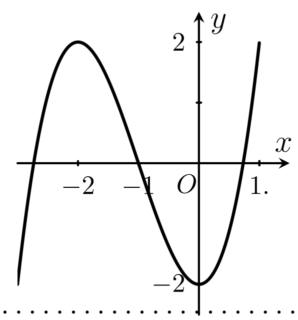
Mục lục

Dự án V

§1. Câu vận dụng môn Giải tích

Câu 1. dai5:k01 [K,D1] Cho đường cong trong hình bên
Đường cong đó là đồ thị của hàm số nào?



(A) $y = -x^3 - 3x^2 - 2$
(B) $y = x^3 + 3x^2 - 2$
(C) $x^3 - 3x^2 - 2$
(D) $-x^3 + 3x^2 - 2$

Lời giải: Dựa vào đồ thị suy ra hàm số tương ứng có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a>0)
- Đồ thị qua $A(0; -2) \Rightarrow d = -2$.
- Đồ thị qua $B(-1; 0) \Rightarrow -a + b - c - 2 = 0 \Leftrightarrow a - b + c = -2$ **(1)**

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$
- có 2 điểm cực trị $x_{\text{CĐ}} = -2$ và $x_{\text{CT}} = 0$ suy ra y' có 2 nghiệm -2 và 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} 12a - 4b + c &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} \textbf{(2)}$$

Từ **(1)** và **(2)** ta có $\begin{cases} a - b &= -2 \\ 12a - 4b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 3 \\ c &= 0 \end{cases}$
nên $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Thử lại thấy đúng. □

Câu 2. dai5:k02 [K,D1] Tìm m lớn nhất để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m - 3)x + 2017$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $m = 0$ (B) $m = 1$ (C) $m = 3$ (D) $m = 4$

Lời giải: Ta có $y' = x^2 - 2mx + 4m - 3$
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\ \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$
Vậy $m = 3$. □

Câu 3. dai5:k03 [K,D1] Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị.

Ⓐ $m = 0$ Ⓑ $m > 0$ Ⓒ $m < 0$ Ⓓ $m \neq 0$

Lời giải: Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x\left(x^2 + m\right)$
nên hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y'$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$. □

Câu 4. dai5:k04 [K,D1] Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong 8 tháng vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

Ⓐ 12 Ⓑ 30 Ⓒ 20 Ⓓ 15

Lời giải: Ta có $f'(t) = -30t^2 + 90t$; $f''(t) = -6t + 90$
$f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$
Khảo sát hàm số $f'(t)$ thì $f'(t)$ đạt GTNN bằng 675 tại $t = 15$
Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ 15. □

Câu 5. dai5:k05 [K,D1] Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị là $A(0;1), B, C$ sao cho $BC = 4$.

Ⓐ $m = -4; m = 4$ Ⓑ $m = \sqrt{2}$ Ⓒ $m = 4$ Ⓓ $m = \sqrt{2}; m = -\sqrt{2}$

Lời giải: Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - m = 0 \end{array}\right.$$
Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$
Với điều kiện $m > 0$, hàm số có 3 cực trị $A\left(0;1\right); B\left(-\sqrt{m}; 1 - m^2\right); C\left(\sqrt{m}; 1 - m^2\right)$.
Nên $BC = 4 \Leftrightarrow BC^2 = 16 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{m}\right)^2 + 0^2 = 16 \Leftrightarrow m = 4$.
Thử lại thấy đúng. □

Câu 6. dai5:k06 [K,D1] Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $|x_1 + x_2| = 2$

Ⓐ $m = 3$ Ⓑ $m = -1$ Ⓒ $m = 0$ Ⓓ $m = 1$

Lời giải: • Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 2 - m$.
• Để hàm số có cực trị thì $y' = 0$ có hai ngiệm phân biệt, suy ra $m \neq 3$.
• Từ giả thiết ta có $|1 - m| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3(l) \end{array}\right.$ □

Câu 7. dai5:k07 [K,D1] Với giá trị nào của m thì phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2m$ có nghiệm

A. $\sqrt{2} \leq m \leq 2$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1$ C. $-\sqrt{2} \leq m \leq 2$ D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$

Lời giải: Điều kiện: $2 \leq x \leq 4$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ trên $[2; 4]$ ta có $f(x) > 0$ và

$$f^2(x) = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{cases} f^2(x) \geq 2 \\ f^2(x) \leq 2 + 2.\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x-2}^2 + \sqrt{4-x}^2\right) = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leq f(x) \leq 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $\sqrt{2} \leq 2m \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1$. □

Câu 8. dai5:k08 [K,D1] Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 8x + m$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

A. $m = 8$ B. $m = -8$ C. $m = 18$ D. $m - 18$

Lời giải: Ta cần tìm m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} -x^4 - 2x^2 + 3 = 8x + m \ (1) \\ -4x^3 - 4x = 8 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ m = 8 \end{cases}$ □

Câu 9. dai5:k09 [K,D1] Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ (1). Tìm m để đồ thị hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. $m \leq 1$ B. $m < 0$ C. $0 \leq m \leq 1$ D. $m \leq 0$

Lời giải: Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0\ \forall x \in (1; 2)$ hay $x^2 - m \geq 0\ \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq 1$. □

Câu 10. dai5:k10 [K,D1] Cho hàm số $y = (x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây?

A. $2x - y - 4 = 0$ B. $2x - y + 4 = 0$ C. $2x + y + 4 = 0$ D. $2x + y - 4 = 0$

Lời giải: Ta có: $y' = 2(x+2)(x-1) + (x+2)^2 = 3x(x+2)$. Vậy hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có tọa độ là $A(0, -2); B(-2, 0)$. Vậy trung điểm của đoạn thẳng nối hai cực trị là $M(-1, 1)$. Nên phải sửa đáp án. □

Câu 11. **dai5:k11** [K,D1] Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3+20}{3} + 2\sqrt{x}$ trên đoạn $[1;4]$ là:

A 9 **B** 32 **C** 33 **D** 42

Lời giải: □

Câu 12. **dai5:k12** [K,D1] Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

Lời giải: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\dfrac{1}{2}$ Nên đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang. □

Câu 13. **dai5:k13** [K,D1] Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x=2$? Một học sinh làm như sau:

Bước 1. $D = \mathbb{R}\backslash\{-m\}$, $y' = \dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$.

Bước 2. Hàm số đạt cực đại tại $x=2 \Leftrightarrow y'(2)=0 \quad (*)$

Bước 3. $(*) \Leftrightarrow m^2+4m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào

A Sai từ bước 1 **B** Sai từ bước 2 **C** Sai từ bước 3 **D** Đúng

Lời giải: Thiếu điều kiện $y'(2)=0$ chưa đủ để $x=2$ là một điểm cực trị. □

Câu 14. **dai5:k14** [K,D1] Giá trị của m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đường cong $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại hi điểm phân biệt là:

A $m\neq 1$ **B** $m>0$ **C** $m\neq 0$ **D** Một kết quả khác

Lời giải: Xét phương trình tương giao $\dfrac{x+1}{x-1} = 2x+m \quad (*)$. Với $x\neq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x^2-(m+3)x+m-1=0.\quad (1)$ Để đường thẳng cắt đường cong tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biết khác 1 $\Delta = (m+3)^2-4(m-1)>0 \Leftrightarrow m^2+2m+13>0$ Thấy ngay là cần 1 kết quả khác. □

Câu 15. **dai5:k15** [K,D1] Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $m\geq 2017$ **B** $m>0$ **C** $m\geq\dfrac{1}{2017}$ **D** $m\geq-\dfrac{1}{2017}$

Lời giải: Ta có: $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$ để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m \geq 0 \quad (*)$ với mọi m.
Vì $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$. Nên để $(*)$ đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì $-\sqrt{2} \geq -2017\sqrt{2}m$ hay $m \geq \dfrac{1}{2017}$ □

Câu 16. **dai5:k16** [K,D1] Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất

(A) $y = -3x + 3$ (B) $y = -3x - 3$ (C) $y = -3x$ (D) $y = 0$

Lời giải: Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.
Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0 - 1)^2 - 3 \geq -3$. Dấu bằng xảy ra khi $x_0 = 1$. Vậy hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến là -3, ứng với tiếp điểm $M(1; 0)$. Nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là:
$y = -3(x - 1) = -3x + 3$. □

Câu 17. **dai5:k17** [K,D1] Số điểm có tọa độ là các số nguyên trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$ là:

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Lời giải: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số, khi đó ta có

$$y_0 = \frac{x_0 + 3}{x_0 + 2} \Leftrightarrow y_0 = 1 + \frac{1}{x_0 + 2}.$$

Do $x_0; y_0$ nguyên nên $x_0 + 2$ là ước của 1, suy ra $x_0 + 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 \in \{-1; -3\}$.
Từ đó ta có $M_1(-1; 2)$; $M_2(-3; 0)$ là hai điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số. □

Câu 18. **dai5:k18** [K,D1] Cho họ đồ thị $(C_m) : y = x^4 + mx^2 - m - 1$. Tọa độ các điểm mà mọi đồ thị của (C_m) đi qua là:

(A) $(-1; 0)$ và $(1; 0)$ (B) $(1; 0)$ và $(0; 1)$ (C) $(-2; 1)$ và $(-2; 3)$ (D) $(2; 1)$ và $(1; 0)$

Lời giải: Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm mà mọi đồ thị hàm số đi qua, điều này tương đương với phương trình
$y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m - 1$ nghiệm với mọi m
$\Leftrightarrow m(x_0^2 - 1) + x_0^4 - 1 - y_0 = 0$ nghiệm với mọi m
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = 1 \\ y_0 = x_0^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x_0; y_0) \in \{(1; 0), (-1; 0)\}$. □

Câu 19. **dai5:k19** [K,D1] Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(0; 2)$ và $B(2; -14)$. Tính $f(1)$.

(A) $f(1) = 0$ (B) $f(1) = -7$ (C) $f(1) = -5$ (D) $f(1) = -6$

Lời giải: Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx$.
Từ giả thiết ta có $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = -14 \\ f'(0) = f'(2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 \\ 16a + 4b + c = -14 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 2 \end{cases}$.
Vậy $f(1) = -5$. □

Câu 20. **dai5:k20** [K,D1] Có bao nhiêu tham số nguyên m để hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} - mx^2 + (3 - 2m)x + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A Một. **B** Vô số. **C** Không. **D** Hai.

Lời giải: Ta có: $y' = mx^2 - 2mx + 3 - 2m$.
Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff mx^2 - 2mx + 3 - 2m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Trường hợp 1: $m = 0 \Longrightarrow y' = 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = 0$ là một đáp số.
Trường hợp 2: $m \neq 0$ khi đó ycbt $\iff \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' = 3m^2 - 3m \leq 0 \end{cases} \iff 0 < m \leq 1$.
Vậy $0 \leq m \leq 1$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0, m = 1$. □

Câu 21. **dai5:k21** [K,D1] Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A $m \in \{-1; -4\}$. **B** $m \in \{1; 4\}$. **C** $m = -1$. **D** $m = 4$.

Lời giải: Ta có $y = \dfrac{x^2 + m}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x^2 + m}{(x-1)(x-2)}$.
Để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi tử số có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$. Khi đó $m = -1$ hoặc $m = -4$. □

Câu 22. **dai5:k22** [K,D1] Trong cuộc thi Robocon; một Robot đang chuyển động với vận tốc 5 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 2t + t^2 (m/s^2)$. Tính quãng đường Robot đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A $\dfrac{123}{5}(m)$ **B** $\dfrac{123}{2}(m)$ **C** $\dfrac{123}{4}(m)$ **D** $\dfrac{113}{4}(m)$

Lời giải: Gọi $v(t)$ là vận tốc của Robot. Ta có $v'(t) = a(t) = 2t + t^2$. Suy ra $v(t) = t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 + C$, $v(0) = 5 \Rightarrow C = 5$. Do đó $v(t) = t^2 + \dfrac{1}{3}t^3 + 5$. Vậy quãng đường Robot đi được là

$$S = \int_0^3 (t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5)\, dt = \frac{123}{4} \ (m).$$

$\square$

Câu 23. **dai5:k23** [K,D1] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 - x$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có các hoành độ $x_1; x_2; x_3$ sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 2$.

A $m > 0$ **B** $m \leq 0$ **C** với mọi m **D** $m \neq 0$

Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + 2mx^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx - 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0 với mọi m. Giả sử $x_3 = 0$ còn x_1, x_2 là hai nghiệm của (2). Khi đó:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 > 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 2 > 2 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$\square$

Câu 24. **dai5:k24** [K,D1] Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0; \pi)$ là:

A $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **B** $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **C** $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải: D
$y' = 1 + 2cos2x$
$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = \frac{-\pi}{3} + k\pi$
Do $x \in (0; \pi)$ nên $x = \frac{\pi}{3}$
Lập bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	

$\square$

Câu 25. **dai5:k25** [K,D1] Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5

Lời giải: TXĐ: $D = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}} = -3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}} = 3$ nên TCN là $y=-3$ và $y=3$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}} = +\infty$ nên TCĐ là $x=-1$ và $x=3$. □

Câu 26. **dai5:k26** [K,D1] Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s^2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $68,25m$ B. $70,25m$ C. $69,75m$ D. $67,25m$

Lời giải:

$$v(t) = \int (t^2+4t)dt = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + C$$

Mà

$$v(0) = 15 \Rightarrow C = 15$$

nên

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15$$

$$S(t) = \int_0^3 (\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15)dt = (\frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 15t)|_0^3 = \frac{279}{4} = 69.75(m)$$

□

Câu 27. **dai5:k27** [K,D1] Cho hàm số $y = |2x^2 - 3x - 1|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là

A. $\dfrac{17}{8}$ B. $\dfrac{9}{4}$ C. 2 D. 3

Lời giải: C

Xét $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ ta có $f'(x) = 4x - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

$f(\frac{1}{2}) = -2; f(\frac{3}{4}) = \dfrac{-17}{8}; f(2) = 1$

Vậy $Max|f(x)| = \dfrac{17}{8}$ □

Câu 28. **dai5:k28** [K,D1] Hàm số $y = \dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right] \backslash \{1\}$ B. $m \in (-1; 2] \backslash \{1\}$ C. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ D. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right]$

Lời giải: $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$và

$$y'=\frac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$$

.
Để hàm số trên đồng biến trên $[1;\infty)$ thì

$$\begin{cases} -m<1 \\ x^2+2mx-4m\geq 0, \forall x\in[1;\infty) \end{cases}$$

$2m(x-2)\geq -x^2, \forall x\in[1;\infty)(1)$
Xét $x=2$ luôn thỏa bất phương trình đã cho
Xét $x\neq 2$,khi đó $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\leq \dfrac{-x^2}{x-2} x\in[1;2) \\ 2m\geq \dfrac{-x^2}{x-2} x\in(2;\infty) \end{cases}$
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2}{x-2}$ trên $[1;\infty)\setminus\{2\}$có $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$
Lập bảng biến thiên và dựa theo yêu cầu bài toán thì $\begin{cases} m>-1 \\ 2m\leq 1 \\ 2m\geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\leq \frac{1}{2}$ □

Câu 29. dai5:k29 [K,D1] Hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

A. $m=1; m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
B. $m=-1; m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
C. $m=1; m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
D. $m=1; m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Lời giải: □

Câu 30. dai5:k30 [K,D1] Một viên phấn bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng $0,5cm$, chiều dài $6cm$. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng viên phấn đó với kích thước là $6cm\times 5cm\times 6cm$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17
B. 15
C. 16
D. 18

Lời giải: Đường kính của đáy viên phấn bảng $0,5.2=1(cm)$. Vậy khi xếp phấn theo chiều dài của hình hộp thì xếp tối đa được $6:1=6$(viên). Tương tự khi xếp theo chiều rộng của hình hộp thì xếp tối đa được $5:1=5$(viên). Vậy số viên phấn tối đa mà ta có thể xếp được $6.5=30$(viên). Ta có 460 viên phấn thì sẽ xếp vô được $460:30\approx 15.3 \Rightarrow$cần ít nhất 16 hộp để xếp hết 460 viên phấn □

Câu 31. dai5:k31 [K,D1] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+m}{\sqrt{mx^2+1}}$ có đúng hai đường tiệm cận ngang?

(A) $m < 0$. (B) $m \in (-\infty; +\infty)$. (C) $m > 0$. (D) Không tồn tại m.

Lời giải: • Với $m < 0$ thì $\mathfrak{D} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{-m}}; \dfrac{1}{\sqrt{-m}}\right)$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
• Với $m = 0$ thì $y = x$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.
• Với $m > 0$ thì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+m}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{m}{x}}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ và } \lim_{x\to-\infty} \frac{x+m}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-\dfrac{m}{x}}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Suy ra đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang. Vậy $m > 0$. □

Câu 32. dai5:k32 [K,D1] Gọi A và B là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Diện tích tam giác AOB (với O là gốc tọa độ) bằng:

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải: • $y' = 4x^3 - 4x$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$
• Đồ thị hàm số có 2 điểm cực tiểu là $A(-1; -2)$ và $B(1; -2)$.
• $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}AH.AB = \dfrac{1}{2}.2.2 = 2$. □

Câu 33. dai5:k33 [K,D1] Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Gọi A là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số và d là đường thẳng đi qua điểm $M(0; 2)$ có hệ số góc bằng k. Tìm k để khoảng cách từ A đến d bằng 1.

(A) $k = -\dfrac{3}{4}$. (B) $k = \dfrac{3}{4}$. (C) $k = -1$. (D) $k = 1$.

Lời giải: • $y' = -3x^2 + 3$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $A(-1; 0)$.
• $d : y = kx + 2 \Rightarrow d : kx - y + 2 = 0$.
• $d(A, d) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|-k+2|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{4}$. □

Câu 34. dai5:k34 [K,D1] Phương trình $x^3 - \sqrt{1-x^2} = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt

(A) 3 (B) 6 (C) 1 (D) 2

Lời giải: • PT $\Leftrightarrow x^3 = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^6 + x^2 - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$
• Đặt $t = x^2$, (1) trở thành $t^3 + t - 1 = 0 \quad (2)$.
• (2) có duy nhất 1 nghiệm dương nên (1) có duy nhất 1 nghiệm. □

Câu 35. **dai5:k35** [K,D1] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực: $\begin{cases} x+y=2 \\ x^4+y^4=m \end{cases}$.

A $m=2$ **B** $m \geq 1$ **C** $m \geq 2$ **D** $m \leq 2$

Lời giải: • Thay $y=2-x$ vào phương trình (2), ta được $x^4+(2-x)^4=m.\quad (*)$.
• Hệ phương trình có nghiệm ⇔ PT (*) có nghiệm.
• Đặt $f(x)=x^4+(2-x)^4$. Ta có $f'(x)=4x^3-4(2-x)^2$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 8x^3-24x^2+48x-32=0 \Leftrightarrow x=1$.
• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

• Từ bảng biến thiên, ta có $m \geq 2$. □

Câu 36. **dai5:k36** [K,D1] Biết đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có 2 điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính $a+b+c+d$.

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

Lời giải: Ta có toạ độ điểm uốn $U(1;1) \Rightarrow f(1)=a+b+c+d=1$. Chọn B. □

Câu 37. **dai5:k37** [K,D1] Với giá trị nào của của tham số thực m thì $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m^2+m+1\right)x$?

A $m \in \{-2;-1\}$ **B** $m=-2$ **C** $m=-1$ **D** không có m

Lời giải:
Ta có $y'=x^2+2mx+m^2+m+1, y''=2x+2m$.
Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m<-1 \Rightarrow y''(1)=2+2m<0\ \forall m<-1 \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 38. **dai5:k38** [K,D1] Biết rằng hàm số $y=x^4-4x^2+3$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Tìm m để phương trình $\left|x^4-4x^2+3\right|=m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.

Ⓐ $1 < m < 3$ Ⓑ $m > 3$ Ⓒ $m = 0$ Ⓓ $m \in (1;3) \cup \{0\}$

Lời giải:

Đặt $f(x) = |x^4 - 4x^2 + 3|$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, ta được *ycbt* $\Leftrightarrow 1 < m < 3 \vee m = 0$.
Chọn D. □

Câu 39. dai5:k39 [K,D1] Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ (C) không có tiệm cận ngang.
Ⓑ (C) có đúng một tiệm cận ngang $y = 1$.
Ⓒ (C) có đúng một tiệm cặng ngang $y = -1$.
Ⓓ (C) có hai tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$

Lời giải: Ta có

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}}} = -1. \text{ và } \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}}} = 1.$$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = \pm 1$. □

Câu 40. dai5:k40 [K,D1] Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 16. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính thể tích của khối chóp $S.MNPQ$.

Ⓐ $V_{S.MNPQ} = 1$. Ⓑ $V_{S.MNPQ} = 2$. Ⓒ $V_{S.MNPQ} = 4$. Ⓓ $V_{S.MNPQ} = 8$.

Lời giải: Có thể xem $S.ABCD$ là hình chóp đều. Khi đó ta có $V_{S.ABCD} = 16$ suy ra $V_{S.ABC} = 8$, trong khi

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{8}.$$

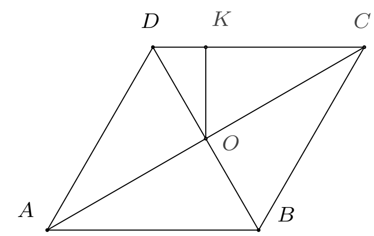
Từ đây suy ra $V_{S.MNP} = 1 \Rightarrow V_{S.MNPQ} = 2$. □

Câu 41. dai5:k41 [K,D1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$ (B) $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$ (C) $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$ (D) $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$

Lời giải:
Vì ABD là tam giác đều nên ta có $BD = a$, ngoài ra theo định lí cosin

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120^\circ = 3.$$



Kẻ $OK \perp CD$ tại K, ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Ta có $SO = OK.\tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$, trong khi $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. □

Câu 42. dai5:k42 [K,D1] Với m là tham số thực sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $m < -2$ (B) $-2 < m < 0$ (C) $0 \leq m < 2$ (D) $m \geq 2$

Lời giải: Ta có $y' = 4x(x^2 - m)$ suy ra hàm số có ba cực trị khi $m > 0$. Khi đó, gọi $A(0;1)$, $B(\sqrt{m}; 3m^2+1)$ và $C(-\sqrt{m}; 3m^2+1)$ là các điểm cực trị. Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{m}.(-\sqrt{m}) + (3m^2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

Chọn C. □

Câu 43. dai5:k43 [K,D1] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$, mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Gọi $V_{O.ABC}$ là thể tích tứ diện $O.ABC$. Khi (P) thay đổi tìm giá trị nhỏ nhất của $V_{O.ABC}$.

(A) $\min V_{O.ABC} = \dfrac{9}{2}$ (B) $\min V_{O.ABC} = 18$ (C) $\min V_{O.ABC} = 9$ (D) $\min V_{O.ABC} = \dfrac{32}{3}$

Lời giải: Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$, ta có $a, b, c > 0$ (do giả thiết (P) cắt các *tia*). Khi đó phương trình mặt phẳng (P) theo đoạn chắn là

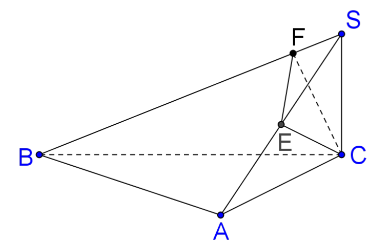
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Vì $M \in (P)$ nên ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{c} = 1$. Từ đây, dùng AM-GM

$$1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}} \Rightarrow abc \geq 54.$$

Vậy $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}.abc \geq 9$. □

Câu 44. **dai5:k44** [K,D1] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SC \perp (ABC)$
và $SC = a$. Mặt phẳng qua C, vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E, F. Tính thể tích khối $S.CEF$.



Ⓐ $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$. Ⓑ $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3}{36}$

Ⓒ $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3}{18}$. Ⓓ $V_{S.CEF} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$

Lời giải: Ta sẽ sử dụng tính chất

$$\frac{V_{S.CEF}}{V_{S.CAB}} = \frac{SE}{SA}.\frac{SF}{SB}.$$

Cho $a = 1$. Tam giác SAC vuông tại A với đường cao CE có

$$SC^2 = SE.SA \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{SC^2}{SA^2} = \frac{1}{2}.$$

Tương tự, ta có

$$SC^2 = SF.SB \Rightarrow \frac{SF}{SB} = \frac{SC^2}{SB^2} = \frac{1}{3}.$$

Cuối cùng, vì $V_{S.CAB} = \dfrac{1}{6}$ nên suy ra $V_{S.CEF} = \dfrac{1}{36}$. Chọn B □

Câu 45. **dai5:k45** [K,D2] Cho $a = \log_2 3, b = \log_3 5, c = \log_7 2$. Hãy tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c.

Ⓐ $\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$ Ⓑ $\dfrac{2ac+1}{abc+2c-1}$ Ⓒ $\dfrac{2ac-1}{abc+2c+1}$ Ⓓ $\dfrac{2ac+1}{abc-2c+1}$

Lời giải:

Ta có $\log_{140} 63 = \log_{2^2 5 7} 3^2 7 = 2\log_{2^2.5.7} 3 + \log_{2^2.5.7} 7 = \dfrac{2}{\log_3 2^2.5.7} + \dfrac{1}{\log_7 2^2.5.7}$

$= \dfrac{2}{2\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \dfrac{1}{2\log_7 2 + \log_7 5 + 1} = \dfrac{2}{\dfrac{2}{a} + b + \dfrac{\log_2 7}{\log_2 3}} + \dfrac{1}{2c + \log_7 2\log_2 3\log_3 5 + 1}$

$= \dfrac{2}{\dfrac{2}{a} + b + \dfrac{1}{ac}} + \dfrac{1}{2c + abc + 1} = \dfrac{2ac}{abc + 2c + 1} + \dfrac{1}{abc + 2c + 1} = \dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}.$

Kiến nghị viết lời giải như sau:

• Từ giả thiết suy ra $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = \log_2 3\log_3 5 = ab$, $\log_2 7 = \dfrac{1}{c}$.

Ta có $\log_{140} 63 = \dfrac{\log_2 63}{\log_2 140} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 7}{2 + \log_2 5 + \log_2 7} = \dfrac{2a + \dfrac{1}{c}}{2 + ab + \dfrac{1}{c}} = \dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}.$ □

Câu 46. **dai5:k46** [K,D2] Bà A gửi 100 triệu vào ngân hàng theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ kế tiếp) với lãi suất 7% một năm. Hỏi sau 2 năm bà A thu được lãi là bao nhiêu (giả sử lãi suất không thay đổi)?

(A) 15 triệu đồng (B) 14, 49 triệu đồng (C) 20 triệu đồng (D) 14, 50 triệu đồng

Lời giải: Số tiền lãi của bà A sau hai năm sẽ là

$$100(1+0,7)^2 - 100 = 14,49(\text{triệu})$$

□

Câu 47. **dai5:k47** [K,D2] Cho biết $\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Tính $\log \sqrt[3]{0,18}$ theo a và b ta được:

(A) $\dfrac{2b+a-2}{3}$ (B) $\dfrac{b+2a-2}{3}$ (C) $\dfrac{3b+a-2}{3}$ (D) $\dfrac{b+3a-2}{3}$

Lời giải: Ta có $\log \sqrt[3]{0,18} = \dfrac{1}{3}\log 0,18 = \dfrac{1}{3}\log\left[\dfrac{2}{10}.\dfrac{3}{10}.3\right] = \dfrac{1}{3}\log\dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{3}\log 3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\log 3 + \log 2 - 2}{3}$
□

Câu 48. **dai5:k48** [K,D2] Giải bất phương trình: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^5$. Một học sinh làm như sau:

Bước 1. Điều kiện $x \neq 0 \quad (*)$

Bước 2. Vì $\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 1$ nên $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \geq 5$

Bước 3. Từ đó suy ra $1 \geq 5x \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{5}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right] \setminus \{0\}$.

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào?

(A) Đúng (B) Sai ở bước 1 (C) Sai ở bước 2 (D) Sai ở bước 3

Lời giải: Sai ở bước 3 do đã quy đồng khử mẫu khi chưa xác định rõ dấu của mẫu số. □

Câu 49. **dai5:k49** [K,D2] Tập nghiệm của bất phương trình $32.4^x - 18.2^x + 1 < 0$ là tập con của tập:

(A) $(-5;-2)$ (B) $(-4;-1)$ (C) $(1;4)$ (D) $(-3;1)$

Lời giải: Bất phương trình tương đương với

$$\frac{1}{16} < 2^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -4 < x < -1.$$

□

Câu 50. **dai5:k50** [K,D2] Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Khi đó

(A) $M = \dfrac{1}{e}; m = 0$ (B) $M = e; m = 0$ (C) $M = e; m = \dfrac{1}{e}$ (D) $M = e; m = 1$

Lời giải: Ta có $y = x^2e^{-x}$, suy ra $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$.
Ta có $y(-1) = e; y(0) = 0; y(1) = e^{-1}$. Vậy $M = e; m = 0$. □

Câu 51. **dai5:k51** [K,D2] Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = 4^x + 1 \\ 2^{x+1} + y - 1 = 0 \end{cases}$ là:

(A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) 4

Lời giải: Từ phương trình số (2) ta có $y = 1 - 2.2^x \Rightarrow y^2 = 4.4^x - 4.2^x + 1$.
Thế vào phương trình (1) ta được $3.4^x - 4.2^x = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{4}{3}$. Do đó hệ có nghiệm duy nhất. □

Câu 52. **dai5:k52** [K,D2] Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(5 - x)$ có tập nghiệm là:

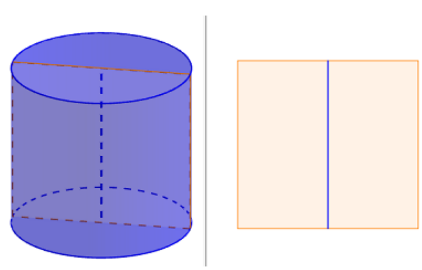
(A) $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right]$. (B) $[2; 5)$. (C) $(-\infty; 2]$. (D) $[2; +\infty)$.

Lời giải: Điều kiện : $\dfrac{1}{2} < x < 5$ PT $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(5 - x) \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 5 - x \Leftrightarrow x \leq 2$
So điều kiện : $\dfrac{1}{2} < x \leq 2$. □

Câu 53. **dai5:k53** [K,D2] Một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao hình trụ. Thiết diện qua trục của hình trụ có diện tích là S. Thể tích của khối trụ đó là:

(A) $\dfrac{\pi S\sqrt{S}}{12}$. (B) $\dfrac{\pi S\sqrt{S}}{24}$. (C) $\dfrac{\pi S\sqrt{S}}{4}$. (D) $\dfrac{\pi S\sqrt{S}}{6}$.

Lời giải:



Vì đường kính đáy bằng chiều cao hình trụ và thiết diện qua trục của hình trụ có diện tích là S nên thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông cạnh $\sqrt{S}$. Vậy hình trụ có chiều cao $h = \sqrt{S}$ và bán kính đáy $r = \dfrac{\sqrt{S}}{2}$.
Thể tích của khối trụ $V = \pi.r \cdot h = \dfrac{\pi S\sqrt{S}}{4}$. □

Câu 54. **dai5:k54** [K,D2] Số lượng của một loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q(t) = Q_0.e^{0.195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100.000 con?

Ⓐ 20. Ⓑ 24. Ⓒ $15,36$. Ⓓ $3,55$.

Lời giải: Ta có $100000 = 5000.\mathrm{e}^{0.195t} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{0.195t} = 20 \Longleftrightarrow 0.195t = \ln 20 \Longleftrightarrow t \approx 15.36$. □

Câu 55. **dai5:k55** [K,D2] Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $3^x = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt?

Ⓐ $m > 0$. Ⓑ $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \ln 3 \end{cases}$ Ⓒ $m \geq 2$. Ⓓ Không tồn tại m.

Lời giải: Dễ thấy $x = 0$ là nghiệm của phương trình.
Đặt $y = 3^x - mx - 1 \Rightarrow y' = 3^x \ln 3 - m$.
Trường hợp 1: $m \leq 0 \Longrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến, hàm số luôn cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất $x = 0$.
Trường hợp 2: $m > 0$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3^x \ln 3 - m = 0 \Leftrightarrow 3^x \ln 3 = m \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{m}{\ln 3} = x_0$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $y(x_0)$.
Vì $y(0) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $x_0 \neq 0 \Leftrightarrow \log_3 \frac{m}{\ln 3} \neq 0 \Rightarrow m \neq \ln 3$. □

Câu 56. **dai5:k56** [K,D2] Cho phương trình $\log_2(x^2 + mx) = \log_2(x - 5), m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm thực trên nửa khoảng $[6; +\infty)$.

Ⓐ $m = -\dfrac{47}{7}$ Ⓑ $m = -\dfrac{35}{6}$ Ⓒ $m = -\dfrac{119}{22}$ Ⓓ $m = -\dfrac{61}{8}$

Lời giải: Với $x \in [6; +\infty)$, ta có sự tương đương:

$$\log_2(x^2 + mx) = \log_2(x - 5) \Leftrightarrow x^2 + mx = x - 5 \Leftrightarrow m = \frac{-x^2 + x - 5}{x}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{-x^2 + x - 5}{x}, x \geq 6$. Khi đó:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + x - (-x^2 + x - 5)}{x^2} = \frac{-x^2 + 5}{x^2} < 0, \forall x \geq 6.$$

Ta suy ra $m \leq f(6) = -\dfrac{35}{6}$. □

Câu 57. dai5:k57 [K,D2] Tìm m để bất phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 1 - 2m \geq 0$ luôn nghiệm đúng với mọi x thuộc nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Ⓐ $m \geq 1$ Ⓑ $m \leq 1$ Ⓒ $m \leq \dfrac{1}{2}$ Ⓓ $m < \dfrac{1}{2}$

Lời giải: Đặt $t = 2^x$, với $x \geq 0$ thì $t \geq 1$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 1 \geq 2m(t+1) \Leftrightarrow 2m \leq \frac{t^2+1}{t+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+1}{t+1}, t \geq 1$. Khi đó:

$$f'(t) = \frac{2t(t+1) - t^2 - 1}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2} > 0, \forall t \geq 1.$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

t	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$1 \nearrow +\infty$

Yêu cầu bài toán là

$$\Leftrightarrow 2m \leq f(1) = 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

□

Câu 58. dai5:k58 [K,D2] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm thực phân biệt $9^{x^2} - 2.3^{x^2+1} + 3m - 1 = 0$.

Ⓐ $m = \dfrac{10}{3}$ Ⓑ $2 < m < \dfrac{10}{3}$ Ⓒ $m = 2$ Ⓓ $m < 2$

Lời giải: C
Đặt $t = 3^{x^2} \Rightarrow y = t^2 - 6t - 1 = -3m$
Nếu pt $y = 0$ có 1 nghiệm dương $t > 1$ thì phương trình ban đầu có 2 nghiệm $x^2 = \log_3 t \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_3 t}$
Vậy để phương trình có 3 nghiệm thì phương trình $y =$ phải có 2 nghiệm và 1 nghiệm bằng 0. $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow m = 2$
Thay m vào phương trình ban đầu giải được $x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{\log_3 5}$ □

Câu 59. dai5:k59 [K,D2] Một người thả một lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

Ⓐ $12 - \log 5$ (giờ) Ⓑ $\dfrac{12}{5}$ (giờ) Ⓒ $12 - \log 2$ (giờ) Ⓓ $12 + \ln 5$ (giờ)

Lời giải: Gọi x là số giờ bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao. Khi đó:
Số bèo sau x giờ là: 10^x.
Số bèo sau 12 giờ là: 10^{12}.
Theo đề bài ta có: $10^x = \frac{1}{5}.10^{12} \Leftrightarrow x = 12 - \log 5$. □

Câu 60. dai5:k60 [K,D2] Số nghiệm của phương trình $\log_2(x+3) - 1 = \log_{\sqrt{2}} x$ là:

Ⓐ 1 Ⓑ 3 Ⓒ 0 Ⓓ 2

Lời giải: A
ĐKXĐ: $x > 0$
$\log_2(x+3) - 1 = \log_{\sqrt{2}} x \Leftrightarrow \log_2(x+3) = 2\log_2(x) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+3) = \log_2(x^2) + \log_2(2)$
$\Leftrightarrow \log_2(x+3) = \log_2(2x^2) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ hoặc $x = -1$. Loại $x = -1$ do điều kiện. □

Câu 61. dai5:k61 [K,D2] Cho số thực x thỏa mãn $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$. Tính giá trị của $P = (\log_2 x)^2$

Ⓐ $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Ⓑ $P = \frac{1}{3}$ Ⓒ $P = 3\sqrt{3}$ Ⓓ $P = 27$

Lời giải: Điều kiện $\log_2 x > 0$. Phương trình tương đương

$$\log_2(\log_8 x) = \log_2 \sqrt[3]{\log_2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 x = \sqrt[3]{\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2 x = 3\sqrt{3}.$$

Vậy ta có $(\log_2 x)^2 = 27$. □

Câu 62. dai5:k62 [K,D2] Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m.2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?

Ⓐ $(-\infty; 1)$ Ⓑ $[2; +\infty)$ Ⓒ $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ Ⓓ $(2; +\infty)$

Lời giải: Đặt $t = 2^{x^2-2x+1}$ ta có $t \geq 1$ do $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$. Phương trình trở thành

$$t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-2}{2t-3} = m \ (1)$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1.
Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2-2}{2t-3}$ trên $(1; +\infty) \backslash \left\{\frac{3}{2}\right\}$, ta có

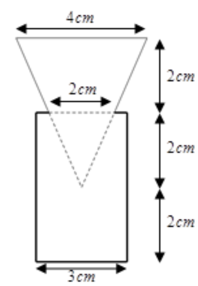
$$f'(t) = \frac{2(t^2-3t+2)}{(2t-3)^2}, \ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Bảng biến thiên của $f(t)$

x	1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng, chọn $m > 2$. □

Câu 63. dai5:k63 [K,D2] Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục (H) cắt (H) theo một thiết diện cho trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị: cm^3).



Ⓐ $V_{(H)} = \dfrac{41\pi}{3}$ Ⓑ $V_{(H)} = 13\pi$
Ⓒ $V_{(H)} = 23\pi$ Ⓓ $V_{(H)} = 17\pi$

Lời giải:

- Thể tích khối trụ có đường kính đáy 3 cm, chiều cao 4 cm là $V_1 = 9\pi\ cm^3$.
- Thể tích khối nón có đường kính đáy 4 cm, chiều cao 4 cm là $V_2 = \dfrac{16}{3}\pi\ cm^3$.
- Thể tích khối nón có đường kính đáy 2 cm, chiều cao 2 cm là $V_3 = \dfrac{2}{3}\pi\ cm^3$.

Thể tích của (H) xác định bởi

$$V_{(H)} = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{41\pi}{3}\ cm^3.$$

□

Câu 64. dai5:k64 [K,D2] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ là

Ⓐ $m \in (-4; 1)$. Ⓑ $m \in [1; +\infty)$.
Ⓒ $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. Ⓓ $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải:

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow g(x) = m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0\ (\forall x > 0)$
Đặt $t = \log_3 x\ (t \in \mathbb{R})$ khi đó $\Leftrightarrow g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \neq 0\ (\forall t \in \mathbb{R})$
Với $m = 0 \Rightarrow g(t) = -4t + 3$ (không thỏa mãn).
Với $m \neq 0$ suy ra $g(t) = mt^2 - 4t + m + 3 \neq 0\ (\forall t) \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -4 \end{array}\right.$ □

Câu 65. dai5:k65 [K,D3] Tính $I=\int\limits_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}\mathrm{d}x$.

Ⓐ $1+25\ln 2-16\ln 3$
Ⓑ $1+25\ln 2-15\ln 3$
Ⓒ $1+25\ln 3-15\ln 3$
Ⓓ $1+27\ln 2-16\ln 3$

....

Lời giải: Ta có $I=\int\limits_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 1+\frac{7x-21+9}{(x-3)(x-4)}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_1^2 \mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \frac{1}{x-4}\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-3)(x-4)}\mathrm{d}x$

$=1+7\ln|x-4|\Big|_1^2+9\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|\Big|_1^2=1+7(\ln 2-\ln 3)+9\left(\ln 2-\ln\frac{3}{2}\right)$

$=1+7\ln 2-7\ln 3+9\ln 2-9\ln 3+9\ln 2=1+25\ln 2-16\ln 3.$ □

Câu 66. dai5:k66 [K,D3] Tính $I=\int \frac{x}{3x-\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x$.

Ⓐ $\frac{1}{27}(9x^2+1)^{\frac{3}{2}}+x^3+C$
Ⓑ $\frac{1}{27}(9x^2-2)^{\frac{3}{2}}+x^3+C$
Ⓒ $\frac{1}{27}(9x^2-1)^{\frac{3}{2}}+x^3+C$
Ⓓ $\frac{1}{27}(9x^2+2)^{\frac{3}{2}}+x^3+C$

....

Lời giải:

Ta có $I=\int \frac{x}{3x-\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=\int \frac{x.\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)}{9x^2-(9x^2-1)}\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+x\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x$

$=\int 3x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{18}\int\sqrt{9x^2-1}d\left(9x^2-1\right)=\frac{1}{27}(9x^2-1)^{\frac{3}{2}}+x^3+C.$ □

Câu 67. dai5:k67 [K,D3] Tính $I=\int \frac{8\cos^2 x-\sin 2x-3}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$

Ⓐ $4\cos x-5\sin x+C$
Ⓑ $3\cos x-4\sin x+C$
Ⓒ $3\cos x-6\sin x+C$
Ⓓ $3\cos x-5\sin x+C$

....

Lời giải: Ta có $I=\int \frac{8\cos^2 x-\sin 2x-3}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int \frac{5\cos^2 x-2\sin x\cos x-3\sin^2 x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int \frac{(5\cos x+3\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$

$=\int(-5\cos x-3\sin x)\,\mathrm{d}x$

$=-5\sin x+3\cos x+C$ □

Câu 68. **dai5:k68** [K,D3] Tính $I = \int \dfrac{e^{2x}}{1+\sqrt{e^x}}\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{2}{3}e^x\sqrt{e^x} - e^x - 2\sqrt{e^x} - 2\ln|\sqrt{e^x}+1| + C$
(B) $\dfrac{2}{3}e^x\sqrt{e^x} - e^x + 3\sqrt{e^x} - 2\ln|\sqrt{e^x}+1| + C$
(C) $\dfrac{2}{3}e^x\sqrt{e^x} - e^x + 2\sqrt{e^x} + 2\ln|\sqrt{e^x}+1| + C$
(D) $\dfrac{2}{3}e^x\sqrt{e^x} - e^x + 2\sqrt{e^x} - 2\ln|\sqrt{e^x}+1| + C$

Lời giải: Đặt $t = 1+\sqrt{e^x} \Rightarrow t-1 = \sqrt{e^x} \Rightarrow (t-1)^2 = e^x \Rightarrow (2t-2)\,\mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \dfrac{2}{t-1}\mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x$

Nên $I = \displaystyle\int \dfrac{e^{2x}}{1+\sqrt{e^x}}\mathrm{d}x = \int \dfrac{(t-1)^4}{t}.\dfrac{2}{t-1}\mathrm{d}t$

$= 2\displaystyle\int \dfrac{(t-1)^3}{t}\mathrm{d}t = 2\int \left(t^3-3t+3\right) - \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$

$= \dfrac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 6t - 2\ln|t| + C = \dfrac{2}{3}\left(1+\sqrt{e^x}\right)^3 - 3\left(1+\sqrt{e^x}\right)^2 + 6\left(1+\sqrt{e^x}\right) - 2\ln|1+\sqrt{e^x}| + C$

$= \dfrac{2}{3} + 2\sqrt{e^x} + 2e^x + \dfrac{2}{3}e^x\sqrt{e^x} - 3 - 6\sqrt{e^x} - 3e^x + 6 + 6\sqrt{e^x} - 2\ln|\sqrt{e^x}+1| + C$

$= \dfrac{2}{3}e^x\sqrt{e^x} - e^x + 2\sqrt{e^x} - 2\ln|\sqrt{e^x}+1| + C + \dfrac{11}{3}$. □

Câu 69. **dai5:k69** [K,D3] Tính $I = \displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+9}}$.

(A) $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^{2x}+9}-3}{\sqrt{e^{2x}+9}+3}\right| + C$
(B) $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^{2x}+9}+3}{\sqrt{e^{2x}+9}-3}\right| + C$
(C) $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^{2x}+9}-3}{\sqrt{e^{2x}+9}+3}\right| + C$
(D) $\dfrac{1}{9}\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^{2x}+9}-3}{\sqrt{e^{2x}+9}+3}\right| + C$

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{e^{2x}+9} \Rightarrow e^{2x} = t^2 - 9$

$\Rightarrow 2e^{2x}\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \Rightarrow e^{2x}\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{t}{t^2-9}\mathrm{d}t$

Vậy $I = \displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2-9} = \dfrac{1}{6}\ln|\dfrac{t-3}{t+3}| + C$

Hay $I = \dfrac{1}{6}\ln|\dfrac{\sqrt{e^{2x}+9}-3}{\sqrt{e^{2x}+9}+3}| + C$. □

Câu 70. **dai5:k70** [K,D3] Diện tích hình phẳng giới hãn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x^4$ và trục hoành là:

(A) $\dfrac{8\sqrt{2}}{15}$ (B) $\dfrac{16\sqrt{2}}{15}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

Lời giải: Ta có $S = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} (2x^2 - x^4)\mathrm{d}x = \dfrac{16\sqrt{2}}{15}$ □

Câu 71. dai5:k71 [K,D3] So sánh các tích phân: $I = \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos x\,\mathrm{d}x$, $K = \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$. Ta có các kết quả nào sau đây?

A $I > K > J$ **B** $I > J > K$ **C** $J > I > K$ **D** $K > I > J$

Lời giải: Ta có: $I = \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{16}; \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$ □

Câu 72. dai5:k72 [K,D3] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\ln\sqrt{2}$ **B** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln 2$ **C** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\ln 2$ **D** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2\ln 2$

Lời giải: Ta có $F(x) = \int \cot x\mathrm{d}x = \ln(\cos x) + C$.

Do $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ nên $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) + C = 0 \iff C = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

Vậy $F(x) = \ln(\cos x) + \dfrac{1}{2}\ln 2 \Longrightarrow F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln 2$. □

Câu 73. dai5:k73 [K,D3] Biết $\int_1^3 \dfrac{1}{e^x - 1}dx = a + \ln b$ $(a, b \in \mathbb{R}, b > 0)$. Tính be^{a+2}.

A $e^3 + 1$ **B** $e^3 - 1$ **C** $e^2 - e + 1$ **D** $e^2 + e + 1$

Lời giải: Ta có:

$$\int\limits_1^3 \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \int\limits_1^3 \frac{e^x - (e^x - 1)}{e^x - 1}\,dx = (\ln|e^x - 1| - x)\Bigg|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}$$
$$= \ln(e^3 - 1) - \ln(e - 1) - 2 = -2 + \ln(e^2 + e + 1) = a + \ln b.$$

Do đó:

$$a + \ln b = -2 + \ln\left(e^2 + e + 1\right) \Leftrightarrow a + 2 = \ln\frac{e^2 + e + 1}{b}$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^2 + e + 1}{b} = e^{a+2} \Leftrightarrow be^{a+2} = e^2 + e + 1.$$

□

Câu 74. dai5:k74 [K,D3] Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x - 1}; y = 0; x = 3$.

A $S = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **B** $S = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ **C** $S = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **D** $S = \dfrac{3\sqrt{2}}{3}$

Lời giải: Diện tích cần tính là: $S=\int\limits_1^3 \sqrt{x-1}dx=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. □

Câu 75. dai5:k75 [K,D3] Tính thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2+1; y=x+4$ quay quanh trục Ox.

Ⓐ $\dfrac{875\pi}{24}$ Ⓑ $\dfrac{155\pi}{3}$ Ⓒ $\dfrac{125\pi}{4}$ Ⓓ $\dfrac{95\pi}{24}$

Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^2+1=x+4 \Leftrightarrow 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1,5. \end{array}\right.$$

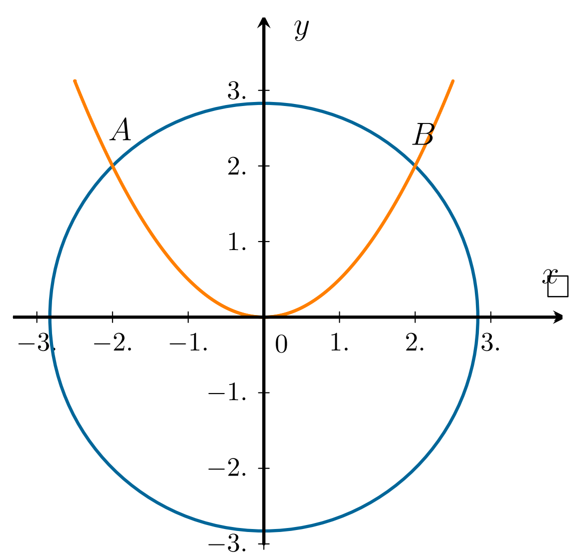
Thể tích cần tính là $V=\pi\int\limits_{-1}^{\frac{3}{2}}\left[(x+4)^2-\left(2x^2+1\right)^2\right]dx=\dfrac{125\pi}{4}$. □

Câu 76. dai5:k76 [K,D3] Parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

Ⓐ $\dfrac{3\pi+2}{21\pi-2}$ Ⓑ $\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$ Ⓒ $\dfrac{3\pi+2}{12\pi}$ Ⓓ $\dfrac{9\pi-2}{3\pi+2}$

Lời giải:

Diện tích hình tròn là $S=\pi r^2=8\pi$.
Ta có: $S_1=\int_{-2}^{2}\left|\sqrt{8-x^2}-\dfrac{x^2}{2}\right|dx=2\pi+\dfrac{4}{3}$.
Suy ra: $S_2=S-S_1=6\pi-\dfrac{4}{3}$.
Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$.



□

Câu 77. dai5:k77 [K,D3] Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. Tính $F(0)$.

Ⓐ $F(0)=-4+6\ln 2$ Ⓑ $F(0)=-4-6\ln 2$
Ⓒ $F(0)=4-6\ln 2$ Ⓓ $F(0)=4+6\ln 2$

Lời giải: A

Ta có $F(x) = \int f(x)dx$.

$F(x) = \int \frac{sin4x}{1+cos^2x}dx = \int \frac{2sin2x.cos2x}{1+\frac{1+cos2x}{2}}dx = \int \frac{4sin2x.cos2x}{3+cos2x}dx = \int \frac{-2cos2x.(3+cos2x)}{3+cos2x}dx$

$= -2\int \frac{(3+cos2x)-3}{3+cos2x}d(3+cos2x) = -2\int \left(1-\frac{3}{3+cos2x}\right)d(3+cos2x)$

$-2(3+cos2x)+6\ln|3+cos2x|+C$

Ta có $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2(3+cos\pi)+6\ln|3+cos\pi|+C = 0 \Leftrightarrow C = 4-6\ln 2$

$\Rightarrow F(0) = -2(3+cos0)+6\ln|3+cos0|+4-6\ln 2 = -4+6\ln 2$ □

Câu 78. dai5:k78 [K,D3] Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^3 x$.

A. $\int f(x)\,dx = \frac{\cos^4 x}{x}+C$

B. $\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 3x}{3}+3\sin x\right)+C$

C. $\int f(x)\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x - \frac{3}{4}\sin x + C$

D. $\int f(x)\,dx = \frac{\cos^4 x.\sin x}{4}+C$

Lời giải: Ta có: $I = \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x.\cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)d\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}+C = \sin x - \frac{3\sin x - \sin 3x}{12}+C = \frac{1}{12}\sin 3x - \frac{3}{4}\sin x + C.$ □

Câu 79. dai5:k79 [K,D3] Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $x = y^2$ quay quanh trục Ox bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3\pi}{10}$ B. 10π C. $\frac{10\pi}{3}$ D. 3π

Lời giải: Giải hệ $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Thể tích $V = \pi \int\limits_0^1 |x - x^4|dx = \frac{3\pi}{10}$. □

Câu 80. dai5:k80 [K,D3] Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $x^2+y^2 = 2$, $y \geq 0$ và parabol $y = x^2$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\pi}{2}-1$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$.

Lời giải: • Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{2-x^2} = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

• $S = \int_{-1}^{1} \left|x^2 - \sqrt{2-x^2}\right| \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$. □

Câu 81. dai5:k81 [K,D3] Giải phương trình $\int_0^2 (t - \log_2 x)\,dt = 2\log_2 \frac{2}{x}$ (ẩn x):

(A) $x \in (0; +\infty)$. (B) $x = 1$. (C) $x \in \{1; 4\}$. (D) $x \in \{1; 2\}$.

Lời giải: • Ta có

$$\int_0^2 (t - \log_2 x)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}t^2 - t.\log_2 x\right)\Bigg|_0^2 = 2 - 2\log_2 x.$$

• Ta có phương trình: $2 - 2\log_2 x = 2\log_2 \dfrac{2}{x}$. PT nghiệm đúng với mọi $x > 0$. □

Câu 82. dai5:k82 [K,D3] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x : $\displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 2(a+1)\right) dt \geq -1$

(A) $a \in \left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$ (B) $a \in [0; 1]$ (C) $a \in [-2; -1]$ (D) $a \leq 0$

Lời giải:

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 2(a+1)t\right) > -1 \text{ với mọi } x\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2}{4} + 2(a+1)x \geq -1 \text{ với mọi } x\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2}{4} + 2(a+1)x + 1 \geq 0 \text{ với mọi } x\\
\Leftrightarrow &\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 - \frac{1}{4} \leq 0\\
\Leftrightarrow &-\frac{3}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Câu 83. dai5:k83 [K,D3] Giả sử $\displaystyle\int_1^2 \frac{4\ln x + 1}{x}\mathrm{d}x = a\ln^2 2 + b\ln 2$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó, tổng $4a + b$ bằng:

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

Lời giải:

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{3\ln x + 1}{x}dx = \left[2\ln^2 x + \ln|x|\right]\Big|_1^2 = 2\ln^2 2 + \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 84. dai5:k84 [K,D3] Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho $n\ln n - \displaystyle\int_1^n \ln x\mathrm{d}x$ có giá trị không vượt quá 2017?

(A) 2017 (B) 2018 (C) 4034 (D) 4036

Lời giải:

Ta có $\int_1^n \ln x dx = n\ln n - n + 1$. Ta thấy $n\ln x - \int_1^n \ln x dx = n - 1$

Ybbt $\Leftrightarrow n - 1 < 2017 \Leftrightarrow n < 2018$. Chọn A. □

Câu 85. **dai5:k85** [K,D3] Biết rằng $\int\limits_0^1 x\cos 2x dx = \frac{1}{4}\left(a\sin 2 + b\cos 2 + c\right)$, với a, b, c là những số nguyên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $a + b + c = 1$. (B) $a - b + c = 0$. (C) $a + 2b + c = 0$. (D) $2a + b + c = -1$.

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$.

Khi đó:

$$I = \left.\frac{x\sin 2x}{2}\right|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sin 2x dx = \frac{\sin 2}{2} + \left.\frac{1}{4}\cos 2x\right|_0^1$$
$$= \frac{\sin 2}{2} + \frac{\cos 2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2\sin 2 + \cos 2 - 1).$$

Theo giả thiết ta có:

$$a\sin 2 + b\cos 2 + c = 2\sin 2 + \cos 2 - 1$$
$$\Leftrightarrow (a-2)\sin 2 + (b-1)\cos 2 + c + 1 = 0. \quad (*)$$

Do a, b, c là những số nguyên nên từ (*) suy ra $a = 2, b = 1, c = -1$. Như thế $a - b + c = 0$. □

Câu 86. **dai5:k86** [K,D4] Cho số phức z thỏa $|z - 1 + 2i| = 2$, biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn tâm I bán kính R. Tìm tọa độ I và R.

(A) $I(1;-2), R = 2$ (B) $I(-1;2), R = 4$ (C) $I(-2;1), R = 2$ (D) $I(1;-2), R = 4$

Lời giải: Ta có $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow |z - (1 - 2i)| = 2$.

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 2$. □

Câu 87. **dai5:k87** [K,D4] Cho số phức $z = y + xi$, với x, y là hai số thực thỏa $(2x+1) + (3y-2)i = (x+2) + (y+4)i$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ.

(A) $(1;3)$ (B) $(3;1)$ (C) $(-1;-3)$ (D) $(-3;-1)$

Lời giải: Ta có $(2x+1) + (3y-2)i = (x+2) + (y+4)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = x+2 \\ 3y-2 = y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm biểu diễn của z là $(1;3)$. □

Câu 88. **dai5:k88** [K,D4] Để số phức $z = a + (a-1)i$ (a là số thực) có $|z| = 1$ thì

Ⓐ $a = \frac{1}{2}$ Ⓑ $a = \frac{3}{2}$ Ⓒ $a = 0$ hoặc $a = 1$ Ⓓ $|a| = 1$

Lời giải: Ta có $|z| = 1 \Leftrightarrow a^2 + (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a \in \{0; 1\}$ □

Câu 89. **dai5:k89** [K,D4] Số phức $z = (1+2i)^2(1-i)$ có môđun là

Ⓐ $|z| = 5\sqrt{2}$ Ⓑ $|z| = 50$ Ⓒ $|z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Ⓓ $|z| = \frac{10}{3}$

Lời giải: Ta có $|z| = |1+2i|^2|1-i| = 5\sqrt{2}$. □

Câu 90. **dai5:k90** [K,D4] Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $\frac{4i}{i-1}; (1-i)(1+2i); -2i^3$. Khi đó tam giác ABC

Ⓐ vuông tại C Ⓑ vuông tại A Ⓒ vuông cân tại B Ⓓ tam giác đều

Lời giải: Ta có $\frac{4i}{i-1} = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i \Rightarrow A(2; -2)$.
$(1-i)(1+2i) = 3 + i \Rightarrow B(3; 1)$.
$-2i^3 = 2i \Rightarrow C(0; 2)$.
Ta có $AB^2 = 10, BC^2 = 10; CA^2 = 20$. Vậy tam giác vuông cân tại B. □

Câu 91. **dai5:k91** [K,D4] Số phức z thỏa mãn $z + 3\overline{z} = \left(\overline{1-2i}\right)^2$ là

Ⓐ $-\frac{3}{4} + 2i$ Ⓑ $2 + \frac{3}{4}i$ Ⓒ $2 - \frac{3}{4}i$ Ⓓ $-\frac{3}{4} - 2i$

Lời giải: Giả sử $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó hệ thức trở thành

$$x + yi + 3(x - yi) = -3 + 4i \Leftrightarrow (x; y) = (-\frac{3}{4}; -2) \Rightarrow z = -\frac{3}{4} - 2i.$$

□

Câu 92. **dai5:k92** [K,D4] Cho số phức z thoả mãn $2z + (1+i)\bar{z} = 5 + 3i$. Tính $|z|$.

Ⓐ -2. Ⓑ $|z| = \sqrt{3}$. Ⓒ $|z| = 3$. Ⓓ $|z| = 5$.

Lời giải: Đặt $z = x + yi \Longrightarrow \bar{z} = x - yi$. Khi đó phương trình đã cho thành:
$3x + y + (x+y)i = 5 + 5i \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Longrightarrow z = 5i \Longrightarrow |z| = \sqrt{5}$. □

Câu 93. **dai5:k93** [K,D4] Tìm tất cả các số thực b, c sao cho số phức $8+16i$ là nghiệm của phương trình $z^2+8bz+64c=0$.

Ⓐ $\begin{cases} b=2 \\ c=-5 \end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases} b=2 \\ c=5 \end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases} b=-2 \\ c=-5 \end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases} b=-2 \\ c=5 \end{cases}$

Lời giải: Ta có $(8+16i)^2+8b(8+16i)+64c=0 \Leftrightarrow 64(b+c-3)+128(2+b)i=0$.

Suy ra $\begin{cases} b+c=3 \\ b=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2 \\ c=5 \end{cases}$. □

Câu 94. **dai5:k94** [K,D4] Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i|=|(1-i)z|$.

