TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN
VỀ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác

Định lí 1: Cho tam giác ABC. Nếu $\widehat{ABC} \ge \widehat{ACB}$ thì $AC \ge AB$ và ngược lại.

Định lí 2: Cho hai tam giác ABC và MNP có $AB = MN$ và $AC = MP$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\widehat{BAC} \ge \widehat{NMP} \Leftrightarrow BC \ge NP$$

Định lí 3: Trong tam giác ABC ta có:

+ Nếu $\widehat{A} = 90^0$ thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$

+ Nếu $\widehat{A} > 90^0$ thì $BC^2 > AB^2 + AC^2$

+ Nếu $\widehat{A} < 90^0$ thì $BC^2 < AB^2 + AC^2$

Định lí 4: Với mọi tam giác ABC ta luôn có: $\begin{cases} |AB - AC| < BC < AB + AC \\ |AC - BC| < AB < AC + BC \\ |BC - AB| < AC < BC + AB \end{cases}$

Hệ quả: Cho n điểm $A_1; A_2; A_3; ...; A_n$. Khi đó ta luôn có $A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n \ge A_1A_n$
Dấu bằng xẩy ra n điểm $A_1; A_2; A_3; ...; A_n$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó.

Định lí 5: Cho tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Khi đó ta có

+ Nếu $\widehat{A} = 90^0$ thì $AM = \frac{1}{2}BC$

+ Nếu $\widehat{A} > 90^0$ thì $AM < \frac{1}{2}BC$

+ Nếu $\widehat{A} < 90^0$ thì $AM > \frac{1}{2}BC$

2. Quan hệ giữa đường xiên, đường vuông góc và hình chiếu của đường xiên.

Định lí 1: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Định lí 2: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn

- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau, và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

3. Các bất đẳng thức trong đường tròn.

Định lí 1: Trong một đường tròn thì đường kính là dây lớn nhất.

Định lí 2: Trong một đường tròn:

- Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm và ngược lại.
- Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn và ngược lại.

Định lí 3: Bán kính của hai đường tròn là $R \ge r$, còn khoảng cách giữa tâm của chúng là d. Điều kiện cần và đủ để hai đường tròn đó cắt nhau là $R - r \le d \le R + r$

Định lí 4: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bất kì nằm trong đường tròn. Khi đó ta có

$$R - d \le MN \le R + d$$

Với N là điểm bất kì trên đường tròn và d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn.

Định lí 5: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bất kì ngoài đường tròn. Khi đó ta có

$$d - R \le MN \le d + R$$

Với N là điểm bất kì trên đường tròn và d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn.

4. Các bất đẳng thức về diện tích.

Định lí 1: Với mọi tam giác ABC ta luôn có $S_{ABC} \le \frac{1}{2}AB.AC$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A

Định lí 2 : Với mọi tứ giác ABC ta luôn có $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}AC.BD$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi AC vuông góc với BD.

Định lí 3: Với mọi tứ giác ABCD ta luôn có $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}\left(AB.BC + AD.DC\right)$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$.

5. Một số bất đẳng thức đại số thường dùng

- Với x, y là các số thực dương , ta luôn có

$$x^2 + y^2 \ge 2xy;\ 2\left(x^2 + y^2\right) \ge \left(x + y\right)^2, \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = y$$

- Với x, y, z là các số thực dương , ta luôn có

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

• Bất đẳng thức Cauchy: Với x, y, z là các số thực dương , ta luôn có

$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y$.

$\frac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

• Bất đẳng thức Bunhiacopxki. Với a, b, c và x, y, z là các số thực, ta luôn có

$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\ge\left(ax+by\right)^2$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\left(ay+by+cz\right)^2$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

II.CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng tổng độ dài ba đường trung tuyến của một tam giác lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi và nhỏ hơn chu vi của tam giác ấy.

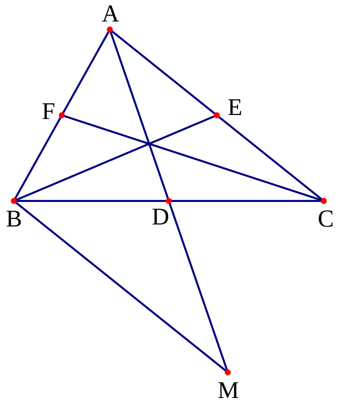
Phân tích tìm lời giải

Trên cở sở hình vẽ, ta cần chứng minh $\frac{3}{4}\left(AB+BC+CA\right)<AD+BE+CF<AB+BC+CA$.

Lấy điểm M trên tia đối của tia DA sao cho $DA=\frac{1}{2}AM$, khi đó theo ta được $2AD<AB+AC$. Hoàn toàn tương tự ta được $AD+BE+CF<AB+BC+CA$.

Ta cần chứng minh được $\frac{3}{4}\left(AB+BC+CA\right)<AD+BE+CF$. Chú ý rằng G là trọng tâm tam giác nên từ $BG+GC>BC$ ta được $BE+CF>\frac{3}{2}BC$. Đến đây áp dụng tương tự và cộng theo vế các bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

Lời giải



Xét tam giác ABC có ba đường trung tuyến là AD, BE, CF.

Trước hết ta chứng minh $2AD < AB + AC$. Thật vậy, trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho D là trung điểm của AM, khi đó ta được $AC = BM$ và $AM = 2AD$. Trong tam giác ABM có $AM < AB + BM$ do đó ta được $2AD < AB + AC$

Tương tự ta được $2BE = BC + AB;\ 2CF = CA + BC$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2(AD + BE + CF) < 2(AB + BC + CA)$$

Hay $AD + BE + CF < AB + BC + CA$

Trong tam giác BGC có $BG + GC > BC$ mà $BG = \frac{2}{3}BE$ và $CG = \frac{2}{3}CF$

Nên $\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC \Leftrightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC$. Tương tự $CF + AD > \frac{3}{2}AC;\ AD + BE > \frac{3}{2}AB$

Cộng các bất đẳng thức vế theo vế ta có

$$2(AD + BE + CF) > \frac{3}{2}(AB + BC + CA) \Leftrightarrow AD + BE + CE > \frac{3}{4}(AB + BC + CA).$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{3}{4}(AB + BC + CA) < AD + BE + CF < AB + BC + CA$

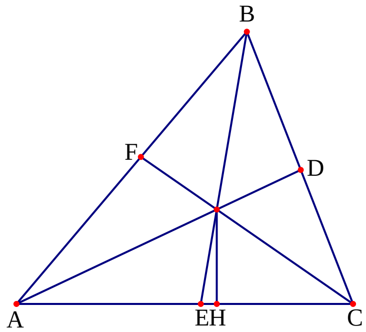
Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng các đoạn thẳng ID, IE, IF là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh các đoạn thẳng ID, IE, IF là độ dài ba cạnh của một tam giác. Ta cần chứng minh được các bất đẳng thức $IE + FI > DI; EI + DI > FI; DI + FI > EI$. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC và vẽ IH vuông góc với AC tại H suy ra $IH = r$.

Chú ý là $\widehat{EIH} < 45^0$ nên trong tam giác vuông góc $\widehat{EIH}$ nhỏ nhất nên $EH < IH = r$. Từ đó suy ra $r^2 \le IE^2 < 2r^2$. Hoàn toàn tương tự thì ta được $DI^2 < EI^2 + FI^2; EI^2 < FI^2 + DI^2; FI^2 < DI^2 + EI^2$. Đến đây ta được các bất đẳng thức như trên.

Lời giải



Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, vẽ IH vuông góc với AC tại H suy ra $IH = r$.

Ta cần chứng minh được ba bất đẳng thức

$IE + FI > DI; EI + DI > FI; DI + FI > EI$

Thật vậy, trong tam giác vuông IEH có

$$\widehat{EIH} = 90^0 - \widehat{IEH} < 90^0 - \widehat{IEH} + \left(90^0 - \widehat{ECB}\right)$$

$$= 180^0 - \widehat{IEH} - \widehat{ECB} = \widehat{EBC} < \frac{1}{2}.90^0$$

Do đó trong tam giác vuông IEH thì góc $\widehat{EIH}$ nhỏ nhất. Khi đó ta được $EH < IH = r$.

Mặt khác theo định lí Pitago ta có $IE^2 = IH^2 + EH^2$ mà lại có $OH = r; HE < r$ nên suy ra $IE^2 < 2r^2$

Từ đó ta được $r^2 \le IE^2 < 2r^2$. Chứng minh tương tự ta được $r^2 \le ID^2 < 2r^2; r^2 \le IF^2 < 2r^2$

Từ các bất đẳng thức trên ta thu được $DI^2 < EI^2 + FI^2; EI^2 < FI^2 + DI^2; FI^2 < DI^2 + EI^2$

Do đó $IE + FI > DI; EI + DI > FI; DI + FI > EI$ hay DI, EI, FI là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh rằng:

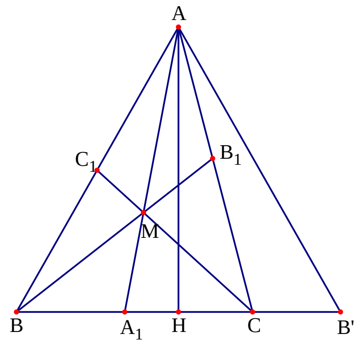
$$MA.BC + MB.CA + MC.AB < 2Max\left\{AB.AC; BC.CA; CA.AB\right\}$$

Phân tích tìm lời giải

Gọi A_1 lần lượt là giao điểm của AM với BC. Khi đó ta thấy $AA_1 < AB = Max\left\{AB; AC\right\}$. Do đó ta được $AA_1.BC < BC.Max\left\{AB; AC\right\} < Max\left\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\right\}$. Từ đó suy ra được bất đẳng thức $MA.BC = \frac{MA}{AA_1}.AA_1.BC < \frac{MA}{AA_1}.Max\left\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\right\}$. Áp dụng hoàn toàn tương tự và chú ý đến một đẳng thức quen thuộc $\frac{MA}{AA_1} + \frac{MB}{BB_1} + \frac{MC}{CC_1} = 2$ ta có điều phải chứng minh.

Lời giải

Gọi $A_1; B_1; C_1$ lần lượt là giao điểm của AM, BM, CM với BC, CA, AB. Tia AM nằm giữa hai tia AB và AC nên A_1 nằm giữa hai điểm B và C. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Giả sử $AB \geq AC$ nên ta được $BC \geq CH$. Gọi B′ là điểm đối xứng với B qua H, suy ra C thuộc đoạn BB′. Mà A_1 thuộc đoạn BB′ nên $A_1H < BH$. Từ đó suy ra



$AA_1 < AB = \text{Max}\{AB; AC\}$

Suy ra $AA_1.BC < BC.\text{Max}\{AB; AC\} = \text{Max}\{AB.BC; AC.BC\} < \text{Max}\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\}$

Đặt $x = \text{Max}\{AB.BC; AC.BC; AB.AC\}$, khi đó ta được $MA.BC = \dfrac{MA}{AA_1}.AA_1.BC < \dfrac{MA}{AA_1}.x$

Hoàn toàn tương tự ta được $MB.CA < \dfrac{MB}{BB_1}.x$; $MC.AB < \dfrac{MC}{CC_1}.x$

Mặt khác ta có $S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} = S_{ABC}$ nên ta được $\dfrac{MA_1}{AA_1} + \dfrac{MB_1}{BB_1} + \dfrac{MC_1}{CC_1} = 1$

Từ đó ta được $\dfrac{MA}{AA_1} + \dfrac{MB}{BB_1} + \dfrac{MC}{CC_1} = 2$. Do đó ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB < 2x$

Vậy ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB < 2\text{Max}\{AB.AC; BC.CA; CA.AB\}$.

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD và một điểm M thuộc miền tứ giác. Chứng minh rằng:

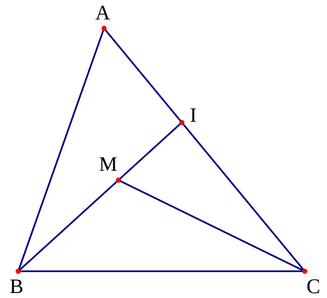
$$MB + MC \leq \text{Max}\{AB + AC;\ DB + DC\}$$

Phân tích tìm lời giải

Với điểm M thuộc miền tứ giác ABCD, khi đó xẩy ra hai trường hợp là M thuộc một cạnh của tứ giác hoặc M thuộc miền trong của tứ giác. Với điểm M thuộc một cạnh của tứ giác, chẳng hạn điểm M thuộc đoạn AD, ta cần chứng minh $MB + MC \leq DB + DC$ hoặc $MB + MC \leq AC + AC$. Với điểm M nằm miền trong tam giác, lấy điểm N trên AD để được $MB + MC \leq NB + NC$ và quy bài toán về chứng minh tương tự như trường hợp thứ nhất.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác, khi đó ta luôn có



$$MB + MC \le AB + AC$$

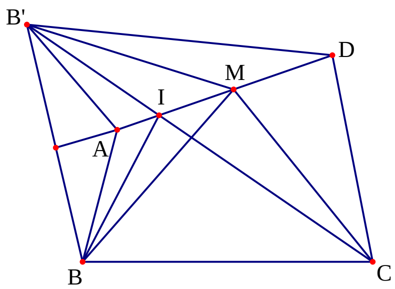
Thật vậy, gọi giao điểm của BM với AC là I khi đó ta có

$$\begin{aligned} AB + AC &= AB + AI + CI \ge BI + CI \\ &= BM + IM + CI \ge BM + CM \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Với điểm M thuộc miền tứ giác ABCD, khi đó xảy ra hai trường hợp là M thuộc một cạnh của tứ giác hoặc M thuộc miền trong của tứ giác. Do đó ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Điểm M thuộc một cạnh của tứ giác, không mất tính tổng quát ta giả sử điểm M nằm trên đoạn thẳng AD. Gọi B′ là điểm đối xứng với điểm B qua AD. Vì hai điểm B, C nằm về một phía so với AD nên B′, C nằm về hai phía so với AD. Suy ra hai đoạn thẳng B′C và AD cắt nhau. Gọi I là giao điểm của B′C với AD.

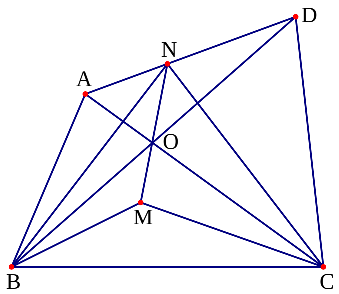


Do M thuộc đoạn AD nên I thuộc tia MA hoặc tia MD.

Khi đó theo bổ đề trên ta được $MB + MC \le DB + DC$ hoặc $MB + MC \le AC + AC$

Từ đó ta được $MB + MC \le \text{Max}\left\{AB + AC;\ DB + DC\right\}$

+ Trường hợp 2: Điểm M thuộc miền trong cả tứ giác. Khi đó gọi O là giao điểm của hai đương chéo thì điểm M thuộc một trong các tam giác OAD, OBC, OCD, ODA. Tùy theo vị trí của điểm M mà ta chọn điểm N trên đoạn AD sao cho theo bổ đề trên ta luôn có $MB + MC \le NB + NC$. Mà theo trường hợp 1 thì ta có $NB + NC \le \text{Max}\left\{AB + AC; DB + DC\right\}$



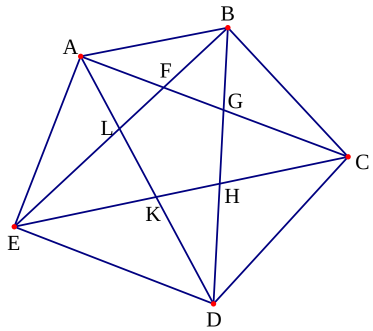
Từ đó ta được $MB + MC \le \text{Max}\left\{AB + AC;\ DB + DC\right\}$

Nếu $AB + AC \ge DB + DC$ thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai điểm A và M trùng nhau

Nếu $AB + AC \le DB + DC$ thì dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm D và M trùng nhau

Ví dụ 5. Chứng minh rằng tổng độ dài các đường chéo của ngũ giác lồi ABCDE lớn hơn chu vi nhưng nhỏ hơn hai lần chu vi của ngũ giác ABCDE.

Lời giải



Gọi p là chu vi của ngũ giác lồi ABCDE, khi đó ta có

$$p = AB + BC + CD + DE + EA$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho các tam giác ABE, ABC, BCD, DEC, EAD ta được

$$BE < AB + AE; AC < AB + BC$$
$$BD < BC + DE; EC < CD + DE$$
$$AD < AE + DE$$

Từ đó suy ra

$$BE + AC + BD + EC + DA < 2(AB + BC + CD + DE + EA)$$

Hay ta được $BE + AC + BD + EC + DA < 2p$

Gọi giao điểm của AC với BE, BG lần lượt là F, G. Gọi giao điểm của AD với EB, EC lần lượt là L, K. Hai đường chéo EC và BD cắt nhau tại H. Khi đó áp dụng bất đẳng thức tam giác cho các tam giác ABF, BCG, CDH, DEK, EAL ta được

$$AB < AF + BF; BC < BG + GC; CD < CH + HD; DE < DK + KE; EA < EL + LA$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} & AB + BC + CD + DE + EA < AF + BF + BG + GC + CH + HD + DK + KE + EL + LA \\ & = (BF + EL) + (AF + CG) + (BG + HD) + (EK + HC) + (AL + DK) \\ & < BE + AC + BD + EC + AD \end{aligned}$$

Hay ta được $p < BE + AC + BD + EC + AD$

Vậy ta được $p < BE + AC + BD + EC + AD < 2p$

Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật ABCD.

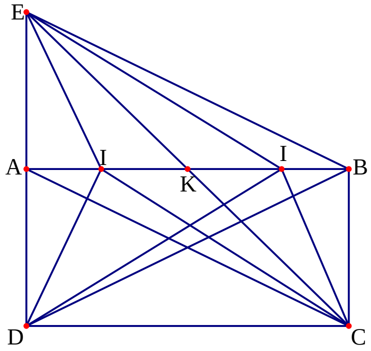
a) Chứng minh rằng nếu điểm I thuộc đoạn AB thì $IC + ID \le AC + AD$, dấu bằng xẩy ra khi nào ?

b) Tìm điểm O nằm bên trong hoặc trên cạnh của hình chữ nhật ABCD thỏa mãn điều kiện tổng $OA + OB + OC + OD$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Đặt

$AB = CD = a; AD = BC = b; AC = BD = d = \sqrt{a^2 + b^2}$



a) Ta chứng minh $IC + ID \le d + b$

Gọi E là điểm đối xứng với D qua A, khi đó tứ giác AEBC là hình bình hành, nên AB và CE cắt nhau tại trung điểm K của mỗi đoạn. Lại có $IE = TD$. Có hai trường hợp xẩy ra

+ Trường hợp điểm I thuộc đoạn AK, khi đó tam giác AEC chứa tam giác IEC nên ta được

$$IC + ID = IC + IE \le AC + AE = AC + AD$$

Từ đó ta được $IC + ID \le AD + AC$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm I và A trùng nhau.

+ Trường hợp điểm I thuộc đoạn KB, khi đó ta giác BEC chứa tam giác IEC nên ta được

$$IC + ID = IC + IE \le BC + BE = AD + AC$$

Từ đó ta được $IC + ID \le AD + AC$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm I và B trùng nhau.

Vậy nếu điểm I thuộc cạnh AB thì ta luôn có $IC + ID \le AD + AC$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi điểm I trùng với A hoặc B.

b) Nếu điểm O trùng với một trong các đỉnh của hình chữ nhật ABCD thì ta được

$$OA + OB + OC + OD = a + b + d$$

Nếu điểm O không trùng với các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, khi đó có hai trường hợp sau:

+ Trường hợp điểm O nằm trên các cạnh của hình chữ nhật ABCD, chẳng hạn O nằm trên cạnh AB và không trùng với A, B. Khi đó ta được

$$OA + OB + OC + OD = AB + OC + OD < AB + AC + AD = a + b + d$$

+ Trường hợp điểm O nằm trong hình chữ nhật ABCD, khi đó qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại M, N. Chứng minh tương tự ta được

$OA + OB < MA + MB; OC + OD < MB + MC$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} OA + OB + OC + OD &< MA + MB + MC + MD = AD + MB + MC \\ &< AD + AB + AC = a + b + d \end{aligned}$$

Vậy $OA + OB + OC + OD$ đạt giá trị lớn nhất bằng $a + b + d$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi điểm O trùng với một trong các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc tam giác. Chứng minh rằng:

$$MA.BC+MB.CA+MC.AB\ge 4S_{ABC}$$

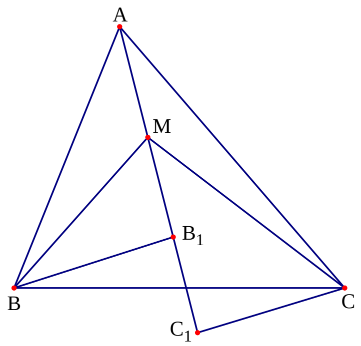
Phân tích tìm lời giải

Do tam giác ABC bất kì nên ta cần xét các trường hợp có thể xẩy ra của tam giác ABC. Với tam giác ABC nhọn hoặc vuông, chú ý là $S_{ABC}=S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCA}$ nên để chứng minh được bài toán ta cần biểu diễn được các tích theo diện tích $MA.BC; MB.CA; MC.AB$ theo diện tích các tam giác MAB, MBC, MCB. Kẻ $BB_1\perp AM, CC_1\perp AM$ thì ta được $S_{ABM}+S_{ACM}=\frac{1}{2}AM\left(BB_1+CC_1\right)\le\frac{1}{2}AM.BC$. Đến đây áp dụng tương tự ta được điều phải chứng minh. Với tam giác ABC tù, chẳng hạn tù tại A thì ta lấy điểm B′ thỏa mãn $AB'\perp AC$, $AB'=AB$ và điểm M nằm trong tam giác AB′C. Khi đó ta cần chứng minh được $MA.BC+MB.CA+MC.AB\ge MA.B'C+MB'.CA+MC.AB'>4S_{AB'C}>4S_{ABC}$.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC không tù



Vẽ đường thẳng $BB_1\perp AM, CC_1\perp AM$. Khi đó ta có

$$S_{ABM}+S_{ACM}=\frac{1}{2}AM.BB_1+\frac{1}{2}AM.CC_1$$
$$=\frac{1}{2}AM\left(BB_1+CC_1\right)\le\frac{1}{2}AM.BC$$

Dấu bằng xảy ra khi khi và chỉ khi $AM\perp BC$

Hoàn toàn tương tự ta được

$S_{BCM}+S_{ABM}\le\frac{1}{2}BM.AC$. Dấu bằng xẩy ra khi $BM\perp AC$

$S_{\Delta BCM}+S_{\Delta ACM}\le\frac{1}{2}CM.AB$. Dấu bằng xảy ra khi $CM\perp AB$

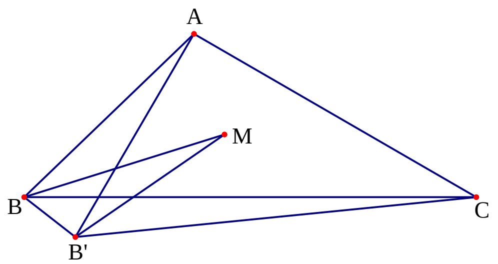
Cộng từng vế của các bất đẳng thức ta được

$$2\left(S_{ABM}+S_{ACM}+S_{BCM}\right)\le\frac{1}{2}\left(MA.BC+MB.AC+MC.AB\right)$$

Hay ta được $MA.BC+MB.AC+MC.AB\ge 4S_{ABC}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM\perp BC, MB\perp AC, MC\perp BC$ hay M là trực tâm của tam giác ABC

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC là tam giác tù. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{A} > 90^0$



Khi đó vẽ $AB' \perp AC$ và $AB' = AB$ như hình vẽ sao cho M nằm trong tam giác AB'C.

