồn tại ít nhất một điểm M thuộc vào hình chiếu của ít nhất hai đoạn thẳng trong số 4n đoạn thẳng đã cho. Gọi d' là đường thẳng vuông góc với d tại M. Đường thẳng d' chính là đường thẳng cần tìm.

Bài 14. Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Ta chứng minh rằng các ô được đánh dấu còn nhỏ hơn hoặc bằng n.

Giả sử ngược lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $n+1$. Số các hàng còn lại chưa chọn là n. Vậy theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (tổng số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu. Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn có không ít hơn 2n ô đã được đánh dấu.

	×		×	×	
		×		×	
	×				×
		×			
			×		

Như vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n+(n+1)\geq 3n$. Vô lí vì chỉ có 3n ô được đánh dấu. Vậy nhận xét được chứng minh.

Như vậy, sau khi đã chọn ra n hàng(với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại có không quá n ô được đánh dấu. Vì thế cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.

Bài 15. Ta giả thiết rằng nếu một đa giác có n cạnh thì có $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Xét một đa giác lồi bất kì với số cạnh là chẵn (đa giác lồi 2k cạnh với $k\geq 2$).

Khi đó số đường chéo của nó là $s=\frac{2k(2k-3)}{2}$.

Ta có $s=k(2k-3)=2k(k-2)+k$ nên suy ra $s>2k(k-2)$.

Giả sử ngược lại đa giác này có tính chất mỗi đường chéo của nó đều song song với một cạnh nào đó của đa giác. Đa giác này có 2k cạnh, vì thế từ $s>2k(k-2)$ suy ra tồn tại ít nhất $k-1$ đường chéo $d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$ mà các đường chéo này cùng song song với một cạnh a nào đó của tam giác đã cho. Thật vậy, nếu ngược lại mỗi cạnh tối đa là song song $k-2$ đường chéo thì tối đa ta chỉ có $k(k-2)$ đường chéo và $s\leq 2k(k-2)$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Như thế ta có k đường thẳng song song với nhau $a,d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$.

Mặt khác đa giác đã cho là đa giác lồi nên các đường chéo $d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xác định cạnh a. Không mất tính tổng quát có thể cho d_1 là đường chéo xa nhất đối với a. Ta có tất cả k đoạn thẳng phân biệt, nên mỗi đỉnh của đa giác đều là đầu mút của một đoạn nào đó trong k đoạn trên. Từ đó suy ra toàn bộ đa giác nằm hẳn về một nửa mặt phẳng xác định bởi d_1. Do d_1 là đường chéo, nên điều này mâu thuẫn với tính lồi của đa giác. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 16. Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau. Như thế hình lập phương đã cho được chia thành $13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Do $11000 > 5.2197 - 10985$, nên tồn tại ít nhất 1 hình lập phương nhỏ, mà hình lập phương này chứa ít nhất 6 điểm. Như đã biết, nếu gọi cạnh hình lâp phương bằng a, thì hình cầu ngoại tiếp có bán kính R với $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Vì thế hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ(cạnh của nó là $\frac{15}{13}$) được xác định là

$$R = \frac{1}{2}\frac{15}{13}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{15}{13}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{675}{169}} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

Hình cầu bán kính R này dĩ nhiên chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.

Bài 17. Mẫu sơn màu có thể xảy ra với bàn cờ này có dạng từ 1 đến 8. Giả sử một trong số các cột thuộc dạng 1. Bài toán sẽ được chứng minh nếu tất cả các cột còn lại thuộc dạng 1, 2, 3 hoặc 4. Giả sử tất cả các cột còn lại thuộc dạng 5, 6, 7, 8. Khi đó theo nguyên lí Dirichlet 2 trong số 6 cột có 2 cột cùng 1 dạng và như vậy bài toán cũng được chứng minh.

Chứng minh hoàn toàn tương tự nếu 1 cột có dạng 8. Giả sử không có cột nào trong các cột 1, 8 thì theo nguyên lí Dirichlet cũng có 2 cột cùng dạng và bài toán cũng được chứng minh.

Bài 18. Lấy mỗi lỗ kim là tâm dựng một hình tròn bán kính 1cm. Tổng diện tích của 31 hình tròn này sẽ là 31π nhỏ hơn diện tích của hình vuông cạnh 10 cm . Do đó phải có một điểm M trong hình vuông cạnh 10 cm(là hình vuông thu được từ hình vuông cạnh 12 cm đã cho bằng cách thu hẹp các chiều 1cm) và không nằm trong 31 hình tròn bán kính được dựng như đã trình bày ở trên. Lấy điểm M làm tâm ta cắt một hình tròn bán kính 1cm, thì hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông đã cho có cạnh dài 12 cm và không chứa một lỗ kim châm nào cả.

Bài toán tổng quát có thể được phát biểu như sau: Trong một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng b có a lỗ kim châm. (trong đó $b > \sqrt{ar^2\pi}$). Chứng minh rằng ta vẫn có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn có bán kính r cm mà không chứa một lỗ kim châm nào.

Bài 19. Chia hình tròn thành (C) thành 8 hình quạt bằng nhau, mỗi hình quat có diện tích bằng 1. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình quạt (a) chứa 3 điểm trong số 17 điểm đã cho. Tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm đó nằm trọn trong hình quạt nên có diện tích nhỏ hơn diện tích hình quạt, tức là bé hơn 1.

Bài 20. Xét hình gồm tất cả các điểm cách hình vuông nhỏ cạnh 1 một khoảng không lớn hơn 1. Rõ ràng hình tròn bán kính 1 có tâm nằm ngoài hình đó nên không thể cắt hình vuông nhỏ. Diện tích hình đó bằng $5+\pi$. Tâm hình tròn cần tìm cũng cần phải cách các cạnh của hình vuông lớn hơn một khoảng lớn hơn 1, tức là ở bên trong hình vuông cạnh 13. Vì $20\left(5+\pi\right)<13^2$. Hình tròn có tâm tại điểm không bị phủ sẽ có tính chất thỏa mãn đề bài.

Bài 21. Gọi d là khoảng cách hai điểm A_i, A_j xa nhất trong tất cả các điểm thuộc tập hợp S. Giả sử A_k có khoảng cách đến đường thẳng A_iA_j lớn nhất. Khi đó tam giác $A_iA_jA_k$ có $S_{A_iA_jA_k}\le 1$ và lớn nhất. Từ các điểm A_i, A_j và A_k vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác $A_iA_jA_k$ thì ta thu được bốn tam giác con bằng nhau và một tam giác lớn. Tam giác lớn có diện tích không vượt quá 4 đơn vị. Tam giác này chứa 8065 điểm đã cho. Vì $8065:4=2016$ dư 1. Nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một tam giác con chứa 2017 điểm thuộc tập hợp S thỏa mãn đề bài.

Bài 22. Tam giác đều có cạnh bằng 2 cm thì diện tích bằng $\sqrt{3}$ cm², tam giác đều có cạnh bằng 1 cm thì diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm². Nếu tam giác đều có cạnh lớn hơn 1cm thì diện tích lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm²

Gọi t là số tam giác đều có cạnh lớn hơn hoặc bằng 1cm chứa được trong tam giác đều có cạnh 2 cm:

$1\le t<4$ (với t là số nguyên dương). Suy ra $t_{max}=3$.

Theo nguyên lý Drichlet sẽ có 1 trong t tam giác đều có cạnh lớn hơn 1cm đó chứa tối đa 2 điểm thoả mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ luôn lớn hơn 1cm.

Vậy số điểm thoả yêu cầu bài toán là $2 \le n \le 4$ nên giá trị lớn nhất của n 4

Bài 23. Xét hai điểm A và B trong 25 điểm đã cho thỏa mãn điều kiện AB có độ dài lớn nhất. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $AB < 1$. Khi đó mọi điểm C bất kì trong 25 điểm đã cho ta đều có $AC \le AB < 1$. Suy ra toàn bộ 25 điểm trên cùng nằm trong đường tròn tâm A có bán kính bằng 1.

- Trường hợp 2: Với $AB \ge 1$. Khi đó xét điểm C trong số các điểm còn lại.

Theo giả thiết với ba điểm A, B, C ta luôn có $AC < 1$ hoặc $BC < 1$.

Như vậy với các điểm còn lại có ít nhất 12 đoạn thẳng xuất phát từ A có độ dài nhỏ nhơn 1 hoặc có ít nhất 12 điểm xuất phát từ B có độ dài nhỏ hơn 1. Vẽ đường tròn tâm A bán kính bằng 1 hoặc đường tròn tâm B bán kính bằng 1.

Suy ra đường tròn tâm A hoặc đường tròn tâm B chứa ít nhất 13 điểm tròn số các điểm đã cho.

Từ đó bài toán được chứng minh.

Bài 24. Xét đa giác lồi 2n cạnh $A_1A_2A_3...A_{2n}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Điểm P nằm trên một đường chéo của đa giác $A_1A_2A_3...A_{2n}$.

Khòn mất tình tổng quát ta giả sử P nằm trên đường chéo A_iA_j của đa giác. Khi đó hai đường thẳng PA_i và PA_j trùng nhau và không cắt phần trong của bất cứ cạnh nào của đa giác. Khi đó $2n-2$ chỉ cắt tối đa $2n-2$ cạnh của đa giác. Vậy có ít nhất hai cạnh của đa giác thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

- Trường hợp 2: Điểm P không nằm trên bất kì đường chéo nào của đa giác $A_1A_2A_3...A_{2n}$.

Vẽ đường chéo A_1A_{n+1}, khi đó mỗi phía của đường chéo chứa n cạnh của đa giác. Không mất tính tổng quát ta giả sử điểm P nằm trong đa giác $A_1A_2A_3...A_{n+1}$. Khi đó $n+1$ đường thẳng $PA_{n+1};PA_{n+2};PA_{n+3};...;PA_{2n}$ không thể cắt các cạnh $A_{n+1}A_{n+2};A_{n+2}A_{n+2};...;A_{2n}A_1$.