Ⓐ $x^2+(y-1)^2=1$ Ⓑ $x^2+(y-1)^2=2$
Ⓒ $(x-1)^2+y^2=2$ Ⓓ $(x-1)^2+y^2=1$

Lời giải: Giả sử $z=x+yi$ $(x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R})$.Khi đó:

$$\begin{aligned}
&|z+i|=|(1-i)z| \Leftrightarrow |x+yi+i|=|(1-i)(x-yi)|\\
\Leftrightarrow\ &|x+(y+1)i|=|x-y+(x+y)i|\\
\Leftrightarrow\ &x^2+(y+1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\\
\Leftrightarrow\ &2y+1=x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2.
\end{aligned}$$

□

Câu 95. **dai5:k95** [K,D4] Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-2z^2-8=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi A, B, C, D lần lượt là bốn điểm biểu diễn bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 đó. Tính giá trị của $P=OA+OB+OC+OD$, trong đó O là gốc tọa độ.

Ⓐ $P=4$ Ⓑ $P=2+\sqrt{2}$ Ⓒ $P=2\sqrt{2}$ Ⓓ $P=4+2\sqrt{2}$

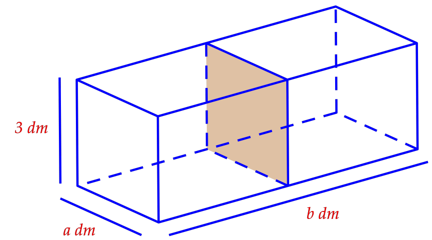
Lời giải: □

Câu 96. **dai5:k96** [K,D4] Cho số phức $z=a+bi$ với a, b là hai số thực khác 0. Một phương trình bậc hai với hệ số thực nhận $\bar{z}$ làm nghiệm với mọi a, b là:

Ⓐ $z^2=a^2-b^2+2abi$ Ⓑ $z^2=a^2+b^2$
Ⓒ $z^2-2az+a^2+b^2=0$ Ⓓ $z^2+2az+a^2-b^2=0$

Lời giải:
Ta có z và $\bar{z}$ là nghiệm của phương trình bậc hai hệ số thực.
Ta thấy $z+\bar{z}=2a, z.\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ chọn C. □

Câu 97. **dai5:k97** [K,D4] Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72dm^3$ và chiều cao là $3dm$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) chư hình vẽ. Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



(A) $a = \sqrt{24}, b = \sqrt{24}$ (B) $a = 3, b = 8$
(C) $a = 3\sqrt{2}, b = 4\sqrt{2}$ (D) $a = 4, b = 6$

Lời giải:
Ta có $3.ab = 72 \Leftrightarrow ab = 24$.
Ta có $S_{\text{kính}} = ab + 3[2(a+b)] + 3a = 9a + 6b + 24$.
Ta có $9a + 6b \geq 6\sqrt[6]{(3a)^3(2b)^3} = 72$.
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ ab = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 98. **dai5:k98** [K,D4] Cho z là số phức thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị của $z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}}$.

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

Lời giải:
Ta có $z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Ta có dạng lượng giác $z = cos\theta + i\sin\theta, \theta \in \{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\}$.
Ta thấy $z^{2017} = \cos 2017\theta + i \sin 2017\theta = \cos\theta + i\sin\theta = z$
Do vậy, $z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}} = z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow$ chọn C.
Cách khác:
Ta thấy $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1 \Rightarrow z^{2017} = z \Rightarrow z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}} = 1$. □

Câu 99. **dai5:k99** [K,D4] Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị của $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$.

(A) $P = 1$ (B) $P = 0$ (C) $P = -1$ (D) $P = 2$

Lời giải: Phương trình đã cho có hai nghiệm $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Ta thấy
$$z_1^3 = z_2^3 = 1,$$
nên do $2017 = 672.3 + 1$, ta có
$$P = (z_1^3)^{672}.z_1 + (z_2^3)^{672}.z_2 = z_1 + z_2 = -1.$$
□

§2. Câu vận dụng cao môn Giải tích

Câu 1. **dai5:g01** [G,D1] Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

(A) $m = -1$ (B) $m = 3$ (C) $m = -3; m = 1$ (D) $m = -1; m = 3$

Lời giải: Ta có $y' = x^2 + 6(m-1)x + 9$

Theo đề bài có có y' có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 108 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 108$

$\Leftrightarrow 36(m-1)^2 - 36 = 108 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} m & = & 3 \\ m & = & -1 \end{array}\right.$

Thử lại đúng. □

Câu 2. **dai5:g02** [G,D1] Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 0$ bằng nhau và khác 0 thì

(A) $f(0) < \frac{1}{4}$ (B) $f(0) \leq \frac{1}{4}$ (C) $f(0) > \frac{1}{4}$ (D) $f(0) \geq \frac{1}{4}$

Lời giải: Ta có $f'(0) = g'(0) = \frac{f'(0).g(0) - f(0).g'(0)}{(g(0))^2} \Rightarrow \frac{g(0) - f(0)}{(g(0))^2} = 1$

Suy ra phương trình $t^2 - t + f(0) = 0$ có nghiệm $t = g(0)$. Hay $\Delta = 1 - 4f(0) \geq 0 \Rightarrow f(0) < \frac{1}{4}$ □

Câu 3. **dai5:g03** [G,D1] Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là:

(A) $3\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

Lời giải: Giao của hai đường tiệm cận là $I(-1; 1)$.

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M là

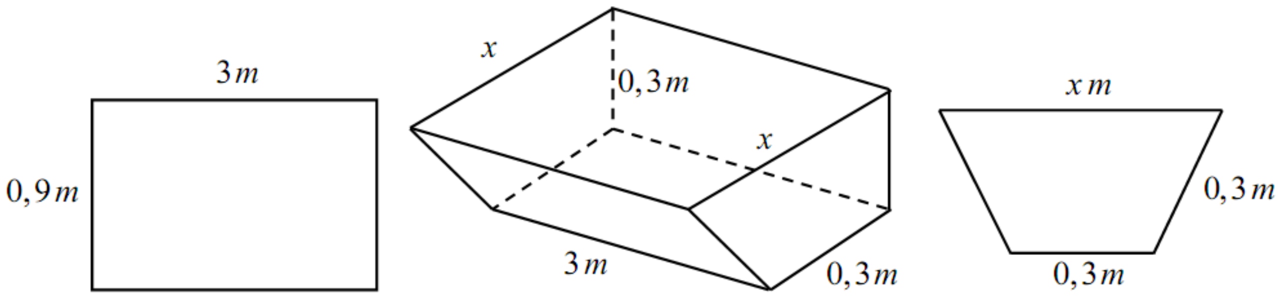
$$y = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0+1} \quad (\Delta).$$

Khoảng cách từ I đến Δ là $d = 2\left|\frac{(x_0+1)}{\sqrt{(x_0+1)^4+1}}\right| \leq 2\left|\frac{(x_0+1)}{\sqrt{2(x_0+1)^2}}\right| = \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = -2$.

Vậy giá trị lớn nhất d là $\sqrt{2}$ □

Câu 4. **dai5:g04** [G,D1] Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới biết mặt cắt của máng xối (bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất ?



(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt

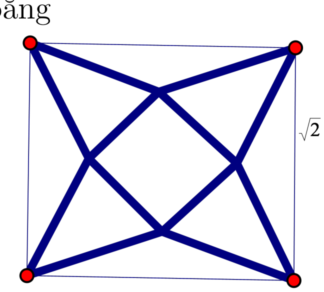
Ⓐ $x = 0,5m$. Ⓑ $x = 0,65m$. Ⓒ $x = 0,4m$. Ⓓ $x = 0,6m$.

Lời giải: Đặt $x = 0,3 + 2a$ với $-0,3 < a < 0,3$.
Khi đó chiều cao của mặt cắt (hình thang cân) là $h = \sqrt{(0,3)^2 - a^2}$.
Diện tích của mặt cắt: $S = \dfrac{1}{2}(0,3 + 0,3 + 2a)\sqrt{(0,3)^2 - a^2} = (0,3 + a)\sqrt{(0,3)^2 - a^2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[4]{(0,3+a)(0,3+a)(0,3+a)(0,3+a)}\right)^2 \\ &\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{(0,3+a)+(0,3+a)+(0,3+a)+(0,3+a)}{4}\right)^2 \\ &= \frac{0,81}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $0,3 + a = 0,9 - 3a \iff a = 0,15$.
Thể tích máng xối lớn nhất $\iff S$ lớn nhất $\iff a = 0,15\text{m} \iff x = 0,6\text{m}$. □

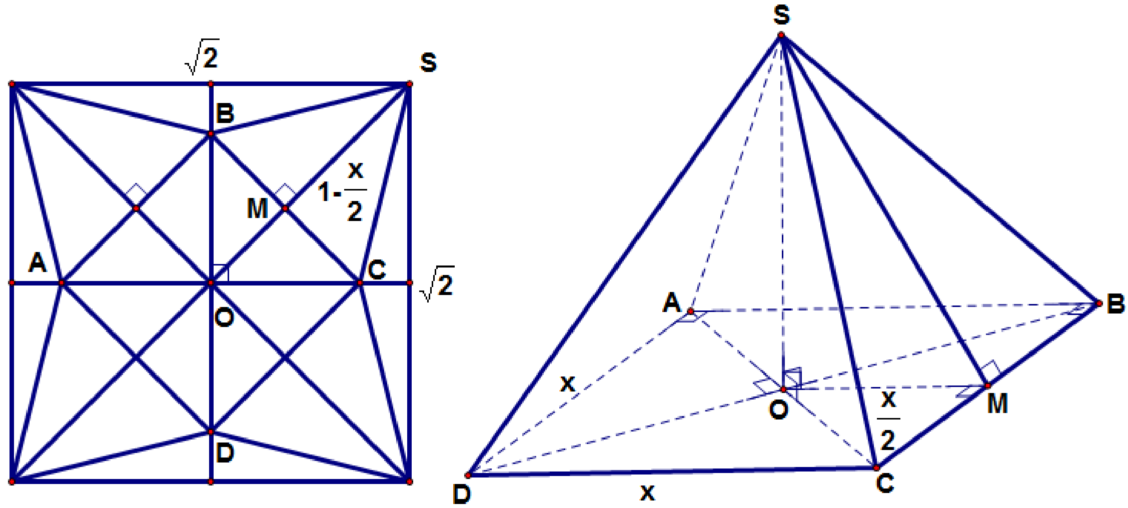
Câu 5. **dai5:g05** [G,D1] Người ta cắt một tờ giấy hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{2}$ để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp. Tính cạnh đáy của khối chóp để thể tích của nó lớn nhất.



Ⓐ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ Ⓑ $\dfrac{2}{5}$

Ⓒ 1 Ⓓ $\dfrac{4}{5}$

Lời giải:



Gọi độ dài đáy của hình chóp là x, với $0 < x < 1$. Đường cao của hình chóp là

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{1-x}.$$

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4 - x^5}$. Xét hàm $f(x) = x^4 - x^5$, với $x \in (0,1)$. Khi đó

$$f'(x) = 4x^3 - 5x^4 = x^3(4-5x).$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{4}{5}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{4}{5}\right)$	$\searrow$	1

Như vậy để thể tích khối chóp lớn nhất thì $x = \frac{4}{5}$. □

Câu 6. dai5:g06 [G,D1] Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x} - 2x^2}{\sqrt{x}+1}$. Khi đó giá trị của $M - m$ là:

Ⓐ -2 Ⓑ -1 Ⓒ 1 Ⓓ 2

Lời giải: Tập xác định $D = [0; 1]$

Ta có $y' = \dfrac{[\sqrt{1-x} - 2x^2]'(\sqrt{x}+1) - [\sqrt{x}+1]'(\sqrt{1-x} - 2x^2)}{(\sqrt{x}+1)^2}$

Ta được $y' = -\dfrac{1 + \sqrt{x} + 6x^2\sqrt{1-x} + 8x\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}(\sqrt{x}+1)^2} < 0\ \forall x \in (0; 1)$.

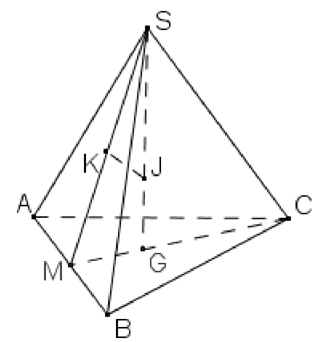
Do vậy $M - m = y(0) - y(1) = 2 \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 7. **dai5:g07** [G,D1] Cho một mặt cầu có bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng bằng bao nhiêu?

(A) $\min V = 4\sqrt{3}$ (B) $\min V = 8\sqrt{3}$ (C) $\min V = 9\sqrt{3}$ (D) $\min V = 16\sqrt{3}$

Lời giải:

Xét hình chóp đều $S.ABC$ ngoại tiếp mặt cầu đã cho. Gọi J là tâm của mặt cầu và G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó, ta luôn có J thuộc đoạn SG và $JG \perp (ABC)$.
Gọi M là trung điểm của cạnh AB thì ta có $AB \perp (SGM)$. Kẻ $JK \perp SM$ ta cũng có $JK \perp (SAB)$, từ đây suy ra $JK = JG = 1$.
Đặt x, h lần lượt là độ dài cạnh đáy và chiều cao của hình chóp $S.ABC$. Ta có



$$\frac{SJ}{SA} = \frac{JK}{GM} \Leftrightarrow \frac{h-1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{x\sqrt{3}}{6}}.$$

Từ phương trình này, bình phương hai vế ta thu được liên hệ $h = \dfrac{2x^2}{x^2-12}$. Theo đó suy ra $x > \sqrt{12}$ và ta có

$$V = \frac{1}{3}.\frac{2x^2}{x^2-12}.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Ta có

$$V' = \frac{2}{4\sqrt{3}}.\frac{4x^2(x^2-12) - 2x.x^4}{(x^2-12)^12},\ V' = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{6}.$$

Trên $(\sqrt{12}; +\infty)$, thấy V' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $2\sqrt{6}$ nên thu được

$$\min V = V\left(2\sqrt{6}\right) = 8\sqrt{3}.$$

□

Câu 8. **dai5:g08** [G,D1] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m^2-1)x^4 - 2mx^2$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(A) $m \le -1$.

(B) $m = -1$ hoặc $m > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(C) $m \le -1$ hoặc $m \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(D) $m \le -1$ hoặc $m > 1$.

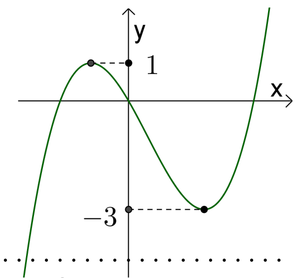
Lời giải: Ta có $y' = 4(m^2-1)x^3 - 4mx$

- Với $m = -1 \Rightarrow y' = 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- Với $m = 1 \Rightarrow y' = -4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ nên hàm số không đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- Với $m \ne 1$ để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ thì $\left[(m^2-1)x^2 - m\right]x \ge 0;\ \forall x \in (1; +\infty)$.

Hay $(m^2-1)x^2 \ge m \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ m^2 - 1 \ge m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m < -1. \end{array}\right.$

Kết hợp ta có $\left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m \leq -1. \end{array}\right.$ □

Câu 9. dai5:g09 [G,D1] Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:



Ⓐ $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
Ⓑ $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
Ⓒ $m = -1$ hoặc $m = 3$.
Ⓓ $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải: Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến trên trục Oy m đơn vị.
Để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x) + m$ xảy ra hai trường hợp sau:

- Nằm phía trên trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương.
- Nằm phía dưới trục hoành hoặc điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực tiểu dương.

Khi đó $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$ là giá trị cần tìm. □

Câu 10. dai5:g10 [G,D1] Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(x^2 + y^2\right) + 15xy$ là:

Ⓐ $\min P = -83$.
Ⓑ $\min P = -63$.
Ⓒ $\min P = -80$.
Ⓓ $\min P = -91$.

Lời giải: Ta có:

$$x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{x-3}\sqrt{y+3} \geq 4(x+y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 0 \end{array}\right.$$

Mặt khác $x + y = 2\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3}\right) \leq 2\sqrt{2(x+y)} \Leftrightarrow x + y \leq 8 \Rightarrow x + y \in [4; 8]$.
Xét biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy$ và đặt $t = x + y \in [4; 8] \Rightarrow P = 4t^2 + 7xy$.
Lại có $(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9 \Rightarrow P \geq 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63 = 4t^2 - 21t - 63$.
Xét hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$ trên đoạn $[4; 8]$ suy ra $P_{\min} = f(7) = -83$ □

Câu 11. dai5:g11 [G,D2] Giải phương trình $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$. Một học sinh là như sau:

Bước 1. Điều kiện $\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 4 \end{cases}$ $(*)$

Bước 2. Phương trình đã cho tương đương với $2\log_3(x-2) + 2\log_3(x-4) = 0$

Bước 3. Hay là: $\log_3(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}$.

Đối chiếu điều kiện (*), suy ra phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào?

Ⓐ Sai ở bước 1
Ⓑ Sai ở bước 2
Ⓒ Sai ở bước 3
Ⓓ Đúng

Lời giải: Sai ở bước 2 vì với ĐK $2 < x \neq 4$ thì $x - 4$ vẫn có thể âm nên không thể cho 2 xuống luôn mà cần có thêm dấu $|x-4|$. □

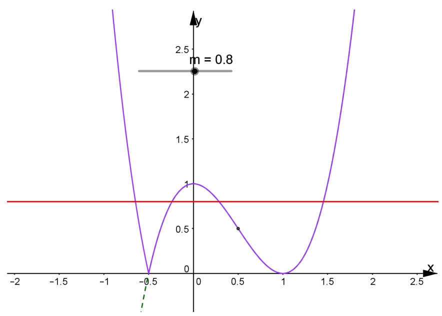
Câu 12. **dai5:g12** [G,D2] Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \dfrac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi

A $\dfrac{1}{2} < m < 1$. **B** $\dfrac{1}{2} \leq m < 1$. **C** $0 < m < 1$. **D** $0 < m \leq 1$.

Lời giải: Từ bảng biến thiên ta được các thông tin và phác họa được hàm số đó là $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Suy ra được đồ thị hàm số $y = |2x^3 - 3x^2 + 1|$ như sau



Suy ra giá trị m cần tìm là $\dfrac{1}{2} < m < 1$. □

Câu 13. **dai5:g13** [G,D2] Ông A mua một chiếc xe Ô tô với giá 690 triệu đồng theo hình thức trả góp. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất Ông A trả 20 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,7%/ tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng Ông A trả hết số tiền trên?

A 42 tháng **B** 38 tháng **C** 40 tháng **D** 36 tháng

Lời giải: Đặt $a = 1,007\ (= 1 + \dfrac{0,7}{100}), b = 20$.

Tiền lãi tháng đầu tiên là: $690.\dfrac{0,7}{100}$.

Cuối tháng thứ 1, số tiền còn lại là (tính bằng triệu đồng): $690a - b$.

Cuối tháng thứ 2, số tiền còn lại là (tính bằng triệu đồng): $690a^2 - b(a+1)$.

Cuối tháng thứ 3, số tiền còn lại là (tính bằng triệu đồng): $690a^3 - b(a^2 + a + 1)$.

. . . .

Cuối tháng thứ n, số tiền còn lại là (tính bằng triệu đồng): $690a^n - b(a^{n-1} + \cdots + a + 1)$.
Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} & 690a^n - b(a^{n-1} + \cdots + a + 1) = 0 \Leftrightarrow 690a^n = \frac{b\left(a^n - 1\right)}{a-1} \\ \Leftrightarrow & 690a^n(a-1) = b.a^n - b \Leftrightarrow a^n = \frac{-b}{690(a-1) - b} \\ \Leftrightarrow & n = \log_a \frac{b}{b - 690(a-1)}. \end{aligned}$$

Thay a, b ở trên, ta được: $n = 39,62 \approx 40$. Vậy sau 40 tháng thì Ông A trả hết nợ. □

Câu 14. dai5:g14 [G,D2] Cho $a = \log_4 3; b = \log_{25} 2$. Hãy tính $\log_{60} \sqrt{150}$ theo a, b.

A $\log_{60} \sqrt{150} = \frac{1}{2}.\frac{2 + 2b + ab}{1 + 4b + 2ab}$

B $\log_{60} \sqrt{150} = \frac{1 + b + 2ab}{1 + 4b + 4ab}$

C $\log_{60} \sqrt{150} = \frac{1}{4}.\frac{1 + b + 2ab}{1 + 4b + 2ab}$

D $\log_{60} \sqrt{150} = 4.\frac{1 + b + 2ab}{1 + 4b + 4ab}$

Lời giải: Ta có:

$$\log_{60} \sqrt{150} = \frac{1}{2} \frac{\log_{25} 150}{\log_{25} 60} = \frac{1}{2} \frac{\log_{25} 25 + \log_{25} 2 + \log_{25} 3}{\log_{25} 5 + \log_{25} 4 + \log_{25} 3} = \frac{1 + \log_{25} 2 + 2\log_4 3.\log_{25} 2}{2\log_{25} 5 + 4\log_{25} 2 + 4\log_4 3.\log_{25} 2} = \frac{1 + b + 2ab}{1 + 4b + 4ab}$$

□

Câu 15. dai5:g15 [G,D2] Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình sau: $2^x + 2.3^x - 5^x + 3 > 0; \log_2(x+2) \leq -2; \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 1}\right)^x > 1$. Tìm khẳng định **đúng**?

A $S_1 \subset S_3 \subset S_2$

B $S_2 \subset S_1 \subset S_3$

C $S_1 \subset S_2 \subset S_3$

D $S_2 \subset S_3 \subset S_1$

Lời giải: Ta có: $2^x + 2.3^x - 5^x + 3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + 2.\left(\frac{3}{5}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^x > 1$.

Ta thấy vế trái nghịch biến mà $f(2) = 1$ nên $f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow S_1 = (-\infty; 2)$.

Ta có: $\log_2(x+2) \leq -2 \Leftrightarrow 0 < x + 2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -2 < x < -\frac{7}{4} \Rightarrow S_2 = \left(-2; -\frac{7}{4}\right]$

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^x > \left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow S_3 = (-\infty; 0)$.

Vậy $S_2 \subset S_3 \subset S_1$. □

Câu 16. dai5:g16 [G,D2] Tìm m để phương trình $m\ln(1-x) - \ln x = m$ có nghiệm $x \in (0; 1)$

A $m \in (0; +\infty)$

B $m \in (1; e)$

C $m \in (-\infty; 0)$

D $m \in (-\infty; -1)$

Lời giải:

Ta có $m\ln(1-x) - \ln x = m \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln(1-x) - 1} = m$ (1).

Xét $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln(1-x)-1}$, $x\in(0;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'[\ln(1-x)-1]-[\ln(1-x)-1]'(\ln x)}{(\ln(1-x)-1)^2}=\dfrac{(1-x)[\ln(1-x)-1]+x\ln x}{x(1-x)[\ln(1-x)-1]^2}$

Ta thấy $f'(x)<0\ \forall x\in(0;1)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$

Phương trình (1) có nghiệm $x\in(0;1)\Leftrightarrow m\in(0;+\infty)$. Chọn A. □

Câu 17. **dai5:g17** [G,D2] Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^{\sqrt{2x}+1}-3^{x+1}\le x^2-2x$ là:

A $[0;+\infty)$ **B** $[0;2]$ **C** $[2;+\infty)$ **D** $[2;+\infty)\cup\{0\}$

Lời giải:

Điều kiện $x\ge 0,(*)$.

Ta thấy $3^{\sqrt{2x}+1}-3^{x+1}\le x^2-2x\Leftrightarrow 3^{\sqrt{2x}+1}+2x\le 3^{x+1}+x^2$, (1).

Xét $f(t)=3^{t+1}+t^2, t\ge 0$. Ta thấy $f'(t)=3^{t+1}\ln 3+2t>0,\ \forall t\ge 0$.

Từ (1) ta được $f(\sqrt{2x})\le f(x)\Rightarrow\sqrt{2x}\le x\Leftrightarrow x^2-2x\ge 0,(2)$.

Từ $(*),(2)$ ta được $x=0\vee x\ge 2$. Chọn D. □

Câu 18. **dai5:g18** [G,D2] Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x+\ln y\ge\ln(x^2+y)$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

A $P=6$ **B** $P=3+2\sqrt{2}$ **C** $P=2+3\sqrt{2}$ **D** $P=\sqrt{17}+\sqrt{3}$

Lời giải:

- Trường hợp $0<x\le 1$ ta có $\ln x\le 0$ do đó suy ra $\ln y\ge\ln(x^2+y)$ (vô lí!)
- Xét $x>1$, từ giả thiết ta có $\ln xy\ge\ln(x^2+y)$ hay tương đương

$$xy\ge x^2+y\Leftrightarrow y\ge\frac{x^2}{x-1}.$$

Vậy thì $x+y\ge x+\dfrac{x^2}{x-1}$. Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ ta có

$$f'(x)=1+\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2},\quad f'(x)=0\Leftrightarrow x=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\min f(x)=f\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3+2\sqrt{2}$.

□

Câu 19. **dai5:g19** [G,D2] Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm phân biệt.

A $-1 < m \neq 0$. **B** $m > -1$. **C** Không tồn tại m. **D** $-1 < m < 0$.

Lời giải:
Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ \log_3(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Xét hàm số $y = x - \dfrac{2}{\log_3(x+1)}$. Khi đó ta có:

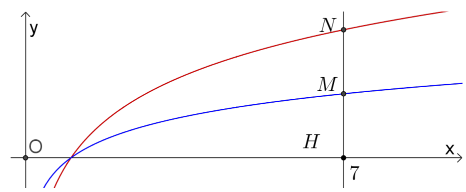
$$y' = 1 + \frac{2\left[\log_3(x+1)\right]'}{\log_3^2(x+1)}$$
$$= 1 + \frac{2}{(\ln 3)(x+1)\log_3^2(x+1)} > 0 \quad (\forall x > -1).$$

x	-1		0		$+\infty$
y'	‖	$+$	‖	$+$	
y	‖ -1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm khi $m > -1$. □

Câu 20. **dai5:g20** [G,D2]

Cho hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại H, M và N. Biết rằng $HM = MN$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A $a = 7b$. **B** $a = b^2$. **C** $a = b^7$. **D** $a = 2b$.

Lời giải: Dựa vào hình vẽ ta thấy $HM = MN \Leftrightarrow NH = 2MH \Leftrightarrow \log_b 7 = 2\log_a 7 \Leftrightarrow a = b^2$. □

Câu 21. **dai5:g21** [G,D2] Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ Trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $2°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm $5°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t°C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\,\%$ thì $f(t) = k.a^t$, trong đó k, a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu $°C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?

A 8,40C **B** 9,30C **C** 7,60C **D** 6,70C

Lời giải: Ta có $\begin{cases} k.a^2 = 3\% \\ k.a^5 = 10\% \end{cases}$ (1)

Ta cần tìm t sao cho $k.a' = 20\%$.

Từ (1) $\Rightarrow k = \dfrac{3\%}{a^2}$ và $a^3 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{10}{3}}$

$$\Rightarrow \frac{3\%}{a^2}.a^t = 20\% \Rightarrow a^{t-2} = \frac{20}{3} \Rightarrow t - 2 = \log_a \frac{20}{3} \Rightarrow t = 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3} \simeq 6,7$$ □

Câu 22. **dai5:g22** [G,D3] Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$, $x = 1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x (với $0 \leq x \leq 1$) là một tam giác đều có cạnh là $4\sqrt{\ln(1+x)}$.

A. $V = 4\sqrt{3}\,(2\ln 2 - 1)$ B. $V = 4\sqrt{3}\,(2\ln 2 + 1)$
C. $V = 8\sqrt{3}\,(2\ln 2 - 1)$ D. $V = 16\pi\,(2\ln 2 - 1)$

Lời giải: Diện tích của thiết diện trong đề bài là $S = 4\sqrt{3}\ln(x+1)$.

Vậy thể tích của vật là: $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{3}\ln(x+1)\mathrm{d}x = 4\sqrt{3}\,(2\ln 2 - 1)$ □

Câu 23. **dai5:g23** [G,D3] Biết $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = a\ln 7 + b\ln 3 + c$ với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + 2b^2 + 3c^3$.

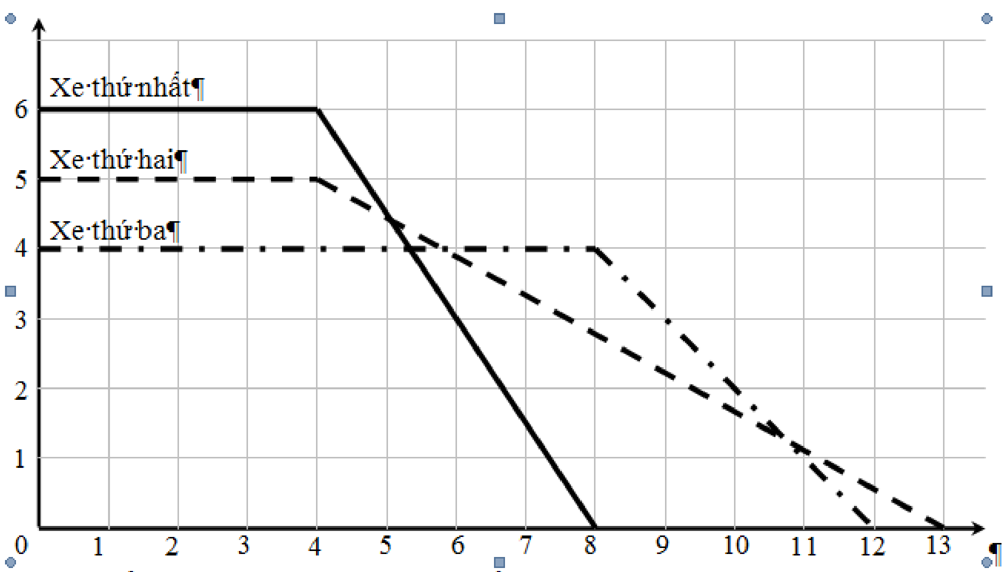
A. $T = 4$. B. $T = 6$. C. $T = 3$. D. $T = 5$.

Lời giải: Ta có:

$$I = \int_2^3 \left(1 + \frac{-2x+1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x = \int_2^3 \mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{\mathrm{d}\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1} = x|_2^3 - \ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_2^3 = -\ln 7 + \ln 3 + 1.$$

Do đó $a = -1; b = 1; c = 1$. Vậy $T = a + 2b^2 + 3c^3 = 4$. □

Câu 24. **dai5:g24** [G,D3] Tại một thời điểm t trước lúc đỗ xe ở trạm dừng nghỉ, ba xe đang chuyển động đều với vận tốc lần lượt là $60km/h; 50km/h$ và $40km/h$. Xe thứ nhất đi thêm 4 phút thì bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 8; xe thứ hai đi thêm 4 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 13, xe thứ hai đi thêm 8 phút, bắt đầu chuyển động chậm dần đều và dừng hẳn ở trạm tại phút thứ 12. Đồ thị biểu diễn vận tốc ba xe theo thời gian như sau: (đơn vị trục tung x $10km/h$, đơn vị trục hoành là phút). Giả sử tại thời điểm t trên, ba xe đang cách trạm lần lượt là d_1, d_2, d_3. So sánh các khoảng cách này.



(A) $d_1 < d_2 < d_3$ (B) $d_2 < d_3 < d_1$ (C) $d_3 < d_1 < d_2$ (D) $d_1 < d_3 < d_2$

Lời giải:
Ta có $v = v_0 - at, a > 0$.
Xe thứ 1:
Gia tốc $a = 60\dfrac{60}{4} = 900(km/h^2) \Rightarrow v = 60 - 900t$
Khoảng cách $d_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{4}{60}} (60 - 900t)dt + 60.\dfrac{4}{60} = 6(km)$.
Xe thứ 2:
Gia tốc $a = 50\dfrac{60}{9} = \dfrac{1000}{3}(km/h^2) \Rightarrow v = 50 - \dfrac{1000t}{3}$
Khoảng cách $d_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{9}{60}} (50 - \dfrac{1000t}{3})dt + 50.\dfrac{4}{60} = \dfrac{85}{12} \simeq 7.1(km)$.
Gia tốc $a = 40\dfrac{60}{4} = 600(km/h^2) \Rightarrow v = 40 - 600t$
Khoảng cách $d_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{4}{60}} (40 - 600t)dt + 40.\dfrac{8}{60} = \dfrac{20}{3} \simeq 6.7(km)$.
Chọn D. □

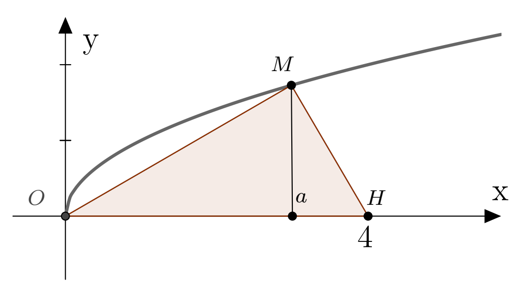
Câu 25. dai5:g25 [G,D3] Biết $F(x) = (ax + b)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $y = (2x + 3)e^x$. Khi đó $a + b$ là

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

Lời giải: Ta thấy $F'(x) = (ax + a + b)e^x \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 26. dai5:g26 [G,D3]

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x = a\,(0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó:

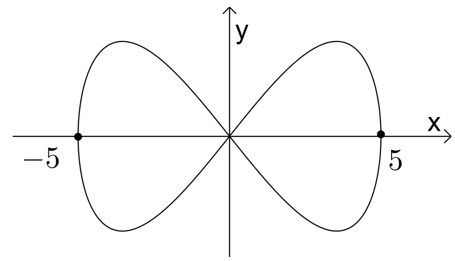


(A) $a = 2\sqrt{2}$. (B) $a = \dfrac{5}{2}$. (C) $a = 2$. (D) $a = 3$.

Lời giải: Ta có $V = \pi \displaystyle\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi \Rightarrow V_1 = 4\pi$.
Gọi N là giao điểm của đường thẳng $x = a$ và trục hoành.
Khi đó V_1 là thể tích tạo được khi xoay hai tam giác OMN và MNH quanh trục Ox với N là hình chiếu của M trên OH.
Ta có $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi a\left(\sqrt{a}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\pi(4 - a)\left(\sqrt{a}\right)^2 = \dfrac{4}{3}\pi a = 4\pi \Rightarrow a = 3$ □

Câu 27. **dai5:g27** [G,D3] Trong Công viên Toán học có những mảnh đất hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng

một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.



(A) $S = \dfrac{125}{6}(m^2)$ (B) $S = \dfrac{125}{4}(m^2)$ (C) $S = \dfrac{250}{3}(m^2)$ (D) $S = \dfrac{125}{3}(m^2)$

Lời giải: Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $x = 0; x = -5; x = 5$.
Diện tích mảnh đất Bernoulli bao gồm diện tích 4 mảnh đất nhỏ bằng nhau.
Xét diện tích s của mảnh đất nhỏ trong góc phần tư thứ nhất, ta có:

$$4y = x\sqrt{25 - x^2}; x \in [0; 5] \Rightarrow s = \frac{1}{4}\int\limits_0^5 x\sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{125}{12} \Rightarrow S = 4.\frac{125}{12} = \frac{125}{3}\ (m^2).$$

□

Câu 28. **dai5:g28** [G,D4] Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2 - 2z + 5\right| = \left|(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)\right|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.

(A) $\min|w| = \dfrac{3}{2}$. (B) $\min|w| = 2$. (C) $\min|w| = 1$. (D) $\min|w| = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải: Ta có:
$\left|z^2 - 2z + 5\right| = \left|(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)\right| \Leftrightarrow \left|(z - 1)^2 + 4\right| = \left|(z - 1 + 2i)\right|\left|(z + 3i - 1)\right|$
$\Leftrightarrow \left|(z - 1 + 2i)(z - 1 + 2i)\right| = \left|(z - 1 + 2i)\right|\left|(z + 3i - 1)\right| \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 1 + 2i = 0\ (1) \\ |z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1|\ \ (2) \end{array}\right.$.
Từ (1) $\Longrightarrow z = 1 - 2i \Longrightarrow w = -1 \Longrightarrow |w| = 1$.
Xét (2). Gọi $z = x + yi$.
Khi đó $|z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1| \Longleftrightarrow |(x - 1) + (y - 2)i| = |(x - 1) + (y + 3)i|$.
Ta được $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \Longleftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$.
Suy ra $w = (x - 2) + \dfrac{3}{2}i \Longrightarrow |w| = \sqrt{(x - 2)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} \geq \dfrac{3}{2} > 1$. □

Câu 29. **dai5:g29** [G,D4] Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$, đồng thời z có phần thực dương, phần ảo âm. Đặt $A = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $|A| \leq 1$ (B) $|A| \geq 1$ (C) $|A| < 1$ (D) $|A| > 1$

Lời giải: Đặt $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Do $|z| \le 1$ nên $a^2 + b^2 \le 1$.
Ta có: $|A| = \left|\dfrac{2z - i}{2 + iz}\right| = \left|\dfrac{2a + (2b-1)i}{2 - b + ai}\right| = \sqrt{\dfrac{4a^2 + (2b+1)^2}{(2-b)^2 + a^2}}$.
Ta chứng minh $\dfrac{4a^2 + (2b+1)^2}{(2-b)^2 + a^2} \le 1$.
Thật vậy, ta có: $\dfrac{4a^2 + (2b+1)^2}{(2-b)^2 + a^2} \le 1 \Leftrightarrow 4a^2 + (2b+1)^2 \le (2-b)^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \le 1$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a^2 + b^2 = 1$.
Vậy $|A| \le 1$. □

Câu 30. dai5:g30 [G,D4] Trong số các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 4 + 3i| = 3$, gọi z_0 là số phức có mô đun lớn nhất. Khi đó $|z_0|$ là:

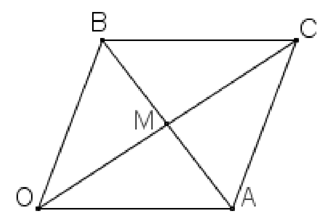
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 8

Lời giải:
Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.
Ta có $|z - 4 + 3i| = 3 \Leftrightarrow |(x-4) + (y+3)i| = 3 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$.
Ta được $|z|^2 = x^2 + y^2 = 8x - 6y - 16 = 8(x-4) - 6(y+3) + 34$.
Ta thấy $|8(x-4) - 6(y+3)| \le \sqrt{(8^2 + 6^2)[(x - 4^2) + (y+3)^2]} = 30$.
Ta được $2 \le |z| \le 8$.
Chọn D. □

Câu 31. dai5:g31 [G,D4] Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$?

(A) $P = 4\sqrt{6}$ (B) $P = 5 + 3\sqrt{5}$ (C) $P = 2\sqrt{26}$ (D) $P = 34 + 3\sqrt{2}$

Lời giải:
Trong mặt phẳng Oxy, gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2.
Ta có $OA = |z_1|, OB = |z_2|$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, ta có



$$\begin{cases} OM = \dfrac{1}{2}.|z_1 + z_2| = 5 \\ AB = |z_1 - z_2| = 2 \end{cases}$$

Theo công thức tính độ dài trung tuyến $OM^2 = \dfrac{OA^2 + OB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 52$.
Bây giờ sử dụng đánh giá Cauchy

$$|z_1| + |z_2| \le \sqrt{2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)} = 2\sqrt{26}.$$

Chọn C. □

Câu 32. dai5:g32 [G,D4] Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$, $w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

Lời giải: Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, khi đó $z + 2 - 2i = a + 2 + (b-2)i$ và $z - 4i = a + (b-4)i$.
Nên ta có $(a+2)^2 + (b-2)^2 = a^2 + (b-4)^2 \Leftrightarrow a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - a$.
Khi đó $w = iz + 1 = (a + bi)i + 1 = 1 - b + ai \Rightarrow |w| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (a-1)^2}$.
Ta có $a^2 + (a-1)^2 = 2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \geq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

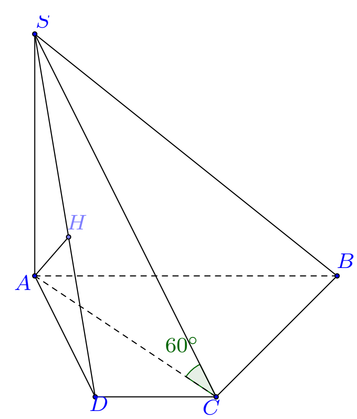
§3. Câu vận dụng môn Hình học

Câu 1. hih5:k01 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $AB = 2CD = 2AD$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Góc giữa SC và đáy bằng $60°$. Biết khoảng cách từ B đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{42}}{7}$, khi đó tỉ số $\frac{V_{S.ABCD}}{a^3}$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:

- Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC xuống $(ABCD)$ nên $\widehat{SCA} = 60°$.
- Do $AB \parallel (SCD)$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.
- Trong tam giác SAD dựng đường cao AH. Dễ thấy $AH \perp (SCD)$.
- Khi đó $AH = \frac{a\sqrt{42}}{7}$. Đặt $AD = DC = x \Rightarrow AB = 2x, AC = x\sqrt{2}$.
- Trong tam giác SAC có $SA = AC \tan 60° = x\sqrt{6}$.
- Trong tam giác SAD có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow x = a$.
- Ta có diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \frac{3a^2}{2}$.



- Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{V_{S.ABCD}}{a^3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. □

Câu 2. hih5:k02 [K,H1] Diện tích ba mặt của hình hộp chữ nhật bằng $20cm^2, 28cm^2, 35cm^2$. Thể tích của khối hộp đó bằng:

(A) $160cm^3$ (B) $190cm^3$ (C) $140cm^3$ (D) $165cm^3$

Lời giải: Gọi kích số đo các kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là x, y, z.

Khi đó ta có $\begin{cases} xy = 20 \\ yz = 28 \\ zx = 35 \end{cases} \Rightarrow V = xyz = \sqrt{20 \times 28 \times 35} = 140$. □

Câu 3. hih5:k03 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$ và SB hợp với đáy một góc $45°$. Xét hai câu sau:

(I) Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

(II) Tam giác SAB là tam giác cân.

Hãy chọn câu đúng.

A Chỉ (I) đúng B Chỉ (II) đúng C Cả (I) và (II) đúng D Cả (I) và (II) sai

Lời giải: Dễ thấy câu (II) đúng vì $\triangle SAM$ vuông tại A và có $\widehat{SBA}=45°$. Điều này kéo theo $SA=a$ nên $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ □

Câu 4. hih5:k04 [K,H1] Cho hình chóp tam giác đều đáy có cạnh bằng a, góc tạo bởi các mặt bên và đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là :

A $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$ C $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D $V=\dfrac{a^3}{8}$

Lời giải: Gọi H là hình chiếu của đỉnh lên đáy thì H là trọng tâm của đáy.

Gọi M là trung điểm một cạnh đáy thì ta có $HM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Theo giả thiết ta có đường cao của chóp bằng $HM.\tan 60°=\dfrac{a}{2}$. Vậy thể tích của chóp là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. □

Câu 5. hih5:k05 [K,H1] Cho hình chop $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, $SA=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng(ABC). Biết (P) là mặt phẳng qua A vuông góc với SB, diện tích thiết diện cắt bởi (P)và hình chóp là:

A $\dfrac{4a^2\sqrt{10}}{25}$ B $\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{15}$ C $\dfrac{8a^2\sqrt{10}}{25}$ D $\dfrac{4a^2\sqrt{6}}{15}$

Lời giải:

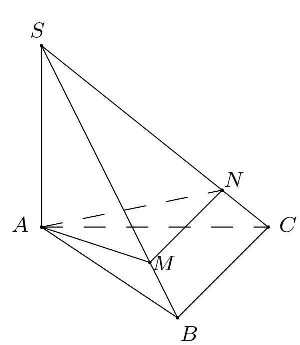
Giả sử (P) cắt SB,SC lần lượt tại MN, khi đó $MN\perp(SAB)$, suy ra $\triangle AMN$ vuông tại M.

Diện tích thiết diện là $S_{AMN}=\dfrac{MA.MN}{2}$.

Ta có $\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{5}{4a^2}\Rightarrow AM=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lại có $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{4}{5}$.

Suy ra $MN=\dfrac{4a\sqrt{2}}{5}$. Do đó $S_{AMN}=\dfrac{4a^2\sqrt{10}}{25}$.

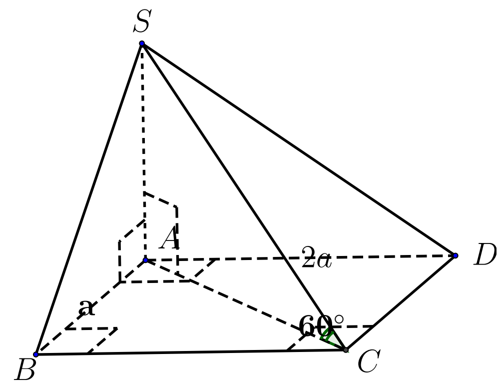


□

Câu 6. hih5:k06 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $BC=2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, cạnh SC tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. (B) $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. (C) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$ (D) $\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$

Lời giải:



Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$.
Suy ra hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC. Do đó góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}=60^0$.
Chiều cao của hình chóp là:

$$SA=AC\tan\widehat{SCA}=a\sqrt{5}\tan 60^0=a\sqrt{15}.$$

Thể tích khối chóp là:

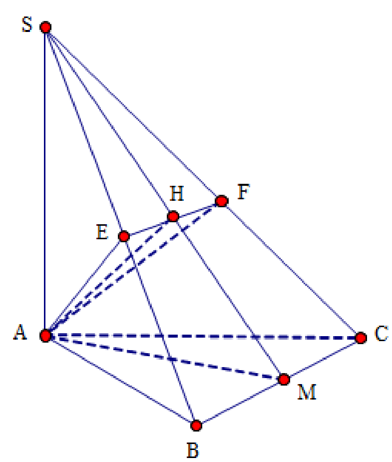
$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{15}.2a^2}{3}=\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}.$$

□

Câu 7. hih5:k07 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm BC. Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SM cắt SB, SC lần lượt tại E và F. Biết thể tích của khối chóp $S.AEF$ bằng $\dfrac{1}{4}$ thể tích của khối chóp $S.ABC$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3}{12}$ (B) $\dfrac{2a^3}{5}$ (C) $\dfrac{a^3}{2}$ (D) $\dfrac{a^3}{8}$

Lời giải:



Ta chứng minh được $EF//BC$. Ta có:

$$\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}}=\frac{SE}{SB}.\frac{SF}{SC}=\left(\frac{SH}{SM}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{SH}{SM}=\frac{1}{2}.$$

Do đó H là trung điểm SM. Suy ra tam giác SAM vuông cân tại A.
Từ đó $SA=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}.$$

□

Câu 8. hih5:k08 [K,H1] Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB=a$, $AC=2a$, $AD=3a$. Tính diện tích của tam giác BCD theo a.

(A) $\dfrac{5a^2}{2}$ (B) $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}$ (C) $\dfrac{7a^2}{2}$ (D) $\dfrac{7a^3}{2}$

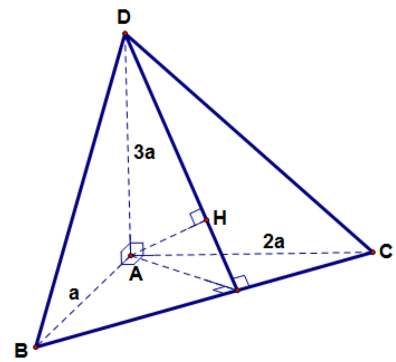
Lời giải:

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.AC.AD = a^3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (BCD). Ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{6a}{7}.$$

Ta có

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.S_{BCD}.AH \Rightarrow S_{BCD} = \frac{3V_{ABCD}}{AH} = \frac{7}{2}a^2.$$



□

Câu 9. hih5:k09 [K,H1] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = a, \widehat{SAB} = 45°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng:

(A) $\frac{3a}{4}$ (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3a}{2}$ (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Lời giải: Gọi K là trung điểm của SA. Kẻ $KI \perp SA$ cắt SO tại I⇒ I là tâm và SI là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp

$$SA = \frac{AN}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

và

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}AB\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$$

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = a^2 \Leftrightarrow AB = a\sqrt{6} \Rightarrow SA = \sqrt{3}a$$

ΔSKI đồng dang ΔSOA

$$\Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SK}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a$$

□

Câu 10. hih5:k10 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, SB = 3a, SC = 4a$. Độ dài đường cao SH của hình chóp bằng

(A) $\frac{14a}{13}$ (B) $7a$ (C) $\frac{12a}{13}$ (D) $\frac{13a}{12}$

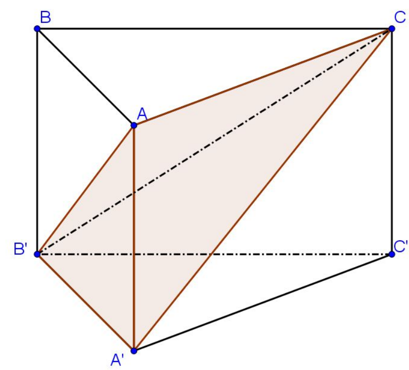
Lời giải: Áp dụng tính chất tứ diện vuông ta có $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{169}{144a^2} \Rightarrow SH = \frac{12a}{13}$ □

Câu 11. hih5:k11 [K,H1] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích khối tứ diện $ACA'B'$ là:

(A) $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. (B) $\frac{a^3}{6}$. (C) $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (D) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải:

Cách 1:



• Gọi V là thể tích khối lăng trụ. Ta có $V = V_{ACA'B'} + V_{CC'A'B} + V_{B'BAC}$.

• $V_{CC'A'B'} = \dfrac{1}{3}CC'.S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V$ và $V_{B'BAC} = \dfrac{1}{3}BB'.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}V$.

• Suy ra $V_{ACA'B'} = \dfrac{1}{3}V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Cách 2:

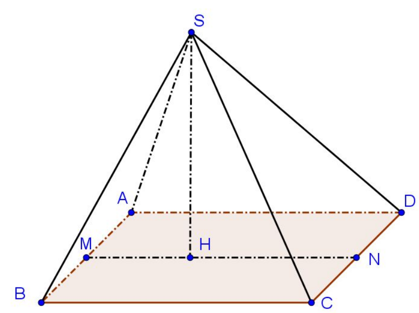
Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $CH \perp (AA'B')$, nên CH là đường cao của hình chóp. Ta có $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{AA'B'} = \dfrac{1}{2}a^2$.

Suy ra $V_{ACA'B'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. □

Câu 12. hih5:k12 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$ (B) $\dfrac{a^3}{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$

Lời giải:



• Gọi M, N lầ lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi H là hình chiếu của S trên MN. Ta có : $CD \perp (SMN) \Rightarrow CD \perp SH$ mà $SH \perp MN$ nên $SH \perp (ABCD)$.

• Xét $\triangle SMN$ có $Sm = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SN = \dfrac{a}{2}$, $MN = a$. Do đó $\triangle SMN$ vuông tại S.

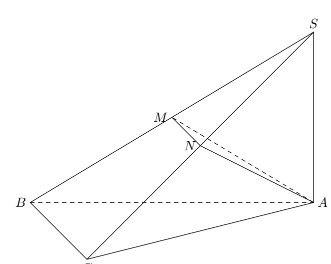
• Suy ra $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{SN^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

• $V = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. □

Câu 13. hih5:k13 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABC$ có (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy; cạnh bên SB tạo với đáy một góc $60°$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích của khối đa diện $ABMNC$?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$

Lời giải: Chọn D.



Ta có $\triangle SAB$ nửa đều $\Rightarrow SA = \sqrt{3}a$.

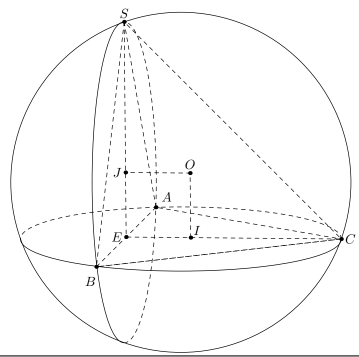
Thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}a\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $V_{MNABC} = \dfrac{3}{4}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. □

Câu 14. hih5:k14 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a diện tích xung quanh mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{5\pi a^2}{3}$ **B** $\dfrac{5\pi a^2}{6}$ **C** $\dfrac{\pi a^2}{3}$ **D** $\dfrac{5\pi a^2}{12}$

Lời giải:



Đặt $CE = x, SO = R$.

Ta có $R^2 = (\dfrac{2x}{3})^2 + (\dfrac{x}{3})^2 = \dfrac{5x^2}{9}$.

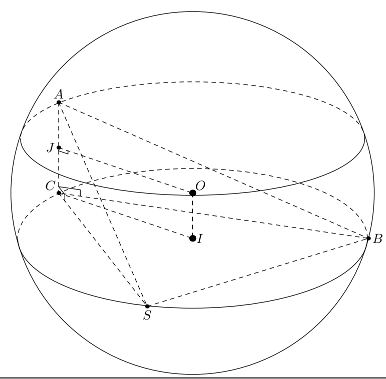
Ta có $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{mc} = \dfrac{5\pi a^2}{3}$.

Chọn A. □

Câu 15. hih5:k15 [K,H1] Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C với $CA = CB = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{5}$ và $SC = a\sqrt{2}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$?

A $\dfrac{a\sqrt{11}}{6}$ **B** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$ **C** $\dfrac{a\sqrt{11}}{3}$ **D** $\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$

Lời giải:



Từ giả thuyết, ta được $AC \perp (SBC)$.

Ta có $S_{\triangle SBC} = \dfrac{SC.BC.SB}{4CI} \overset{Heron}{=} \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow CI = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$.

Khi đó, $CO = \sqrt{CI^2 + \dfrac{AC^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}a$. Chọn B. □

Câu 16. hih5:k16 [K,H1] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AB = \sqrt{5}a$, $AC = a$. Cạnh $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A a^3. **B** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}a^3$. **C** $2a^3$. **D** $3a^3$.

Lời giải: Ta có $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2a$.

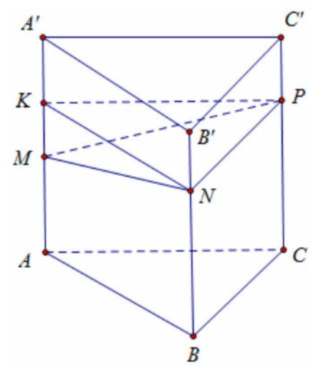
Do đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.3a.\dfrac{2a^2}{2} = a^3$. □

Câu 17. hih5:k17 [K,H1] Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng:

(A) $\frac{2}{3}V$ (B) $\frac{9}{16}V$ (C) $\frac{20}{27}V$ (D) $\frac{11}{18}V$

Lời giải:

- Gọi K là hình chiếu của P trên AA'.
- Khi đó $V_{ABC.KPN} = \frac{2}{3}V; V_{M.KPN} = \frac{1}{3}MK.S_{KNP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}AA'.S_{ABC} = \frac{1}{18}V$
- Do đó $V_{ABC.MNP} = \frac{2}{3}V - \frac{1}{18}V = \frac{11}{18}V$

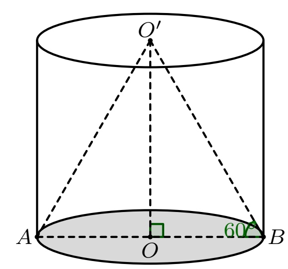


□

Câu 18. hih5:k18 [K,H2] Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;r)$ và $(O';r)$, S_2 là diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là O' và đáy là đường tròn $(O;r)$. Tính $\frac{S_1}{S_2}$, biết $OO' = r\sqrt{3}$.

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

Lời giải:



Nhận xét: $\triangle O'AB$ là tam giác đều nên $O'B = 2r$
Ta có $S_1 = 2\pi r.r\sqrt{3} = 2\pi r^2\sqrt{3}, S_2 = \pi r.2r = 2\pi r^2$
Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi r^2\sqrt{3}}{2\pi r^2} = \sqrt{3}$.

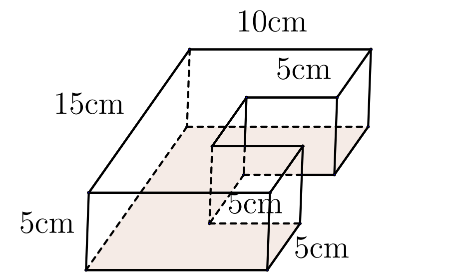
□

Câu 19. hih5:k19 [K,H2] Tính thể tích khối trụ biết diện tích xung quanh của nó là S và diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu có bán kính a.

(A) $\frac{1}{2}SA$ (B) SA (C) $2SA$ (D) $\frac{1}{3}SA$

Lời giải: Diện tích đáy mặt trụ $S_{\text{đáy}} = 4\pi a^2 = \pi(2a)^2$
Vậy bán kính đáy $R = 2a$. Diện tích xung quanh $S = 2\pi R.h \Rightarrow h = \frac{S}{2\pi R} = \frac{S}{2\pi.2a} = \frac{S}{4\pi a}$
Vậy thể tích $V = \pi R^2 h = \pi 4a^2.\frac{S}{4\pi a} = SA$. □

Câu 20. hih5:k20 [K,H2] Tính thể tích của khối đa diện ở hình bên



(A) $750cm^3$
(B) $625cm^3$
(C) $125cm^3$
(D) $875cm^3$

Lời giải: Thể tích khối đa diện đã cho bằng

$$V = 5.15.10 - 5.5.5 = 625\ (cm^3)$$

□

Câu 21. hih5:k21 [K,H2] Cho mặt cầu (S) có tâm I, bán kính $R = 5$. Một đường thẳng Δ cắt (S) tại 2 điểm M, N phân biệt nhưng không đi qua I. Đặt $MN = 2m$. Với giá trị nào của m thì diện tích tam giác IMN lớn nhất?

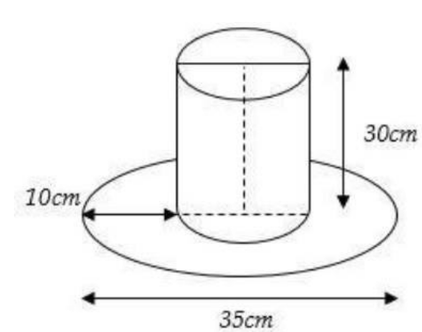
(A) $m = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (B) $m = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (C) $m = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $m = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Lời giải: Ta có

$$S_{IMN} = \frac{1}{2}IM.IN.\sin\widehat{MIN} = \frac{25}{2}\sin\widehat{MIN} \leq \frac{25}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\widehat{MIN} = 90^\circ$ hay khi tam giác IMN vuông cân. Khi đó $MN = IM\sqrt{2} \Rightarrow m = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. □

Câu 22. hih5:k22 [K,H2] Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



(A) $700\pi(cm^2)$ (B) $754,25\pi(cm^2)$ (C) $750,25\pi(cm^2)$ (D) $756,25\pi(cm^2)$

Lời giải: Ta có $S_{\text{vải}} = \left[\left(\dfrac{35}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{25}{2}\right)^2\right]\pi + 2\pi\left(\dfrac{15}{2}\right).30 = 700\pi$ □

Câu 23. **hih5:k23** [K,H2] Diện tích hình tròn lớn của hình cầu là S. Một mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo một đường tròn có bán kính r, diện tích $\dfrac{1}{2}S$. Biết bán kính hình cầu là R, khi đó r bằng

A $\dfrac{R\sqrt{2}}{4}$ B $\dfrac{R\sqrt{3}}{6}$ C $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ D $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

Lời giải: Từ giả thiết ta có $S = \pi R^2$ và $\dfrac{1}{2}S = \pi r^2$. Từ đó suy ra $r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. □

Câu 24. **hih5:k24** [K,H2] Người ta bỏ vào một chiếc hộp hình trụ ba quả bóng tennis hình cầu, biết rằng đáy hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả bóng và chiều cao của hình trụ bằng ba lần đường kính quả bóng, Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số diện tích $\dfrac{S_1}{S_2}$ là :

A 2 B 5 C $\dfrac{3}{2}$ D 1

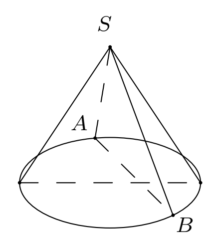
Lời giải: Gọi bán kính bóng là R thì diện tích $S_1 = 3.4\pi R^2 = 12R^2$.
Trụ có bán kính đáy là R và chiều cao $6R$ có diện tích $S_2 = 2\pi.R.6R = 12R^2$. Do đó tỉ số bằng 1. □

Câu 25. **hih5:k25** [K,H2] Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều cạnh $6a$. Một mặt phẳng qua đỉnh S của nón và cắt vòng tròn đáy tại Avà B. Biết số đo góc $\widehat{ASB}$ bằng 30^0, diện tích tam giác $\widehat{ASB}$ bằng:

A $18a^2$ B $16a^2$ C $9a^2$ D $10a^2$

Lời giải:

Ta giác SAB cân, có diện tích là $\dfrac{SA.SB.\sin 30^\circ}{2} = 9a^2$



□

Câu 26. **hih5:k26** [K,H2] Một hình hộp chữ nhật P nội tiếp trong một hình cầu có bán kính R. Tổng diện tích các mặt của P là 384 và tổng độ dài các cạnh của P là 112. Bán kính R của hình cầu là

A 8. B 14. C 12. D 10.