Ta có $\widehat{ABB'} = \widehat{AB'B}$ nên $\widehat{MBB'} < \widehat{MB'B}$ suy ra $MB > MB'$

Mà ta có $\widehat{CB'B} > \widehat{CBB'}$ nên ta được $CB > CB'$

Từ đó ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge MA.B'C + MB'.CA + MC.AB'$

Tương tự trường hợp 1, trong tam giác AB'C có

$$MA.B'C + MB'.CA + MC.AB' \ge 4S_{AB'C} = 2AB'.AC = 2AB.AC$$

Từ đó ta được $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge 2AB.AC > 4S_{ABC}$

Vậy ta luôn có $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge 4S_{ABC}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC không tù và M là trực tam tam giác ABC.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC và D là một điểm nằm trên cạnh BC. Trên cạnh AB và AC lấy lần lượt các điểm N và M. Qua M và N kẻ các đường thẳng song song với AD cắt BC tại P và Q.

Chứng minh rằng $S_{MNPQ} \le \max\{S_{ABD}, S_{ACD}\}$

Phân tích tìm lời giải

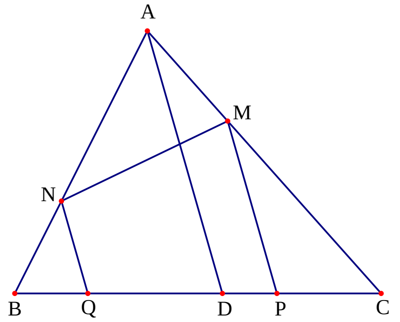
Do M và N nằm trên BC nên ta có $\frac{AM}{AC} = m < 1; \frac{AN}{AB} = n < 1$. Từ đó $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AN.AM}{AB.AC} = m.n$. Chú ý là $S_{MNQP} = S_{ABC} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ}$ nên để chứng minh được bài toán ta đi biểu diễn diện tích các tam giác CMP, BNQ theo m, n. Dễ thấy $\frac{MC}{AC} = \frac{CP}{CD} = 1 - m$ và $\frac{BN}{AB} = \frac{BQ}{BD} = 1 - n$ nên ta tính được $S_{CMP} = (1-m)^2 S_{ACD}$ và $S_{BNQ} = (1-n)^2 S_{BAD}$. Như vậy ta được

$$S_{MNQP} = (2m - mn - m^2)S_{CAD} + (2n - mn - n^2)S_{ABD}$$

Do đó ta được $S_{MNQP} \le \left[(2m - mn - m^2) + (2n - mn - n^2)\right].\max\{S_{CAD}, S_{ABD}\}$. Như vậy để kết thúc chứng minh ta cần chỉ ra được $(2m - mn - m^2) + (2n - mn - n^2) \le 1$.

Lời giải

Do M và N nằm trên BC nên ta có



$\frac{AM}{AC} = m < 1; \ \frac{AN}{AB} = n < 1$

Ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AN.AM}{AB.AC} = m.n$ nên ta được

$S_{AMN} = m.n.S_{ABC}$

Do MP//AD nên ta có

$\frac{MC}{AC} = \frac{CP}{CD} = \frac{AC - MC}{AC} = 1 - m$

Tương tự ta có $\frac{BN}{AB} = \frac{BQ}{BD} = 1 - n$

Do đó ta được $S_{BNQ} = \frac{BN.BQ}{BD.BA}.S_{BAD}; \ S_{CMP} = \frac{CM.CP}{AC.DC}.S_{CAD}$

Nên ta được $S_{CMP} = \left(1 - m\right)^2 S_{ACD}$ và $S_{BNQ} = \left(1 - n\right)^2 S_{BAD}$

Từ đó ta được $S_{MNQP} = S_{ABC} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ} = S_{ACD} + S_{BAD} - S_{AMN} - S_{CMP} - S_{BNQ}$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{MNQP} &= \left[\left(1 - mn\right) - \left(1 - m\right)^2\right] S_{CAD} + \left[\left(1 - mn\right) - \left(1 - n\right)^2\right] S_{ABD} \\ &= \left(2m - mn - m^2\right) S_{CAD} + \left(2n - mn - n^2\right) S_{ABD} \end{aligned}$$

Do $2m - mn - m^2; \ 2n - mn - n^2$ là các số dương nên ta được

$$\begin{aligned} S_{MNQP} &\le \left[\left(2m - mn - m^2\right) + \left(2n - mn - n^2\right)\right].\max\left\{S_{CAD}, S_{ABD}\right\} \\ &= \left[1 - \left(m + n - 1\right)^2\right].\max\left\{S_{CAD}, S_{ABD}\right\} \le \max\left\{S_{CAD}, S_{ABD}\right\} \end{aligned}$$

Do $S_{MNPQ} = \max\left\{S_{ABD}, S_{ACD}\right\}$ nên ta được $S_{ABD} = S_{ACD}$ và $m + n = 1$

Suy ra ta được $CD = BD$ và $\frac{AM}{AC} + \frac{AN}{AB} = 1$.

Ví dụ 9. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \ge 2\sqrt{3}S_{ABCD} + \frac{AC^2 - BD^2}{2}$

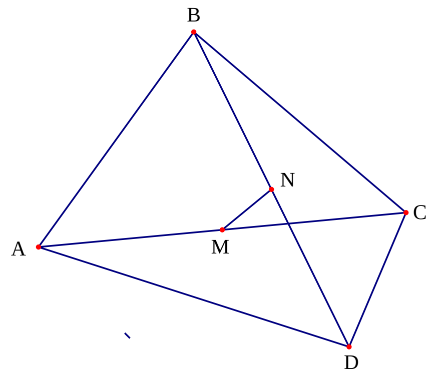
Phân tích tìm lời giải

Giả sử trong tứ giác ABCD ta lấy M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó theo công thức về đường trung tuyến cho các tam giác ABC, ADC, MBD ta được $4BM^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right) - AC^2$, $4DM^2 = 2\left(AD^2 + DC^2\right) - AC^2$ và $4MN^2 = 2\left(BM^2 + DM^2\right) - BD^2$. Từ đó ta thu được đẳng thức $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$. Như vậy để chứng minh bất đẳng thức của bài toán ta cần chỉ ra được $AC^2+BD^2+4MN^2\ge\sqrt{3}.S_{ABCD}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$. Chú ý đến $S_{ABCD}\le\dfrac{1}{2}AC.BD$ và $AC^2+BD^2+4MN^2\ge AC^2+BD^2$. Kết hợp hai bất đẳng thức trên với đánh giá sau

$$AC^2+BD^2=\frac{AC^2}{2}+\frac{3BD^2}{2}+\frac{AC^2-BD^2}{2}\ge\sqrt{3}AC.BD+\frac{AC^2-BD^2}{2}$$

Đến đây thì bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải



Giả sử trong tứ giác ABCD ta lấy M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó áp dụng tính chất đường trung tuyến ta có: Trong tam giác ABC có BM là đường trung tuyến nên $4BM^2=2\left(AB^2+BC^2\right)-AC^2$ và trong tam giác ADC có DM là đường trung tuyến nên

$4DM^2=2\left(AD^2+DC^2\right)-AC^2$

Do đó ta được

$$4BM^2+4DM^2=2\left(AB^2+BC^2+AD^2+DC^2\right)-2AC^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(BM^2+DM^2\right)=AB^2+BC^2+AD^2+DC^2-AC^2$$

Trong tam giác MBD có MN là đường trung tuyến nên $4MN^2=2\left(BM^2+DM^2\right)-BD^2$

Do đó ta được $4MN^2=2\left(BM^2+DM^2\right)-BD^2=AB^2+BC^2+AD^2+DC^2-AC^2-BD^2$

Hay $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

Khi đó ta được $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2\ge AC^2+BD^2$

Mà ta có $AC^2+BD^2=\dfrac{AC^2}{2}+\dfrac{3BD^2}{2}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}\ge\sqrt{3}AC.BD+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$

Lại có $S_{ABCD}\le\dfrac{1}{2}AC.BD$ nên ta được $AC^2+BD^2\ge 2\sqrt{3}S_{ABCD}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$

Từ đó suy ra $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\ge 2\sqrt{3}S_{ABCD}+\dfrac{AC^2-BD^2}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} M \equiv N \\ AC = \sqrt{3}BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình thoi có

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{C} = 60^0 \\ \widehat{B} = \widehat{D} = 120^0 \end{cases}$$

Nhận xét:

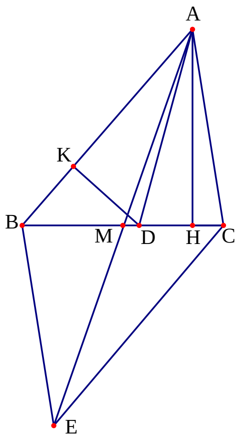
+ *Ta có thể sử dụng bất đẳng thức* $2MN \ge |AB - CD|$; $2MN \ge |AD - BC|$

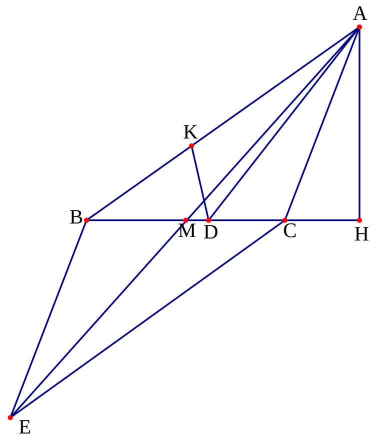
Khi đó ta có bất đẳng thức mạnh hơn là $(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 \ge 3\sqrt{3}S_{ABCD} + AC^2 - BD^2$

+ *Ngoài ra nếu sử dụng bất đẳng thức trong tam giác* $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}.S$ *cũng cho ta kết quả cần chứng minh.*

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Đặt $AB = c; BC = a; CA = b$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC và $l_a; m_a$ lần lượt là đường phân giác và đường trung tuyến hạ từ đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $p - a < l_a < m_a < \frac{1}{2}(b + c)$

Lời giải





Kéo dài AM lấy điểm E sao cho $ME = MA$, khi đó dễ dàng chứng minh được $\Delta AMC = \Delta EMB$

Từ đó ta được $AC = BE \Rightarrow 2AM = AE$

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $AE < AB + BE = AB + AC = b + c$ nên ta được $AM < \frac{b + c}{2}$.

Lại có $AB < AD + BD$ và $AC < AD + DC$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $AB + AC < 2AD + BC \Rightarrow AB + AC - BC < 2AD$

Nên ta được $AD > \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{b + c - a}{2} = p - a$ hay $l_a > p - a$.

Hạ AH vuông góc với BC tại H. Do $AB > AC$ nên ta được $BH > CH$ suy ra $BM < BH$ hay điểm M thuộc đoạn BH. Lại từ $AB > AC$ ta được $\widehat{ADB} > \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{ADB} > 90^0$ nên điểm D thuộc đoạn BH.

Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $AK = AC$, từ đó ta được $\Delta ADC = \Delta ADK$

Từ đó suy ra $DC = DK$ và $\widehat{ACD} = \widehat{AKD}$.

+ Nếu $\widehat{ACB} \le 90^0$ thì ta được $\widehat{AKD} \le 90^0$ nên $\widehat{BKD} \ge 90^0 \ge \widehat{ACB} > \widehat{KBD}$

Từ đó suy ra $BD > KD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH$ nên $AM > AD$

+ Nếu $\widehat{ACB} > 90^0$ thì ta được $\widehat{AKD} > 90^0$ nên $\widehat{BKD} = \widehat{ACH} > \widehat{ADC} > \widehat{ABC}$

Từ đó suy ra $BD > KD = CD \Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH < DH$ nên $AM > AD$

Vậy ta luôn có $AM > AD$ hay $m_a > l_a$

Kết hợp các kết quả trên ta được $p - a < l_a < m_a < \frac{1}{2}(b + c)$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có m_a, l_b, l_c và p theo thứ tự là độ dài đường trung tuyến hạ từ đỉnh A, độ dài đường phân giác trong hạ tứ đỉnh B, C và nửa chu vi của tam giác. Chứng minh rằng $m_a + l_b + l_c \le p\sqrt{3}$

Phân tích tìm lời giải

Bất đẳng thức liên quan đến $m_a; l_b; l_c$ và p nên ta sẽ biểu diễn $m_a; l_b; l_c$ theo p.

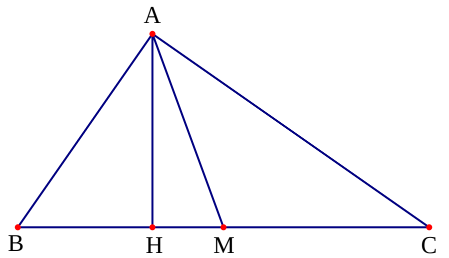
Theo công thức về đường phân giác ta có $l_b = \dfrac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c + a} \le \sqrt{ca}.\cos\frac{B}{2} \Rightarrow l_b^2 \le ac.\cos^2\frac{B}{2}$, chú ý là $\cos^2\frac{B}{2} = \dfrac{1 + \cos B}{2}$ và $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ nên $l_b^2 \le \dfrac{ac}{2}\left(1 + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right) = p(p - b)$. Theo công thức đường trung tuyến ta có $4m_a^2 = \left(b + c + \sqrt{(p - b)(p - c)}\right)\left(b + c - \sqrt{(p - b)(p - c)}\right) \le 2p\left[2p - \left(\sqrt{p - a} - \sqrt{p - b}\right)^2\right]$. Từ đó ta được $\sqrt{p(p - b)} + \sqrt{p(p - c)} \le \sqrt{2(p^2 - m_a^2)}$ hay $l_b + l_c \le \sqrt{2(p^2 - m_a^2)}$. Đến đây bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $m_a + \sqrt{2(p^2 - m_a^2)} \le p\sqrt{3}$.

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề:

Với mọi $0 < \alpha < 45^0$ ta luôn có

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$



Thật vậy, xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = \alpha$ và đường cao AH, đường trung tuyến

AM. Trong tam giác AHM có

$\widehat{AHM}=90^0;\widehat{AMH}=2\alpha \quad \cos 2\alpha=\dfrac{HM}{AM}$

Do đó $1+\cos 2\alpha=1+\dfrac{HM}{AM}=\dfrac{AM+HM}{AM}=\dfrac{CM+HM}{AM}=\dfrac{HC}{AM}$

Ta có $2\cos^2\alpha=\left(\dfrac{CH}{AC}\right)^2=\dfrac{2CH^2}{BC.CH}=\dfrac{2CH}{BC}=\dfrac{2CH}{2AM}=\dfrac{CH}{AM}$

Từ đó ta được $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Đặt $AB=c;\ BC=a;\ CA=b$, khi đó theo công thức về đường phân giác ta có

$$l_b=\frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}\le\sqrt{ca}.\cos\frac{B}{2}\Rightarrow l_b^2\le ac.\cos^2\frac{B}{2}$$

Áp dụng bổ đề trên ta có $\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{1+\cos B}{2}$, từ đó ta được $l_b^2\le ac\left(\dfrac{1+\cos B}{2}\right)$

Mà theo công thức về đường trung tuyến ta có $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Suy ra $l_b^2\le\dfrac{ac}{2}\left(1+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)=p(p-b)\Rightarrow l_b\le\sqrt{p(p-a)}$. Tương tự ta có $l_c\le\sqrt{p(p-c)}$

Cũng theo công thức về đường trung tuyến ta có

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2=(b+c)^2-\left[a^2-(b-c)^2\right]$$
$$=\left(b+c+\sqrt{(p-b)(p-c)}\right)\left(b+c-\sqrt{(p-b)(p-c)}\right)$$

Mặt khác ta lại có

$$b+c+2\sqrt{(p-b)(p-c)}\le b+c+2p-b-c=2p$$
$$b+c-2\sqrt{(p-b)(p-c)}=2p-\left(\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2$$

Do đó ta được $4m_a^2\le 2p\left[2p-\left(\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}\right)^2\right]\Rightarrow\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\le\sqrt{2\left(p^2-m_a^2\right)}$

Suy ra $l_b+l_c\le\sqrt{2\left(p^2-m_a^2\right)}$

Do đó ta được $m_a+l_b+l_c\le m_a+\sqrt{2\left(p^2-m_a^2\right)}\le\sqrt{(1+2)\left(m_a^2+p^2-m_a^2\right)}=p\sqrt{3}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 12. Cho tam giác nhọn ABC có h_a,h_b,h_c và l_a,l_b,l_c tương ứng là các đường cao và đường phân giác hạ từ đỉnh A, B, C. Gọi r và R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{h_a}{l_a}-\sin\dfrac{A}{2}\right)\left(\dfrac{h_b}{l_b}-\sin\dfrac{B}{2}\right)\left(\dfrac{h_c}{l_c}-\sin\dfrac{C}{2}\right)\le\dfrac{r}{4R}$

Phân tích tìm lời giải

Để chứng minh bất đẳng thức trên, ta đi tìm mối liên hệ của $\frac{h_a}{l_a}-\sin\frac{A}{2}$ với các cạnh của tam giác ABC. Để ý đến tam giác ABC ta được

$S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h_a;\ S_{ABA'}=\frac{1}{2}b.l_a.\sin\frac{A}{2};\ S_{ACA'}=\frac{1}{2}c.l_a.\sin\frac{A}{2}$. Khi đó ta được

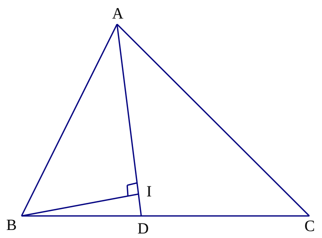
$\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}(b+c)l_a.\sin\frac{A}{2}\Rightarrow\frac{h_a}{l_a}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$. Từ đó $\frac{h_a}{l_a}-\sin\frac{A}{2}=\frac{2(p-a)}{a}.\sin\frac{A}{2}$. Từ đó

$\left(\frac{h_a}{l_a}-\sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b}-\sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c}-\sin\frac{C}{2}\right)\le\frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Để làm xuất hiện R và r ta chú ý đến các công thức $S_{ABC}=\frac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Đến đây ta quy bài toán về chứng minh $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$, đây là một bất đẳng thức quen thuộc và ta xem như một bổ đề.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Trong tam giác nhọn ABC ta luôn có $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

Thật vậy, vẽ đường phân giác AD ta có $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{BD+CD}{AB+AC}=\frac{BC}{AB+AC}$.



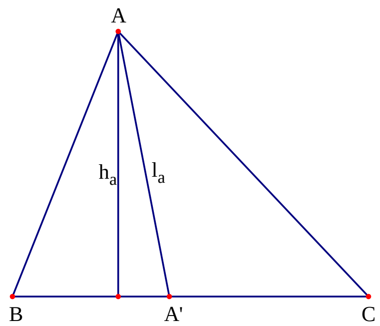
Vẽ $BI\perp BC\Rightarrow BI\le BD$. Tam giác ABI có

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{BI}{AB}\le\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{AB+AC}\le\frac{BC}{2\sqrt{AB.AC}}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\sin\frac{B}{2}\le\frac{AC}{2\sqrt{AB.BC}};\ \sin\frac{C}{2}\le\frac{AB}{2\sqrt{AC.BC}}$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$



Gọi AA′ là đường phân giác hạ từ đỉnh A, gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC. Đặt

$AB=c;\ BC=a;\ CA=b$

Ta có $S_{ABC}=S_{ABA'}+S_{ACA'}$ mà ta lại có

$S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h_a;\ S_{ABA'}=\frac{1}{2}b.l_a.\sin\frac{A}{2};\ S_{ACA'}=\frac{1}{2}c.l_a.\sin\frac{A}{2}$

Do đó $\frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}(b+c)l_a.\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{h_a}{l_a} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$

Suy ra $\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2} = \left(\frac{b+c}{a} - 1\right)\sin\frac{A}{2} = \frac{b+c-a}{a}.\sin\frac{A}{2} = \frac{2(p-a)}{a}.\sin\frac{A}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2} = \frac{2(p-b)}{b}.\sin\frac{B}{2}; \frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2} = \frac{2(p-c)}{c}.\sin\frac{C}{2}$

Do đó ta được

$$\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2}\right) = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Mà theo bổ đề $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ và theo các công thức về diện tích là $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$

Và công thức Heron $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ta được

$$\frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{S}{4Rp} = \frac{r}{4R}$$

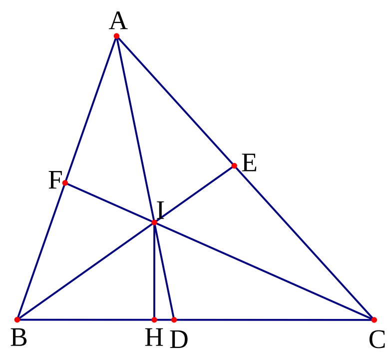
Do đó ta được $\left(\frac{h_a}{l_a} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h_b}{l_b} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{h_c}{l_c} - \sin\frac{C}{2}\right) \le \frac{r}{4R}$

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Gọi r là bán kính kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AK + BK + CK \ge 6r$.

Phân tích tìm lời giải

Theo tính chất đường phân giác ta được $CD.c = b(BC - CD) \Rightarrow CD = \frac{a.b}{b+c}$. Mà CI là đường phân giác của tam giác ADC nên $\frac{AI}{DI} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD}$. Từ đó $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$ nên $AI = ID.\frac{b+c}{a}$. Chú ý rằng $ID \ge IH = r$ nên áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \ge 6$.

Lời giải



Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$. Áp dụng tính chất đường phân giác ta được $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BC - CD} = \frac{b}{c}$, do đó ta được

$$CD.c = b(BC - CD) \Rightarrow CD = \frac{a.b}{b+c}$$

Mặt khác ta có CI là đường phân giác của tam giác ADC nên $\frac{AI}{DI} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD}$. Từ đó $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$ nên

$AI = ID.\frac{b+c}{a}$

Gọi H là hình chiếu của I trên BC khi đó ta có

$ID \ge IH = r$

Do đó ta được $AI = ID.\frac{b+c}{a} \ge r.\frac{b+c}{a}$. Tương tự ta chứng minh được

$BI \ge r.\frac{a+c}{b}; CI \ge r.\frac{a+b}{c}$

Từ đó ta được $AI + BI + CI \ge r\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$

Mà ta có $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \ge 6$

Do đó ta được $AK + BK + CK \ge 6r$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:

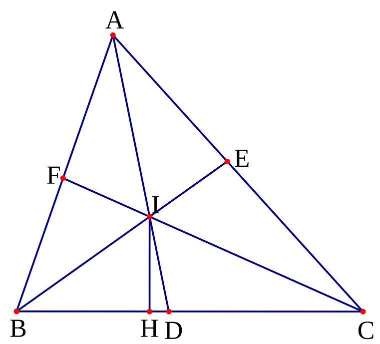
$$\sqrt{\frac{DI}{AI}} + \sqrt{\frac{EI}{BI}} + \sqrt{\frac{FI}{CI}} > 2$$

Lời giải

Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$. Áp dụng tính chất đường phân giác ta được

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BC - CD} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow CD.c = b(BC - CD) \Rightarrow CD = \frac{a.b}{b+c}$$



Mặt khác ta có CI là đường phân giác của tam giác ADC nên $\frac{AI}{DI} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD}$. Từ đó $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$

hay $\frac{DI}{AI} = \frac{a}{b+c}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{EI}{BI} = \frac{b}{c+a}; \frac{FI}{CI} = \frac{c}{a+b}$

Khi đó ta được $\sqrt{\frac{DI}{AI}} + \sqrt{\frac{EI}{BI}} + \sqrt{\frac{FI}{CI}} = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+c}}$

Ta cần chứng minh được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+c}} > 2$

Thật vậy, vì a là độ dài cạnh tam giác nên a là số thực dương, do đó $\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ ta được $\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}\ge\frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge\frac{2b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2c}{a+b+c}$

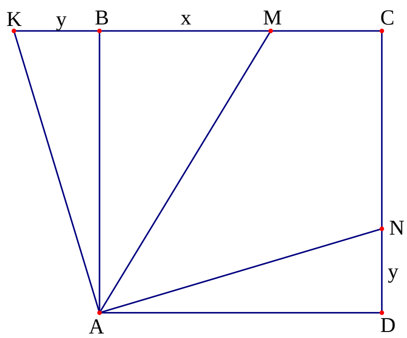
Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge 2$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$, điều này trái với giả thiết a, b, c là các cạnh của tam giác. Do vậy đẳng thức không xẩy ra.