Còn lại $n-1$ đường thẳng cắt phần trong tối đa của $n-1$ cạnh trong n cạnh này. Như vậy tồn tại một trong n cạnh $A_{n+1}A_{n+2};A_{n+2}A_{n+2};...;A_{2n}A_1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 25. Giả sử 19 điểm nằm trong tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Chia tam giác ABC thành 9 tam giác đều, có cạnh bằng 1 (gọi là tam giác nhỏ). Mỗi tam giác nhỏ có diện tích là $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Để ý là $19=2.9+1$

Vì có 19 điểm nằm trong 9 tam giác nhỏ nên theo nguyên lý Dirichlets thì có ít nhất 3 điểm cùng thuộc một hình tam giác nhỏ. Giả sử 3 điểm đó là I_1,I_2,I_3.

Khi đó tam giác $\Delta I_1I_2I_3$ nằm trong một tam giác nhỏ nên $S_{\Delta I_1I_2I_3}\le\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Bài 26. Chia hình vuông đã thành 4 hình vuông con. Dễ dàng tính được, cạnh của một hình vuông con là $\frac{1}{2}$ và đường chéo là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Gieo 5 điểm đã cho vào hình vuông ban đầu, 5 điểm đó sẽ nằm trong 4 hình vuông con. Theo nguyên tắc Dirichlets thì tồn tại 2 điểm nằm trong cùng một hình vuông. do đó khoảng cách giữa 2 điểm đó sẽ không lớn hơn đường chéo của hình vuông chứa nó, tức là không lớn hơn $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 27. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ OH, OK, OG lần lượt vuông góc với các cạnh AB, AC, BC. Dễ dàng chứng minh được các tứ giác AHOK, BHOG, KOGC nội tiếp các đường tròn đường kính $OA=OB=OC=2$ cm. Ta có 2017 điểm nên theo nguyên lí Diriclet thì sẽ tồn tại một tứ giác có chứa ít nhất 673 điểm, giả sử đó là tứ giác OKCG.

Xét tứ giác OKCG. Gọi I là trung điểm OC nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác OKCG

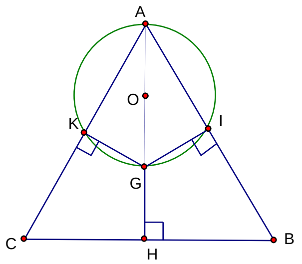
Khi đó ta được $IO=IK=IC=IG=1$ cm. Kẻ IM, IN, IP, IQ lần lượt vuông góc với OK, KC, CG, GO. Suy ra bốn tứ giác OMIQ, MKNI, INCP, PGQI nội tiếp các đường tròn đường kính bằng 1 cm

mà có 673 điểm. Như vậy theo nguyên lí Diriclet thì sẽ tồn tại một tứ giác có chứa ít nhất 169 điểm, giả sử đó là tứ giác MKNI. Khi đó 169 điểm này sẽ thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác MKNI có đường kính $IK = 1cm$. Do đó khoảng cách 169 điểm này không lớn hơn 1cm

Bài 28. Giả sử 5 điểm đó là A, B, C, D, E. Vì trong năm điểm này không có ba điểm nào thẳng hàng nên ta tồn tại 2 điểm trong năm điểm đã cho sao cho đường thẳng đi qua 2 điểm này chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng và 3 điểm còn lại nằm cùng về một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng trên. Giả sử đó là 2 điểm A và B. Xét 3 góc sau $ACB; ADB; AEB$. Khi đó do trong 5 điểm không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên ta hoàn toàn có thể sắp thứ tự chúng như sau: $ACB < ADB < AEB$. Khi đó dễ thấy điểm E nằm bên trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB còn điểm C nằm bên ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB.(chứng minh đơn giản dựa theo cách tính số đo của góc có đỉnh nằm trong, nằm ngoài đường tròn)

Bài 29. Chia hình chữ nhật 4×3 thành 24 hình chữ nhật $\frac{1}{2} \times 1$, mỗi hình chữ nhật có diện tích là $\frac{1}{2}\cdot$ Vì có 49 điểm nằm trong 24 hình chữ nhật nên tồn tại một hình chữ nhật $\frac{1}{2} \times 1$ chứa ít nhất 3 điểm trong 49 điểm đã cho. Tam giác có ba đỉnh là 3 điểm nằm trong hình chữ nhật này có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}\cdot$

Bài 30. Chia mỗi cạnh của tam giác thành 8 đoạn thẳng bằng nhau. Nối các điểm chia đó bằng các đoạn thẳng song song với các cạnh của tam giác. Ta được các tam giác đều có cạnh bằng 1



Số tam giác đều là $1 + 3 + \ldots + 15 = 8^2 = 64$

Đặt ngẫu nhiên 193 điểm vào 64 tam giác này ($193 : 64 = 3$ dư 1) Theo nguyên lí dirichlet thì sẽ có ít nhất 1 tam giác đều có ít nhất 4 điểm. Xét tam giác đều này, gọi G là trọng tâm của tam giác, từ G vẽ các đoạn thẳng vuông góc đến các cạnh, tạo thành 3 tứ giác bằng nha

Đặt ngẫu nhiên 4 điểm vào tam giác này theo nguyên lí Dirichlet sẽ có một tứ giác chứa ít nhất 2 điểm. Mà tứ giác này nội tiếp trong đường tròn đường kính GA nên khoảng cách của chúng $d \le AG$ Mà ta có $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GA = \frac{2}{3}.AH = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Do đó

$d \le \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 31. Lấy 1 điểm A bất kì trong 403 điểm đó vẽ đường tròn tâm A bán kính 1.

+ Nếu 4032 điểm còn lại thuộc hình tròn thì bài toán được chứng minh.

+ Nếu tất cả 4032 điểm đó nằm ngoài hinh tròn thì ta lấy 1 điểm B bất kì trong số đó vẽ đường tròn tâm B bán kính 1.

+ Nếu 4031 điểm còn lại thuộc hình tròn thì bài toán được chứng minh.

+ Nếu trong đó có một điểm C không thuộc cả 2 hình tròn thì $AC > 1; AB > 1; BC > 1$ điều này trái với giả thiết đầu bài.

Suy ra 4033 điểm đó phải thuộc hình tròn tâm A hoặc tâm B. Như vậy theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại 1 hình tròn có bán kính 1 chứa ít nhất 2016 điểm

Bài 32. Gọi 2015 điểm trên mặt phẳng lần lượt là $A_1; A_2; A_3 : ...A_{2015}$. Vẽ các đường tròn tâm O bán kính lần lượt là $OA_1; OA_2; OA_3; ...OA_{2015}$. Ta gọi điểm A_1 gần điểm O hơn A_j nếu $OA_i < OA_j$. Giả sử A_1 là điểm gần O nhất thì ta có nhiều nhất 2015 đường tròn tâm OO. Vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau tại O thì hai đường thẳng đó sẽ chia mặt phẳng làm 4 phần. Từ 4 phần trên ở mỗi phần ta chọn điểm xa O nhất ở từng phần rồi từ 4 điểm ấy ta vẽ đường tròn theo yêu cầu đề bài thì 44 đường tròn ấy sẽ phủ kín toàn bộ 2015 điểm trên hoặc sẽ phủ hầu hết các điểm và vẫn còn một vài điểm chưa được phủ. Tuy nhiên các điểm chưa được phủ sẽ nằm trong vùng cắt của ba đường tròn. Khi đó từ một trong các điểm đó ta có thể vẽ một đường tròn bao phủ 2015 điểm còn lại.

Bài 33. Giả sử 6 đội bóng đó là A, B, C, D, E, F. Xét đội A, theo nguyên lý Dirichlê ta suy ra A phải đấu hoặc không đấu với ít nhất 3 đội khác. Không mất tính tổng quát ta giả sử A đã đấu với B, C, D.

+ Nếu B,C, D từng cặp chưa đấu với nhau thì bài toán được chứng minh.

+ Nếu B, C, D có hai đội đã đấu với nhau, ví dụ B và C thì 3 đội A, B, C từng cặp đã đấu với nhau.

Như vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài 34. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp lục giác đều có cạnh bằng 2, khi đó (O) có bán kính $R = 2.$ Gọi $ABCD$ là hình vuông ngoại tiếp (O). Cạnh của hình vuông này bằng 4. Chia hình vuông thành 16 hình vuông nhỏ, có cạnh bằng 1.

Rõ ràng 16 hình vuông này chứa 81 điểm đã cho. Vì $81 = 16.5 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại hình vuông cạnh bằng 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số các điểm đã cho.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Có 15 đội bóng tham dự giải vô địch quốc gia theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng tại bất kì thời điểm nào của giải ta luôn tìm được 2 đội có cùng số trận đấu bằng nhau tại thời điểm đó(có thể là 0 trận).

Bài 2. Một bà mẹ chiều con nên ngày nào cũng cho con ăn ít nhất một chiếc kẹo. Để hạn chế, mỗi tuần bà cho con không ăn quá 12 chiếc kẹo. Chứng minh rằng trong một số ngày liên tiếp nào đó bà mẹ đã cho con tổng số 20 chiếc kẹo.

Bài 3. Chứng minh rằng trong 2001 người bất kỳ, luôn có ít nhất hai người có số người quen bằng nhau(số người quen chỉ tính trong nhóm)

Bài 4. Trong một thời gian nọ của một lớp học Toán có một nhóm gồm 5 học sinh mà cứ mỗi người trong nhóm này thì rơi vào trong trạng thái ngủ gục trong lớp đúng 2 lần. Với mỗi cặp học sinh, đều có cả hai cùng ngủ gục một lần. Chứng minh rằng tại một thời điểm nào đó có ba học sinh trong nhóm đó đồng thời ngủ gục .

Bài 5. Có 5 người đấu cờ với nhau. Hãy xác định kết quả của tất cả các trận đấu nếu biết rằng mỗi người chơi một lần với 4 người kia và số điểm của mỗi người nhận được đều khác nhau. Ngoài ra:

a) Người xếp thứ nhất không hoà trận nào.

b) Người xếp thứ nhì không thua trận nào.

c) Người xếp thứ tư không thắng trận nào.