Lời giải: Gọi hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = a, AD = b, AA' = C$, tâm hai đáy lần lượt là O, O'.
Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là tâm hình hộp chữ nhật. Ta có $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Tổng diện tích các mặt $2ab + 2bc + 2ac = 384$.
Tổng độ dài các cạnh $4a + 4b + 4c = 112 \iff a + b + c = 28$.
Ta có $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \iff a^2 + b^2 + c^2 = 28^2 - 384 = 400$.
Vậy $R = \frac{1}{2}\sqrt{400} = 10$. □

Câu 27. **hih5:k27** [K,H2] Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có thể tích 64π (m^3). Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ làm ra ít tốn nhiên liệu nhất.

(A) $r = 3$ (m) (B) $r = \sqrt[3]{16}$ (m) (C) $r = \sqrt[3]{32}$ (m) (D) $r = 4$ (m)

Lời giải: Gọi hình trụ có chiều cao là h, độ dài đường sinh l, bán kính đáy r.
Ta có :

$$V = \pi.r^2.h \Rightarrow h = \frac{64\pi}{\pi.r^2} \Rightarrow l = \frac{64}{r^2}$$

Để tốn ít nhiên liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.
Ta có :

$$S_{tp} = 2.S_{day} + S_{xq} = 2\pi.r^2 + 2\pi.r.l = 2\pi.r^2 + \frac{128\pi}{r}$$

.
Xét hàm số

$$f(r) = 2\pi.r^2 + \frac{128\pi}{r}$$

với $r > 0$
Ta có :

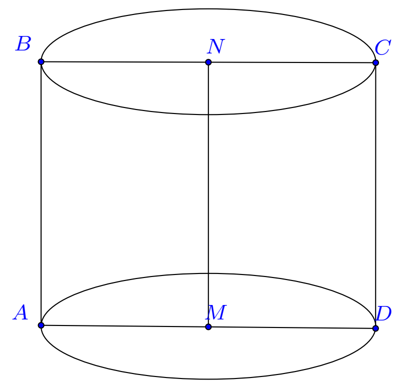
$$f'(r) = 4r\pi + \frac{128\pi}{r^2}; f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$$

Lập bảng biến thiên ta có $f(r)$ đạt GTNN khi $r = \sqrt[3]{32}$ □

Câu 28. **hih5:k28** [K,H2] Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1, AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó?

(A) 10π (B) 4π (C) 2π (D) 6π

Lời giải: B



$R=\frac{1}{2}AD=1;AB=1$

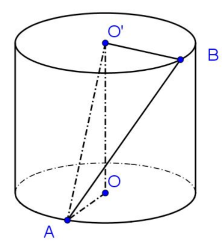
Diện tích toàn phần là :$2\pi R(R+AB)=2.\pi.1.(1+1)=4\pi$ □

Câu 29. **hih5:k29** [K,H2] Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $4cm$. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm Bsao cho $AB=4\sqrt{3}$. Thể tích khối tứ diện $AOO'B$ là:

(A) $\frac{32}{3}cm^3$ (B) $32cm^3$ (C) $\frac{64}{3}cm^3$ (D) $64cm^3$

Lời giải:

• $\triangle$ có $O'AB$ có $O'B=4, O'A=4\sqrt{2}, AB=4\sqrt{3}$ nên $O'B\perp O'A$.
• Lại có $OO'\perp O'B$ nên $O'B\perp(OAO')$. Do đó, O'B là đương cao của tứ diện.
• $S_{OAO'}=8\ (cm^2)$.
• $V_{B.OAO'}=\frac{1}{3}O'B.S_{OAO'}=\frac{32}{3}\ (cm^3)$.



□

Câu 30. **hih5:k30** [K,H2] Cần xẻ một khúc gỗ hình trụ có đường kính $d=40cm$ và chiều dài $h=3m$ thành một cái xà hình hộp chữ nhật có cùng chiều dài. Lượng gỗ bỏ đi tối thiểu xấp xỉ là:

(A) $0,014m^3$ (B) $0,14m^3$ (C) $1,4m^3$ (D) $4m^3$

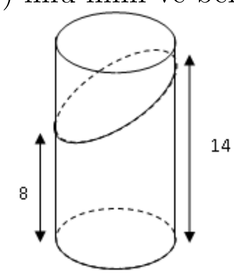
Lời giải: • Lượng gỗ bỏ đi nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ thể tích của xà lớn nhất.
• Do chiều cao của xà không đổi nên thể tích xà lớn nhất $\Leftrightarrow$ diện tích đáy lớn nhất $\Leftrightarrow$ đáy là hình vuông.
• Khi đó $V_{\text{gỗ bỏ}}=V_{\text{trụ}}-V_{hp}=\pi R^2h-h.\frac{1}{2}R^2\approx 0,14\ (m^3)$. □

Câu 31. **hih5:k31** [K,H2] Cho một hình nón có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng 60^0 Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

Ⓐ $S_{xq} = 4\pi a^2$ Ⓑ $S_{xq} = 2\pi a^2$ Ⓒ $S_{xq} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ Ⓓ $S_{xq} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2}{3}$

Lời giải: Diện tích xung quanh cho bởi $\pi rl = \pi.a.\dfrac{a}{\sin 30^\circ} = 2\pi a^2$. □

Câu 32. hih5:k32 [K,H2] Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng, ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ). Tính thể tích của (H).



Ⓐ $V_{(H)} = 176\pi$ Ⓑ $V_{(H)} = 275\pi$
Ⓒ $V_{(H)} = 192\pi$ Ⓓ $V_{(H)} = 704\pi$

Lời giải: Đáy của (H) có đường kính bằng

$$2R = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Thể tích của (H) bằng tổng thể tích của hai khối sau:

- Khối trụ có chiều cao bằng 8, bán kính đáy bằng 4.
- Một nửa khối trụ có chiều cao bằng 6, bán kính đáy bằng 4.

Vậy $V_{(H)} = \pi.4^2.8 + \dfrac{1}{2}\pi 4^2.6 = 176\pi$. □

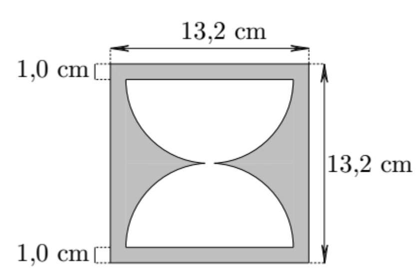
Câu 33. hih5:k33 [K,H2] Hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi của thiết diện qua trục bằng $10a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng:

Ⓐ $4\pi a^3$. Ⓑ $3\pi a^3$. Ⓒ πa^3. Ⓓ $5\pi a^3$.

Lời giải: Gọi $\ell = h$ là độ dài đường sinh của khối trụ.
Khi đó chu vi thiết diện qua trục là $C = 2(2r + \ell) = 2(2r + h) = 10a \Rightarrow h = 3a$.
Suy ra $V_T = \pi R^2 h = 3\pi a^3$. □

Câu 34. hih5:k34 [K,H2]

Một xưởng sản xuất muốn tạo ra những chiếc đồng hồ cát bằng thủy tinh có dạng hình trụ, phần chứa cát là hai nửa hình cầu bằng nhau. Hình vẽ bên với các kích thước đã cho là bản thiết kế thiết diện qua trục của chiếc đồng hồ này (phần tô màu làm bằng thủy tinh). Khi đó, lượng thủy tinh làm chiếc đồng hồ cát gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau



Ⓐ $711,6\,cm^3$. Ⓑ $1070,8\,cm^3$. Ⓒ $602,2\,cm^3$. Ⓓ $6021,3\,cm^3$.

Lời giải: Thể tích của hình trụ là $V_1 = \pi r^2 h = \pi 6,6^2.13,2cm^3 = 1806,39cm^3$.

Thể tích hình cầu chứa cát là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{13,2-2}{2}\right)^3 = 735,62cm^3$.

Vậy lượng thủy tinh cần phải làm là $V = V_1 - V_2 = 1070,77cm^3$. □

Câu 35. **hih5:k35** [K,H3] Tìm phương trình của mặt phẳng (P) biết (P) cắt các trục tọa độ tại 3 điểm A, B, C và đi qua điểm $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC.

A $2x+y+z-6=0$
B $x+2y+z-6=0$
C $x+2y+2z-6=0$
D $2x+y+z-6=0$

Lời giải: Mặt phẳng (P) qua $H\,(2;1;1)$ và có VTPT $\overrightarrow{n}\,(2;1;1)$

Vậy $(P): 2x+y+z-6=0$. □

Câu 36. **hih5:k36** [K,H3] Cho mặt phẳng (P) có hình chiếu của điểm O trên (P) là điểm $H(2;-1;-2)$ Tính số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có phương trình $x-y-6=0$.

A $30°$
B $45°$
C $60°$
D $90°$

Lời giải: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(2;1;-2)$ nên (P) có VTPT $\overrightarrow{n}_P = (2;-1;-2)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_Q = (1;-1;0)$.

Ta có $\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \frac{|\vec{n}_P.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P|.|\vec{n}_Q|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra góc giữa 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ bằng $45°$. □

Câu 37. **hih5:k37** [K,H3] Cho $A(4;0;3), B(0;5;2), C(4;-1;4), D(3;-1;6)$. Phương trình đường cao xuất phát từ D của tứ diện $ABCD$ là

A $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 6+2t \end{cases}$
B $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 6+t \end{cases}$
C $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 7+t \end{cases}$
D $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 6+2t \end{cases}$

Lời giải: Ta có $\overrightarrow{AB}\,(-4;5;-1)\,;\overrightarrow{AC}\,(0;-1;1)$

Gọi (Δ) là đường cao xuất phát từ D của tứ diện $ABCD$, ta có (Δ) qua $D\,(3;-1;6)$ và có VTCP $\overrightarrow{u} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (4;4;4)$ hay (Δ) nhận $\overrightarrow{u}\,(1;1;1)$ làm VTCP $\Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 6+t \end{cases}$ □

Câu 38. **hih5:k38** [K,H3] Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = 5+4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 7+3m \\ y = -2+2m \\ z = 1-2m \end{cases}$ là

(A) chéo nhau (B) cắt nhau (C) song song (D) trùng nhau

Lời giải: Đường thẳng d_1 qua $M_1(1;-2;5)$ nhận $\overrightarrow{u_1}=(2;-3;4)$ làm vtcp.
Đường thẳng d_2 qua $M_2(7;-2;1)$ nhận $\overrightarrow{u_1}=(3;2;-2)$ làm vtcp.
Ta có $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-2;16;13)$; $\overrightarrow{M_1M_2}=(6;0;-4)$, suy ra $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$. Vậy chúng chéo nhau. □

Câu 39. hih5:k39 [K,H3] Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A\,(1;\,1;\,1)\,,\ B\,(1;\,2;\,1)$, $C\,(1;\,1;\,2)\,,\ D\,(2;\,2;\,1)$. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có toạ độ là

(A) $(3;\,3;\,-3)$ (B) $\left(\frac{3}{2};\,-\frac{3}{2};\,\frac{3}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{3}{2};\,\frac{3}{2};\,\frac{3}{2}\right)$ (D) $(3;\,3;\,3)$

Lời giải: Nhận xét có $AC\perp(ABD)$ và $AB\perp BD$, nên I là trung điểm của CD. Vậy $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. □

Câu 40. hih5:k40 [K,H3] Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(6;-3;4), B(a;b;c)$ Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng toạ độ $(Oxy)\,,(Oxz)$ và (Oyz) Biết rằng M,N,P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$ giá trị của tổng $a+b+c$ là

(A) 11. (B) -11. (C) 17. (D) -17.

Lời giải: Ta có $A(6;-3;4), B(a;b;c)\Longrightarrow \overrightarrow{AB}=(a-6;b+3;c-4)$.
Do M,N,P nằm trên đoạn AB và $AM=MN=NP=PB$ nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}M\left(\frac{a+8}{4};\frac{b-9}{4};\frac{c+12}{4}\right)\\ N\left(\frac{a+6}{2};\frac{b-3}{2};\frac{c+4}{2}\right)\\ P\left(\frac{3a+6}{4};\frac{3b-3}{4};\frac{3c+4}{4}\right)\end{cases}$$

Do M,N,P lần lượt thuộc $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ nên $\begin{cases}\frac{c+12}{4}=0\\ \frac{b-3}{2}=0\\ \frac{3a+6}{4}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=3\\ c=-12\end{cases}$.

Vậy $a+b+c=-11$. □

Câu 41. hih5:k41 [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-8y-12z+7=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm $P\,(-4;1;4)$ có phương trình là

(A) $2x-5y-10z+53=0$. (B) $6x+3y+2z+13=0$.
(C) $8x+7y+8z-7=0$. (D) $9y+16z-73=0$.

Lời giải: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;6)$. Ta có $\overrightarrow{PI}=(6;3;2)$.
Vì (α) tiếp xúc với (S) tại P nên (α) qua P và có VTPT là $\overrightarrow{PI}$.
Phương trình $(\alpha):6x+3y+2z+13=0$. □

Câu 42. **hih5:k42** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$; $B(1;-3;1)$; $C(2;2;3)$. Mặt cầu đi qua 3 điểm $A;B;C$ và có tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy). Khi đó $a+b+c$ bằng:

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ -1 Ⓓ 3

Lời giải: Tâm $I(a;b;c) \in (Oxy) \Rightarrow I(a;b;0)$. Mặt cầu (S) có phương trình dạng:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by+d=0.$$

Do (S) đi qua $A(1;2;-4)$, $B(;-3;1)$; $C(2;2;3)$ nên ta có

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ d=-21 \end{cases} \Rightarrow I(-2;1;0).$$

Vậy $a+b+c=-1$. □

Câu 43. **hih5:k43** [K,H3] Cho điểm $M(-3;2;4)$, gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên trục Ox, Oy, Oz. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC).

Ⓐ $6x-4y-3z-12=0$ Ⓑ $3x-6y-4z+12=0$
Ⓒ $4x-6y-3z+12=0$ Ⓓ $4x-6y-3z-12=0$

Lời giải: D
Ta có $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;4)$. Sử dụng công thức phương trình mặt chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là:
$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x-6y-3z+12=0$
$\Rightarrow$ Mặt phẳng $4x-6y-3z-12=0$ song song với mp (ABC) □

Câu 44. **hih5:k44** [K,H3] Cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là:

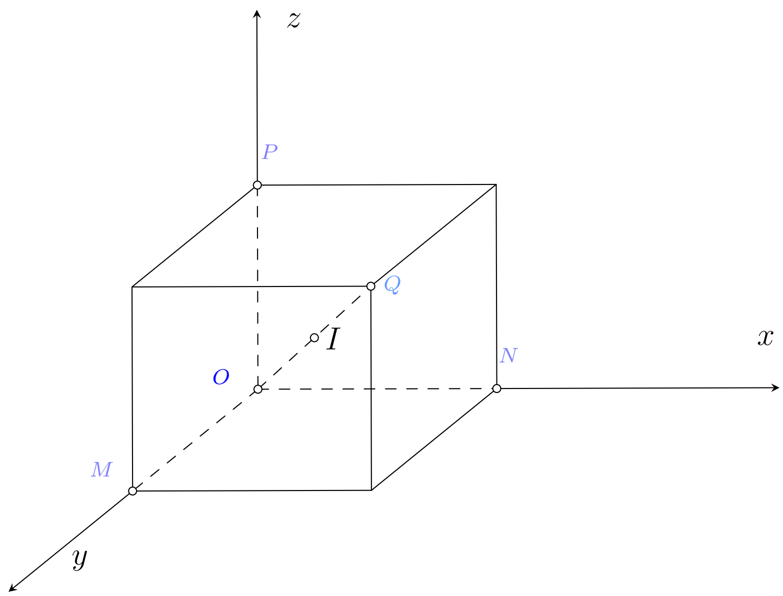
Ⓐ $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=0$ Ⓑ $x+y+z-6=0$
Ⓒ $3x+2y+z-14=0$ Ⓓ $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$

Lời giải: Tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông tại O. M là trực tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow OM \perp (ABC)$.
Vậy mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{OM}=(3,2,1)$ làm vectơ chỉ phương.
Phương trình mặt phẳng (P) là : $3(x-3)+2(y-2)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-14=0$ □

Câu 45. **hih5:k45** [K,H3] Gọi I là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$, $P(0;0;1)$, $Q(1;1;1)$. Tìm tọa độ tâm I.

Ⓐ $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ Ⓑ $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ Ⓒ $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ Ⓓ $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Lời giải:



Nhận xét: I là trung điểm của OQ suy ra $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. □

Câu 46. **hih5:k46** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-3z+2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách (P) một khoảng bằng $\dfrac{11}{2\sqrt{14}}$

A $-4x-2y+6z+7=0; 4x+2y-6z+15=0$ **B** $-4x-2y+6z-7=0; 4x+2y-6z+5=0$
C $-4x-2y+6z+3=0; 4x+2y-6z-15=0$ **D** $-4x-2y+6z+3=0; 4x+2y-6z-15=0$

Lời giải: Ta có: (Q) song song với (P) nên (Q) có dạng: $2x+y-3z+D=0$ với $D\neq 2$.
Lấy $M(-1;0;0)\in(P)$.
Ta có: $d[(P);(Q)]=\dfrac{11}{2\sqrt{14}} \Leftrightarrow d[M;(Q)]=\dfrac{11}{2\sqrt{14}} \Leftrightarrow \dfrac{|D-2|}{\sqrt{14}}=\dfrac{11}{2\sqrt{14}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2D=15 \\ 2D=-7 \end{array}\right.$. □

Câu 47. **hih5:k47** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a,b,c dương. Biết A,B,C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a,b,c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P).

A 2017 **B** $\dfrac{2014}{\sqrt{3}}$ **C** $\dfrac{2016}{\sqrt{3}}$ **D** $\dfrac{2015}{\sqrt{3}}$

Lời giải: Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng OA
Suy ra (α) đi qua điểm $D\left(\dfrac{a}{2},0,0\right)$ và có vtpt $\overrightarrow{OA}=(a,0,0)=a(1,0,0)\Rightarrow(\alpha): x-\dfrac{a}{2}=0$
Tương tự ta viết được mặt phẳng trung trực của OB, OC như sau: $(\beta): y-\dfrac{b}{2}=0$ của OB và $(\gamma): z-\dfrac{c}{2}=0$

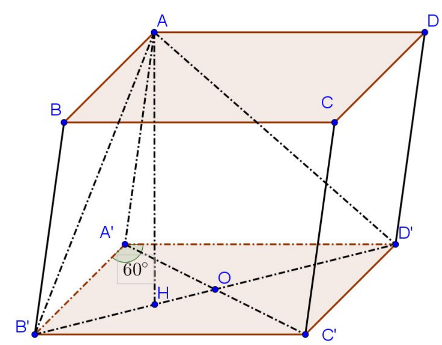
của OC.
Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC \Rightarrow I(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$
Theo giả thiết $a+b+c=2 \Rightarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=1 \Rightarrow I \in (P): x+y+z=1$ cố định.
$\Rightarrow d(M,(P)) = \dfrac{|2016-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{2015}{\sqrt{3}}$ □

Câu 48. **hih5:k48** [K,H3] Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{BAD}=60^\circ$, $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=120^\circ$. Thể tích hình hộp là:

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải:

• Từ giả thiết suy ra $\widehat{AA'B}=\widehat{AA'D'}=\widehat{B'A'D'}=60^\circ$.
Suy ra $AA'=A'B=A'D'=AB'=B'D'=D'A'$ nên tứ diện $AA'B'D'$ là tứ diện đều.
• $V=6V_{AA'B'D'}$.
• Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng $A'B'C'D'$, ta có H là trọng tâm $\triangle A'B'C'$.



$$AH=\sqrt{AB'^2-B'H^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

• $V_{AA'B'D'}=\dfrac{1}{3}AH.S_{A'B'C'}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{\dfrac{2}{3}}a.\dfrac{1}{2}a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

• Suy ra $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. □

Câu 49. **hih5:k49** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $S(1;2;3)$ và các điểm A,B,C thuộc các trục Ox,Oy,Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau. Thể tích hình chóp $S.ABC$ là

Ⓐ $\dfrac{343}{12}$ Ⓑ $\dfrac{343}{18}$ Ⓒ $\dfrac{343}{36}$ Ⓓ $\dfrac{343}{6}$

Lời giải: • Giả sử $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$.
Ta có $\overrightarrow{AS}=(1-a;2;3)$, $\overrightarrow{BS}=(1;2-b;3)$, $\overrightarrow{CS}=(1;2;3-c)$.

• SA,SB,SC đôi một vuông góc $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0\\ \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=0\\ \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+2b=14\\ 2b+3c=14\\ a+3c=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=7\\ b=\frac{7}{2}\\ c=\frac{7}{3}.\end{cases}$

• $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}SA.SB.SC=\dfrac{343}{36}$. □

Câu 50. **hih5:k50** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0;1;1)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=MC$. Thể tích khối chóp $M.ABC$ là

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{6}$

Lời giải: • Giả sử $M(a;b;c)$. Ta có

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2+(c-1)^2 = (a-1)^2+(b-1)^2+c^2 \\ a^2+(b-1)^2+(x-1)^2 = (a-1)^2+b^2+(c-1)^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2c=0 \\ 2a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

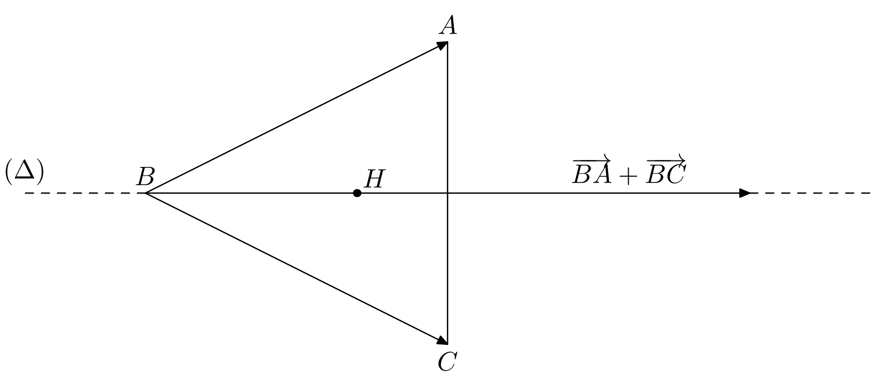
• $M \in (P) \Leftrightarrow a+b-c=1$. Suy ra $a=b=c=1$.

• Vậy $V_{MABC} = \frac{1}{6}$. □

Câu 51. **hih5:k51** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\,(1;-1;1)\,, B\,(2;1;-2)\,, C\,(0;0;1)$. Gọi $H\,(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC thì giá trị $x+y+z$ là kết quả nào dưới đây?

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) -2

Lời giải: Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1;-2;3), \overrightarrow{BC} = (-2;-1;3) \Rightarrow \triangle BCA$ cân tại B.

Phương trình đường phân giác trong góc B: $(\Delta): \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z+2}{3+3}$.

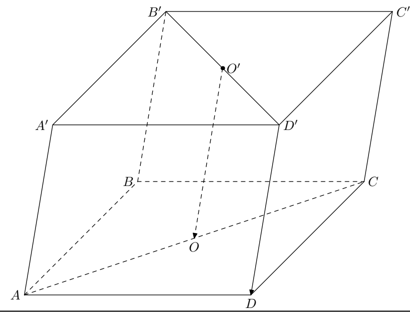
Do $H \in (\Delta) \Rightarrow x+y+z=1$. □

Câu 52. **hih5:k52** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\,(1;2;-1)$, $C\,(3;-4;1)$, $B'\,(2;-1;3)$ và $D'\,(0;3;5)$. Giả sử tọa độ $D\,(x;y;z)$ thì giá trị của $x+2y-3z$ là kết quả nào dưới đây?

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3

Lời giải:

Ta có $O(2;-1;0), O'(1;1;4)$.
$\Rightarrow \overrightarrow{O'O} = (1;-2;-4)$
Ta có $\overrightarrow{D'D} = (x;y-3;z-5)$.
Ta có $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{D'D} \Rightarrow D(1;1;1)$.
Chọn B.



□

Câu 53. **hih5:k53** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+3=0$ và đường thẳng $(d): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{2}$. Gọi A là giao điểm của (d) và (P); gọi M là điểm thuộc (d) thỏa mãn điều kiện $MA = 2$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

A $\dfrac{4}{9}$ **B** $\dfrac{8}{3}$ **C** $\dfrac{8}{9}$ **D** $\dfrac{2}{9}$

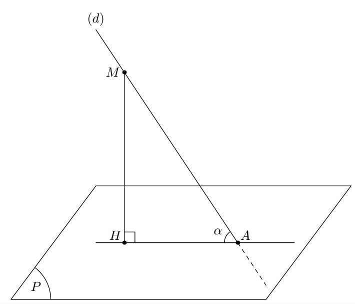
Lời giải:

Gọi α là góc hợp bởi (d) và (P).

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{MH}{MA} \Leftrightarrow MH = MA.\sin\alpha$.

Ta có $\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n}_P.\overrightarrow{u}_d|}{|\overrightarrow{n}_P||\overrightarrow{u}_d|} = \dfrac{4}{9}$.

Do vậy $MH = \dfrac{8}{9} \Rightarrow$ chọn C.

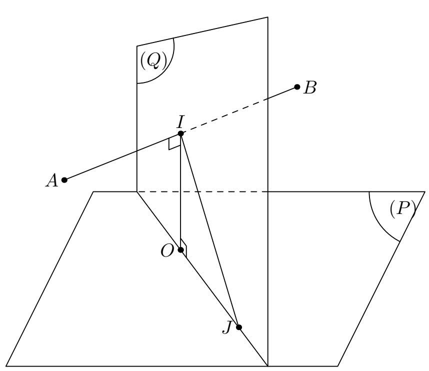


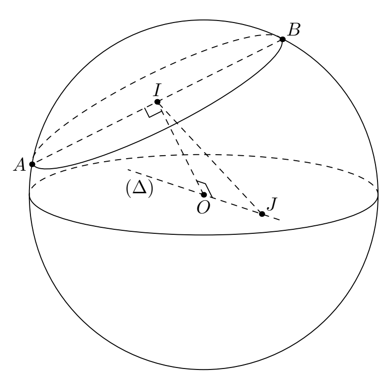
□

Câu 54. **hih5:k54** [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;2;1), B(3;2;3)$, có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x-y-3=0$, đồng thời có bán kính nhỏ nhất, hãy tính bán kính R của mặt cầu (S).

A 1 **B** $\sqrt{2}$ **C** 2 **D** $2\sqrt{2}$

Lời giải:





Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;0;2)$,, trung điểm$I(2;2;2)$ của đoạn AB.
Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB $(Q): x+z-4=0$.

Phương trình đường thẳng giao tuyến của $(Q),(P)$ là $(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\ y=2+t\quad(t\in\mathbb{R})\\ z=-2-t,\end{cases}$.

Gọi $J\in(\Delta)\Rightarrow\overrightarrow{AJ}=(t+1;t-1;-t-3)$.
Ta có $AJ=\sqrt{(t+1)^2+(t-1)^2+(t+3)^2}=\sqrt{3(t+1)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$.
Chọn D. □

Câu 55. hih5:k55 [K,H3] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;3;-1\right),B\left(-2;1;1\right)$, và $C\left(4;1;7\right)$. Tìm bán kính R của mặt cầu đi qua 4 điểm O,A,B,C.

A $R=\dfrac{9}{2}$ **B** $R=\dfrac{\sqrt{77}}{2}$ **C** $R=\dfrac{\sqrt{83}}{2}$ **D** $R=\dfrac{\sqrt{115}}{2}$

Lời giải: Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu, ta có

$$\begin{cases}OI=AI\\ OI=BI\\ OI=CI\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+(c+1)^2\\ a^2+b^2+c^2=(a+2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\\ a^2+b^2+c^2=(a-4)^2+(b-1)^2+(c-7)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+6b-2c=11\\ -4a+2b+2c=6\\ 8a+2b+14c=66\end{cases}$$

Giải hệ cuối thu được $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. Vậy bán kính bằng $IO=\dfrac{\sqrt{83}}{2}$. □

Câu 56. hih5:k56 [K,H3] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(3;3;-2\right)$ và hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$; $d_2:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1,d_2 lần lượt tại A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A $AB=2$. **B** $AB=3$. **C** $AB=\sqrt{6}$. **D** $AB=\sqrt{5}$.

Lời giải: • Mặt phẳng (P) qua M và chứa d_1 có phương trình $7x-4y+5z+1=0$.
• Mặt phẳng (Q) qua M và chứa d_2 có phương trình $8x-6y+5z+4=0$.
Bây giờ, gọi $\Delta=(P)\cap(Q)$, ta có Δ chính là đường thẳng đi qua A,B. Vậy $A=(P)\cap(Q)\cap d_1$ và $B=(P)\cap(Q)\cap d_2$. Giải các hệ ba phương trình ba ẩn tương ứng thu được $A(1;2;0)$ và $B(-1;1;2)$. Vậy $AB=3$. □

Câu 57. hih5:k57 [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-3=0$ đồng thời đi qua điểm $M\left(1;2;0\right)$ và cắt đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A $\vec{u}\left(1;-1;-2\right)$. **B** $\vec{u}\left(1;0;-1\right)$. **C** $\vec{u}\left(1;1;-2\right)$. **D** $\vec{u}\left(1;-2;1\right)$.

Lời giải: Do Δ nằm trên mặt phẳng (α) và cắt d nên giao điểm của Δ với d sẽ thuộc (α).
Giả sử N là giao điểm của Δ và $d\Rightarrow N\left(2+2t;2+t;3+t\right)$.
Mà $N\in(\alpha)\Rightarrow(2+2t)+(2+t)+(3+t)-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow N(0;1;2)\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\overrightarrow{NM}=(1;1;-2)$. □

Câu 58. hih5:k58 [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : x + y - 2z - 1 = 0$. Giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào trong các điểm sau:

A $A\,(2;1;1)$. **B** $C\,(1;2;1)$. **C** $D\,(2;1;0)$. **D** $B\,(0;1;0)$.

Lời giải: Ta có: $\vec{u}_\Delta = (1;1;2); \vec{n}_\beta = (1;1;-2)$ suy ra $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\beta] = -4(1;-1;0)$. Do (α) chứa Δ nên (α) đi qua $M(2;1;0)$, nhận $\vec{n} = (1;-1;0)$ làm vectơ pháp tuyến, suy ra $(\alpha) : x - y - 1 = 0$. Mọi điểm nằm trên đường thẳng giao tuyến của (α) và (β) đều là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;1;1).$$

□

Câu 59. hih5:k59 [K,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $A\,(2;-2;5)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng $(\alpha) : x = 1, (\beta) : y = -1, (\gamma) : z = 1$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng:

A $\sqrt{33}$. **B** 1. **C** $3\sqrt{2}$. **D** 3.

Lời giải: Gọi $I(a;b;c)$ ta có $d\,(I;(\alpha)) = d\,(I,(\beta)) = d\,(I,(\gamma))$ suy ra $R = |a-1| = |b+1| = |c-1|$. Do điểm $A(2;-2;5)$ thuộc miền $x > 1; y < -1; z > 1$ nên $I(a;b;c)$ cũng thuộc miền $x > 1; y < -1; z > 1$. Khi đó $I(R+1;-1-R;R+1)$. Mặt khác $IA = R \Rightarrow (R-1)^2 + (R-1)^2 + (R-4)^2 = R^2 \Leftrightarrow R = 3$. □

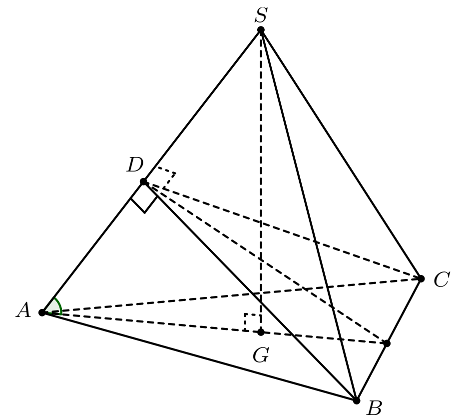
---

§4. Câu vận dụng cao môn Hình học

Câu 1. hih5:g01 [G,H1] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.DBC$ và $S.ABC$.

A $\dfrac{5}{8}$ **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** $\dfrac{3}{8}$ **D** $\dfrac{8}{3}$

Lời giải:



• Gọi M là trung điểm cạnh BC, G là trọng tâm $\triangle ABC$
suy ra $SG \perp (ABC), G \in AM$.
Do $(DBC) \perp SA \Rightarrow DM \perp SA \Rightarrow \widehat{SAM} = \left[SA, \widehat{(ABC)}\right] = 60^\circ$
Ta tính được $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
$AD = AM.\cos 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$
$AS = \dfrac{AG}{\cos 60^o} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$
$\Rightarrow SD = SA = AD = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} - \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5}{12}a\sqrt{3}$
$\dfrac{V_{S.DBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SD}{SA} = \dfrac{\dfrac{5}{12}a\sqrt{3}}{\dfrac{2}{3}a\sqrt{3}} = \dfrac{5}{8}$. □

Câu 2. hih5:g02 [G,H1] Cho hàm số $y = \dfrac{a}{x}(a \neq 0)$ có đồ thị (H). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của đồ thị (H) đến một tiếp tuyến của (H). Giá trị lớn nhất của d là

Ⓐ $a\sqrt{2}$ Ⓑ $|a|\sqrt{2}$ Ⓒ $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ Ⓓ $\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$

. . . .

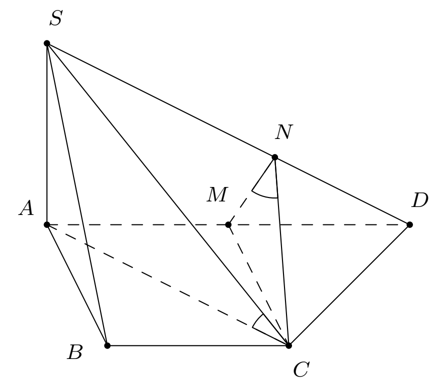
Lời giải: Đồ thị $(H) : y = \dfrac{9}{x}, (a \neq 0)$ có 2 tiệm cận $x = 0$ và $y = 0$.
Giao điểm 2 tiệm cận là $O\,(0; 0)$.
Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (H) tại $M\left(x_M; \dfrac{a}{x_M}\right) \in \mathbb{H}$
Ta có $f'(x) = \dfrac{-a}{x^2}$
$(\Delta) : y = \dfrac{-a}{x_M^2}(x - x_M) + \dfrac{a}{x_M}$
$(\Delta) : y = \dfrac{-a}{x_M^2}x + \dfrac{2a}{x_M}$
$(\Delta) : ax - x_M^2 y - 2ax_M = 0$
Suy ra $d\,[M; (\Delta)] = \dfrac{\left|a.x_M - x_M^2.\dfrac{a}{x_M} - 2ax_M\right|}{\sqrt{a^2 + x_M^2}} = \dfrac{|2ax_M|}{\sqrt{a^2 + x_M^2}}$
Ta có $\sqrt{a^2 + x_M^4} \geq \sqrt{2|a|x_M^2} = \sqrt{2|a|}.|x_M|$
Do đó $d\,[M; (\Delta)] \leq \dfrac{|2ax_M|}{\sqrt{2|a|}.|x_M|} = |a|\sqrt{2}$
Dấu " = " xảy ra khi $a^2 = x_M^4 \Leftrightarrow x_M = \sqrt{a}$ hoặc $x_M = -\sqrt{a}$
Vậy giá trị của d là $|a|\sqrt{2}$. □

Câu 3. hih5:g03 [G,H1] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $AB = BC = a,\ AD = 2a$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Góc giữa mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng :

(A) 45^0 (B) 30^0 (C) 75^0 (D) 60^0

Lời giải:

Gọi M là trung điểm AD, khi đó $CM \perp (SAD)$.
Gọi N là hình chiếu của M lên SD. Ta có $((SAD),(SCD)) = (NM, NC) = \widehat{MNC}$.
Ta có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.
Lại có $d(M, SD) = \dfrac{1}{2}d(A, SD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Suy ra $\tan \widehat{MNC} = \dfrac{MC}{MN} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MNC} = 60°$.

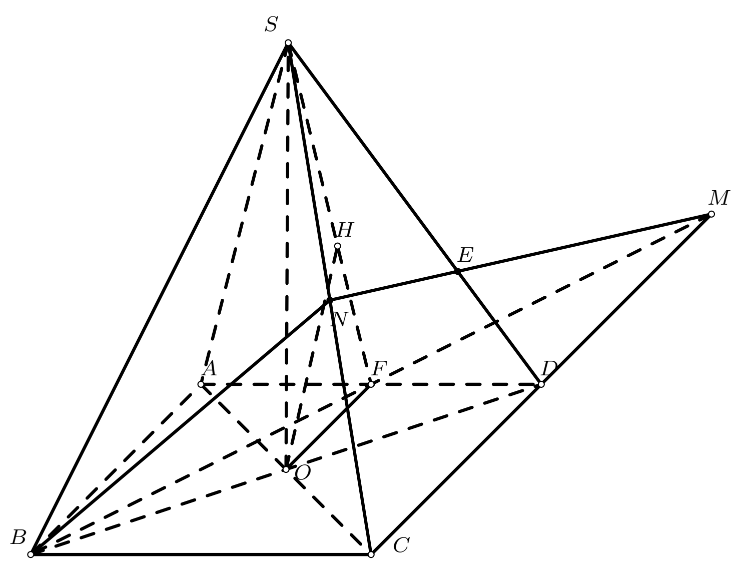


□

Câu 4. hih5:g04 [G,H1] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

(A) $\dfrac{7}{5}$ (B) $\dfrac{1}{7}$ (C) $\dfrac{7}{3}$ (D) $\dfrac{6}{5}$

Lời giải: A



Giả sử các điểm như hình vẽ.
$E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác $SCM, F = MB \cap AD, DF // BC \Rightarrow F$ là trung điểm của BM.
Kẻ $OH \perp SF$
Ta có: $\left(SD, (ABCD)\right) = \widehat{SDO} = 60^0 \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow d\Big(O,(SAD)\Big) = OH = h = \dfrac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}; S_{SAD} = \dfrac{1}{2}SF.AD = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$

Ta có: $\dfrac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \dfrac{ME}{MN}.\dfrac{MF}{MB}.\dfrac{MD}{MC} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{BFDCNE} = \dfrac{5}{6}V_{MNBC} = \dfrac{5}{6}.\dfrac{1}{3}.d\Big(M,(SAD)\Big).\dfrac{1}{2}S_{SBC} = \dfrac{5}{18}.4h.\dfrac{1}{2}S_{SAD} = \dfrac{5a^3\sqrt{6}}{72}$

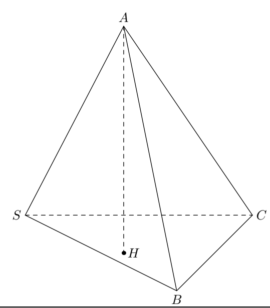
$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \dfrac{7a^3\sqrt{6}}{36}$

Vậy: $\dfrac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \dfrac{7}{5}$ □

Câu 5. hih5:g05 [G,H1] Xét hình chóp $S.ABC$ thỏa mãn $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$ với a là hằng số dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$?

(A) $6a^3$ (B) $2a^3$ (C) a^3 (D) $3a^3$

Lời giải: Chọn C.



Ta có $S_{\triangle SBC} = \dfrac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{BSC} \leq \dfrac{1}{2}SB.SC$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống (SBC).

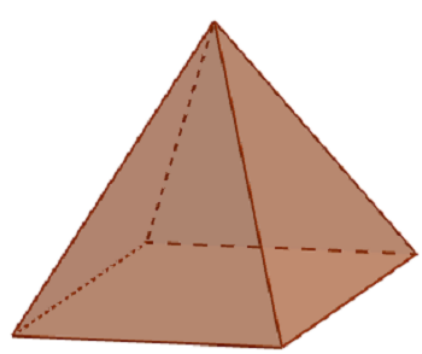
Ta có $AH \leq SA$.

Do vậy, $V_{S.ABC} \leq \dfrac{1}{6}SA.SB.SC = a^3$. □

Câu 6. hih5:g06 [G,H1] Kim tự tháp Cheops (có dạng hình chóp) là kim tự tháp cao nhất ở Ai Cập. Chiều cao của kim tự tháp này là $144m$, đáy của kim tự tháp là hình vuông có cạnh dài $230m$. Các lối đi và phòng bên trong chiếm 30% thể tích của kim tự tháp. Biết một lần vận chuyển gồm 10 xe, $T = 5$ xe chở 6 tấn đá, và khối lượng riêng của đá bằng $2,5.10^3 kg/m^3$. Số lần vận chuyển đá để xây dựng kim tự tháp là:

(A) 740600. (B) 76040. (C) 7406. (D) 74060.

Lời giải:



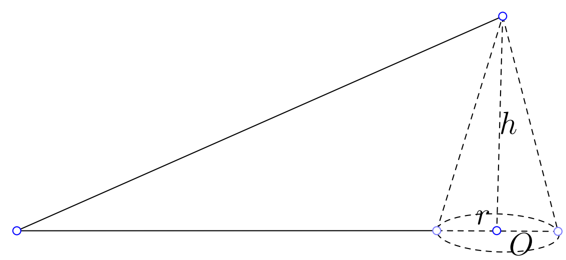
Thể tích của kim tự tháp là: $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}230^2.144 = 2539200(m^3)$.
Thể tích cần xây dựng: $V_1 = 70\%V = 70\%.2539200 = 1777440(m^3)$.
Một xe chở 6 tấn đá và khối lượng riêng của đá bằng $2,5.10^3 kg/m^3$ nên xe chở được một lượng đá có thể tích $V_{\text{xe}} = \frac{m}{D} = \frac{6.10^3}{2,5.10^3} = 2,4(m^3)$.
Để xe chở được 1777440m^3 đá cần $\frac{1777440}{2,4} = 740600$ xe chở.
Theo đề một lần vận chuyển gồm 10 xe nên có tất cả 74060 lần vận chuyển đá. □

Câu 7. hih5:g07 [G,H2] Một cái tháp hình nón có chu vi đáy bằng $207,5m$. Một học sinh nam muốn đo chiều cao của cái tháp đã làm như sau. Tại thời điểm nào đó, cậu đo bóng của mình dài $3,32m$ và đồng thời đo được bóng của cái tháp (kể từ chân tháp) dài $207,5m$. Biết cậu học sinh đó cao $1,66m$, hỏi chiều cao của cái tháp là bao nhiêu m?

A. $h = 103,75 + \frac{51,875}{\pi}$
B. $h = 103 + \frac{51,87}{\pi}$
C. $h = 103,75 + \frac{25,94}{\pi}$
D. $103,75$

Lời giải:

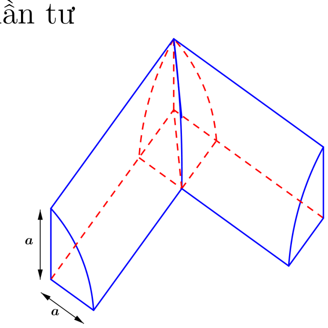
Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của hình nón.
Ta có $2\pi r = 207,5 \Rightarrow r = \frac{103,75}{\pi}$
$\Rightarrow OA = 207,5 + \frac{103,75}{\pi}$.
Vì bóng gấp 2 lần chiều cao thực nên $OA = 2h$
$\Rightarrow h = 103,75 + \frac{51,875}{\pi}$.



□

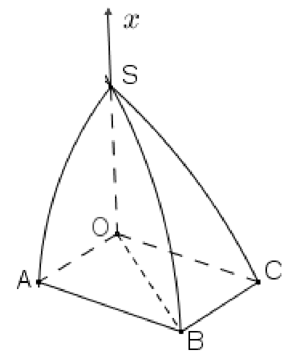
Câu 8. hih5:g08 [G,H2] Gọi (H) là phần giao nhau của hai khối một phần tư hình trụ có bán kính bằng a (xem hình vẽ bên).
Tính thể tích của (H).

A. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$
B. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$
C. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$
D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$



Lời giải:

Cho $a=1$ và chọn trục Ox như hình vẽ sao cho $O(0)$ và $S(1)$.
Kí hiệu (P_t) là mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có tọa độ t. Nếu ứng với mọi $t \in [0;1]$, diện tích thiết diện tạo bởi (P_t) và khối (H) đều được cho bởi công thức $\mathcal{S}(t)$ thì ta có



$$V_{(H)} = \int_0^1 \mathcal{S}(t)\mathrm{d}t.$$

Như vậy, để xác định $V_{(H)}$ ta cần tìm được công thức $\mathcal{S}(t)$. Ứng với mỗi $t \in [0;1]$, thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{1-t^2}$, thế nên

$$V_{(H)} = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

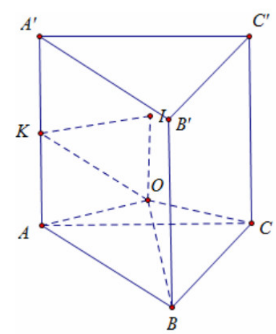
Chọn B. □

Câu 9. hih5:g09 [G,H2] Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng:

Ⓐ a. Ⓑ $a\sqrt{5}$. Ⓒ $a\sqrt{3}$. Ⓓ $a\sqrt{2}$.

Lời giải:

Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng đã cho.
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I.
Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.



Mặt khác $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = -\dfrac{1}{2}$
Ta có: $R_{ABC} = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2a$.
Do đó $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ □

Câu 10. hih5:g10 [G,H2] Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật. Mỗi quả bóng tiếp xúc với hai bức tường và nền của căn nhà đó. Trên bề mặt của mỗi quả bóng, tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường quả bóng tiếp xúc và đến nền nhà lần lượt là 9, 10, 13. Tổng độ dài mỗi đường kình của hai quả bóng đó là:

Ⓐ 64. Ⓑ 34. Ⓒ 32. Ⓓ 16.

Lời giải: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ gắn với góc tường và các trục là các cạnh nhà.
Do hai quả cầu đều tiếp xúc với các bức tường và nền nhà nên tương ứng tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ, vậy tâm của mặt cầu sẽ có tọa độ $I(a;a;a), a>0$ và bán kính $R=a$.
Do tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường quả bóng tiếp xúc và đến nền nhà lần lượt là 9, 10, 13 nên điểm $A(9;10;13)$ thuộc mặt cầu.
Do đó ta có phương trình: $(9-a)^2 + (10-a)^2 + (13-a)^2 = a^2 \iff a = 7, a = 25$.
Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn bài toán và tổng độ dài đường kính là $2(7+25) = 64$. □

Câu 11. **hih5:g11** [G,H3] Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$ và ba điểm $A(0;1;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;-2;3)$. Toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất là:

A $(4;-2;-4)$ **B** $(-1;2;0)$ **C** $(3;-2;-8)$ **D** $(1;2;-2)$

Lời giải: Gọi I là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$, giải ra ta được $I=(1,0,2)$. Điểm M cần tìm chính là hình chiếu vuông góc của I lên (P). Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P) phương trình $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=2+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$. Tham số t ứng với giao điểm của d và (P) là nghiệm của phương trình $(1+t)-(-t)+(2+t)+3=0 \Rightarrow t=-2$. Với $t=-2 \Rightarrow M(-1;2;0)$. □

Câu 12. **hih5:g12** [G,H3] Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+13=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

A 5 **B** 3 **C** 2 **D** 1

Lời giải: Tham số t ứng với giao điểm của d và (s) là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} &(2+t)^2+(1+mt)^2+(-2t)^2+6(2+t)+8t+13=0 \\ \Leftrightarrow &(m^2+5)t^2+2(4m+5)t+20=0 \end{aligned}$$

$\Delta'=-4m^2+40m-75$. Để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}<m<\frac{15}{2}$. Nên có 5 giá trị nguyên thỏa mãn. □

Câu 13. **hih5:g13** [G,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x=1+t_1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x=1 \\ y=2+t_2 \\ z=0 \end{cases}; \Delta_3: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=t_3. \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(4;6;5)$ và cắt các đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2;\Delta_3$ lần lượt tại ba điểm phân biệt $A;B;C$ sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.

A $3x+5y+5z-67=0$ **B** $4x+6y+5z-77=0$
C $3x+6y+5z-73=0$ **D** $3x+4y+5z-61=0$

Lời giải: Dễ thấy $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ cùng đi qua điểm $I(1;2;0)$ và lần lượt song song với các trục Ox, Oy, Oz nên Δ_1, Δ_2, Δ_3 đôi một vuông góc với nhau tại điểm I. Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên IH vuông góc với (P). Suy ra mặt phẳng (P) cần tìm đi qua $M(4;6;5)$ và nhận $\overrightarrow{IM}=(3;4;5)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình (P) là: $3(x-4)+4(y-6)+5(z-5)=0$ hay $3x+4y+5z-61=0$. □

Câu 14. **hih5:g14** [G,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

A $(P): 2x+y+3z-14=0$ **B** $(P): 3x+6y+2z-18=0$

C $(P): 3x+6y+2z-6=0$ **D** $(P): 6x+3y+2z-21=0$

Lời giải: Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ (với $a>0, b>0, c>0$). Phương trình (P) có dạng

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Vì (P) đi qua $M(2;1;3)$ nên $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}=1$. Từ đó:

$$1=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow abc\geq 162.$$

Do đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc\geq\frac{162}{6}=27$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{3}{c}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\ b=3\\ c=9.\end{cases}$$

Vậy phương trình (P) là:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{9}=1\Leftrightarrow 3x+6y+2z-18=0.$$

□

Câu 15. **hih5:g15** [G,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$, $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt d_1, d_2 tại B và C. Độ dài đoạn thẳng BC là:

A $2\sqrt{5}$. **B** $\sqrt{19}$. **C** $3\sqrt{2}$. **D** 19.

Lời giải: • $B\in d_1, C\in d_2$ nên $B(1+b;-1-b;2b)$ và $C(c;1+2c;c)$.

• Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2-b;2b-5)$, $\overrightarrow{AC}=(c-5;2c+4;c-5)$.

•

$$\begin{aligned}&A,B,C \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}\\ &\Leftrightarrow\frac{b-4}{c-5}=\frac{2-b}{2c+4}=\frac{2b-5}{c-5}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}3bc-b-10c-6=0\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ c=-1\end{cases}\end{aligned}$$

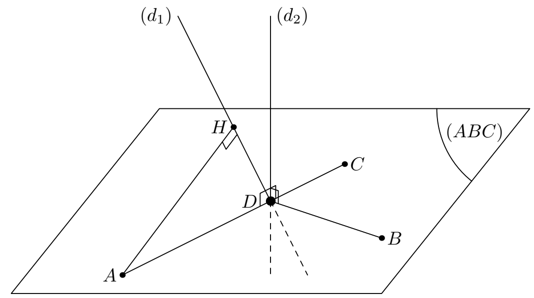
Suy ra $B(2;0;2)$ và $C(-1;-1;-1)$. Vậy $BC=\sqrt{19}$. □

Câu 16. hih5:g16 [G,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A\,(3;0;0)$, $B\,(0;2;0)$, $C\,(0;0;6)$ và $D\,(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất, hỏi Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A $M\,(-1;-2;1)$ **B** $M\,(5;7;3)$ **C** $M\,(3;4;3)$ **D** $M\,(7;13;5)$

Lời giải:

Ta thấy $D \in (ABC)$.
Gọi (d_1) qua D không vuông góc (ABC).
Gọi (d_2) qua D và vuông góc (ABC).
Gọi H là hình chiếu của A lên (d_1).
Ta thấy $AH \leq AD = d(A,(d_2))$.



Do vậy, ta được $\begin{cases} d(A,(d_1)) \leq AD \\ d(B,(d_1)) \leq BD \\ d(C,(d_1)) \leq CD \end{cases}$

$\Rightarrow d(A,(d_1)) + d(B,(d_1)) + d(C,(d_1)) \leq d(A,(d_2)) + d(B,(d_2)) + d(C,(d_2)) \Rightarrow (\Delta) \equiv (d_2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;2;0), \overrightarrow{AC} = (-3;0;6), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12;18;6)$.

Với $M(5;7;3) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = (4;6;2) \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 17. hih5:g17 [G,H3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{2}$. Biết rằng mặt cầu (S) có bán kính bằng $2\sqrt{2}$ và cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tọa độ tâm I.

A $I\,(1;-2;2)\,, I\,(5;2;10)$. **B** $I\,(1;-2;2)\,, I\,(0;-3;0)$.
C $I\,(5;2;10)\,, I\,(0;-3;0)$. **D** $I\,(1;-2;2)\,, I\,(-1;2;-2)$.

Lời giải: Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxz) là $d = \sqrt{R^2 - r^2} = 2$

Điểm $I \in (d)$ suy ra $I(t;t-3;2t) \Rightarrow d(I,(P)) = |t-3| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I(1;-2;2) \\ I(5;2;10) \end{array}\right.$ □

---

1 Các câu vận dụng cao Giải tích và Hình học

Câu 1. Tìm m để phương trình: $3\sqrt{21-4x-x^2} = m-4x+2$ có nghiệm.

(A) $-35 < m \leq 15$ (B) $-40 < m \leq 15$
(C) $-30 \leq m \leq 15$ (D) $-20 \leq m \leq 15$

Lời giải:

Ta có tập xác định $D = [-7;3] \Rightarrow x+7 \geq 0 \wedge 3-x \geq 0$.
Khi đó, $3\sqrt{21-4x-x^2} = m-4x+2 \Leftrightarrow (3\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x})^2 = 2m+70$.
Đặt $f(x) = 3\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x},\ x \in [-7;3]$.
Ta được $\min\limits_{x\in[-7;3]} f(x) = f(-7) = \sqrt{10}$ và $\max\limits_{x\in[-7;3]} f(x) = f(2) = 10$.
Do vậy, ycbt $\Leftrightarrow 10 \leq 2m+70 \leq 100 \Leftrightarrow -30 \leq m \leq 15$.
Chọn C. □

Câu 2. Một người nông dân muốn bán 30 tấn lúa. Nếu mỗi tấn bán với giá 4.000.000 đồng thì khách hàng mua hết, nếu cứ tăng lên 300.000 đồng mỗi tấn thì có hai tấn không bán được. Vậy cần bán một tấn lúa với giá bao nhiêu để người nông dân thu được số tiền lớn nhất?

(A) 4.000.000 đồng (B) 4.100.000 đồng
(C) 4.250.000 đồng (D) 4.500.000 đồng

Lời giải:

Gọi $x, x > 4$ là giá một tấn lúa cần bán (đơn vị triệu đồng / tấn).
Số tấn lúa bán được với giá x: $30 - \dfrac{2(x-4)}{0.3}$.
Tổng thu: $f(x) = x[30 - \dfrac{2(x-4)}{0.3}] = -\dfrac{2x^2}{0.3} + \dfrac{17x}{0.3}$
Ta có $\max f(x) = f(\dfrac{17}{4})$
Chọn C. □

Câu 3. Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = \dfrac{f(x)+3}{g(x)+3}$. Hệ số góc các tiếp tuyến của đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ là bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

(A) $f(1) \leq -\dfrac{11}{4}$ (B) $f(1) < -\dfrac{11}{4}$ (C) $f(1) > -\dfrac{11}{4}$ (D) $f(1) \geq -\dfrac{11}{4}$

Lời giải:

Đặt $h(x) = \dfrac{f(x)+3}{g(x)+3}$. Khi đó $h'(1) = \dfrac{f'(1)\big(g(1)+3\big) - g'(1)\big[f(1)+3\big]}{\big[g(1)+3\big]^2}$.
Theo giả thiết thì $f'(1) = g'(1) = h'(1)$, nên từ phương trình trên ta có :

$$f(1) = -\left[(g(1))^2 + 5\,(g(1)) + 9\right] \leq -\frac{11}{4}$$

. □

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}$ có ba tiệm cận.

(A) $0<m<\dfrac{1}{2}$ (B) $0<m\le\dfrac{1}{2}$ (C) $m>0$ (D) $m\ge\dfrac{1}{2}$

Lời giải:

Điều kiện cần: Nếu đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì hàm số phải xác định trên một khoảng vô hạn chứa $(-2;+a)$ hoặc $(b;-2)$.

Hay $m\ge 0$ và phương trình $mx^2+3mx+1=0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có hai nghiệm x_1, x_2 cùng lớn hơn hoặc bằng -2 hoặc cùng bé hơn hoặc bằng -2.Tức là:

$$\left[\begin{array}{l} m=0\\ \begin{cases} m>0\\ \left[\begin{array}{l}\Delta<0\\ \begin{cases}\Delta\ge 0\\ (x_1+2)(x_2+2)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ \begin{cases} m>0\\ \left[\begin{array}{l}9m^2-4m<0\\ \begin{cases}9m^2-4m\ge 0\\ x_1x_2+2(x_1+x_2)+4\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0\le m\le\frac{1}{2}$$

Điều kiện đủ:

- TH1: $m=0$.
  Hàm số trở thành $y=\dfrac{1}{x+2}$.Ta có: $\lim\limits_{x\to-2^{\pm}}\dfrac{1}{x+2}=\pm\infty$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$.
  Đồ thị hàm số này chỉ có 2 tiệm cận gồm: 1 tiệm cận đứng $x=-2$ và 1 tiệm cận ngang $y=0$.
- TH2: $0<m<\dfrac{1}{2}$.
  Ta có $\lim\limits_{x\to-2^{\pm}}\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^{\pm}}\dfrac{\sqrt{m(x+2)(x+1)-2m+1}}{x+2}=\pm\infty$
  và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\pm\sqrt{m+3m\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=\pm\sqrt{m}$
  Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận gồm :1 tiệm cận đứng $x=-2$ và hai tiệm cận ngang đó là $y=\sqrt{m}$, $y=-\sqrt{m}$
- TH3: $m=\dfrac{1}{2}$
  Hàm số trở thành $y=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1}}{x+2}$.
  Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1}}{x+2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ và $\lim\limits_{x\to-2^{-}}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1}}{x+2}=-\infty$.
  Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận gồm :1 tiệm cận đứng $x=-2$ và hai tiệm cận ngang đó là $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $y=-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

□

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x+m(\sin x+\cos x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $m\in\left(-\infty;\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ (B) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\le m\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $-3<m<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $m\in\left(-\infty;\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

Lời giải:

Ta có: $y = x + \sqrt{2}m\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$y' = 1 + \sqrt{2}m\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2}m \leq y' \leq 1 + \sqrt{2}m \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ 1 - \sqrt{2}m \geq y' \geq 1 + \sqrt{2}m \end{cases}\end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ và chỉ bằng 0 tại một số đêm được điểm trên $\mathbb{R}$. Tức là $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2}m \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ 1 + \sqrt{2}m \geq 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \leq m \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ □

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x + 1}$. Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất khi m bằng

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\dfrac{1}{2}$

Lời giải: Gọi đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên là d

Ta có $d : y = \dfrac{(mx^2 - 2x + m - 1)'}{(2x + 1)'} = mx - 1$

d vuông góc với đường thẳng $y = x \Rightarrow m = -1$ □

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$ có tâm đối xứng là điểm

(A) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ (C) $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$

Lời giải: □

Câu 8. Phương trình $|\sin x - \cos x| + \sin 2x = m$ có nghiệm thực khi và chỉ khi

(A) $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$ (B) $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \dfrac{5}{4}$

(C) $1 \leq m \leq \dfrac{5}{4}$ (D) $m = 1 \vee m = \dfrac{5}{4}$

Lời giải: Đặt $t = |\sin x - \cos x| \ \ \left(t \in \left[0; \sqrt{2}\right]\right) \Rightarrow t^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

PT$\Leftrightarrow t + 1 - t^2 = m \ (*)$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 1, \ t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$

$f'(t) = -2t + 1, \ f'(t) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$f(0) = 1, \ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{4}, \ f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$

Vậy $\sqrt{2} - 1 \leqslant m \leqslant \dfrac{5}{4}$ □

Câu 9. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+1$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm cực đại của (C) và có hệ số góc k. Tìm k để tổng khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của (C) đến d là nhỏ nhất.