Tức là ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$. Vậy ta được $\sqrt{\frac{DI}{AI}}+\sqrt{\frac{EI}{BI}}+\sqrt{\frac{FI}{CI}}>2$.

Ví dụ 15. Cho hình vuông ABCD có cạnh a và hai điểm M, N thay đổi lần lượt trên BC, CD sao cho góc $\widehat{MAN}=45^0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Lời giải



Đặt $BM=x;\ DN=y\left(0\le x;y\le a\right)$.

Khi đó ta có $S_{AMN}=S_{ABCD}-\left(S_{ABM}+S_{ADN}+S_{CMN}\right)$

Hay ta được

$$S_{AMN}=a^2-\frac{1}{2}\left[ax+ay+(a-x)(a-y)\right]=\frac{1}{2}\left(a^2-xy\right)$$

Trên tia đối của tia BM lấy điểm K sao cho $BK=y$, khi đó ta được $\Delta ABK=\Delta ADN$. Từ đó $AN=AK$ và $\widehat{BAK}=\widehat{DAN}$.

Để ý là $\widehat{BAM}+\widehat{DAN}=45^0$ nên ta được $\widehat{BAK}+\widehat{BAM}=\widehat{KAM}=45^0$. Dễ thấy $\Delta AKM=\Delta AMN$ nên ta được $MN=MK=x+y$. Mặt khác từ tam giác vuông CMN có $MN^2=(a-x)^2+(a-y)^2$

Từ đó suy ra $(x+y)^2=a^2-2ax+x^2+a^2-2ay+y^2\Leftrightarrow xy=a^2-a(x+y)\Leftrightarrow a(x+y)=a^2-xy$

Do vậy $S_{AMN}=\frac{1}{2}a(x+y)=\frac{1}{2}at$ với $t=x+y$. Đến đây ta nhận thấy nếu t lớn nhất thì diện tích tam giác AMN lớn nhất và ngược lại. Như vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của t.

Để ý là ta đang có $x+y=a$ và $x.y=a^2-at$. Khi đó thaeo hệ thức Vi – et ta có x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2-tX+a^2-at=0$. Để phương trình trên có hai nghiệm x, y ta cần có

$$\Delta=t^2-4\left(a^2-at\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(t+2a\right)^2-8a^2\ge 0\Leftrightarrow t+2a\ge 2\sqrt{2}a\Leftrightarrow t\ge 2a\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Khi $t=2a\left(\sqrt{2}-1\right)$ thì phương trình bậc hai có nghiệm kép

$$X_1=X_2=\frac{t}{2}=\frac{2a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=a\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Điều này có nghĩa là $x=y=a\left(\sqrt{2}-1\right)$ và $\text{Min}t=2a\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Vậy ta được $\text{Min}_{S_{AMN}}=\frac{1}{2}a.2a\left(\sqrt{2}-1\right)=a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Lại có $xy=a^2-at\Leftrightarrow at=a^2-xy$ nên suy ra $at\le a^2\Rightarrow t\le a$

Điều này có nghĩa là $\text{Max}t=a$, khi đó $\text{Max}_{S_{AMN}}=\frac{1}{2}a.a=\frac{a^2}{2}$

Trong trường hợp này ta được $x=a;\ y=0$ hoặc $x=0;\ y=a$ hay $M\equiv B;N\equiv C$ hoặc $M\equiv C;N\equiv D$

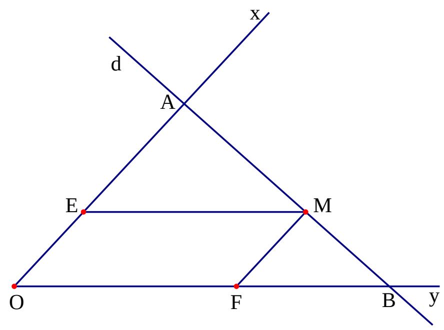
Ví dụ 16. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Đường thẳng d quaM cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm vị trí của đường thẳng d để:

a) Diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tổng $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Do $\widehat{xOy}$ không đổi và $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{xOy}$ nên diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi tích OA.OB đạt giá trị nhỏ nhất. Qua M kẻ các đường thẳng song song với Oy, Ox cắt Ox, Oy lần lượt tại E và F.



Khi đó các điểm E và F cố định và $\frac{OE}{OA}+\frac{OF}{OB}=1$.

Từ đó ta được $1=\left(\frac{OE}{OA}+\frac{OF}{OB}\right)^2\ge 4\frac{OE}{OA}.\frac{OF}{OB}$.

Suy ta $OA.OB\ge 4OE.OF$ không đổi. Dấu bằng xẩy ra khi $\frac{OE}{OA}=\frac{OF}{OB}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}OA=2OE\\OB=2OF\end{cases}\Leftrightarrow$ đường thẳng d đi qua M và A thỏa mãn điều kiện $OA=2OE;\ OB=2OF$. Vậy khi đường thẳng d đi qua M và A thỏa mãn điều kiện $OA = 2OE; OB = 2OF$ thì diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cũng từ $\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB} = 1$ ta được $OA + OB = (OA + OB)\left(\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB}\right) \geq OE + OF + 2\sqrt{OE.OF}$

Hay ta được $OA + OB \geq OE + OF + 2\sqrt{OE.OF} = \left(\sqrt{OE} + \sqrt{OF}\right)^2$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{OB}{OA}.OE = \frac{OA}{OB}.OF \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{OE}{OF}}$

Để ý là từ $\frac{OE}{OA} + \frac{OF}{OB} = 1$ ta được $\frac{OF}{OB} = \frac{OA - OE}{OA} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA - OE}{OF}$

Từ $\frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{OE}{OF}}$ ta được $\frac{OA - OE}{OF} = \sqrt{\frac{OE}{OF}} \Leftrightarrow OA = OE + \sqrt{OE.OF}$. Khi đó $OB = OF + \sqrt{OE.OF}$

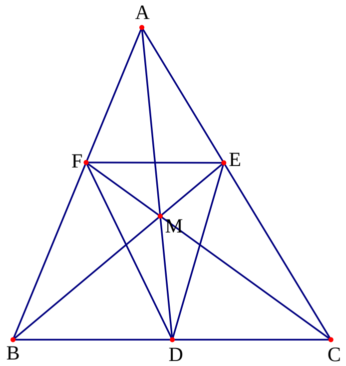
Vậy tổng $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\left(\sqrt{OE} + \sqrt{OF}\right)^2$ khi đường thẳng d đi qua M và A thỏa mãn điều kiện $OA = OE + \sqrt{OE.OF}$.

Ví dụ 17. Cho tam giác nhọn ABC và một điểm M nằm trong tam giác. Tia AM, BM, CM cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $S_{DEF} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$.

Phân tích tìm lời giải

Đặt $x = \frac{EA}{EC}; y = \frac{DC}{DB}; z = \frac{BF}{AF}$ với $x; y; z > 0$. Chú ý là $S_{DEF} = S_{ABC} - \left(S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE}\right)$ nên để chứng minh $S_{DEF} \leq \frac{1}{4}S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}$, trước hết ta đi biểu diễn diện tích các tam giác AEF, BDF, CDE theo x, y, z. Ta có $\frac{S_{EAF}}{S_{ABC}} = \frac{x}{(x+1)(z+1)}; \frac{S_{CED}}{S_{ABC}} = \frac{y}{(y+1)(x+1)}; \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \frac{z}{(z+1)(y+1)}$. Khi đó ta được $\frac{S_{AEF} + S_{ECD} + S_{BDF}}{S_{ABC}} = \frac{x(y+1) + y(z+1) + z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$. Do AD, BE, CF đồng quy tại M nên theo định lí Ceva nên $xyz = 1$ và bất đẳng thức $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 8$. Khi đó biến đổi đồng nhất biểu thức trên ta được $\frac{S_{AEF} + S_{ECD} + S_{BDF}}{S_{ABC}} \geq \frac{3}{4}$. Đến đây thì bài toán xem như được chứng minh.

Lời giải



Đặt $x=\frac{EA}{EC};\ y=\frac{DC}{DB};\ z=\frac{BF}{AF}$ với $x;y;z>0$

Khi đó ta được

$$\frac{EA}{EC}=x\Rightarrow\frac{EA}{EA+EC}=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\frac{EA}{AC}=\frac{x}{x+1}$$

Do đó ta tính được $\frac{EC}{AC}=1-\frac{EA}{CA}\Rightarrow\frac{EC}{CA}=\frac{1}{x+1}$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\frac{DC}{BC}=\frac{y}{y+1};\ \frac{DB}{BC}=\frac{1}{y+1};\ \frac{FB}{AB}=\frac{z}{z+1};\ \frac{FA}{AB}=\frac{1}{z+1}$$

Do AD, BE, CF đồng quy tại M nên theo định lí Ceva ta thu được $\frac{EA}{EC}.\frac{DC}{DB}.\frac{FB}{FA}=1$ hay $xyz=1$.

Ta ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$ và $S_{EAF}=\frac{1}{2}EA.FA.\sin\widehat{EAF}$

Do đó suy ra $\frac{S_{EAF}}{S_{ABC}}=\frac{AF}{AB}.\frac{AE}{AC}=\frac{1}{z+1}.\frac{x}{x+1}=\frac{x}{(x+1)(z+1)}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\frac{y}{(y+1)(x+1)};\ \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{z}{(z+1)(y+1)}$. Do đó ta được

$$\frac{S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{x}{(x+1)(z+1)}+\frac{y}{(y+1)(x+1)}+\frac{z}{(z+1)(y+1)}$$
$$=\frac{x(y+1)+y(z+1)+z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Để ý đến $xyz=1$ ta có biến đổi như sau

$$\frac{x(y+1)+y(z+1)+z(x+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-2}{(x+1)(y+1)(z+1)}=1-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $(x+1)(y+1)(z+1)\ge 8$

Từ đó ta được $\frac{S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF}}{S_{ABC}}=1-\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge 1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

Mà ta có $S_{DEF}=S_{ABC}-(S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF})\Rightarrow\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=1-\frac{S_{AEF}+S_{ECD}+S_{BDF}}{S_{ABC}}$

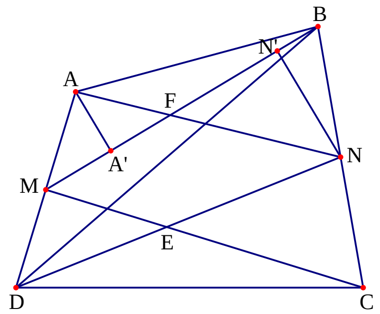
Từ đó suy ra $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}\le 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ hay ta được $S_{DEF}\le\frac{1}{4}S_{ABC}$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay M là trọng tâm tam giác ABC.

Ví dụ 18. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Gọi giao điểm của CM và DN là E, giao điểm của BM và AN là F. Chứng minh rằng $\frac{AF}{NF}+\frac{BF}{MF}+\frac{CE}{ME}+\frac{DE}{NE}\ge 4$.

Lời giải

Do M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC nên ta được



$$S_{BMD}=\frac{1}{2}S_{BAD} \text{ và } S_{BND}=\frac{1}{2}S_{BCD}$$

Do đó $S_{BMD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}\left(S_{BAD}+S_{BCD}\right)$ nên

$S_{BNDM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Hoàn toàn tương tự ta được $S_{ANCM}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Từ đó suy ra $S_{ANCM}+S_{BNCM}=S_{ABCD}$ nên ta được

$$S_{MFNE}+S_{ANCD}-\left(S_{ABF}+S_{DCE}\right)=S_{ANCD}\Rightarrow S_{MFNE}=S_{ABF}+S_{DCE}\Rightarrow S_{ABN}+S_{DCN}=S_{MBC}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $S_{ABM}+S_{DCM}=S_{MAD}$

Vẽ $AA'\perp MB;\ NN'\perp MB\left(A'\in MB; N'\in MB\right)$, do đó AA'//NN'

Từ đó ta được $\frac{AA'}{NN'}=\frac{AF}{NF}$. Mà ta có $\frac{AA'}{NN'}=\frac{S_{MAB}}{S_{BMN}}=\frac{2S_{MAB}}{S_{MBC}}$ nên $\frac{AF}{NF}=\frac{2S_{MAB}}{S_{MBC}}$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $\frac{BF}{MF}=\frac{2S_{NAB}}{S_{MBC}};\ \frac{CE}{ME}=\frac{2S_{NDC}}{S_{NAD}};\ \frac{DE}{NE}=\frac{2S_{MDC}}{S_{MBC}}$. Do đó ta suy ra

$$\frac{AF}{NF}+\frac{BF}{MF}+\frac{CE}{ME}+\frac{DE}{NE}=\frac{2S_{MAB}}{S_{MBC}}+\frac{2S_{NAB}}{S_{MBC}}+\frac{2S_{NDC}}{S_{NAD}}+\frac{2S_{MDC}}{S_{MBC}}$$

$$=2\left(\frac{S_{MAB}+S_{MCD}}{S_{MBC}}+\frac{S_{NAB}+S_{NCD}}{S_{NAD}}\right)=2\left(\frac{S_{NAD}}{S_{MBC}}+\frac{S_{MBC}}{S_{NAD}}\right)\ge 4$$

Hay ta được $\frac{AF}{NF}+\frac{BF}{MF}+\frac{CE}{ME}+\frac{DE}{NE}\ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S_{MBC}=S_{NAD}$.

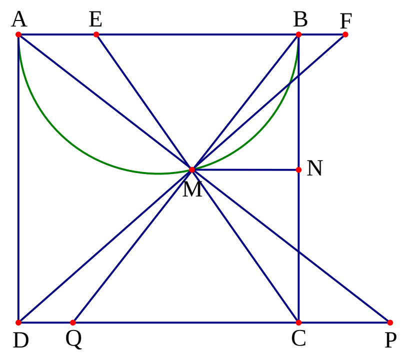
Ví dụ 19. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB<BC$. Vẽ nửa đường tròn đường kính AB trên nửa mặt phẳng chứa CD có bờ là đường thẳng AB. Gọi M là điểm bất kì trên nửa đường tròn $\left(M\ne A,B\right)$. Các đường thẳng MA và MB cắt CD lần lượt tại P và Q. Các đường thẳng MC, MD cắt đường thẳng AB lần lượt tại E và F.

Xác định ví trí của M để $PQ+EF$ có giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Phân tích tìm lời giải

Để tính được giá trị nhỏ nhất của $PQ+EF$ ta đi tính PQ và EF theo các cạnh của hình chữ nhật. Vẽ MN vuông góc với BC, khi đó ta tính được $PQ=\frac{AB.CN}{BN}=\frac{a.CN}{BN}$ và $EF=\frac{CD.BN}{CN}=\frac{a.BN}{CN}$ do đó ta được $PQ+EF=a\left(\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}\right)$. Như vậy ta cần tìm được giá nhỏ nhất của $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}$. Chú ý bài toán cho $AB<BC$ và M thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $BN<\frac{BC}{2};CN>\frac{BC}{2}$ do đó ta không thể sử dụng bất đẳng thức $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}\ge 2$ được. Từ đó một suy nghĩ rất tự nhiên đó là biểu diễn BN, CN theo AB, BC. Đặt $AB=CD=a,\ BC=b\left(a<b\right)$. Khi đó ta được $NB\le\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$ và $CN\ge\frac{2b-a}{2}$. Ta có biến đổi $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}=\frac{b^2}{CN.BN}-2$ nên $1-\frac{4}{S+2}=\frac{\left(CN-BN\right)^2}{b^2}$, suy ra $S\ge\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2}$. Từ đó ta được $EF+PQ\ge\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2b-a}$. Đến đây bài toán được giải quyết xong.

Lời giải



Đặt $AB=CD=a,\ BC=b\left(a<b\right)$. Kẻ $MN\perp BC\left(N\in BC\right)$, khi đó theo định lí Talet ta có

$$\frac{PQ}{AB}=\frac{QM}{BM}=\frac{CN}{BN} \text{ và } \frac{EF}{CD}=\frac{EM}{MC}=\frac{BN}{CN}$$

Suy ra $PQ=\frac{AB.CN}{BN}=\frac{a.CN}{BN}$ và

$EF=\frac{CD.BN}{CN}=\frac{a.BN}{CN}$

Do đó ta được $PQ+EF=a\left(\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}\right)$

Đặt $S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}$, khi đó

$$S=\frac{CN}{BN}+\frac{BN}{CN}=\frac{CN^2+BN^2}{CN.BN}=\frac{\left(CN+BN\right)^2-2CN.BN}{CN.BN}=\frac{b^2}{CN.BN}-2$$

Do đó ta được $\frac{1}{S+2}=\frac{CN.BN}{b^2}$ nên ta được $1-\frac{4}{S+2}=\frac{\left(CN+BN\right)^2-4CN.BN}{b^2}=\frac{\left(CN-BN\right)^2}{b^2}$

Do M nằm trên đường tròn đường kính AB nên ta được $NB\le\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$, suy ra $CN\ge\frac{2b-a}{2}$

Do đó ta được $1-\frac{4}{S+2}\ge\frac{\left(b-a\right)^2}{b^2}\Rightarrow\frac{4}{S+2}\le\frac{2ab-a^2}{b^2}$, nên ta có $S\ge\frac{4b^2-4ab+2a^2}{2ab-a^2}$.

Từ đó ta suy ra $EF + PQ \ge \dfrac{4b^2 - 4ab + 2a^2}{2b - a}$, đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $NB = \dfrac{a}{2}$ hay M nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

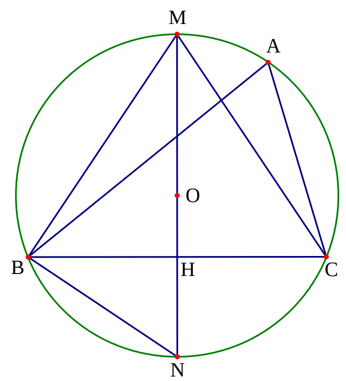
Vậy giá trị nhỏ nhất của $PQ + EF$ là $\dfrac{4b^2 - 4ab + 2a^2}{2b - a}$, xảy ra khi M nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 20. Trong các tam giác nội tiếp đường tròn (O; R) cho trước, tìm tam giác có chu vi lớn nhất.

Phân tích tìm lời giải

Từ nhận đó ta dựng tam giác MBC cân tại M và kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Khi đó ta chứng minh được $p \le p_1$ và $p_1^2 = (MB + BH)^2 \le 3\left(\dfrac{MB^2}{4} + \dfrac{MB^2}{4} + BH^2\right) = 3\left(\dfrac{MB^2}{2} + BH^2\right)$ với p và p_1 lần lượt là nửa chu vi của tam giác ABC và MBC. Bây giờ ta cần tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{MB^2}{2} + BH^2$. Dễ dàng tính được $MB^2 = MN.MH = 2R.h$ và $BH^2 = MH.MH = h(2R - h)$ với $MH = h$. Khi đó ta được $\dfrac{MB^2}{2} + BH^2 = Rh + h(2R - h) = h(3R - h) \le 2\left(\dfrac{3R}{2}\right)^2 = \dfrac{27R^2}{4}$. Dấu bằng của bất đẳng thức xẩy ra khi tam giác MBC đều. Đến đây bài toán xem như được giải quyết xong.

Lời giải



Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Giả sử điểm M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$. Kẻ đường kính MN của đường tròn (O; R), khi đó MN vuông góc với BC tại trung điểm H của BC và $\widehat{MBN} = 90^0$. Đặt $MH = h$. Trong tam giác vuông MBN có BH là đường cao nên

$MB^2 = MN.MH = 2R.h$ và $BH^2 = MH.MH = h(2R - h)$

Gọi p và p_1 lần lượt là nửa chu vi của tam giác ABC và MBC, theo bài ra ta có $p \le p_1$ và dấu bằng xẩy ra khi A và M trùng nhau.

Ta có $p_1^2 = (MB + BH)^2 = \left(\dfrac{MB}{2} + \dfrac{MB}{2} + BH\right)^2 \le 3\left(\dfrac{MB^2}{4} + \dfrac{MB^2}{4} + BH^2\right) = 3\left(\dfrac{MB^2}{2} + BH^2\right)$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\dfrac{MB}{2} = BH$ hay $MB = BC$

Theo như trên ta có $3\left(\dfrac{MB^2}{2}+BH^2\right)=3\left[Rh+h\left(2R-h\right)\right]=3h\left(3R-h\right)\le 2\left(\dfrac{3R}{2}\right)^2=\dfrac{27R^2}{4}$

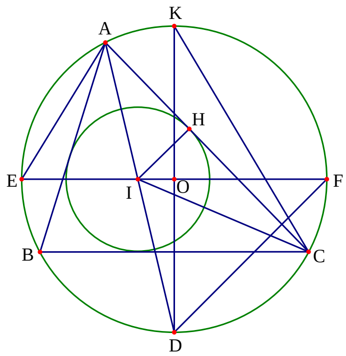
Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $h=3R-h \Leftrightarrow h=\dfrac{3}{2}R$

Do đó $p_1^2 \le \dfrac{27}{4}R^2$ hay $p_1 \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} MB=BC \\ MH=\dfrac{3}{2}R \end{cases}$ hay tam giác MBC đều.

Từ đó ta được $2p \le 3\sqrt{3}R$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $A \equiv M$ và tam giác MBC đều hay tam giác ABC đều. Vậy trong các tam giác nội tiếp đường tròn (O; R) thì tam giác đều có chu vi lớn nhất và chu vi lớn nhất bằng $3\sqrt{3}R$.

Ví dụ 21. Cho tam giác ABC có R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $R \ge 2r$, dấu bằng xẩy ra khi nào?

Lời giải



Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

Gọi giao điểm của OI với đường tròn (O) là E, F(I nằm giữa E va O), AI cắt đường tròn (O) tại D khác A, DO cắt đường tròn (O) tại K khác D. Vẽ IH vuông góc với AC tại H. Xét hai tam giác IEA và IFD có $\widehat{AIE}=\widehat{DIF}$ và $\widehat{EAI}=\widehat{IFD}=\dfrac{1}{2}sd\widehat{DE}$

Do đó $\Delta IAE \backsim \Delta IFD$ nên ta được

$\dfrac{IA}{IF}=\dfrac{IE}{ID} \Rightarrow IA.ID=IE.IF$

Mà ta có $IE.IF=\left(R-OI\right)\left(R+OI\right)=R^2-OI^2$. Do đó ta được $IA.ID=R^2-OI^2$

Mặt khác ta lại có $\widehat{DIC}=\widehat{DAC}+\widehat{ICA}$, mà ta có $\widehat{ICB}=\widehat{ICA};\widehat{IAC}=\widehat{BCD}$ và $\widehat{ICD}=\widehat{ICB}+\widehat{BCD}$

Nên ta được $\widehat{DIC}=\widehat{ICD} \Rightarrow ID=DC$.

Hai tam giác vuông HAI và CKD có $\widehat{HAI}=\widehat{DKC}$ nên $\Delta HAI \backsim \Delta CKD$

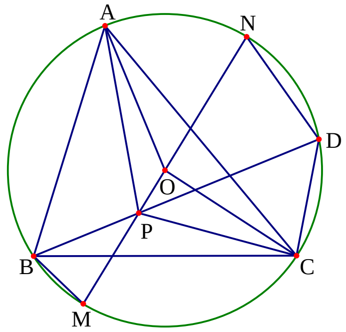
Từ đó ta được $\dfrac{IH}{DC}=\dfrac{IA}{DK} \Rightarrow IH.DK=IA.DC=r.2R$

Kết hợp các kết quả lại ta được $R^2-OI^2=2r.R \Rightarrow OI^2R\left(R-2r\right)$

Do $OI^2 \ge 0 \Rightarrow R-2r \ge 0 \Rightarrow R \ge 2r$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $OI=0$ tức là điểm O và I trùng nhau, điều này tương đương với tam giác ABC đều.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), lấy điểm P nằm trong tam giác ABC và $OP = x$. Chứng minh rằng $OA.OB.OC \le (R+x)^2(R-x)$.

Lời giải



Giả sử xẩy ra các bất đẳng thức

$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} < \widehat{BAC};\ \widehat{PAB} + \widehat{PCB} < \widehat{ABC};\ \widehat{PAC} + \widehat{PBC} < \widehat{ACB}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được.