Bài 6. Các học sinh được phát bài kiểm tra với mỗi môn một bài và trong $n(n \ge 3)$ môn học. Biết rằng với một môn học bất kỳ có đúng 3 học sinh đạt điểm tối ưu, còn với hai môn tuỳ ý thì có đúng 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong cả hai môn đó. Hãy xác định số n bé nhất sao cho từ các điều kiện trên có thể suy ra rằng có đúng 1 học sinh đạt điểm tối ưu cho mỗi môn trong cả n môn học.

Bài 7. Cho m máy tính và n máy in $\left(m > n\right)$ mỗi sợi dây cáp chỉ nối được một máy tính và một máy in. Tại một thời điểm bất kỳ mỗi máy tính chỉ có thể điều khiển được một máy in và người lại mỗi máy in chỉ in được cho một máy tính. Hỏi phải dùng ít nhất là bao nhiêu sợi dây cáp để n máy tính bất kỳ có thể đồng thời in được?

Bài 7. Kì thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Long An năm nay có 529 học sinh đến từ 16 địa phương khác nhau tham dự. Giả sử điểm bài thi môn Toán của mỗi học sinh đều là số nguyên lớn hơn 4 và bé hơn hoặc bằng 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 6 học sinh có điểm môn Toán giống nhau và cùng đến từ một địa phương.

Bài 8. Xét 20 số nguyên dương đầu tiên 1, 2, 3, …, 20. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Với mỗi cách lấy ra k số phân biệt từ 20 số trên, đều lấy được hai số phân biệt a và b sao cho $a+b$ là một số nguyên tố.

Bài 9. Cho tập hợp $X=\left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{2024}\right\}$. Chứng minh rằng trong 45 số khác nhau bất kỳ được lấy ra từ tập X luôn tồn tại hai số x, y sao cho $\left|x-y\right|<1$.

Bài 10. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn $\left(13579^n-1\right)$ chia hết cho 3^{13579}.

Bài 11. Trong một cái bát hình vuông cạnh 18 cm có 128 hạt vừng. Chứng minh rằng tồn tại hai hạt vừng có khoảng cách tới nhau nhỏ hơn 2 cm.

Bài 12. Bên trong tam giác đều ABC cạnh 1 đặt 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 0,5.

Bài 13. Cho hình tròn có bán kính n, ở đây n là số nguyên dương. Trong hình tròn có 4n đoạn thẳng đều có độ dài bằng 1. Cho trước một đường thẳng d. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng d′ hoặc song song với d, hoặc là vuông góc với d sao cho d′ cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho.

Bài 14. Cho một bảng có kích thước $2n\times2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Bài 15. Chứng minh rằng trong mọi đa giác lồi với số cạnh chẵn, tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.

Bài 16. Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.

Bài 17. Giả sử 1 bàn cờ hình chữ nhật có 3x7 ô vuông được sơn đen hoặc trắng. Chứng minh rằng với cách sơn màu bất kì, trong bàn cờ luôn tồn tại hình chữ nhật gồm các ô ở 4 góc là các ô cùng màu.

Bài 18. Trong một tờ giấy hình vuông bằng giấy có cạnh bằng 12 cm có 31 lỗ kim châm. Chứng minh rằng ta vẫn có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn có bán kính 1 cm mà không chứa một lỗ kim châm nào.

Bài 19. Cho hình tròn (C) có diện tích bằng 8, đặt 17 điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Bài 20. Trong hình vuông cạnh bằng 15 đặt 20 hình vuông nhỏ cạnh bằng 1 và từng đôi một không cắt nhau. Chứng minh rằng trong hình vuông lớn có thể đặt một hình tròn bán kính 1 sao cho nó không cắt hình vuông nào.

Bài 21. Trong mặt phẳng cho tập S gồm 8065 điểm đôi một phân biệt mà diện tích của mỗi tam giác có 3 đỉnh thuộc tập S đều không lớn hơn 1 (quy ước nếu 3 điểm thẳng hàng thì diện tích của tam giác tạo bởi 3 điểm này bằng 0). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác T có diện tích không lớn hơn 1 chứa ít nhất 2017 điểm thuộc tập S (mỗi điểm trong số 2017 điểm đó nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác T).

Bài 22. Cho tam giác đều MNP có cạnh bằng 2 cm. Lấy n điểm thuộc các cạnh hoặc ở phía trong tam giác đều MNP sao cho khoảng cách giửa hai điểm tuỳ ý lớn hơn 1 cm (với n là số nguyên dương). Tìm n lớn nhất thoả mãn điều kiện đã cho.

Bài 23. Trên mặt phẳng cho 25 điểm phân biệt và trong ba điểm bất kì bao giờ cũng tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm trong các điểm trên.

Bài 24. Cho điểm P nằm trong đa giác lồi 2n cạnh. Vẽ các đường thẳng đi qua P và mỗi đỉnh của đa giác. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được một cạnh của đa giác sao cho không một đường thẳng nào trong các đường thẳng trên có điểm chung với cạnh đó.

Bài 25. Cho 19 điểm phân biệt nằm trong một tam giác đều có cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Bài 26. Trong hình vuông cạnh bằng 1 cho 5 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng, trong các điểm đã cho có thể tìm được 2 điểm sao cho khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 27. Cho tam giác nhọn ABC có $BAC = 60^0$ và $BC = 2\sqrt{3}cm$. Bên trong tam giác này cho 2017 điểm bất kì. Chứng minh rằng trong 2017 điểm ấy luôn tìm được 169 điểm mà khoảng cách giữa hai điểm trong chúng không lớn hơn 1cm.

Bài 28. Trên mặt phẳng cho năm điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào thuộc cùng một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm bên trong đường tròn

Bài 29. Trong hình chữ nhật có chiều dài và rộng lần lượt bằng 4 và 3 cho 49 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các đỉnh thuộc 49 điểm trên mà diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}\cdot$

Bài 30. Trong tam giác đều có cạnh bằng 8 đặt 193 điểm phân biệt. Chứng minh tồn tại 2 điểm trong 193 điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 31. Trên cùng một mặt phẳng cho 4033 điểm, biết rằng 3 điểm bất kì trong 4033 điểm trên luôn chọn được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong các điểm nói trên có ít nhất 2016 điểm nằm trong đường tròn bán kính 1.

Bài 32. Trong mặt phẳng cho 2015 điểm. Mỗi điểm là tâm một đường tròn đi qua một điểm cố định O. Chứng minh rằng từ những hình tròn tạo ra có thể chọn được 5 hình tròn mà chúng phủ tất cả 2015 điểm.

Bài 33. Có 6 đội bóng thi đấu với nhau(mỗi đội phải đấu 1 trận với 5 đội khác). Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài 34. Bên trong hình lục giác đều có cạnh bằng 2 cho 81 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình vuông có cạnh bằng 1 (kể cả biên) chứa ít nhất 6 điểm trong số các điểm đã cho.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Số lần gặp nhau mà mỗi đội có, có thể nhận 15 giá trị khác nhau: 0; 1; 2; ……….; 14. Trong trường hợp này không thể áp dụng nguyên tắc Dirichlet được vì số đội cũng là 15. Hai trường hợp 0 trận và 14 trận không thể xảy ra đồng thời vì nếu có một đội nào chưa đấu trận nào thì đồng thời không thể có một đội nào đó đã đấu hết 14 trận, ngược lại nếu có một đội đã đá 14 trận thì không thể có 1 đội chưa đá một trận nào. Vì vậy số lần gặp nhau mà mỗi đội đã thực hiện trong thực tế có thể nhận thêm 14 giá trị từ 0 đến 13 hoặc từ 1 đến 14. Khi đó theo nguyên tắc Dirichlet ta luôn có thể tìm được hai đội có cùng một số trận đấu .

Bài 2. Xét 21 ngày liên tiếp kể từ một ngày thứ hai nào đó. Gọi S(n) là tổng số kẹo mà bà mẹ đã cho con tính đến ngày thứ n $\left(1\le n\le 21\right)$.

Ta có $S\left(m\right)\ne S\left(n\right),\forall m\ne n\quad \left(1\le m,n\le 21\right)$ và $1\le S\left(n\right)\le 3.12=36$.

Vì có 21 ngày và chú ý rằng $0<S\left(m\right)-S\left(n\right)<36$ nên tồn tại $m>1$ sao cho

$$S\left(m\right)\equiv S\left(n\right)\left(\bmod 20\right)\Rightarrow S\left(m\right)-S\left(n\right)\vdots 20\Rightarrow S\left(m\right)-S\left(n\right)=20$$

Như vậy từ ngày $n+1$ đến ngày thứ m, bà mẹ đã cho con tổng cộng đúng 20 chiếc kẹo.

Bài 3. Gọi số người quen của A_i là a_i, khi đó ta có $0\le a_i\le 2001$ với $1\le i\le 2001$. Xét các trường hợp:

- Tồn tại một người trong 2001 không quen ai, suy ra không có ai quen cả 2000 người còn lại trong nhóm.

Khi đó đó ta có $0\le a_i\le 1999$ với $1\le i\le 2001$ từ đó suy ra tồn tại hai số $a_k=a_m$ với $1\le k,m\le 2001$ hay tồn tại hai người có số người quen bằng nhau

- Mỗi người đều quen ít nhất một người suy ra, khi đó ta có $0\le a_i\le 2000$ với $1\le i\le 2001$ từ đó suy ra tồn tại hai số $a_k=a_m$ với $1\le k,m\le 2001$ hay tồn tại hai người có số người quen bằng nhau

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 4. Giả sử ngược lại rằng không hề có chuyện 3 học sinh đồng thời ngủ gục. Ta sẽ chứng minh điều này mâu thuẫn.

Thật vậy, trong khoảng thời gian có hai người đồng thời ngủ gục, 3 người còn lại tỉnh táo. Theo đề bài, mỗi học sinh trong nhóm đều ngủ gục đúng hai lần nên một trong hai người(đang ngủ gục) sẽ có lúc lại ngủ gục với một trong 3 người còn lại.