Ⓐ $k=\pm\frac{1}{16}$ Ⓑ $k=\pm\frac{1}{4}$ Ⓒ $k=\pm\frac{1}{2}$ Ⓓ $k=\pm1$

Lời giải: Ta có điểm cực đại $A(0;1)$ và hai điểm cực tiểu là $B\left(1;\frac{3}{4}\right)$, $C\left(-1;\frac{3}{4}\right)$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại có hệ số góc k là $\Delta:\ kx-y+1=0$. Tổng khoảng cách từ hai điểm cực tiểu đến Δ là $S=\dfrac{\left|k+\frac{1}{4}\right|+\left|-k+\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$, thay từng đáp án vào. □

Câu 10. Cho hàm số $y=x^4-mx^2+2m-1$ có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) có ba điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành bốn đỉnh của một hình thoi.

Ⓐ $m=1+\sqrt{2}$ hoặc $m=-1+\sqrt{2}$ Ⓑ Không có giá trị m

Ⓒ $m=4+\sqrt{2}$ hoặc $m=4-\sqrt{2}$ Ⓓ $m=2+\sqrt{2}$ hoặc $m=2-\sqrt{2}$

Lời giải: Hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;2m-1)$, $B\left(\sqrt{\frac{m}{2}};-\frac{m^2}{4}+2m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{\frac{m}{2}};-\frac{m^2}{4}+2m-1\right)$
và tam giác ABC cân tại A

Để $OBAC$ là hình thoi khi $H\left(0;-\frac{m^2}{4}+2m-1\right)$ là trung điểm BC cũng là trung điểm OA $\Leftrightarrow$
$-\frac{m^2}{4}+2m-1=\frac{2m-1}{2}$. Rút gọn, bấm máy và chọn đáp án. □

Câu 11. Một miếng bìa hình tam giác đều ABC, cạnh bằng 16. Học sinh Trang cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M,N thuộc cạnh BC; P,Q lần lượt thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

Ⓐ $16\sqrt{3}$ Ⓑ $8\sqrt{3}$ Ⓒ $32\sqrt{3}$ Ⓓ $34\sqrt{3}$

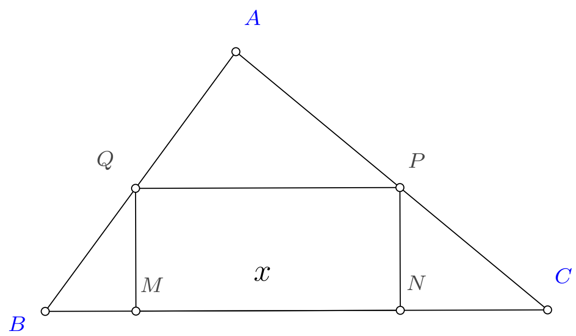
Lời giải:

Đặt $MN=x,\ (0<x<8)\Rightarrow BM=\frac{16-x}{2}$

$\tan 60^0=\frac{QM}{BM}\Rightarrow QM=\frac{\sqrt{3}}{2}(16-x)$

Xét hàm số $S(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(16-x)$

$\Rightarrow \max S=32\sqrt{3}$ tại $x=8$



□

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm ấy có bán kính bằng 1.

Ⓐ $m=-1$ Ⓑ $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ⓒ $m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ Ⓓ $m=-1$ hoặc $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Lời giải: Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị $\Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow m < 0$.
Khi đó đồ thị hàm số có điểm cực đại $A(0;1)$ và hai điểm cực tiểu $B(\sqrt{-m}; 1-m^2), C(-\sqrt{m}; 1-m^2)$.
ΔABC cân tại A nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp thuộc Oy.
Gọi $I(0;b)$, $b < 1$, ta có $IA = 1 \Leftrightarrow b = 0$. Hay $I(0;0)$

Khi đó $IB = 1 \Leftrightarrow -m + (1-m^2)^2 = 1 \Leftrightarrow m(m^3 - 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ □

Câu 13. Đồ thị của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - x + 2$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

Ⓐ 2 Ⓑ 0 Ⓒ 3 Ⓓ 1

Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 + x^2 - 2 = x^3 - 3x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $y = x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$, trên $\mathbb{R}$
$y' = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1$ và $y" = 12x^2 - 6x + 8$.
Ta có: $y" > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y'$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có duy nhất nghiệm x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	y_0	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác, $y' = 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f\left(-\dfrac{1}{2}\right).f(0) < 0$ nên $x_0 \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.
$\Rightarrow y(x_0) < y(0) = -4 \Rightarrow y(x_0) < 0$. Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm hay hai đồ thị đã cho có hai điểm chung □

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình: $2^{mx^2-4x-2m} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{-4}}$ có nghiệm duy nhất?

Ⓐ $m = 1$ Ⓑ $m = 0$ Ⓒ $0 \leq m < 1$ Ⓓ $m = 2$

Lời giải:

Ta có $2^{mx^2-4x-2m} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{-4}} \Leftrightarrow mx^2 - 4x - 2m - 2 = 0$.
Ta thấy $\Delta' = 2m^2 + 2m + 4 > 0\ \forall m \in \mathbb{R}$. Do vậy, ycbt $\Leftrightarrow m = 0$.
Chọn B. □

Câu 15. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của In-đô-nê-xi-a là 1,5%. Cuối năm 1998, dân số nước này là 212.942.000 người. Dân số của In-đô-nê-xi-a vào năm cuối năm 2017 là:

(A) 134.190.551 (người) (B) 278.387.730 (người)
(C) 219.093.477 (người) (D) 282.563.546 (người)

Lời giải:
Nếu tính theo công thức lãi kép định kì $S = A(1+r)^N$ thì $S = 212.942.000(1+1.5\%)^{19} \simeq 282.563.546$.
Nếu tính theo công thức lãi kép liên tục $S = A.e^{Nr}$ thì $S = 212.942.000.e^{19.0.15} \simeq 283.162.186$.
Tuy nhiên, sự tăng dân số thông thường được tính theo công thức tăng trưởng $S = Ae^{Nr}$. □

Câu 16. Tìm m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1.x_2 = 27$.

(A) $m > 4 + 2\sqrt{2}$ (B) $m = 1$ (C) $m = 3$ (D) $m = \dfrac{28}{3}$

Lời giải:
Điều kiện $x > 0$.
Ta có $x_1.x_2 = 27 \Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3$.
Do vậy, ycbt $\Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(3m-1) > 0 \wedge m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$
Chọn B. □

Câu 17. Kể từ năm 2017, giả sử mức lạm phát ở nước ta với chu kỳ 3 năm là 12%. Năm 2017 một ngôi nhà ở thành phố X có giá là 1 tỷ đồng. Một người ra trường đi làm vào ngày 1/1/2017 với mức lương khởi điểm là P triệu đồng/1 tháng và cứ sau 3 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng là 50% của lương. Với P bằng bao nhiêu thì sau đúng 21 năm đi làm anh ta mua được nhà ở thành phố X, biết rằng mức lạm phát và mức tăng lương không đổi. (kết quả quy tròn đến chữ số hàng đơn vị)

(A) 9.588.833 đồng (B) 11.558.431 đồng
(C) 13.472.722 đồng (D) 12.945.443 đồng

Lời giải:
Giá trị ngôi nhà sau 21 năm là $N = 10^9(1+12\%)^7 = 2.210.681.407$.
Số tiền tích luỹ sau 21 năm:
Kỳ 1: $T_1 = 0.5 * P * 36 = 18 * P$.
Kỳ 2: $T_2 = 0.5 * P * 1.1 * 36 = 18 * 1.1 * P$.
Kỳ 3: $T_3 = 0.5 * P * 1.1^2 * 36 = 18 * 1.1^2 * P$.
Kỳ 4: $T_4 = 0.5 * P * 1.1^3 * 36 = 18 * 1.1^3 * P$.
Kỳ 5: $T_5 = 0.5 * P * 1.1^4 * 36 = 18 * 1.1^4 * P$.
Kỳ 6: $T_6 = 0.5 * P * 1.1^5 * 36 = 18 * 1.1^5 * P$.
Kỳ 7: $T_7 = 0.5 * P * 1.1^6 * 36 = 18 * 1.1^6 * P$.
Ta được $S = 18 * P * (1 + 1.1 + 1.1^2 + 1.1^3 + 1.1^4 + 1.1^5 + 1.1^6) = 18 * P * \dfrac{1 - 1.1^7}{1 - 1.1} = 170,769078 * P$.
Do vậy, $P = \dfrac{N}{170,769078} \simeq 12.945.443$.
Chọn D. □

Câu 18. Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y)$. Giá trị của tỷ số $\dfrac{x}{y}$ là

(A) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (C) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Lời giải: Đặt $k = \dfrac{x}{y} > 0$

Đặt $t = \log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y) \Rightarrow \begin{cases} x = 3^t 3^t \\ y = 3^t 4^t \\ x + y = 4^t 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^t \\ \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{x}{y} + 1 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^t \end{cases}$

Suy ra $k = \dfrac{1}{k} - 1 \Rightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ □

Câu 19. Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15.2^{x+1}+1} \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Lời giải: Đặt $t = 2^x \geq 1$, BPT trở thành: $\sqrt{30t+1} \geq |t-1| + 2t$
$\iff \sqrt{30t+1} \geq 3t - 1 \iff 30t + 1 \geq 9t^2 - 6t + 1 \iff 0 \leq t \geq 4 \Longrightarrow 0 \leq t \geq 2.$
Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên không âm. □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2} + m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có **đúng** hai nghiệm phân biệt.

(A) $m < \dfrac{1}{16}$ (B) $0 \leq m < \dfrac{1}{16}$
(C) $-\dfrac{1}{2} < m \leq \dfrac{1}{16}$ (D) $-\dfrac{1}{2} < m \leq 0$ hoặc $m = \dfrac{1}{16}$

Lời giải: PT $\iff \left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \dfrac{1}{2}$

Đặt $t = \left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2}$, $t \in (0;1]$. PT trở thành: $2t^2 - t + 2m = 0 \iff 2m = t - 2t^2 = g(t)$

Ta có $g'(t) = 1 - 4t = 0 \iff t = \dfrac{1}{4}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{4}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

Dựa vào BTT, ycbt $\iff \left[\begin{array}{l} 2m = \dfrac{1}{8} \\ -1 < 2m \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{16} \\ \dfrac{-1}{2} < m \leq 0 \end{array}\right.$ □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_5\left(25^x - \log_5 m\right) = x$ có nghiệm duy nhất.

(A) $m = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$ (B) $m = 1$ (C) $m \geq 1 \vee m = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$ (D) $m \geq 1$

Lời giải: □

Câu 22. Cho tích phân $\int\limits_0^1 \frac{x^2+e^x+x^2e^x}{1+e^x}dx = \ln(1+a.e)+\ln b+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Khi đó giá trị của $a+2b+3c$ là:

Ⓐ 3 Ⓑ 2 Ⓒ 1 Ⓓ 6

Lời giải:

Ta có $\int_0^1 \frac{x^2+e^x+x^2e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 [x^2+\frac{e^x}{1+e^x}]dx = [\frac{x^3}{3}+\ln(1+e^x)]\Big|_0^1 = \ln(1+e)+\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

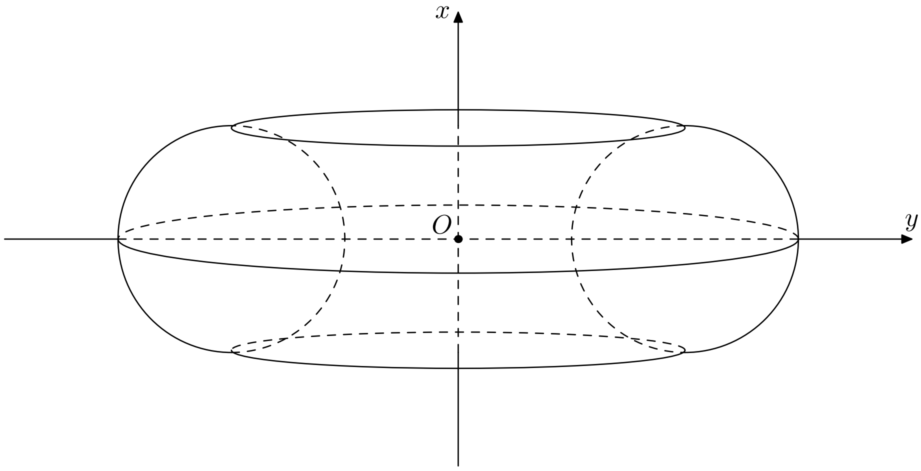
Ta được $a=1\wedge b=\frac{1}{2}\wedge c=\frac{1}{3}\Rightarrow a+2b+3c=3$

Chọn A. □

Câu 23. Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng (H) giới hạn bởi miền $D=\{(x;y)\,|x^2+(y-2)^2\le 1\}$ quay quanh trục Ox là:

Ⓐ $4\pi^2$ Ⓑ $2\pi^2$ Ⓒ $8\pi^2$ Ⓓ $6\pi^2$

Lời giải:



Ta có $x^2+(y-2)^2=1\Leftrightarrow y=2+\sqrt{1-x^2}\vee y=2-\sqrt{1-x^2},(-1\le x\le 1)$.

Thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int_{-1}^1\left[(2+\sqrt{1-x^2})^2-(2-\sqrt{1-x^2})^2\right]dx = 16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = 4\pi^2$.

Chọn A. □

Câu 24. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường s (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (phút), hàm số đó là $s=6t^2-t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

Ⓐ $t=2s$ Ⓑ $t=6s$ Ⓒ $t=8s$ Ⓓ $t=4s$

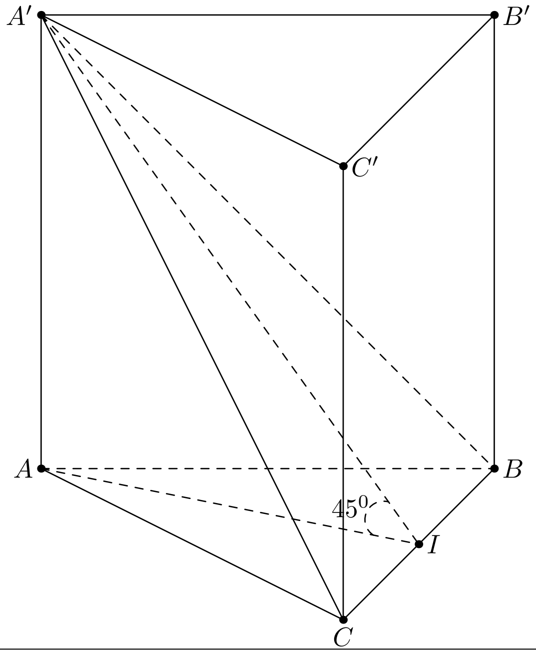
Lời giải: A

Ta có $v(t)=s'(t)=12t-3t^2$, $v'(t)=12-6t$, $v'(t)=0\Leftrightarrow t=2$. □

Câu 25. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = 2a$, $\widehat{CAB} = 120^\circ$, góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 45°. Thể tích lăng trụ là:

Ⓐ $V = 2a^3\sqrt{3}$ Ⓑ $V = a^3\sqrt{3}$ Ⓒ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ Ⓓ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải:

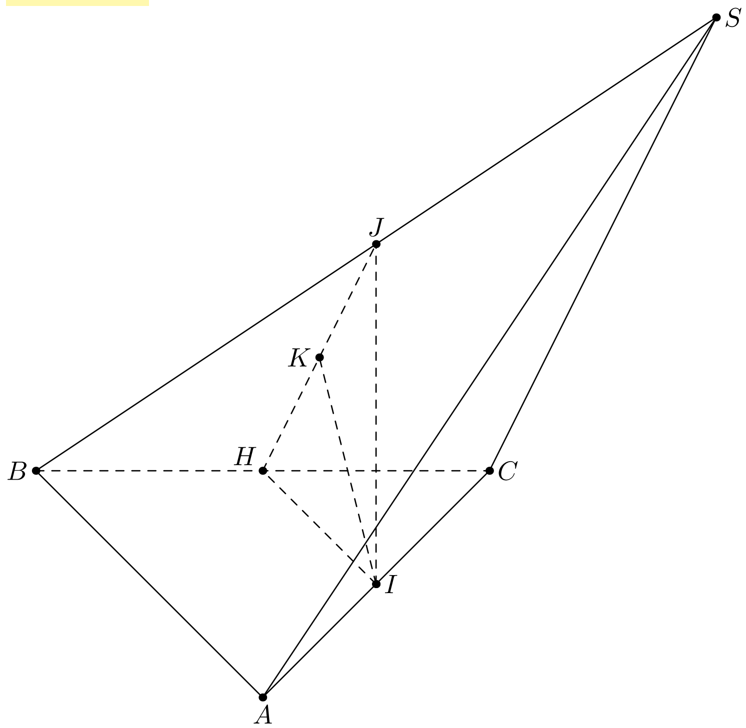


Gọi I là trung điểm cạnh BC.
Ta được ΔABI nửa đều cạnh $2a$.
Khi đó $AA' = AI = a, S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABI} = \sqrt{3}a^2$.
Ta được $V = \sqrt{3}a^3$.
Chọn B. $\square$

Câu 26. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

Ⓐ $a\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ Ⓑ $a\sqrt{3}$ Ⓒ $2a$ Ⓓ $3a\sqrt{5}$

Lời giải:



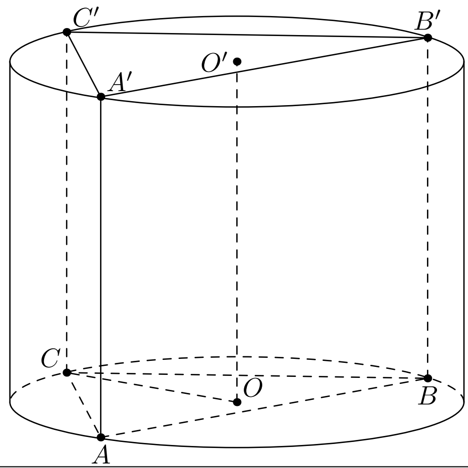
Gọi I, J, H lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BS, BC.

Từ giả thuyết $\Rightarrow IJ \perp (ABC)$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên $HJ \Rightarrow IK \perp (SBC)$.
Đặt $AB = x, (\text{đơn vị } a), (x > \sqrt{2})$. Ta được $IJ = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2-4}}$ (đơn vị a).
Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} . \dfrac{x^2}{2} . \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-4}} = \dfrac{1}{3} \dfrac{x^3}{\sqrt{2x^2-4}}$ (đơn vị a).
Đặt $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{2x^2-4}}, (x > \sqrt{2})$. Ta có $f'(x) = \dfrac{2x^2(x^2-3)}{\sqrt{(2x^2-4)^3}} \Rightarrow \min\limits_{(\sqrt{2};+\infty)} f(x) = f(\sqrt{3})$.
Chọn B. □

Câu 27. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$. Thể tích khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A πa^3 **B** $2\pi a^3$ **C** $3\pi a^3$ **D** $4\pi a^3$

Lời giải:



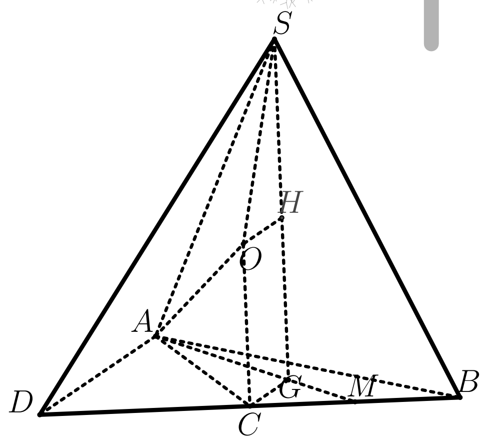
Ta có $R = CO = \dfrac{2}{3} . 2a . \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} a$.
Ta được $V_{\text{trụ}} = 3a . \pi . \dfrac{4}{3} a^2 = 4\pi a^3$.
Chọn D. □

Câu 28. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh $SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A $R = \dfrac{a\sqrt{39}}{7}$ **B** $R = \dfrac{a\sqrt{35}}{7}$ **C** $R = \dfrac{a\sqrt{37}}{6}$ **D** $R = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$

Lời giải:

Gọi O là tâm của mặt cầu, khi đó O nằm trên đường thẳng Δ qua C và vuông góc với (ABD).
Gọi H là hình chiếu của O lên SG,với G là trọng tâm tam giác ABC.
Tính được $SG = a$.
Đặt $HG = x$, $x > 0$.



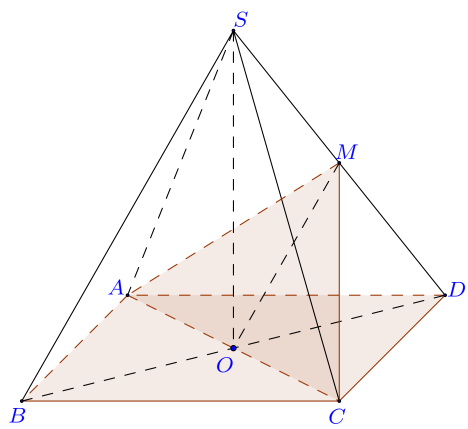
- TH1: O và S nằm cũng phía đối với (ABD)
  Khi đó, $OA = OS$
  $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + (a - x)^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{6}$.
  Do đó, $R = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{37}}{6}$.
- TH2: O và S nằm khác phía đối với (ABD).
  Khi đó, $OA = OS$
  $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + (a + x)^2}$, phương trình này không có nghiệm dương.

Dĩ nhiên, khi đã tìm được bán kính ở trường hợp 1 rồi thì trường hợp 2 ta cũng không cần xét đến vì tồn tại một và chỉ một mặt cầu đi qua 4 điểm không đồng phẳng. □

Câu 29. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Nếu $SB \perp SD$ thì khoảng cách từ B đến (MAC) bằng:

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải:



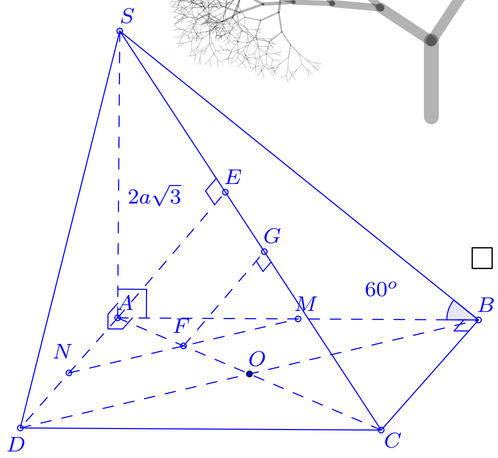
- Đặt $AB = a$, $SA = b$. Ta có $BD^2 = 2a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = b$.
  Ta được $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow a = 1$.
- $V_{B.MAC} = V_{M.ABC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$.
- Vì $AC \perp SO$, $AC \perp BD$ nên $AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp MO$.
  Do đó $S_{\Delta MAC} = \dfrac{1}{2}MO.AC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $h = \dfrac{3V_{B.MAC}}{S_{\Delta MAC}} = \dfrac{1}{2}$. □

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; $SA = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh AB, AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC.

(A) $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ (B) $\dfrac{3a\sqrt{30}}{10}$ (C) $\dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$ (D) $\dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$

Lời giải:



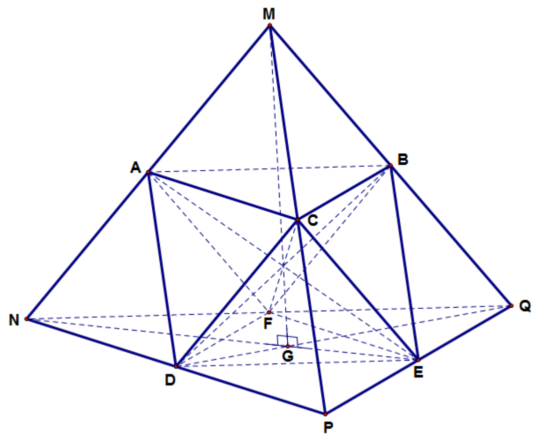
Ta có, $AB = \dfrac{SA}{\tan 60^o} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2a$. Dựng hình như hình vẽ bên dưới, ta tính được $AC = 2a\sqrt{2}$ và $AE = \sqrt{\dfrac{SA^2.AO^2}{SA^2 + AO^2}} = \sqrt{\dfrac{12a^2.8a^2}{12a^2 + 8a^2}} = \dfrac{2\sqrt{30}}{5}a$.

Khi đó: $d[MN, SC] = FG = \dfrac{3}{4}AE = \dfrac{3a\sqrt{30}}{10}$. □

Câu 31. Một khối tứ diện đều có cạnh bằng a. Khi đó, thể tích của khối tám mặt đều mà các đỉnh là trung điểm các cạnh tứ diện đã cho là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$ (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$ (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải:



Thể tích cần tính là: $V = V_{MNPQ} - 4V_{MABC} = \dfrac{1}{3}S_{NPQ} \times MG - \dfrac{4}{3}S_{ABC} \times \dfrac{MG}{2}$

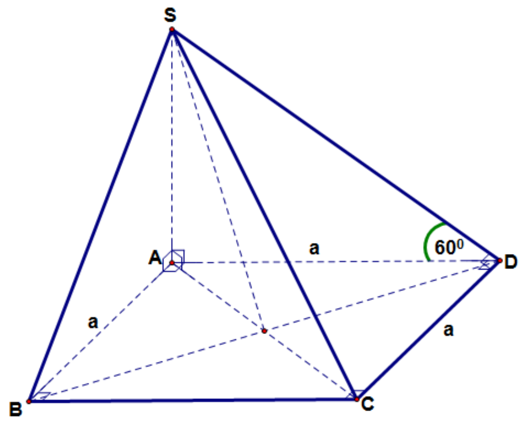
$= \dfrac{1}{3}S_{NPQ} \times MG - \dfrac{1}{3}S_{NPQ} \times \dfrac{MG}{2} = \dfrac{1}{6}S_{NPQ} \times MG$

$= \dfrac{a^2\sqrt{3}.\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{24} = \dfrac{a^2\sqrt{3}.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}}{24} = \dfrac{a^2\sqrt{3a^2 - a^2}}{24} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và mặt bên (SCD) hợp với đáy $ABCD$ một góc $60°$. Tính khoảng cách từ điểm A đến (SCD).

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:



Ta có: $\begin{cases} CD \perp DA \subset (SDA) \\ CD \perp SA \subset (SDA) \\ DA \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$.

Ta có: $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SDA) \perp CD \\ (SDA) \cap (SCD) = SD \\ (SDA) \cap (ABCD) = DA \end{cases} \Rightarrow 60^0 = (\widehat{(SCD),(ABCD)}) = (\widehat{DS, DA}) = \widehat{SDA}$.

Trong tam giác vuông SAD, ta có $SA = AD \tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Ta tính được:

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

Do $CD \perp (SDA)$, mà $DS \subset (SAD)$ nên $CD \perp DS$ hay tam giác SDC vuông tại D, suy ra:

$$S_{SDC} = \frac{DS.DC}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2.$$

Thể tích khối chóp $S.ACD$ là:

$$V_{S.ACD} = \frac{S_{ACD}.SA}{3} = \frac{\frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$$

Mặt khác: $V_{S.ACD} = V_{A.SCD} = \dfrac{d\left(A,(SCD)\right).S_{SCD}}{3}$.

Suy ra khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là:

$$d\left(A,(SCD)\right) = \frac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2a^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

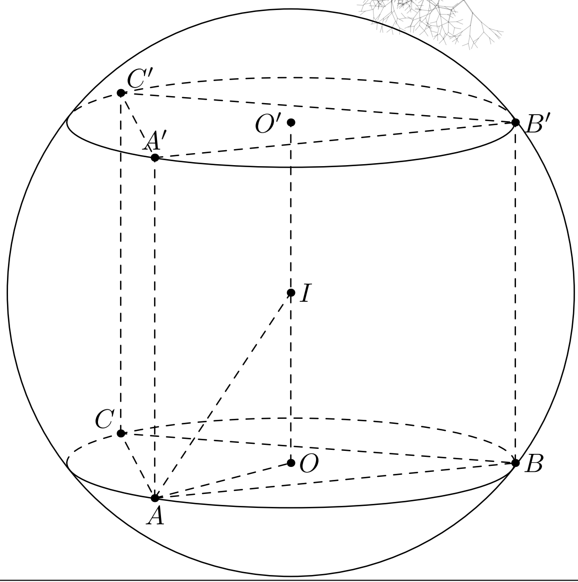
□

Câu 33. Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh cùng bằng 1. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là:

(A) 7π (B) $\dfrac{7\pi}{2}$ (C) $\dfrac{7\pi}{3}$ (D) $\dfrac{7\pi}{6}$

. . . .

Lời giải:

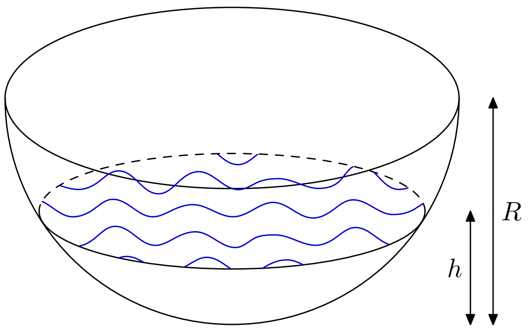


Ta có $R^2 = AI^2 = AO^2 + OI^2 = \dfrac{7}{12}$.

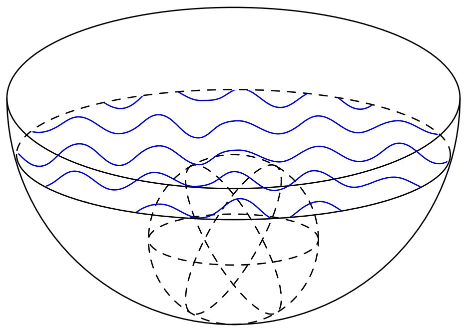
Ta được $S = 4\pi.\dfrac{7}{12} = \dfrac{7\pi}{3}$.

Chọn C. $\square$

Câu 34. Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10cm$ (hình H.1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao $h = 4cm$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình H.2). Bán kính của viên bi bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số lẻ thập phân)?



H.1



H.2

Ⓐ $4,28cm$ Ⓑ $3,24cm$ Ⓒ $4,03cm$ Ⓓ $2,09cm$

Lời giải:

Gọi $x, (0 < x < 5)$ là bán kính của viên bi.

Thể tích viên bi: $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi x^3$.

Thể tích nước ban đầu: $V_0 = \pi h^2(R - \dfrac{h}{3}) = \dfrac{416\pi}{3}$.

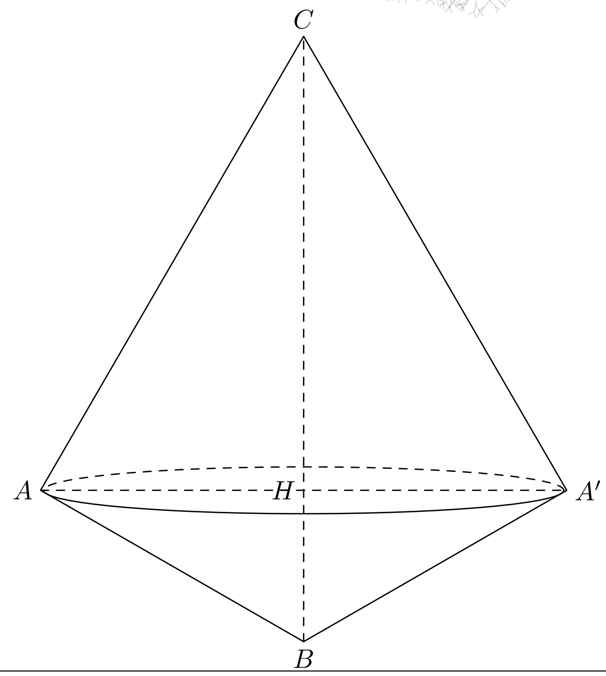
Thể tích sau khi thả biên bi vào: $V_2 = \pi(2x)^2(10 - \dfrac{2x}{3}) = \dfrac{4\pi x^2(30 - 2x)}{3}$.

Ta có $V_0 = V2 - V_1 \Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0 \Rightarrow x \simeq 2.09 \Rightarrow$ chọn D. $\square$

Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác ABC quanh trục BC là:

Ⓐ πa^3 Ⓑ $\dfrac{\pi a^3}{2}$ Ⓒ $\dfrac{\pi a^3}{3}$ Ⓓ $\dfrac{\pi a^3}{4}$

Lời giải:



Ta có ΔABC nửa đều $\Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Ta được $V = \dfrac{1}{3}.2a.\pi.\dfrac{3}{4}a^2 = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

Chọn B. $\square$

Câu 36. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm A không nằm trên đường thẳng Δ. Qua A dựng đường thẳng d bất kì sao cho Δ và d chéo nhau. Gọi MN là đoạn vuông góc chung của d và đường thẳng Δ, với M nằm trên d. Khi đó tập hợp những điểm M là:

(A) Một mặt phẳng
(B) Một mặt trụ
(C) Một mặt nón
(D) Một mặt cầu

Lời giải:

Giả sử ta dựng được MN.
Ta dựng đường thẳng m qua A và song song Δ. Dựng đường thẳng n nằm trong mặt phẳng (Δ, m) , cách đều Δ và m. Dựng $MM' \perp m, M' \in m$. Gọi I là giao điểm của n và NM'. Ta có:

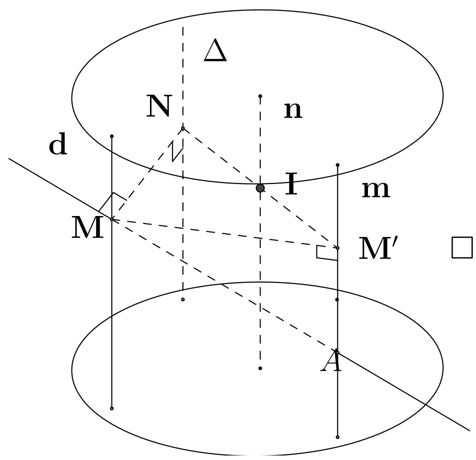
$$\begin{cases} MN \perp d \\ MN \perp m \left(\text{ vì } MN \perp \Delta \text{ và } \Delta // m \right) \end{cases}$$

$\Rightarrow MN \perp (d, m) \Rightarrow MN \perp MM'$

Suy ra $IM = \dfrac{NM'}{2}$ không đổi. (1)

Chứng minh được: $IM \perp n \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra M thuộc mặt trụ.

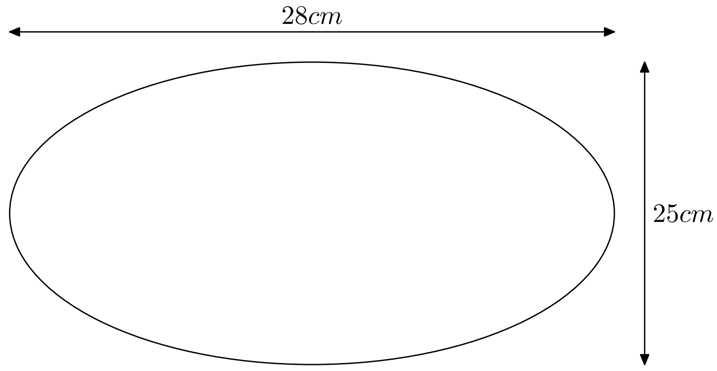


$\square$

Câu 37. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn là $28cm$, trục nhỏ $25cm$. Biết cứ $1.000cm^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20. 000đ. Hỏi từ quả dưa như trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? (Biết rằng bề dày của vỏ dưa không đáng kể, kết quả đã được quy tròn).

(A) 183.000 đ (B) 180.000 đ (C) 185.000 đ (D) 190.000 đ

Lời giải:



Ta có phương trình elip $(E) : \dfrac{x^2}{14^2} + \dfrac{y^2}{12.5^2} = 1$.

Thể tích quả dưa $V = 2\pi \displaystyle\int_0^{14} \left(12.5^2 - \dfrac{12.5^2 x^2}{14^2}\right) dx = \dfrac{8750\pi}{3} cm^3$.

Số tiền thu được $T = \dfrac{8750\pi}{3} . \dfrac{20.000}{1000} \simeq 183.000$ đ.
Chọn A. □

Câu 38. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(0;2;-1)$ và $C(2;-3;1)$. Điểm M thoả mãn $T = MA^2 - MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $P = x_M^2 + 2y_M^2 + 3z_M^2$.

Ⓐ $P = 101$ Ⓑ $P = 134$ Ⓒ $P = 114$ Ⓓ $P = 162$

Lời giải:
Gọi $M(x;y;z)$.
Khi đó, $T = MA^2 - MB^2 + MC^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2$
$= [(x-3)^2 - 4] + [(y+7)^2 - 40] + [(z-3)^2 - 8]$.
T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = 3$, $y = -7$, $z = 3$. Do đó, $P = 134$ □

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;4), B(1;2;4), C(4;4;0)$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y + z - 4 = 0$. Giả sử $M(a;b;c)$ là một điểm trên mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

Ⓐ 1 Ⓑ 3 Ⓒ 2 Ⓓ 4

Lời giải: [Từ thầy Aki Lê]Chọn B.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + 2MC^2 &= \left(4a^2 - 16a + 34\right) + \left(4b^2 - 24b + 40\right) + \left(4c^2 - 16c + 32\right) \\ &= (2a-4)^2 + (2b-6)^2 + (2c-4)^2 + 38 \\ &\geq (BCS) \quad \frac{1}{1^2 + 2^2 + 1^2}\left[(2a-4) + 2(2b-6) + (2c-4)\right]^2 + 38 = 62. \end{aligned}$$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} a + 2b + c = 4, \\ \dfrac{2a-4}{1} = \dfrac{2b-6}{2} = \dfrac{2c-4}{1} \end{cases} \iff a = b = c = 1.$

Suy ra $a + b + c = 3$ □

2 Các câu vận dụng Giải tích và Hình học

Câu 1. Giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ là:

(A) $-2 < m < 2$ (B) $-2 < m \leq -1$
(C) $-1 \leq m < 2$ (D) $-2 \leq m \leq 2$

Lời giải:

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.
Ycbt $\Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \wedge -m \geq 1 \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$
Chọn B. □

Câu 2. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ là

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

Lời giải:

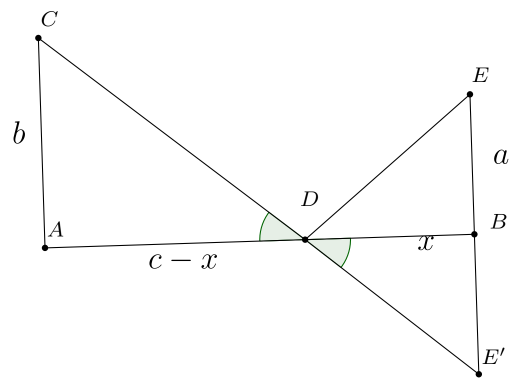
Ta có: $y = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 3. Dynamo là một nhà ảo thuật gia đại tài người Anh, nhưng người ta thường nói Dynamo làm ma thuật chứ không phải ảo thuật. Bất kì màn trình diễn nào của chàng trai trẻ tuổi tài cao này đều khiến người xem há hốc miệng kinh ngạc vì nó vượt qua giới hạn của khoa học. Một lần đến New York anh ta ngẫu hứng trình diễn khả năng bay lơ lửng trong không trung bằng cách di chuyển từ toà nhà này đến toà nhà khác, trong quá trình di chuyển đó có một lần Dynamo đáp đất tại một điểm trong khoảng giữa hai toà nhà (giả sử mọi di chuyển của Dynamo đều là đường thẳng). Biết rằng toà nhà ban đầu Dynamo đứng có chiều cao là a (m), toà nhà sau đó Dynamo đến có chiều cao là b (m), với $a < b$ và khoảng cách giữa hai toà nhà là c (m). Vị trí đáp đất cách toà nhà ban đầu một đoạn là x (m), hỏi x bằng bao nhiêu để quãng đường di chuyển của Dynamo là bé nhất?

(A) $x = \dfrac{3ac}{a+b}$ (B) $x = \dfrac{ac}{3(a+b)}$ (C) $x = \dfrac{ac}{a+b}$ (D) $x = \dfrac{ac}{2(a+b)}$

Lời giải:

$\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{c-x} \Leftrightarrow x = \dfrac{ac}{a+b}$



□

Câu 4. Cho đường thẳng $y = 6x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng

(A) -3 hoặc 1 (B) 3 hoặc 1 (C) 3 hoặc -1 (D) -3 hoặc -1

Lời giải: Ta có $\begin{cases} 3x^2+3=6 \\ x^3+3x-1=6x+m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ m=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ m=1 \end{cases} \end{array}\right.$ □

Câu 5. Hàm số $y=x^3-3x+1-m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi

(A) $m=-1 \vee m=3$ (B) $m<-1 \vee m>3$ (C) $-1<m<3$ (D) $-1 \leq m \leq 3$

Lời giải: $y'=3x^2-3;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1-m \\ x=-1 \Rightarrow y=3-m \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-1-m)(3-m)<0 \Leftrightarrow -1<m<3$ □

Câu 6. Đường thẳng nối điểm cực đại với điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-x+m$ đi qua điểm $M(3;-1)$ khi m bằng

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) Một giá trị khác

Lời giải: $y'=3x^2-1;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

$$\frac{y}{y'}=\frac{x^3-x+m}{3x^2-1}=\frac{x}{3}+\frac{-\dfrac{2}{3}x+m}{3x^2-1}$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $d: y=-\dfrac{2}{3}x+m$

$M(3;-1) \in d \Leftrightarrow m=1$ □

Câu 7. Cho đường thẳng $y=-4x+1$. Đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx+1$ có hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng d khi:

(A) $m=-1$ (B) $m=3$ (C) $m=1$ (D) $m=2$

Lời giải: D

Ta có $y'=3x^2-3m,\ y'=0 \Leftrightarrow x^2=m$ (1). Vì đồ thị có hai cực trị nên $m>0$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{m} \Rightarrow y=-2m\sqrt{m}+1 \\ x=-\sqrt{m} \Rightarrow y=2m\sqrt{m}+1 \end{array}\right.$

Thay vào đường thẳng $y=-4x+1$ ta được $2m\sqrt{m}=4\sqrt{m} \Leftrightarrow m=2$. □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

(A) $m<0$ (B) $m=9$ (C) $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>6 \end{array}\right.$ (D) $m>6$

Lời giải: C

$y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2), y'=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2-m$.

Điều kiện bài toán thoả mãn khi $|2-m+1|>3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>6 \end{array}\right.$ □

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3;20)$ và có hệ số góc m. Giá trị của m để đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt là

(A) $m < \frac{15}{4}$ (B) $\frac{15}{4} < m \neq 24$ (C) $24 \neq m < \frac{15}{4}$ (D) $m \geq \frac{15}{4}$

Lời giải: B

Ta có $d : y = mx - 20m + 3$. Xét phương trình

$$x^3 - 3x + 2 = m(x-3) + 20 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0 \quad (1).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi phương trình $x^2 + 3x + 6 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3. □

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x+1}$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

(A) $m = -1$ (B) Không có m (C) $m = 1$ (D) $m = 0$

Lời giải: Chọn C.

Tính đạo hàm y' sau đó giải $y'(0) = 0$ tìm m. Thay ngược m vào lại y để kiểm tra. □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x}{x-2}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB nhận $G\left(1; \dfrac{7}{3}\right)$ làm trọng tâm.

(A) $m = 2$ (B) $m = -2$ (C) Không tồn tại m (D) $m = 1$

Lời giải: □

Câu 12. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$

(A) $-2 < m \leq -1$ (B) $-2 < m < 2$ (C) $-2 \leq m \leq 2$ (D) $-2 \leq m \leq 1$

Lời giải: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \backslash \{-m\}$. Đạo hàm: $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty;1)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên $(-\infty;1)$, tức là

$$\begin{cases} -m \notin (-\infty;1) \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 1 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi $m \in (-2;-1]$. □

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \dfrac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1;2]$ bằng -2.

(A) $m = -3$ (B) $m = 2$ (C) $m = 4$ (D) $m = 3$

Lời giải: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\} \Longrightarrow m \notin [1;2]$

$f'(x) = \dfrac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0;\ \forall x \neq 0 \Longrightarrow \max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = \dfrac{m+1}{1-m}$

Theo đề bài ta có: $\max\limits_{[1;2]} f(x) = -2 \Longleftrightarrow \dfrac{m+1}{1-m} = -2 \Longleftrightarrow m = 3$ □

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, gốc tọa độ O và B sao cho tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau.

A $m = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$ **B** $m = \dfrac{1}{2}$ **C** $m = 0$ **D** Không có giá trị m

Lời giải: Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc $\Longleftrightarrow$ tích hai hệ số góc bằng -1. Tức là YCBT $\Longleftrightarrow y'(x_A).y'(x_B) = -1$.
Dễ thấy đáp án C bị loại. Thay đáp án A, B vào hàm số đã cho, giải phương trình tìm được hai nghiệm x_A, x_B khác 0. Dùng máy tính bỏ túi kiểm tra $y'(x_A).y'(x_B)$ □

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt đường thẳng $y = m - 1$ tại 3 điểm phân biệt.

A $1 \le m < 5$ **B** $1 < m < 5$ **C** $1 < m \le 5$ **D** $0 < m < 4$

Lời giải: □

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = 3x + 1$ và đồ thị $y = x^3 - 3mx + 3$ có duy nhất một điểm chung.

A $m \in \mathbb{R}$ **B** $m \le 0$ **C** $m < 0$ **D** $m \le 3$

Lời giải: Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 3(m+1)x \overset{x=0(l)}{\Longleftrightarrow} 3(m+1) = x^2 + \dfrac{2}{x} = f(x)$

Ta có: $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3-2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

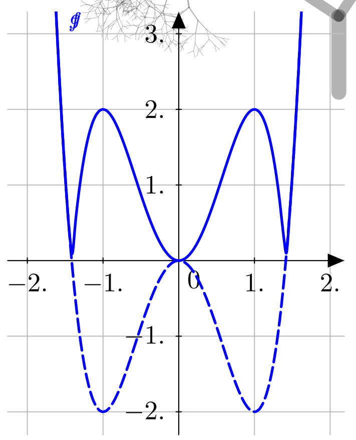
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, ycbt $\Leftrightarrow 3(m+1) < 3 \Leftrightarrow m < 0$ □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2\left|x^2 - 2\right|$ tại 6 điểm phân biệt.

A $0 < m < 2$ **B** $0 < m < 1$ **C** $1 < m < 2$ **D** Không tồn tại m

Lời giải:



Xét hàm số $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

Ta có: $y = 2x^2\left|x^2 - 2\right| = \left|2x^4 - 4x^2\right| = \begin{cases} f(x) & khi\, f(x) \geq 0 \\ -f(x) & khi\, f(x) < 0 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $f(x) = 2x^4 - 4x^2$, suy ra đồ thị $y = 2x^2|x^2 - 2|$

Dựa vào đồ thị, ycbt $\Longleftrightarrow 0 < m < 2$ □

Câu 18. Tìm m để phương trình $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 3 nghiệm lớn hơn -1.

Ⓐ $\dfrac{1}{2^9} \leq m < 1$ Ⓑ $\dfrac{1}{2^5} < m < 1$ Ⓒ $\dfrac{1}{2^9} < m < 1$ Ⓓ $\dfrac{1}{2^5} \leq m < 1$

Lời giải: Ta có $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 = \log_2 m \quad (m > 0)$

Xét hàm số $y = x^4 - 6x^2$, ta có

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↘		-9	↗	-5	↗	0	↘	-9	↗	$+\infty$

Yêu cầu của bài toán tương đương $-5 < \log_2 m < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^5} < m < 1$ □

Câu 19. Cho hàm số $y = a^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Biết hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1, đạt cực đại tại x_2, đồng thời $0 < x_1 < x_2$. Chọn mệnh đề đúng:

Ⓐ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ Ⓑ $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$

Ⓒ $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$ Ⓓ $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$

Lời giải: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta'_{y'} = b^2 - 3ac$

Hàm số đạt cực tiểu tại x_1, cực đại tại x_2, đồng thời $0 < x_1 < x_2$, suy ra $a < 0$ và phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \\ \dfrac{-2b}{3a} > 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$ □

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - mx} - x$. Để tiệm cận ngang là đường $y = 1$ thì m bằng bao nhiêu?

Ⓐ -2 Ⓑ $\dfrac{1}{2}$ Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$ Ⓓ 2

Lời giải: Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+mx}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{m}{x}}-x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\dfrac{m}{x}}-1\right)=+\infty.$

và: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+mx}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{-mx}{x\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-m}{\sqrt{1-\dfrac{m}{x}}+1}=\dfrac{-m}{1+1}=\dfrac{-m}{2}$

Đường thẳng y $=1$ là tiệm cận ngang, suy ra $-\dfrac{m}{2}=1\Leftrightarrow m=-2.$ □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2x-m+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-7,-1)$.

(A) $m>\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{3}<m<1, m>7$
(C) $\dfrac{1}{3}<m\le 1, m\ge 7$ (D) $\dfrac{1}{3}<m\le 1$

Lời giải: Ta có: $y'=\dfrac{3m-1}{(x+m)^2}$. Hàm số đồng biến trên $(-7;-1)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0, \forall x\in(-7;-1)$ và chỉ bằng 0 tại hữu hạn điểm trên (-7;-1). Tức là:

$$\begin{cases}3m-1\ge 0\\-m\notin(-7;-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{1}{3}\\\left[\begin{array}{l}m\ge 7\\m\le 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 7\\\dfrac{1}{3}<m\le 1\end{array}\right.$$ □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

(A) Hàm số có cực tiểu và không có cực đại
(B) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$
(C) Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$
(D) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất

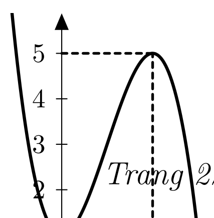
Lời giải: Hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ không có đạo hàm tại $x=0$ □

Câu 23. Với giá trị nào của hàm số m thì đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$ không có tiệm cận?

(A) $m=0$ hoặc $m=1$ (B) $m=1$
(C) $m=0$ (D) $m=1$ hoặc $m=2$

Lời giải: Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}=\infty$. Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phương trình $2x^2-3x+m=0$ có nghiệm $x=m$
$\Leftrightarrow 2m^2-3m+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$ □

Câu 24. Cho đường cong trong hình bên
Đường cong đó là đồ thị sau là của hàm số nào?



(A) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
(B) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$
(C) $y = -x^3 - 3x^2 - 1$
(D) $y = x^3 - 3x + 1$

Lời giải: Từ đồ thị suy ra $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a < 0)$. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số có hai điểm cực trị x = 0 và x = 2. Suy ra $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$ (1)

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm cực trị $(0; 1)$ và $(2; 5)$, suy ra $\begin{cases} d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d + 5 \end{cases}$ (2)

Từ (1) (2), suy ra $a = -1, b = 3, c = 0, d = 1$. Vậy $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ ☐

Câu 25. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt?

(A) $0 < m < 4$ (B) $2 < m < 6$ (C) $0 \le m < 6$ (D) $0 \le m < 4$

Lời giải: $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 + 2 = m$. Xét hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 2$, ta có

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $2 < m < 6$ thỏa yêu cầu bài toán ☐

Câu 26. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$ là:

(A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) 4

Lời giải:
Ta có $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} - 4.2^{x-x^2} - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \vee x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow$ chon A. ☐

Câu 27. Xét a và b là hai số thực dương tuỳ ý. Đặt $x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000}$, $y = 1000 \ln a - \ln \dfrac{1}{b^{1000}}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

(A) $x < y$ (B) $x > y$ (C) $x \le y$ (D) $x \ge y$

Lời giải:
$x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000} = 1000 \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)$
$y = 1000 \ln a - \ln \dfrac{1}{b^{1000}} = 1000 \ln a - \ln b^{-1000} = 1000 \ln a + 1000 \ln b = 1000 \ln ab$
Ta có: $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \ge ab \Leftrightarrow \ln\left(a^2 - ab + b^2\right) \ge \ln ab \Leftrightarrow x \ge y$ ☐

Câu 28. Năm 1992 người ta đã biết số $p = 2^{756839} - 1$ là một số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất được biết cho đến lúc đó). Hãy tìm số các chữ số của p khi viết trong hệ thập phân.

(A) 227830 chữ số (B) 227834 chữ số (C) 227832 chữ số (D) 227831 chữ số

Lời giải: Số chữ số của 2^{756839} viết trong hệ thập phân là: $1 + [756839 \log 2] = 227832$ (kí hiệu [ ] chỉ hàm phần nguyên).
Ta lại có: với mọi số nguyên dương n, 2^n có chữ số cuối cùng là 2, 4, 6 hoặc 8 nên $2^{756839} - 1$ có số chữ số bằng với số chữ số của 2^{756839}. Vậy ta có kết quả như ở đáp án **C** □

Câu 29. Nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

(A) 2^9 (B) 2^{18} (C) 8 (D) 2

Lời giải: Ta có $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \Rightarrow \log_2 a^{\frac{1}{3}} = \log_2 \left(\frac{2^5}{b}\right) \Rightarrow a = \frac{2^{15}}{b^3}$

$\log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \Rightarrow \log_2 \frac{2^{15}}{b^{\frac{8}{3}}} = 7 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = 64 \Rightarrow ab = 2^9$ □

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $x_1 + x_2 = 3$ là

(A) $m = \frac{9}{2}$ (B) $m = 3\sqrt{3}$ (C) $m = -\frac{3}{2}$ (D) $m = \frac{27}{2}$

Lời giải: D
Đặt $t = 3^x$, phương trình trở thành $t^2 - 2mt + 2m = 0$ (1). Điều kiện bài toán tương đương với tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 sao cho $t_1.t_2 = 3^3 = 27$. Điều đó xảy ra khi
$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ 2m = 27 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{27}{2}.$$ □

Câu 31. Cho $m = \log_2 3; n = \log_5 2$. Tính $\log_2 2250$ theo m, n.

(A) $\log_2 2250 = \frac{2mn + n + 3}{n}$ (B) $\log_2 2250 = \frac{2mn + n + 2}{n}$

(C) $\log_2 2250 = \frac{2mn + 2n + 3}{m}$ (D) $\log_2 2250 = \frac{3mn + n + 4}{n}$

Lời giải: □

Câu 32. Cho phương trình $8^x - 9.4^x + 24.2^x - 15 - m = 0$. Tìm m để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt trong đó có 2 nghiệm nhỏ hơn $\log_2 3$.

(A) $3 \le m < 5$ (B) $1 < m < 3$ (C) $1 < m < 5$ (D) $3 < m < 5$

Lời giải: Đặt $2^x = t$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^3 - 9t^2 + 24t - 15 = m$ (1)
Ta cần tìm m để phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt trong đó có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa $0 < t_1, t_2 < 3$.
Xét hàm số $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 15$, $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 18t + 4$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = 4$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $3 < m < 5$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Câu 33. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2)$ là:

A $S = (1, 3)$ **B** $S = (2, \infty)$ **C** $S = (3, \infty)$ **D** $S = (2, 3)$

Lời giải: Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

$1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow \log_2 2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow 2x - 4 > x^2 - 3x + 2$
$\Leftrightarrow 2 < x < 3$ (thỏa điều kiện). Vậy $S = (2; 3)$ □

Câu 34. Phương trình $2^x = 3 - x$ có nghiệm là:

A $x = 0$ **B** $x = 2$ **C** $x = 1$ **D** Vô nghiệm

Lời giải: Ta có: x = 1 là một nghiệm của phương trình.
VT là hàm số luôn đồng biến
VP là hàm số luôn nghịch biến
Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.
□

Câu 35. Tìm m để phương trình $4^x - 2(m-1)2^x + 3m - 4 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

A $m = 2$ **B** $m = 4$ **C** $m = \dfrac{7}{3}$ **D** $m = \dfrac{5}{2}$

Lời giải: Đặt $2^x = t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2(m-1)t + 3m - 4 = 0$ (1).
Yêu cầu của bài toán tương đương với phương trình (1) có hai nghiệm dương t_1, t_2 sao cho $\log_2 t_1 + \log_2 t_2 = 3 \Leftrightarrow t_1.t_2 = 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 3m + 4 > 0 \\ 2(m-1) > 0 \\ 3m - 4 > 0 \\ 3m - 4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$ □

Câu 36. Cho $a > 0$, $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \log_2(a^2 + 4b^2) - \log_2 a - \log_2 b$:

A 2 **B** 4 **C** 3 **D** 5

Lời giải: $A = \log_2(a^2 + 4b^2) - \log_2 a - \log_2 b = \log_2 \dfrac{a^2 + 4b^2}{ab}$.

Ta có $a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{a^2.4b^2} \Leftrightarrow a^2 + 4b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \dfrac{a^2 + 4b^2}{ab} \geq 4$

$\Rightarrow \log_2 \dfrac{a^2 + 4b^2}{ab} \geq \log_2 4$ hay $\log_2 \dfrac{a^2 + 4b^2}{ab} \geq 2$ □

Câu 37. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số: $e^x\left(2 + e^{-x}\tan x\right)$, biết $F(0) = 2$. Khi đó hàm số $F(x)$ là:

A $2e^x - \ln|\cos x|$ **B** $2e^x + \ln|\cos x|$ **C** $2e^x - \ln|\sin x|$ **D** $2e^x + \ln|\sin x|$

Lời giải:

Ta có $F(x) = \displaystyle\int e^x(2 + e^{-x}\tan x)dx = \int (2e^x + \tan x)dx = 2e^x - \ln|\cos x| + C.$

Ta được $F(0) = 2.e^0 - \ln|\cos 0| + C = 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 38. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

B $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

C $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{2} [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x$

D $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x$

Lời giải:

Ta có: $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

$= -\int\limits_{2}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}(t) + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x$ □

Câu 39. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{3} x(x-1)^{1000}\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{2003.2^{1002}}{1003002}$ **B** $I = \dfrac{1502.2^{1001}}{501501}$ **C** $I = \dfrac{3005.2^{1002}}{1003002}$ **D** $I = \dfrac{2003.2^{1001}}{501501}$

Lời giải: Đặt $a = (x-1)$. Khi đó: $I = \int\limits_{0}^{2} (a+1)\,.a^{1000}\,\mathrm{d}a = \int\limits_{0}^{2} \left(a^{10001} + a^{1000}\right)\,\mathrm{d}a = \left.\left(\dfrac{a^{1002}}{1002} + \dfrac{a^{1001}}{1001}\right)\right|_0^2 = \dfrac{1502.2^{1001}}{501501}$ □

Câu 40. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{2^{1000}} \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

A $I = -\dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1000\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$

B $I = -\dfrac{1000\ln 2}{1+2^{1000}} + \ln\dfrac{2^{1001}}{1+2^{1000}}$

C $I = \dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1000\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$

D $I = \dfrac{1000\ln 2}{1+2^{1000}} - \ln\dfrac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$

Lời giải: □

Câu 41. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x + 4$ và $y = x + 2$.