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$$

Điều này là vô lí, do đó trong ba bất đẳng thức trên có ít nhất một bất đẳng thức trên là sai. Không mất tính tổng quát ta giả sử trong các bất đẳng thức trên thì $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} < \widehat{BAC}$ là bất đẳng thức sai. Khi đó ta được $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} \ge \widehat{BAC}$.

Kéo dài BP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{BAC};\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$

Suy ra $\widehat{PCD} = \widehat{PCA} + \widehat{ACD} = \widehat{PCA} + \widehat{ABD} = \widehat{PCA} + \widehat{ABP} \ge \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{PDC}$

Hay ta được $\widehat{PCD} \ge \widehat{PDC} \Rightarrow PD \ge PC$.

Kéo dài OP cắt đường tròn (O) tại M và N. Khi đó ta có

$PB.PD = PN.PM = (R-x)(R+x) = R^2 - x^2$

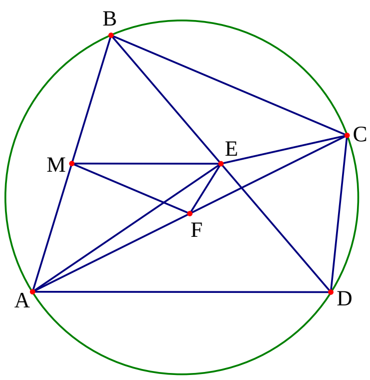
Do đó ta được $PB.PC \le PB.PD = (R-x)(R+x)$

Lại có $PA \le PO + OA = R + x$ nên ta được $OA.OB.OC \le (R+x)^2(R-x)$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi ba điểm O, P, A thẳng hàng và $PC = PD$. Điều này xẩy ra khi và chỉ khi hai điểm P và O trùng nhau.

Ví dụ 23. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng $|AB - CD| \ge |AC - BD|$.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BD. Khi đó ta có áp dụng công thức về đường trung tuyến của tam giác ta được

$$AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + \frac{1}{2}BD^2$$

$$BC^2 + CD^2 = 2CE^2 + \frac{1}{2}BD^2$$

$$EA^2 + EC^2 = 2EF^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(AE^2 + EF^2\right) + BD^2$$
$$= BD^2 + AC^2 + 4EF^2$$

Do tứ giác ABCD nội tiếp nên theo định lí Ptoleme ta được $AC.BD = AB.CD + AD.BC$

Từ đó ta được $\left(AB - CD\right)^2 + \left(AD - BC\right)^2 = \left(AC - BD\right)^2 + 4EF^2$

Gọi M là trung điểm của AB, khi đó ta được $AD = 2ME; BC = 2MF$

Từ đó suy ra $2\left|ME - MF\right| = \left|AD - BC\right|$.

Mà trong tam giác MEF ta có $EF \ge \left|ME - MF\right| \Rightarrow 2EF \ge \left|AD - BC\right| \Rightarrow 4EF^2 \ge \left(AD - BC\right)^2$

Do đó kết hợp với đẳng thức trên ta được

$$\left(AB - CD\right)^2 + \left(AD - BC\right)^2 \ge \left(AC - BD\right)^2 + \left(AD - BC\right)^2$$

Suy ra $\left(AB - CD\right)^2 \ge \left(AC - BD\right)^2 \Rightarrow \left|AB - CD\right| \ge \left|AC - BD\right|$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $EF = \left|ME - MF\right| \Leftrightarrow$ ba điểm M, E, F thẳng hàng, điều này dẫn đến tứ giác ABCD là hình thang hoặc hình chữ nhật.

Ví dụ 24. Cho nửa đường tròn (O; R) có đường kính BC. Điểm A di động trên nửa đường tròn. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Gọi $\left(I;r\right), \left(I_1;r_1\right), \left(I_2;r_2\right)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, HAB, HAC. Tìm vị trí của điểm A để

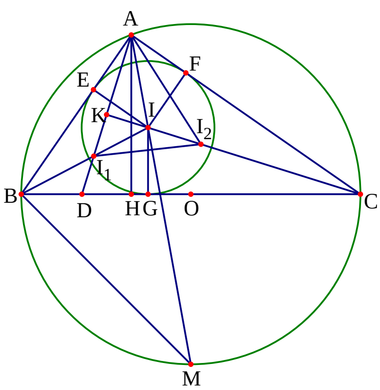
a) Tổng $r + r_1 + r_2$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Độ dài I_1I_2 đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Giả sử đường tròn (I; r) tiếp xúc với AB, AC, CB lần lượt tại E, F, G. Tứ giác EAFI là hình chữ nhật có $IE = IF = r$ nên là hình vuông.

Do đó $AE + AF = 2r$, mà ta lại có $BE = BG; CF = CG$ nên



$$AB + AC - BC = \left(AE + BE\right) + \left(AF + CF\right) - \left(BG + CG\right)$$
$$= AE + AF = 2r$$

Xét tương tự đối với tam giác HAB, HAC có

$$HA + HB - AB = 2r_1 \text{ và } HA + HC - AC = 2r_2$$

Mà ta có $BH + CH = BC$, suy ra $2AH = 2\left(r + r_1 + r_2\right)$, từ đó ta được $AH = r + r_1 + r_2$

Lại có $AH \le AO = R$ không đổi nên ta được $r + r_1 + r_2 \le R$.

Do đó tổng $r+r_1+r_2$ đạt giá trị lớn nhất là R, dấu bằng xẩy ra kh và chỉ khi điểm A nằm chính giữa nửa đường tròn.

b) Ta có $\widehat{BAD}+\widehat{DAC}=90^0$ và $\widehat{DAH}+\widehat{ADC}=90^0$ nên ta được $\widehat{DAC}=\widehat{ADC}$ hay tam tam giác CAD cân tại C, mà CK là đường phân giác của nên đồng thời là đường cao, suy ra $CK\perp AD$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $BI\perp AI_2$. Từ đó suy ra I là trực tâm tam giác AI_1I_2 nên $AI\perp I_1I_2$

Ta có $\widehat{KAI_2}=\widehat{KAH}+\widehat{HAI_2}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAH}+\widehat{HAC}\right)=45^0$. Do đó tam giác KAI_2 vuông cân tại K, từ đó suy ra $AK=KI_2$.

Gọi M là giao điểm của AI với nửa đường tròn (O) còn lại.

Xét hai tam giác KAI và KI_2I_1 có $\widehat{AKI}=\widehat{I_2KI_1}, KA=KI_2$ và $\widehat{KAI}=\widehat{KI_2I_1}$ nên $\Delta KAI=\Delta KI_2I_1$.

Từ đó ta được $AI=I_1I_2$.

Ta có $\widehat{BIM}=\widehat{ABI}+\widehat{BAI}$ và $\widehat{BAM}=\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$ do đó $\widehat{BIM}=\widehat{IBM}$ nên suy ra $MB=MI$

Ta có $I_1I_2=AI=AM-IM=AM-MB\le 2R-MB=2R-R\sqrt{2}=R\left(2-\sqrt{2}\right)$

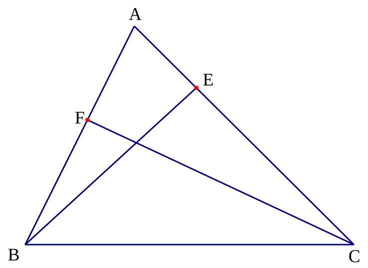
Hay ta được $I_1I_2\le R\left(2-\sqrt{2}\right)$. Vậy I_1I_2 đạt giá trị lớn nhất là $\left(2-\sqrt{2}\right)R$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi A là điểm chính giữa nửa đường tròn (O).

Ví dụ 25. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự tại F, E, D. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BIC}$ cắt BC tại M và AM cắt EF tại P. Chứng minh rằng $PD\ge\frac{1}{2}\sqrt{4DE.DE-EF^2}$

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn có $AB=c$ và $AC=b$. Khi đó ta có

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

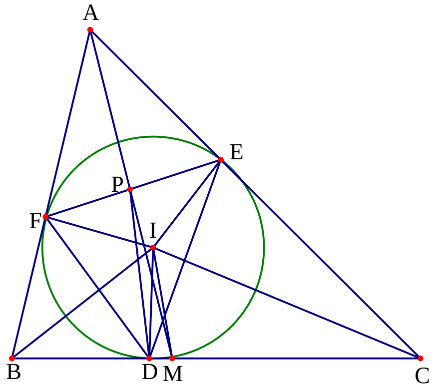


Thật vậy, vẽ các đường cao BE và CF của tam giác ABC, khi đó ta luôn có

$$\Delta ABE\backsim\Delta ACF\Rightarrow\frac{BE}{AB}=\frac{CF}{AC}\Leftrightarrow BE.AC=BF.AB$$

Tính BE theo sinC và BF theo sinB ta được $BE=BC.\sin C; BF=BC.\sin B$

Thay vào hệ thức trên ta được $AC.\sin C = AB.\sin B$ hay $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. Bổ đề được chứng minh.



Trở lại bài toán: Áp dụng bổ đề trên cho các tam giác APE và APF ta được

$$\frac{PE}{\sin\widehat{PAE}} = \frac{PA}{\sin\widehat{AEF}};\ \frac{PE}{\sin\widehat{PAF}} = \frac{PA}{\sin\widehat{AFE}}$$

Do đó ta được $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}}$.

Tương tự áp dụng bổ đề trên cho hai tam giác AMC và AMB ta được

$$\frac{MC}{\sin\widehat{MAC}} = \frac{MA}{\sin C};\ \frac{MB}{\sin\widehat{MAB}} = \frac{MA}{\sin B}$$

Do đó $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{\sin\widehat{MAC}}{\sin\widehat{MAB}}.\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}}.\dfrac{\sin B}{\sin C}$

Từ đó ta được theo tính chất đường phân giác trong của tam giác BIC ta có

$$\frac{IC}{IB} = \frac{MC}{MB} = \frac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}}.\frac{\sin B}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sin\widehat{PAE}}{\sin\widehat{PAF}} = \frac{IC.\sin C}{IB.\sin B}$$

Dễ thấy $BF = BD$ và $\widehat{BDF} = \widehat{DIB}$ nên áp dụng bổ đề trên cho tam giác BDF ta được

$$\frac{DF}{\sin B} = \frac{BF}{\sin\widehat{DFB}} = \frac{BD}{\sin\widehat{BID}} = IB \Rightarrow DF = IB.\sin B$$

Tương tự ta được ta được $DE = IC.\sin C$. Do đó ta được $\dfrac{IC.\sin C}{IB.\sin B} = \dfrac{DE}{DF}$

Từ đó ta được $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{DE}{DF}$ nên DP là đường phân giác của tam giác DEF.

Áp dụng công thức về đường phân giác ta có

$$DP^2 = \frac{DE.DF\left(DE+DF+EF\right)\left(DE+DF-EF\right)}{\left(DE+DF\right)^2} = \frac{DE.DF\left[\left(DE+DF\right)-EF^2\right]}{\left(DE+DF\right)^2}$$

$$= DE.DF - \frac{DE.DF.EF^3}{\left(DE+DF\right)^2} \ge DE.DF - \frac{EF^2}{4}$$

Hay ta được $PD \ge \dfrac{1}{2}\sqrt{4DE.DE - EF^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $DE = DF$ và do đó $AB = AC$ hay tam giác ABC cân tại A.

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$ ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn I với các cạnh BC, CA, AB. Các tia AI, AI, CI cắt đường tròn tâm I lần lượt tại A′, B′, C′. Đặt

$A_iB_i = c_i$, $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$ với $i = 1, 2$. Chứng minh rằng $\dfrac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge \dfrac{216r^6}{abc}$, dấu đẳng thức xẩy ra khi nào?

Lời giải

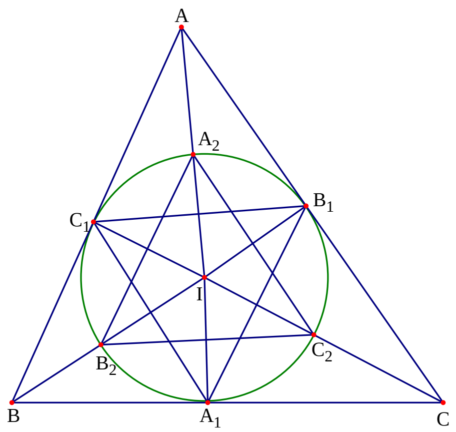
Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Trong tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Thật vậy, xét ta giác nhọn ABC có AD là đường phân giác trong, khi đó ta có

$$AD = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}.\frac{b+c}{bc} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Ngoài ra ta chú ý đến nhận xét: Trong tam giác ABC thì $\sin\dfrac{A+B}{2} \ge \dfrac{\sin A + \sin B}{2}$.



Gọi A, B, C lần lượt là số đo các góc $\widehat{BAC}; \widehat{ABC}; \widehat{ACB}$, $A_1; B_1; C_1$ lần lượt là số đo góc $\widehat{B_1A_1C_1}; \widehat{A_1B_1C_1}; \widehat{A_1C_1B_1}$, $A_2; B_2; C_2$ lần lượt là số đo góc $\widehat{B_2A_2C_2}; \widehat{A_2B_2C_2}; \widehat{A_2C_2B_2}$

Gọi p và S lần lượt là nửa chu vi và diện tích tam giác ABC. Dễ dàng tính được

$$A_2 = \frac{B_1 + C_1}{2};\ B_2 = \frac{C_1 + A_1}{2};\ C_2 = \frac{A_1 + B_1}{2}.$$

Khi đó áp dụng nhận xét trên ta được

$$\begin{aligned} a_2b_2c_2 &= 8r^2.\sin A_2.\sin B_2.\sin C_2 = 8r^3.\sin\frac{B_1+C_1}{2}.\sin\frac{C_1+A_1}{2}.\sin\frac{A_1+B_1}{2} \\ &\ge r^3(\sin B_1 + \sin C_1)(\sin C_1 + \sin A_1)(\sin A_1 + \sin B_1) \\ &\ge 8r^3.\sqrt{\sin B_1.\sin C_1}.\sqrt{\sin C_1.\sin A_1}.\sqrt{\sin A_1.\sin B_1} \\ &= 8r^3.\sin A_1.\sin B_1.\sin C_1 = a_1b_1c_1 \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $\dfrac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge a_1b_1c_1 = 8r^3.\sin A_1.\sin B_1.\sin C_1$

Ta lại có $A_1 = \dfrac{B+C}{2}$; $B_1 = \dfrac{C+A}{2}$; $C_1 = \dfrac{A+B}{2}$ và để ý là $\sin A_1 = \sin\dfrac{B+C}{2} = \cos\dfrac{A}{2}$

Nên ta được $\dfrac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge a_1b_1c_1 = 8r^3.\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$. Áp dụng bổ đề trên ta được

$$\frac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge 8r^3.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}.\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \frac{8r^3.p.S}{abc} = \frac{8r^3.p^2}{abc}$$

Để ý ta luôn có $p \ge 3\sqrt{3}r$, do đó ta được $\frac{a_2^3b_2^2c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2} \ge \frac{216r^6}{abc}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

Ví dụ 27. Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp tuyên với (O) song song với cá cạnh của ram giác ABC với sáu điểm M, N, P, Q, R, S sao cho $M, S \in AB;\ N, P \in AC;\ Q, R \in BC$. Gọi l_1, l_2, l_3 lần lượt là các đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A, B, C của các tam giác AMN, BSR, CPQ. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \ge \frac{81}{p^2}$

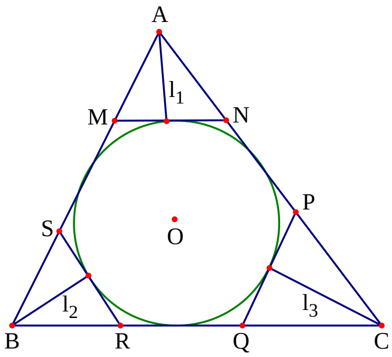
Phân tích tìm lời giải

Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC khi đó ta có $l_a = \frac{AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$ và $l_1 = \frac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN}$. Gọi p_1, p_2, p_3 lầ lượt là nửa chu vi của tam giác AMN, BSR, CPQ. Khi đó ta được $\frac{AM}{AB} = \frac{p_1}{p}$ nên suy ra $l_a = \frac{p}{p_1}.\frac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN} = \frac{p}{p_1}.l_1$.

Hoàn toàn tương tự ta thu được $\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3} = p\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\left(\frac{l_a}{l_1} + \frac{l_b}{l_2} + \frac{l_c}{l_3}\right)^2 \le \left(l_a^2 + l_b^2 + l_c^2\right)\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)$. Và chú ý là $l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}.p(p-a) \le p(p-a)$. Đến đây ta được $81^2 \le p^2\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}\right)$ và bất đẳng thức trên được chứng minh.

Lời giải

Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Áp dụng công thức về đường phân giác cho các tam giác ABC và AMN ta có



$$l_a = \frac{AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC} \text{ và } l_1 = \frac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN}$$

Gọi p_1, p_2, p_3 lầ lượt là nửa chu vi của tam giác AMN, BSR, CPQ

Do NM//BC nên theo định lí Talet ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AM+AN+MN}{AB+AC+BC} = \frac{p_1}{p}$

Suy ra $AB = AM.\frac{p}{p_1}$; $AC = AN.\frac{p}{p_1}$

Do đó $l_a = \dfrac{2\left(\frac{p}{p_1}\right)AM.\left(\frac{p}{p_1}\right)AN.\cos\frac{A}{2}}{\frac{p}{p_1}\left(AM+AN\right)} = \frac{p}{p_1}.\frac{AM.AN.\cos\frac{A}{2}}{AM+AN} = \frac{p}{p_1}.l_1$

Hoàn toàn tương tự ta được $l_b = \frac{p}{p_2}.l_2$; $l_c = \frac{p}{p_3}.l_3$. Do đó $\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3} = p\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)$

Mà theo tính chất các tiếp tuyến cắt nhau ta được $p = p_1+p_2+p_3$

Và lại có $\left(p_1+p_2+p_3\right)\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right) \ge 9$, do đó $\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3} \ge 9$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $\left(\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3}\right)^2 \le \left(l_a^2+l_b^2+l_c^2\right)\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right)$

Với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, theo công thức về đường phân giác ta có $l_a = \frac{2bc}{b+c}.\frac{\sqrt{p\left(p-a\right)}}{\sqrt{bc}}$

Do đó $l_a^2 = \frac{4bc}{\left(b+c\right)^2}.p\left(p-a\right) \le p\left(p-a\right)$. Tương tự $l_b^2 \le p\left(p-b\right)$; $l_c^2 \le p\left(p-c\right)$

Do đó ta được $l_a^2+l_b^2+l_c^2 \le p\left(p-a+p-b+p-c\right) = p^2$

Suy ra $\left(\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3}\right)^2 \le p^2\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right)$ nên ta được $81^2 \le p^2\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right)$

Do đó ta suy ra được $\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2} \ge \frac{81}{p^2}$.

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC có $BC = a; CA = b; AB = c$. Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi $I_a; I_b; I_c$ lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc ở A, B, C. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2R} \le \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(a+b)} + \frac{OI_c}{(c+a)(b+c)} \le \frac{1}{4r}$$

Lời giải

Gọi $AA_1; BB_1; CC_1$ là các đường phân giác của tam giác ABC. Dựng $EI_a \perp AB$ tại E, $FI_a \perp AC$ tại F. $OM \perp EI_a$ tại M, $ON \perp FI_a$ tại N, $OP \perp AB$ tại P. Khi đó ta được

$\widehat{B_1AC_1} = \widehat{BAC} = \widehat{MON}$ (1)

Dễ thấy E và F là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với AB và AC nên ta được

$$AE = AF = p; OM = PE = p - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}; ON = p - \frac{b}{2} = \frac{a+c}{2} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Khi đó ta được $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{a+b}{a+c}$ (2).

Theo tính chất đường phân giác ta được $AB_1 = \dfrac{bc}{c+a}$; $AC_1 = \dfrac{bc}{a+b}$. Do đó suy ra

$\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{a+b}{a+c}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta OMN$ nên suy ra $\dfrac{B_1C_1}{MN} = \dfrac{AB_1}{OM} = \dfrac{2bc}{(a+b)(a+c)}$

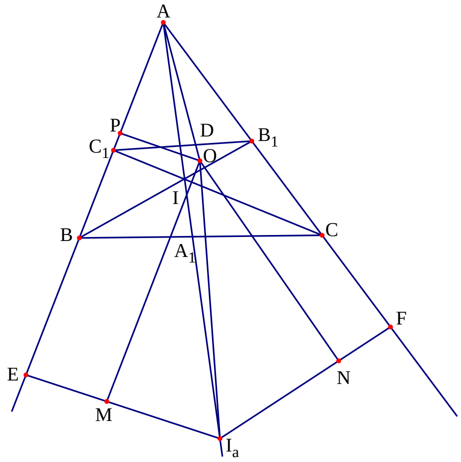
Từ đó suy ra $B_1C_1 = \dfrac{2bc.MN}{(a+b)(a+c)} = \dfrac{2bc.OI_a.\sin\widehat{MON}}{(a+b)(a+c)} = \dfrac{2bc.OI_a.\sin\widehat{BAC}}{(a+b)(a+c)} = \dfrac{abcOI_a}{R.(a+b)(a+c)}$

Do đó $OI_a = \dfrac{R(a+b)(a+c)B_1C_1}{abc}$

Hoàn toàn tương tự $OI_b = \dfrac{R(b+c)(a+b)A_1C_1}{abc}$; $OI_c = \dfrac{R(b+c)(c+a)A_1B_1}{abc}$

Từ đó ta được $Q = \dfrac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{OI_b}{(b+c)(a+b)} + \dfrac{OI_c}{(c+a)(b+c)} = \dfrac{R}{abc}(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)$

+ Trước hết ta chứng minh $Q \ge \dfrac{1}{2R}$



- Trường hợp 1: Tam giác ABC không tù.

Gọi giao điểm của OA và B_1C_1 là D, khi đó ta được

$$R.B_1C_1 = OA.B_1C_1 \ge 2S_{OB_1AC_1}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

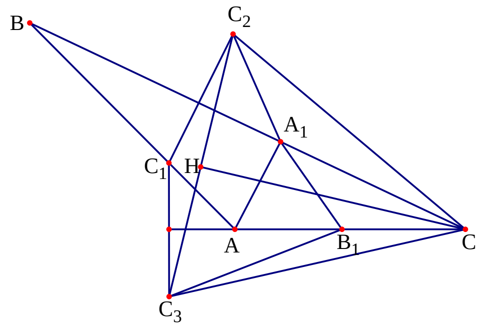
$$R.C_1A_1 \ge 2S_{OC_1BA_1};\ R.A_1B_1 \ge 2S_{OB_1CA_1}$$

Do đó ta được $R\left(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1\right) \ge 2S_{ABC}$.

Mà lại có $S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$. Từ đó ta được $Q \ge \dfrac{1}{2R}$.

- Trường hợp 2: Tam giác ABC tù, không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{BAC} > 90^0$.

Khi đó gọi C_2 và C_3 là các điểm đối xứng với C_1 qua BC và AB.



Từ đó $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge C_2C_3$.

Dựng $AH \perp C_2C_3$. Do $\widehat{ACB} < 90^0$ và

$\widehat{C_2CC_3} = 2\widehat{ACB}$ nên suy ra

$CC_1 = CC_2 = CC_2 > CA$

Từ đó suy ra $C_2C_3 = 2CC_3 \sin\widehat{ACB} > 2b\sin C$.

Do đó $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge 2b\sin C$.

Tương tự ta cũng có

$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge 2c\sin B$.

Nên ta suy ra $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \ge b\sin C + c\sin B = \dfrac{bc}{2R} + \dfrac{bc}{2R} \ge \dfrac{2S_{ABC}}{R}$. Từ đó ta được

$Q > \dfrac{1}{2R}$.

Kết hợp cả hai trường hợp ta được $Q \ge \dfrac{1}{2R}$.