Như vậy nhiều nhất sẽ có tất cả là 9 khoảng thời gian diễn ra ngủ gục từng cặp. Nhưng nhóm này có 5 học sinh nên số cặp là học sinh có thể ra là 10, mà chỉ có nhiều lắm là 9 khoảng thời gian. Do vậy sẽ có ít nhất một cặp không đồng thời ngủ gục. Ta có điều mâu thuẫn.

Bài 5. Theo điều kiện của bài ra ta thấy ngay người xếp thứ nhất thắng người xếp thứ ba, thứ tư, thứ năm và được tất cả 3 điểm. Còn người thứ nhì thắng người xếp thứ nhất. Người thứ nhì hoà trong các trận đấu với người xếp thứ ba, thứ tư, thứ năm và nhận 2,5 điểm.

Những người còn lại chỉ nhận số điểm lớn nhất lần lượt là 2; 1; 5; 1. Ta chứng minh họ không thể nhận ít hơn.

Thật vậy, vì có 5 người nên họ chơi tất cả 10 trận và nhận tất cả 10 điểm. Nhưng người xếp thứ nhất và thứ nhì đã nhận 5,5 điểm nên ba người còn lại nhận 4,5 điểm. Mặt khác $2+1,5+1=4,5$ nên họ không thể nhận ít hơn.

Như vậy, do người thứ tư không thắng trận nào nên anh ta hoàvới người xếp thứ ba và thứ năm. Còn lại người thứ ba thắng người thứ năm.

Bài 6. Ta biểu thị mỗi học sinh bằng một điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Nếu hai học sinh đạt điểm tối ưu ở một môn nào đó, ta nối hai điểm tương ứng lại với nhau. Khi đó, theo đề bài, mỗi môn học sẽ cho tương ứng duy nhất một tam giác vàbất cứ hai tam giác nào cũng có đúng một đỉnh chung.

Chú ý rằng nếu như bốn tam giác có chung một đỉnh thì tất cả các tam giác đều có chung đỉnh đó, bởi vì nếu không thì tam giác thứ năm sẽ có chung đỉnh với mỗi một trong bốn tam giác đó. Như vậy tam giác thứ năm này sẽ có bốm đỉnh, điều này mâu thuẩn.

Bây giờ nếu $n \ge 8$ thì một tam giác sẽ có chung một đỉnh với mỗi một trong 7 tam giác còn lại. Theo nguyên lí Dirichlet thì một trong các đỉnh của nó sẽ có chung đỉnh với ít nhất ba tam giác khác, tức là tồn tại 4 tam giác có chung một đỉnh.

Cuối cùng ví dụ sau đây chứng tỏ rằng trường hợp $n = 7$ không thỏa mãn đề bài. Trong bảng dưới đây ta dùng dấu chéo (×) để chỉ học sinh đạt điểm tối ưu ở môn học tương ứng

Học sinh / Môn học	1	2	3	4	5	6	7
I	x	x	x				
II	x			x	x		
III		x		x		x	
IV			x	x			x
V	x					x	x
VI		x			x		x
VII			x		x	x	

Như vậy giá trị nhỏ nhất của n là 8.

Bài 7. Ta xét một cách nối thoả mãn đề bài như sau: Với n máy tính đầu tiên mỗi máy nối với một máy in, còn với $m - n$ máy tính còn lại, mỗi máy nối với tất cả n máy in.

Khi đó số dây cáp cần dùng trong cách nối này là $S = n + n(m - n) = n(m - n + 1)$

Ta sẽ chứng minh rằng nếu số dây cáp $S < n(m - n + 1)$ thì không thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thật vậy, nếu $S < n(m-n+1)$ thì có ít nhất một máy in x nào đó được nối với không quá $m-n$ máy tính. Từ đó suy ra rằng có m máy tín mà trong số đó có máy nào nối với máy in x, điều này có nghĩa là máy tính đó không thể nào đồng thời in được.

Tóm lại số sợi dây cáp ít nhất cần phải dùng là $S = n(m-n+1)$

Bài 7. Ta có 529 học sinh có điểm bài thi từ 5 điểm đến 10 điểm. Theo nguyên lý Dirichlet ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau (từ 5 điểm đến 10 điểm).

Ta có 89 học sinh có điểm bài thi như nhau và đến từ 16 địa phương. Theo nguyên lý Dirichlet tìm được 6 em có cùng điểm thi môn toán và đến từ cùng một địa phương.

Bài 8. Xét tập hợp $\{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20\}$, ta thấy tổng của hai phần tử bất kì của tập hợp này đều không phải là số nguyên tố. Do đó $k \ge 11$, ta sẽ chứng minh $k = 11$ là số nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, ta chia tập hợp $A = \{1;2;3;...;20\}$ thành 10 cặp số sau:

$$(1,2),(3,16),(4,19),(5,6),(7,10),(8,9),(11,20),(12,17),(13,18),(14,15)$$

Tổng của hai số trong mỗi cặp số trên là số nguyên tố. Khi đó mỗi tập con của A có 11 phần tử thì tồn tại ít nhất hai phần tử thuộc cùng vào một trong 10 cặp số trên. Suy ra trong A luôn có hai phần tử phân biệt có tổng là một số nguyên tố.

Bài 9.

Chia 2012 số $1;\sqrt{2};\sqrt{3};...;\sqrt{2024}$ thành 44 đoạn gồm $\left[\sqrt{1};\sqrt{3}\right],\left[\sqrt{4};\sqrt{8}\right],...,\left[\sqrt{1936};\sqrt{2024}\right]$.

Các đoạn trên có dạng tổng quát là $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$.

Như vậy 45 số thuộc tập hợp X nằm trong 44 đoạn trên. Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại hai số trong 45 số trên nằm trong cùng một đoạn. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là x, y và chúng nằm trong đoạn $\left[\sqrt{k^2};\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$.

Khi đó ta có $|x-y| \le \sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2} < \sqrt{(k+1)^2}-\sqrt{k^2} = k+1-k = 1$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 10. Đặt $a = 3^{13579}$, khi đó ta được $(a,13579) = 1$.

Xét $a+1$ số có dạng $13579; 13579^2; 13579^3; ...; 13579^{a+1}$.

Chia $a+1$ số trên cho $a = 3^{13579}$ ta được $a+1$ số dư . Mà trong phép chia cho a thì có a số dư. Như vậy Trong $a+1$ số dư như trên tồn tại hai số dư bằng nhau hay tong tại hai số trong dãy số trên có cùng số dư khi chia cho a.

Giả sử hai số đó là 13579^m và 13579^p với $m > p$.

Khi đó ta được $\left(13579^m - 13579^p\right) \vdots a$ hay $13579^p\left(13579^{m-p} - 1\right) \vdots a$.

Do $(a,13579) = 1$ nên $\left(a,13579^p\right) = 1$, suy ra $\left(13579^{m-p} - 1\right) \vdots a$

Điều này có nghĩa là tông tại số có dạng $\left(13579^n - 1\right)$ chia hết cho 3^{13579}.

Bài 11. Lấy mỗi hạt vừng làm tâm dựng hình tròn bán kính 1 cm. Các hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông có cạnh 20cm thu được từ hình vuông đã cho bằng cách tịnh tiến bốn cạnh của nó một khoảng 1cm ra phía ngoài. Tổng diện tích của các hình tròn bán kính 1cm này là $128\pi > 402{,}112 > 400$. Do đó tổng diện tích các hình tròn này lớn hơn diện tích hình vuông cạnh 20 cm.

Bài 12. Các đường trung bình của tam giác đều cạnh 1 sẽ chia nó ra làm 4 tam giác đều cạnh 0,5.

Do đó trong một tam giác nhỏ đó có ít nhất 2 điểm đã cho, và các điểm đó không thể rơi vào các đỉnh của tam giác ABC.Vậy khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 0,5.

Bài 13. Giả sử AB là đoạn thẳng có độ dài bằng 1, a và a′ là hai đường thẳng bất kì vuông góc với nhau. Gọi A′B′ và A″B″ là các hình chiếu của AB lên a và a′. Khi đó ta có: $A'B' + A''B'' \geq AB$ hay $A'B' + A''B'' \geq 1$.

Áp dụng vào bài toán ta gọi d” là đường thẳng bất kì vuông góc với d. Chiếu vuông góc tất cả 4n đoạn thẳng lên d và d”. từ (1) suy ra tổng độ dài hình chiếu của tất cả 4n đoạn thẳng không bé hơn 4n.

Vì vậy, theo nguyên lí Dirichlet trong hai đường thẳng d và d” có ít nhất một đường thẳng mà tổng độ dài của hình chiếu các đoạn thẳng lên nó không bé hơn 2n. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là d.

Mặt khác, mỗi đoạn thẳng đầu nằm trọn trong hình tròn bán kính n (đường kính 2n), nên hợp các hình chiếu của chúng trên d có độ dài không vượt quá 2n.

Vì vậy, theo nguyên lí dirichlet trên d tồn tại ít nhất một điểm M thuộc vào hình chiếu của ít nhất hai đoạn thẳng trong số 4n đoạn thẳng đã cho. Gọi d’ là đường thẳng vuông góc với d tại M. Đường thẳng d’ chính là đường thẳng cần tìm.

Bài 14. Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Ta chứng minh rằng các ô được đánh dấu còn nhỏ hơn hoặc bằng n.

Giả sử ngược lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $n+1$. Số các hàng còn lại chưa chọn là n. Vậy theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (tổng số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu. Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn có không ít hơn 2n ô đã được đánh dấu.

	×		×	×	
		×		×	
	×				×
		×			
			×		

Như vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n+(n+1)\geq 3n$. Vô lí vì chỉ có 3n ô được đánh dấu. Vậy nhận xét được chứng minh.

Như vậy, sau khi đã chọn ra n hàng(với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại có không quá n ô được đánh dấu. Vì thế cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.