A $\dfrac{1}{6}$ **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** $\dfrac{1}{3}$ **D** $\dfrac{1}{4}$

Lời giải: Ta có: $x^2 - 2x + 4 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2$

Do đó, $S = \displaystyle\int_1^2 |x^2 - 3x + 2|\,\mathrm{d}x = \left|\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{1}{6}$ □

Câu 42. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{(x-1)e^{x^2-2x}}$, $y = 0$, $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

Ⓐ $V = \dfrac{\pi(2e-1)}{2e}$ Ⓑ $V = \dfrac{\pi(2e-3)}{2e}$ Ⓒ $V = \dfrac{\pi(e-1)}{2e}$ Ⓓ $V = \dfrac{\pi(e-3)}{2e}$

Lời giải: Hàm số $y = \sqrt{(x-1)e^{x^2-2x}}$ xác định khi và chỉ khi $x \geq 1$.
Do đó,

$$V = \pi \int\limits_1^2 \left((x-1)e^{x^2-2x}\right)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi(e-1)}{2e}$$

□

Câu 43. Nếu $\int\limits_0^a xe^x dx = 1$ thì giá trị của a bằng

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 2 Ⓓ e

Lời giải: $\int\limits_0^1 xe^x = 1 \;\Rightarrow a = 1$ □

Câu 44. Nếu $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \dfrac{1}{64}$ thì giá trị của n bằng

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 5 Ⓓ 6

Lời giải: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x \cos x dx = \dfrac{1}{64} \Rightarrow n = 5$ □

Câu 45. Cho hàm số $G(x) = \int\limits_0^{x^2} \cos\sqrt{t}dt$. Đạo hàm của $g(x)$ là

Ⓐ $G'(x) = 2x\cos|x|$ Ⓑ $G'(x) = 2x\cos x$ Ⓒ $G'(x) = x\cos x$ Ⓓ $G'(x) = 2x\sin x$

Lời giải: $G(x) = f\left(x^2\right) - f(0) \Rightarrow G'(x) = f'\left(x^2\right) = 2x\cos|x|$ □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị a trong đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4}; 2\pi\right]$ thỏa mãn $\int_0^a \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\, dx = \dfrac{2}{3}$.

Ⓐ 3 Ⓑ 2 Ⓒ 1 Ⓓ 4

Lời giải: B
Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\cos x \Rightarrow 2t\ \mathrm{d}t = -3\sin x\ \mathrm{d}x$.
Ta được $\int_0^a \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\, dx = \int_2^{\sqrt{1+3\cos a}} \left(-\dfrac{2}{3}\right)\, dt = -\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{1+3\cos a} - 2\right) = \dfrac{2}{3}$
$\Leftrightarrow \sqrt{1+3\cos a} - 2 = -1 \Leftrightarrow \cos a = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{\pi}{2}$ hoặc $a = \dfrac{3\pi}{2}$. □

Câu 47. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) $\displaystyle\int_1^3 |x^2-2x|\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2-2x)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x$

(B) $\displaystyle\int_1^3 |x^2-2x|\mathrm{d}x = -\int_1^2 (x^2-2x)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_1^3 |x^2-2x|\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2-2x)\mathrm{d}x - \int_2^3 (x^2-2x)\mathrm{d}x$

(D) $\displaystyle\int_1^3 |x^2-2x|\mathrm{d}x = \int_1^2 |x^2-2x|\mathrm{d}x - \int_2^3 |x^2-2x|\mathrm{d}x$

Lời giải: Chọn B.
Ta có: $f(x)=x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$
Lập bảng xét dấu ta được: $f(x)<0, x\in(1;2), f(x)>0, x\in(2;3)$.
Do đó

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = -\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$$

□

Câu 48. Biết $a,b\in\mathbb{Z}$ sao cho $\displaystyle\int (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = \left(\frac{ax+b}{4}\right)e^{2x}+C$. Khi đó giá trị $a+b$ là:

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Lời giải: □

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)=\sin 2x.\cos x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ có đồ thị nằm phía trên trục tung. Biết tích S của hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=0$ và $x=\frac{\pi}{2}$ có dạng $S=\frac{a\sqrt{2}}{3}+\frac{b}{3}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+2b$.

(A) $T=6$ (B) $T=5$ (C) $T=7$ (D) $T=4$

Lời giải: $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos^2 x dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{2}{3}\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow T=a+2b=4$ □

Câu 50. Cho $G=\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$. Nếu đổi biến bằng cách đặt $x=\frac{2}{\cos t}$ ta được kết quả nào sau đây?

(A) $G=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 t-1\right)\mathrm{d}t$

(B) $2\left(\tan t-t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

(C) $G=2\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

(D) $G=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t\mathrm{d}t$

Lời giải: $x=\dfrac{2}{\cos t}\Rightarrow dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$
$x=2\Rightarrow t=0$
$x=4\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$$G=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 t}-4}}{\dfrac{2}{\cos t}}.2.\frac{\sin t}{\cot^2 t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt=2\left(\tan t-t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$ □

Câu 51. Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $2w+i$ và $3w-5$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tìm phần thực của số phức w.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

Lời giải: Ta có: $\begin{cases}(2w+i)+(3w-5)=-a\\(2w+i)(3w-5)=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}w=\dfrac{5-a}{5}-\dfrac{i}{5}\\(2w+i)(3w-5)=b\end{cases}$.

Đặt $c=\dfrac{5-a}{5}$. Khi đó, $\begin{cases}w=c-\dfrac{i}{5}\\\left(2\left(c-\dfrac{i}{5}\right)+i\right)\left(3\left(c-\dfrac{i}{5}\right)-5\right)=b\end{cases}\quad(*)$

$(*)\Leftrightarrow 2c(3c-5)+\dfrac{9}{25}+\dfrac{3}{5}.(c-5).i=b\Leftrightarrow\begin{cases}2c(3c-5)+\dfrac{9}{25}=b\\\dfrac{3}{5}.(c-5)=0.\end{cases}$. Suy ra $c=5$ □

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SA=a$. Tam giác ABC vuông cân tại B, $BA=BC=a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

(A) $\dfrac{a^3}{6}$ (B) $\dfrac{a^3}{3}$ (C) $\dfrac{a^3}{2}$ (D) a^3

Lời giải:

Ta có $V=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}.a^2=\dfrac{a^3}{6}\Rightarrow$ chọn A. □

Câu 53. Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2 lần chiều cao tam giác đáy. Thể tích của khối chóp là:

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$

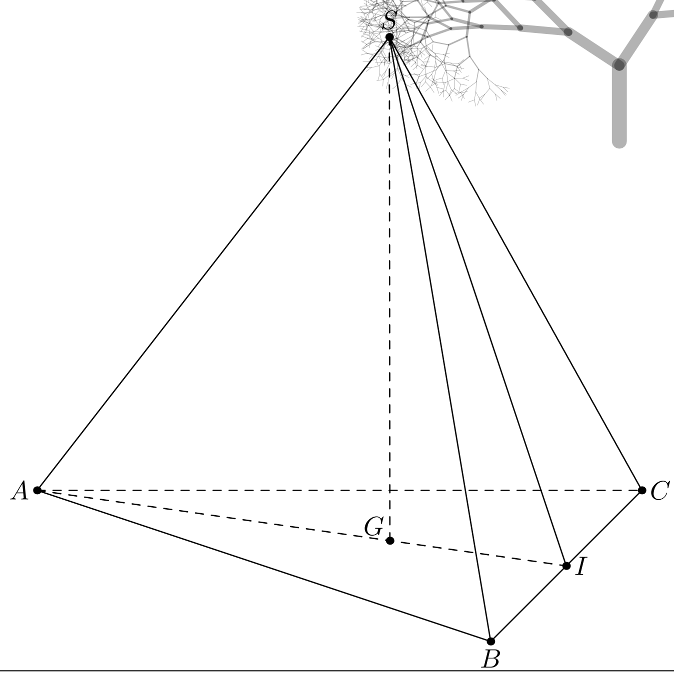
Lời giải:

Ta có $SA = 2AI = a\sqrt{3}$.

Ta có $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = 2a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Ta được $V = \dfrac{1}{3}2a\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn B. □



Câu 54. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh $AB = 2a$, $BC = a$ và $AA' = 2a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (C) $4a^3\sqrt{3}$ (D) $2a^3\sqrt{3}$

Lời giải:

Ta có $V = 2a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.2a.a = 2a^3\sqrt{3} \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 55. Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tỉ số thể tích giữa khối chóp $S.ABCD$ và $S.AOB$ là:

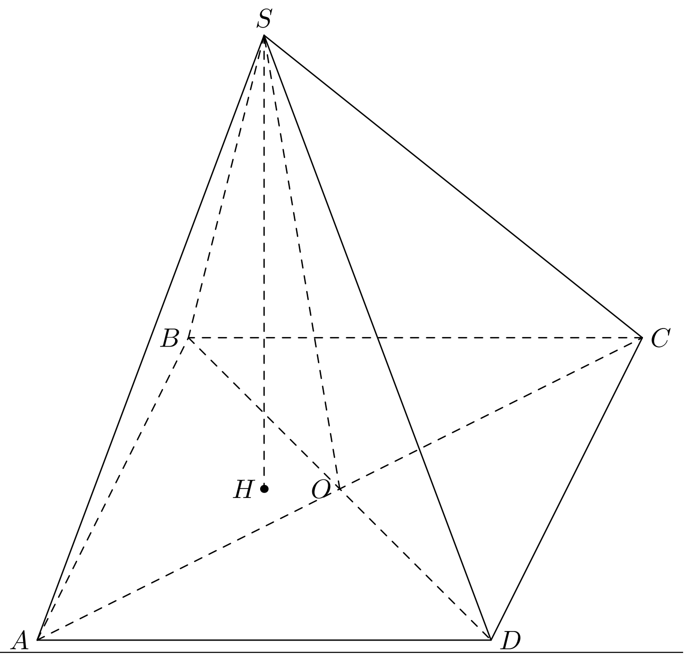
(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) 4 (D) 2

Lời giải:

Ta có $S_{\diamond ABCD} = 4S_{\triangle AOB}$.

Ta được $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{S.AOB}} = 4$.

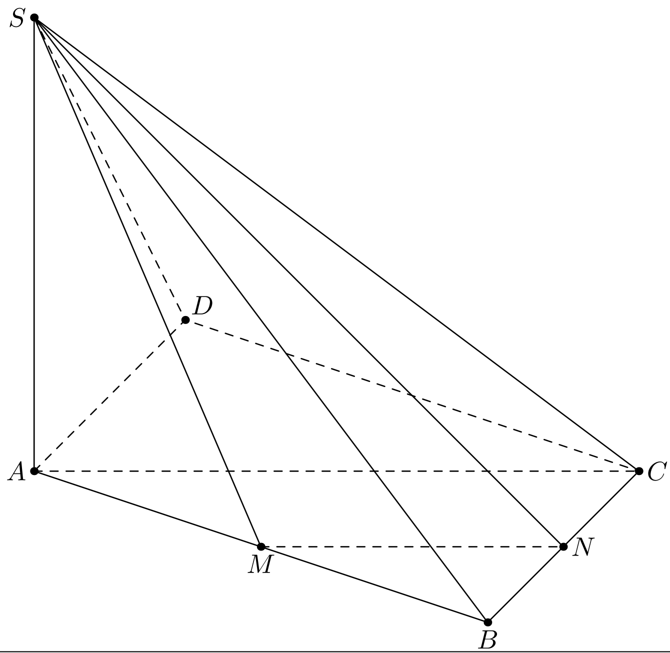
Chọn C. □



Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Khi đó thể tích khối chóp $S.BMN$ bằng

(A) $\dfrac{a^2}{4\sqrt{3}}$ (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (D) $\dfrac{a^3}{8\sqrt{3}}$

Lời giải:



Ta có $S_{\Delta BMN} = \dfrac{1}{8} S_{\Delta ABCD}$.

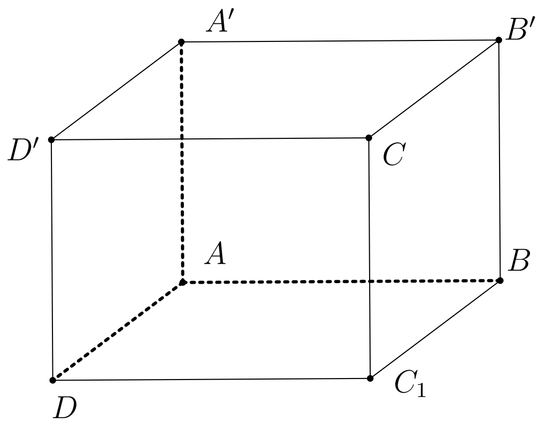
Khi đó $V_{S.BMN} = \dfrac{1}{8} V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{8\sqrt{3}}$.

Chọn D. □

Câu 57. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích các mặt $ABCD$, $ABB'A'$, $ADD'A'$ lần lượt bằng S_1, S_2 và S_3. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $V = S_1\sqrt{\dfrac{S_2S_3}{2}}$ (B) $V = \sqrt{S_1S_2S_3}$ (C) $V = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{S_1S_2S_3}{2}}$ (D) $V = S_2S_3\sqrt{\dfrac{S_1}{2}}$

Lời giải:



Ta có: $V = AB.AD.AA' = \dfrac{S_{ABCD}}{AD}.\dfrac{S_{ADD'A'}}{AA'}.\dfrac{S_{ABB'A'}}{AB} = \dfrac{S_1.S_2.S_3}{V}$

Vậy, $V = \sqrt{S_1S_2S_3}$

□

Câu 58. Cho hình chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a và các mặt bên đều tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp.

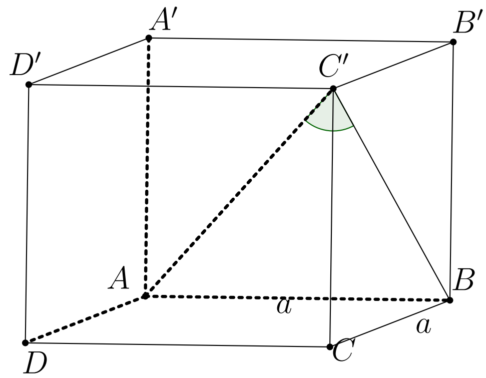
(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải: □

Câu 59. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, đường chéo AC' tạo với mặt bên $(BCC'B')$ một góc α $(0 < \alpha < 45^0)$. Tính thể tích của lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$.

A $a^3\sqrt{\cot^2\alpha + 1}$ **B** $a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$ **C** $a^3\sqrt{\cos 2\alpha}$ **D** $a^3\sqrt{\cot^2\alpha - 1}$

Lời giải:



Trong tam giác vuông ABC',

$$BC' = AB.\cot\alpha = a\cot\alpha$$

Trong tam giác vuông $C'B'B$,

$$BB' = \sqrt{BC'^2 - B'C'^2} = a\sqrt{\cot^2\alpha - 1}$$

Vậy, $V = BA.BC.BB' = a^3.\sqrt{\cot^2\alpha - 1}$ □

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Tính tỉ số thể tích $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C}}$.

A 4 **B** $\dfrac{1}{4}$ **C** $\dfrac{1}{2}$ **D** 2

Lời giải: □

Câu 61. Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật bằng a, b, c. Thể tích của khối hộp đó là

A $V = \sqrt{\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8}}$

B $V = \dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8}$

C $V = abc$

D $V = a + b + c$

Lời giải: Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các đường chéo $AC = a,\ B'C = b,\ AB' = c$
Xét các tam giác vuông $ABB',\ BB'C,\ ABC$ ta có
$AB^2 + BB'^2 = AB'^2 \Rightarrow AB^2 = c^2 - BB'^2$ (1)
$BC^2 + BB'^2 = B'C^2 = b^2$ (2)
$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow BC^2 = a^2 - AB^2 = a^2 - c^2 + BB'^2$ (3)
Thay (1) và (3) vào (2) ta được $BB'^2 = \dfrac{b^2 - a^2 + c^2}{2}$ (4)
Thay (4) vào (1), (3) $\Rightarrow AB^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2},\ BC^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$
$\Rightarrow V = \sqrt{BC^2.BB'^2.AB^2} = \sqrt{\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}{8}}$ □

Câu 62. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a, góc nhọn 60^o và đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Thể tích của khối hộp đó là

Ⓐ a^3 Ⓑ $\sqrt{3}a^3$ Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$ Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$

Lời giải: Gọi hình hộp là $ABCD.A'B'C'D'$ có góc nhọn là $\widehat{BAD}=60^o$.
$ABCD$ là hình thoi nên ΔABD đều. Đường chéo nhỏ của hình hộp là AB'
Suy ra $AC=AB'=2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$
$BB'=\sqrt{AB'^2-AB^2}=a\sqrt{2}$; $S_{ABCD}=2S_{ABD}=2.\dfrac{1}{2}AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$
$V=BB'.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ □

Câu 63. Một hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b và tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của khối chóp có đáy là đáy của lăng trụ và đỉnh là một điểm bất kì trên đáy còn lại là

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2b\sin\alpha$ Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2b\sin\alpha$ Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2b\cos\alpha$ Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2b\cos\alpha$

Lời giải: Gọi hình chóp đều là $S.ABC$, đường cao SO, M là trung điểm của cạnh BC
Khi đó $AO=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
$SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{3}}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{3}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2}{12}.\sqrt{b^2-3a^2}$ □

Câu 64. Một hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh a, các mặt bên tạo với đáy một góc α. Thể tích của khối chóp đó là

Ⓐ $\dfrac{a^3}{2}\sin\alpha$ Ⓑ $\dfrac{a^3}{2}\tan\alpha$ Ⓒ $\dfrac{a^3}{6}\cot\alpha$ Ⓓ $\dfrac{a^3}{6}\tan\alpha$

Lời giải: Chiều cao của khối chóp $h=\dfrac{a}{2}\tan\alpha$, $S_{\text{đáy}}=a^2$
Thể tích $V=\dfrac{1}{3}h.S_{\text{đáy}}=\dfrac{a^3}{6}\tan\alpha$ □

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$. Gọi α là số đo góc giữa đường thẳng SB và $mp(SAC)$. Tính giá trị $\sin\alpha$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$ Ⓑ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ Ⓒ $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ Ⓓ $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

Lời giải: □

Câu 66. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hai mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC), diện tích tam giác SBC là $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{8}$ Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{16}$ Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$

Lời giải: □

Câu 67. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$, diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{4}$ (B) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{6}$ (C) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{15}}{4}$ (D) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{17}}{8}$

Lời giải: □

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $BC = 2a$; $\widehat{ABC} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh BC, $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

(A) a (B) $2a$ (C) $a\sqrt{3}$ (D) $a\sqrt{2}$

Lời giải:

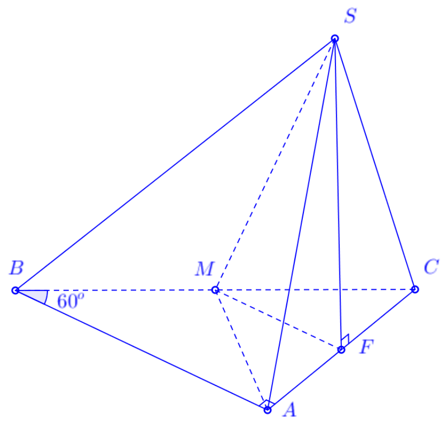
Gọi F là trung điểm AC. Suy ra $SF \perp BC$.

Tính được $AC = a\sqrt{3}, AF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AB = a, MF = \dfrac{a}{2}$.

$SF = \sqrt{SC^2 - AF^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}, SM = a\sqrt{5}$.

Khi đó, $S_{SMF} = \dfrac{a^2}{2}$.

$d[S,(ABC)] = h_S = \dfrac{2S_{SMF}}{MF} = 2a$.



□

Câu 69. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác tù, $AB = AC$. Góc tạo bởi hai đường thẳng AA' và BC' bằng 30^0; khoảng cách giữa AA' và BC' bằng a; góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $9a^3\sqrt{3}$ (B) $4a^3\sqrt{3}$ (C) $3a^3\sqrt{3}$ (D) $6a^3\sqrt{3}$

Lời giải: □

Câu 70. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = 2a$; $AA' = 2a$. Gọi α là số đo góc giữa hai đường thẳng AC và DB'. Tính giá trị $\cos\alpha$.

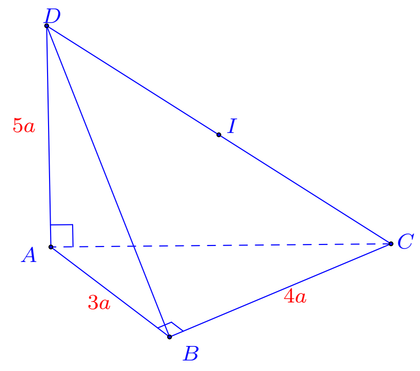
(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Lời giải: □

Câu 71. Cho tứ diện $DABC$, tam giác ABC là vuông tại B, DA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $AB = 3a$, $BC = 4a, DA = 5a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $DABC$ có bán kính bằng

(A) $\dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$ (C) $\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:

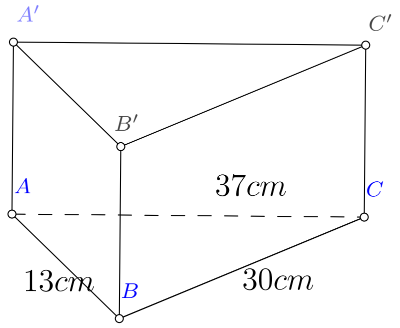


Ta thấy rằng, trung điểm I của AD là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Do đó, bán kính $R = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$ □

Câu 72. Cho lăng trụ đứng tam giác có độ dài các cạnh đáy là $37cm; 3cm; 30cm$ và biết tổng diện tích các mặt bên là $480cm^2$. Tính thể tích V của lăng trụ đó.

(A) $V = 2160cm^3$ (B) $V = 360cm^3$ (C) $V = 720cm^3$ (D) $V = 1080cm^3$

Lời giải:



Nửa chi vi đáy: $p = \dfrac{37 + 13 + 30}{2} = 40$
Diện tích đáy là: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 180cm^2$
Gọi x là độ dài chiều cao của lăng trụ:
$S_{xq} = 13x + 37x + 30x = 480 \Longrightarrow x = 6$
Vậy thể tích cần tìm: $V = 6.180 = 1080cm^3$ □

Câu 73. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6 . Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

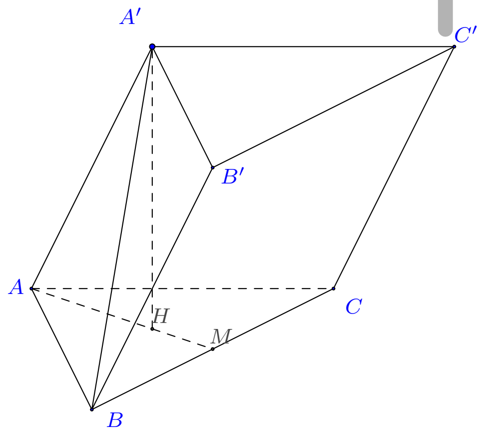
(A) 8 (B) $8\sqrt{2}$ (C) $16\sqrt{2}$ (D) $24\sqrt{3}$

Lời giải: Gọi chiều dài 3 cạnh hình hộp chữ nhật lần lượt là: $a,\ b,\ c > 0$
Ta có $AC^{'} = a^2 + b^2 + c^2 = 36$; $S = 2ab + 2bc + 2ca = 36 \Longrightarrow (a+b+c)^2 = 72 \Longrightarrow a + b + c = 6\sqrt{2}$
$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Longrightarrow abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3 = 16\sqrt{2}$. Vậy $V_{\max} = 16\sqrt{2}$ □

Câu 74. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'A = A'B = A'C = 2a$. Thể tích khối lăng trụ là:

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{2}$ (B) $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{4}$ (C) $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{6}$ (D) $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{8}$

Lời giải:

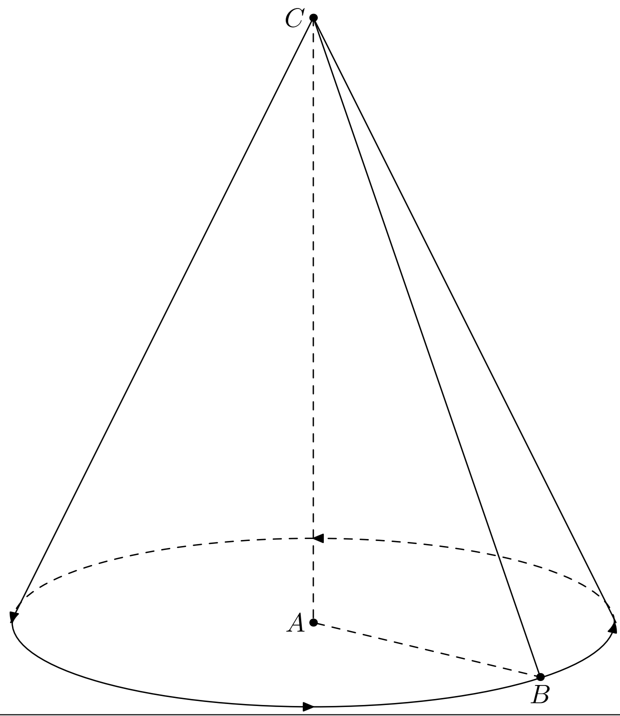


Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC).
Ta có $AA' = A'B = A'C$, suy ra H là trọng tâm ΔABC.
Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.
Thể tích khối lăng trụ $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{4}$ □

Câu 75. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = a, BC = a\sqrt{10}$. Thể tích khối nón khi quay tam giác ABC quanh trục AC là:

Ⓐ $3\pi a^3$ Ⓑ $9\pi a^3$ Ⓒ πa^3 Ⓓ $10\pi a^3$

Lời giải:



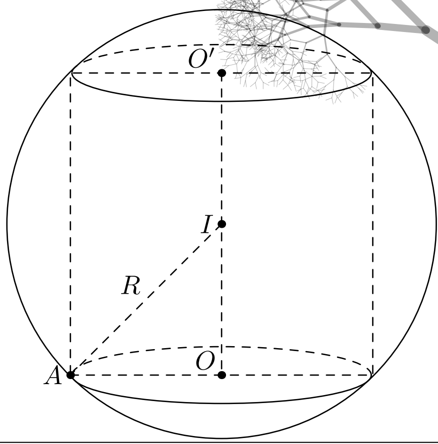
Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 3a$.
Ta được $V = \dfrac{1}{3}.3a.\pi.a^2 = \pi a^3$.
Chọn C. □

Câu 76. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 1, thiết diện qua trục hình trụ là hình vuông. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ là:

Ⓐ $6\pi\sqrt{3}$ Ⓑ $3\pi\sqrt{3}$ Ⓒ $\dfrac{4\pi\sqrt{2}}{3}$ Ⓓ $\dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$

Lời giải:

Ta có: $R = AI = \sqrt{2}AO = \sqrt{2}$
$\Rightarrow V = \dfrac{4}{3}.\pi.(\sqrt{2})^3 = \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.
Chọn D.



□

Câu 77. Cho một cái bể chưa đầy nước hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2 m, 3 m, 2 m lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của lòng trong đựng nước của bể. Hàng ngày nước ở trong bể được lấy ra bởi một cái gáo hình trụ có chiều cao là 5 cm và bán kính đường tròn đáy là 4 cm. Trung bình một ngày múc ra 170 gáo nước để sử dụng (biết mỗi lần đều múc đầy gáo). Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bể hết nước?

Ⓐ 280 ngày Ⓑ 281 ngày Ⓒ 282 ngày Ⓓ 283 ngày

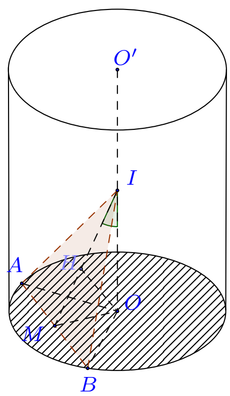
Lời giải: □

Câu 78. Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm OO' và tạo với OO' một góc $30°, (\alpha)$ cắt đường tròn đáy theo một cung. Tính độ dài dây cung đó theo R.

Ⓐ $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$ Ⓑ $\dfrac{2R}{3}$ Ⓒ $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ Ⓓ $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Lời giải: D

Kẻ $OH \perp IM$. Vì $AB \perp (OIM) \Rightarrow AB \perp OH$.
Do đó $OH \perp (IAB) \Rightarrow \widehat{OIM} = 30^0$.
Ta có $OM = OI \tan 30^0 = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.
Suy ra $MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Vậy $AB = 2MB = \dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



□

Câu 79. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm $y = x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1; x = 2$ quay quanh trục Ox.

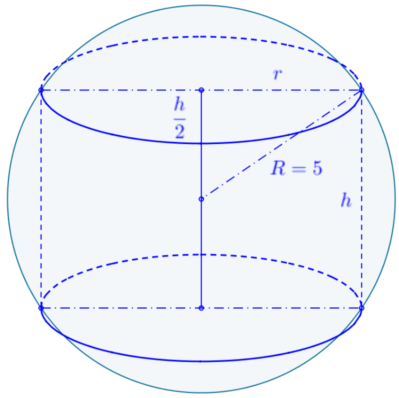
Ⓐ $\dfrac{33\pi}{5}$ Ⓑ $\dfrac{31\pi}{5}$ Ⓒ $\dfrac{32\pi}{5}$ Ⓓ 6π

Lời giải: Thể tích vật thể được tính theo công thức $V = \pi \displaystyle\int_{-1}^{2} x^4 \mathrm{d}x = \dfrac{33\pi}{5}$. □

Câu 80. Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng $R = 5$, một hình trụ (T) có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu (S). Thể tích của khối trụ (T) lớn nhất bằng bao nhiêu.

(A) $\dfrac{250\pi\sqrt{3}}{9}$ (B) $\dfrac{400\pi\sqrt{3}}{9}$ (C) $\dfrac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{500\pi\sqrt{3}}{9}$

Lời giải:



Gọi r, h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình trụ. Ta có $V_{tru} = \pi r^2.h = \pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right).h = \pi\left(25 - \dfrac{h^2}{4}\right).h$.

Đặt $f(h) = 25h - \dfrac{h^3}{4}, 0 < h < \dfrac{5}{2}$. Chứng minh được $\max f(h) = f\left(\dfrac{10}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{500\sqrt{3}}{9}$. Khi đó $V_{\text{trụ}} = \dfrac{500\pi\sqrt{3}}{9}$. □

Câu 81. Một quả bóng bàn được đặt tiếp xúc với tất cả các mặt của một cái hộp hình lập phương. Tỉ số thể tích của phần không gian nằm trong hình hộp đó nhưng nằm ngoài quả bóng và thể tích hình hộp là

(A) $\dfrac{6-\pi}{6}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{8-\pi}{8}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

Lời giải: Thể tích khối lập phương đã cho là a^3.

Tâm của quả bóng bàn trùng với tâm của hình lập phương. Bán kính của quả bóng bàn là $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của quả bóng bàn là: $\dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{a}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

Tỉ số thể tích cần tính là: $\dfrac{a^3 - \dfrac{\pi a^3}{6}}{a^3} = 1 - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{6-\pi}{6}$. □

Câu 82. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = 3a, AC = 4a$. Gọi M là trung điểm của AC. Khi quay quanh AB, các đường gấp khúc AMB, ACB sinh ra các hình nón có diện tích xung quanh lần lượt là S_1, S_2. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

(A) $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sqrt{13}}{10}$ (B) $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$ (D) $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{2}$

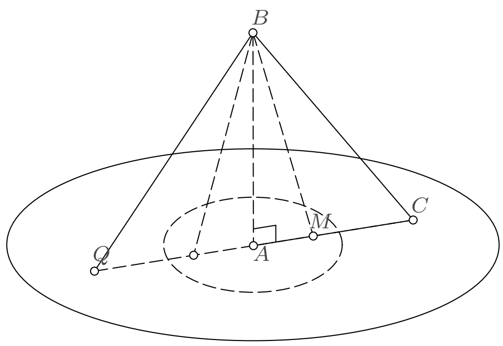
Lời giải:

Ta có:

$S_1 = \pi r_1 l_1 = \pi.\dfrac{AC}{2}.\sqrt{AB^2 + \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2} = 2\pi\sqrt{13}$

$S_2 = \pi r_2 l_2 = \pi.AC.\sqrt{AB^2 + AC^2} = 20\pi$

Do đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{13}{10}$



□

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt bên SBC và đáy bằng $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{43\pi}{48}$ (B) $\dfrac{43\pi}{36}$ (C) $\dfrac{43\pi}{4}$ (D) $\dfrac{43\pi}{12}$

Lời giải:

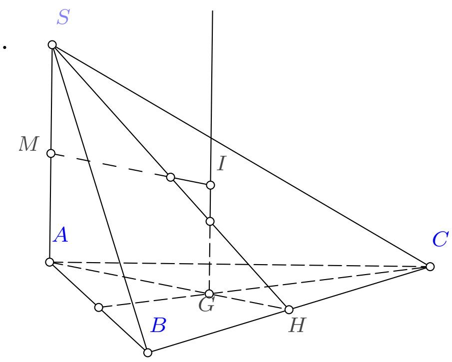
Gọi $H,\ M$ lần lượt là trung điểm $BC,\ SA$; G là trọng tâm $\triangle\ ABC$.
Ta có: $(\widehat{(SBC)\,;(ABC)}) = (\widehat{SH;AH}) = \widehat{SHA} = 60^0$

$AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow SA = \dfrac{3}{2}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

$R^2 = IA^2 = IG^2 + AG^2 + \left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}AH\right)^2$

$R^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{43}{48}$



Diện tích mặt cầu: $S = \dfrac{43\pi}{12}$. □

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$, hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm H của $AD, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

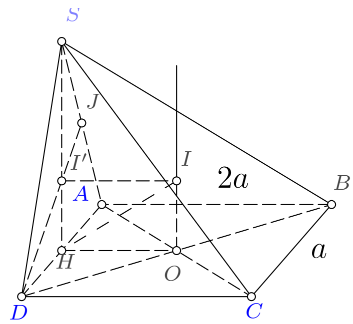
(A) $\dfrac{16\pi a^2}{3}$ (B) $\dfrac{16\pi a^2}{9}$ (C) $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ (D) $\dfrac{4\pi a^2}{3}$

Lời giải:

Gọi I' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle\ SAD$
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$
I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$
Dễ dàng chứng minh $\triangle\ SAD$ đều

$\Longrightarrow I'A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \Longrightarrow R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Vậy $S = \dfrac{16}{3}\pi a^2$



□

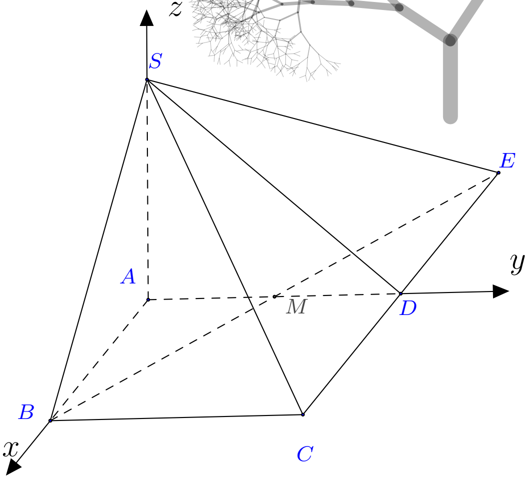
Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi E là điểm đối xứng của C qua D. bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.EBC$ là:

(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$ (B) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (C) $\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$ (D) $a\sqrt{5}$

Lời giải:

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.
Khi đó $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), S(0;0;a)$.
Ta có ΔBCE vuông tại C nên trục d của đường tròn ngoại tiếp ΔBCE đi qua trung điểm $M\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$ của AD và song song với Oz nên có phương trình $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{a}{2} \\ z=t \end{cases}$

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của SB. Ta tìm được (P) : $x-z=0$.
Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.EBC$ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).



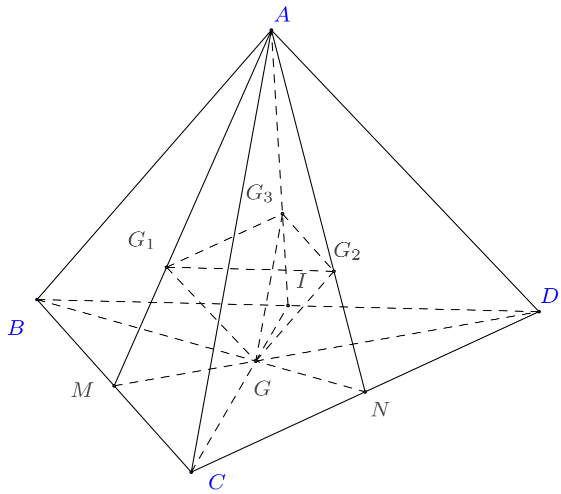
Ta tìm được $I\left(0;\dfrac{a}{2};0\right) \Rightarrow$ bán kính $R=IB=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ □

Câu 86. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Trọng tâm các mặt của một hình chóp tam giác đều là đỉnh của một hình tứ diện đều
B. Tâm các mặt của một hình lập phương là đỉnh của 1 hình bát diện đều
C. Tâm các mặt của một hình bát diện đều là đỉnh của một hình lập phương
D. Tâm các mặt của một hình tứ diện đều là đỉnh của một tứ diện đều

Lời giải:

Giả sử ta có chóp tam giác đều $ABCD$. Gọi G, G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ABC, ACD, ABD. Ta có
$$\begin{cases} G_2G_3=G_2G_1=G_1G_2=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{3}BD \\ G_1G=G_3G=G_2G=\dfrac{1}{3}AB \end{cases}$$
Suy ra, tứ diện $GG_1G_2G_3$ chỉ đều khi $AB=BD$. Hay chóp $ABCD$ là một tứ diện đều.



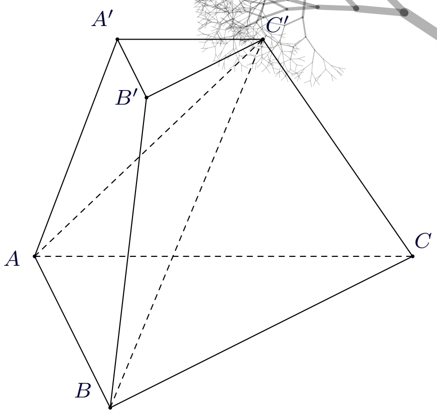
□

Câu 87. Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có hai đáy ABC và $A'B'C'$ có diện tích lần lượt là S và S'. Mặt phẳng ABC' chia hình chóp cụt thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

A. $\dfrac{S}{S'+\sqrt{SS'}}$ B. $\dfrac{S'}{S+\sqrt{SS'}}$ C. $\dfrac{S}{S'}$ D. $\dfrac{S'}{S}$

Lời giải:

Gọi h là chiều cao của khối chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Ta có:



$$V_{C'ABC} = \frac{1}{3}S.h \text{ và } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{h}{3}\left(S + S' + \sqrt{S.S'}\right)$$

$\Rightarrow \quad V_{ABCC'B'A'} \quad = \quad \dfrac{h}{3}\left(S + S' + \sqrt{SS'}\right) \; - \; \dfrac{1}{3}S.h \quad = \dfrac{1}{3}\left[S' + \sqrt{SS'}\right]$

$\Rightarrow \dfrac{V_{C'ABC}}{V_{ABA'B'C'}} = \dfrac{S}{S' + \sqrt{SS'}}$ □

Câu 88. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z = 0$, $(Q) : x - 2y + 3z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Viết phương trình của mặt cầu (S).

(A) $(S) : (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{2}{7}$

(B) $(S) : (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{9}{14}$

(C) $(S) : (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{2}{7}$

(D) $(S) : (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = \dfrac{9}{14}$

Lời giải: □

Câu 89. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{-2}$, $d_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

(A) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{4}$

(B) $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{3}$

(C) $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-1}$

(D) $d : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{u_{d_1}} = (1; 4; -2)$

Gọi $B(2 + b; -1 - b; 1 + b) = d \cap d_2$.

Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_{d_1}}$, hay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}} = \overrightarrow{0}$. Từ đó ta giải được $b = 1$.

Đường thẳng d_1 là đường thẳng qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ chỉ phương.

Từ đó ta có đáp án **C**. □

Câu 90. Cho $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$ điểm D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ điểm D là:

(A) $A(0, -7, 0)$

(B) $B(0, -7, 0)$ hoặc $(0, 8, 0)$

(C) $(0, 8, 0)$

(D) $B(0, 7, 0)$ hoặc $(0, -8, 0)$

Lời giải: $D(0; t; 0) \in Oy$ $(t \in \mathbb{R})$, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; t - 1; 1)$

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{6}|-4t + 2| = 5 \Rightarrow t = -7,\ t = 8 \Rightarrow D(0; 8; 0)$ hay $D(0; -7; 0)$ □

Câu 91. Cho 2 điểm $M(2,-3,1)$ và $N(5,6,-2)$. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm A. Điểm A chia đoạn thẳng MN theo tỉ số

A. 2 B. -2 C. $\frac{-1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Lời giải: Ta có $y_M.y_N = -18 < 0 \Rightarrow M$ và N nằm ở hai phía so với (Oxz)

Tỷ số $k = \dfrac{d\left[M,(Oxz)\right]}{d\left[N,(Oxz)\right]} = \dfrac{1}{2}$ □

Câu 92. Cho $A(5,1,3)$, $B(-5,1,-1)$, $C(1,-3,0)$ và $D(3,-6,2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là

A. $(-1,7,5)$ B. $(1,7,5)$ C. $(1,-7,-5)$ D. $(1,-7,5)$

Lời giải: $(BCD): x+2y+2z+5=0$

Gọi đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+2t \end{cases}$ là đường thẳng qua A và vuông góc với (BCD).

$(BCD) \cap d = H(3;-3;-1) \Rightarrow A'(1;-7;-5)$ (H là trung điểm của AA') □

Câu 93. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1-t \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$

Lời giải: Chọn $A(1;-1;2)$ và $B(3;0;3)$ thuộc d

Suy ra $I(1;-1;0)$ và $J(3;0;0)$ lần lượt là hình chiếu của A và B lên (Oxy).

$\overrightarrow{IJ} = (2;1;0) \Rightarrow d': \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$ □

Câu 94. Cho hai điểm $A(3,3,1)$, $B(0,2,1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x &= t \\ y &= 7-3t \\ z &= 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x &= t \\ y &= 7+3t \\ z &= 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x &= -t \\ y &= 7-3t \\ z &= 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 7-3t \\ z &= t \end{cases}$

Lời giải: Mặt phẳng trung trực của AB là $(\beta): 3x+y-7=0$

$(\alpha) \cap (\beta) = d: \begin{cases} x+y+z-7=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases}$ hay $d: \begin{cases} x = t \\ y = 7-3t \\ z = 2t \end{cases}$ □

Câu 95. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x &= 2+t \\ y &= 1-t \\ z &= 2t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x &= 2-2t' \\ y &= 3 \\ z &= t' \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

(A) $x+5y+2z+12=0$ (B) $x+5y-2z+12=0$

(C) $x-5y+2z-12=0$ (D) $x+5y+2z-12=0$

Lời giải: d_1 có VTCP $\vec{a}=(1;-1;2)$ và đi qua $A(2;1;0)$

d_2 có VTCP $\vec{b}=(-2;0;1)$ và qua $B(2;3;0)$

Gọi mặt phẳng cách đều d_1 và d_2 là (P) có VTPT $\vec{n}=[\vec{b},\vec{a}]=(1;5;2) \Rightarrow (P): x+5y+2z+m=0$

Ta có $d(A,(P))=d(B,(P)) \Leftrightarrow |7+m|=|17+m| \Leftrightarrow m=-12$

Vậy $(P): x+5y+2z-12=0$ □

Câu 96. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;1;1), B(0;1;2)$ và khoảng cách từ $C(2;-1;1)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Giả sử phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax+by+cz+2=0$. Tính giá trị abc.

(A) 2 (B) 4 (C) -2 (D) -4

Lời giải:

Thay tọa A, B vào phương trình, lập phương trình khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Tìm được a, b, c. □

Câu 97. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$, $d_2 : \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

(A) $(P): 2x-2z+1=0$ (B) $(P): 2y-2z+1=0$

(C) $(P): 2x-2y+1=0$ (D) $(P): 2y-2z-1=0$

Lời giải: Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u_1}=(-1;1;1)$. Đường thẳng d_2 : đi qua điểm $M_2(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u_2}=(2;-1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $[\vec{u_1},\vec{u_2}]=(0;1;-1)$ nên có phương trình $(P): y-z+D=0$.

Ta có: $d\left(M_1,(P)\right)=d\left(M_2,(P)\right) \Rightarrow |D|=|-1+D| \Leftrightarrow D=\dfrac{1}{2} \Rightarrow (P): 2y-2z+1=0$ □

Câu 98. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với trục Ox và vuông góc với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=1-3t \end{cases}$. Phương trình của d là:

(A) $\begin{cases} x=t \\ y=-3t \\ z=-t \end{cases}$ (B) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-1}$ (C) $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=-t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x=0 \\ y=-3t \\ z=t \end{cases}$

Lời giải: Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (1; -1; -3)$. Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và có VTPT $[\vec{i}, \vec{u}] = (0; 3; -1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$ □

1 Các câu vận dụng cao Giải tích

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x} = m + \tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

(A) $-1 < m < 1$ (B) $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$ (C) $-1 \le m \le 1$ (D) $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

Lời giải: Điều kiện: $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $m\sqrt{2+\tan^2 x} = m + \tan x \Leftrightarrow m\left(\sqrt{2+\tan^2 x} - 1\right) = \tan x \Leftrightarrow m = \dfrac{\tan x}{\sqrt{2+\tan^2 x} - 1}$.

Đặt $t = \tan x,\ t \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+2} - 1},\ t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{2 - \sqrt{2+t^2}}{\sqrt{2+t^2}\left(\sqrt{2+t^2} - 1\right)^2}$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{2+t^2} \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{\sqrt{t^2+2} - 1} = 1$ và $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -1$.

Bảng biến thiên.

t	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm thực khi $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$. □

Câu 2. Biết rằng tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - (m-3)x + 2017m$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(0;3)$ là đoạn $[a;b]$. Tính a^2+b^2.

(A) $a^2+b^2 = 13$ (B) $a^2+b^2 = 5$ (C) $a^2+b^2 = 8$ (D) $a^2+b^2 = 10$

Lời giải: TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = x^2 - 2(m-1)x - (m-3)$

$\Rightarrow y' = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

+) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;\ 3) \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \ \forall x \in (0;\ 3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1} \ge m,\ \forall x \in (0;\ 3)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ trên khoảng $(0;\ 3)$

$g'(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$. Từ BBT, $g(x) \ge m,\ \forall x \in (0;\ 3) \Leftrightarrow m \le 2$

+) Hàm số đồng biến trên khoảng$(-3;\ -1) \Leftrightarrow y' \ge 0,\ \ \forall x \in (-3;\ -1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1} \le m,\ \forall x \in (-3;\ -1)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$ trên khoảng $(-3;\ -1)$

$g'(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$ Từ BBT, $g(x) \le m,\ \forall x \in (-3;\ -1) \Leftrightarrow m \ge -1$.

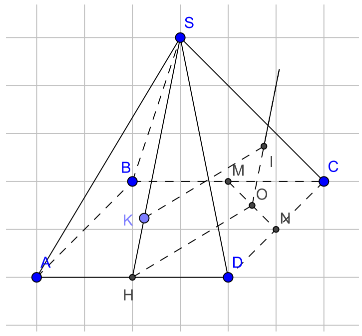
Do đó $m \in [-1;2] \Rightarrow a^2+b^2 = 5$. □

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$.

(A) $R = \dfrac{a\sqrt{29}}{8}$ (B) $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$ (C) $R = \dfrac{a\sqrt{37}}{6}$ (D) $R = \dfrac{a\sqrt{93}}{12}$

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AD suy ra $SH \perp (ABCD)$.
Dễ thấy tâm I của mặt cầu nằm trên trục d đi qua trung điểm O của MN và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, I và S cùng phía so với mp $(ABCD)$.



Nếu đặt $x = OI$ thì $IK = OH = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$ và $OC^2 + OI^2 = R^2 = IK^2 + KS^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + x^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5\sqrt{3}a}{12}$

$\Rightarrow R = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{93}}{12}$

□

Câu 4. Tìm m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$?

(A) $\dfrac{11}{5} < m < 4$. (B) $2 < m \leq \dfrac{5}{2}$. (C) $\dfrac{7}{5} \leq m < 3$. (D) $0 < m < \dfrac{9}{4}$.

Lời giải: Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + \left(15 - 3m^2\right)x^2 - 6mx + 10 = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8\right) + 3x^2 + 2 - \left(m^3x^3 + 3m^2x^2 - 6mx\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x^2 + 2\right)^3 + 3x^2 + 3 - \left(m^3x^3 + 3m^2x^2 + 3mx + 1\right) - 3mx = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x^2 + 2\right)^3 - (mx + 1)^3 + 3\left(x^2 - mx + 1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x^2 - mx + 1\right)\left(A^2 + AB + B^2 + 3\right) = 0 \\
& \left(\text{với } A = x^2 + 2,\ B = mx + 1\right) \\
\Leftrightarrow & x^2 - mx + 1 = 0 \ \left(\text{do } A^2 + AB + B^2 \geq 0\right) \\
\Leftrightarrow & m = \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow m = x + \frac{1}{x}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

Ta có:

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại).} \end{array}\right.$

x	$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Điều kiện để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2};2\right]$ là trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$, đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x+\frac{1}{x}$ tại hai điểm phân biệt hay $2<m\le\frac{5}{2}$. $\square$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+\frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1}=1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

(A) 9 nghiệm. (B) 4 nghiệm. (C) 6 nghiệm. (D) 5 nghiệm.

Lời giải: Do $f(x)=x^3-3x^2+x+\frac{3}{2}$ nên phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1}=1$ tương đương:

$$\begin{aligned}
&f(f(x))=2f(x)-1\\
\Leftrightarrow&[f(x)]^3-3[f(x)]^2+f(x)+\frac{3}{2}=2f(x)-1\\
\Leftrightarrow&[f(x)]^3-3[f(x)]^2-f(x)+\frac{5}{2}=0\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{ll} f(x)\approx 3,0598 & (1)\\ f(x)\approx 0,8745 & (2)\\ f(x)\approx -0,9343. & (3)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Khảo sát hàm số liên tục f ta được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{3}+1$		$\frac{\sqrt{6}}{3}+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1,59$	$\searrow$	$-0,59$	$\nearrow$	∞

Từ bảng biến trên thấy rằng phương trình (1) có đúng một nghiệm, phương trình (2) có đúng ba nghiệm phân biệt, phương trình (3) có đúng một nghiệm và rõ ràng các nghiệm của cả (1), (2), (3) khác nhau đôi một. Như vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt. $\square$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Giả sử A,B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số. Biết rằng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

(A) -9 (B) $-\frac{25}{9}$ (C) $-\frac{16}{25}$ (D) 1

Lời giải: • $y'=3x^2+2ax+b$.

Ta có $y=(3x^2+2ax+b)\left(\frac{1}{3}x+\frac{a}{9}\right)+\left(\frac{2b}{3}-\frac{2a^2}{9}\right)x+\left(c-\frac{ab}{9}\right)$.

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $\Delta: y=\left(\frac{2b}{3}-\frac{2a^2}{9}\right)x+\left(c-\frac{ab}{9}\right)$.

- Δ đi qua gốc tọa độ nên $ab=9c$.
- Ta có $P=abc+ab+c=9c^2+10c$.
- Từ đó suy ra $\min P=-\frac{25}{4}$. $\square$

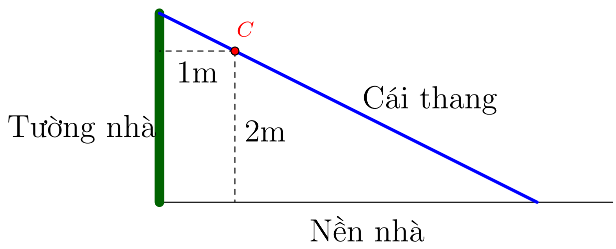
Câu 7. Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-4x+1}{x+1}$ có hai điểm cực trị thuộc đường thẳng $d: y=ax+b$. Tích ab bằng

(A) -8 (B) -2 (C) -6 (D) 2

Lời giải: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số y là $d: y = 2x - 4$ vậy tích $a.b = -8$.

Tổng quát *nếu* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *thì đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là* $y = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. □

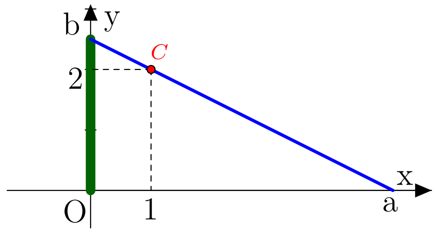
Câu 8. Ông An cần sản xuất một cái thang để trèo qua một bức tường nhà. Ông muốn cái thang phải luôn được đặt đi qua vị trí C, biết rằng điểm C cao $2m$ so với nền nhà và điểm C cách tường nhà $1m$ (như hình vẽ bên). Giả sử kinh phí để sản xuất thang là 500.000 đồng/1 mét dài. Hỏi ông An cần ít nhất bao nhiêu tiền để sản xuất thang (kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng)?



(A) 1.750.000 đồng. (B) 2.081.000 đồng. (C) 2.755.000 đồng. (D) 3.115.000 đồng.

Lời giải:

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục tung trùng với mặt cắt tường nhà, trục hoành trùng với mặt cắt nền nhà như hình vẽ bên. Gọi giao điểm của thang với tường và nền nhà lần lượt là b, a $(b > 2, a > 1)$. Khi đó thang xem như một đường thẳng $d: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



và d đi qua $C(1;2)$ nên ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1 \Rightarrow b = \dfrac{2a}{a-1}$. Để ông An tốn ít chi phí sản xuất thang nhất thì cái thang phải được thiết kế với độ dài ngắn nhất có thể. Điều này tương đương với việc tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{a-1}\sqrt{a^2 - 2a + 5}$$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2 - 2x + 5}, x > 1$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^3 - 3x^2 + 3x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{4}$ do $x > 1$. Lập bảng biến thiên trên khoảng $(1; +\infty)$ ta có $\min f(x) = f(1 + \sqrt[3]{4}) \approx 4,162$.

Do đó số tiền ít nhất mà ông An cần để sản xuất thang bằng $4,162.500000 = 2081000$ (đồng). □

Câu 9. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(2;5)$ cắt hai đường tiệm cận tại E và F. Khi đó độ dài EF bằng

(A) $2\sqrt{13}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $\sqrt{10}$. (D) $2\sqrt{10}$.

Lời giải:

Gọi $I(1;2)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ta luôn có $\triangle IEF$ vuông tại I và IM là trung tuyến. Ta có $EF = 2IM = 2\sqrt{10} \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 10. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị $(C): y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ cắt đường thẳng $d: y = m^3x + 2m^3$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$.

A $m = -1$. **B** $m = 2$. **C** $m = 1$. **D** $m = -1; m = 1$.

Lời giải: Xét phương trình $x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0$, ta có theo Viet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -m^2 \\ x_1x_2x_3 = 3m^3 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2x_2^2 + (x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2)) \\ &= \left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right]^2 \\ &- 2\left[(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)\right] = 83m^4 \end{aligned}$$

Vậy từ $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$ suy ra $m = \pm 1$. Kiểm tra yêu cầu về số nghiệm thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn. □

Câu 11. Cho ba số thực $a, b, c \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) + \log_b\left(c - \frac{1}{4}\right) + \log_c\left(a - \frac{1}{4}\right)$.

A $P_{\min} = 3$. **B** $P_{\min} = 6$. **C** $P_{\min} = 3\sqrt{3}$. **D** $P_{\min} = 1$.

Lời giải: Nhận xét: Điểm rơi $a = b = c = \frac{1}{2}$. Tính nhanh $P_{min} = 6$.

Dễ dàng ta có:

$$a^2 \geq a - \frac{1}{4}; b^2 \geq b - \frac{1}{4}; c^2 \geq c - \frac{1}{4}$$

Do đó $\frac{1}{4} < a, b, c < 1$ nên

$$\log_a\left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2; \log_b\left(c - \frac{1}{4}\right) \geq \log_b c^2; \log_c\left(a - \frac{1}{4}\right) \geq \log_c a^2$$

Suy ra

$$\begin{gathered} P \geq 3\sqrt[3]{\log_a b^2 \log_b c^2 \log_c a^2} \\ \Leftrightarrow P \geq 3.2\sqrt[3]{\log_a b \log_b c \log_c a} \\ \Leftrightarrow P \geq 6 \end{gathered}$$

Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. Vậy $P_{min} = 6$. □

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + ... + f\left(\frac{2014}{2015}\right) + f\left(\frac{2015}{2015}\right)$

A 2014 **B** 2015 **C** 1008 **D** 1007

Lời giải: Ta có $f(1-x)=\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4}{4+2.4^x}=\dfrac{2}{2+4^x}\Rightarrow f(x)+f(1-x)=1$

Do đó $f\left(\dfrac{1}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2014}{2015}\right)=1, f\left(\dfrac{2}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2013}{2015}\right)=1,\ldots,f\left(\dfrac{1007}{2015}\right)+f\left(\dfrac{1008}{2015}\right)=1.$

Suy ra $S=1007\Rightarrow$ chọn D □

Câu 13. Cho $\log_7 12=x, \log_{12}24=y$ và $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+2b+3c$.

Ⓐ $S=19$ Ⓑ $S=10$ Ⓒ $S=4$ Ⓓ $S=15$

Lời giải: $\log_7 12=x\Leftrightarrow \log_7 3+2\log_7 2=x$ (1)

$xy=\log_7 12.\log_{12}24=\log_7 24\Rightarrow \log_7 3+3\log_7 2=xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\log_7 2=xy-x,\ \log_7 3=3x-2xy$.

Do đó $\log_{54}168=\dfrac{\log_7 168}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7(2^3.3.7)}{\log_7(3^3.2)}=\dfrac{3\log_7 2+\log_7 3+1}{\log_7 2+3\log_7 3}=\dfrac{xy+1}{-5xy+8x}$.

Do đó $a=1,\ b=-5,\ c=8\Rightarrow S=15$ □

Câu 14. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $3^x+3=m.\sqrt{9^x+1}$ có đúng 1 nghiệm là

Ⓐ $[1;3)$. Ⓑ $(3;\sqrt{10})$. Ⓒ $\{\sqrt{10}\}$. Ⓓ $(1;3)\cup\{\sqrt{10}\}$.

Lời giải:

Đặt $3^x=t$, $t>0$. Pt trở thành $m=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$, $t>0$.

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Từ BBT của hàm số ta thấy pt $f(t)=m$ có đúng 1 nghiệm nếu $\left[\begin{array}{l} m=\sqrt{10}\\ 1<m<3\end{array}\right.$

□

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(t)$	||	$+$	0	$-$	
$f(t)$	|| 3	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Câu 15. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)$. Tính tỷ số $\dfrac{x}{y}$.

Ⓐ $\dfrac{x}{y}=4$ Ⓑ $\dfrac{x}{y}=3$ Ⓒ $\dfrac{x}{y}=5$ Ⓓ $\dfrac{x}{y}=2$

Lời giải: • Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(\dfrac{x+y}{6}\right)$.

• Ta có $x+y=6.4^t\Rightarrow 9^t+6^t=6.4^t\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=-3 \text{ (loại)}\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=2 \text{ (tm)}.\end{array}\right.$

• $\dfrac{x}{y}=\dfrac{9^t}{6^t}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=2.$ □

Câu 16. Cho phương trình $\log_3 \dfrac{x^2-2x+1}{x} + x^2 + 1 = 3x$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

(A) 5 (B) 3 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

Lời giải: ĐK $x > 0$ và $x \neq 1$.

- PT $\Leftrightarrow \log_3(x^2-2x+1) + (x^2+2x+1) = \log_3 x + x (*)$.
- Đặt $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 3} + 1$.
- Bảng biến thiên:

t		0		1		$+\infty$
$f'(t)$		||	$+$	||	$+$	
$f(x)$		|| $-\infty$	$\nearrow$	1 || 1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên , ta có $f(x^2-2x+1) = f(x) \Leftrightarrow x^2-2x+1 = x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$.
- Vậy tổng 2 nghiệm bằng 3. □

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = a\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + b\sin x + 6$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e)) = 2$. Tính $f(\log(\ln 10))$.

(A) 10 (B) 2 (C) 4 (D) 8

Lời giải: • Đặt $t = \log(\log(e)) = \log \dfrac{1}{\ln 10} = -\log(\ln 10) \Leftrightarrow \log(\ln 10) = -t$.
- $f(t) = 2 \Leftrightarrow a\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + b\sin t + 6 \Leftrightarrow a\ln(t+\sqrt{t^2+1}+b\sin t) = -4$.
- $f(-t) = a\ln(-t+\sqrt{t^2+1}) + b\sin(-t) + 6 = a\ln\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}} - b\sin t + 6$

$= -\left(a\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + b\sin t\right) + 6 = 4 + 6 = 10$. □

Câu 18. Cho $x > 0, x \neq 1$ thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{2017} x} = M$. Khẳng định nào sau là đúng?