+ Chứng minh $Q \le \dfrac{1}{4r}$. Theo định lí cosin ta được $B_1C_1^2 = AB_1^2 + AC_1^2 - 2AB_1.AC_1.\cos\widehat{A}$.. Từ đó suy ra

$$B_1C_1^2=\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)-2\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{b^2c}{c+a}\left(\frac{c}{c+a}-\frac{b}{b+a}\right)+\frac{bc^2}{b+a}\left(\frac{b}{b+a}-\frac{c}{c+a}\right)+\frac{b^2c^2}{(b+a)(c+a)}$$
$$=\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{abc(a+b+c)(b-c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}$$
$$\le\frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)}\le\frac{a^2bc}{4\sqrt{ab}.\sqrt{ac}}=\frac{\sqrt{ab}.\sqrt{ac}}{4}\le\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{2}\right)^2\le\frac{1}{36}\left(\frac{2a+b+c}{2}\right)^2$$

Do đó suy ra $B_1C_1\le\frac{2a+b+c}{8}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$C_1A_1\le\frac{2b+c+a}{8};A_1B_1\le\frac{2a+b+c}{8}$.

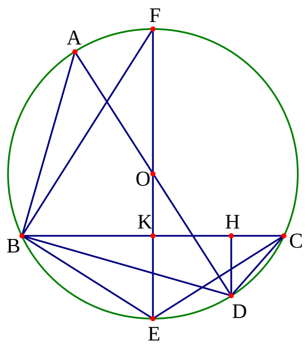
Từ đó suy ra $A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1\le\frac{a+b+c}{2}=p$. Do đó ta được $Q\le\frac{Rp}{abc}=\frac{1}{4r}$.

Như vậy ta được $\frac{1}{2R}\le\frac{OI_a}{(a+b)(a+c)}+\frac{OI_b}{(b+c)(a+b)}+\frac{OI_c}{(c+a)(b+c)}\le\frac{1}{4r}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 29. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung BC(với $BC<R$). Điểm A di động trên cung lớn BC và điểm D di động trên cung nhỏ BC. Xác định vị trí của A và D để $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Với A, D bất kì ta luôn có $AD\le 2R$. Với mỗi điểm D trên cung nhỏ BC ta luôn tìm được điểm A trên cung lớn BC sao cho $AD=2R$ để $\frac{1}{AD}=\frac{1}{2R}$ có giá trị bé nhất.

Kẻ DH vuông góc với BC tại H. Kẻ đường kính EF vuông góc với BC tại K. Khi đó các điểm E, F, K là các điểm cố định. Do $\widehat{ABD}=\widehat{CHD}=90^0$ và $\widehat{DAB}=\widehat{DCB}$ nên ta được $\Delta ABD\backsim\Delta CHD$ .Từ đó suy ra

$$\frac{BD}{DA}=\frac{DH}{DC}\Rightarrow DB.DC=AD.DH\Rightarrow DB.DC=2R.DH$$

Ta có $HD+OK\le OD=OE=EK+OK\Rightarrow DK\le EK$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}\ge 2\sqrt{\frac{1}{CB.CD}}=2\sqrt{\frac{1}{2R.DH}}\ge\frac{2}{\sqrt{2R.EK}}$

Từ đó ta được $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}\ge\frac{1}{2R}+\frac{2}{\sqrt{2R.EK}}=\frac{1}{2R}+\frac{2}{BE}$

Dễ thấy $\frac{1}{2R}+\frac{2}{BE}$ là một hằng số. Do đó $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2R}+\frac{2}{BE}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi DA trùng với đường kính EF.

Nhận xét: *Có nhiều cách để tìm giá nhị nhỏ nhất của* $T=\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}$ *như:*

- *Ta có* $DH \le EK$ *nên* $EH.BC \le EK.BC \Leftrightarrow S_{DBC} \le S_{EBC}$, *điều này dẫn đến*

$$DB.DC.\sin\left(180^0-\widehat{BDC}\right) \le EB.EC.\sin\left(180^0-\widehat{BEC}\right)$$

Mà ta có $\widehat{BEC}=\widehat{BDC}$ *và* $EB=EC$ *nên ta được* $BD.CD \le BE^2$

- *Kéo dài BD một đoạn* $DG=DC$, *ta được* $BD+DC=BD+DG \le BE+EG=BE+EC=2EB$

Do đó ta được $\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC} \ge \frac{4}{BD+CD}=\frac{2}{BE}$

- *Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác nội tiếp BFCD ta được*

$$BD.CF+CD.BF=BC.DF \Rightarrow \left(DB+CD\right)BF \le BC.2R$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC} \ge \frac{4}{BD+CD}=\frac{2BF}{R.BC}$.

Ví dụ 30. Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AM+BN+CP \le 4R+r$.

Phân tích và lời giải

Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Khi đó ta có $OM+ON+OP=R+r$.

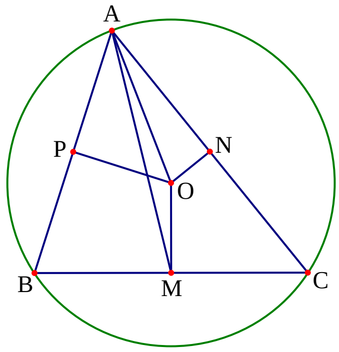
Thật vậy, đặt $BC=a=2PN; CA=b=2PM; AB=c=2MN$

Áp dụng định lí Ptoleme cho các tứ giác nội tiếp APON, BMOP, CNOM ta được

$$ON.\frac{c}{2}+OP.\frac{b}{2}=OA.\frac{a}{2}=R.\frac{a}{2};\ OP.\frac{a}{2}+OM.\frac{b}{2}=OB.\frac{b}{2}=R.\frac{c}{2};\ OM.\frac{b}{2}+ON.\frac{a}{2}=OC.\frac{c}{2}=R.\frac{c}{2}$$

Mặt khác ta lại có $OM.\frac{a}{2}+ON.\frac{b}{2}+OP.\frac{c}{2}=r.\frac{a+b+c}{2}$. Từ đó ta được $OM+ON+OP=R+r$

Trở lại bài toán: Ta xét các trường hợp sau



+ Trường hợp 1: Xét trường hợp tam giác ABC nhọn.

Với các kí hiệu như trên ta có

$AM \le AO + OM \Rightarrow AM \le R + OM$

Hoàn toàn tương tự ta được $BN \le R + ON;\ CP \le R + OP$

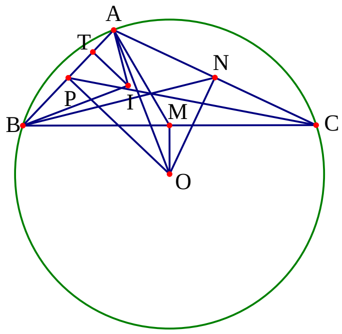
Khi đó ta được

$AM + BN + CP \le 3R + OM + ON + OP = 4R + r$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi O thuộc đồng thời AM, BN, CP hay O là trọng tâm của tam giác ABC, điều này xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

+ Trường hợp 2: Xét trường hợp tam giác ABC không nhọn, không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{A} \ge 90^0$

Với các kí hiệu như trên ta có



$$AM \le \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$$

$$BP < NP + PB = \frac{a}{2} + \frac{c}{2}$$

$$CP < PN + CN = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

Khi đó ta được $AM + BN + CP < 2a + \frac{1}{2}\left(b + c - a\right)$

Dễ thấy $2a \le 4R$.

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và (I) tiếp xúc với AB tại T.

Vì $\widehat{A} \ge 90^0$ nên ta có $\widehat{TAI} \ge 45^0 \Rightarrow \widehat{TIA} \le 45^0$ nên ta được $TA \le TI = \frac{1}{2}\left(b + c - a\right) \le r$

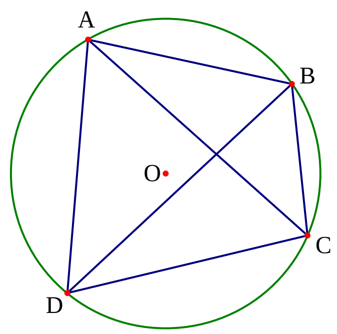
Từ đó ta được $AM + BN + CP < 4R + r$

Ví dụ 31. Cho đường tròn (O; R) và một điểm I nằm bên trong đường tròn. Gọi AC và BD là hai dây cung bất kì đi qua I. Xác định vị trí của AC và BD để $\frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + DA.CD}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Phân tích tìm lời giải

Bài toán yêu cầu xác định vị trí củaAC và BD để $\frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + DA.CD}$ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất nên trước hết ta đi biểu diễn biểu thức đó theo tỉ số của dây cung AC, BD. Chú ý đến $\Delta IDC \backsim \Delta IAB$ và $\Delta IAD \backsim \Delta IBC$ ta được $\frac{ID}{IA} = \frac{IC}{IB} = \frac{CD}{AD}$ và $\frac{IA}{IB} = \frac{ID}{IC} = \frac{AD}{BC}$. Từ đó $\frac{ID}{IB}=\frac{ID}{IA}.\frac{IA}{IB}=\frac{AD.DC}{AB.BC}$ nên ta suy ra được $BD=\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}.IB$. Và $AC=\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}.AI$ và chú ý là $\frac{IA}{IB}=\frac{AD}{BC}$ ta thu được $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}=\frac{AC}{BD}$. Đến đây xét các vị trí của AC và BD để có được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức trên.

Lời giải



Xét hai tam giác IDC và IAB có $\widehat{DIC}=\widehat{AIB}$ và $\widehat{IDC}=\widehat{IAB}$ nên ta được $\Delta IDC\backsim\Delta IAB$. Từ đó ta được $\frac{ID}{IA}=\frac{IC}{IB}=\frac{CD}{AD}$

Chứng minh tương tự ta được $\Delta IAD\backsim\Delta IBC$ nên $\frac{IA}{IB}=\frac{ID}{IC}=\frac{AD}{BC}$ Từ đó $\frac{ID}{IB}=\frac{ID}{IA}.\frac{IA}{IB}=\frac{AD.DC}{AB.BC}$. Suy ra ta được $\frac{ID+IB}{IB}=\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}$ hay

$BD=\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}.IB$

Mặt khác ta lại có $\frac{IC}{IA}=\frac{IC}{IB}:\frac{IA}{IB}=\frac{BC.CD}{AB.DA}$

Suy ra $\frac{IC+IA}{IA}=\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}$ hay $AC=\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}.AI$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{AC}{BD}=\frac{\frac{AB.DA+BC.CD}{AB.DA}.AI}{\frac{AB.BC+DA.CD}{AB.BC}.IB}$.

Chú ý là $\frac{IA}{IB}=\frac{AD}{BC}$ ta thu được $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}=\frac{AC}{BD}$. Đến đây ta được

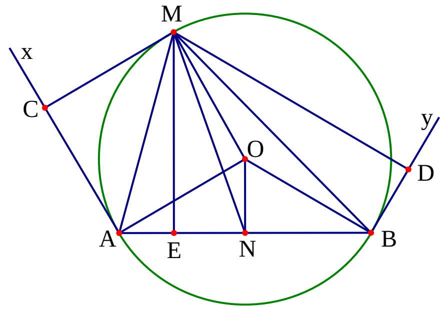
+ $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi AC lớn nhất đồng thời BD nhỏ nhất, điều này tương đương với AC đi qua O và BD vuông góc với OI

+ $\frac{AB.AD+BC.CD}{AB.BC+DA.CD}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi AC nhỏ nhất đồng thời BD lớn nhất nhất, điều này tương đương với BD đi qua O và AC vuông góc với OI.

Ví dụ 32. Cho AB là một dây cung cố định khác đường kính của đường tròn (O; R). Vẽ các tia Ax By là các tia tiếp tuyến của đường tròn (O). Một điểm do động trên cung lớn AB. Vẽ MC vuông góc với Ax tại C, MD vuông góc với By tại D. Xác định vị trí của M để $AC.BD+MC.MD$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Vẽ ME vuông AB tại E và ON vuông góc với AB tại N.



Xét các tam giác MAC và MEB có

$\widehat{MCA} = \widehat{MEB} = 90^0$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MBE} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AM}$

Do đó $\Delta MCA \backsim \Delta MEB$ nên suy ra

$\frac{MC}{ME} = \frac{AC}{BE} = \frac{MA}{MB}$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$\Delta MAE \backsim \Delta MBD$ suy ra $\frac{ME}{MD} = \frac{AE}{BD} = \frac{MA}{MB}$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $MC.MD = ME^2$ và $AC.BD = AE.BE$

Lại có $ME \le MN$ và $MN \le MO + ON$ do đó $MC.MD = ME^2 \le (OM + ON)^2 = (R + ON)^2$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được $AE.BE \le \left(\frac{AE + BE}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

Do đó ta được $AC.BD + MC.MD = AE.BE + ME^2 \le \frac{AB^2}{4} + (ON + R)^2$ không đổi.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} AE = BE \\ E \equiv N \\ MN = OM + ON \end{cases} \Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung lớn AB

Do đó giá trị lớn nhất của $AC.BD + MC.MD$ là $\frac{AB^2}{4} + (ON + R)^2$, đạt được khi M là điểm chính giữa cung lớn AB.

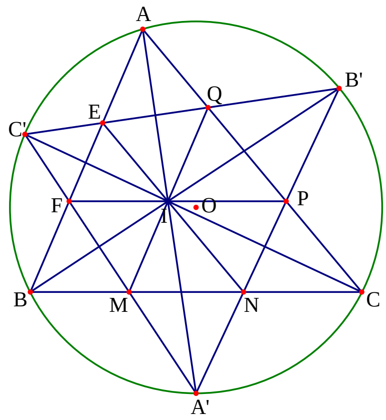
Ví dụ 33. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi A′, B′, C′ lầ lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$; $\overset{\frown}{CA}$; $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O). Gọi E, Q lần lượt là giao điểm của B′C′ với AB, AC; M, F lần lượt là giao điểm của A′C′ với BC, AB; P, N lần lượt là giao điểm của A′B′ với AC, BC. Chứng minh rằng $\frac{2}{3}S_{ABC} \le S_{MNPQEF}$

Phân tích và lời giải

+ Trước hết ta chứng minh các đường thẳng MQ, NE, PF đồng quy tại một điểm.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ba đường thẳng AA′, BB′, CC′ đồng quy tại I.

Thật vậy, sử dụng tính chất góc nội tiếp và góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn ta có



$$\widehat{B'AI}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{B'A'}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{B'C}+\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{A'C}$$

$$\widehat{B'IB}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{B'A}+\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{A'B}$$

Mà ta lại có $sd\overset{\frown}{B'C}=sd\overset{\frown}{B'A};\ sd\overset{\frown}{A'C}=sd\overset{\frown}{A'B}$.

Từ đó ta được $\widehat{B'AI}=\widehat{B'IA}$ nên tam giác B′IA cân tại B′, suy ra $B'I=B'A$. Chứng minh tương tự ta được $C'I=C'A$. Từ đó suy ra B′C′ là đường trung trực của đoạn thẳng AI

Lặp lại cách chứng minh như trên ta được C′A′ và A′B′ lần lượt là đường trung trực của đoạn thẳng IB, IC.

Theo tính chất điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng ta thu được $MB=MI$ và $FB=FI$.

Từ đó suy ra tam giác BMI cân tại M và tam giác FBI cân tại F. Do đó ta được $\widehat{MBI}=\widehat{MIB};\ \widehat{FBI}=\widehat{FIB}$.

Mà ta lại có $\widehat{MBI}=\widehat{FBI}$ nên ta được $\widehat{FBI}=\widehat{MIB}=\widehat{MBI}=\widehat{FIB}$, suy ra IM//BF và IF//BM

Kết hợp với $\widehat{MBI}=\widehat{FBI}$ ta suy ra được tứ giác BMIF là hình thoi. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được các tứ giác AQIE và CNIP là hình thoi. Từ đó ta được IF//BC và IP//CN nên IP//BC, suy ra FP đi qua điểm I. Chứng minh tương tự ta được QM, NE cũng đi qua điểm I. Vậy MQ, NE, PF đồng quy tại điểm I.

+ Chứng minh $\frac{2}{3}S_{ABC}\le S_{MNPQEF}$.

Từ các kết quả trên ta thu được PF//BC, NE//AC, MQ//AB. Đặt $AB=c;BC=a;CA=b$

Khi đó ta có $\frac{IP}{IF}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{IP}{IF}=\frac{PQ}{PA}=\frac{b}{b+c}$

Ta có $\frac{S_{PIQ}}{S_{AFP}}=\frac{PI}{PF}.\frac{PQ}{PA}=\frac{b^2}{(b+c)^2}$. Tương tự ta cũng có $\frac{S_{FIE}}{S_{AFP}}=\frac{c^2}{(b+c)^2}$

Do đó $\frac{S_{AEIF}}{S_{AFP}}=1-\frac{b^2}{(b+c)^2}-\frac{c^2}{(b+c)^2}=\frac{2bc}{(b+c)^2}$. Suy ra $\frac{S_{AEQ}}{S_{AFP}}=\frac{\frac{1}{2}S_{AEID}}{S_{AFP}}=\frac{1}{2}.\frac{2bc}{(b+c)^2}=\frac{bc}{(b+c)^2}$.

Mặt khác ta lại có $\frac{AI}{AB}=\frac{A'I}{A'B}=\frac{AA'}{AB+A'B}$

Từ đó ta được $\frac{AP}{AC}=\frac{AF}{AB}=\frac{FP}{BC}=\frac{AI}{AA'}=\frac{AB}{AB+A'B}=\frac{c}{c+\frac{ca}{b+c}}=\frac{b+c}{a+b+c}$.

Do đó ta thu được $\frac{S_{AFP}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AC}.\frac{AF}{AB} = \left(\frac{FP}{BC}\right)^2 = \frac{(b+c)^2}{(a+b+c)^2}$

Kết hợp các kết quả trên ta được $\frac{S_{AEQ}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AEQ}}{S_{AFP}}.\frac{S_{AFP}}{S_{ABC}} = \frac{bc}{(b+c)^2}.\frac{(b+c)^2}{(a+b+c)^2} = \frac{bc}{(a+b+c)^2}$

Lặp lại các chứng minh như trên ta được $\frac{S_{AFM}}{S_{ABC}} = \frac{ca}{(a+b+c)^2}$; $\frac{S_{CPN}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a+b+c)^2}$

Ta có $S_{MNPQEF} = S_{ABC} - (S_{AEQ} + S_{BFM} + S_{CPN})$ nên ta được $\frac{S_{MNPQEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}$

Do $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ nên ta có $1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \ge 1 - \frac{ab+bc+ca}{3(ab+bc+ca)} = \frac{2}{3}$

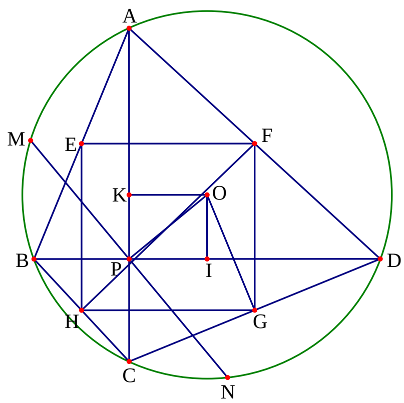
Từ đó suy ra $\frac{S_{MNPQEF}}{S_{ABC}} \ge \frac{2}{3}$ hay $\frac{2}{3}S_{ABC} \le S_{MNPQEF}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 34. Cho đường tròn (O) và điểm P cố định nằm trong đường tròn (O)(P không trùng với O). Hai dây cung AC và BD thay đổi của đường tròn (O) vuông góc với nhau tại P. Tìm vị trí của các dây cung AC và BD sao cho:

a) Diện tích tứ giác ABCD lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Chu vi tứ giác ABCD lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải



a) Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm AB, AD, CD, CB. Khi đó dễ dàng chứng minh được tứ giác EFGH là hình chữ nhật có tâm là trung điểm của đoạn OP.

Ta cần chứng minh $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = 4R^2$

Thật vậy do $AC \perp BD$ nên dễ dàng suy ra

$\Delta OEA = \Delta DGO$, do đó suy ra $OG = EA = \frac{AB}{2}$.

Ta có $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = OG^2 + DG^2 = R^2$ nên ta

được $AB^2 + CD^2 = 4R^2$

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

Hạ OK vuông góc với AC và OI vuông góc với BD. Khi đó ta có $ID^2 = R^2 - OI^2$

Do đó ta được $BD^2 = 4(R^2 - OI^2)$. Tương tự ta cũng có $AC^2 = 4(R^2 - OK^2)$

Từ đó suy ra $AC^2 + BD^2 = 4R^2 - 4\left(OI^2 + OK^2\right) = 8R^2 - 4OP^2$ không đổi

Từ đây ta được $EF^2 + FG^2 = EG^2 \Rightarrow EG^2 = \frac{1}{4}\left(AC^2 + BD^2\right)$ không đổi.

Suy ra hình chữ nhật EFGH là hình chữ nhật thay đổi trên một đường tròn cố định có tâm là trung điểm của OP.

Để ý là $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Do đó

$$S_{EFGH} = EF.GH \le \frac{EF^2 + GH^2}{2} = \frac{1}{8}\left(AC^2 + BD^2\right) = \frac{1}{8}\left(8R^2 - 4OP^2\right)$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tứ giác EFGH là hình vuông nên $AC = BD$.

Lại có $S_{EFGH} = EF.FG = \frac{1}{2}\left[EF^2 + FG^2 - \left(EF - FG\right)^2\right] = \frac{1}{8}\left(8R^2 - 4OP^2\right) - \frac{1}{2}\left(EF - FG\right)^2$

Để S_{EFGH} đạt giá trị nhỏ nhất thì $\left|EF - FG\right|$ phải đạt giá trị lớn nhất.

Mà ta có $AC \le 2R \Rightarrow FG \le R$ và $BD \ge MN$ với MN đi qua P.

Do đó $EF \ge \frac{1}{2}MN$ nên $\left|EF - FG\right| \le R - \frac{MN}{2}$

Do đó S_{EFGH} đạt giá trị nhr nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O)

Vậy S_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất khi $AC = BD$ và S_{ABCD} đạt giá trị nhỏ nhất khi $AC = 2R$.

b) Đặt $m = AB + BC + CD + DA$ khi đó ta được

$$m^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + 2\left(AB.BC + BC.CD + CD.DA + DA.AB + AB.BC + BC.AD\right)$$

Mà ta có $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$ có giá trị không đổi.

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác nội tiếp AEOF ta có $AE.OF + OE.AF = R.EF$

Hay ta được $\frac{AB.BC}{4} + \frac{CD.DA}{4} = \frac{R.BD}{2}$. Tương tự ta cũng có $\frac{AB.AD}{4} + \frac{CD.BC}{4} = \frac{R.AC}{2}$

Do đó ta được $2R\left(BD + AC\right) = AB.BC + CD.DA + AB.AD + CD.BC$

Như vậy việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của m tương đương với tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = AB.CD + AD.BC + 2R\left(AC + BD\right)$.

Cũng theo định lí Ptoleme thì trong tứ giác ABCD nội tiếp ta có $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

Do đó suy ra $S = AC.BD + 2R\left(AC + BD\right)$.

Ta có $S = AC.BD + 2R\left(AC + BD\right) \le \frac{AC^2 + BD^2}{2} + 2R.\sqrt{2\left(AC^2 + BD^2\right)}$ không đổi

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AC = BD$

Lại có $S = \frac{1}{2}\left[AC^2 + BD^2 - \left(AC - BD\right)^2\right] + 2R.\sqrt{2\left(AC^2 + BD^2\right) - \left(AC - BD\right)^2}$

Mà ta có $AC \le 2R;\ BD \ge MN \Rightarrow |AC - BD| \le 2R - MN$

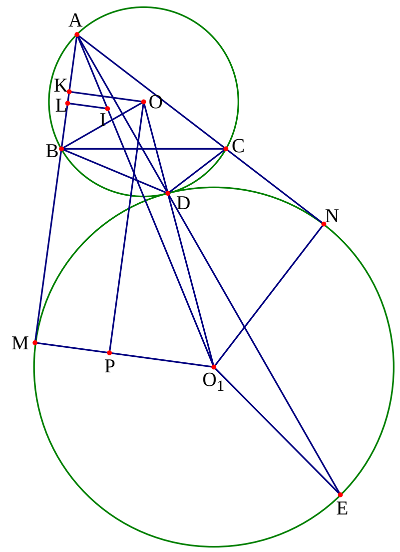
Suy ra $S \ge \frac{1}{2}\left[AC^2 + BD^2 - (2R - MN)^2\right] + 2R.\sqrt{2(AC^2 + BD^2) - (2R - MN)^2}$ không đổi

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AC = 2R$

Vậy $m = AB + BC + CD + DA$ đạt giá trị lớn nhất khi $AC = BD$ và đạt giá trị nhỏ nhất khi $AC = 2R$.