Bài 15. Ta giả thiết rằng nếu một đa giác có n cạnh thì có $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Xét một đa giác lồi bất kì với số cạnh là chẵn (đa giác lồi 2k cạnh với $k\geq 2$).

Khi đó số đường chéo của nó là $s=\frac{2k(2k-3)}{2}$.

Ta có $s=k(2k-3)=2k(k-2)+k$ nên suy ra $s>2k(k-2)$.

Giả sử ngược lại đa giác này có tính chất mỗi đường chéo của nó đều song song với một cạnh nào đó của đa giác. Đa giác này có 2k cạnh, vì thế từ $s>2k(k-2)$ suy ra tồn tại ít nhất $k-1$ đường chéo $d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$ mà các đường chéo này cùng song song với một cạnh a nào đó của tam giác đã cho. Thật vậy, nếu ngược lại mỗi cạnh tối đa là song song $k-2$ đường chéo thì tối đa ta chỉ có $k(k-2)$ đường chéo và $s\leq 2k(k-2)$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Như thế ta có k đường thẳng song song với nhau $a,d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$.

Mặt khác đa giác đã cho là đa giác lồi nên các đường chéo $d_1,d_2,d_3,...,d_{k-1}$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xác định cạnh a. Không mất tính tổng quát có thể cho d_1 là đường chéo xa nhất đối với a. Ta có tất cả k đoạn thẳng phân biệt, nên mỗi đỉnh của đa giác đều là đầu mút của một đoạn nào đó trong k đoạn trên. Từ đó suy ra toàn bộ đa giác nằm hẳn về một nửa mặt phẳng xác định bởi d_1. Do d_1 là đường chéo, nên điều này mâu thuẫn với tính lồi của đa giác. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 16. Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau. Như thế hình lập phương đã cho được chia thành $13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Do $11000 > 5.2197 - 10985$, nên tồn tại ít nhất 1 hình lập phương nhỏ, mà hình lập phương này chứa ít nhất 6 điểm. Như đã biết, nếu gọi cạnh hình lâp phương bằng a, thì hình cầu ngoại tiếp có bán kính R với $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Vì thế hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ(cạnh của nó là $\frac{15}{13}$) được xác định là

$$R = \frac{1}{2}\frac{15}{13}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{15}{13}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{675}{169}} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

Hình cầu bán kính R này dĩ nhiên chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.

Bài 17. Mẫu sơn màu có thể xảy ra với bàn cờ này có dạng từ 1 đến 8. Giả sử một trong số các cột thuộc dạng 1. Bài toán sẽ được chứng minh nếu tất cả các cột còn lại thuộc dạng 1, 2, 3 hoặc 4. Giả sử tất cả các cột còn lại thuộc dạng 5, 6, 7, 8. Khi đó theo nguyên lí Dirichlet 2 trong số 6 cột có 2 cột cùng 1 dạng và như vậy bài toán cũng được chứng minh.

Chứng minh hoàn toàn tương tự nếu 1 cột có dạng 8. Giả sử không có cột nào trong các cột 1, 8 thì theo nguyên lí Dirichlet cũng có 2 cột cùng dạng và bài toán cũng được chứng minh.

Bài 18. Lấy mỗi lỗ kim là tâm dựng một hình tròn bán kính 1cm. Tổng diện tích của 31 hình tròn này sẽ là 31π nhỏ hơn diện tích của hình vuông cạnh 10 cm . Do đó phải có một điểm M trong hình vuông cạnh 10 cm(là hình vuông thu được từ hình vuông cạnh 12 cm đã cho bằng cách thu hẹp các chiều 1cm) và không nằm trong 31 hình tròn bán kính được dựng như đã trình bày ở trên. Lấy điểm M làm tâm ta cắt một hình tròn bán kính 1cm, thì hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông đã cho có cạnh dài 12 cm và không chứa một lỗ kim châm nào cả.

Bài toán tổng quát có thể được phát biểu như sau: Trong một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng b có a lỗ kim châm. (trong đó $b > \sqrt{ar^2\pi}$). Chứng minh rằng ta vẫn có thể cắt từ tờ giấy này ra một hình tròn có bán kính r cm mà không chứa một lỗ kim châm nào.

Bài 19. Chia hình tròn thành (C) thành 8 hình quạt bằng nhau, mỗi hình quat có diện tích bằng 1. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một hình quạt (a) chứa 3 điểm trong số 17 điểm đã cho. Tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm đó nằm trọn trong hình quạt (a) nên có diện tích nhỏ hơn diện tích hình quạt, tức là bé hơn 1.

Bài 20. Xét hình gồm tất cả các điểm cách hình vuông nhỏ cạnh 1 một khoảng không lớn hơn 1. Rõ ràng hình tròn bán kính 1 có tâm nằm ngoài hình đó nên không thể cắt hình vuông nhỏ. Diện tích hình đó bằng $5+\pi$. Tâm hình tròn cần tìm cũng cần phải cách các cạnh của hình vuông lớn hơn một khoảng lớn hơn 1, tức là ở bên trong hình vuông cạnh 13. Vì $20\left(5+\pi\right)<13^2$. Hình tròn có tâm tại điểm không bị phủ sẽ có tính chất thỏa mãn đề bài.

Bài 21. Gọi d là khoảng cách hai điểm A_i, A_j xa nhất trong tất cả các điểm thuộc tập hợp S. Giả sử A_k có khoảng cách đến đường thẳng A_iA_j lớn nhất. Khi đó tam giác $A_iA_jA_k$ có $S_{A_iA_jA_k}\le 1$ và lớn nhất. Từ các điểm A_i, A_j và A_k vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác $A_iA_jA_k$ thì ta thu được bốn tam giác con bằng nhau và một tam giác lớn. Tam giác lớn có diện tích không vượt quá 4 đơn vị. Tam giác này chứa 8065 điểm đã cho. Vì $8065:4=2016$ dư 1. Nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một tam giác con chứa 2017 điểm thuộc tập hợp S thỏa mãn đề bài.

Bài 22. Tam giác đều có cạnh bằng 2 cm thì diện tích bằng $\sqrt{3}$ cm², tam giác đều có cạnh bằng 1 cm thì diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm². Nếu tam giác đều có cạnh lớn hơn 1cm thì diện tích lớn hơn $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm²

Gọi t là số tam giác đều có cạnh lớn hơn hoặc bằng 1cm chứa được trong tam giác đều có cạnh 2 cm:

$1\le t<4$ (với t là số nguyên dương). Suy ra $t_{max}=3$.

Theo nguyên lý Drichlet sẽ có 1 trong t tam giác đều có cạnh lớn hơn 1cm đó chứa tối đa 2 điểm thoả mãn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ luôn lớn hơn 1cm.

Vậy số điểm thoả yêu cầu bài toán là $2 \le n \le 4$ nên giá trị lớn nhất của n 4

Bài 23. Xét hai điểm A và B trong 25 điểm đã cho thỏa mãn điều kiện AB có độ dài lớn nhất. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $AB < 1$. Khi đó mọi điểm C bất kì trong 25 điểm đã cho ta đều có $AC \le AB < 1$. Suy ra toàn bộ 25 điểm trên cùng nằm trong đường tròn tâm A có bán kính bằng 1.

- Trường hợp 2: Với $AB \ge 1$. Khi đó xét điểm C trong số các điểm còn lại.

Theo giả thiết với ba điểm A, B, C ta luôn có $AC < 1$ hoặc $BC < 1$.

Như vậy với các điểm còn lại có ít nhất 12 đoạn thẳng xuất phát từ A có độ dài nhỏ nhơn 1 hoặc có ít nhất 12 điểm xuất phát từ B có độ dài nhỏ hơn 1. Vẽ đường tròn tâm A bán kính bằng 1 hoặc đường tròn tâm B bán kính bằng 1.

Suy ra đường tròn tâm A hoặc đường tròn tâm B chứa ít nhất 13 điểm tròn số các điểm đã cho.

Từ đó bài toán được chứng minh.

Bài 24. Xét đa giác lồi 2n cạnh $A_1A_2A_3...A_{2n}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Điểm P nằm trên một đường chéo của đa giác $A_1A_2A_3...A_{2n}$.

Khòn mất tình tổng quát ta giả sử P nằm trên đường chéo A_iA_j của đa giác. Khi đó hai đường thẳng PA_i và PA_j trùng nhau và không cắt phần trong của bất cứ cạnh nào của đa giác. Khi đó $2n-2$ chỉ cắt tối đa $2n-2$ cạnh của đa giác. Vậy có ít nhất hai cạnh của đa giác thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

- Trường hợp 2: Điểm P không nằm trên bất kì đường chéo nào của đa giác $A_1A_2A_3...A_{2n}$.

Vẽ đường chéo A_1A_{n+1}, khi đó mỗi phía của đường chéo chứa n cạnh của đa giác. Không mất tính tổng quát ta giả sử điểm P nằm trong đa giác $A_1A_2A_3...A_{n+1}$. Khi đó $n+1$ đường thẳng $PA_{n+1};PA_{n+2};PA_{n+3};...;PA_{2n}$ không thể cắt các cạnh $A_{n+1}A_{n+2};A_{n+2}A_{n+2};...;A_{2n}A_1$.

Còn lại $n-1$ đường thẳng cắt phần trong tối đa của $n-1$ cạnh trong n cạnh này. Như vậy tồn tại một trong n cạnh $A_{n+1}A_{n+2};A_{n+2}A_{n+2};...;A_{2n}A_1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 25. Giả sử 19 điểm nằm trong tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Chia tam giác ABC thành 9 tam giác đều, có cạnh bằng 1 (gọi là tam giác nhỏ) như hình vẽ.

Mỗi tam giác nhỏ có diện tích là $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Để ý là $19=2.9+1$

Vì có 19 điểm nằm trong 9 tam giác nhỏ nên theo nguyên lý Dirichlets thì có ít nhất 3 điểm cùng thuộc một hình tam giác nhỏ. Giả sử 3 điểm đó là I_1,I_2,I_3.