(A) $x = \sqrt{\dfrac{2017}{M}}$ (B) $x = 2017^M$ (C) $x = \dfrac{2017}{M}$ (D) $x^M = 2017!$

Lời giải: Ta có $M = \log_x 2 + \cdots + \log_x 2017 = \log_x 2017!$ hay $x^M = 2017!$ □

Câu 19. Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền đã gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

(A) 50 triệu 730 nghìn đồng (B) 50 triệu 640 nghìn đồng
(C) 503 triệu 760 nghìn đồng (D) 48 triệu 480 nghìn đồng

Lời giải: Mẹ được hưởng lãi xuất trong 11 tháng và thêm 4 triệu của tháng 12. Cuối tháng 11 mẹ có được số tiền là

$$4.10^6(1+0,01)^{11}+\cdots+4.10^6(1+0,01)=\frac{4.10^6}{0,01}(1+0,01)[(1+0,01)^{11}-1]=46730012,05$$

Do sang đầu tháng 12 mẹ lấy nên số tiền mẹ nhận được là 50 triệu 730 nghìn đồng □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x.5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)>1 \Leftrightarrow -x\ln 2+x^2\ln 5>0$

B. $f(x)>1 \Leftrightarrow x^2+x\log_2 5>0$

C. $f(x)>1 \Leftrightarrow x-x^2\log_2 5<0$

D. $f(x)>1 \Leftrightarrow x^2-x\log_2 5>0$

Lời giải: Ta có $f(x)=2^{-x}.5^{x^2}>1 \Rightarrow \log_2 f(x)=-x+x^2\log_2 5>0 \Leftrightarrow x-x^2\log_2 5<0$ □

Câu 21. Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm 5.000.000 đồng trên tháng. Cứ 3 năm, lương anh Hưng lại tăng được 7% một tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng)

A. 1.287.968.000 đồng.

B. 1.931.953.000 đồng.

C. 2.575.937.000 đồng.

D. 3.219.921.000 đồng.

Lời giải: Sau ba năm đầu tiên số tiền anh Hưng đã nhận được là 180000000 đồng. Sáu năm sau anh Hưng đã nhận được tổng số tiền bằng $180000000+180000000.(1+0,07)$. Tương tự như vậy sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả $180000000(1+1,07+\cdots+(1,07)^{11})=3219921229\approx 3219921000$ đồng. □

Câu 22. Cho $x,y>0$, $\log_y x+\log_x y=\frac{10}{3}$ và $xy=144$, thế thì $\frac{x+y}{2}=$

A. 24.

B. 30.

C. $12\sqrt{2}$.

D. $13\sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta thấy $\log_y x+\log_x y=\frac{10}{3}\Leftrightarrow \log_x y=3\vee \log_y x=3$.

Ta xét $\begin{cases}\log_y x=3\\ xy=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\sqrt{3}\\ y=24\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow \frac{x+y}{2}=13\sqrt{3}\Rightarrow$ chọn D. □

Câu 23. Cho các số thực dương a,b khác 1. Biết rằng đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ và trục tung lần lượt tại A,B,C sao cho C nằm giữa A và B, và $AC=2BC$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $b=\frac{a}{2}$.

B. $b=a^{-2}$.

C. $b=2a$.

D. $b=a^2$.

Lời giải: $x_A=\log_a 2, x_B=\log_b 2$. Do $AC=2BC$ nên $|x_A|=2|x_B|$, lại do C nằm giữa A,B nên x_A và x_B trái dấu. Suy ra $x_a=-2x_B$, dẫn đến $b=a^{-2}$. □

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2\log_2|x| + \log_2|x+3| = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Ⓐ $m \in \{0, 2\}$. Ⓑ $m \in \{2\}$. Ⓒ $m \in (0; 2)$. Ⓓ $m \in (-\infty; 2)$.

Lời giải: Điều kiện: $x \neq 0, x \neq -3$. Phương trình đã cho tương đương với $|x^2(x+3)| = 2^m$. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2(x+3)|$ (suy ra từ đồ thị hàm số $y = x^2(x+3)$), ta thu được kết quả cần tìm là $m = 2$. □

Câu 25. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P = 2x - y$.

Ⓐ $P_{min} = 4$. Ⓑ $P_{min} = 2\sqrt{3}$. Ⓒ $P_{min} = -4$. Ⓓ $P_{min} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải: Điều kiện: $x > \pm y$. Do đó, $x > 0$. Từ BĐT ở đề bài, ta thu được $x^2 - y^2 \geq 4$, suy ra $x \geq \sqrt{y^2+4}$ (do $x > 0$). Dẫn đến $P \geq 2\sqrt{y^2+4} - y$. Đặt $f(y) = 2\sqrt{y^2+4} - y$, ta dễ dàng tìm được $\min f(y) = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}$. Từ đó, thu được $P_{min} = 2\sqrt{3}$, khi $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Câu 26. Phương trình $2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi; 2017\pi]$?

Ⓐ vô nghiệm Ⓑ 2017 Ⓒ 2022 Ⓓ 2023

Lời giải:

- Ta viết lại phương trình

$$2017^{\sin x} = \sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

- Đặt $t = \sin x,\ t \in [-1; 1]$ ta được phương trình $2017^t = t + \sqrt{1+t^2}$ $(*)$.
- Lấy logarrit cơ số e hai về của phương trình $(*)$ ta được

$$t\ln 2017 = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \Leftrightarrow t\ln 2017 - \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = 0 \ (2)$$

- Xét hàm số $f(t) = t\ln 2017 - \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$ với $t \in [-1; 1]$
- Có $f'(t) = \ln 2017 - \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$, suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến mà $f(0) = 0$ nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = 0$ hay $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$. Yêu cầu bài toán, ta có $-5 \leq k \leq 2017$. □

Câu 27. Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015 – 2021(6 năm) là 10,6% so với số lượng hiện có năm 2015. Theo phương thức "ra 2 vào 1" (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước được 2 người thì được tuyển dụng 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hằng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01%)

Ⓐ 1,13%. Ⓑ 2,02%. Ⓒ 1,85%. Ⓓ 1,72%.

Lời giải: Gọi x là tỉ lệ tuyển dụng mới thì tỉ lệ giảm biên chế là $2x$. Gọi S là số lượng hiện có năm 2015, ta có

$$S(1 + x - 2x)^6 = S(1 - 10,6\%) \Rightarrow x = 1,85\%.$$

□

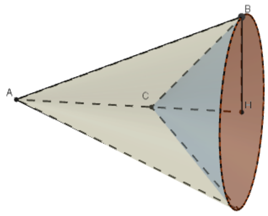
Câu 28. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{13}\,(cm)\,, BC = \sqrt{5}\,(cm)$ và $AC = 2\,(cm)$. Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành khi quay tam giác ABC quanh trục AC.

Ⓐ $V = \dfrac{10\pi}{3}\,(cm^3)$. Ⓑ $V = 8\pi\,(cm^3)$. Ⓒ $V = \dfrac{16\pi}{3}\,(cm^3)$. Ⓓ $V = \dfrac{8\pi}{3}\,(cm^3)$.

Lời giải:

Cách 1:

Đặt $R = BH$. Ta có $BC^2 - OH^2 = AB^2 - (2+OH)^2$
$\Leftrightarrow 5 - OH^2 = 13 - 4 - 4OH - OH^2$
$\Leftrightarrow 4OH = 4 \Leftrightarrow OH = 1$
Suy ra $R = BH = \sqrt{BH^2 - OH^2} = 2 \Rightarrow AH = 3cm$
Dễ dàng tính được $V = \dfrac{8\pi}{3}\,(cm^3)$.



Cách 2:

Gắng A, B, C vào hệ trục tọa độ Oxy tương xứng $A\,(0;0)\,, C\,(2;0)$ suy ra $B\,(3;2)$ (B là giao điểm của đường tròn $\left(A, \sqrt{13}\right)$ và đường tròn $\left(C, \sqrt{5}\right)$.

Ta có $AB : y = \dfrac{2}{3}x; BC : y = 2x - 4$ Thể tích cần tìm:

$V = \pi \displaystyle\int_0^3 \left(\dfrac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_0^2 (2x-4)^2 \mathrm{d}x = 4\pi - \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3}\,(cm^3)$. □

Câu 29. Một vận động viên đua xe F đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì anh ta tăng tốc với vận tốc $a(t) = 6t(m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

Ⓐ 1100 m Ⓑ 100 m Ⓒ 1010 m Ⓓ 1110 m

Lời giải: Ta có $v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t = \int 6t\,\mathrm{d}t = 3t^2 + C; v(0) = 10 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow v(t) = 3t^2 + 10$

Vậy quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

$S = \displaystyle\int\limits_0^{10} \mathrm{d}t = \int\limits_0^{10} (3t^2 + 10)\,\mathrm{d}t = 1100$ m $\Rightarrow$ chọn A □

Câu 30. Để trang trí tòa nhà người ta vẽ lên tường một hình như sau: trên mỗi cạnh hình lục giác đều có cạnh là $2dm$ là một cánh hoa hình parabol mà đỉnh parabol (P) cách cạnh lục giác là $3dm$ và nằm phía ngoài lục giác; 2 đầu mút của cạnh cũng là 2 điểm giới hạn của đường (P) đó. Hãy tính diện tích hình trên (kể cả lục giác).

Ⓐ $8\sqrt{3} + 24(dm^2)$. Ⓑ $8\sqrt{3} + 12(dm^2)$. Ⓒ $6\sqrt{3} + 12(dm^2)$. Ⓓ $6\sqrt{3} + 24(dm^2)$.

Lời giải: Diện tích lục giác đều cạnh 2dm là $S_1 = 6.\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$. Parabol đi qua 3 điểm $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;3)$ có phương trình $y = -3x^2 + 3$. Diện tích của mỗi cánh hoa là:

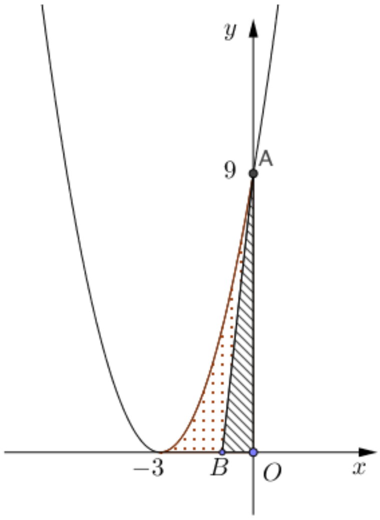
$$S_2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(-3x^2 + 3\right) dx = 4.$$

Diện tích cần tính là: $6\sqrt{3} + 6.4 = 6\sqrt{3} + 24$ (dm^2). □

Câu 31. Xét hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y=(x+3)^2$, $y=0$, $x=0$. Gọi $A(0;9)$, $B(b;0)$ $(-3<b<0)$. Giá trị của b để đoạn thẳng AB chia (D) thành hai phần có diện tích bằng nhau là

Ⓐ $b=-2$. Ⓑ $b=-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $b=-1$. Ⓓ $b=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải:



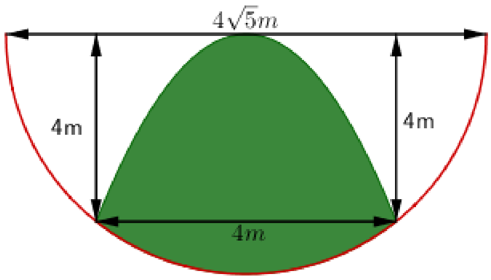
Ta có $(x+3)^2=0 \Leftrightarrow x=-3$, nên $S_{(D)}=\displaystyle\int_{-3}^{0}(x+3)^2=9$.

Mặt khác $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{9}{2}|b|$.

Do đó $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}S_{(D)} \Leftrightarrow b=-1$.

□

Câu 32. Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}(m)$. Trên đó có người thiết kế hai phần để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản. Phần trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên những đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$, phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 300.000 đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



Ⓐ 1.791.000 đồng. Ⓑ 2.922.000 đồng. Ⓒ 3.582.000 đồng. Ⓓ 5.843.000 đồng.

Lời giải: Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào hình sao cho O trùng với tâm parabol, trục Ox trùng với đường kính nửa đường tròn và trục Oy hướng xuống. Khi đó diện tích phần trồng hoa bằng $2\displaystyle\int_{0}^{2} x^2-\sqrt{20-x^2}dx \approx 11,93962$. Suy ra diện tích phần trồng cỏ Nhật Bản bằng $10\pi-11,93962 \approx 19,47631$. Do vậy số tiền cần thiết để trồng cỏ là xấp xỉ 5843000 đồng. □

Câu 33. Cho hàm số $g(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\sqrt{t}\sin t\,dt$ xác định với mọi $x>0$. Tính $g'(x)$ được kết quả

Ⓐ $g'(x) = x^2 \sin(x^2) - \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}$.

Ⓑ $g'(x) = 2x^2 \sin(x^2) - \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt[4]{x}}$.

Ⓒ $g'(x) = 2x^2 \sin(x^2) - \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}$.

Ⓓ $g'(x) = x^2 \sin(x^2) - \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt[4]{x}}$.

Lời giải:

Đặt $f(t) = \sqrt{t}\sin t$.

Ta có $f(x^2) = x\sin x^2, f(\sqrt{x}) = \sqrt[4]{x}\sin\sqrt{x}$.

Ta có $g'(x) = 2x^2\sin x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt[4]{x}\sin\sqrt{x} = 2x^2\sin x^2 - \dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{x}} \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $B(a;\sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.

Ⓐ $a = 9$. Ⓑ $a = 3$. Ⓒ $a = 4$. Ⓓ $a = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải: Từ giả thiết, các đỉnh của hình chữ nhật (H) là $A(-1;0), C(a;0), B(a;\sqrt{a}), D(-1;\sqrt{a})$. Do đó, diện tích hình chữ nhật (H) là $(a+1)\sqrt{a}$. Xét phần của (H) (bị chia bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$) mà có chứa đỉnh C, diện tích của phần này là $\displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{a}^3$. Như vậy ta phải có

$$(a+1)\sqrt{a} = 2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{a}^3 \Leftrightarrow a = 3.$$

□

Câu 35. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7(m/s^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $10(m/s)$, hỏi trong 6 giây đầu tiên, thời điểm nào chất điểm ở xa nhất về phía bên phải?

Ⓐ $1(s)$. Ⓑ $2(s)$. Ⓒ $5(s)$. Ⓓ $6(s)$.

Lời giải: Từ giả thiết, vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = \int_0^t a(u)du + v(0) = t^2 - 7t + 10$.

Suy ra, tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là $x(t) = \int_0^t v(u)du\dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{7}{2}t^2 + 10t + C$. Ta cần tìm GTLN của $x(t)$ với $t \in [0;6]$. Ta có $x'(t) = v(t) = 0$ khi $t = 2$ hoặc $t = 5$, $x(0) = C, x(2) = \dfrac{26}{3} + C, x(5) = \dfrac{25}{6} + C, x(6) = 6 + C$. Vậy GTLN của $x(t)$ (với $t \in [0;6]$) đạt được khi $t = 2$. □

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + m - 1$. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox có diện tích phần nằm phía trên trục Ox và phần nằm dưới trục Ox bằng nhau. Giá trị của m là :

Ⓐ $\dfrac{2}{3}$ Ⓑ $\dfrac{4}{5}$ Ⓒ $\dfrac{3}{4}$ Ⓓ $\dfrac{3}{5}$

Lời giải:

• Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$ và $y'' = 6x - 6$

• Để diện tích phía trên bằng diện tích ở dưới trục hoành trước hết đồ thị hàm số phải có cực trị hay $m < 1$.

• Giả sử đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm $x_1 < x_2 < x_3$. Do hàm bậc ba đối xứng nhau qua điểm uốn nên yêu cầu bài toán tương đương với $x_2 = 1$ (là hoành độ điểm uốn).

• Thay $x = 1$ vào phương trình $x^3 - 3x^2 + 3mx + m - 1 = 0$ ta được $m = \dfrac{3}{4}$. □

Câu 37. Cho hai số thực b và $c\,(c > 0)$. Kí hiệu A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2bz + c = 0$. Tìm điều kiện của b và c để tam giác OAB là tam giác vuông (Olà gốc tọa độ)

(A) $b^2 = 2c$. (B) $c = 2b^2$. (C) $b = c$. (D) $b^2 = c$.

Lời giải: Phương trình $z^4 + 2bz + c = 0$ có hai nghiệm phức nên $\Delta' = b^2 - c < 0$

Với điều kiện $b^2 - c < 0$, phương trình có 2 nghiệm $z_1 = -b - \sqrt{\Delta'} = -b - i\sqrt{c - b^2}$ và $z_1 = -b + \sqrt{\Delta'} = -b + i\sqrt{c - b^2}$

$\triangle OAB$ có $O\,(0;0)\,; A\left(-b; -\sqrt{c - b^2}\right); B\left(-b; \sqrt{c - b^2}\right)$

Suy ra $OA = OB = \sqrt{b^2 + c - b^2} = \sqrt{c}$; $AB = 2\sqrt{c - b^2}$

Do $\triangle OAB$ cân tại O nên giả sử $\triangle OAB$ thì vuông tại O. Suy ra:

$AB = OA\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{c - b^2} = \sqrt{2c} \Leftrightarrow 4c - 4b^2 = 2c$

$2c = 4b^2 \Leftrightarrow c = 2b^2$. □

Câu 38. Cho số phức z thoả mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

(A) $z = -1 + i$ (B) $z = -2 + 2i$ (C) $z = 2 + 2i$ (D) $z = 3 + 2i$

Lời giải: Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(a-2) + (b-4)i| = |a + (b-2)i| \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2} \Leftrightarrow a + b = 4 \Leftrightarrow b = 4 - a$.

Suy ra $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 16} = \sqrt{2(a-2)^2 + 8}$.

Vậy $|z|_{min} \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow z = 2 + 2i \Rightarrow$ chọn C □

Câu 39. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2$.

(A) $P = 1 + i$ (B) $P = -1 - i$ (C) $P = 1 - i$ (D) $P = -1$

Lời giải: Ta có $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1.\overline{z_1} = |z_1|^2 = 1 \\ z_2.\overline{z_2} = |z_2|^2 = 1 \end{cases}$

$(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1 - z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1.\overline{z_2} + z_2.\overline{z_1} = 1 \Leftrightarrow z_1.\overline{z_2} + z_2.\overline{z_1} = 1$.

Từ đó: $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2} + \dfrac{z_2.\overline{z_1}}{|z_1|^2} = z_1.\overline{z_2} + z_2.\overline{z_1} = 1$.

Suy ra: $P = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2 = \left(\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}\right)^2 - 2 = -1$. □

Câu 40. Cho ba số phứcz_1, z_2, z_3thỏa mãn$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$và$z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính$A = {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2$.

(A) $A = 1 + i$. (B) $A = 0$. (C) $A = -1$. (D) $A = 1$.

Lời giải: Do $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $\overline{z_1} = \dfrac{1}{z_1}, \overline{z_2} = \dfrac{1}{z_2}, \overline{z_3} = \dfrac{1}{z_3}$. Từ đó

$$0 = \overline{0} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$$
$$= \frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1z_2z_3}.$$

Suy ra $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$. Do đó:

$$A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2\left(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\right) = 0.$$

□

Câu 41. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$ là

(A) $\max T = 2\sqrt{5}$. (B) $\max T = 2\sqrt{10}$. (C) $\max T = 3\sqrt{5}$. (D) $\max T = 3\sqrt{2}$.

Lời giải:

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được
$T = |z + 1| + 2|z - 1| \le \sqrt{(1^2 + 2^2)\left(|z + 1|^2 + |z - 1|^2\right)} = \sqrt{5.2\left(|z|^2 + 1\right)} = 2\sqrt{5}$.
Vậy $\max T = 2\sqrt{5}$.

Cách 2: Đặt $z = x + yi \Rightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
Ta có $T = |z + 1| + 2|z - 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{2x + 2} + 2\sqrt{-2x + 2}$
Xét hàm $f(x) = \sqrt{2x + 2} + 2\sqrt{-2x + 2}$, với $-1 \le x \le 1$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1}} - \dfrac{2}{\sqrt{-2x + 2}} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{5}$. Bảng giá trị:

x	-1	$-\frac{3}{5}$	1
$f(x)$	4	$2\sqrt{5}$	2

Vậy $\max T = 2\sqrt{5}$.

□

Câu 42. Cho số phức z và số phức liên hợp của nó $\bar{z}$ có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z.(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần ượt là N, N'. Biết rằng 4 điểm M, N, M', N' tạo thành hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 4i - 5|$.

(A) $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ (B) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

Lời giải: • Giả sử $x = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta có $M(a; b)$ và $M'(a; -b)$.
• Khi đó $z(4 + 3i) = (4a - 3b) + (3aq + 4b)i$. Suy ra $N(4a - 3b; 3a + 4b)$ và $N'(4a - 3b; -3a - 4b)$.
• Do 4 điểm M, M', N, N' luôn tạo thành một hình thang cân nhận Ox làm trục đối xứng nên 4 điểm đó lập thành hình chữ nhật $\Leftrightarrow MM' = NN' \Leftrightarrow 4b^2 = 4(3a + 4b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = -\dfrac{8}{3}b \end{array}\right.$
• Với $a = -b$, ta có

$$|z + 4i - 5| = \sqrt{(b + 5)^2 + (b + 4)^2} = \sqrt{2\left(b + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \ge \frac{1}{sqrt2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=\dfrac{9}{2}, b=-\dfrac{9}{2}$.

- Với $a=-\dfrac{8}{3}b$, ta có

$$|z+4i-5|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}b+5\right)^2+(b+4)^2}=\sqrt{\frac{73}{9}b^2+\frac{104}{3}b+41}\geq\frac{289}{73}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $\min|z+4i-5|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

Câu 43. Cho H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2\overline{z}-3z|\leq 5$ và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

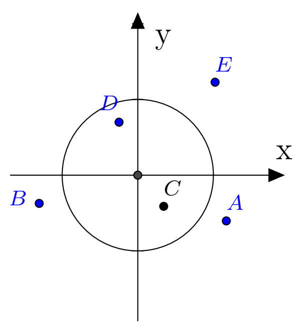
(A) $\dfrac{5}{2}\pi$. (B) 3π. (C) $\dfrac{3}{2}\pi$. (D) 5π.

Lời giải: Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Từ giả thiết suy ra $\dfrac{x^2}{25}+y^2=1, y\geq 0$. Khi đó H là một nửa của hình Elip có trục lớn bằng 10, trục bé bằng 2 và

$$S_H=2\int\limits_0^5\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}dx=\frac{5}{2}\pi.$$

□

Câu 44. Hình bên ghi lại việc biểu diễn vài số phức trong mặt phẳng số phức. Đường tròn đơn vị có tâm là gốc tọa độ. Một trong số những số phức này là số nghịch đảo của E. Số đó là số nào?



(A) C.
(B) B.
(C) D.
(D) A.

Lời giải:
Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ là số phức có điểm biểu diễn là E như hình vẽ.

Ta được $\begin{cases}x>1\\y>1\\|z|>\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$ số phức $\dfrac{1}{z}$ có $\begin{cases}\text{phần thực}>0\\\text{phần ảo}<0\\\text{mô đun}<1\end{cases}\Rightarrow$ chọn A. □

Câu 45. Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính $T=|z_1|+|z_2|$.

(A) $T=\dfrac{2\sqrt{97}}{3}$. (B) $T=\dfrac{2\sqrt{85}}{3}$. (C) $T=2\sqrt{13}$. (D) $T=4\sqrt{13}$.

Lời giải: Do z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình bậc hai có hệ số thực, nên z_1 và z_2 là hai số phức liên hợp. Gọi $z_1=a+bi$ với a,b là các số thực, thì $z_2=a-bi$. Nhưng khi đó, tính w theo z_1 và theo z_2 ta được $w=a+(b+2)i=\dfrac{3+a}{2}-\dfrac{b}{2}i$. Do đó $a=\dfrac{3+a}{2}$ và $b+2=-\dfrac{b}{2}$. Từ đây, ta tìm được $a=3, b=-\dfrac{4}{3}$, và $|z_1|=|z_2|=\dfrac{\sqrt{97}}{3}$. □

---

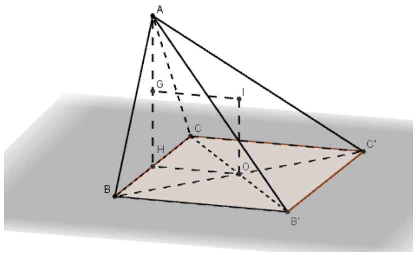
2 Các câu vận dụng cao Hình học

Câu 1. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $3a$ và chiều cao bằng $8a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$.

(A) $R = 4a$. (B) $R = 5a$. (C) $R = a\sqrt{19}$. (D) $R = 2a\sqrt{19}$.

Lời giải:

Nhận xét: $BCC'B$ là hình chữ nhật nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$.
Gọi O là tâm hình chữ nhật $BCC'B'$, G là trọng tâm $\triangle ABC$; H là trung điểm BC. Dựng hình chữ nhật $HGIO$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$.



Ta có $IO = GH = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{1}{3}\dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$BO = \dfrac{1}{2}BC' = \dfrac{1}{2}\sqrt{(3a)^2 + (8a)^2} = \dfrac{a\sqrt{73}}{2}$

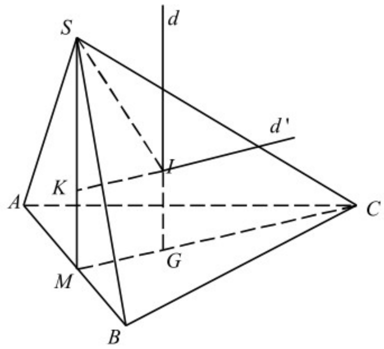
Suy ra $R = \sqrt{IO^2 + BO^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{73a^2}{4}} = a\sqrt{19}$. □

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, mặt bên SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

(A) $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$ (B) $\dfrac{5\pi a^3}{3}$ (C) $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ (D) $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{18}$

Lời giải:

Gọi M là trung điểm AB, G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, SAB.



Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SM \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow SM \perp (ABC)$.

Dựng d, d' lần lượt là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, SAB suy ra $d \perp (ABC)$ tại $G, d' \perp (SAB)$ tại K.
Gọi $I = d \cap d'$ suy ra $IS = IA = IB = IC$, nên I là tâm của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp có bán kính là IS.

Ta có $GMKI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KI = GM = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $SK = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $IS = \sqrt{SK^2 + KI^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vậy $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5a^3\sqrt{15}}{54}$. □

Câu 3. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = BC = 5a, SB = AC = 6a; SC = AB = 7a$.

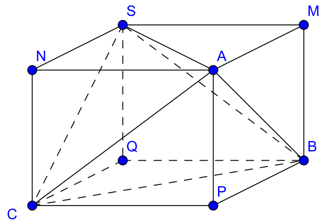
(A) $V = \dfrac{35a^3}{2}$ (B) $V = 2\sqrt{105}a^3$ (C) $V = \dfrac{35\sqrt{2}a^3}{2}$ (D) $V = 2\sqrt{95}a^3$

Lời giải:

Dựng hình hộp chữ nhật $SMAN.BPCQ$ như hình vẽ.

Đặt $\begin{cases} SM = x \\ SN = y \\ SQ = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 25a^2 \\ x^2+z^2 = 36a^2 \\ y^2+z^2 = 49a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{19} \\ z = \sqrt{30} \end{cases}$

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}V_{SMAN.BPCQ} = \dfrac{1}{3}xyz = 2\sqrt{95}$



□

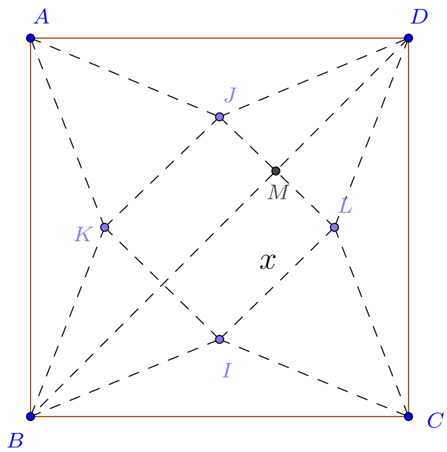
Câu 4. Cho một tấm bìa hình vuông cạnh $5dm$. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

Lời giải:

Gọi cạnh hình vuông nhỏ là x. Khi đó chiều cao DM của mặt bên hình chóp là $DM = \dfrac{BD-x}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}-x}{2}$. Chiều cao h của hình chóp $h = \sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$.Khi đó $V = \dfrac{1}{3}x^2.\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$.

Xét $V = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{\dfrac{25}{2} - \dfrac{5x}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1024}{625}\sqrt{\left(\dfrac{5x}{4\sqrt{2}}\right)^4\left(\dfrac{25}{2} - \dfrac{5x}{\sqrt{2}}\right)}$. Ta có



$$\left(\frac{5x}{4\sqrt{2}}\right)^4\left(\frac{25}{2} - \frac{5x}{\sqrt{2}}\right) \le \left(\frac{\frac{5x}{4\sqrt{2}} + \frac{5x}{4\sqrt{2}} + \frac{5x}{4\sqrt{2}} + \frac{5x}{4\sqrt{2}} + \left(\frac{25}{2} - \frac{5x}{\sqrt{2}}\right)}{5}\right)^5$$
$$= \left(\frac{5}{2}\right)^5.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{5x}{4\sqrt{2}} = \dfrac{25}{2} - \dfrac{5x}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

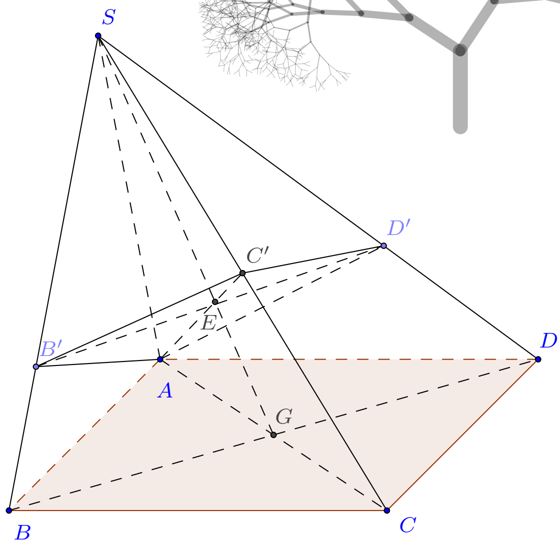
□

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V với đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại $B'; D'$. Khi đó thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

(A) $\dfrac{V}{3}$ (B) $\dfrac{2V}{3}$ (C) $\dfrac{V}{4}$ (D) $\dfrac{v}{2}$

Lời giải:

Sử dụng tỉ số thể tích để giải bài toán này. Gọi G là giao điểm của AC và BD, $SG \cap AC = E$. Trong mặt phẳng (SAD) kẻ $B'D'$ qua E song song với BD. Vì G và C' là trung điểm của AC, SC nên E là trọng tâm của $\triangle SAC$. Nên $\dfrac{SE}{SG} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}$. Ta có



$$\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}}.$$
$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC}\frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{3}$$

□

Câu 6. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $H(x) = 0,015x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân trên để huyết áp giảm nhiều nhất?

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 15

Lời giải: Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để $H(x)$ đạt max. Ta có thể dùng đạo hàm để giải.

cách 2, sử dụng bất đẳng thức.

Ta có $H(x) = \dfrac{0,015}{2}x.x(60-2x) \leq 0.0075\left(\dfrac{x+x+60-2x}{3}\right)^3 = 60.$

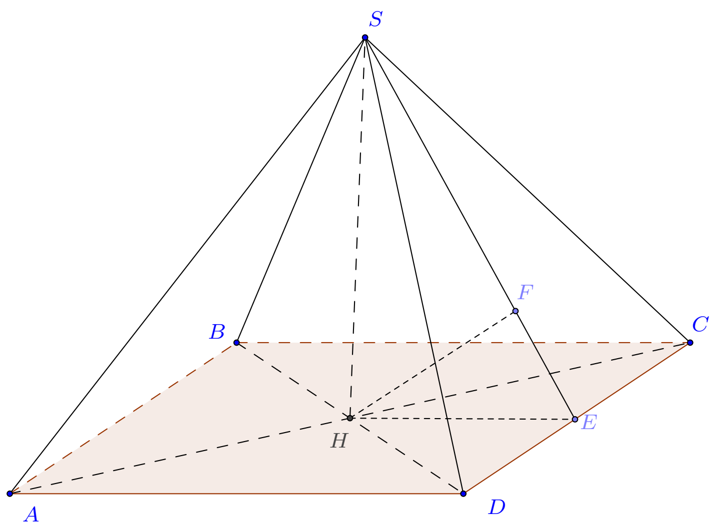
Dấu bằng xảy ra khi $x = x = 60 - 2x \Rightarrow x = 20.$ □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. $AB = a, AD = 2a$ Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, DS bằng $\sqrt{2}a$ thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $\dfrac{4a^3}{3}$ (B) $3a^3$ (C) a^3 (D) $\dfrac{2a^3}{3}$

Lời giải:

Gọi $H = AC \cap BD$ khi đó $SH \perp (ABCD)$. Gọi E là trung điểm của CD, F là hình chiếu vuông góc của H lên SE. Khi đó $HF = d_{H,(SCD)} = \dfrac{1}{2}d_{B,(SCD)} = \dfrac{1}{2}d_{AB,SD} \Rightarrow HF = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}.HE = a$. Dễ dàng tính được $SH = a$ nhờ $\dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^1} = \dfrac{1}{FH^2}$. Và $V = \dfrac{1}{3}a.2a.a = \dfrac{2a^2}{3}$.

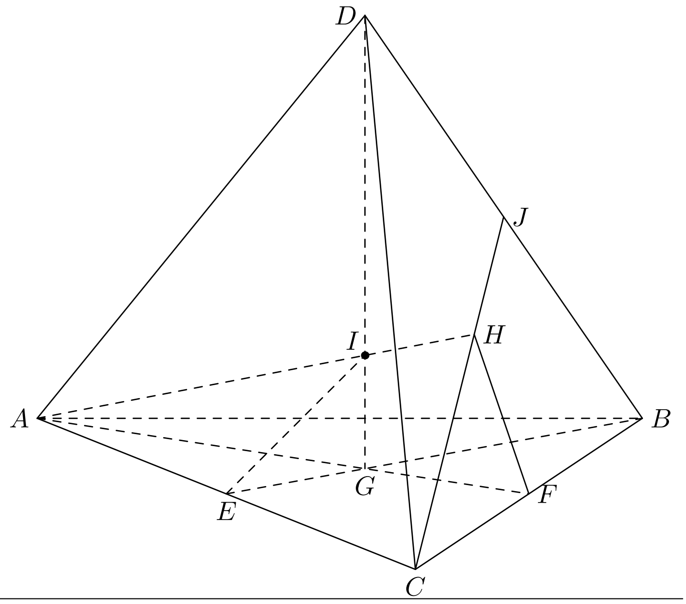


□

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng x. Mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện đều $ABCD$ có bán kính bằng

Ⓐ $\dfrac{3x\sqrt{2}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{3x\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3x\sqrt{2}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{x\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải:



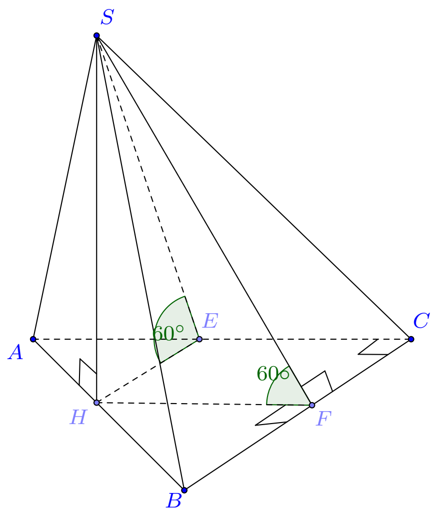
Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.
Gọi H là trọng tâm $\triangle DBC$.
$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu cần tìm.
Ta có $DG = AH = \dfrac{x\sqrt{6}}{3}$.
Ta có $\triangle AIG \sim \triangle AFH$
$\Rightarrow IG = \dfrac{FH.AG}{AH} = \dfrac{\frac{1}{3}AF.\frac{2}{3}AF}{AH}$
$\Rightarrow IG = \dfrac{x}{2\sqrt{6}}$
Ta có $EI = \sqrt{IG^2 + GE^2} = \dfrac{x\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$ chọn D.

□

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC), tam giác ABC vuông tại C có $AC = a, \widehat{ABC} = 30^\circ$. Mặt bên (SAC) và (SBC) cùng tạo với đáy góc bằng nhau và bằng 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a là:

Ⓐ $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2(1+\sqrt{3})}$ Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{1+\sqrt{3}}$ Ⓒ $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2(1+\sqrt{2})}$ Ⓓ $V = \dfrac{a^3}{2(1+\sqrt{5})}$

Lời giải:



- Trong tam giác SAB kẻ đường cao $SH \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
- Gọi E, F là hình chiếu của H lên AC, BC khi đó các góc $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = 60^\circ$ và $HE = HF$ hay HC là phân giác trong góc C.
- Trong tam giác ABC có $AB = 2AC = 2a;\ BC = a\sqrt{3}$
- Theo tính chất đường phân giác

$$\frac{HA}{HB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow HB = HA\sqrt{3} \Rightarrow HA = \frac{2a}{1+\sqrt{3}}; HB = \frac{2a\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

- Trong tam giác HBF vuông tại F có $HF = \dfrac{HB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
- Trong tam giác SHF vuông tại H có $SH = HF.\tan 60^\circ = \dfrac{3a}{1+\sqrt{3}}$
- Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}.a^3}{2(1+\sqrt{3})}$

□

Câu 10. Cho hình hộp đứng $ABCDA'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{BAD} = 60^o$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D', A'B'$. Tính thể tích của khối đa diện $ABDMN$.

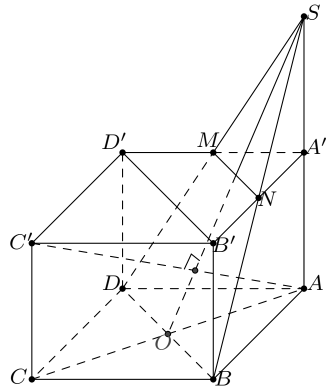
Ⓐ $\dfrac{3a^3}{16}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. Ⓒ $\dfrac{9a^3}{16}$. Ⓓ $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải:

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, gọi S là điểm đối xứng của A qua A'. Khi đó S, M, D thẳng hàng và M là trung điểm của SD; S, N, B thẳng hàng và N là trung điểm của SB. ΔBAD là tam giác đều cạnh a. Vì $S_{\Delta SMN} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta SBD}$ nên

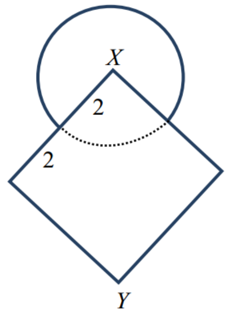
$V_{A.BDMN} = \dfrac{3}{4}V_{S.ABD} = \dfrac{3}{4}.\frac{1}{3}.S_{ABD}.SA.$

Hay $V_{A.BDMN} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{16}$.



□

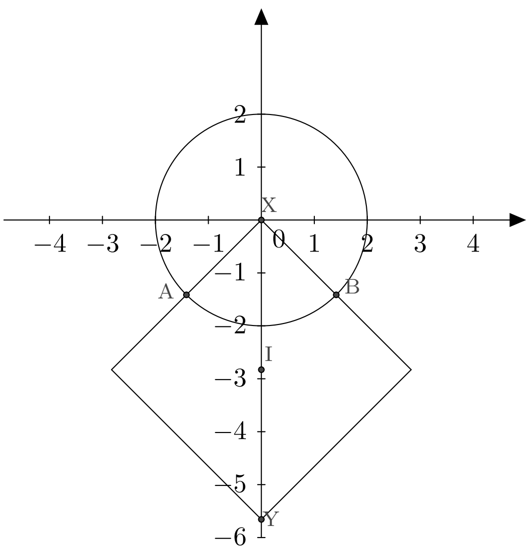
Câu 11.
Cho hình tròn có bán kính bằng 2 và hình vuông có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của hình vuông là tâm của hình tròn (như hình vẽ dưới). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.

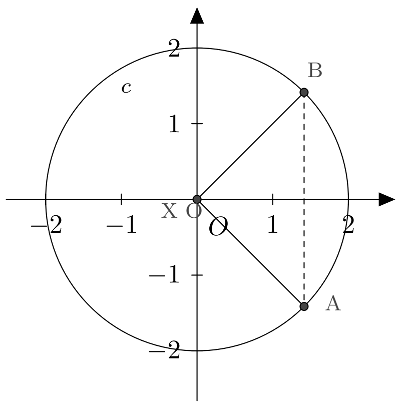


Ⓐ $V = \dfrac{32\left(\sqrt{2}+1\right)\pi}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{8\left(5\sqrt{2}+3\right)\pi}{3}$.

Ⓒ $V = \dfrac{8\left(5\sqrt{2}+2\right)\pi}{3}$. Ⓓ $V = \dfrac{8\left(4\sqrt{2}+3\right)\pi}{3}$.

Lời giải: C





● Khi quay hình tròn quanh trục XY ta được hình cầu (H_1) có bán kính 2. Vậy $V_{H_1} = \dfrac{4}{3}\pi.R^3 = \dfrac{32\pi}{3}$

• Khi quay hình vuông quanh trục XY ta được hình (H_2) gồm hai khối nón có đường cao $h = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ và bán kính đáy $r = 2\sqrt{2}$.

Vậy $V_{H_2} = 2.\dfrac{1}{3}\pi.r^2.h = \dfrac{2}{3}.\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{2} = \dfrac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

• Khi quay quạt AXB quanh trục XY ta được hình (H_3). Gắn hình quạt AXB vào hệ trục như hình vẽ. Ta có

$OA: y = x; \left(0 \le x \le \sqrt{2}\right)$ và $\overset{\frown}{AM}$: $y = \sqrt{4-x^2}; \left(\sqrt{2} \le x \le 2\right)$

Thể tích hình (H_3)

$$V_{H_3} = \pi\int_0^{\sqrt{2}} x^2\mathrm{d}x + \pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} - \frac{10\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{16}{3}\pi - \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Thể tích hình cầu cần tìm $V = V_{H_1} + V_{H_2} - V_{H_3} = \dfrac{8\left(5\sqrt{2}+2\right)\pi}{3}$. □

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2+4x+2y+z=0$, $(S_2): x^2+y^2+z^2-2x-y-z=0$ cắt nhau theo một đường tròn (C) và ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa đường tròn (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, BC?

A 1 mặt cầu. **B** 2 mặt cầu . **C** 4 mặt cầu. **D** Vô số mặt cầu.

Lời giải: Nhận xét $\overrightarrow{AB} = (-1;2;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;0;3)$

Do $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \neq \overrightarrow{0}$ nên A, B, C không thẳng hàng. Mà A, B, C không thuộc (S_1) và (S_2) suy ra (ABC) không trùng (P)

Gọi $(P) = (S_1) \cap (S_2)$, ta có $A, B, C \notin (P)$.

Trong mặt phẳng (ABC) có 4 đường tròn $(C_1)(C_2);(C_3);(C_4)$ thỏa tính chất tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AC, BC.

Mỗi đường tròn $(C_i), i = \overline{1;4}$ tương ứng là giao của mặt cầu (S_i) với (ABC). Tương ứng này là tương ứng $1-1$ nên có 4 mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

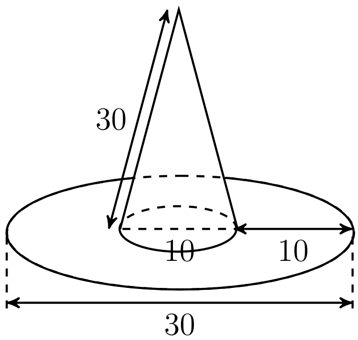
Câu 13. Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có hình dạng và kích thước (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể riềm và mép).

A 350π

B 400π

C 500π

D 450π



Lời giải: Dựa vào hình vẽ ta cần tính diện tích của hai phần:

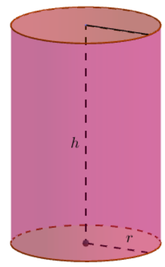
Phần I: Diện tích phần giới hạn bởi hai đường tròn có đường kính là 30 và 10.

Suy ra $S_1 = S_{d=30} - S_{d=10} = \pi.15^2 - \pi.5^2 = 200\pi$.

Phần II: Diện tích hình nón có đường kính hình tròn đáy là 10 và đường sinh là 30. Suy ra $S_2 = \pi.5.30 = 150\pi$.

Vậy diện tích vải cần là $S = S_1 + S_2 = 350\pi$. □

Câu 14. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?



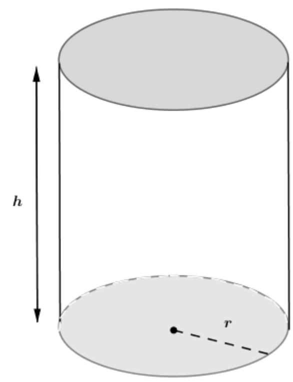
A $\frac{h}{r} = 2$. **B** $\frac{h}{r} = 3\sqrt{2}$. **C** $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$. **D** $\frac{h}{r} = 6$.

Lời giải:

Thể tích của thùng là $V = \pi r^2.h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Chi phí để sản xuất thùng là $T = 2\pi rh + 6\pi r^2 = 6\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} = 6\pi r^2 + \frac{2V}{r}$.

Xét hàm số $f(r) = 6\pi r^2 + \frac{2V}{r} \Rightarrow f'(r) = 12\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{6\pi}}$.

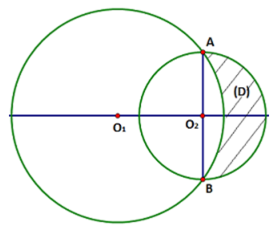


r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{6\pi}}$		$+\infty$
$f'(r)$	||	$-$	0	$+$	
$f(r)$	||	$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy chi phí sản xuất nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{6\pi}} \Rightarrow \frac{h}{r} = 6$.

□

Câu 15. Cho 2 đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại 2 điểm A, B sao cho AB là 1 đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là hình thẳng được giới hạn bởi 2 đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1, O_2, ta được 1 khối tròn xoay. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành là



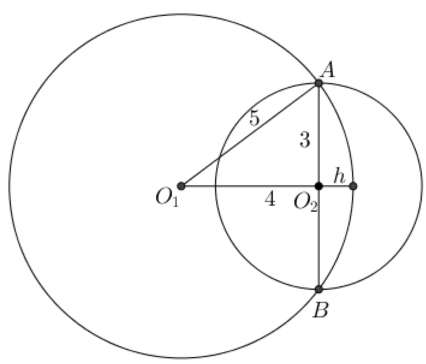
A $V = \frac{14\pi}{3}$. **B** $V = \frac{68\pi}{3}$. **C** $V = \frac{40\pi}{3}$. **D** $V = 36\pi$.

Lời giải:

Đường tròn (O_2) quay quanh trục O_1O_2 tạo thành một hình cầu có thể tích là $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi 3^3$.

Ta có $O_1O_2 = \sqrt{O_1A^2 - O_2A^2} = 4 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow V_{\text{chỏm cầu}} = \pi h^2\left(5 - \frac{h}{3}\right) = \frac{14\pi}{3}$.

Vậy $V_{(D)} = \frac{1}{2}V_{\text{cầu}} - V_{\text{chỏm cầu}} = \frac{40\pi}{3}$.



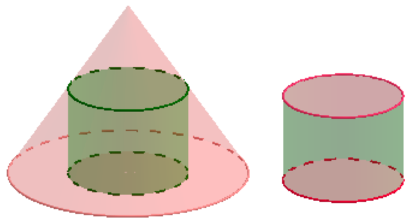
□

Câu 16. Tam giác ABC vuông tại $B.AB = 2a, BC = a$. Cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh huyền AC. Gọi V_1 là thể tích khối nón có đường sinh AB, V_2 là thể tích khối nón có đường sinh BC. Khi đó tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 2 Ⓓ $2\sqrt{2}$

Lời giải: Các Khối nón có đường sinh lần lượt là AB và BC nhận BH là bán kính của đường tròn đáy nên $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{AH}{CH} = 4$ với H là chân đường vuông góc hạt từ B. □

Câu 17. Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng $3m$, chiều cao bằng $9m$. Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành khúc gỗ có dạng hình khối trụ như hình vẽ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tính V?



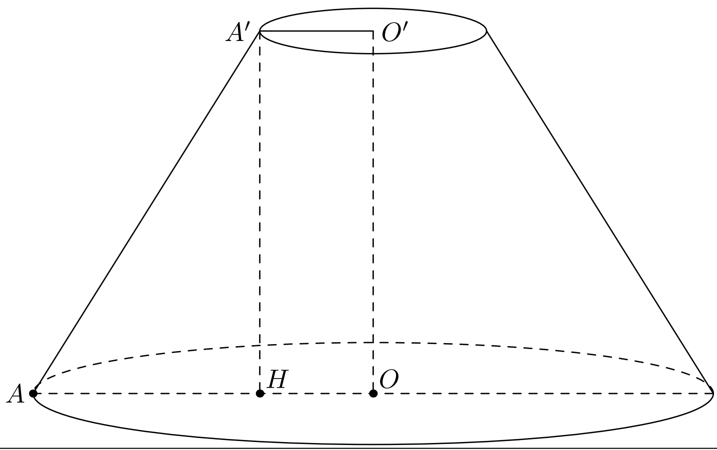
Ⓐ $V = 36(m^3)$. Ⓑ $V = 12\pi(m^3)$. Ⓒ $V = 9\pi(m^3)$. Ⓓ $V = 18\pi(m^3)$.

Lời giải: Khúc gỗ muốn có thể tích lớn nhất trước hết bác thợ mộc cần chế tác khúc gỗ hình trụ phải luôn có phần tiếp xúc với đường sinh của khúc gỗ hình nón. Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao khúc gỗ hình trụ cần chế tác. Ta có $\dfrac{9-h}{9} = \dfrac{R}{3} \Rightarrow h = 9 - 3R$. Mặt khác $V = \pi R^2.h = \pi R^2(9-3R) \leq 12\pi$. $V = 12\pi(m^3)$ là thể tích lớn nhất của khối gỗ hình trụ được chế tác. □

Câu 18. Các bán kính đáy của một hình nón cụt lần lượt là x và $3x$, đường sinh là $2,9x$. Khi đó thể tích khối nón cụt là:

Ⓐ $\dfrac{77\pi x^3}{10}$. Ⓑ $\dfrac{\pi x^3}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\pi x^3\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$. Ⓓ $\dfrac{91\pi x^3}{10}$.

Lời giải:

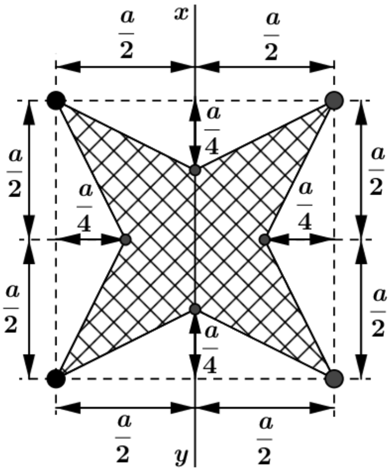


Ta có $h = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{21x}{10}$.

Ta có $V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \dfrac{91\pi x^3}{10}$

$\Rightarrow$ chọn D. □

Câu 19. Bên trong hình vuông cạnh a, dựng hình sao bốn cánh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình). Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục xy.



Ⓐ $\dfrac{5\pi}{16}a^3$.

Ⓑ $\dfrac{5\pi}{48}a^3$.

Ⓒ $\dfrac{\pi}{6}a^3$.

Ⓓ $\dfrac{\pi}{8}a^3$.

Lời giải: Chia hình sao thành hai nửa bởi trục đối xứng vuông góc với xy, ta tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay nửa dưới của hình sao quanh trục xy. Nửa dưới đó chính là phần còn lại của tam giác ABC sau khi bỏ đi các phần tam giác AMN và PBC, nên

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2.\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a}{4} = \frac{5\pi}{96}a^3.$$

Vậy, thể tích cần tính là $2V = \dfrac{5\pi}{48}a^3$. □

Câu 20. Từ một nguyên liệu cho trước, một công ty muốn thiết kế bao bì đựng sữa với thể tích 100ml^3. Bao bì được thiết kế bởi một trong hai mô hình: Hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông hoặc hình trụ. Hỏi thiết kế theo mô hình nào tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

Ⓐ Hình hộp chữ nhật có cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy.
Ⓑ Hình trụ có chiều cao gấp hai lần bán kính đáy.
Ⓒ Hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy.
Ⓓ Hình hộp chữ nhật có cạnh bên bằng cạnh đáy.

Lời giải: Xét trường hợp bao bì là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Khi đó giả sử cạnh đáy là a và chiều cao là h.
Theo giả thiết $a^2.h = 100$ và tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a^2 + 4ah$
$= 2a^2 + \dfrac{400}{a} = 2a^2 + \dfrac{200}{a} + \dfrac{200}{a} \geq 60\sqrt[3]{10}$.
Xét trường hợp bao bì là hình trụ, giả sử bán kính đáy của trụ là R và chiều cao là h.
Theo giả thiết $\pi R^2.h = 100$ và tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2\pi R^2 + 2\pi R.h$
$= 2\pi R^2 + \dfrac{200}{R} = 2\pi R^2 + \dfrac{100}{R} + \dfrac{100}{R} \geq 30\sqrt[3]{20}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $30\sqrt[3]{20}$. Dấu bằng xảy ra khi $2\pi R^2 = \pi Rh \Leftrightarrow h = 2R$. □

Câu 21. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho 3 mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 1 = 0$; $(Q) : x - 2y + z + 8 = 0$; $(R) : x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt 3 mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C. Đặt $T = AB^2 + \dfrac{144}{AC}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của T?

Ⓐ $\min T = 108$. Ⓑ $\min T = 72\sqrt[3]{3}$. Ⓒ $\min T = 72\sqrt[3]{4}$. Ⓓ $\min T = 96$.

Lời giải: Vì ba mặt phẳng đã cho song nhau nên ta có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{d((P),(Q))}{d((P),(R))} = 3.$$

Vậy $AB = 3AC$ và khi đó ta có theo AM-GM:

$$T = AB^2 + \frac{216}{AB} + \frac{216}{AB} \geq 3\sqrt{AB^2 . \frac{216}{AB} . \frac{216}{AB}} = 108.$$

□

Câu 22. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1;2;0), B(1;-1;3), C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 15 = 0$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên mặt phẳng (P) sao cho $2MA^2 - MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = x_M - y_M + 3z_M$.

Ⓐ $T = 6$. Ⓑ $T = 3$. Ⓒ $T = 5$. Ⓓ $T = 4$.

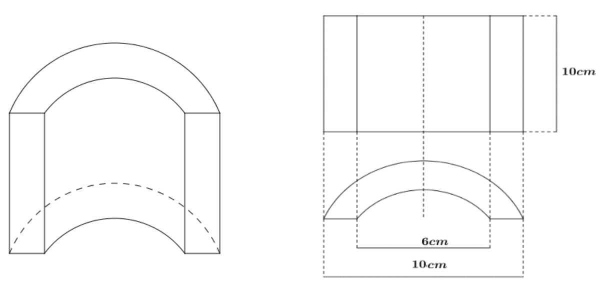
Lời giải: Gọi điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 0$, ta tìm được $I(1;2;-2)$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2MA^2 - MB^2 + MC^2 &= 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= 2IA^2 - IB^2 + IC^2 + 2IM^2 + 2\overrightarrow{IM}\left(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) \\ &= 2IA^2 - IB^2 + IC^2 + 2IM^2 \end{aligned}$$

Vì $2IA^2 - IB^2 + IC^2$ không đổi nên ta cần chọn M sao cho độ dài IM nhỏ nhất. Vậy M là hình chiếu của I lên (P).

Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình $d: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+2}{2}$. Khi đó $M = d \cap (P)$ suy ra $M(4;-1;0)$. □

Câu 23. Một chi tiết máy có hình dạng như hình vẽ 1, các kích thước được thể hiện trên hình vẽ 2 (hình chiếu bằng và hình chiếu đứng). Người ta mạ toàn phần chi tết này bởi một hợp kim chống gỉ. Để mạ $1m^2$ bề mặt cần số tiền 150000đ. Số tiền nhỏ nhất có thể dùng để mạ 10000 chi tiết máy là bao nhiêu? (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng).



Ⓐ 37102 (nghìn đồng). Ⓑ 51238 (nghìn đồng).
Ⓒ 48238 (nghìn đồng). Ⓓ 51239 (nghìn đồng).

Lời giải: Đầu tiên, cần tính diện tích xung quanh của chi tiết máy:

- Diện tích hai mặt cong là $3\pi.10 + 5\pi.10 = 80\pi\ cm^2$.

- Diện tích hai đáy là $(5^2-3^2)\,\pi = 16\pi\ cm^2$.
- Diện tích hai mặt hình chữ nhật là $2.(2.10) = 40\ cm^2$

Vậy số tiền cần tìm là $\dfrac{80\pi+16\pi+40}{10^{-4}}.10000.150000 \simeq 512,38$ (nghìn đồng). □

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A\,(-3;0;1)\,, B\,(1;-1;3)\,.$ Trong tất cả các đường thẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P), gọi Δ là đường thẳng sao cho khoảng cách từ B đến Δ là lớn nhất. Hãy viết phương trình đường thẳng Δ.

A $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z}{-7}$.

B $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+12}{6}=\dfrac{z+13}{7}$.

C $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z-1}{7}$.

D $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-3}{7}$.

Lời giải: Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P) ta có $(\Delta)\in(Q)$. Nên $B\notin(Q)$
Gọi H là hình chiếu vuông góc kẻ từ B xuống (Δ) ta có $AB\geq BH$.
Vậy BH đạt GTLN khi $H\equiv A$. Khi đó $(\Delta)\perp AB$
Ta có $\overrightarrow{AB}\,(4;-1;2)\,, \overrightarrow{n_p}=(1;-2;2)$ và (Δ) qua A và có VTCP $\overrightarrow{u}=\left[\overrightarrow{n_p};\overrightarrow{AB}\right]=(2;-6;-7)\,.$

- Loại phương án C vì khác phương VTCP.
- Loại phương án D vì (Δ) không đi qua B.
- Thay tọa độ điểm A vào và chọn phương án B. □

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A $(P): x+2y+3z-11=0$

B $(P): x+2y+3z-14=0$

C $(P): x+2y+z-14=0$

D $(P): x+y+z-6=0$

Lời giải: Gọi $OH\perp(ABC)$ tại H, ta có: $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{OH^2}\geq\dfrac{1}{OM^2}$
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv M$.
Do đó $\left(\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}\right)_{min}=\dfrac{1}{OM^2}$ khi (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có VTPT $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$.
Vậy (P) có phương trình $x+2y+3z-14=0\Rightarrow$ chọn B. □

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\,(a;0;0)\,;\,B\,(0;b;0)\,;C\,(0;0;3)$ trong đó a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=2$. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Biết rằng khi a, b thay đổi thì điểm I luôn thuộc một đường thẳng Δ cố định. Phương trình đường thẳng Δ là

A $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\\ z=\dfrac{3}{2}\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$

B $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=\dfrac{3}{2}\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$

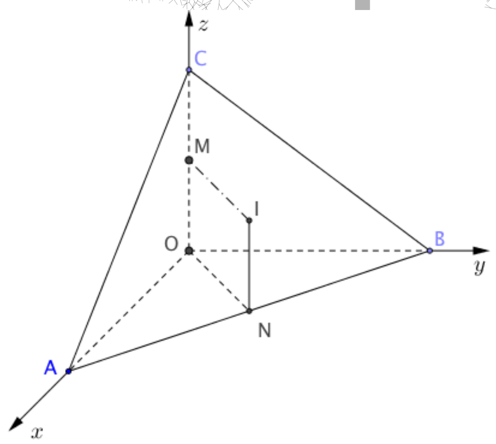
C $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=2+t\\ z=3\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$

D $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=1+t\\ z=3\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$

Lời giải:

Gọi $M\left(0;0;\dfrac{3}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};0\right)$ lần lượt là trung điểm của OC, AB.
Vì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ nên $IM\perp Oz$, $IN\perp(OAB)$, do đó $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Mà $a+b=2$ nên $I\left(1-\dfrac{b}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{3}{2}\right)\in\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=\dfrac{3}{2}\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.