Khi đó tam giác $\Delta I_1I_2I_3$ nằm trong một tam giác nhỏ nên $S_{\Delta I_1I_2I_3}\le\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Bài 26. Chia hình vuông đã thành 4 hình vuông con. Dễ dàng tính được, cạnh của một hình vuông con là $\frac{1}{2}$ và đường chéo là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Gieo 5 điểm đã cho vào hình vuông ban đầu, 5 điểm đó sẽ nằm trong 4 hình vuông con. Theo nguyên tắc Dirichlets thì tồn tại 2 điểm nằm trong cùng một hình vuông. Và do đó khoảng cách giữa 2 điểm đó sẽ không lớn hơn đường chéo của hình vuông chứa nó, tức là không lớn hơn $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 27. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ OH, OK, OG lần lượt vuông góc với các cạnh AB, AC, BC. Dễ dàng chứng minh được các tứ giác AHOK, BHOG, KOGC nội tiếp các đường tròn đường kính $OA=OB=OC=2$ cm. Ta có 2017 điểm nên theo nguyên lí Diriclet thì sẽ tồn tại một tứ giác có chứa ít nhất 673 điểm, giả sử đó là tứ giác OKCG.

Xét tứ giác OKCG. Gọi I là trung điểm OC nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác OKCG

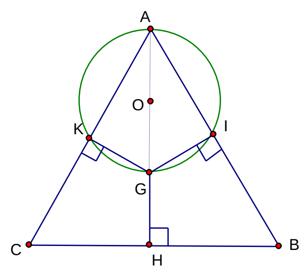
Khi đó ta được $IO=IK=IC=IG=1$ cm. Kẻ IM, IN, IP, IQ lần lượt vuông góc với OK, KC, CG, GO. Suy ra bốn tứ giác OMIQ, MKNI, INCP, PGQI nội tiếp các đường tròn đường kính bằng 1 cm

mà có 673 điểm. Như vậy theo nguyên lí Diriclet thì sẽ tồn tại một tứ giác có chứa ít nhất 169 điểm, giả sử đó là tứ giác MKNI. Khi đó 169 điểm này sẽ thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác MKNI có đường kính $IK = 1cm$. Do đó khoảng cách 169 điểm này không lớn hơn 1cm

Bài 28. Giả sử 5 điểm đó là A, B, C, D, E. Vì trong năm điểm này không có ba điểm nào thẳng hàng nên ta tồn tại 2 điểm trong năm điểm đã cho sao cho đường thẳng đi qua 2 điểm này chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng và 3 điểm còn lại nằm cùng về một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng trên. Giả sử đó là 2 điểm A và B. Xét 3 góc sau $ACB; ADB; AEB$. Khi đó do trong 5 điểm không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên ta hoàn toàn có thể sắp thứ tự chúng như sau: $ACB < ADB < AEB$. Khi đó dễ thấy điểm E nằm bên trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB còn điểm C nằm bên ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB.(chứng minh đơn giản dựa theo cách tính số đo của góc có đỉnh nằm trong, nằm ngoài đường tròn)

Bài 29. Chia hình chữ nhật 4×3 thành 24 hình chữ nhật $\frac{1}{2} \times 1$, mỗi hình chữ nhật có diện tích là $\frac{1}{2}\cdot$ Vì có 49 điểm nằm trong 24 hình chữ nhật nên tồn tại một hình chữ nhật $\frac{1}{2} \times 1$ chứa ít nhất 3 điểm trong 49 điểm đã cho. Tam giác có ba đỉnh là 3 điểm nằm trong hình chữ nhật này có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}\cdot$

Bài 30. Chia mỗi cạnh của tam giác thành 8 đoạn thẳng bằng nhau. Nối các điểm chia đó bằng các đoạn thẳng song song với các cạnh của tam giác. Ta được các tam giác đều có cạnh bằng 1



Số tam giác đều là $1 + 3 + \ldots + 15 = 8^2 = 64$

Đặt ngẫu nhiên 193 điểm vào 64 tam giác này ($193 : 64 = 3$ dư 1)

Theo nguyên lí dirichlet thì sẽ có ít nhất 1 tam giác đều có ít nhất 4 điểm.

Xét tam giác đều này, gọi G là trọng tâm của tam giác, từ G vẽ các đoạn thẳng vuông góc đến các cạnh, tạo thành 3 tứ giác bằng nhau

Đặt ngẫu nhiên 4 điểm vào tam giác này theo nguyên lí Dirichlet sẽ có một tứ giác chứa ít nhất 2 điểm. Mà tứ giác này nội tiếp trong đường tròn đường kính GA nên khoảng cách của chúng $d \le AG$Mà ta có $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GA = \frac{2}{3}.AH = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Do đó

$d \le \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 31. Lấy 1 điểm A bất kì trong 403 điểm đó vẽ đường tròn tâm A bán kính 1.

+ Nếu 4032 điểm còn lại thuộc hình tròn thì bài toán được chứng minh.

+ Nếu tất cả 4032 điểm đó nằm ngoài hình tròn thì ta lấy 1 điểm B bất kì trong số đó vẽ đường tròn tâm B bán kính 1.

+ Nếu 4031 điểm còn lại thuộc hình tròn thì bài toán được chứng minh.

+ Nếu trong đó có một điểm C không thuộc cả 2 hình tròn thì $AC > 1; AB > 1; BC > 1$ điều này trái với giả thiết đầu bài.

Suy ra 4033 điểm đó phải thuộc hình tròn tâm A hoặc tâm B. Như vậy theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại 1 hình tròn có bán kính 1 chứa ít nhất 2016 điểm

Bài 32. Gọi 2015 điểm trên mặt phẳng lần lượt là $A_1; A_2; A_3 : ...A_{2015}$.

Vẽ các đường tròn tâm O bán kính lần lượt là $OA_1; OA_2; OA_3; ...OA_{2015}$.

Ta gọi điểm A_1 gần điểm O hơn A_j nếu $OA_i < OA_j$

Giả sử A_1 là điểm gần O nhất thì ta có nhiều nhất 2015 đường tròn tâm OO.

Vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau tại O thì hai đường thẳng đó sẽ chia mặt phẳng làm 4 phần.

Từ 4 phần trên ở mỗi phần ta chọn điểm xa O nhất ở từng phần rồi từ 4 điểm ấy ta vẽ đường tròn theo yêu cầu đề bài thì 44 đường tròn ấy sẽ phủ kín toàn bộ 2015 điểm trên hoặc sẽ phủ hầu hết các điểm và vẫn còn một vài điểm chưa được phủ. Tuy nhiên các điểm chưa được phủ sẽ nằm trong vùng cắt của ba đường tròn. Khi đó từ một trong các điểm đó ta có thể vẽ một đường tròn bao phủ 2015 điểm còn lại.

Bài 33. Giả sử 6 đội bóng đó là A, B, C, D, E, F. Xét đội A, theo nguyên lý Dirichlê ta suy ra A phải đấu hoặc không đấu với ít nhất 3 đội khác. Không mất tính tổng quát ta giả sử A đã đấu với B, C, D.

+ Nếu B,C, D từng cặp chưa đấu với nhau thì bài toán được chứng minh.

+ Nếu B, C, D có hai đội đã đấu với nhau, ví dụ B và C thì 3 đội A, B, C từng cặp đã đấu với nhau.

Như vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

Bài 34. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp lục giác đều có cạnh bằng 2, khi đó (O) có bán kính $R = 2.$ Gọi $ABCD$ là hình vuông ngoại tiếp (O). Cạnh của hình vuông này bằng 4. Chia hình vuông thành 16 hình vuông nhỏ, có cạnh bằng 1.

Rõ ràng 16 hình vuông này chứa 81 điểm đã cho. Vì $81 = 16.5 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại hình vuông cạnh bằng 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số các điểm đã cho.

CHỦ ĐỀ 2: ỨNG DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nhà toán học Đức P.G.Lejeune Dirichlet (1805-1859) đã nêu ra một định lí mà về sau người ta gọi là *Nguyên lí Dirichlet*, nguyên lý được phát biểu như sau:

"Nếu nhốt vào n chiếc lồng một số chú thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó có nhiều hơn một con thỏ"

Chúng ta biết bất đẳng thức là một dạng toán hay và khó, thường có trong các kì thi học sinh giỏi cấp Tỉnh, cấp Quốc gia và Quốc tế. Có rất nhiều phương pháp để chứng minh bất đẳng thức như phương pháp chứng minh bằng phép biến đổi tương đương, phương pháp quy nạp, phương pháp chứng minh bằng phản chứng, dùng các BĐT cổ điển: Cauchy, Bunhiacopxki,...

Trong bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu một phương pháp chứng minh bất đẳng thức khá thú vị là ứng dụng nguyên lí Dirichlet. Với phương pháp này, giúp chúng ta chứng minh được một số bài toán bất đẳng thức một cách rất gọn gàng và độc đáo.

Từ nguyên lí Dirichlet có một mệnh đề có ý nghĩa hết sức quan trọng: ***Trong 3 số thực bất kì a, b, c bao giờ cũng tìm được hai số cùng dấu.***

Đây là một mệnh đề rất quan trọng, bởi khi ta đã chọn được *"điểm rơi"* (tức là đẳng thức của bài toán) thì ta có thể áp dụng mệnh đề trên để chứng minh bất đẳng thức. Chẳng hạn đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = k$ thì ta có thể giả sử 2 số $\left(a-k\right); \left(b-k\right)$ cùng dấu, khi đó thì $(a-k)(b-k) \ge 0$. Chúng ta sẽ tìm hiểu một số ví dụ sau để thấy được ý nghĩa việc ứng dụng nguyên lí Dirichlet trong việc giải bất đẳng thức như thế nào?

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xẩy ra tại $a = b = c = 1$. Theo một đánh giá quen thuộc ta có $9\left(ab+bc+ca\right) \le 3\left(a+b+c\right)^2$. Như vậy ta cần chứng minh

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(a+b+c\right)^2$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Như vậy ta cần đánh giá từ $\left(a+b+c\right)^2$ làm xuất hiện a^2+2, để ý ta thấy

$$\left(a+b+c\right)^2\le\left(a^2+1+1\right)\left(1+b^2+c^2\right)=\left(a^2+2\right)\left(1+b^2+c^2\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$3\left(a^2+2\right)\left(1+b^2+c^2\right)\le\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(1+b^2+c^2\right)\le\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$$

Biến đổi tương đương ta thu được

$$3\left(1+b^2+c^2\right)\le\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\Leftrightarrow 3+3b^2+3c^2\le b^2c^2+2b^2+2c^2+4$$
$$\Leftrightarrow b^2c^2-b^2-c^2+1\ge 0\Leftrightarrow\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\ge 0$$

Như vậy ta chỉ cần chỉ ra được $\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\ge 0$, tuy nhiên vì vai trò của a, b, c như nhau nên theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a^2-1;\ b^2-1;\ c^2-1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu và ta hoàn toàn có thể giả sử hai số đó là $b^2-1;\ c^2-1$. Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: *Ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên theo cách khác sau:*

Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $ab-1;\ bc-1;\ ca-1$ tồn tại hai số không trái dấu, Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó ta $ab-1;\ bc-1$ khi đó ta được

$$\left(ab-1\right)\left(bc-1\right)\ge 0\Rightarrow ab^2c+1\ge ab+bc$$

Suy ra $$a^2b^2c^2+b^2+2\ge 2\left(ab^2c+1\right)\ge 2\left(ab+bc\right)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Ta có $a^2b^2c^2+b^2+2\ge 2\left(ab+bc\right)$ *và* $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$

Lại thấy $a^2b^2+1\ge 2ab$ *nên* $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+6\ge 4\left(ab+bc+ca\right)$

Và $a^2+c^2\ge 2ac$. *Từ các bất đẳng thức trên ta được*

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Lời giải

Trước hết ta để ý đến đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$ điều này có nghĩa là khi đẳng thức xẩy ra thì $a-1;\ b-1;\ c-1$ cùng bằng 0, ngoài ta trong bất đẳng thức chứa các đại lượng $ab, abc, \ldots$ nên ta nghĩ đến tích $c\left(a-1\right)\left(b-1\right)$, tuy nhiên ta chưa thể khẳng định được tích đó có không âm hay không nên ta sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $a-1;\ b-1;\ c-1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử hai đó là $a-1;\ b-1$, khi đó ta có

$$\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow c\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow abc-ac-bc+c\ge 0$$

Khi đó ta có

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1=\left(a-b\right)^2+\left(1-c\right)^2+2\left(abc-ac-bc+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)$$

Dễ thấy $\left(a-b\right)^2+\left(1-c\right)^2+2\left(abc-ac-bc+c\right)\ge 0$ nên ta có

$$\left(a-b\right)^2+2ab+\left(1-c\right)^2+2c+2abc-2ac-2bc+2\left(bc+ca\right)\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét: *Ta có thể chứng minh được bất đẳng thức đúng với mọi số thực nếu thay đổi một chút:*

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì $c^2\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\ge 0 \Rightarrow a^2b^2c^2+c^2\ge b^2c^2+c^2a^2$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+2+b^2c^2+c^2a^2\ge 2\left(ab+bc+ca\right)\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(bc-1\right)^2+\left(ca-1\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1$

Bài toán 3. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge \left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)$$

Lời giải

Sau khi nhân 2 vế cho 2 thì bất đẳng thức trên tương đương với

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+4\ge 2\left(ab+bc+ca\right)+2\left(a+b+c\right)$$

Theo bài toán 2 ta được $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2+b^2+c^2+3\ge 2\left(a+b+c\right)\Leftrightarrow \left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 4. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)(b^2+2)(c^2+2) \ge 3\left(a+b+c\right)^2 + \left(abc-1\right)^2$$

Lời giải

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+7 \ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$2a^2b^2+2+2b^2c^2+2+2c^2a^2+2 \ge 4ab+4bc+4ca$$

Và $$3a^2+3b^2+3c^2 \ge 3ab+3bc+3ca$$

Từ đó kết hợp với bài toán 2 ta suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$

Chứng minh rằng: $$ab+bc+ca-abc \le 2$$

Lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a = b = c = 1$

Cách 1: Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right)$; $\left(b-1\right)$; $\left(c-1\right)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right) \ge 0$ thì

$$c\left(a-1\right)\left(b-1\right) \ge 0 \Rightarrow abc \ge bc+ca-c$$

Mặt khác ta có $4 = a^2+b^2+c^2+abc \ge 2ab+c^2+abc$

Suy ra $4-c^2 \ge 2ab+abc \Leftrightarrow 2-c \ge ab$

Suy ra $0 \le ab+bc+ca-abc \le 2-c+bc+ca-\left(bc+ca-c\right) = 2$

Cách 2: Theo nguyên lý Dirichlet ta có $c\left(a-1\right)\left(b-1\right) \ge 0 \Rightarrow abc \ge bc+ca-c$

$$\Rightarrow ab+bc+ca-abc \le ab+bc+ca-\left(ac+bc-c\right)$$
$$\Rightarrow ab+bc+ca-abc \le ab+c$$

Ta đi chứng minh $ab+c \le 2$

Từ $a^2+b^2+c^2+abc=4$ ta được $a^2 \le 4;\ b^2 \le 4;\ ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2} \le 4$.

Mặt khác cũng từ $a^2+b^2+c^2+abc=4$ suy ra $c^2+abc+a^2+b^2-4=0$

Xem đẳng thức trên là là phương trình là bậc hai theo biến c.

Khi đó ta được $\Delta = \left(ab\right)^2-4\left(a^2+b^2-4\right) = \left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right) \ge 0$

Do đó phương trình có hai nghiệm

$$c=\frac{-ab+\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}}{2} \text{ và } c=\frac{-ab-\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}}{2}$$

Vì $c\ge 0$ nên $c=\dfrac{-ab+\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}}{2}$

Do đó ta được

$$ab+\frac{-ab+\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}}{2}\le 2\Leftrightarrow ab+\frac{-ab+\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}}{2}\le 2$$

$$\Leftrightarrow 4-ab\ge\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}\Leftrightarrow\left(4-ab\right)^2\ge\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\ge 0$$

Vậy bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng: $$a+b+c\ge ab+bc+ca$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử hai số $a-1$ và $b-1$ cùng không âm

Khi đó ta được $c\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow abc\ge bc+ca-c$

Suy ra $a+b+c+abc\ge a+b+c+ac+bc-c\Leftrightarrow a+b+c+abc\ge\left(a+b\right)\left(c+1\right)$

Mặt khác ta có

$$4=ab+bc+ca+abc=c\left(a+b\right)+ab+abc\le c\left(a+b\right)+\frac{\left(a+b\right)^2}{4}+\frac{c\left(a+b\right)^2}{4}$$

Suy ra $c\ge\dfrac{4}{a+b}-1\Rightarrow\left(a+b\right)\left(c+1\right)\ge 4$

Do đó ta được $a+b+c+abc\ge 4$ nên ta có

$$a+b+c+abc\ge ab+bc+ca+abc$$

Hay $a+b+c\ge ab+bc+ca$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: *Ta cũng có thể chứng minh theo cách sau đây*

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right),\left(b-1\right),\left(c-1\right)$ *cùng dấu, không mất tính tổng quát, giả sử* $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0$.

Khi đó $\quad c\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow c\ge ac+bc-abc$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh $a+b\ge ab+abc$

Từ giả thiết $ab+bc+ca+abc=4$ *suy ra* $c=\dfrac{4-ab}{a+b+ab}$

Thay vào bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức tương đương là:

$$a+b \ge ab\left(1+\frac{4-ab}{a+b+ab}\right) \Leftrightarrow (a+b)(a+b+ab) \ge ab(4+a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(a+b+c).$$

Lời giải

Bất đẳng thức được viết lại là $P = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3-2(a+b+c) \ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a-1$ và $b-1$ cùng không âm.

Khi đó suy ra $(a-1)(b-1) \ge 0$. Ta có

$$P = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3-2(a+b+c) = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\frac{2}{ab}+\frac{1}{c^2}-2(a+b+c)+3$$

$$= \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+2c+a^2b^2-2(a+b+c)+3 = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+a^2b^2-2a-2b+3$$

$$= \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+2(a-1)(b-1)+(ab-1)^2 \ge 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right) \ge 3$$

Lời giải

Đặt $x = a+\frac{1}{b};\ y = b+\frac{1}{c};\ z = c+\frac{1}{a}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1) \ge 3$$

Hay ta cần chứng minh $xy+yz+zx \ge 2(x+y+z)$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(x-2), (y-2), (z-2)$ cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(x-2)(y-2) \ge 0$, suy ra

$$xy+4 \ge 2x+2y \Rightarrow 2(x+y+z) \le 2z+xy+4$$

Lại có $\quad xyz = abc+\frac{1}{abc}+x+y+z \ge 2+x+y+z \ge 2+2\sqrt{xy}+z$

Suy ra $$z(xy-1)\ge 2\left(\sqrt{xy}-1\right)\Rightarrow z\left(\sqrt{xy}-1\right)\ge 2$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $2(x+y+z)\le 2z+xy+4\le xy+yz+zx$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:
$$\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)\ge 1$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(b-1)(c-1)\ge 0$. Khi đó ta được
$$\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)=bc(b-1)(c-1)+b^2+c^2-b-c+1$$
$$\ge b^2+c^2-b-c+1\ge \frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1$$

Do đó ta được
$$\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\left(c^2-c+1\right)$$
$$\ge \left(a^2-a+1\right)\left[\frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1\right]=\frac{1}{2}\left(a^2-a+1\right)\left(a^2-4a+5\right)$$

Nên ta chỉ cần chứng minh
$$\left(a^2-a+1\right)\left(a^2-4a+5\right)\ge 2\Leftrightarrow (a-1)^2\left(a^2-3a+3\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca)$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow abc\ge ac+bc-c$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$
Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được
$$a^2+b^2+c^2+3\ge 2(ab+bc+ca)$$

Thật vậy ta có $$a^2+b^2+c^2+3=a^2+b^2+c^2+2abc+1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2+b^2\ge 2ab;\ c^2+1\ge 2c$

Kết hợp với $abc\ge ac+bc-c$ ta được

$$a^2+b^2+c^2+3\ge 2ab+2c+2\left(bc+ca-c\right)=2\left(ab+bc+ca\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 11. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2\right]\ge a+b+c$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right),\left(b-1\right),\left(c-1\right)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1$.