□

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $A(1;0;0)$, $B(-1;1;-2)$, $C(-2;0;-3)$, $D(0;-1;-1)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Biết khối chóp có thể tích bằng 4. Ký hiệu tọa độ của điểm S là $S(x_0;y_0;z_0)$ với $x_0>0$. Tìm tọa độ của x_0.

A $x_0=1$ **B** $x_0=2$ **C** $x_0=3$ **D** $x_0=4$

Lời giải: • $\overrightarrow{AB}=(-2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;0;-3)$, $\overrightarrow{AD}=(-1;-1;-1)$.
$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-3;0;3)$ và $|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}|=(-3;0;3)$.
• $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}|=3\sqrt{2}$. Suy ra $SH=\dfrac{3V}{S_{ABCD}}=2\sqrt{2}$.
• Đường thẳng SH đi qua điểm $H(-1;-\dfrac{1}{2};-2)$ và có VTCP $\vec{u}=(-1;0;1)\Rightarrow S(-1-t;-\dfrac{1}{2};-2-t)$.

Do đó $SH=3\sqrt{2}\Leftrightarrow|t|\sqrt{2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\pm2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}S(-3;-\dfrac{1}{2};-4)\\S(1;-\dfrac{1}{2};0)\end{array}\right.$

Vậy $x_0=1$. □

Câu 28. Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=m+2t\end{cases}$.

Biết có 2 giá trị thực của m để d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho các tiếp diện của (S) tại A,B vuông góc với nhau. Tích hai giá trị đó bằng

A 16 **B** 12 **C** 14 **D** 10

Lời giải: • Ta có $(-1+2t)^2+(m+2t)^2-2(-1+2t)+4(m+2t)+1=0\Leftrightarrow8t^2+4mt_m^2+4m+4=0$ (1).
• Đường thẳng d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt
$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta>0\Leftrightarrow m^2+8m+8>0$.
• Khi đó $A(-1+2t_1;0;m+2t_1)$ và $B(-1+2t_2;0;m+2t_2)$ với t_1,t_2 là 2 nghiệm của (1).
• $\overrightarrow{IA}=(2t_1-2;0;2t_1+m+2)$, $\overrightarrow{IB}=(2t_2-2;0;2t_1+m+2)$.
• Tiếp diện tại A,B vuông góc $\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$
$\Leftrightarrow(2t_1-2)(2t_2-2)+(2t_1+m+2)(2t_2+m+2)=0$
$\Leftrightarrow8t_1t_2+2m(t_1+t_2)+(m+2)^2+4=0$.

$\Leftrightarrow m^2+8m+12=0 \Leftrightarrow m=-2$ hoặc $m=-6$.
Vậy $m_1.m_2=12$. □

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-4)^2+z^2=5$. Tìm tọa độ của điểm A thuộc trục Oy. Biết rằng ba mặt phẳng phân biệt qua A và đôi một vuông góc cắt mặt cầu theo thiết diện là 3 hình tròn có tổng diện tích bằng 11π.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}A(0;2;0)\\A(0;6;0)\end{array}\right.$ Ⓑ $\left[\begin{array}{l}A(0;0;0)\\A(0;8;0)\end{array}\right.$ Ⓒ $\left[\begin{array}{l}A(0;6;0)\\A(0;0;0)\end{array}\right.$ Ⓓ $\left[\begin{array}{l}A(0;2;0)\\A(0;8;0)\end{array}\right.$

Lời giải: • Ba mặt phẳng trên là $(P): x=0$, $(Q): y-a=0$, $(R): z=0$. Từ đó suy ra $I\in(P),(R)$. Do đó, mặt phẳng (P) và (R) cắt mặt cầu theo các đường tròn có tổng diện tích $S_1+S_2=2\pi R^2=10\pi$.
• Mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu theo một đường tròn có diện tích π nên bán kính đường tròn đó là $r=1$.
• Ta có $h=\sqrt{R^2-r^2}=2$ nên $|4-a|=2 \Leftrightarrow a=2$ hoặc $a=6$. □

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=4$. Biết a,b,c thay đổi thì tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tìm khoảng cách d từ điểm $M(1;1;-1)$ đến mặt phẳng (P).

Ⓐ $d=\sqrt{3}$. Ⓑ $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $d=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải: Lưu ý $I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};\dfrac{c}{2}\right)$ nên điểm I thuộc mặt phẳng cố định có phương trình $x+y+z-2=0$. □

Câu 31. Cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-2z+15=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2y-2z-1=0$. Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) đến một điểm thuộc mặt cầu (S) là:

Ⓐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải:

Ta có $(S): x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3 \Rightarrow \begin{cases}I(0;1;1)\\R=\sqrt{3}\end{cases}$

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Khoảng cách cần tìm $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo ba giao tuyến là các đường tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$. Tính tổng diện tích của ba hình tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$.

Ⓐ 3π. Ⓑ 11π. Ⓒ 4π. Ⓓ 12π.

Lời giải: (S) có tâm là $I(1;1;-2)$, bán kính $R=2$. Gọi I_1, I_2, I_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên ba mặt phẳng nói ở đề bài. Khi đó IA chính là đường chéo của hình hộp chữ nhật nhận II_1, II_2, II_3 làm ba cạnh, suy ra $\Sigma II_k^2 = IA^2 = 1$. Tổng diện tích của ba hình tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$ là $s=\Sigma\pi r_k^2 = \Sigma\pi(R^2-II_k^2) = \pi(3R^2-\Sigma II_k^2) = 11\pi$. (Trong đó r_k, với $k=1,2,3$, lần lượt là bán kính của các hình tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$.) □

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các mặt phẳng$(P): x-y+2z+1=0$và$(Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi(S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành đồng thời(S) cắt mặt phẳng(P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và(S) cắt mặt phẳng(Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính$r$. Xác định$r$ sao cho chỉ đúng một mặt cầu(S) thỏa mãn yêu cầu?

A $r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. **B** $r=\sqrt{3}$. **C** $r=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$. **D** $r=\sqrt{2}$.

Lời giải: Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I(a;0;0)$, bán kính $R>0$. Khi đó

$$(S):(x-a)^2+y^2+z^2=R^2.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của I trên (P) và (Q), khi đó:

$$IH=d\left(I,(P)\right)=\frac{|a+1|}{\sqrt{6}};\ IK=d\left(I,(Q)\right)=\frac{|2a-1|}{\sqrt{6}}.$$

Do $IH^2+4=R^2$ và $IK^2+r^2=R^2$ nên ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{(a+1)^2}{6}+4=R^2 & (1)\\ \dfrac{(2a-1)^2}{6}+r^2=R^2 & (2)\end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế ta được:

$$\begin{aligned}&\frac{(2a-1)^2}{6}-\frac{(a+1)^2}{6}+r^2-4=0\\ \Leftrightarrow &4a^2-4a+1-(a^2+2a+1)+6r^2-24=0\\ \Leftrightarrow &3a^2-6a+6r^2-24=0\Leftrightarrow a^2-2a+2r^2-8=0. \qquad (3)\end{aligned}$$

Do có duy nhất a nên (3) có nghiệm duy nhất hay

$$\Delta'=1-2r^2+8=0\Leftrightarrow r^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow r=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

□

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng$\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{2}$và mặt phẳng$(\alpha): x-2y+2z-5=0$. Gọi(P)là mặt phẳng chứaΔ và tạo với(α)một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng(P)có dạng$ax+by+cz+d=0$($a,b,c,d\in\mathbb{Z}$và$a,b,c,d<5$). Khi đó, tích$a.b.c.d$bằng bao nhiêu?

A 60. **B** 120. **C** -120. **D** -60.

Lời giải: Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$m\left(2(x-1)-z\right)+n(y-1-z)=0\ (m^2+n^2\neq 0).$$

Hay $(P): 2mx+ny-(m+n)z-2m-n=0$, với $m^2+n^2\neq 0$. Ta có:

$$\cos\left(\widehat{(\alpha),(P)}\right)=\frac{|2m-2n-2(m+n)|}{\sqrt{9}.\sqrt{4m^2+n^2+m^2+2mn+n^2}}=\frac{4\,|n|}{3\sqrt{5m^2+2mn+2n^2}}.$$

Nếu $n=0$ thì $\cos\left(\widehat{(\alpha),(P)}\right)=0$.
Nếu $n\neq 0$ thì

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{(\alpha),(P)}\right)&=\frac{4}{3\sqrt{5\frac{m^2}{n^2}+2\frac{m}{n}+2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5t^2+2t+2}}\ \left(t=\frac{m}{n}\right)\\&=\frac{4}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{2}{5}t+\frac{2}{5}}}=\frac{4}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{25}}}\\&\leq\frac{4}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}}=\frac{4\sqrt{5}}{6}.\end{aligned}$$

Từ 2 trường hợp trên thấy rằng góc giữa (P) và (α) bé nhất khi $t=-\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{m}{n}=-\frac{1}{5}$, chọn $n=-5$ suy ra $m=1$. Như vậy $(P): 2x-5y+4z+3=0$, do đó $abcd=2(-5).4.3=-120$. □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm$A(a;0;0)\,,B(0;b;0)\,,C(0;0;c)$ trong đóa,b,clà các số dương thay đổi thỏa mãn:$\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng(ABC) có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải: Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Khi đó:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Ta có: $1=\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\leq\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(2^2+(-2)^2+1^2\right)}$.

Suy ra $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{9}$, dấu "=" xảy ra khi bộ $\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$ tỉ lệ với bộ $(2;-2;1)$.

Như vậy $OH^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\leq 9$, suy ra OH lớn nhất là bằng $\sqrt{9}=3$. □

---

3 Các câu vận dụng Giải tích

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-2x+m}$ có hai tiệm cận đứng.

(A) $m \neq 1$ và $m \neq -8$.
(B) $m > -1$ và $m \neq 8$.
(C) $m = 1$ và $m = -8$.
(D) $m < 1$ và $m \neq -8$.

Lời giải: Hàm số đã cho $y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2 - 2x + m}$
Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng khi và chỉ khi $x^2 - 2x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và -2
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ 1 - 2 + m \neq 0 \\ 4 + 4 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 1 \\ m \neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -8 \end{cases}.$ □

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{3^{-x} - 3}{3^{-x} - m}$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

(A) $m < \dfrac{1}{3}$.
(B) $\dfrac{1}{3} < m < 3$.
(C) $m \leq \dfrac{1}{3}$.
(D) $m < 3$.

Lời giải: Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$ suy ra hàm số xác định trên $(-1; 1)$
Với $-1 < x < 1$ suy ra $\dfrac{1}{3} < 3^{-x} < 3$ hàm số xác định trên $(-1; 1)$ suy ra $m \notin \left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{3 - m}{(3^{-x} - m)^2} . (-1) . 3^{-x} . \ln 3 = \dfrac{(m-3)\ln 3 . 3^{-x}}{(3^x - m)^2}$
Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$ suy ra $y' \leq 0$ trên $(-1; 1)$, $y' = 0$ tại hữu hạn điểm.
Nhận xét $y' = 0 \Leftrightarrow m = 3$ hàm số suy biến thì $y = 0$ không nghịch biến.
Từ yêu cầu bài toán ta có $(3 - m) . (-1) . 3^{-x} . \ln 3 < 0$ trên $(-1; 1) \Leftrightarrow m < 3$ Vậy $\dfrac{1}{3}$ □

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x - m$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$. Tìm tọa độ giao điểm A của đồ thị hàm số với trục tung?

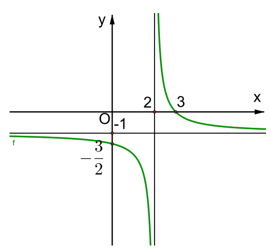
(A) $A(0; -2)$.
(B) $A(0; 2)$.
(C) $A(0; -1)$.
(D) $A(0; 1)$.

Lời giải: Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x - m$ có đạo hàm

$$y' = x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 2$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2$.
Với $m = 1$, hàm số trở thành $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 1$ không có cực trị.
Với $m = 2$, hàm số trở thành $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 2$ có cực tiểu tại $x = 0$
Gọi $A(0; y_A)$ là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung suy ra $y_A = -2$
Vậy $A(0; -2)$. □

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình vẽ dưới.
Tính giá trị của $a + 2b + c$.



(A) 1.
(B) 2 .
(C) 0
(D) 3.

Lời giải: Hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$ suy ra $c = -2$.
Hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ suy ra $c = -1$.
Do đó hàm số có dạng $y = \dfrac{-x+b}{x-2}$.
Do đồ thị của hàm số qua $(3;0)$ nên suy ra $b = 3$.
Vậy $y = \dfrac{-x+3}{x-2}$ suy ra $a = -1; b = 3, c = -2$ hay $a + 2b + c = -1 + 6 - 2 = 3$. □

Câu 5. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x) = 0,024x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

(A) $20mg$ (B) $0,5mg$ (C) $2,8mg$ (D) $15mg$

Lời giải: Bài toán đi tìm $x \in [0;30]$ để $G(x)$ đạt giá trị lớn nhất.
$G(x) = 0,024x^2(30 - x) = -\dfrac{3}{125}x^3 + \dfrac{18}{25}x^2 \Rightarrow G'(x) = -\dfrac{9}{125}x^2 + \dfrac{36}{25}x$.
$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20 \in (0;30) \end{array}\right.$
Ta có $G(20) = 96; G(30) = 0; G(0) = 0$.
Vậy $G(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 96 khi $x = 20 \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + (1 - m^2)x + 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối với trục tung?

(A) $-\dfrac{1}{3} < m < \dfrac{1}{3}$ (B) $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$
(C) $-1 < m < 1$ (D) $-1 \le m \le 1$

Lời giải: Ta có $y' = 3x^2 - 8x + (1 - m^2)$;
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối với trục tung
$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 3(1 - m^2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \Rightarrow$ chọn B □

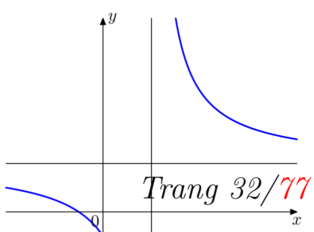
Câu 7. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x - 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 6}}{x^2 + x - 2}$.

(A) 2 (B) 0 (C) 3 (D) 1

Lời giải: Phương trình $x^2 + x - 2 = 0$ có hai nghiệm $x = 1, x = -2$
Thay $x = 1$ vào biểu thức $4x - 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 6}$ thấy kết quả bằng 0, thay $x = -2$ vào biểu thức $4x - 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 6}$ thấy kết quả khác 0.
Suy ra đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận đứng là $x = -2$. □

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?



(A) $bc > 0, ad < 0$
(B) $ac > 0, bd > 0$
(C) $ab < 0, cd < 0$
(D) $bd < 0, ad > 0$

Lời giải: A □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có số đo một góc bằng $120°$.

(A) $m = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{24}}$ (B) $m = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$ (C) $m = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{48}}$ (D) $m = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Lời giải: $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 8\left(m-1\right)x = 4x\left[x^2 - 2\left(m-1\right)\right]$
Điều kiện để có 3 cực trị là $m > 1$. Tọa độ các điểm cực trị là
$A\left(0; 2m-1\right), B\left(\sqrt{2\left(m-1\right)}; -4(m-1)^2 + 2m - 1\right); C\left(-\sqrt{2\left(m-1\right)}; -4(m-1)^2 + 2m - 1\right)$
Tam giác ABC luôn cân tại A nên theo giả thiết ta có
$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 120^0 \Leftrightarrow \dfrac{-2\left(m-1\right) + 16(1-m)^4}{2\left(m-1\right) + 16(1-m)^4} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(m-1\right)^3 = \dfrac{1}{24} \Leftrightarrow m = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{24}}$ □

Câu 10. Một công ty kinh doanh nghiên cứu thị trường trước khi tung ra sản phẩm và nhận thấy để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại A và B thì mất lần lượt là 2 000 USD và 4 000 USD. Nếu sản xuất được x sản phẩm loại A và y sản phẩm loại B thì lợi nhuận mà công ty thu được là $L\left(x, y\right) = 8000.x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}}$USD. Giả sử chi phí để sản xuất hai loại sản phẩm A, B là 40 000 USD, gọi x_o, y_o lần lượt là số sản phẩm loại A, B để lợi nhuận lớn nhất. Tính$x_o^3 + y_o^5$.

(A) 17319. (B) 8288. (C) 8119. (D) 3637.

Lời giải: Cần tìm $x > 0, y > 0$ để $L\left(x, y\right) = 8000.x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}}$ lớn nhất biết rằng

$$40.000 = 2000x + 4000y \Leftrightarrow 20 = x + 2y.$$

Ta có $\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)^6 = x^2y^3$ và

$$20 = x + 2y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} \geq 5\sqrt[5]{\frac{x^2y^3.2^3}{2^2 3^3}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{2y}{3} \\ 20 = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6. \end{cases}$$

Do đó $L\left(x, y\right) = 8000.x^{\frac{1}{3}}.y^{\frac{1}{2}}$lớn nhất khi và chỉ khi $x = 8, y = 6$. Như vậy $x_0^3 + y_0^5 = 8^3 + 6^5 = 8288$.
□

Câu 11. Tìmmđể đồ thị hàm số:$y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4m$có ba điểm cực trị A, B, C sao cho$S_{\Delta ABC} = 1$.

(A) $m = 1$. (B) $m = 3$. (C) $m = 2$. (D) $m = 4$.

Lời giải: Ta có

$$y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4m \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right).$$

Hàm số có 3 cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt hay $m > 0$. Khi đó:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \sqrt{m}; -\sqrt{m}\right\}.$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m^2 - 4m$	$\nearrow$	$2m^2 - 4m$	$\searrow$	$m^2 - 4m$	$\nearrow$	$+\infty$

Tọa độ 3 điểm cực trị là

$$A(0; 2m^2 - 4m),\ B(\sqrt{m}; m^2 - 4m),\ C(-\sqrt{m}; m^2 - 4m).$$

Dễ thấy ΔABC cân tại A. Trung điểm BC là $I\left(0; m^2 - 4m\right)$. Diện tích tam giác ABC là

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AI = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{m}\left|m^2\right| = m^2\sqrt{m}.$$

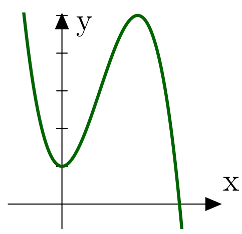
Theo giả thiết ta có: $m^2\sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m^5 = 1 \Leftrightarrow m = 1.$ □

Câu 12. Tìm m để hàm số$y = \dfrac{mx - 2}{x + m - 3}$nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

(A) $1 \le m \le 2$. (B) $1 < m < 2$. (C) $m \ge 2$hoặc$m \le 1$. (D) $m > 2$hoặc$m < 1$.

Lời giải: Ta có $y' = \dfrac{m(m-3)+2}{(x+m-3)^2} = \dfrac{m^2 - 3m + 2}{(x+m-3)^2}$. Điều kiện để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là $y' < 0,\ \forall x \neq 3 - m$ hay $m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m \in (1; 2)$. □

Câu 13. Cho hàm số$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
có đồ thị như hình vẽ bên.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0.$ (B) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0.$
(C) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0.$ (D) $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0.$

Lời giải: Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ hình dạng đồ thị suy ra $a < 0$. Ta cógiao điểm với trục tung là điểm có tung độ dương nên $d > 0$. Do điểm cực tiểu có hoành độ $x = 0$ nên $c = 0$. Do điểm cực đại $x = -\dfrac{2b}{3a} > 0$ nên b và a trái dấu, suy ra $b > 0$. Vậy ta chọn D. □

Câu 14. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải: Do $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+\sqrt{4x^2-3x+2}}{x-2} = +\infty$ nên đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng. Do

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+2}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x^2}} = 4$$

nên đường thẳng $y=4$ là tiệm cận ngang. Do

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+2}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x^2}} = 0$$

nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang. Dễ thấy đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên. Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận. □

Câu 15. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ là

(A) $m\in(2;+\infty)$.
(B) $m\in(-2;0)$.
(C) $m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
(D) $m\in(-\infty;-2)$.

Lời giải: HS nb trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x)=\dfrac{m^2-4}{(x-m)^2}<0 \\ m\notin(0;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2\end{array}\right. \\ m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow m<-2.$ □

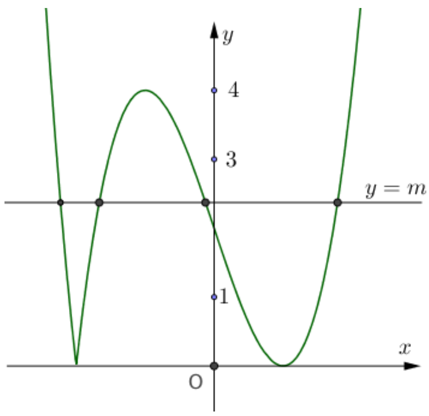
Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Với $m\in(1;3)$ thì phương trình $|f(x)|=m$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4.
(B) 3.
(C) 2.
(D) 5.

Lời giải: Từ BBT của hàm số ta có $y=f(x)=-x^3+3x-2$. Đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ là



Do đó với $m \in (1;3)$, pt $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm pb. □

Câu 17. Gọi (C) là parabol đi qua 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$, tìm m để (C) đi qua điểm $A(2;24)$.

(A) $m = -4$ (B) $m = 4$ (C) $m = 3$ (D) $m = 6$

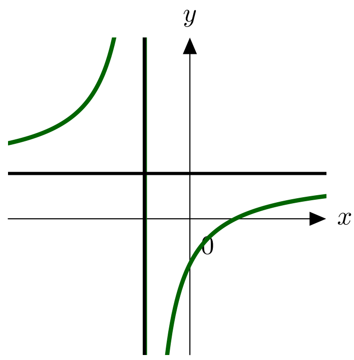
Lời giải: •Ta có $y' = x^3 - 2mx$. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

• Ta có $y = \dfrac{1}{4}x.(x^3 - 2mx) - \dfrac{1}{2}mx^2 + m^2$.

• Parabol đi qua 3 điểm cực trị là $(C): y = -\dfrac{1}{2}mx^2 + m^2$.

• Điểm $A(2;24) \in (C)$ nên $m = 6$ hoặc $m = -4$ (loại). □

Câu 18. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $\dfrac{x-1}{x+1}$

(B) $y = x^2 - 3x^2 + 1$

(C) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

(D) $\dfrac{x+2}{x+1}$

Lời giải: □

Câu 19. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Hoành độ trung điểm I của MN là

(A) 1 (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) 2 (D) $-\dfrac{5}{2}$

Lời giải: □

Câu 20. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -(x-1)^2(x+6)$. Khi đó hàm số $f(x)$

(A) Đạt cực đại tại điểm $x = -6$. (B) Đạt cực tiểu tại điểm $x = -6$.

(C) Đạt cực đại tại điểm $x = 1$. (D) Đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Lời giải: Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -6$. Nhưng chỉ khi qua điểm $x = -6$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm (*tính từ trái sang phải*). Do đó hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -6$ và không có điểm cực tiểu. □

Câu 21. Với giá trị nào của tham số thực m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 32?

(A) $m=2$. (B) $m=4$. (C) $m=5$. (D) $m=3$.

Lời giải: Điều kiện để đồ thị hàm số có ba cực trị là $m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.

Khi đó $y'=4x(x^2-m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m-1}. \end{array}\right.$

Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm cực trị trên bằng $\sqrt{m-1}.|y(0)-y(\sqrt{m-1})|=(\sqrt{m-1})^5$.
Do đó $(\sqrt{m-1})^5=32 \Leftrightarrow \sqrt{m-1}=2 \Leftrightarrow m=5$. □

Câu 22. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

(A) $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. (B) $m\in[2;+\infty)$.
(C) $m\in(-\infty;1)$. (D) $m\in(1;2)$.

Lời giải: Với mỗi giá trị m ta có tập xác định của hàm số $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{3-m\}$.

Do đó hàm số nghịch biến khi và chỉ khi $y'<0 \Leftrightarrow \dfrac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}<0 \Leftrightarrow m\in(1;2)$. □

Câu 23. Biết rằng hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1, f(1)=-3$ và đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của hàm số tại $x=3$.

(A) $f(3)=-29$. (B) $f(3)=9$. (C) $f(3)=29$. (D) $f(3)=3$.

Lời giải: Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ suy ra $c=2$. Mà $f'(x)=3x^2+2ax+b$ kết hợp giả thiết cho $(1;-3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm bậc ba nên ta có hệ

$$\begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 1+a+b+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow a=3, b=-9.$$

Kiểm tra $f"(1)=6+2a=12>0$ nên hàm số được xác định là $f(x)=x^3+3x^2-9x+2$ và tính được $f(3)=29$. □

Câu 24. Biết rằng các đường tiệm cận của đường cong $(C): y=\dfrac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác $(\mathcal{H})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) $(\mathcal{H})$ là một hình chữ nhật có chu vi bằng 8.
(B) $(\mathcal{H})$ là một hình chữ nhật có chu vi bằng 14.
(C) $(\mathcal{H})$ là một hình vuông có chu vi bằng 25.
(D) $(\mathcal{H})$ là một hình vuông có chu vi bằng 4.

Lời giải: Tập xác định $\mathcal{D}=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)\setminus\{5\}$. Vì $\lim\limits_{x\to5^+}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=7$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=5$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=5, y=7$ và một tiệm cận đứng $x=5$. Các tiệm cận này kết hợp với trục tung tạo thành một hình chữ nhật có chu vi bằng $2.[(7-5)+5]=14$. □

Câu 25. Các giá trị m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-x^2+3$ tại 4 điểm phân biệt là

Ⓐ $\frac{5}{2} < m < 3$. Ⓑ $\frac{1}{2} < m < 3$. Ⓒ $m > 3$. Ⓓ $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{2}$.

Lời giải:

Ta có $y' = 2x^3 - 2x, y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$.

Ta có $y(0) = 3, y(1) = \frac{5}{2}$. Ycbt $\Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < 3 \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là

Ⓐ $1 \leq m \leq 2$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $1 < m < 2$. Ⓓ $m = 2$.

Lời giải:

Ta có $y' = \frac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$. Ycbt $\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2 \Rightarrow$ chọn C. □

Câu 27. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^x \cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

Ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$.

Lời giải:

Ta có $y' = e^x(\cos x - \sin x), y' = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Ta có $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[0;\frac{\pi}{2}]} y = y(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 28. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = -1$. Ⓓ $m = 2$.

Lời giải: ĐTHS có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Ba điểm cực trị là $A(\sqrt{m}; -m^2 - m + 1), B(-\sqrt{m}; -m^2 - m + 1), C(0; 1 - m)$. O là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $OA \perp BC$. Tức là $m + (-m^2 - m + 1)m^2 = 0 \Leftrightarrow m(m+1)^2(m-1) = 0$. Dẫn đến $m = 1$ (do $m > 0$). □

Câu 29. Biết đường thẳng $y = 3x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4x+2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có tung độ là y_1 và y_2. Tính $y_1 + y_2$.

Ⓐ $y_1 + y_2 = 1$. Ⓑ $y_1 + y_2 = 11$. Ⓒ $y_1 + y_2 = 9$. Ⓓ $y_1 + y_2 = 10$.

Lời giải: □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định, và có bảng biến thiên như dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	0 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm thực duy nhất.

A $[0; +\infty) \cup \{-1\}$. **B** $(0; +\infty) \cup \{-1\}$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $[0; +\infty)$.

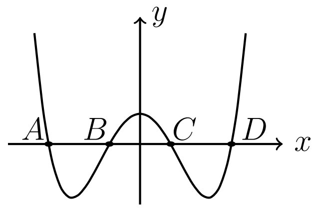
Lời giải: □

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị (C). Giả sử (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 (với $x_1 < x_2 < x_3$). Khẳng định nào sau đây đúng?

A $1 < x_1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$. **B** $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$.
C $x_1 < 0 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$. **D** $1 < x_1 < 3 < x_2 < 4 < x_3$.

Lời giải: Hàm số đạt cực đại bằng $4 + m$ tại $x = 1$, đạt cực tiểu bằng m tại $x = 3$. Nên (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < 0$. Hơn nữa, $y = m$ khi và chỉ khi $x = 3$ hoặc $x = 0$; $y = m + 4$ khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = 4$. Do đó, $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$. □

Câu 32. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D như hình vẽ bên. Biết rằng $AB = BC = CD$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A $a > 0, b > 0, c > 0, 9b^2 = 100ac$.
B $a > 0, b < 0, c > 0, 9b^2 = 100ac$.
C $a > 0, b > 0, c > 0, 100b^2 = 9ac$.
D $a > 0, b < 0, c > 0, 100b^2 = 9ac$.

Lời giải: Từ đồ thị, ta suy ra $a > 0, b < 0, c > 0$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành, sau khi đặt $t = x^2$, phương trình đó trở thành $at^2 + bt + c = 0$. Từ giả thiết, phương trình ẩn t này phải có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2$. Khi đó, hoành độ của các điểm A, B, C, D tương ứng là $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$. $AB = BC = CD$ khi và chỉ khi $\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1}$, hay $t_2 = 9t_1$. Từ đây, cùng với hệ thức (Vi-et) $t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a}$, ta giải được $t_2 = 9t_1 = -\dfrac{9b}{10a}$. Thay t_1, t_2 vào hệ thức $t_1t_2 = \dfrac{c}{a}$ ta thu được hệ thức $9b^2 = 100ac$. □

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (6m^2 - 3)x$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A Không có giá trị nào của tham số m **B** $m = 0$
C $m = 1$ **D** $m = 0$ hoặc $m = 1$

Lời giải: Có $y' = 3x^2 - 6mx + 6m^2 - 3$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} \Delta = -9m^2 + 9 > 0 \\ 6m^2 - 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

□

Câu 34. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \dfrac{mx-1}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{3}$ trên $[0;2]$.

(A) $m = -1$. (B) $m = 1$. (C) $m = -3$. (D) $m = 3$.

Lời giải: Điều kiện $x \neq -m$. Có $y' = \dfrac{m^2+1}{(x+m)^2} > 0 \quad \forall x \neq -m$. Theo tính chất của hàm số này thì yêu cầu bài toán tương đương

$$\begin{cases} -m \notin [0;2] \\ y(2) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \notin [0;2] \\ \dfrac{2m-1}{m+2} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

□

Câu 35. Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$ $(m > 0)$, m là tham số. Hỏi hàm số đã cho có thể có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải: Ta có $y' = \begin{cases} 3x^2 - m & \text{nếu x>0} \\ -3x^2 - m & \text{nếu x<0} \end{cases}$.

Với $m = 0$ thì y' đổi dấu đúng một lần qua điểm $x = 0$, nên hàm số có 1 cực trị.

Nếu $m > 0$ thì y' đổi dấu đúng một lần qua điểm $x = \sqrt{\dfrac{m}{3}}$, nên hàm số có 1 cực trị.

Nếu $m < 0$ thì y' đổi dấu đúng một lần qua điểm $x = -\sqrt{\dfrac{-m}{3}}$, nên hàm số có 1 cực trị.

Tóm lại hàm số có đúng một cực trị với mọi giá trị của m. □

Câu 36. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}(C)$. Gọi d là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến của (C). Giá trị lớn nhất mà d có thể đạt được là

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{6}$.

Lời giải: Giao của hai đường tiệm cận là $I(2;1)$.
Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y = \frac{-3}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-2} \quad (\Delta).$$

Khoảng cách từ I đến Δ là $d = 6\left|\dfrac{(x_0-2)}{\sqrt{(x_0-2)^4+9}}\right| \leq 6\left|\dfrac{(x_0-2)}{\sqrt{6(x_0-2)^2}}\right| = \sqrt{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x_0 = 2 \pm \sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất d là $\sqrt{6}$. □

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = (m - x^3)\sqrt{1-x^3}$ đồng biến trên $(0;1)$.

A $m \geq -2$ **B** $m \leq -2$ **C** $m > 1$ **D** $m < 1$

Lời giải:

• Có $y' = \dfrac{-6x^2(1-x^3) - 3x^2(m-x^3)}{2\sqrt{1-x^3}}$. Để hàm số đồng biến trên $(0;1)$ thì $y' \geq 0$ mọi $x \in (0;1)$

• Hay $m \leq 3x^3 - 2$ mọi $x \in (0;1)$. Dễ thấy $3x^3 - 2 > -2$ mọi $x \in (0;1)$.

• Vậy các giá trị cần tìm là $m \leq -2$. □

Câu 38. Tìm tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x - 2017$.

A $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} (k \in Z)$

B $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$

C $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$

D $x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} (k \in Z)$

Lời giải:

• Ta có $y' = \cos 2x - \sin x$; $y'' = -2\sin 2x - \cos x$. Do hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì 2π nên ta chỉ xét trên $[-\pi;\pi]$.

• Khi $y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \sin x$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$

• Do $x \in [-\pi;\pi]$ nên ta có $x = -\dfrac{\pi}{2}; x = \dfrac{\pi}{6}; x = \dfrac{5\pi}{6}$

• Dễ thấy $y''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) < 0; y''\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) > 0; y''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

• Bằng cách kẻ bảng biến thiên ta thấy $x = -\dfrac{\pi}{2}$ không phải là điểm cực trị của hàm số (y' luôn dương khi qua $-\dfrac{\pi}{2}$)

• Vậy các điểm cực trị của hàm số là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$ □

Câu 39. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{D} = [2;+\infty)$.

A $m \geq 0$. **B** $m \leq -1$. **C** $m < -1$. **D** $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải:

• Nếu $m \geq 0$ thì ta có $y(2) < y(3)$ do $2m+1 < 3m+1+(m+1)$, trái với yêu cầu nghịch biến. Vậy loại các phương án A và D.

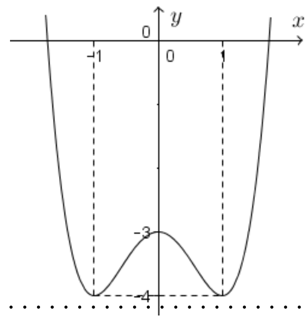
• Xét $m=-1$, ta có $y=-x+1$ nghịch biến trên $[2;+\infty)$ nên $m=-1$ thỏa yêu cầu, chọn B. □

Câu 40. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-x^4+2x^2+1$. Tính diện tích S của tam giác ABC ta có kết quả

(A) $S=1$. (B) $S=2$. (C) $S=3$. (D) $S=4$.

Lời giải: Các điểm cực trị là $A(0;1), B(1;2)$ và $C(-1;2)$. Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right| = 1$. □

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Phương trình $|f(x)|=\pi$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.



(A) 3. (B) 2.
(C) 4. (D) 6.

Lời giải: □

Câu 42. Tìm tập hợp X gồm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình $1+\log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) $X=[2;3]$. (B) $X=[3;5]$. (C) $X=(2;3]$. (D) $X=(3;5]$.

Lời giải: Điều kiện: $\begin{cases} x^2+1>0 \\ mx^2+4x+m>0 \end{cases}$

Bất phương trình trở thành:

$$\log_5\left(mx^2+4x+m\right)-\log_5\left(x^2+1\right) \leq 1$$

$$\frac{mx^2+4x+m}{x^2+1} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow (m-5)\,x^2+4x+m-5 \leq 5$$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0, \forall x \in \mathbb{R} \\ (m-5)\,x^2+4x+m-5 \leq, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \textbf{(I)}$$

• Với $m=0$ không thỏa
• Với $m=5$ không thỏa
• Với $m \neq 0; m \neq 5$

$$\textbf{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \\ 4-m^2<0 \\ 4-(m-5)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<m<5 \\ m<-2 \vee m>2 \\ m \leq 3 \vee m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m \leq 3$$

Vậy $m \in (2;3]$ thỏa ycbt. □

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2^x}{5^{x^2-1}}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $f(x) > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+\log_2 5} > \dfrac{x^2-1}{1+\log_5 2}$
(B) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x > (x^2-1)\log_2 5$
(C) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x\ln 2 > (x^2-1)\ln 5$
(D) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x.\log_{\frac{1}{3}} 2 > (x^2-1)\log_{\frac{1}{3}} 5$

Lời giải: Ta có $f(x) > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{5^{x^2-1}} > 1 \Leftrightarrow 2^x > 5^{x^2-1}$ (1).

- B đúng, vì (1) $\Leftrightarrow x > \log_2 5^{x^2-1} = (x^2-1)\log_2 5$.
- A đúng, vì (1) $\Leftrightarrow x\log 2 > (x^2-1).\log 5 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\log_2 10} > \dfrac{x^2-1}{\log_5 10} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+\log_2 5} > \dfrac{x^2-1}{1+\log_5 2}$.
- C đúng, vì (1) $\Leftrightarrow x\ln 2 > (x^2-1).\ln 5$.

□

Câu 44. Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_3(1-x^2) \le \log_{\frac{1}{3}}(1-x)$

(A) $x = 0$
(B) $x = 1$
(C) $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
(D) $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Lời giải: Ta có $\log_3(1-x^2) \le \log_{\frac{1}{3}}(1-x) \Leftrightarrow \log_3(1-x^2) \le \log_3 \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ 1-x^2 \le \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \dfrac{x^3-x^2-x}{1-x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^3-x^2-x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x \le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \le x < 1 \end{array} \right.$

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất là $x = 0 \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 45. Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức $P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\%$. Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

(A) 3574 (năm)
(B) 3754 (năm)
(C) 3475 (năm)
(D) 3547 (năm)

Lời giải: Ta có $100.(0,5)^{\frac{1}{5750}} = 65,21 \Leftrightarrow \dfrac{t}{5750} = \log_{0,5}\dfrac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 5750.\log_{0,5}\dfrac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 3547$.
$\Rightarrow$ chọn D. □

Câu 46. Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7% / tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả hết nợ ngân hàng.

(A) 21
(B) 23
(C) 22
(D) 24

Lời giải: Gọi N_n là số tiền người vay còn nợ sau n tháng, r là lãi suất hàng tháng, a là số tiền trả hàng tháng, A là số tiền vay ban đầu.
$N_1 = A(1+r) - a$
$N_2 = [A(1+r) - a](1+r) - a = A(1+r)^2 - a[1+(1+r)]$
$N_3 = \left\{A(1+r)^2 - a[1+(1+r)]\right\}(1+r) - a = A(1+r)^3 - a[1+(1+r)+(1+r)^2]$
....
$N_m = A(1+r)^m - a[1+(1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^{m-1}] = A(1+r)^m - a\dfrac{(1+r)^m-1}{r}$
Khi trả hết nợ nghĩa là $N_m = 0 \Leftrightarrow \ (1+r)^m(Ar-a)+a=0$
$\Leftrightarrow m = \log_{1+r}\dfrac{a}{a-Ar}$
Thay số ta được: $m \approx 21,6$. Do đó số tháng để trả hết nợ là 22 tháng. □

Câu 47. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ là $M = \dfrac{m}{e^n}$, trong đó m, n là các số tự nhiên. Tính $S = m^2 + 2n^3$.

(A) $S = 135$ (B) $S = 24$ (C) $S = 22$ (D) $S = 32$

Lời giải: $y' = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln x = 0\\ \ln x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = e^2\end{array}\right.$.
$y(1) = 0,\ y(e^2) = \dfrac{4}{e^2},\ y(e^3) = \dfrac{9}{e^3} \Rightarrow \max\limits_{[1;e^3]} = y(e^2) = \dfrac{4}{e^2} \Rightarrow m = 4,\ n = 2 \Rightarrow S = 4^2 + 2.2^3 = 32$ □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $4\log_4^2 x - 2\log_2 x + 3 - m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; 4\right]$.

(A) $m \in \left[\dfrac{11}{4}; 15\right]$ (B) $m \in [2; 3]$ (C) $m \in [2; 6]$ (D) $m \in \left[\dfrac{11}{4}; 9\right]$

Lời giải: PT$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m$. Đặt $t = \log_2 x$, do $x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$ nên $t \in [-1; 2]$.
PT đã cho trở thành $t^2 - 2t + 3 = m$ (*) .
Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ trên đoạn $[-1; 2]$ ta được (*) có nghiệm $t \in [-1; 2]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[-1;2]} f(t) \le m \le \max\limits_{[-1;2]} f(t) \Leftrightarrow 2 \le m \le 6$. □

Câu 49. Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ radi Ra^{226} là 1602 năm (tức là một lượng Ra^{226} sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hằng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam Ra^{226} sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?

(A) $0,886$ (gam) (B) $1,023$ (gam) (C) $0,795$ (gam) (D) $0,923$ (gam)

Lời giải: Gọi T là chu kì bán rã, suy ra $\dfrac{1}{2}A = A.e^{r.T} \Rightarrow r = \dfrac{-\ln 2}{T}$.
Do đó: $S = 5.e^{-\frac{\ln 2}{T}.4000} = 5.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4000}{1602}} \approx 0,886$. □

Câu 50. Cho hàm số $y = \log_3(3^x + x)$, biết $y'(1) = \dfrac{a}{4} + \dfrac{1}{b\ln 3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị $a + b$.

Ⓐ 7. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải: Ta có:

$$y'(1) = \frac{3\ln 3 + 1}{4\ln 3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4\ln 3} = \frac{a}{4} + \frac{1}{b\ln 3} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 7.$$

□

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4^x + (2-m)\,2^x + 5 - m = 0$ có nghiệm thực thuộc $(-1; 1)$.

Ⓐ $m \in \left[4; \frac{13}{3}\right)$.

Ⓑ $m \in [4; +\infty)$.

Ⓒ $m \in \left(\frac{25}{6}; \frac{13}{3}\right)$.

Ⓓ $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải: Đặt $t = 2^x$. Khi đó $-1 < x < 1 \Leftrightarrow 2^{-1} < 2^x < 2^1$ hay $\frac{1}{2} < t < 2$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + (2-m)t + 5 - m = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 5 = m(t+1)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 2t + 5}{t+1} \Leftrightarrow m = t + 1 + \frac{4}{t+1}. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + 1 + \frac{4}{t+1}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Ta có:

$f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$;

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

t	$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{25}{6}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$

Yêu cầu bài toán là $(*)$ có nghiệm trong khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ hay $4 \leq m < \frac{13}{3}$ □

Câu 52. Xét hai số thực a, b thỏa mãn $1 > a \geq b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức sau: $T = \log_a^2 b + \log_{a.b} a^{36}$.

Ⓐ $T_{\min} = 16$.

Ⓑ $T_{\min}$ không tồn tại.

Ⓒ $T_{\min} = 19$.

Ⓓ $T_{\min} = 13$.

Lời giải: Ta có:

$$T = \log_a^2 b + \log_{a.b} a^{36} = \log_a^2 b + 36\log_{a.b} a = \log_a^2 b + \frac{36}{\log_a(ab)}$$

$$= \log_a^2 b + \frac{36}{1 + \log_a b} = t^2 + \frac{36}{1+t} \text{ (với} t = \log_a b).$$

Do $1 > a \geq b > 0$ nên $t = \log_a b \geq \log_a a = 1$. Xét hàm số $f(t) = t^2 + \frac{36}{1+t}$ liên tục trên $[1; +\infty)$. Ta có:

$$f'(t) = 2t - \frac{36}{(t+1)^2} = \frac{2t^3 + 4t^2 + 2t - 36}{(t+1)^2};\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	19	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên thấy rằng $T_{\min} = 16$. □

Câu 53. Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

(A) 172 triệu đồng. (B) 72 triệuđồng. (C) 104,907 triệu đồng. (D) 167,3042 triệu đồng.

Lời giải: Số tiền hao mòn xe sauthánh thứ 1 là Ar.
Giá trị xe còn lại sau tháng thứ 1 là $A - Ar = A(1-r)$.
Số tiền hao mòn xe sauthánh thứ 2 là$A\left(1-r\right)r$.
Giá trị xe còn lại sau tháng thứ 2 là $A(1-r) - A\left(1-r\right)r = A(1-r)^2$.
Số tiền hao mòn xe sauthánh thứ 3 là$A(1-r)^2r$.
Giá trị xe còn lại sau tháng thứ 3 là $A(1-r)^2 - A(1-r)^2r = A(1-r)^3$.
Tương tự suy ra giá trị xe còn lại 1 năm là $A(1-r)^{12}$.
Số tiền cần tính là $A(1-r)^{12} + 12.6 \approx 167,3042$ (triệu đồng). □

Câu 54. Một người muốn có 2 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi), số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng?

(A) 252.436.000 (B) 272.631.000 (C) 252.435.000 (D) 272.630.000

Lời giải: Gọi A là số tiền người đó phải gửi vào mỗi năm, $r = 8\%$ là lãi suất
Sau năm thứ 1, người đó có $A(1+r)$.
Sau năm thứ 2, người đó có $\left[A(1+r) + A\right](1+r) = A(1+r)^2 + A(1+r)$.
... Sau năm thứ 6, người đó có $A(1+r)^6 + A(1+r)^5 + \cdots + A(1+r)$.
Ta có $A(1+r)^6 + A(1+r)^5 + \cdots + A(1+r) = 2000000000 \Rightarrow A \approx 252.436.000$. □

Câu 55. Cho các số dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

(A) $\dfrac{6}{5}$ (B) $\dfrac{8}{7}$ (C) $\dfrac{10}{9}$ (D) $\dfrac{7}{6}$

Lời giải: • Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \log_a b + \log_a c = 2 \\ \dfrac{\log_a(ca)}{\log_a b} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b + \log_a c = 2 \\ 4\log_a b - \log_a c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = \dfrac{3}{5} \\ \log_a c = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

• $\log_c(ab) = \dfrac{\log_a(ab)}{\log_a c} = \dfrac{1 + \log_a b}{\log_a c} = \dfrac{8}{7}$. □

Câu 56. Cho các số $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_3 \dfrac{3}{4} < \log_a \dfrac{4}{5}$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $a > 1; 0 < b < 1$ Ⓑ $a > 1; b > 1$ Ⓒ $0 < a < 1; b > 1$ Ⓓ $0 < a < 1; 0 < b < 1$

Lời giải: □

Câu 57. Tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $(4^x - 8)^3 + (2^x - 64)^3 = (4^x + 2^x - 72)^3$.

Ⓐ $\frac{45}{2}$. Ⓑ 27. Ⓒ 18. Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Lời giải: Nhận thấy phương trình có dạng $a^3 + b^3 = (a+b)^3$ nên phương trình tương đương với

$$(4^x - 8)(2^x - 64)(4^x + 2^x - 72) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = 6 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Lấy tích các nghiệm ta được kết quả bằng 27. □

Câu 58. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\frac{a}{b} \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Ⓑ $\frac{a}{b} \in (6; 8)$. Ⓒ $\frac{a}{b} \in \left(2; \frac{5}{2}\right)$. Ⓓ $\frac{a}{b} \in (8; 9)$.

Lời giải: Đặt $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b) = t$ ta có phương trình

$$9^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Từ đó suy ra $a + b \approx 0,618 \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. □

Câu 59. Số nghiệm của phương trình $2^{3x^2+5x-1} = 1$ là

Ⓐ (0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ (4.

Lời giải: Phương trình tương đương với $3x^2 + 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. □

Câu 60. Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x + 2) + 2\log_{5^x+2} 2 > 3$ có tập nghiệm $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = a + 3b$.

Ⓐ $P = 14$. Ⓑ $P = 7$. Ⓒ $P = 15$. Ⓓ $P = 11$.

Lời giải: Đặt $t = \log_2(5^x + 2)$ ta có $t > 1$. Khi đó bất phương trình tương đương với

$$t + \frac{2}{t} > 3, t > 1 \Leftrightarrow t > 2 \Leftrightarrow x > \log_5 2.$$

Kết hợp với điều kiện giả thiết suy ra $a + 3b = 5 + 3.2 = 11$. □

Câu 61. Cho hàm số $y = 3e^{-x} - 2017e^{-2x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $y'' + 3y' + 2y = 3$.
Ⓑ $y'' + 3y' + 2y = 2017$.
Ⓒ $y'' + 3y' + 2y = 5$.
Ⓓ $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Lời giải: Ta có $y'' + 3y' + 2y = 0$. □

Câu 62. Với điều kiện biểu thức tồn tại. Khi đó kết quả rút gọn của

$$A = \left(\log_b^3 a + 2\log_b^2 a + \log_b a\right)\left(\log_a b - \log_{ab} b\right) - \log_b a$$

là

Ⓐ 1.
Ⓑ 0.
Ⓒ 2.
Ⓓ 3.

Lời giải:

Đặt $t = \log_b a \Rightarrow A = (t^3 + 2t^2 + t)\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}\right) - t = t(t+1)^2\dfrac{1}{t(t+1)} - t = 1$.

Chọn A. □

Câu 63. Nếu $\dfrac{4^x}{2^{x+y}} = 8$, $\dfrac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$, x, y là các số thực, thế thì xy bằng:

Ⓐ 6.
Ⓑ $\dfrac{12}{5}$.
Ⓒ 12.
Ⓓ 4.

Lời giải: Ta có $\begin{cases} \dfrac{4^x}{2^{x+y}} = 8 \\ \dfrac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 64. Tổng số mọi số thực x sao cho $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ là

Ⓐ $\dfrac{5}{2}$.
Ⓑ $\dfrac{7}{4}$.
Ⓒ $\dfrac{7}{2}$.
Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải:

Ta có $a^3 + b^3 = (a+b)^3 \Leftrightarrow ab(a+b) = 0$.

Do vậy, ta được $4^x - 2 = 0 \vee 4^x + 2^x - 6 = 0 \vee 2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2$

Chọn C. □

Câu 65. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ là 300 con. Hỏi sau 15 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn.

Ⓐ 900 con
Ⓑ 2700 con.
Ⓒ 600 con
Ⓓ 1800 con

Lời giải:

Ta có $300 = 100e^{r.5} \Rightarrow r \approx 0,22$.

Ta có $S = 100.e^{0,22.15} \approx 2700 \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 66. Phương trình $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$ có tổng các nghiệm bằng:

Ⓐ 3 Ⓑ 84 Ⓒ 81 Ⓓ 78

Lời giải:

Ta có $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x - 3\sqrt{\log_3 x} + 2 = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3 x} = 1 \vee \sqrt{\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 81 \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 67. Giả sử p và q là các số dương sao cho $\log_{16}p = \log_{20}q = \log_{25}(p+q)$. Tìm giá trị của $\dfrac{p}{q}$.

Ⓐ $\dfrac{8}{5}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. Ⓒ $\dfrac{4}{5}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải:

Đặt $\log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25}(p+q) = t \Rightarrow \begin{cases} p = 16^t \\ q = 20^t \\ p+q = 25^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p}{q} = (\dfrac{4}{5})^t \\ (\dfrac{4}{5})^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 68. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = -1$. Ⓓ $m = 2$.

Lời giải: ĐTHS có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Ba điểm cực trị là $A(\sqrt{m}; -m^2 - m + 1), B(-\sqrt{m}; -m^2 - m + 1), C(0; 1-m)$. O là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $OA \perp BC$. Tức là $m + (-m^2 - m + 1)m^2 = 0 \Leftrightarrow m(m+1)^2(m-1) = 0$. Dẫn đến $m = 1$ (do $m > 0$). □

Câu 69. Khi ánh sáng đi qua một môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù...), cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền x, theo công thức $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, trong đó I_0 là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và μ là hệ số hấp thu của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thu $\mu = 1{,}4$, và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu $2m$ xuống đến độ sâu $20m$ thì cường độ ánh sáng giảm $l.10^{10}$ lần. Số nguyên nào sau đây gần với l nhất?

Ⓐ 90. Ⓑ 8. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Lời giải: Cường độ ánh sáng tại các độ sâu $2m$ và $20m$ lần lượt là $I(2) = I_0 e^{-2\mu}$ và $I(20) = I_0 e^{-20\mu}$. Theo giả thiết, $\dfrac{I(2)}{I(20)} = l.10^{10}$. Suy ra $l.10^{10} = e^{18\mu}$. Từ đó tính được $l \approx 9$. □

Câu 70. Kết quả thống kê cho biết ở thời điểm năm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là 1,1% năm. Nếu mức tăng dân số ổn định như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu) vào năm nào?

Ⓐ Năm 2093. Ⓑ Năm 2077. Ⓒ Năm 2070. Ⓓ Năm 2050.

Lời giải: Năm 2013 số dân là 90 triệu, sau n năm số dân là $90.(1,011)^n$. Theo giả thiết ta có

$$90.(1,011)^n = 180 \Leftrightarrow n = \frac{\lg 2}{\lg 1,011} = 64$$

Vậy năm cần tìm là 2077. □

Câu 71. Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Biểu thức $P = \dfrac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4.2^x - 4.2^{-x}}$ có giá trị bằng:

A. $P = \dfrac{3}{2}$ B. $P = \dfrac{-5}{2}$ C. $P = 2$ D. $P = -2$

Lời giải: Ta có $(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 = 9 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 3$.
Vậy $P = \dfrac{5+3}{8 - 4.3} = -2$. □

Câu 72. Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sắp sản xuất được trong 1 ngày là giá trị trị của hàm số: $f(m, n) = m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}}$, trong đó m là số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 US. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

A. 720 US B. 600 US C. 560 US D. 1720 USD.

Lời giải: Theo giả thiết ta có $m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}} \geq 40$, bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 6m + 24n.$$

Ta có $P = 3m + 3m + 24n \geq 3\sqrt[3]{3m.3m.24n} = 18.m^{\frac{2}{3}}.n^{\frac{1}{3}} \geq 720$. Dấu bằng xảy ra khi $m = 80, n = 10$.
Vậy giá trị nhỏ nhất chi phí trong một ngày của hãng sản xuất là 720 USD. □

Câu 73. Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \dfrac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x - m - \dfrac{2}{9} = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2 = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < m < 2$. B. $3 < m < 4$. C. $0 < m < \dfrac{3}{2}$. D. $2 < m < 3$.

Lời giải: Phương trình đã cho viết lại như sau

$$9\log_3^2 x - 3(3m+1)\log_3 x - 9m - 2 = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = \log_3 x$ khi đó phương trình (1) trở thành

$$9t^2 - 3(3m+1)t - 9m - 2 = 0 \quad (2).$$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(3m+1)^2 + 36(9m+2) \geq 0 \\ \dfrac{3m+1}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}.$$

□

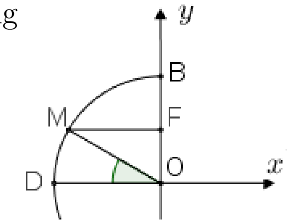
Câu 74. Trên quả địa cầu, vĩ tuyến 30 độ Bắc chia khối cầu thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích giữa phần lớn và phần bé của khối cầu đó.

A. $\dfrac{27}{8}$. B. $\dfrac{27}{5}$. C. $\dfrac{24}{5}$. D. $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải:

Chọn hệ trục Oxy sao cho $O(0;0), B(0;1), D(-1;0)$. Lấy M sao cho $\widehat{MOD} = 30^\circ$, ta có $y_M = \dfrac{1}{2}$.

Phương trình đường tròn tâm O bán kính OB là $x^2+y^2=1$. Theo đó, cung MB có phương trình $x = -\sqrt{1-y^2}$. Thể tích khối tròn xoay khi quay cung MB quanh trục OB là



$$\pi \int_{\frac{1}{2}}^{0} \left(-\sqrt{1-y^2}\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{25}{4}\pi.$$

Tỉ số thể tích cần tìm bằng $\dfrac{\dfrac{4}{3}\pi - \dfrac{5}{24}\pi}{\dfrac{5}{24}\pi} = \dfrac{27}{5}$.

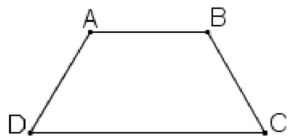
Câu 75. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB = AD = BC = a, CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay quanh hình thang $ABCD$ xung quanh trục là đường thẳng AB

(A) $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. (B) πa^3. (C) $\dfrac{5}{4}\pi a^3$. (D) $\dfrac{5}{2}\pi a^3$.

Lời giải:

Gọi H là hình chiếu của A lên CD, ta có $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- Khối tròn xoay sinh ra khi quay CD quanh trục AB là một khối trụ có thể tích $V_1 = \pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.2$.
- Khối tròn xoay sinh ra khi quay AD quanh trục AB là một khối nón có thể tích $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.\dfrac{1}{2}$.



Thể tích cần tìm bằng $V_1 - 2V_2 = \dfrac{5}{4}\pi a^3$.

Câu 76. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5|2x+1|$ được kết quả là

(A) $y' = \dfrac{2}{|2x+1|\ln 5}$. (B) $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 5}$. (C) $y' = \dfrac{1}{|2x+1|\ln 5}$. (D) $y' = \dfrac{1}{(2x+1)\ln 5}$.

Lời giải:

Câu 77. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $5^{x-1} + 5.0,22^{x-2} = 26$. Tính $S = x_1 + x_2$.

(A) $S = 2$. (B) $S = 1$. (C) $S = 3$. (D) $S = 4$.

Lời giải:

Câu 78. Biết $\dfrac{x^{a^2}}{x^{b^2}} = x^{16}$ $(x > 1)$ và $a + b = 2$. Tính giá trị của biểu thức $M = a - b$.

Ⓐ 18. Ⓑ 14. Ⓒ 16. Ⓓ 8.

Lời giải: Ta có $a^2 - b^2 = 16$ và $a + b = 2$. Giải hệ này thu được $a = 5, b = -3$. □

Câu 79. Tính thể tích V của khối lập phương. Biết khối cầu ngoại tiếp một hình lập phương có thể tích là $\frac{4}{3}\pi$.

Ⓐ $V = 2\sqrt{2}$. Ⓑ $V = \frac{8}{3}$. Ⓒ $V = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Ⓓ $V = 1$.

Lời giải: Bán kính mặt cầu là $R = 1$. Gọi x là độ dài cạnh của hình lập phương đã cho, ta có $\sqrt{3x^2} = 2R \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Vậy $V = x^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. □

Câu 80. Cho x, y, z là các số thực khác 0 thoả mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Tính giá trị biểu thức $M = xy + yz + zx$.

Ⓐ $M = 0$. Ⓑ $M = 3$. Ⓒ $M = 6$. Ⓓ $M = 1$.

Lời giải: Cho $2^x = 3^y = 6^{-z} = t$ $(1 \neq t \neq 0)$, ta có

$$x = \log_2 t,\ \ y = \log_3 t,\ \ z = -\log_6 t.$$

Vì $\log_t 2 + \log_t 3 = \log_t 6$ nên ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z} \Leftrightarrow M = 0$. □

Câu 81. Biết $\int\limits_0^1 \frac{x^3 \mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a+1} \ln 2$. Tính a.

Ⓐ $a = 1$. Ⓑ $a = 2$. Ⓒ $a = 0$. Ⓓ $a = 4$.

Lời giải: Ta có $\int_0^1 \frac{x^3 \mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1$

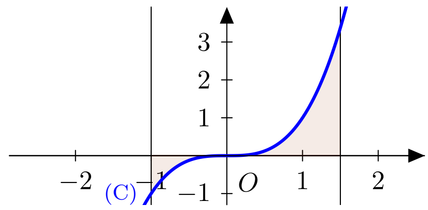
$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+1}\ln 2$

Vậy $a = 1$. □

Câu 82. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = ax^3$ $(a > 0)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = k$ $(k > 0)$bằng $\frac{17a}{4}$.Tìm k.

Ⓐ $k = 1$. Ⓑ $k = \frac{1}{4}$. Ⓒ $k = \frac{1}{2}$. Ⓓ $k = 2$.

Lời giải: Giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^3\,(a > 0)$ với trục hoành chính là $O\,(0;0)$.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đề bài đã cho.



$S = |\displaystyle\int_{-1}^{0} ax^3\mathrm{d}x| + |\int_{0}^{k} ax^3\mathrm{d}x|$

$= |\dfrac{-ax^4}{4}\Big|_{-1}^{0}| + |164678t\dfrac{ax^4}{4}\Big|_{0}^{k}|$

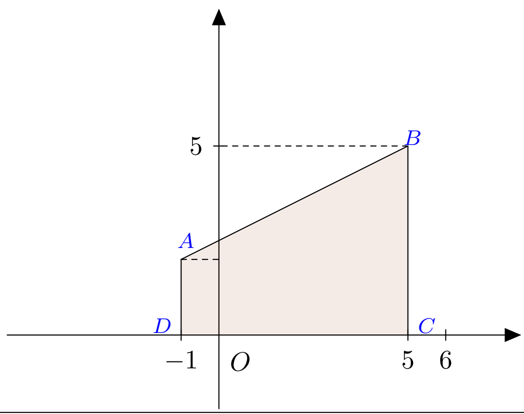
$= |\dfrac{-a}{4}| + |\dfrac{ak^4}{4}| = \dfrac{a}{4} + \dfrac{ak^4}{4}$

Hay $\dfrac{a}{4} + \dfrac{ak^4}{4} = \dfrac{17a}{4} \Leftrightarrow 1 + k^4 = 17 \Leftrightarrow k = 2$ do $k > 0$. □

Câu 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD với $A(-1;2),\ B(5;5), C(5;0), D(-1;0)$. Quay hình thang ABCD xung quanh trục Ox thì thể khối tròn xoay tạo thành bằng bao nhiêu?