Vì vậy để hoàn tất bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$c\left(a+b-1\right)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2\right]\ge a+b+c$$

Hay $$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2\right]\ge\left(a+b-2\right)\left(1-c\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2&\ge\frac{\left(a+b-2\right)^2}{2}+\left(c-1\right)^2\\&\ge\sqrt{2}\left|\left(a+b-2\right)\left(1-c\right)\right|\ge\sqrt{2}\left(a+b-2\right)\left(1-c\right)\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 12. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\ge 5\left(a+b+c\right)$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right)$, $\left(b-1\right)$, $\left(c-1\right)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow abc\ge ac+bc-c$.

Suy ra $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ac+bc-c+8$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ac+bc-c+8\ge 5\left(a+b+c\right)$$

Thật vậy, bất đẳng trên tương đương với

$$\left(b+c-2\right)^2+\left(c+a-2\right)^2+3\left(a-1\right)^2+3\left(b-1\right)^2+2\left(c-1\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi à chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét: *Hoàn toàn tương tự ta có thể tổng quát hóa bài toán trên:*

a). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$m\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+3m+2\ge\left(2m+1\right)\left(a+b+c\right).$$

Trong đó m là số thực cho trước thỏa mãn $m\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(2m-1\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+1\ge 2m\left(ab+bc+ca\right).$$

Trong đó m là số thực cho trước thỏa mãn $m\ge 1$

c) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:

$$abc+a^2+b^2+c^2+2\ge a+b+c+ab+bc+ca$$

d) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2abc+a^4+b^4+c^4+13\ge 6\left(a+b+c\right)$$

Bài toán 13. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3abc+9\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right)$, $\left(b-1\right)$, $\left(c-1\right)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\left(a-1\right)(b-1)\ge 0\Rightarrow 3abc\ge 3ac+3bc-3c$.

Suy ra $5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3abc+9\ge 5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3ac+3bc-3c+9$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$5\left(a^3+b^3+c^3\right)+3ac+3bc-3c+9\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$
$$\Leftrightarrow 5\left(a^3+b^3+c^3\right)+9\ge 9ab+6bc+6ca+3c$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$3c=3\sqrt[3]{c^3.1.1}\le c^3+1+1;\quad 6ca=6\sqrt[3]{c^3a^3.1}\le 2c^3+2a^3+2$$
$$6bc=6\sqrt[3]{b^3.c^3.1}\le 2b^3+2c^3+2;\quad 9ab=9\sqrt[3]{a^3.b^3.1}\le 3a^3+3b^3+3$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$5\left(a^3+b^3+c^3\right)+9\ge 9ab+6bc+6ca+3c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 14. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$9abc+1\ge 4\left(ab+bc+ca\right)$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-\frac{1}{3}\right), \left(b-\frac{1}{3}\right), \left(c-\frac{1}{3}\right)$ cùng dấu,

không mất tính tổng quát giả sử $\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow 9abc \geq 3ac+3bc-c$.

Suy ra $\quad 1+9abc \geq 1+3ac+3bc-c$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $1+3ac+3bc-c \geq 4\left(ab+bc+ca\right)$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$1 \geq c+c\left(a+b\right)+4ab \Leftrightarrow 1 \geq c+c\left(1-c\right)+4ab$$
$$\Leftrightarrow \left(1-c\right)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \left(a+b\right)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức thức xẩy ra khi và chỉ khi

$a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{2}; c=0$ và các hoán vị

Nhận xét: *Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh bài toán: Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn* $a+b+c=k$. *Chứng minh rằng:* $9abc+k^3 \geq 4k\left(ab+bc+ca\right)$

Bài toán 15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\left(a+1\right)^2}+\frac{1}{\left(b+1\right)^2}+\frac{1}{\left(c+1\right)^2}+\frac{2}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)} \geq 1$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right), \left(b-1\right), \left(c-1\right)$ cùng dấu,

không mất tính tổng quát giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right) \geq 0 \Rightarrow a+b \leq 1+ab=\frac{c+1}{c}$.

Do đó ta được

$$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(1+a+b+ab\right)\left(c+1\right)=2\left(1+ab\right)\left(1+c\right) \leq \frac{2\left(c+1\right)^2}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2} \geq \frac{1}{\left(1+ab\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{\left(1+ab\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$
$$=\frac{b}{\left(1+ab\right)\left(a+b\right)}+\frac{a}{\left(1+ab\right)\left(a+b\right)}=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$\ge \frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}=\frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2}=1$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$

Bài toán 16. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge 1$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{1}{1+ab}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với
$$(ab+1)\left((a+1)^2+(b+1)^2\right)\ge(a+1)^2(b+1)^2 \Leftrightarrow ab(a-b)^2+(ab-1)^2$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Mà ta có $\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{1+c}$ nên ta có $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{c}{1+c}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được
$$\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge 1$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow a+b\le 1+ab=\frac{c+1}{c}$.

Khi đó ta được
$$\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=\frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1. $$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{2}{1+a+b+c}+1$$

Bổ đề 2. $$\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2}+\frac{1}{\left(1+c\right)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge 1$$

+ Bổ đề 1: Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{3+ab+bc+ca+2\left(a+b+c\right)}{2+ab+bc+ca+a+b+c}\ge\frac{3+a+b+c}{1+a+b+c}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$$

Vậy bổ đề 1 được chứng minh.

+ Bổ đề 2: Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right),\left(b-1\right),(c-1)$ cùng dấu,

không mất tính tổng quát giả sử $\left(a-1)(b-1\right)\ge 0\Rightarrow\frac{c+1}{c}=ab+1\ge a+b$.

Ta có $$\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2}\ge\frac{1}{1+ab}\Leftrightarrow\left(ab-1\right)^2+\left(a-b\right)^2\ge 0\ \text{(đúng)}$$

Do đó ta được $$\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(b+1\right)^2}\ge\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2}+\frac{1}{\left(1+c\right)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge\frac{c}{c+1}+\frac{1}{\left(c+1\right)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=1$$

Vậy bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán thì bất đẳng thức cần chứng minhtương đương với

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{\left(a+1\right)^2}+\frac{2}{\left(b+1\right)^2}+\frac{2}{\left(b+1\right)^2}\ge 3$$

Mà theo bổ đề trên ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{\left(a+1\right)^2}+\frac{2}{\left(b+1\right)^2}+\frac{2}{\left(b+1\right)^2}$$
$$\ge\frac{2}{\left(a+1\right)^2}+\frac{2}{\left(b+1\right)^2}+\frac{2}{\left(b+1\right)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1\ge 2=1=3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(b+c-a\right)^2}{a^2+\left(b+c\right)^2}+\frac{\left(c+a-b\right)^2}{b^2+\left(c+a\right)^2}+\frac{\left(a+b-c\right)^2}{c^2+\left(a+b\right)^2}\ge\frac{3}{5}$$

Lời giải

Chú ý đến giả thiết ta viết lại bất đẳng thức thành

$$\frac{\left(1-2a\right)^2}{a^2+\left(b+c\right)^2}+\frac{\left(1-2b\right)^2}{b^2+\left(c+a\right)^2}+\frac{\left(1-2c\right)^2}{c^2+\left(a+b\right)^2}\ge\frac{3}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{\left(1-2b\right)^2}{b^2+\left(c+a\right)^2}+\frac{\left(1-2c\right)^2}{c^2+\left(a+b\right)^2}\ge\frac{\left(2-2b-2c\right)^2}{b^2+c^2+\left(1-a\right)^2+\left(1-b\right)^2}=\frac{2a^2}{b^2+c^2+a}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\dfrac{2a^2}{b^2+c^2+a}+\dfrac{\left(1-2a\right)^2}{a^2+\left(b+c\right)^2}\ge\dfrac{3}{5}$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a-\dfrac{1}{3}\right),\left(b-\dfrac{1}{3}\right),\left(c-\dfrac{1}{3}\right)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\left(b-\dfrac{1}{3}\right)\left(c-\dfrac{1}{3}\right)\ge 0\Rightarrow b^2+c^2\le\left(b+c-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{9}$.

Do đó ta được $\dfrac{2a^2}{b^2+c^2+a}\ge\dfrac{2a^2}{\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{1}{9}+a}=\dfrac{18a^2}{9a^2-3a+5}$

Suy ra $$\frac{2a^2}{b^2+c^2+a}+\frac{\left(1-2a\right)^2}{a^2+\left(b+c\right)^2}\ge\frac{18a^2}{9a^2-3a+5}+\frac{\left(1-2a\right)^2}{a^2+\left(b+c\right)^2}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$\frac{18a^2}{9a^2-3a+5}+\frac{\left(1-2a\right)^2}{a^2+\left(b+c\right)^2}\ge\frac{3}{5}\Leftrightarrow\left(3a-1\right)^2\left(17a^2-8a+5\right)\ge 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Qua một số bài toán trên, ta thấy rằng nguyên lí Dirichlet không những có ứng dụng trong việc giải toán rời rạc, các bài toán về số học, tổ hợp, … mà còn rất có hiệu quả trong việc chứng minh một số bài toán về bất đẳng thức, trong một số trường hợp cho ta lời giải vô cùng đẹp đẽ và trong sáng, góp phần trong việc nâng cao tư duy và tạo sự hứng thú cho các học sinh yêu thích môn toán. Hy vọng rằng, với suy nghĩ và những ví dụ trên sẽ góp phần bổ sung thêm kiến thức và kinh nghiệm trong việc chứng minh bất đẳng thức.