(A) 72π. (B) 74π. (C) 76π. (D) 78π.

Lời giải:



Phương trình đường thẳng $AB : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$

$V = \pi\displaystyle\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = 78\pi$. □

Câu 84. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + 3\cos x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

(A) $-\dfrac{1}{3}\ln 2 + 2$ (B) $-\dfrac{1}{3}\ln 2 - 2$ (C) $-\dfrac{2}{3}\ln 2 + 2$ (D) $-\dfrac{1}{2}\ln 2 - 2$

Lời giải: Ta có $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\,(1 + 3\cos x)}{1 + 3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1 + 3\cos x| + C$.
Do $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 2$. Vậy: $F(0) = -\dfrac{2}{3}\ln 2 + 2$. □

Câu 85. Giả sử $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3,\ a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị ab.

(A) -6 (B) 8 (C) -5 (D) -4

Lời giải:

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \left(-\ln|x+1| + 2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2 = 2\ln 5 - 3\ln 3.$$

Suy ra: $a = 2, b = -3$. Do đó: $P = ab = -6$. □

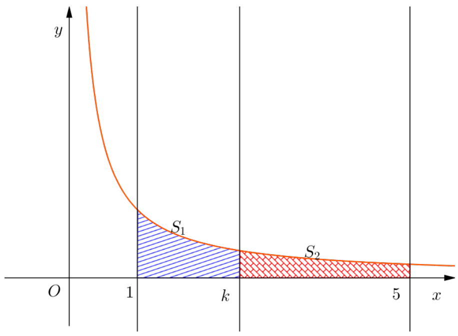
Câu 86. Một vật chuyển động theo quy luật $s = 9t^2 - t^3$ với t (giây) là thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quảng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Ⓐ $54(m/s)$ Ⓑ $15(m/s)$ Ⓒ $27(m/s)$ Ⓓ $100(m/s)$

Lời giải: $s = 9t^2 - t^3 \Rightarrow v = s' = 18t - 3t^2 \Rightarrow v' = 18 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Khi $t = 3 \Rightarrow v = 27;\ t = 5 \Rightarrow v = 15 \Rightarrow v_{\max} = 27$ □

Câu 87. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 5$. Đường thẳng $x = k(1 < k < 5)$ chia hình (H) thành hai hình (S_1) và (S_2) như hình bên. Cho hai hình (S_1) và (S_2) quay xung quanh trục Ox ta được hai khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Tìm k để $V_1 = 2V_2$.



Ⓐ $k = \sqrt[3]{25}$ Ⓑ $k = \frac{15}{7}$

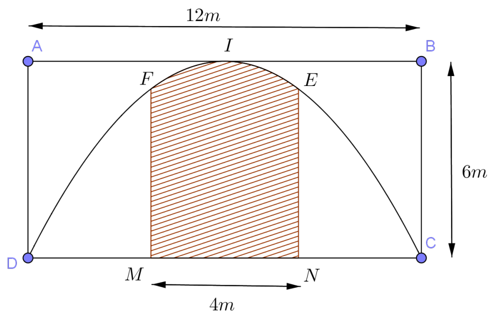
Ⓒ $k = \frac{5}{3}$ Ⓓ $k = \ln 5$

Lời giải: $V_1 = \pi \int\limits_1^k \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^k = \pi\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

$V_2 = \pi \int\limits_k^5 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_k^5 = \pi\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{5}\right)$

$V_{_1} = 2V_1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{k} = \frac{2}{k} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = \frac{15}{7}$ □

Câu 88. Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6m$, chiều dài $CD = 12m$ như hình bên. Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4m$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng / m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó.



Ⓐ 20.400.000 đồng Ⓑ 20.600.000 đồng Ⓒ 20.800.000 đồng Ⓓ 21.200.000 đồng

Lời giải: - Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN, trục hoành trùng với đường thẳng MN thì parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

- Khi đó diện tích của khung tranh là $S = \int\limits_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{6}x^2 + 6\right) dx = \frac{208}{9}\ m^2$

- Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9} \times 900.000 = 20.800.000$ đồng □

Câu 89. Cho $\int_1^2 \ln(9-x^2)dx = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = |a|+|b|+|c|$.

Ⓐ $S = 34$ Ⓑ $S = 13$ Ⓒ $S = 18$ Ⓓ $S = 26$

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(9-x^2\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2-9} \\ v = x-3 \end{cases}$

$\Rightarrow I = (x-3)\ln\left(9-x^2\right)\big|_1^2 - 2\int\limits_1^2 \dfrac{x(x-3)}{x^2-9}dx = -\ln 5 + 6\ln 2 - 2\int\limits_1^2 \dfrac{x}{x+3}dx$

$$\begin{aligned} I &= \ln 5 - 6\ln 2 - 2 + 6\ln(x+3)\big|_1^2 = -\ln 5 + 6\ln 2 - 2 + 6\ln 5 - 12\ln 2 && (1)\\ &= 5\ln 5 - 6\ln 2 - 2 \Rightarrow S = 13. && (2)\\ & && (3) \end{aligned}$$

□

Câu 90. Cho $I = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x} = a + b\sqrt{3}$với a, b là số hữu tỉ. Tính giá trị của $a-b$.

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x} = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}\\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = (\tan x - \cot x)\big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = a + b\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Do a, b là số hữu tỉ nên $a = 0$, $b = \dfrac{2}{3}$, suy ra $a - b = \dfrac{2}{3}$.

Lưu ý. Nếu giả thiết a, b là số thực thì ngoài cặp $a = 0$, $b = \dfrac{2}{3}$ còn những cặp khác, chẳng hạn $a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $b = 1$, lúc này $a - b = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1$, khác với tất cả các phương án A, B, C, D. □

Câu 91. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}, x = 1; x = 2, y = 0$ quanh trục Ox là $V = \pi(a + be^2)$(đvtt), với a, b là những số nguyên. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải: Thể tích cần tính là $V = \pi\int\limits_1^2 xe^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x. \end{cases}$

Khi đó:

$$V = \pi\left[\left(xe^x\right)\big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x dx\right] = \pi\left[2e^2 - e - e^x\big|_1^2\right] = \pi e^2 = \pi\left(a + be^2\right).$$

Do a, b là những số nguyên nên từ $e^2 = a + be^2$ suy ra $b = 1$ và $a = 0$, do đó $a + b = 1$. ☐

Câu 92. Biết $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = a\ln 2 - b\ln 3$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó, a và b đồng thời là hai nghiệm của phương trình nào dưới đây?

(A) $x^2 - 4x + 3 = 0$. (B) $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$. (C) $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$. (D) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Lời giải:

Ta có $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_2^3 \frac{dx}{x-1} + \int_2^3 \frac{dx}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| + \ln|x+1|\right)\Big|_2^3 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.

Do đó $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$, chọn đáp án **B**. ☐

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(A) 6 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Lời giải: • Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = (1 + \tan^2 x)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x$.

• $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4$.

• $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 4 + 2 = 6$. ☐

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x$.

(A) 13 (B) 12 (C) 20 (D) 7

Lời giải: • Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Ta có $T = \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t$.

• Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases}$. Ta có:

$$I = \frac{1}{4}\left(tf(t)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}\left(2f(2) - 0.f(0) - 4\right) = 7.$$

☐

Câu 95. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)dx = -3$, $\int_1^3 f(2x)dx = 9$. Tính giá trị của $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

Ⓐ $I = 5$. Ⓑ $I = 6$. Ⓒ $I = 3$. Ⓓ $I = 4$.

Lời giải: Chọn $f(x) = 2x - \frac{7}{2}$. Dĩ nhiên ta có $\int\limits_0^2 f(x)dx = -3$, $\int\limits_1^3 f(2x)dx = 9$. Khi đó

$$I = \int\limits_0^2 f(3x)dx = \int\limits_0^2 \left(6x - \frac{7}{2}\right) dx = 5.$$

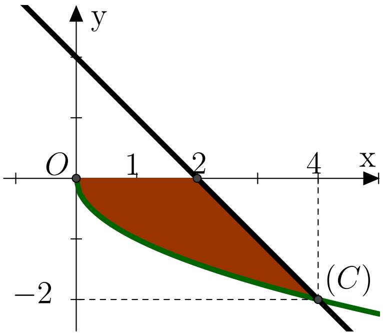
□

Câu 96. Biết $\int_2^{e+1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx = a + be^{-1}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

Ⓐ $a + b = -3$. Ⓑ $a + b = -1$. Ⓒ $a + b = 1$. Ⓓ $a + b = 3$.

Lời giải: Sử dụng tích phân từng phần. □

Câu 97. Cho hình $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\sqrt{x}, y = -x + 2$ và trục hoành. Tìm công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình $(\mathcal{H})$ quay xung quanh trục hoành.



Ⓐ $V = \pi \left[\int_0^2 xdx + \int_2^4 (2-x)^2dx\right]$. Ⓑ $V = \pi \left[\int_0^2 xdx - \int_2^4 (2-x)^2dx\right]$.

Ⓒ $V = \pi \left[\int_0^2 xdx + \int_2^4 (x-2)^2dx\right]$. Ⓓ $V = \pi \left[\int_0^4 xdx - \int_2^4 (2-x)^2dx\right]$.

Lời giải: Phương án đúng là D. □

Câu 98. Nếu $\int_0^1 xf(x)\,dx = 4$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin 4x dx$ bằng:

Ⓐ 2. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

Lời giải:

Đổi biến với $t = \cos 2x$ ta được $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin 4x dx = \int_0^1 tf(t)dt = 4 \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 99. Giả sử hàm số f có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0,1]$ thoả mãn điều kiện $f(1)=6$, $\int_0^1 xf'(x)\,dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng:

Ⓐ 1 Ⓑ -1 Ⓒ 11 Ⓓ 3

Lời giải:

Ta có $\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 100. Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành phần hình phẳng giới bạn bởi hai đường $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$ là:

Ⓐ $\dfrac{\pi}{10}$ Ⓑ $\dfrac{2\pi}{15}$ Ⓒ $\dfrac{3\pi}{10}$ Ⓓ $\dfrac{3\pi}{5}$

Lời giải:

Ta có $V = \pi\int_0^1 (x-x^4)dx = \dfrac{3\pi}{10} \Rightarrow$ chọn C. □

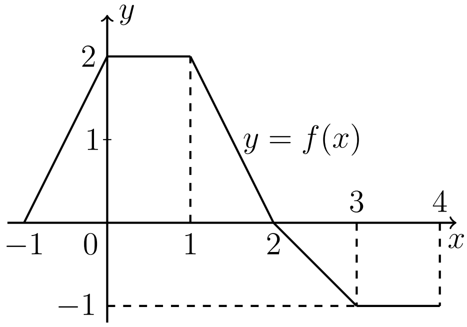
Câu 101. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=4^x$ và $F(1)=\dfrac{3}{\ln 2}$. Khi đó giá trị của $F(2)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{9}{\ln 2}$. Ⓑ $\dfrac{3}{\ln 2}$. Ⓒ $\dfrac{8}{\ln 2}$. Ⓓ $\dfrac{7}{\ln 2}$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} F(x) = \dfrac{4^x}{2\ln 2} + C \\ F(1) = \dfrac{3}{\ln 2} \end{cases} \Rightarrow C = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow F(2) = \dfrac{4^2}{2\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{9}{\ln 2} \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 102. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ là một đường gấp khúc như hình vẽ bên. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.



Ⓐ $I=\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $I=3$.

Ⓒ $I=\dfrac{11}{2}$. Ⓓ $I=5$.

Lời giải: Kí hiệu S_1, S_2 là diện tích các hình thang giới hạn bởi ĐTHS $y=f(x)$, trục hoành, tương ứng trên miền $-1\le x\le 2$ và trên miền $2\le x\le 4$. Khi đó, $S_1 = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, $S_2 = -\int\limits_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Từ giả thiết, ta tính được $S_1 = 4$, $S_2 = \dfrac{3}{2}$, do đó

$$I = \int\limits_{-1}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = S_1 - S_2 = \frac{5}{2}.$$

Câu 103. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\mathrm{d}x = a + b\pi$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + 2b$.

(A) $S = 1$. (B) $S = 0$. (C) $S = \frac{1}{2}$. (D) $S = \frac{3}{8}$.

Lời giải: □

Câu 104. Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ và S_2 là diện tích của hình thoi có các đỉnh là đỉnh của elip đó. Tính tỉ số giữa S_1 và S_2.

(A) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{\pi}$. (B) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{\pi}$. (C) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải: Elip có độ dài trục lớn là 6, trục bé là 2. Do đó $S_2 = 6$.

Ta có $S_1 = \frac{4}{3}\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\mathrm{dx} = 3\pi$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{2}$. □

Câu 105. Biết $\int_1^e \frac{1}{x^3 + x}\mathrm{d}x = a\ln(e^2 + 1) + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b + c$.

(A) $S = 1$ (B) $S = -1$ (C) $S = 0$ (D) $S = 2$

Lời giải: A

• Có $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x} = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\right]\Big|_1^e = -\frac{1}{2}\ln(e^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln 2 + 1$ □

Câu 106. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x}, y = 4 - x$ và trục Ox được tính bởi công thức

(A) $\int_0^4 \sqrt{2x}\mathrm{d}x + \int_0^4 (4 - x)\mathrm{d}x$. (B) $\int_0^2 \sqrt{2x}\mathrm{d}x + \int_2^4 (4 - x)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^2 \left(4 - x - \sqrt{2x}\right)\mathrm{d}x$. (D) $\int_0^4 \left(4 - x - \sqrt{2x}\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải: □

Câu 107. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ (với $a < b$) và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) $\int_a^b f(2x + 3)\mathrm{d}x = F(2x + 3)\Big|_a^b$.

(B) S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a, x = b$; đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành thì $S = F(b) - F(a)$.

(C) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

(D) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k.\left[F(b) - F(a)\right]$.

Lời giải:

Câu 108. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=4$ là một đường tròn. Tính chu vi C của đường tròn đó.

A. $C=4\pi$. B. $C=2\pi$. C. $C=8\pi$. D. $C=16\pi$.

Lời giải: Theo đề ta có $|z-3+5i|=4 \Leftrightarrow |z-(3-5i)|=4$ (*)
Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa (*) là đường tròn tâm $I(3;-5)$, bán kính $R=4$.
Chu vi đường tròn đó là $C=2\pi R=8\pi$.

Câu 109. Cho số phức $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính $z^5+z^6+z^7+z^8$.

A. 2 B. 0 C. 4 D. $4i$

Lời giải: Ta có: $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2017}=i^{2017}=i$.
Suy ra $z^5+z^6+z^7+z^8=i^5+i^6+i^7+i^8=i-1-i+1=0$.

Câu 110. Tính tích mô đun của tất cả các số phức z thỏa mãn $|2z-1|=|\overline{z}+1+i|$, đồng thời điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ thuộc đường tròn $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

A. $\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$ C. 1 D. 3

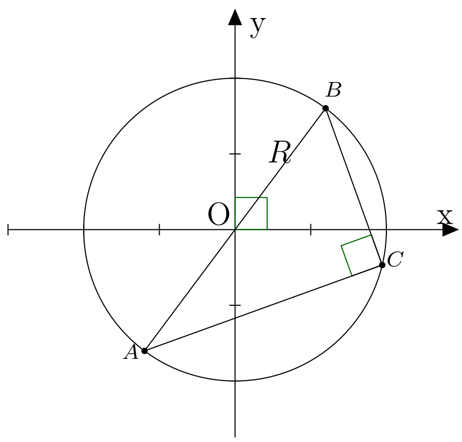
Lời giải: Gọi $z=x+yi$ với $x,\, y\in R$.
Ta có $|2z-1|=|\overline{z}+1+i| \Leftrightarrow |2x-1+2yi|=|x+1+(1-y)i|$
$\sqrt{(2x-1)^2+4y^2}=\sqrt{(x+1)^2+(1-y)^2} \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-6x+2y-1=0$ (1)
Mặt khác điểm biểu diễn của z thuộc đường tròn đã cho nên $(x-1)^2+(y-1)^2=5$ (2)
Giải (1) và (2) ta được: $(x;y)=(0;-1),(2;-1) \Rightarrow z=-i,\ z=2-i$.
Do đó tích các môđun là$\sqrt{0+1}\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

Câu 111. Cho 3 điểm A,B,C lần lượt biểu diễn cho các số phứcz_1,z_2,z_3. Biết$|z_1|=|z_2|=|z_3|$và$z_1+z_2=0$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

A. Tam giác ABC vuông tại C. B. Tam giác ABC đều.
C. Tam giác ABC vuông cân tại C. D. Tam giác ABC cân tại C.

Lời giải:

Giả sử $|z_1|=|z_2|=|z_3|=R$. Khi đó A,B,C nằm trên đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính R. Do $z_1+z_2=0$ nên hai điểm A và B đối xứng nhau qua O. Như vậy điểm C nằm trên đường tròn đường kính AB haytam giác ABC vuông tại C.



Câu 112. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$. Tính $M = z_1^{400} + z_2^{400}$.

A. $M = -2^{201}i$. B. $M = 2^{201}$. C. $M = -2^{201}$. D. $M = 0$.

Lời giải: Chú ý $(1+i)^{400} + (1-i)^{400} = 2^{200}[i^{200} + (-i)^{200}] = 2^{201}$. □

Câu 113. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn hệ thức $z^2 = |z|^2$.

A. 1. B. 2. C. Vô số. D. 0.

Lời giải: Mọi số thực z (số phức có phần ảo bằng 0) đều có tính chất $z^2 = |z|^2$. □

Câu 114. Biết số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ có môđun nhỏ nhất. Tính $M = 2x^2 - y^2$.

A. $M = 4$. B. $M = -4$. C. $M = 8$. D. $M = 2$.

Lời giải: Từ giả thiết $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ suy ra $x + y = 4$ do đó để $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nhỏ nhất thì $x = y = 2$ và do đó $M = 2x^2 - y^2 = 4$. □

Câu 115. Cho số phức z thỏa mãn $(z+1)(\bar{z} - 2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích bằng

A. 5π. B. $\dfrac{5\pi}{4}$. C. $\dfrac{5\pi}{2}$. D. 25π.

Lời giải:

Đặt $z = x + yi$, ta được $w = (z+1)(\bar{z} - 2i) = [x(x+1) + y(y+2)] + [xy - (x+1)(y+2)]i$.

Ta có w thuần ảo $\Rightarrow x(x+1) + y(y+2) = 0 \Leftrightarrow (x + \dfrac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow$ chọn B. □

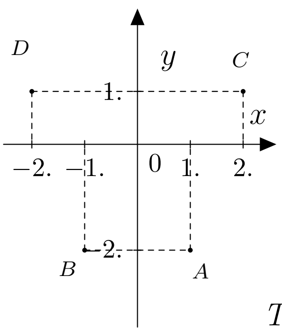
Câu 116. Cho hai số phức z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Tính môđun của số phức $w = (z_1 + z_2)\, i + z_1 z_2$.

A. $|w| = 3$. B. $|w| = \sqrt{185}$. C. $|w| = \sqrt{153}$. D. $|w| = \sqrt{17}$.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -4 \\ z_1.z_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow |w| = \sqrt{13^2 + 4^2} = \sqrt{185} \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 117. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $z - (2+3i)\bar{z} = 1 - 9i$. Số phức $w = \dfrac{5}{iz}$ có điểm biểu diễn là điểm nào
trong các điểm A, B, C, D ở hình bên?



A. Điểm D.
B. Điểm B.
C. Điểm C.
D. Điểm A.

Lời giải: Giả sử $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết ta có

$$a + bi - (2+3i)(a-bi) = 1 - 9i \Leftrightarrow -a - 3b - 3(a-b)i = 1 - 9i \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2 - i.$$

Do đó $w = \dfrac{5}{iz} = \dfrac{5}{1+2i} = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn là A. □

Câu 118. Cho số phức z thõa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có mô đun lớn nhất. Số phức z có mô đun bằng

(A) $2\sqrt{5}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{6}$. (D) $5\sqrt{2}$.

Lời giải: Từ giả thiết suy ra $w - 2 + i = z - 1 - 2i$, suy ra $|w - 2 + i| = \sqrt{5} \geq |w| - |-2 + i|$
$\Rightarrow |w| \leq 2\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $w - 2 + i = k(-2 + i)$, $\quad (k \leq 0) \Rightarrow |k| = 1 \Rightarrow k = -1$
$\Rightarrow z = 3 + 3i \Rightarrow |z| = 3\sqrt{2}$. □

Câu 119. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng số phức z thoả mãn điều kiện $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z + 1\right| = 1$.

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải: Vì $\frac{-2-3i}{3-2i} = -i$ nên ta có $|-iz + 1| = 1 \Leftrightarrow |z + i| = 1$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính bằng 1. Đường thẳng $OI : x = 0$ cắt đường tròn này tại hai điểm $A(0; 0)$ và $B(0; -2)$. Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng với độ dài $OB = 2$. □

Câu 120. Có bao nhiêu số phức z thoả mãn đồng thời điều kiện $|z.\overline{z} + z| = 2, |z| = 2$

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải: Ta có $|z| = 2$, do đó $|z.\overline{z} + z| = 2 \Leftrightarrow |z|.|\overline{z} + 1| = 2 \Leftrightarrow |\overline{z} + 1| = 1$.
Đặt $z = x + y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy chỉ có một số phức thỏa yêu cầu. □

---

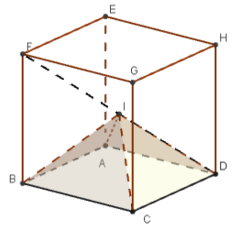
4 Các câu vận dụng Hình học

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 32 và I là tâm của hình hộp đó. Tính thể tích V của khối chóp $I.ABC$.

(A) $V = 8$. (B) $V = \dfrac{8}{3}$. (C) $V = \dfrac{16}{3}$. (D) $V = 16$.

Lời giải:

$V_{I.ABC} = \frac{1}{2}V_{I.ABCD} = \frac{1}{4}.V_{O'.ABCD} = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{12}.32 = \frac{8}{3}$.



□

Câu 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $3a$. Biết AB' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0 và $AB' = 6a$. Tính thể tích V của khối đa diện $A'B'C'AC$.

Ⓐ $V = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $V = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

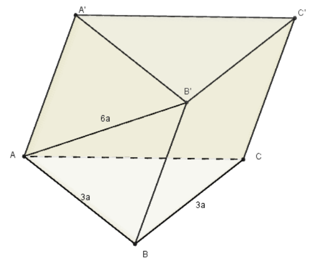
Lời giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) suy ra $\widehat{B'AH} = 30^o \Rightarrow B'H = AB'.\sin 30^o = 6a.\frac{1}{2} = 3a$

Vậy $V_{A'B'C'.ABC} = B'H.S_{ABC} = 3a.\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^3\sqrt{3}}{4}$

Mặt khác $V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}V_{A'B'C'.ABC} = \frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$

Suy ra $V_{A'B'C'AC} = V_{A'B'C'ABC} - V_{B'ABC} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$.



□

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60°$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc $30°$. Tính thể tích của khối lăng trụ theo a.

Ⓐ $V = \dfrac{4a^3\sqrt{6}}{3}$ Ⓑ $V = a^3\sqrt{6}$ Ⓒ $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ Ⓓ $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$

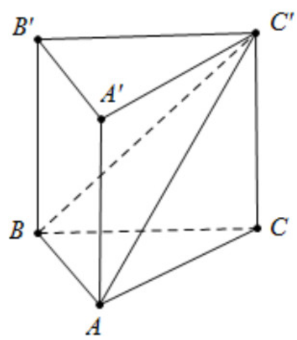
Lời giải:

Xét ΔABC có $\tan 60° = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = AC\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow (BC'; \widehat{(ACC'A')}) = \widehat{BC'A} = 30°$

Trong tam giác $BC'A$ có $\tan 30° = \frac{AB}{AC'} \Rightarrow AC' = AB\sqrt{3} = 3a \Rightarrow CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{ABC} = CC'.\frac{1}{2}AB.AC = a^3\sqrt{6} \Rightarrow$ chọn B.



□

Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo $AC' = \sqrt{18}$. Gọi S là diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật này. Tím giá trị lớn nhất của S.

Ⓐ $S_{\max} = 18$ Ⓑ $S_{\max} = 36$ Ⓒ $S_{\max} = 18\sqrt{3}$ Ⓓ $S_{\max} = 36\sqrt{3}$

Lời giải: Gọi a, b, c là 3 kích thước của hình hộp chữ nhật thì $S_{TP} = 2(ab + bc + ca)$
Theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 + c^2 = AC'^2 = 18$
Từ bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow S_{TP} \leq 2.18 = 36$ □

Câu 5. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{5}$, $AC = BD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{13}$. Thể tích của khối tứ diện đó là

Ⓐ $5\sqrt{26}$ Ⓑ $\frac{5}{6}\sqrt{26}$ Ⓒ 2 Ⓓ 4

Lời giải: • Dựng hình hộp chữ nhật ngoại tiếp hình tứ diện trên. Gọi x, y, z lần lượt là độ dài các cạnh của hình hộp. Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 = z^2 = 10 \\ z^2 + x^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ □

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a, AB = AC = 2a, \widehat{BAC} = 120°$. Thể tích hình chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ Ⓑ $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ Ⓒ $\frac{a^3}{3}$ Ⓓ $\sqrt{3}a$

Lời giải: □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và SA vuông góc với đáy biết $AC = 3\sqrt{2}a$ và góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$?

Ⓐ $V = \frac{a^3}{6}$. Ⓑ $V = \frac{2a^3}{3}$. Ⓒ $V = \frac{4a^3}{3}$. Ⓓ $V = \frac{9a^3}{2}$.

Lời giải: Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng góc $\widehat{SBA} = 45^0$. Từ đó tính được $V_{S.ABC} = \frac{9a^3}{2}$. □

Câu 8. Kí hiệu V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. V_1 là thể tích khối tứ diện $BDA'C'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

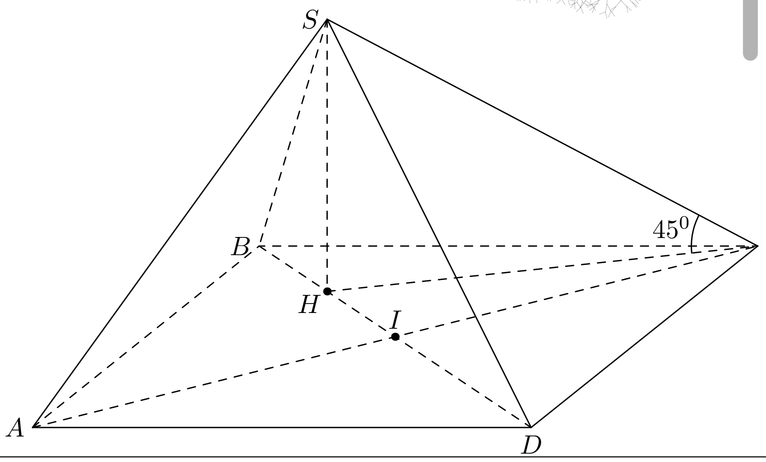
Ⓐ $\frac{V_1}{V} = 3$. Ⓑ $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$. Ⓒ $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{V_1}{V} = \frac{2}{3}$.

Lời giải: Đặt $V_{A'ABD} = V_2$. Ta có $V_2 = \frac{1}{6}V$, cho nên $V = V_1 + 4V_2 = V_1 + \frac{2}{3}V \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$. □

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh x, $\widehat{BAD} = 60^0$, gọi $I = AC \cap BD$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là H sao cho H là trung điểm của BI. Góc giữa SC và mp$(ABCD)$ bằng 45^0. Khi đó thể tích khối $S.ABCD$ bằng:

Ⓐ $\frac{x^3.\sqrt{39}}{12}$. Ⓑ $\frac{x^3.\sqrt{39}}{24}$. Ⓒ $\frac{x^3.\sqrt{39}}{36}$. Ⓓ $\frac{x^3.\sqrt{39}}{48}$.

Lời giải:



Ta có $S_{ABCD} = 2.S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{2}$.

Ta có $SH = CI\dfrac{\sqrt{13}}{4}x$.

Vậy $V = \dfrac{x^3\sqrt{39}}{24} \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 10. Một đứa trẻ dán 42 hình lập phương cạnh $1cm$ lại với nhau, tạo thành một khối hộp có mặt hình chữ nhật. Nếu chu vi đáy là $18cm$ thì chiều cao của khối hộp là:

A 6. **B** 3. **C** 7. **D** 2.

Lời giải:
Gọi $a, b, c \in \mathbb{N}$, là các kích thước của hình hộp chữ nhật.

Ta có $\begin{cases} abc = 42 \\ 2(b+c) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow$ chọn B. □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, và có thể tích bằng 8. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD. Tính thể tích V của khối tứ diện $SCMN$.

A $V = 2$. **B** $V = 3$. **C** $V = 4$. **D** $V = 5$.

Lời giải: Coi tứ diện $SCMN$ là hình chóp đỉnh S. Vậy thì hai hình chóp $S.CMN$ và $S.ABCD$ có cùng chiều cao. Suy ra $\dfrac{V_{S.CMN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{S_{CMN}}{S_{ABCD}} = \dfrac{3}{8}$. Vậy $V = V_{S.CMN} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD} = 3$. □

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân ở A, cạnh $BC = 2\sqrt{3}a$. Tam giác SBC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích của khối chóp bằng a^3, tính góc giữa SA và mặt phẳng SBC.

A $\dfrac{\pi}{6}$. **B** $\dfrac{\pi}{3}$. **C** $\dfrac{\pi}{4}$. **D** $\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải: Gọi M là trung điểm BC thì góc cần tính là $\angle MSA$. Ta tính được $AM = a\sqrt{3}, SM = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = a$. Do đó, $\tan\angle MSA = \dfrac{MA}{MS} = \sqrt{3}$, hay $\angle SMA = \dfrac{\pi}{3}$. □

Câu 13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, \widehat{ACB} = 60^0$, $BC = a, AA' = 2a$. Cạnh bên tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D** $a^3\sqrt{3}$

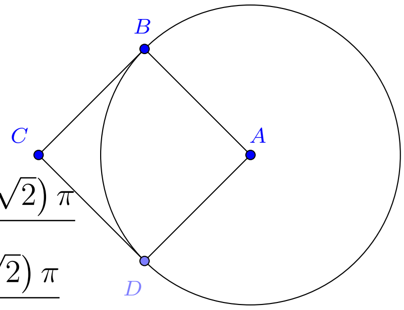
Lời giải: Diện tích tam giác ABC là $\dfrac{BA.BC}{2}=\dfrac{a.a.\tan 60^\circ}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Chiều cao của lăng trụ là $AA'.\sin 30^\circ = a$.
Thể tích khối lăng trụ là $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại $A, BC=2a, \widehat{BAC}=120^0$, biết $SA\perp(ABC)$ và mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Ⓐ $\dfrac{a^3}{3}$. Ⓑ $a^3\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{9}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải: Diện tích tam giác ABC là $\dfrac{1}{2}(2a).a.\tan 30^\circ=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.
Gọi M là trung điểm BC, từ giả thiết suy ra $\widehat{SMA}=45^\circ \Rightarrow SA=AM=\dfrac{1}{2}.AC=\dfrac{a}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
Vậy thể tích khối chóp là $V=\dfrac{a^3}{9}$. □

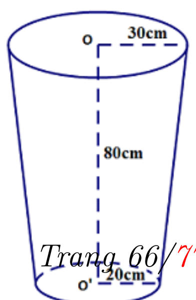
Câu 15. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 7 và hình tròn (C) có tâm A, đường kính bằng 14 như hình vẽ bên. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục là đường thẳng AC.



Ⓐ $V=\dfrac{343\left(12+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$ Ⓑ $V=\dfrac{343\left(4+3\sqrt{2}\right)\pi}{6}$
Ⓒ $V=\dfrac{343\left(7+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$ Ⓓ $V=\dfrac{343\left(6+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$

Lời giải: Công thức tính thể tích chỏm cầu có bán kính R, chiều cao h là:
$V_{\text{chom cau}}=\pi\int\limits_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$
Gọi V_1 là thể tích khối nón tròn xoay khi quay tam giác BCD quanh trục AC, V_2 là thể tích khối cầu khi quay hình tròn quanh trục AC, V_3 là thể tích khối chỏm cầu khi quay hình phẳng (BnD) quanh trục AC thì $V=V_1+V_2-V_3$
Tính được:$V_1=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2.\dfrac{7\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pi.7^3}{12}$, $V_2=\dfrac{4}{3}\pi.7^3=\dfrac{4\pi.7^3}{3}$.
Khối chỏm cầu có bán kính $R=7$, chiều cao $h=7-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ nên:
$V_3=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)=\dfrac{\left(8-5\sqrt{2}\right)\pi.7^3}{12}$.
Do đó: $V=\dfrac{343\left(4+3\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. □

Câu 16. Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính $20cm$, miệng xô là đường tròn bán kính $30cm$, chiều cao xô là $80cm$. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/$1m^3$ (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



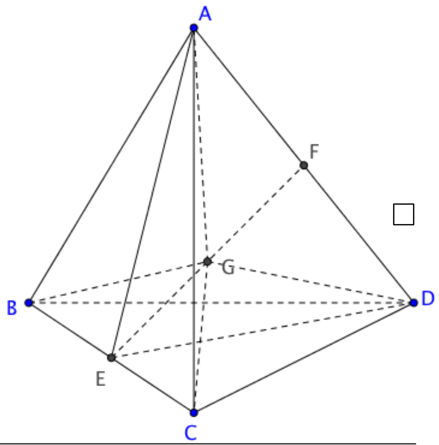
(A) 35279 đồng. (B) 38905 đồng.
(C) 42116 đồng. (D) 31835 đồng.

Lời giải: Xô nước có hình dạng là một hình nón cụt nên thể tích của xô là
$V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \dfrac{1}{3}\pi.80\left(30^2 + 20^2 + 30.20\right) \approx 159174,0278\,cm^3 = 0,1591740278\,m^3$.
$\Rightarrow$Thể tích nước mỗi tháng A dùng hết là $10V = 1,591740278\,m^3$.
Vậy số tiền A phải trả là $20000.1,591740278 \approx 31835$. Chọn đáp án (D). □

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = AC = BD = 2a$, $AD = BC = a\sqrt{2}$. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

(A) $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $R = a\sqrt{2}$. (C) $R = a\sqrt{5}$. (D) $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:

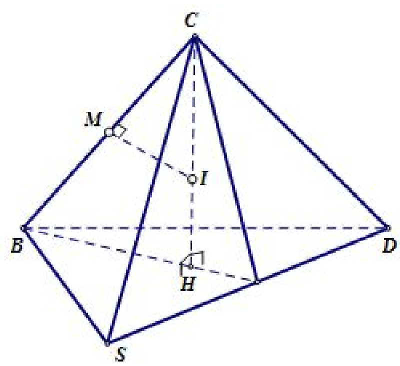


Nhận xét: Tứ diện đã cho là tứ diện gần đều nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là trọng tâm của tứ diên.
Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AD, EF, ta có G là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diên.
Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta có:
$AE^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4} \Rightarrow EF^2 = AE^2 - AF^2 = 3a^2$
$\Rightarrow R^2 = GA^2 = \dfrac{AE^2 + AF^2}{2} - \dfrac{EF^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$. □

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 6. Tam giác SAB vuông cân tại S và tam giác SCD đều. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{21}$ (C) 3 (D) $3\sqrt{3}$

Lời giải:



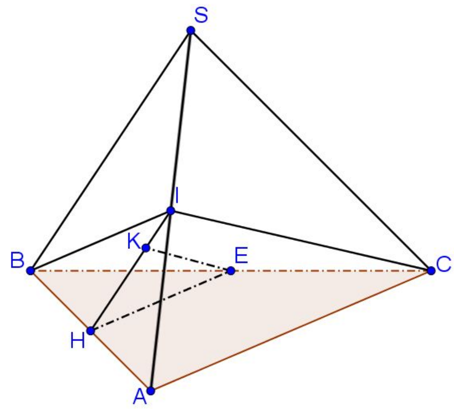
- Từ giả thiết $CB = CS = CD = 6$, $BS = 3\sqrt{2}$, $BD = 6\sqrt{2}$.
- Gọi H là hình chiếu của C trên $(SBD), \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD.
- Trên mặt phẳng CBH, kẻ trung trực của BC cắt CH tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$.
- $S_{SBD} = \dfrac{9\sqrt{7}}{2}$ và $BH = \dfrac{BS.SD.BD}{4S_{SBD}} = \dfrac{12}{7}$.
- $\triangle CIM \sim \triangle CBH \Rightarrow \dfrac{CI}{CB} = \dfrac{CM}{CH}$

$\Rightarrow CI = \dfrac{CB.CM}{CH} = \dfrac{BC^2}{2\sqrt{BC^2 - BH^2}} = \sqrt{21}$. Vậy $R = \sqrt{21}$.
□

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại đỉnh A, $AB = 1$ (cm), $AC = \sqrt{3}$ (cm). Các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (cm). Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

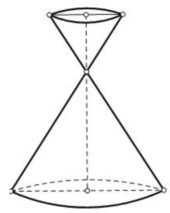
(A) $\dfrac{5\pi}{4}(cm^2)$ (B) $20\pi(cm^2)$ (C) $\dfrac{5\sqrt{5}\pi}{6}(cm^2)$ (D) $5\pi(cm^2)$

Lời giải:



• Gọi I là trung điểm SA. Khi đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.
Gọi E, H lần lượt là trung điểm của BC, AB, gọi K là hình chiếu của E trên IH. Ta có $AB \perp (IHE) \Rightarrow AB \perp EK$. Suy ra $EK \perp (SAB)$.
$\Rightarrow EK = d(E,(SAB)) = \dfrac{1}{2}d(C,(SAB)) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
• Ta có $IE \perp (ABC)$ nên $\dfrac{1}{EK^2} = \dfrac{1}{EH^2} + \dfrac{1}{IE^2} \Rightarrow IE^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow IC^2 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow IC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
• Vậy $S = 5\pi cm^2$.
□

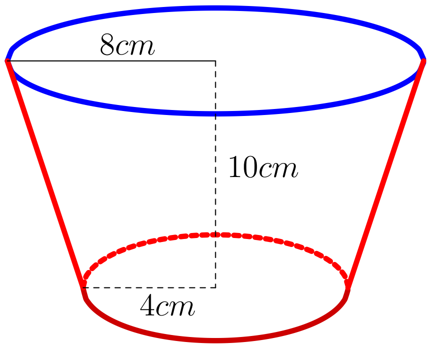
Câu 20. Cho một đồng hồ cát như hình vẽ bên, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một gói $60°$. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30 cm và thể tích của đồng hồ là 1000π cm^3. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần phía trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ với thể tích phần phía dưới là bao nhiêu.



(A) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{64}$ (D) $\dfrac{1}{27}$

Lời giải: • Gọi h, r, h', r' lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của các hình nón $(h > 15)$.
Ta có $r = \dfrac{h}{\tan 60°} = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$. $h' = 30 - h$. $r' = \dfrac{h'}{\sqrt{3}} = \dfrac{30-h}{\sqrt{3}}$.
• Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h + \dfrac{1}{3}\pi r'^2 h' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h^3}{\sqrt{3}} + \dfrac{(30-h)^3}{3}\right) = \dfrac{1}{9}\pi(90h^2 - 2700h + 27000) = 1000\pi$.
• Ta có $h^2 - 30h + 200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 20 \\ h = 10 \text{ (loại)} \end{array}\right.$
• $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{h^3}{h'^3} = \dfrac{1}{8}$. □

Câu 21. Có một chiếc cốc có dạng như hình vẽ. Biết chiều cao của chiếc cốc là $10cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $8cm$. Tính thể tích V của chiếc cốc.



Ⓐ $\dfrac{40\pi}{3}(cm^2)$. Ⓑ $\dfrac{1120\pi}{3}(cm^2)$. Ⓒ $40\pi(cm^2)$. Ⓓ $1120\pi(cm^2)$.

Lời giải: Ta có $V = \dfrac{h}{3}(B + \sqrt{BB'} + B') = \dfrac{1120\pi}{3}(cm^2)$. □

Câu 22. Một hình nón đỉnh S, đáy hình tròn tâm O và $SO = h$. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt đường tròn (O) theo dây cung AB sao cho góc $\widehat{AOB} = 90°$, biết khoảng cách từ O đến (P) bằng $\dfrac{h}{2}$. Khi đó diện tích xung quanh hình nón bằng

Ⓐ $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$. Ⓒ $\dfrac{2\pi h^2\sqrt{10}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.

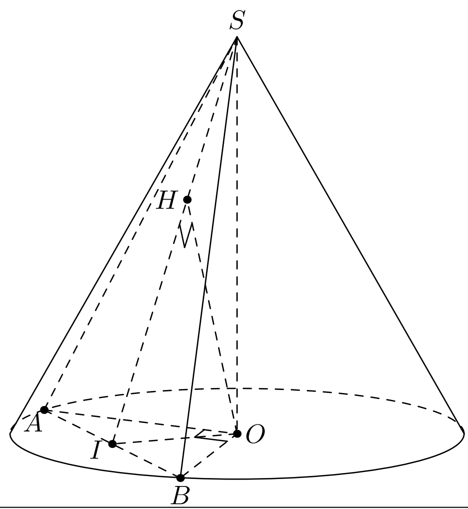
Lời giải:

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $OB = \sqrt{2}OI = \dfrac{h\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SB = h\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Diện tích xung quanh $S = \pi.\dfrac{h\sqrt{6}}{3}.\dfrac{h\sqrt{15}}{3} = \dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.

$\Rightarrow$ chọn D.

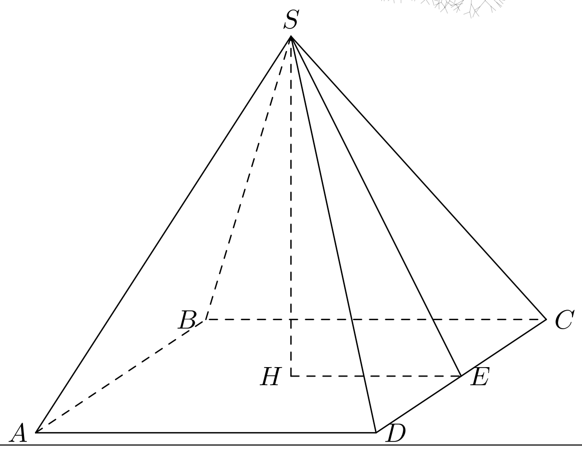


□

Câu 23. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x. Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Khi đó thể tích của khối chóp bằng:

Ⓐ $\dfrac{x^3.\sqrt{3}}{6}$ Ⓑ $\dfrac{x^3.\sqrt{3}}{2}$ Ⓒ $\dfrac{x^3.\sqrt{3}}{12}$ Ⓓ $\dfrac{x^3.\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:



Đặt $\begin{cases} SE = y \\ SH = h \end{cases}$

Ta có $2x^2 = 2x.y \Leftrightarrow y = x$.

Ta có $h = x\sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

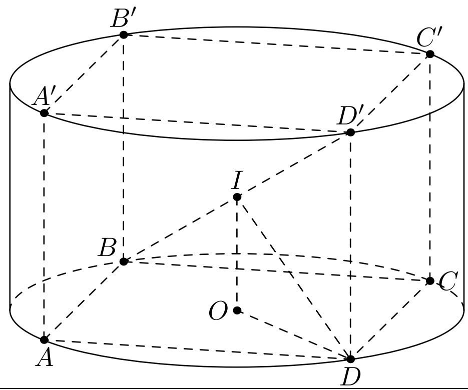
Thể tích $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}.x^2 = \dfrac{x^3\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow$ chọn A. □

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo $BD' = x\sqrt{3}$. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Diện tích S là

A πx^2. **B** $\dfrac{\pi x^2\sqrt{2}}{2}$. **C** $\pi x^2\sqrt{3}$. **D** $\pi x^2\sqrt{2}$.

Lời giải:



Ta có $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2}$

$\sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{DD'^2 + AB^2 + AD^2} = AB\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = x$.

Ta có $S = 2\pi.\dfrac{x\sqrt{2}}{2}.x = \pi x^2\sqrt{2} \Rightarrow$ chọn D. □

Câu 25. Từ một tờ giấy hình tròn bán kính R, ta có thể cắt ra một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là bao nhiêu ?

A $2R^2$. **B** $\dfrac{3R^2}{2}$. **C** R^2. **D** $\dfrac{\pi R^2}{2}$.

Lời giải:

Gọi $a, b > 0$ là hai kích thước của hình chữ nhật.

Ta có $4R^2 = a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2S \Rightarrow S \leq 2R^2 \Rightarrow$ chọn A. □

Câu 26. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}$ và đường cao bằng $3\sqrt{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

A $S = 48\pi$. **B** $S = 32\sqrt{3}\pi$. **C** $S = 12\pi$. **D** $S = 4\sqrt{3}\pi$.

Lời giải: Kí hiệu a, h lần lượt là độ dài cạnh đáy và chiều cao chủa hình chóp, đặt x là khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đến mặt đáy. Ta có $(h - x)^2 = x^2 + \left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (= R^2)$.

Từ dữ kiện đề bài, ta tìm được $x = \sqrt{3}$, suy ra $R = 2\sqrt{3}$ và $S = 4\pi R^2 = 48\pi$. □

Câu 27. Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa . Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt (tức diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là V cho trước. Khi đó diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án là

Ⓐ $\sqrt[3]{2\pi V^2}$ Ⓑ $6\sqrt[3]{V^2}$ Ⓒ $3\sqrt[3]{6V^2}$ Ⓓ $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$

Lời giải:

• Hộp sữa có dạng hình hộp chữ nhật
+ Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của hình hộp chữ nhật. Khi đó thể tích hộp sữa $V = abc$
+ Diện tích toàn phần của hộp sữa là $S = 2(ab + bc + ca)$
+ Theo bất đẳng thức CauChy

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3\sqrt[3]{V^2}$$

Do đó

$$S \geq 6\sqrt[3]{V^2} \quad (1)$$

• Nếu hộp sữa có dạng khối trụ. Gọi h, R lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối trụ. Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h$.
+ Diện tích toàn phần của hình trụ $S' = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = \pi(2R^2 + 2Rh)$.
+ Theo CauChy ta có

$$2R^2 + 2Rh = 2R^2 + Rh + Rh \geq 3\sqrt[3]{2R^4h^2} = 3\sqrt[3]{2V^2}$$

Do đó

$$S' \geq 3\pi\sqrt[3]{2V^2} \quad (2)$$

Dễ thấy $6\sqrt[3]{V^2} > 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. Vậy chọn D □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, hai mặt bên SAB và SAC cùng vuông góc với đáy, $SB = 2a$, $AB = BC = a$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

Ⓐ $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ Ⓑ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ Ⓒ $R = a\sqrt{2}$ Ⓓ $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Lời giải:

• Do SAB và SAC cùng vuông góc với đáy nên giao tuyến $SA \perp (ABC)$
• Trong tam giác ABC có $AC = a\sqrt{2}$
• Trong tam giác SAB có $SA^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2$
• Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $r = \dfrac{AC}{2}$
• Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là

$$R = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + r^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

□

Câu 29. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (Oxy).

Nhóm LATEX

A $(d'):\begin{cases} x=3-t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ **B** $(d'):\begin{cases} x=-3+t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

C $(d'):\begin{cases} x=-3+t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ **D** $(d'):\begin{cases} x=-3+t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Lời giải: Nhận xét rằng, hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ lên (Oxy) là $M'(a;b;0)$. Lấy hai điểm $A(-2;1;2), B(-3;0;0)$ thuộc d, hình chiếu của A, B lên (Oxy) là $A'(-2;1;0)$ và $B'(-3;0;0)$. Phương trình đường thẳng d' qua A, B là

$$\begin{cases} x=-3+t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

□

Câu 30. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình bát diện đều cạnh a.

A $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C** $R=a\sqrt{2}$. **D** $R=a$

Lời giải: □

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y-z+9=0$. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) . Tính bán kính R của (C) .

A $R=6$. **B** $R=3$. **C** $R=8$. **D** $R=2\sqrt{2}$.

Lời giải: Mặt cầu S có bán kính $R_1=10$ tâm $I\,(3;-2;1)$
Khoảng cách từ điểm I xuống mặt phẳng (α):

$$h=d\left[I;(\alpha)\right]=\frac{|2.3-2.(-2)-1+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=6$$

Vậy bán kính R của (C)

$$R=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$$

□

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C; trực tâm tam giác ABC là $H\,(1;2;3)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là:

A $x+2y+3z-14=0$. **B** $x+2y+3z+14=0$.

C $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. **D** $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=0$.

Lời giải: Mặt phẳng (P) qua $H\,(1;2;3)$ có VTPT $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{OH}$
Vậy $(P):(x-1)+2\,(y-2)+3\,(z-3)=0$ hay $(P): x+2y+3z-14=0$. □

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;2;1)$ và $N(1;3;0)$. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng Oxz.

(A) $(2;0;3)$ (B) $(-2;0;3)$ (C) $(-2;1;3)$ (D) $(2;0;-3)$

Lời giải: Đường thẳng $MN \begin{cases} \text{qua } M(0;2;1) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{MN}(1;1;-1) \end{cases} \Rightarrow MN \begin{cases} x = t \\ y = 2+t, \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1-t \end{cases}$

Phương trình $(Oxz): y = 0$. Gọi A là giao điểm của MN và (Oxz).
$A \in MN \Rightarrow A(t;2+t;1-t), A \in (Oxz) \Rightarrow 2+t = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow A(-2;0;3)$ □

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

(A) $2y+3z-12=0$ (B) $2x+3z-11=0$ (C) $2y+3z-11=0$ (D) $2y+3z-1=0$

Lời giải: $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;2)$.
Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_{(P)} = (1;-3;2)$.
Ta có: $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}\right] = (0;8;12) = 4(0;2;3)$.
Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A, có vptp là $(0;2;3)$ có pt: $2y+3z-11=0$. □

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-18=0$. Tìm mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

(A) $2x+2y-z+12=0$ (B) $2x+2y-z-18=0$
(C) $2x+2y-z-28=0$ (D) $2x+2y-z+22=0$

Lời giải: Mặt cầu (S) có tâm là $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.
Vì $(Q) \parallel (P)$ nên phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $2x+2y-z+d=0,\ d \neq -18$.
Vì (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I,(P)) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{|d+3|}{3} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} d = 12 & \text{(nhận)} \\ d = -18 & \text{(loại)} \end{array}\right.$
Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là: $2x+2y-z+12=0$. □

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và điểm $I(2;-1;1)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

(A) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=8$ (B) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=\dfrac{80}{9}$
(C) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ (D) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$

Lời giải: +) Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác IAB vuông cân tại Inên $IH \perp AB$ và $IA = \sqrt{2}IH$
+) d đi qua $M(2;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2;1;-1)$.
$\overrightarrow{IM} = (0;2;-2) \Rightarrow [\overrightarrow{IM};\overrightarrow{u}] = (2;-4;-4)$

$\Rightarrow d(I,d) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{IM};\overrightarrow{u}]\right|}{|\overrightarrow{u}|} = \dfrac{\sqrt{16+16+4}}{\sqrt{4+4+1}} = 2.$

Do đó $IA = \sqrt{2}IH = \sqrt{2}d(I,d) = 2\sqrt{2}$, suy ra mặt cầu có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8$.

Chú ý: Có thể tính IH bằng cách tìm tọa độ điểm H. □

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 10z + 39 = 0$. Từ một điểm M thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm N. Tính khoảng cách từ điểm M tới gốc tọa độ, biết rằng $MN = 4$.

A 3 **B** $\sqrt{11}$ **C** $\sqrt{6}$ **D** 5

Lời giải: (S) có tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5} \Rightarrow IN = R = 2\sqrt{5}$.

Do tam giác IMN vuông tại N nên $IM = \sqrt{IN^2 + MN^2} = \sqrt{20+16} = 6$.

Ta lại có $d(I,(P)) = \dfrac{|5+6+10-3|}{\sqrt{1+4+4}} = 6 = IM$

Do đó M phải là hình chiếu của I lên $(P) \Rightarrow IM \perp (P) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{n_P} \Rightarrow M(5+t; -3-2t; 5+2t)$.

Do $M \in (P)$ nên $5 + t - 2(-3-2t) + 2(5+2t) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M(3;1;1) \Rightarrow OM = \sqrt{11}$. □

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và $I(1;3;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có chu vi bằng 2π. Phương trình mặt cầu (S) là

A (S): $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{5}$. **B** (S): $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

C (S): $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$. **D** (S): $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 5$.

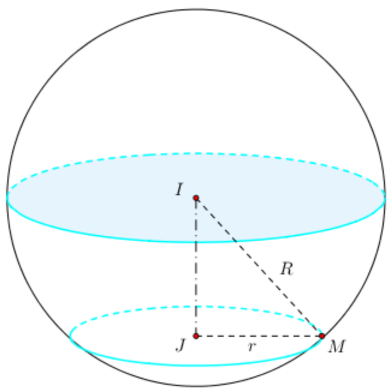
Lời giải:

Giả sử mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) tâm J bán kính r.

Chu vi của (C) là $2\pi r = 2\pi \Rightarrow r = 1$ và

$d_{I,(P)} = \dfrac{|2.1 - 3 + 2.(-1) - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 2.$

Ta có $IM^2 = IJ^2 + JM^2 = d_{I,(P)}^2 + r^2 = 5$, nên phương trình mặt cầu là $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 5$.



□

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1)$, $B(2;-1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ chứa trong (P) sao cho mọi điểm thuộc Δ cách đều hai điểm A, B là

A $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ **B** $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

C $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ **D** $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Lời giải: Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của AB, pt $(Q): x-y+z-1=0$.

Ta có $\Delta=(P)\cap(Q)$ nên pt $\Delta: \begin{cases} x=-2t \\ y=1+t \\ z=2+3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$. □

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm

$$P(6;-2;3), Q(0;1;6), E(1;0;-1), F(3;-1;-2).$$

Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai điểm P, Q và cách đều hai điểm E, F?

(A) vô số mặt phẳng. (B) 2 mặt phẳng. (C) 4 mặt phẳng. (D) 1 mặt phẳng.

Lời giải: Ta có $\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{EF}$ nên có vô số mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): -x+2y-2z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cách A một khoảng bằng 3. Tìm phương trình mặt phẳng (Q).

(A) $(Q): x-2y+2z-8=0$.
(B) $(Q): x-2y+2z+10=0$.
(C) $(Q): x-2y+2z-8=0$ và $(Q): x-2y+2z+10=0$.
(D) $(Q): -x+2y-2z-8=0$.

Lời giải: $(Q)\parallel(P)$ nên $(Q): -x+2y-2z+d=0$ $(d\neq -10)$. Do $d(A,(Q))=3$ nên tìm được $d=8$ hoặc $d=-10$ (loại).
Do đó $(Q): -x+2y-2z+8=0 \Leftrightarrow (Q): x-2y+2z-8=0$ □

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt có phương trình

$$x+3ay-z+2=0; ax-y+z+1=0; -x+y+2z+1=0.$$

Gọi d_m là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm a để đường thẳng d_m vuông góc với (R).

(A) $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$ (B) $a=1$ (C) $a=\dfrac{1}{3}$ (D) Không có giá trị a

Lời giải: (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến $d_m: \begin{cases} x=\dfrac{-3+(1-3a)t}{a} \\ y=t \\ z=2+3at \end{cases}$ $(a\neq 0)$.

Điều kiện để $d_m\perp(R)$ là $\overrightarrow{u_{d_m}}.\overrightarrow{n}_{(R)}=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$ hoặc $a=2$. □

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0), B(1;2;2), M(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-20=0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng AB sao cho MN song song với mặt phẳng (P).

(A) $N\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$. (B) $N(2;1;-1)$. (C) $N\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};1\right)$. (D) $N\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải: Đường thẳng MN song song với (P) suy ra $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n}_{(P)} = 0 \Rightarrow N\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}; -1\right)$. □

Câu 44. Cho tam giác ABC với $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Độ dài phân giác trong của ΔABC kẻ từ đỉnh B là:

A. $\dfrac{2\sqrt{74}}{5}$ B. $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$ C. $\dfrac{3\sqrt{73}}{3}$ D. $2\sqrt{30}$.

Lời giải:
Gọi D là chân đường phân giác góc B.
Ta có $\overrightarrow{BA} = (-1;3;-4) \Rightarrow BA = \sqrt{26}$.
Ta có $\overrightarrow{BC} = (-6;8;2) \Rightarrow BC = 2\sqrt{26}$.
Ta có $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{11}{3}; 1)$
Ta được $\overrightarrow{BD} = (\dfrac{8}{3}; -\dfrac{14}{3}; 2) \Rightarrow BD = \dfrac{2\sqrt{74}}{3}$.
$\Rightarrow$ chọn B. □

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ và mặt phẳng $(P): mx + 10y + nz - 11 = 0$. Biết rằng mặt phẳng (P) luôn chứa đường thẳng d, tính $m+n$.

A. $m+n=21$. B. $m+n=-21$. C. $m+n=-33$. D. $m+n=33$.

Lời giải: Điểm $A(-1;-1;-1)$ thuộc đường thẳng d nên nó cũng thuộc $mp(P)$. Suy ra $m(-1) + 10(-1) + n(-1) - 11 = 0$, hay $m+n=-21$. □

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và $M(1;-2;4)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M lên (P).

A. $(5;2;2)$. B. $(0;0;-3)$. C. $(3;0;3)$. D. $(1;1;3)$.

Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (P). Khi đó $\overrightarrow{MH} = k\vec{n_P} = k(2;2;-1)$. Suy ra $H(2k+1; 2k-2; -k+4)$.
Do $H \in (P)$ nên $2(2k+1) + 2(2k-2) - (-k+4) - 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow H(3;0;3)$. □

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1,0,-1)$ là tâm của mặt cầu (S) và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$, đường thẳng d cắt mặt cầu tại hai điểm AB sao cho $AB = 6$. Mặt cầu (S) có bán kính bằng:

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{2}$ D. 10

Lời giải: Gọi H là hình chiếu của I lên d, khi đó $H(2t+1; 2t-1; -t)$.
Do $IH \perp d$ nên ta có $2(2t) + 2(2t-1) - (-t+1) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow H(\dfrac{5}{4}; \dfrac{-1}{3}; \dfrac{-1}{3}) \Rightarrow IH = 1$.
Áp dụng định lí Pitago ta được bán kính mặt cầu là $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. □

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+3z-14=0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB vuông tại M. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy).

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Lời giải: Tam giác MAB vuông tại M nên M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{11}$.
Do $d(I,(P))=\sqrt{11}=R$, suy ra (P) tiếp xúc với (S), suy ra M là hình chiếu của I lên P.
Đường thẳng IM qua I và vuông góc với (P) có phương trình là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.
Suy ra $M(t;t;3t+1)\in(P)\Rightarrow t+t+9t-11=0\Rightarrow t=1\Rightarrow M(1;1;4)$.
Vậy $d(M,(Oxy))=4$. □

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oyz).

(A) $d': \begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \\ z=0 \end{cases}$ (B) $d': \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$ (C) $d': \begin{cases} x=0 \\ y=-3+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ (D) $d': \begin{cases} x=0 \\ y=3+2t \\ z=0 \end{cases}$

Lời giải:
- Đường thẳng d qua điểm $A(2;-3;10$ và $B(3;-1;4)$. Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x=0$
- Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A và B lên (Oyz) khi đó $A'(0;-3;1)$, $B'(0;-1;4)$.
- Đường thẳng d' qua hai điểm $', B'$ có phương trình $d': \begin{cases} x=0 \\ y=-3+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ □