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn có bán kính r. Gọi $O_1, R_1;\ O_2, R_2;\ O_3, R_3$ theo thứ tự là tâm và bán kính của đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn (O) đồng thời tiếp xúc với AB, AC; BC, BA; CA, CB tương ứng. Chứng minh rằng $R_1 + R_2 + R_3 \ge 12r$

Lời giải



Giả sử đường tròn $(O_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O;R)$ tại D và tiếp xúc với hai tia AB, AC lần lượt tại M, N. Tia AD cắt đường tròn $(O_1;R_1)$ tại điểm thứ hai là E.

Khi đó ta có $OO_1 = OD + O_1D = R + R_1$, lại có OA song song với EO_1 và $AM^2 = AN^2 = AD.AE$

Từ đó $\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{AD}{AE} = \frac{OD}{OO_1}$ hay ta được

$$\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{R}{R + R_1}$$

Chứng minh tương tự ta cũng được

$$\frac{BD^2}{BM^2} = \frac{CD^2}{CN^2} = \frac{R}{R + R_1}$$

Từ đó ta thu được $\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM} = \frac{CD}{CN}$. Mặt khác tứ giác ABDC nội tiếp nên theo định lí Ptoleme ta có $AB.CD + AC.BD = AD.BC$. Kết hợp với kết quả trên ta thu được $AB.CN + AC.BM = BC.AM$.

Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$ ta được $BM = AM - c;\ CN = AN - b = AM - b$

Khi đó từ hệ thức trên ta được $AM = AN = \frac{2bc}{b + c - a}$.

Gọi L là tiếp điểm của AB với đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có $\frac{O_1M}{IL}=\frac{AM}{AL}$ hay ta được $\frac{R_1}{r}=\frac{AM}{AL}$

Thay $AL=p-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$ và $AM=\frac{2bc}{b+c-a}$ tỉ lệ thức trên ta được $\frac{R_1}{r}=\frac{4bc}{(b+c-a)^2}$.

Chứng minh tương tự ta cũng được $\frac{R_2}{r}=\frac{4ac}{(c+a-b)^2}$; $\frac{R_3}{r}=\frac{4ab}{(a+b-c)^2}$

Từ đó ta được $\frac{R_1+R_2+R_3}{r}=\frac{4bc}{(b+c-a)^2}+\frac{4ac}{(c+a-b)^2}+\frac{4ab}{(a+b-c)^2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{4bc}{(b+c-a)^2}+\frac{4ac}{(c+a-b)^2}+\frac{4ab}{(a+b-c)^2}\ge 12\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2}}$$

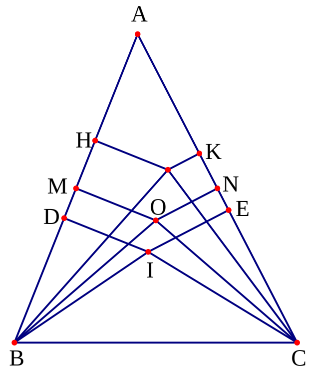
Chú ý là $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$, do đó ta được $\frac{R_1+R_2+R_3}{r}\ge 12$

Hay ta được $R_1+R_2+R_3\ge 12r$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $R_1=R_2=R_3$ và $a=b=c$ hay tam giác ABC đều.

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}<60^0$. Gọi P là điểm bất kì trong tam giác. Gọi H, K là hình chiếu của P lần lượt trên cạnh AB và cạnh AC. Giả sử $AC+AH=BC+BH$ và $AB+AK=BC+CK$. Chứng minh rằng $\widehat{BPC}<120^0$.

Lời giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Khi đó ta có $OM\perp AB;\ ON\perp AC$.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D, E lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh AB, AC. Khi đó ta được $ID\perp AB;\ IE\perp AC$. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

$AD=AE=\frac{CA+AB-BC}{2}$. Từ đó suy ra

$$BD=AB-AD=AB-\frac{CA+AB-BC}{2}=\frac{AB+BC-CA}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $AB+AK=BC+CK\Rightarrow AK=\frac{BC+CA-AB}{2}$

Từ đó ta được $BD=AH\Rightarrow MN=MD$ và tương tự ta cũng có $NE=NK$.

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên ta có $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}$.

Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta tính được $\widehat{BIC} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{A}$.

Theo giả thiết $\widehat{BAC} < 60^0 \Rightarrow 2\widehat{A} < 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BOC} < \widehat{BIC}$

Do đó suy ra $\widehat{BPC} < \widehat{BOC} = 2\widehat{A} < 120^0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

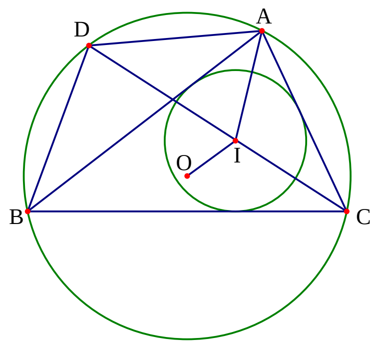
Ví dụ 37. Cho tam giác ABC không cân. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Giả sử giao điểm thứ hai khác C của phân giác $\widehat{ACB}$ với đường tròn (O) nằm trên đường trung trực của đoạn IO. Chứng minh góc $\widehat{ACB}$ lớn thứ hai trong tam giác ABC.

Phân tích tìm lời giải

Yêu cầu chứng minh tương đường với $\mathrm{Min}\left(\widehat{BAC};\ \widehat{ABC}\right) \le \widehat{ACB} \le \mathrm{Max}\left(\widehat{BAC};\ \widehat{ABC}\right)$.

Muốn vậy ta cần chứng minh được $\widehat{ACB} = 60^0$, điều này sẽ được khẳng định nếu ta chỉ ra được các tam giác DOB, DOA đều.

Lời giải



Gọi D là giao điểm thứ hai của phân giác góc $\widehat{ACB}$ với (O)

Đầu tiên ta chứng minh $DI = DA = BD$.

Thật vậy, theo tính chất góc ngoài và tính chất đường phân giác ta có

$$\widehat{DIA} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$$

Mặt khác theo tính chất tứ giác nội tiếp và tính chất đườngphân giác ta có

$$\widehat{DAI} = \widehat{BAI} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)$$

Kết hợp hai điều trên ta được $\widehat{DIA} = \widehat{DAI}$ nên tam giác DAI cân tại D, suy ra $DA = DI$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $BD = DI$.

Do thuộc đường trung trực của đoạn thẳng OI nên ta có $DO = DI$. Từ đó suy ra $DO = DA = DB$.

Từ đó ta dễ dàng có được các tam giác DOB, DOA đều.

Điều này dẫn đến $\widehat{BOA} = 120^0$ nên ta được $\widehat{ACB} = 60^0$

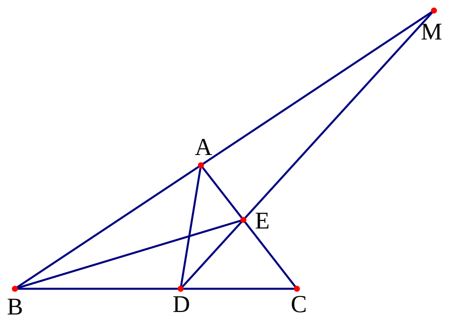
Mà ta lại có $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^0$ nên dễ thấy

$$\text{Min}\left(\widehat{BAC};\ \widehat{ABC}\right) \le 60^0 = \widehat{ACB} \le \text{Max}\left(\widehat{BAC};\ \widehat{ABC}\right)$$

Do đó góc $\widehat{ACB}$ lớn thứ hai trong tam giác ABC

Ví dụ 38. Cho tam giác ABC không cân có AD và BE là đường phân giác. Chứng minh rằng góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB và DE không vượt qua $\dfrac{\left|\hat{A}-\hat{B}\right|}{3}$.

Phân tích và lời giải



Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử trong tam giác ABC có $\hat{A} > \hat{B}$. Gọi M là giao điểm của AB và DE, khi đó góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB và DE chính là góc $\widehat{BMD}$.

Ta cần chứng minh được $\widehat{BMD} \le \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC}\right)$

Thật vậy, áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC với ba điểm M, D, E thẳng hàng ta có

$$\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{DC}{DB}.\frac{EA}{EC}$$

Để ý là AD và BE là các đường phân giác của tam giác ABC nên ta được

$\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{AC}{AB};\ \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{BA}{BC}$

Từ đó ta được $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AC}{AB}.\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{CA}{BC}$. Từ đó suy ra CM chính là đường phân giác ngoài tại đỉnh C của tam giác ABC. Do đó ta được $\widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{MCB} - \widehat{MBC} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC}\right)$

Do đó suy ra $\widehat{BMD} + \widehat{CMD} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC}\right)$.

Giả sử $\widehat{BMD} > \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC}\right)$, khi đó rõ ràng ta có

$$\widehat{CMD} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC}\right) - \widehat{BMD} < \frac{1}{6}\left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC}\right) < \frac{1}{3}\widehat{BMD}$$

Từ đó ta được $\dfrac{\sin\widehat{BMD}}{\sin\widehat{CMD}} > \dfrac{\sin 2\widehat{CMD}}{\sin\widehat{CMD}} = \dfrac{2\sin\widehat{CMD}.\cos\widehat{CMD}}{\sin\widehat{CMD}} = 2\cos\widehat{CMD}$.

Mặt khác áp dụng định lí sin cho các tam giác BMD và CMD ta được

$$\frac{\sin\widehat{BMD}}{\sin\widehat{CMD}}=\frac{\dfrac{BD\sin\widehat{ABC}}{MD}}{\dfrac{CD\sin\widehat{MCD}}{MD}}=\frac{BD\sin\widehat{ABC}}{CD\sin\widehat{MCD}}$$

Lai có $\frac{DB}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{ABC}}$ nên ta được $\frac{\sin\widehat{BMD}}{\sin\widehat{CMD}}=\frac{\sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{ABC}}.\frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{MCD}}=2\sin\frac{\widehat{ACB}}{2}$

Từ đó ta suy ra $\sin\frac{\widehat{ACB}}{2}>\cos\widehat{CMD}=\sin\left(90^0-\widehat{CMD}\right)$

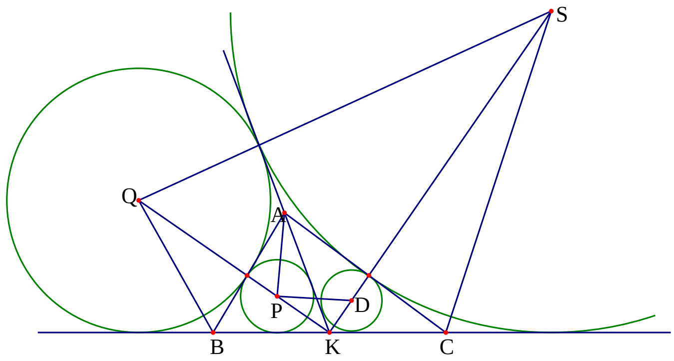
Nên ta được $\frac{\widehat{ACB}}{2}>90^0-\widehat{CMD}\Rightarrow\widehat{CMD}>90^0-\frac{\widehat{ACB}}{2}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)$, điều này vô lí.

Do đó điều ta giả sử là sai. Nên ta được $\widehat{BMD}\le\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}-\widehat{ABC}\right)$.

Vậy góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB và DE không vượt qua $\frac{\left|\widehat{A}-\widehat{B}\right|}{3}$.

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC và một điểm K bất kì trên cạnh AC. Gọi P tâm là đường tròn nội tiếp tam giác ABK và Q tâm là đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác ABK. Gọi D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCK và S là tâm đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác BCK. Chứng minh rằng $\widehat{KDP}>\widehat{DQP}$.

Lời giải



Trước hết ta nhận thấy ba điểm K, P, Q thẳng hàng và ba điểm K, D, S thẳng hàng.

Ta cần chứng minh tứ giác QSDP nội tiếp, điều này tương đường với chứng minh hệ thức $KD.KS=KP.KQ$.

Thật vậy, xét hai tam giác KPB và KAQ có $\widehat{BKQ}=\widehat{AKQ}$.

Mặt khác biến đổi góc ta lại có

$$\widehat{QAK}=\widehat{QAP}+\widehat{PAK}=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAK}=90^0+\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{ABK}-\widehat{AKB}\right)$$

$$=90^0+\left(90^0-\frac{1}{2}\widehat{ABK}-\frac{1}{2}\widehat{AKB}\right)=180^0-\widehat{PAK}-\widehat{PKB}=\widehat{BPK}$$

Do đó hai tam giác KPB và KAQ đồng dạng với nhau.

Từ đó ta được $\frac{KP}{KA}=\frac{KB}{KQ}$ nên ta được $KP.KQ=KA.KB$

Mà ta có $KA=KC$ nên suy ra $KP.KQ=KB.KC$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $KD.KS=KB.KC$

Do đó ta được $KD.KS=KP.KQ$. Điều này có nghĩa là tứ giác QSDP nội tiếp đường tròn.

Do đó suy ra $\widehat{DSP}=\widehat{DQP}$. Mà $\widehat{KDP}$ là góc ngoài của tam giác DSP nên ta được

$\widehat{KDP}>\widehat{DSP}$

Từ đó ta được $\widehat{KDP}>\widehat{DQP}$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 40. a) Cho n điểm phân biệt $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại không qua một điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ có giá trị bé nhất.

b) Cho n điểm phân biệt $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ cùng nằm trên một đường thẳng. Tìm các điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ có giá trị bé nhất.

Lời giải

a) Giả sử tồn tại các điểm $M_1;M_2$ thỏa mãn

$$M_1A_1+M_1A_2+...+M_1A_n=M_2A_1+M_2A_2+...+M_2A_n=\text{Min}\left(MA_1+MA_2+...+MA_n\right)=m$$

Gọi M_0 là trung điểm của M_1M_2, khi đó ta có $M_1A_i+M_2A_i\ge 2M_0A_i$ với $i=1;2;...;n$

Vì $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ không cùng nằm trên một đường thẳng nên có một điểm A_k trong số các điểm trên không nằm trên đường thẳng M_1M_2. Khi đó ta được $M_1A_k+M_2A_k>M_0A_k$

Khi đó $M_1A_1+M_1A_2+...+M_1A_n+M_2A_1+M_2A_2+...+M_2A_n>M_0A_1+M_0A_2+...+M_0A_n$

Do đó suy ra $2\left(M_0A_1+M_0A_2+...+M_0A_n\right)<2m$ hay

$$M_0A_1+M_0A_2+...+M_0A_n<m=\text{Min}\left(MA_1+MA_2+...+MA_n\right)$$

Điều này là vô lí.

Do đó không qua một điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ có giá trị bé nhất.

b) Giả sử n điểm phân biệt $A_1;A_2;A_3;...;A_n$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó. Ta xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ.

+ Trường hợp 1: Với n số chẵn, đặt $n=2k$. Khi đó với mọi điểm M ta luôn có

$$MA_1+MA_{2k}\ge A_1A_{2k};\ MA_2+MA_{2k-1}\ge A_2A_{2k-1};...;\ MA_k+MA_{k+1}\ge A_kA_{k+1}$$

Dấu bằng xẩy ra ở các bất đẳng thức trên lần lượt là M thuộc $A_1A_{2k};A_2A_{2k-1};...;A_kA_{k+1}$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$$MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2k-1} + MA_{2k} \geq A_1A_{2k} + A_2A_{2k-1} + ... + A_kA_{k+1}$$

Đặt $A_1A_{2k} + A_2A_{2k-1} + ... + A_kA_{k+1} = m$ là hằng số

Do đó ta được $MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2k-1} + MA_{2k} \geq m$

Dấu bằng xẩy ta khi M đồng thời thuộc các đoạn thẳng $A_1A_{2k}; A_2A_{2k-1}; ...; A_kA_{k+1}$ hay M thuộc đoạn thẳng A_kA_{k+1}.

Vậy $MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2k-1} + MA_{2k}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng A_kA_{k+1}.

+ Trường hợp 2 Với n là số lẻ, đặt $n = 2k + 1$. Thực hiệm tương tự như trên ta được

$$MA_1 + MA_{2k+1} \geq A_1A_{2k+1};\ MA_2 + MA_{2k} \geq A_2A_{2k}; ...;\ MA_k + MA_{k+2} \geq A_kA_{k+2}$$

Dấu bằng xẩy ra ở các bất đẳng thức trên lần lượt là M thuộc $A_1A_{2k+1}; A_2A_{2k}; ...; A_kA_{k+2}$

Từ đó ta được $MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2k} + MA_{2k+1} \geq A_1A_{2k+1} + A_2A_{2k} + ... + A_kA_{k+2} + MA_{k+1}$

Mà ta lại có $MA_{k+1} \geq 0$ nên ta được

$$MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2k} + MA_{2k+1} \geq A_1A_{2k+1} + A_2A_{2k} + ... + A_kA_{k+2}$$

Vậy $MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2k} + MA_{2k+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $A_1A_{2k+1} + A_2A_{2k} + ... + A_kA_{k+2}$

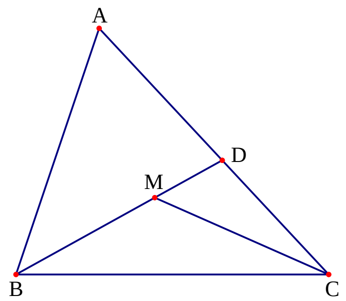
Dấu bằng xẩy ta khi M đồng thời thuộc các đoạn thẳng $A_1A_{2k}; A_2A_{2k-1}; ...; A_kA_{k+1}$ và $MA_{k+1} = 0$ hay M trùng với điểm A_{k+1}.

Ví dụ 41. Cho đa giác có 2015 đỉnh là $A_1; A_2; ...; A_{2015}$. Giả sử $M_1; M_2$ là hai điểm nằm bên trong đa giác $A_1A_2...A_{2015}$ sao cho $M_1M_2 = 1$(đvđd). Chứng minh rằng:

$$\left|\left(M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2015}\right) - \left(M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2015}\right)\right| < 2013$$

Lời giải

Trước hết ta phát biểu và cứng minh bổ đề: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác, khi đó ta có $MB + MC < AB + AC$.



Thật vậy, giả sử tia BM cắt AC tại D. Khi đó áp dụng bất đẳng thức tam giác cho tam giác ABD có $BD < AB + AD$

Do đó ta được $MB + MD < AB + AD$. Mà trong tam giác MCD ta lại có $MC < MD + DC$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$MB + MD + MC < AB + AD + MD + DC \Rightarrow MB + MC < AB + AC$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Vì M_2 nằm trong đa giác $A_1A_2...A_{2015}$ nên M_2 nằm bên trong của một trong các tam giác

$$M_1A_1A_2;\ M_1A_2A_3;\ M_1A_3A_4;...;\ M_1A_{2015}A_1$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử M_2 thuộc miền trong của tam giác $M_1A_1A_2$, khi đó theo bổ đề trên ta được $M_2A_1 + M_2A_2 < M_1A_1 + M_1A_2$ hay $(M_2A_1 + M_2A_2) - (M_1A_1 + M_1A_2) < 0$.

Mặt khác theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$M_1A_1 - M_2A_1 < M_1M_2;\ M_1A_2 - M_2A_2 < M_1M_2;...;\ M_1A_{2015} - M_2A_{2015} < M_1M_2$$

Do đó ta được $(M_2A_3 + M_2A_4 + ... + M_2A_{2015}) - (M_1A_3 + M_1A_4 + ... + M_1A_{2015}) < 2013M_1M_2$

Từ đó $(M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2015}) - (M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2015}) < 2013M_1M_2 = 2013$

Do vài trò của M_1 và M_2 như nhau nên ta cũng có

$$(M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2015}) - (M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2015}) < 2013$$

Như vậy ta được $\left|(M_1A_1 + M_1A_2 + ... + M_1A_{2015}) - (M_2A_1 + M_2A_2 + ... + M_2A_{2015})\right| < 2013$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:

$$\frac{AI}{AD}.\frac{BI}{BE}.\frac{CI}{CF} \le \frac{8}{27}$$

Bài 2. Cho tam giác đều ABC và một điểm M bất kì trên cạnh BC. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC. Tìm vị trí của điểm M trên đoạn BC sao cho đoạn thẳng PQ có độ dài bé nhất.

Bài 3. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Lấy điểm D bất kì trên cạnh BC. Gọi $r_1;r_2$ lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD, ACD. Xác định vị trí của điểm D để tích $r_1.r_2$ có giá trị lớn nhất.

Bài 4. Cho hình thang ABCD(AD//BC) thay đổi có các cạnh bên vuông góc với nhau. Gọi độ dài hai đáy của hình thang là a, b không đổi. Gọi giao điểm của hai đường chéo là O. Đường trung bình của hình thang cắt hai đường chéo tại P, Q. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OPQ theo a, b.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại C có diệm tích bằng 1(đvdt). Về phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông có tâm là D, E, F với các cạnh lương ứng là BC, CA, AB. Chứng minh rằng diện tích tam giác DEF không nhỏ hơn 2(đvdt).

Bài 6. Cho hình vuông ABCD với cạnh có độ dài là 1(đvđd). Trên AB, AD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho tam giác AMN có chu vi bằng 2(đvđd). Các đoạn thẳng AM, CN cắt đường chéo BD lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng độ dài ba đoạn thẳng BE, EF, FD là ba cạnh của một tam giác vuông có diện tích không vượt qua $\frac{1}{6+4\sqrt{2}}$(đvdt).

Bài 7. Cho tam giác nhọn ABC và hai điểm M, N nằm trong tam giác. Các tia AM, AN cắt BC lần lượt tại $A_1; A_2$. Các tia BM, BN cắt AC lần lượt tại $B_1; B_2$. Các tia CM, CN cắt AB lần lượt tại C_1, C_2. Gọi D, E, F theo thứ tự là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, BB_1 và A_1C_1, CC_1 và A_1B_1. Gọi P, Q, R theo thứ tự là giao điểm của AA_2 và BB_1, BB_1 và CC_1, CC_2 và AA_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$X = \frac{AM}{MD} + \frac{BM}{ME} + \frac{CM}{MF} \text{ và } Y = \frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2}$$

Bài 8. Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{ADC} + \widehat{DCB} = 90^0$ và $AD = BC; DC = a; AB = b$. Gọi I, N, J, M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, CD, DB. Gọi S là diện tích của tứ giác INJM. Chứng minh rằng $S \ge \frac{(a-b)^2}{8}$, dấu bằng xẩy ra khi nào?

Bài 9. Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy điểm E bất kì trên cung nhỏ AD. Nói EC, EB cắt OA, OB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN} \ge \sqrt{2}$.

Bài 10. Cho góc $\widehat{xBy}$ khác góc bẹt và một điểm M nằm trong góc đó. Một đường thẳng d quay quanh M cắt các tia Bx, By lần lượt tại A, C. Xác định vị trí của đường thẳng d để:

a) Diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất.

b) Tích $S_{MAB}.S_{MBC}$ có giác trị nhỏ nhất.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} \le 90^0$. Lấy điểm M trên cạnh BC, điểm N trên cạnh AC và điểm E trên cạnh AB. Xác định vì trí của các điểm M, N, E để chu vi tam giác MNE có giá trị bé nhất.

Bài 12. Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} \le MP.NQ \le \frac{1}{2}(AB+CD)(AD+BC)$$

Bài 13. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Trên đoạn AB lấy điểm M, trên đoạn CD lấy điểm N sao cho ba điểm M, N, E thẳng hàng. Chứng minh rằng $MN \le \text{Max}\{AC, BD\}$.

Bài 14. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC. Giả sử $\widehat{BCA} \ge \widehat{ABC} + 30^0$. Chứng minh rằng $\widehat{CAB} + \widehat{COH} < 90^0$.

Bài 15. Cho điểm P nằm trong đường tròn (O). Xét các tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại P, tìm tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

Bài 16. Cho tam giác ABC không vuông tại B và C. Gọi M là một điểm thay đổi và không nằm trên các đường thẳng AB, AC. Xác định vị trí của điểm M để tổng bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và MAC nhận giá trị bé nhất.

Bài 17. Cho tam giác ABC có $AB = c; BC = a; CA = b$ và $m_a; m_b$ là các đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A, B tương ứng, $l_a; l_b$ là các đường phân giác xuất phát từ đỉnh A, B tương ứng. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây tương đường với nhau:

$1) a > b$ $\qquad$ $2) m_a < m_b$ $\qquad$ $3) l_a < l_b$

Bài 18. Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt. Gọi M và m lần lượt là khoảng cách giữa hai điểm xa nhất và hai điểm gần nhất trong bốn điểm đó. Chứng minh rằng $M \ge \sqrt{2}m$. Khi nào đẳng thức xẩy ra.

Bài 19. Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trên cạnh hoặc bên trong tam giác. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $p < OA + OB + OC < 2p$

b) Giả sử $AB \ge BC \ge CA$, điểm Co nằm trong tam giác ABC và AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại A′, B′, C′. Chứng minh rằng $OA + OB + BC < AB + BC$

c) Chứng minh rằng $OA' + OB' + OC' < AB$

Bài 20. Trong các tam giác có chung cạnh BC và góc ở đỉnh còn lại bằng α không đổi thì tam giác nào có chu vi lớn nhất.

Bài 21. Cho tam giác ABC. Trong các đường tròn chứa tam giác ABC thì đường tròn nào có bán kính bé nhất.

Bài 22. Cho tam giác ABC đều. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn có $MA \le MB + MC$. Dấu bằng xẩy ra khi nào?

Bài 23. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O; R). Tìm vị trí điểm M nằm trong đường tròn (O; R) sao cho tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị

a) Bé nhất.

b) Lớn nhất.

Bài 24. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; R’) với $R < R'$. Điểm A cố định trên đường tròn (O; R) và điểm B di động trên đường tròn (O; R’). Với mỗi vị trí của M dựng tam giác đều ABC. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của OC.

Bài 25. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 60^0$. Gọi X và Y lần lượt là các điểm trên các AB và AC sao cho $CA + BC = XA + XB$ và $AB + AY = BC + CY$. Gọi P là một điểm nằm trong tam giác sao cho hình chiếu của P trên AB và AC lần lượt là X và Y. Chứng minh rằng $\widehat{BPC} < 120^0$.

- **Bài 26.** Cho tam giác ABC nhọn có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi P là chân đường cao kẻ từ A xuống BC. Cho $\widehat{BCA} \ge \widehat{ABC} + 30^0$. Chứng minh rằng $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < 90^0$.

- **Bài 27.** Cho lục giác lồi ABCDEF có $AB = BC,\ CD = DE,\ EF = FA$.

- Chứng minh rằng $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \ge \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 28. Cho tam giác ABC với trọng tâm G và độ dài các cạnh $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$. Tìm điểm P trên mặt phẳng tam giác sao cho đại lượng $AP.AG + BP.BG + CP.CG$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a, b, c.

Bài 29. Cho tam giác ABC và M là điểm thuộc miền trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Với $a = BC; b = AC; c = AB; R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 30. Cho tam giác ABC có $BC = a; AC = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{IA^2}{a^2} + \frac{IB^2}{b^2} + \frac{IC^2}{c^2} \ge 1$, Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 31. Cho ABC là một tam giác với tâm đường tròn nội tiếp là I. P là một điểm ở trong tam giác thỏa mãn $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$. Chứng minh rằng $AP \ge AI$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P và I trùng nhau.

Bài 32. Cho tam giác ABC có chu vi không đổi 2p. Gọi M, N, P lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc A, B, C của tam giác ΔABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔMNP.

Bài 33. Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến PB, PC tới nó (B, C là các tiếp điểm), biết $\widehat{BPC} > 90^0$. Trên cung nhỏ BC lấy điểm A, từ A vẽ tiếp tuyến với đường tròn, tiếp tuyến này cắt PB, PC lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng $S_{\Delta PKL} < S_{\Delta ABC}$, trong đó $S_{\Delta PKL}$; $S_{\Delta ABC}$ ký hiệu lần lượt là diện tích ΔPKL, ΔABC.

Bài 34. Ta gọi đường chéo chính của một lục giác lồi là đoạn thẳng nối hai đỉnh và chia lục giác thành hai tứ giác. Chứng minh rằng:

a) Với bất kì một lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì luôn tồn tại một đường chéo chính có độ dài không lớn hơn 2.

b) Với bất kì một lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì luôn tồn tại một đường chéo chính có độ dài lớn hơn $\sqrt{3}$.

Bài 35. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi r và r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường trong nội tiếp và bấn kính đường trong bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC.

Chứng minh rằng $\dfrac{abc}{r} \ge \dfrac{a^3}{r_a} + \dfrac{b^3}{r_b} + \dfrac{c^3}{r_c}$

Bài 36. Cho hình thang ABCD với AD//BC. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng CD, AM, BM. Tìm điều kiện về độ dài hai cạnh đáy của hình thang để giao điểm của hai đường thẳng DP và CQ nằm trong tam giác ABM.

Bài 37. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BE và CF. Lấy điểm M trên đoạn thẳng EF. Gọi $S_A; S_B; S_C$ lần lượt là diện tích tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh $\dfrac{\sqrt{S_B} + \sqrt{S_C}}{\sqrt{S_A}} \le \sqrt{\dfrac{AC + AB}{BC}}$

Bài 38. Gọi $S_A; S_B; S_C$ lần lượt là diện tích của thất giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ và $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$. Biết rằng $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_A}{2} < S_B + S_C < S_A$

Bài 39. Cho ngũ giác ABCDE. Gọi M là giao điểm của AC và BE, N là giao điểm của BD và AC, P là giao điểm của BD và CE, Q là giao điểm của AD và CE và R là giao điểm của BE và AD. Hãy so sánh diện tích của ngũ giác MNPQR với tổng diện tích của năm tam giác MAB, NBC, PCD, QDE, REA.

Bài 40. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên tia AB lấy E và trên tia AC lấy F sao cho $BE = CF = BC$. Giả sử M là điểm nằm trên đường tròn đường kính BC. Chứng minh rằng: $MA + MB + MC \le EF$

Bài 41. Cho tứ giác lồi ABCD và một điểm M bất kì nằm trong tứ giác. Đặt $a = AB + AC + AD$, $b = BA + BC + BD$, $c = CA + CB + CD$ và $d = DA + DB + DC$. Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC + MD \le Max\{a;b;c;d\}.$$

Bài 42. Cho tam giác ABC. Gọi MN, PR, QS lần lượt là hình chiếu vuông góc của AB, BC, CA lên các đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh C, A, B. Gọi r và S lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng $MN + PR + QS \ge 6\sqrt[3]{rS}$

Bài 43. Cho tam giác ABC vuông tại A và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng $\frac{MB^2}{AB^2} + \frac{MC^2}{AC^2} \ge 1$.

Bài 44. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính BC và A là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của A trên BC và D là trung điểm của AC. Đường tròn tâm I nằm trên đường thẳng BC đi qua điểm B, D cắt AC tại E khác C. Gọi M là giao điểm của AH và BE. Xác định vị trí của điểm A để $MA + MD$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 45. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có AH là đường cao. Gọi D là giao điểm của AO với BC. Chứng minh rằng $\frac{HB}{HC} + \frac{DB}{DC} \ge 2\frac{AB}{AC}$

Bài 46. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA, DA lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $\frac{S_{BCD}}{S_{AMN}} \le \left(\frac{BD}{2AC}\right)^2$

Bài 47. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông độ dài đường phân giác của góc vuông không vượt quá nửa độ dài hình chiếu vuông góc của cạnh huyền trên đường thẳng vuông góc với đường phân giác đó.

Bài 48. Cho tam giác ABC nhọn có cạnh AB bé nhất. Trên cạnh BC, AC, lấy lần lượt các điểm M, N. Chứng minh rằng độ dài đường gấp khúc AMNB không nhỏ hơn hai lần độ dài đoạn AB.

Bài 49. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Đường thẳng AO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tại điểm thứ hai là D, đường thẳng BO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OCA tại điểm thứ hai là E, đường thẳng CO cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB tại điểm thứ hai là F. Chứng minh rằng $OD.OE.OF \ge 8R^3$

Bài 50. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Vẽ $NH \perp PD$ tại H. Xác định vị trí của điểm M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

Bài 51. Cho tam giác ABC, điểm M trong tam giác, các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt các cạnh BC,CA, AB tại P, R, Q, kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ABC

a) Chứng minh rằng $MA.BC + MB.CA + MC.AB \ge 4S_{ABC}$

b) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác PQR lớn nhất.

Bài 52. Cho tam giác ABC, lấy điểm C_1 thuộc cạnh AB, A_1 thuộc cạnh BC và B_1 thuộc cạnh CA .Biết rằng độ dài đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 không lớn hơn 1. Chứng minh rằng $S_{ABC} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC)

Bài 53. a) Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và diện tích S. Chứng minh rằng:

$$S \le \frac{1}{16}\left(3a^2 + 2b^2 + 2c^2\right)$$

b) Tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c và diện tích là S. Với ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x+y}, \sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \ge 4\sqrt{xy + yz + zx}.S$$

Bài 54. Cho tam giác ABC có M là điểm nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng trong các tỉ số $\frac{AM}{MD}; \frac{MB}{ME}; \frac{CM}{MF}$ có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và co một tỉ số không nhỏ hơn 2.

Bài 55. Cho tam giác ABC, về phía ngoàn tam giác ABC dựng các tam giác ABC_1; BCA_1; CAB_1 sao cho tổng diện tích của ba tam giác này nhỏ hơn diện tích của tam giác ABC. Qua A_1; B_1; C_1 vẽ tương ứng các đường thẳng song song với BC, CA, AB. Các đường thẳng này cắt nhau tạo thành tam giác MNP.

Chứng minh rằng: $S_{MNP} < 2S_{AB_1CA_1BC_1}$

Bài 56. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Một đường thẳng Δ bất kì đi qua A và gọi $d_{B/\Delta}$; $d_{C/\Delta}$ lần lượt là khoảng cách từ điểm B và C đến đường thẳng Δ. Tìm vì trí của đường thẳng Δ để $d_{B/\Delta} + d_{C/\Delta}$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 57. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng $\frac{4}{9} \le \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} < \frac{1}{2}$

Bài 58. Cho các điểm $A_1; A_2; ...; A_n$ không thẳng hàng và hai điểm B, C khác $A_1; A_2; ...; A_n$ thỏa mãn điều kiện $A_1B + A_2B + ... + A_nB = A_1C + A_2C + ... + A_nC = t$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M thỏa mãn bất đẳng thức $A_1M + A_2M + ... + A_nM < t$.

Bài 59. Cho tam giác ABC và điểm M bất kì. Gọi $d_a; d_b; d_c$ lần lượt là khoảng cánh từ điểm M đến các cạnh BC,CA, AB. Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$.

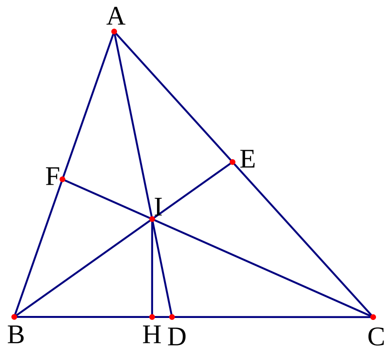
a) Chứng minh rằng nếu M thộc miền góc $\widehat{BAC}$ thì $a.MA \ge bd_b + cd_c$.

b) Giả sử M nằm trên cạnh hoặc bên trong tam giác ABC. Chứng minh $MA.MB.MC \ge 8d_ad_bd_c$

c) Với điểm M thỏa mãn đều kiện ở ý b. Chứng minh rằng

$$MA+MB+MC\ge 2\left(d_a+d_b+d_c\right)$$

HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài 1. Đặt $BC=a;CA=b;AB=c$. Áp dụng tính chất đường phân giác ta được

$$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{CD}{BC-CD}=\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow CD.c=b\left(BC-CD\right)\Rightarrow CD=\frac{a.b}{b+c}$$

Mặt khác ta có CI là đường phân giác của tam giác ADC nên $\frac{AI}{DI}=\frac{AC}{CD}=\frac{b}{CD}$

Từ đó ta được $\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}$ do đó $\frac{AI}{AD}=\frac{b+c}{a+b+c}$.

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{BI}{BE}=\frac{c+a}{a+b+c};\ \frac{CI}{CF}=\frac{a+b}{a+b+c}$

Từ đó $\frac{AI}{AD}.\frac{BI}{BE}.\frac{CI}{CF}=\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{\left(a+b+c\right)^3}$. Ta cần chứng minh được

$$\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{\left(a+b+c\right)^3}\le\frac{8}{27}$$

Thật vậy, dễ thấy $\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}=\frac{2\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=2$

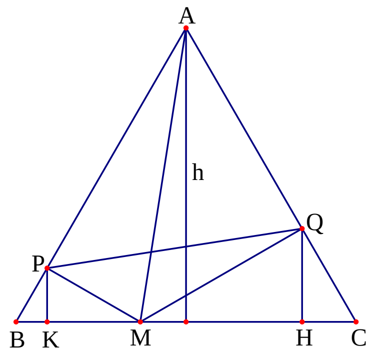
Mà theo bất đẳng thức Cauchy ra có

$$\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{\left(a+b+c\right)^3}\le\frac{1}{27}\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}\right)^3=\frac{1}{27}.8=\frac{8}{27}$$

Hay $\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{\left(a+b+c\right)^3}\le\frac{8}{27}$. Từ đó ta được $\frac{AI}{AD}.\frac{BI}{BE}.\frac{CI}{CF}\le\frac{8}{27}$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác ABC đều.

Bài 2. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử độ dài cạnh tam giác đều ABC là 1(đvđd). Gọi h là độ dài đường cao của tam giác đều ABC, khi đó dễ dàng tính được $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi vẽ PK vuông góc với BC tại K, QH vuông góc với BC tại H.



Ta có $S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}=\frac{1}{2}.h.BC=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.1=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Mặt khác la lại tính được

$$S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}=\frac{1}{2}\left(MP.AB+MQ.AC\right)=\frac{1}{2}\left(MP+MQ\right)$$

Từ đó ta được $MP+MQ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dễ thấy các tam giác vuông MPK và MQH là nửa tam giác đều

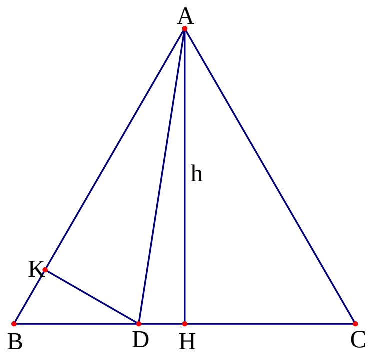
Do đó ta tính được $MK=\frac{\sqrt{3}}{2}MP$ và $MQ=\frac{\sqrt{3}}{2}MQ$

Từ đó suy ra $MK+MK=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(MP+MQ\right)$ hay $KH=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(MP+MQ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$

Mà ta luôn có $QP\ge KH\Rightarrow PQ\ge\frac{3}{4}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của PQ là $\frac{3}{4}$(đvđd), dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi PQ//BC, điều này chỉ xẩy ra khi M là trung điểm của BC.

Bài 3. Vẽ DK vuông góc với AB và đặt $BD=x$. Khi đó dễ dàng tính được $BK=\frac{x}{2}$; $DK=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Tam giác ADK vuông nên ta có $AD^2=AK^2+DK^2=x^2-x+1$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác $S=pr$ ta được



$$S_{ABD}=S_1=r_1.\frac{AB+BD+AD}{2}=r_1.\frac{1+x+\sqrt{x^2-x+1}}{2}$$

Mà $S_1=\frac{1}{2}BD.h=\frac{1}{2}.x.\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên

$$r_1.\frac{1+x+\sqrt{x^2-x+1}}{2}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Hay ta được $r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{x}{x+1+\sqrt{x^2-x+1}}$. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$$S_{ACD}=r_2.\frac{1+(1-x)+\sqrt{x^2-x+1}}{2}=\frac{1}{2}(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow r_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1-x}{2-x+\sqrt{x^2-x+1}}$$

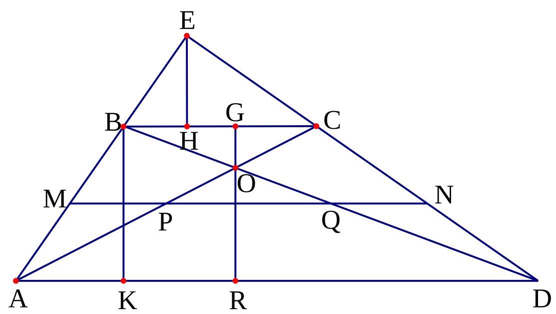
Do đó ta được

$$r_1.r_2=\frac{3}{4}.\frac{x(1-x)}{\left(1+x+\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(2-x+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$$

Mà ta có $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\Rightarrow\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

Từ đó ta được $r_1.r_2\le\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{8}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}$ hay D là trung điểm của BC. Vậy tích $r_1.r_2$ có giá trị lớn nhất là $\frac{2-\sqrt{3}}{8}$, đạt được khi M là trung điểm của BC.

Bài 4. Gọi E là giao điểm của hai cạnh bên của hình thang AB và CD. Vẽ EH vuông góc với BC tại H và BK vuông góc với AD tại K. Qua O vẽ GR song song với BK. Giao điểm của đường trung bình MN với GR là F. Đặt



$$FO=x;GO=h_1;BK=h_2;EH=h_3$$
$$AD=a;BC=b\,(a>b)$$

Khi đó ta được

$$PQ=MN-(MP+NQ)=\frac{a-b}{2}$$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta OPQ\backsim\Delta OCB$ và $\Delta AOD\backsim\Delta COB$ nên ta được

$$\frac{FO}{GO}=\frac{PQ}{BC};\frac{RO}{GO}=\frac{AD}{BC}$$

Từ đó dẫn đến $\begin{cases}\frac{x}{h_1}=\frac{a-b}{2b}\\ \frac{h_2-h_1}{h_1}=\frac{a}{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{h_1}=\frac{a-b}{2b}\\ \frac{h_2}{h_1}=\frac{a+b}{b}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{h_2(a-b)}{2(a+b)}$

Khi đó ta được $S_{POQ}=\frac{1}{2}FO.PQ=\frac{1}{2}.\frac{h_2(a-b)}{2(a+b)}.\frac{a-b}{2}=\frac{h_2.(a-b)^2}{8(a+b)}$

Do đó để diện tích tam giác POQ lớn nhất thì ta cần có h_2 lớn nhất. Ta có $h_2=OG+OR$

Lại chứng minh được $\Delta BEC\backsim\Delta AED$ nên ta được $\frac{h_2+h_3}{h_3}=\frac{a}{b}\Rightarrow h_2=\frac{h_3(a-b)}{b}$

Như vậy ta cần có $EH = h_3$ lớn nhất. Trong tam giác vuông EBC có BC không đổi nên E di động trên nửa đường tròn đường kính BC. Do đó EH lớn nhất khi điểm E nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Điều này có nghĩa là tam giác EBC vuông cân.

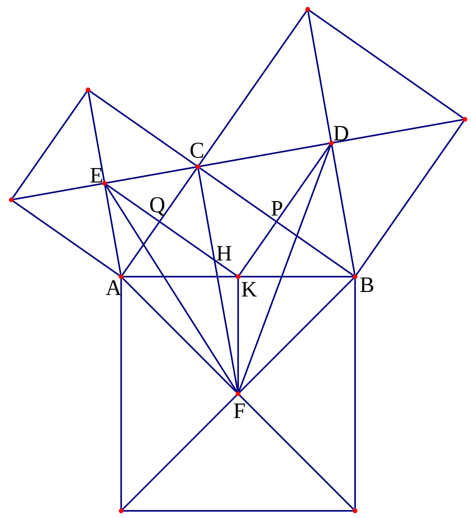
Khi đó $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 45^0$ và $BK = \dfrac{a-b}{2}$. Vậy tam giác POQ có diện tích lớn nhất là

$\dfrac{(a-b)^3}{16(a+b)}$.

Bài 5. Giả sử độ dài các cạnh của tam giác ABC là $BC = a; CA = b; AB = c$.

Gọi trung điểm của AB, BC, CA lần lượt là K, P, Q. Do góc $\widehat{ACB} = 90^0$ nên tứ giác CPKQ là hình chữ nhật. Từ đó suy ra PK đi qua điểm D và KQ đi qua điểm E. Mặt khác ta lại có $\widehat{DCP} = \widehat{ECQ} = 45^0$ nên các điểm D và E nằm trên đường phân giác ngoài của góc $\widehat{ACB}$.

Ta có $DK = KP + PD = QC + CP = \dfrac{1}{2}(a+b)$ nên ta suy ra $KE = \dfrac{1}{2}(a+b)$. Từ đó suy ra tam giác DKE vuông cân tại K nên ta được $KE = KD = \dfrac{a+b}{2}$ và $DE = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$



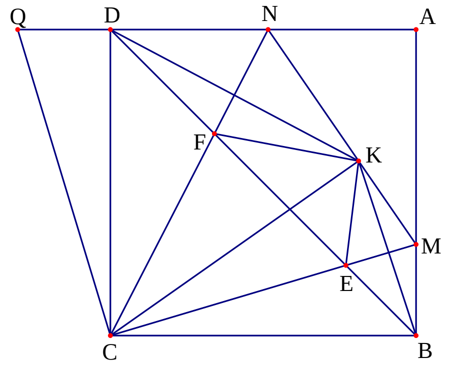
Lại có $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AF}{AK} = \sqrt{2}$ và $\widehat{CAF} = \widehat{CAB} + 45^0 = \widehat{EAK}$ nên $\Delta CAF \backsim \Delta EAK$

Từ đó suy ra $CF = KE.\sqrt{2} = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$. Cũng từ hai tam giác đồng dạng trên ta thu được góc giữa CF và EK bằng góc giữa AC và AE và cùng bằng 45^0. Mà $\widehat{KED} = 45^0$ nên ta được $CF \perp DE$.

Đến đây ta được $S_{DEF} = \dfrac{1}{2}DE.DF = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}.\dfrac{a+b}{\sqrt{2}} = \dfrac{(a+b)^2}{4} \geq ab = 2S_{ABC} = 2$

Do đó ta được $S_{DEF} \geq 2$ (đvdt), dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân.

Bài 6. Quay tam giác BCM theo chiều kim đồng hồ quanh điểm một góc 90^0, khi đó điểm B chuyển thành điểm và điểm M chuyển thành điểm Q, lại được ba điểm A, D, Q thẳng hàng. Ta cần chứng minh điểm M đối xứng với Q qua CN. Thật vậy, ta có $MB = DQ; CM = CQ$. Do đó ta được



$$NQ = DN + DQ = DN + BM = AD - AN + AB - AM$$
$$= AD + AB - \left(AN + AM\right) = 2 - \left(2 - MN\right) = MN$$

Do đó ta được $MQ = MN$ kết hợp với $CM = CQ$ suy ra CN là đường trung trực của đoạn thẳng MQ hay M, Q đối xứng với nhau qua NC.

Trên đoạn MN lấy điểm K sao cho $NK = ND$, suy ra K và D đối xứng với nhau qua CN.

Từ đó ta được $\widehat{CKM} = \widehat{CDQ} = 90^0$. Mặt khác ta có $MK = MN - NK = NQ - ND = DQ = BM$

Từ đó suy ra $\Delta BCM = \Delta KCM$, nên hai điểm B và K đối xứng với nhau qua CM.

Do đó ta được $\widehat{CKF} = \widehat{CDF} = 45^0$ và $\widehat{CKE} = \widehat{CBE} = 45^0$

Suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{CKF} + \widehat{CKE} = 90^0$ nên tam giác EKF vuông tại K.

Mà ta có $EB = EK; FD = FK$ nên suy ra các đoạn thẳng BE, EF, FD là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. Từ đó ta được $EK + KF + EF = BD = EB + FD + EF = \sqrt{2}$

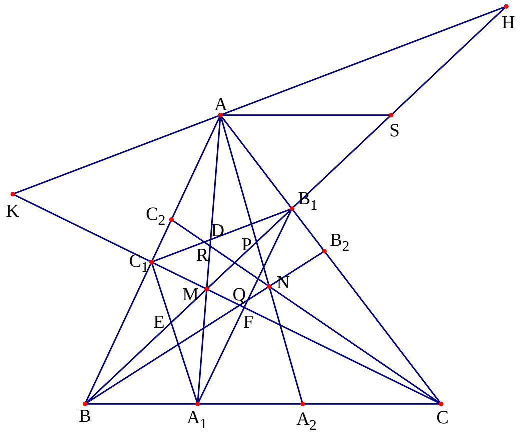
Đặt $KF = x; KE = y$ khi đó ta được $2S_{EKF} = xy$. Để ý là $2\sqrt{xy} \le x + y$ nên $2\sqrt{2S} \le x = y$

Mà ta có $EF^2 = x^2 + y^2 \ge 2xy \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{2xy} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{2}.\sqrt{2S}$

Từ đó ta được $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \ge 2\sqrt{2S} + \sqrt{2}.\sqrt{2S} \Leftrightarrow \sqrt{2} \ge \sqrt{2S}\left(2 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow S \le \dfrac{1}{\left(2 + \sqrt{2}\right)^2}$

Từ đó ta được $S \le \dfrac{1}{6 + 4\sqrt{2}}$, do đó diện tích tam có ba cạnh có độ dài tương ứng bằng BE, EF, FD có độ dài không vượt qua $\dfrac{1}{6 + 4\sqrt{2}}$.

Bài 7.



- Qua A vẽ đường thẳng song song với B_1C_1 cắt BB_1, CC_1 lần lượt tại H và K. Theo định lí Talets ta có

$$\frac{AM}{MD}=\frac{MK}{MC_1}=\frac{KH}{B_1C_1}=\frac{KA}{B_1C_1}+\frac{HA}{B_1C_1}$$

$$=\frac{AC}{CB_1}+\frac{AB}{BC_1}=2+\frac{AB_1}{CB_1}+\frac{AC_1}{BC_1}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta thu được

$$\frac{BM}{ME}=2+\frac{BA_1}{CA_1}+\frac{BC_1}{AC_1};\ \frac{CM}{MF}=2+\frac{CA_1}{BA_1}+\frac{CB_1}{AB_1}$$

Từ đó ta thu được $X=\frac{AM}{MD}+\frac{BM}{ME}+\frac{CM}{MF}=6+\frac{AB_1}{CB_1}+\frac{AC_1}{BC_1}+\frac{BA_1}{CA_1}+\frac{BC_1}{AC_1}+\frac{CA_1}{BA_1}+\frac{CB_1}{AB_1}$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{AB_1}{CB_1}+\frac{AC_1}{BC_1}+\frac{BA_1}{CA_1}+\frac{BC_1}{AC_1}+\frac{CA_1}{BA_1}+\frac{CB_1}{AB_1}\ge 6$

Do đó $X=\frac{AM}{MD}+\frac{BM}{ME}+\frac{CM}{MF}\ge 12$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{CB_1}{AB_1};\ \frac{AC_1}{BC_1}=\frac{BC_1}{AC_1};\ \frac{BA_1}{CA_1}=\frac{CA_1}{BA_1}$

Điều này tương đương với $AB_1=CB_1;\ BC_1=AC_1;\ CA_1=BA_1$ hay M là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 12, xẩy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC.

- Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt tia BB_1 tại S.

Theo định lí Talets ta có $\frac{AP}{PA_2}=\frac{AS}{BA_2}=\frac{AS}{BC}.\frac{BC}{BA_2}=\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{BA_2+CA_2}{BA_2}=\frac{AB_1}{CB_1}+\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{CA_2}{BA_2}$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\frac{BQ}{QB_2}=\frac{BC_1}{AC_1}+\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{AB_2}{CB_2};\ \frac{CR}{RC_2}=\frac{CA_1}{BA_1}+\frac{CA_1}{BA_1}.\frac{BC_2}{AC_2}$

Từ đó ta được

$$Y=\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}=\frac{AB_1}{CB_1}+\frac{BC_1}{AC_1}+\frac{CA_1}{BA_1}+\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{CA_2}{BA_2}+\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{AB_2}{CB_2}+\frac{CA_1}{BA_1}.\frac{BC_2}{AC_2}$$

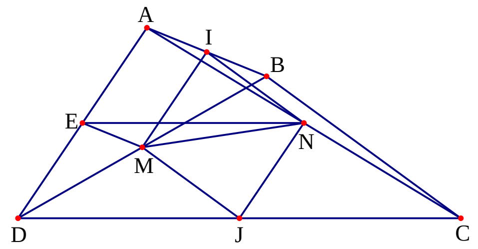
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{AB_1}{CB_1}+\frac{BC_1}{AC_1}+\frac{CA_1}{BA_1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{CA_1}{BA_1}}$

Và $\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{CA_2}{BA_2}+\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{AB_2}{CB_2}+\frac{CA_1}{BA_1}.\frac{BC_2}{AC_2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{CA_1}{BA_1}.\frac{CA_2}{BA_2}.\frac{AB_2}{CB_2}.\frac{BC_2}{AC_2}}$

Mà ta lại có $\frac{AB_1}{CB_1}.\frac{BC_1}{AC_1}.\frac{CA_1}{BA_1}=\frac{S_{ABM}}{S_{BCM}}.\frac{S_{BCM}}{S_{CAM}}.\frac{S_{CAM}}{S_{ABM}}=1$. Tương tự ta cũng có $\frac{CA_2}{BA_2}.\frac{AB_2}{CB_2}.\frac{BC_2}{AC_2}$.

Từ đó ta thu được $Y=\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}\ge 6$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi M, N cùng là trọng tâm tam giác ABC. Vậy giá trị nhỏ nhất của Y là 6, xẩy ra khi M, N cùng là trong tam tam giác ABC.

Bài 8. Trong tam giác ABD có $IA=IB$ và $MD=MB$ nên IM là đường trung bình, suy ra $IM=\frac{1}{2}AD$.



Tương tự ta được

$IN=\frac{1}{2}BC; NJ=\frac{1}{2}AD; MJ=\frac{1}{2}BC$

Mà theo giả thiết $AD=BC$ ta được $IN=NJ=MJ=IM$ nên tứ giác INJM là hình thoi.

Mặt khác ta có $\widehat{MJD}=\widehat{DCB}$ và $\widehat{NJC}=\widehat{ADC}$. Kết hợp với $\widehat{ADC}+\widehat{DCB}=90^0$

Từ đó ta được $\widehat{DJM}+\widehat{NJC}=90^0$ nên suy ra $\widehat{MJN}=90^0$

Do đó tứ giác INJM là hình vuông. Do đó ta được $S=\frac{1}{2}.MN.IJ=\frac{1}{2}MN^2$.

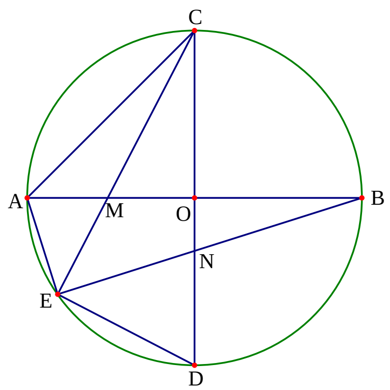
Gọi E là trung điểm của AD, khi đó dễ thấy $EM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}b$ và $EN=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}b$

Xét ba điểm M, N, E ta có $MN\ge|EN-EM|\Rightarrow MN\ge\frac{1}{2}|a-b|$. Từ đó

$S\ge\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a-b)\right]^2=\frac{(a-b)^2}{8}$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi ba điểm M, N, E thẳng hàng, điều này tương đường với tứ giác ABCD là hình thang.

Bài 9. Xét hai tam giác MAC và AEC có $\widehat{ACM}$ chung và $\widehat{MAC}=\widehat{AEC}$ nên $\Delta MAC\backsim\Delta AEC$



Do đó ta được $\frac{AM}{AE}=\frac{AC}{EC}\Rightarrow AM=\frac{AC.AE}{EC}$

Xét hai tam giác OMC và EDC có $\widehat{MOC}=\widehat{DEC}$ và $\widehat{MCO}$ chung nên $\Delta OMC\backsim\Delta EDC$

Do đó ta được $\frac{OM}{ED}=\frac{OC}{EC}\Rightarrow OM=\frac{OC.ED}{EC}$.

Từ đó ta được $\frac{OM}{OA}=\frac{OC}{AC}.\frac{ED}{AE}=\frac{ED}{\sqrt{2}.AE}$.

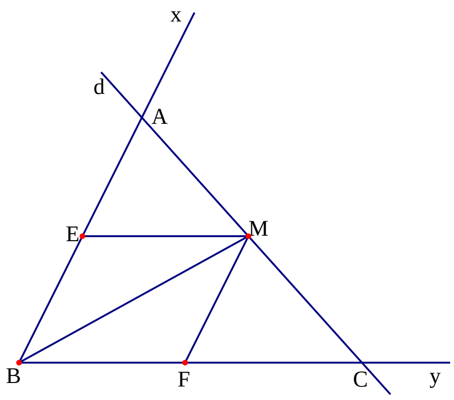
Chứng minh tương tự ta cũng được $\frac{ON}{DN}=\frac{AE}{\sqrt{2}.ED}$. Từ đó ta có

$\frac{OM}{AM}.\frac{ON}{DN}=\frac{ED}{\sqrt{2}.AE}.\frac{AE}{\sqrt{2}.DE}=\frac{1}{2}$

Ta có $\frac{OM}{AM}.\frac{ON}{DN}\le\frac{1}{4}\left(\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{DN}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{DN}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{DN}\right)^2\ge 2$

Từ đó suy ra $\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{DN}\ge\sqrt{2}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{OM}{AM}=\frac{ON}{DN}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$ E là điểm chính giữa cung AD.

Bài 10. a) Vẽ ME//By và MF//BE với E thuộc tia Bx, F thuộc tia By. Khi đó các điểm M,E, F, F cố định nên tứ giác BEMF có diệm tích không đổi.



Dễ thấy hai tam giác AEM và ABC đồng dạng nên

$$\frac{S_{AEM}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AC}\right)^2=\frac{AM^2}{AC^2}\Rightarrow S_{AEM}=\frac{AM^2}{AC^2}.S_{ABC}$$

Tương tự ta được $S_{CMF}=\frac{CM^2}{AC^2}.S_{ABC}$. Do đó suy ra

$$S_{AEM}+S_{CFM}=\left(AM^2+CM^2\right).\frac{S_{ABC}}{AC^2}$$

$$\ge\frac{\left(AM+MC\right)^2}{2}.\frac{S_{ABC}}{AC^2}=\frac{AC^2}{2}.\frac{S_{ABC}}{AC^2}=\frac{S_{ABC}}{2}$$

Hay ta được $S_{AEM}+S_{CFM}\ge\frac{S_{ABC}}{2}$. Do đó ta được $S_{ABC}\ge\frac{S_{ABC}}{2}+S_{BEMF}\Rightarrow S_{ABC}\ge 2S_{BEMF}$

Vậy diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất $2S_{BEMF}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ M là trung điểm của AC, điều này tương đương với E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC.

b) Tam giác ABC có EM//BC nên theo định lí Talets ta có $\frac{EB}{AB}=\frac{MC}{AC}$

Mà ta có $\frac{S_{MEB}}{S_{MAB}}=\frac{EB}{AB}$ nên ta được $\frac{S_{MEB}}{S_{MAB}}=\frac{MC}{AC}$. Chứng minh tương tự ta được $\frac{S_{MBF}}{S_{MBC}}=\frac{AM}{AC}$.

Do đó ta được $\frac{S_{MEB}}{S_{MAB}}+\frac{S_{MBF}}{S_{MBC}}=\frac{AM+MC}{AC}=1$. Do BEMF là hình bình hành nên

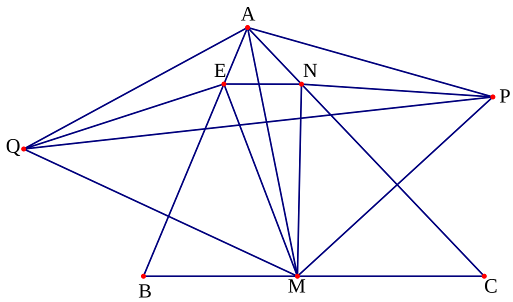
$S_{MEB}=S_{MBF}=\frac{1}{2}S_{BEMF}$

Suy ra $\frac{1}{S_{MAB}}+\frac{1}{S_{MBC}}=\frac{2}{S_{BEMF}}\Rightarrow\frac{S_{MAB}+S_{MBC}}{S_{MAB}.S_{MBC}}=\frac{2}{S_{BEMF}}\Rightarrow S_{MAB}.S_{MBC}=\frac{1}{2}S_{ABC}.S_{BEMF}$

Mà S_{BEMF} không đổi và $S_{ABC}\ge 2S_{BEMF}$ nên ta được $S_{MAB}.S_{MBC}=S_{BEMF}^2$

Vậy tích $S_{MAB}.S_{MBC}$ có giác trị nhỏ nhất là S_{BEMF}^2, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi M là trung điểm của AC, điều này tương đương với E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Bài 11. Gọi P, Q lần lượt là hai điểm đối xứng với M qua AC, AB. Khi đó dễ dàng chứng minh được



$AM=AP=AM$, $MN=MP$ và $ME=MQ$

Gọi p là chu vi tam giác MNE, khi đó

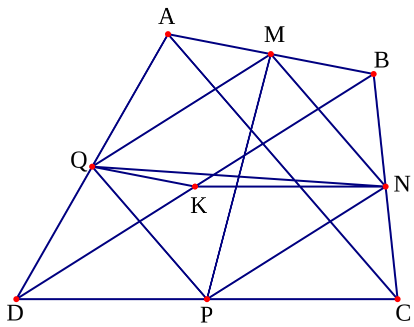
$p=MN+NE+ME$

Từ đó ta được $p=QE+EN+NP\ge PQ$,

dấu bằng xẩy ra khi các điểm Q, E, N, F thẳng hàng.

Tam giác APQ cân tại A có $\widehat{PAQ}=2\widehat{BAC}$, do đó PQ nhỏ nhất khi cạnh AP nhỏ nhất, điều này tương đường với AM nhỏ nhất hay $AM\perp BC$. Như vậy để chu vi tam giác MNE nhỏ nhất thì M là chân đường cao hạ từ A xuống BC và các điểm Q, E, N, F thẳng hàng. Khi đó dễ dàng chứng minh được N, E lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C. Vậy chu vi tam giác MNE nhỏ nhất khi và chỉ khi M, N, E là các chân đường cao hạ từ A, B, C lần lượt xuống các cạnh BC, CA, AB.

Bài 12. Gọi K là trung điểm của BD, khi đó ta có QK là đường trung bình của tam giác ABD và NK là đường trung bình của tam giác BCD. Từ đó ta được



$QK=\frac{1}{2}AB;NK=\frac{1}{2}CD\Rightarrow QK+NK=\frac{1}{2}(AB+CD)$

Mà ta luôn có $NQ\le QK+NK$ do đó

$QN\le\frac{1}{2}(AB+CD)$

Hoàn toàn tương tự ta được $MP\le\frac{1}{2}(AD+BC)$

Từ đó ta được $MP.NQ\le\frac{1}{2}(AB+CD)(AD+BC)$

Mặt khác ta có MQ là đường trung bình của tam giác ABD nên ta được $S_{AMQ}=\frac{1}{2}S_{ABD}$

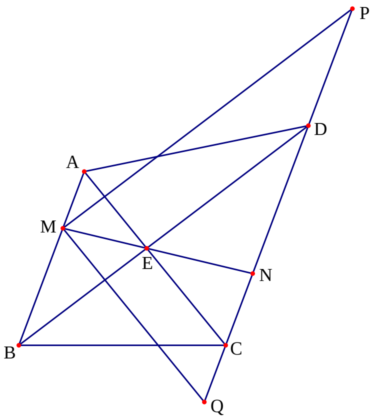
Hoàn toàn tương tự ta có $S_{CNP} = \frac{1}{4}S_{BCD}$ nên ta được

$S_{AMQ} + S_{CNP} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Dễ thấy $S_{MNPQ} \le \frac{1}{2}MP.NQ$ nên ta được $S_{ABCD} \le MP.NQ$

Kết hợp các kết quả trên ta được $S_{ABCD} \le MP.NQ \le \frac{1}{2}\left(AB+CD\right)\left(AD+BC\right)$

Bài 13. Ta xét các trường hợp sau



+ Trường hợp 1: Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau. Từ điểm M kẻ các đường thẳng song song với BD và AC, cắt CD lần lượt tại P và Q.

Khi đó tứ giác MPDB và MACQ là các hình bình hành.

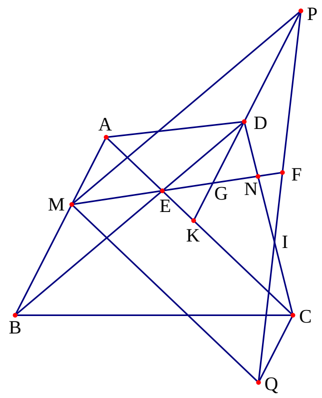
Nên ta được $BD = MP$ và $AC = MQ$.

Do điểm N thuộc đoạn CD nên

$MN \le Max\left\{MP;MQ\right\}$

Do đó ta được $MN \le Max\left\{AC,BD\right\}$

+ Trường hợp 2: Hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.



Giả sử trong tứ giác ABCD có $\widehat{A} + \widehat{D} > 180^0$, khi đó ta được $\widehat{B} + \widehat{C} < 180^0$. Từ điểm D kẻ các đường thẳng song song với AB cắt MN, AC lần lượt tại G và K. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác DKC với ba điểm thẳng hàng E, G, N ta được $\frac{GK}{GD}.\frac{ND}{NC}.\frac{EC}{EK} = 1$

Từ đó ta được $\frac{GK}{GD}.\frac{ND}{NC} = \frac{EK}{EC} < 1 \Rightarrow \frac{GK}{GD} < \frac{NC}{ND}$

Mà ta có AB//DK nên theo định lí Talets ta được

$\frac{GK}{GD} = \frac{MA}{MB}$.

Kẻ CQ song song với AB, MQ song song với AC, DP song song với AB, MP song song với BD.

Tứ giác AMQC và BMPD là các hình bình hành.

Suy ra $AC = MQ; AM = CQ$ và $BD = MP; BM = DP$ nên ta được CQ//AB//DP.

Gọi I là giao điểm của PQ với CD, ta có $\frac{CI}{DI} = \frac{CQ}{DP} = \frac{MA}{MB}$

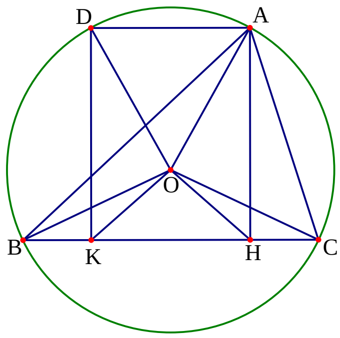
Từ đó ta được $\frac{NC}{ND} > \frac{IC}{ID} = \frac{MA}{MB}$, điều này dẫn đến $DI \ge DN$

Gọi giao điểm của MN với PQ là F, ta được $MN < MF$.

Mà ta có $MF < Max\{MP; MQ\} = Max\{AC; BD\}$. Do đó ta được $MN < Max\{AC, BD\}$

Kết hợp hai trường hợp trên ta được $MN \le Max\{AC, BD\}$. Bài toán được chứng minh.

Bài 14. Qua A kẻ AD song song với BC với D thuộc đường tròn (O). Hạ DK vuông góc với BC tại K. Khi đó A và D đối xứng nhau qua đường trung trực của đoạn thẳng BC.



Từ $\widehat{BCA} \ge \widehat{ABC} + 30^0 \Rightarrow 2\widehat{BCA} - 2\widehat{ABC} = 60^0$ nên ta được $\widehat{AOB} - \widehat{AOC} \ge 60^0$. Do đó ta được

$\widehat{AOB} - \widehat{BOD} \ge 60^0$ nên $\widehat{AOD} \ge 60^0$ mà tam giác AOD cân nên $AD \ge OD = R$. Ta có

$$\begin{aligned} OH + R &= OH + OC = OK + OC \\ &> KC = KH + HC = AD + HC \ge R + HC \end{aligned}$$

Do đó $OH > HC \Rightarrow \widehat{COH} < \widehat{OCH}$. Suy ra

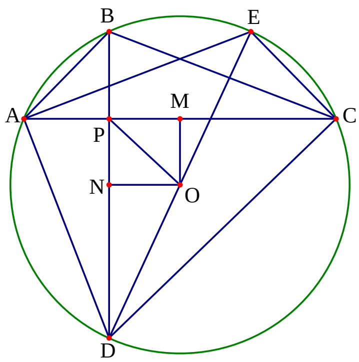
$2\widehat{CAB} + 2\widehat{COH} = \widehat{BOC} + 2\widehat{COH} < \widehat{BOC} + 2\widehat{OCH} < 180^0$

Hay ta được $2\widehat{BAC} + 2\widehat{COH} < 180^0 \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{COH} < 90^0$

Bài 15.

Kẻ đường kính BE của (O). Đặt

$p = AB + BC + CD + DA$



Hai tam giác vuông ABE và PAD có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$ nên $\Delta ABE \backsim \Delta PAD$

Do đó ta được $\frac{AB}{AP} = \frac{BE}{AD} \Rightarrow AB.AD = BE.PA = 2R.PA$

Hoàn toàn tương tự ta được $\Delta CBE \backsim \Delta PCD$ nên ta được $BC.CD = 2R.AC$.

Từ đó ta được

$AB.AD + CB.CD = 2R.(PA + PC) = 2R.AC$

Từ giả thiết $AC \perp BD$ suy ra $AE = CD; AD = CE$

Do đó ta được $AB^2 + CD^2 = AB^2 + AE^2 = BE^2 = 4R^2$; $AD^2 + BC^2 = CE^2 + BC^2 = 4R^2$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD, suy ra $OM\perp AC; ON\perp BD$. Từ đó suy ra

$$AC^2+BD^2=4AM^2+4BN^2=4\left(R^2-OM^2\right)+4\left(R^2-ON^2\right)=8R^2-\left(OM^2+ON^2\right)=8R^2-OP^2$$

Đặt $d=OP$. Ta có $AC^2.BD^2=16\left(R^2-OM^2\right)\left(R^2-ON^2\right)=16\left(R^4-R^2.d^2+OM^2.ON^2\right)$

Từ $p=AB+BC+CD+DA$ ta được

$$\begin{aligned}p^2=\left(AB+BC+CD+DA\right)^2&=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2+2\left(AB.AD+BC.CD\right)\\&+2\left(AB.BC+AD.CD\right)+2\left(AB.CD+AD.BC\right)\\=8R^2+2AC.BD+4R\sqrt{8R^2-4d^2+2AC.BD}&\end{aligned}$$

Thay $AC.BD=4\sqrt{R^4-R^2.d^2+OM^2.ON^2}$ ta được

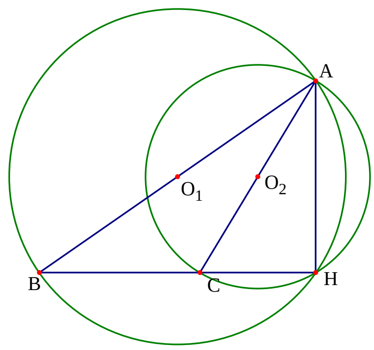
$$p^2=8R^2+8\sqrt{R^4-R^2.d^2+OM^2.ON^2}+4R\sqrt{8R^2-4d^2+4\sqrt{R^4-R^2.d^2+OM^2.ON^2}}$$

Như vậy $p^2\ge 8R^2+8\sqrt{R^4-R^2.d^2}+4R\sqrt{8R^2-4d^2+4\sqrt{R^4-R^2.d^2}}=16\left(R^2+R\sqrt{R^2-d^2}\right)$

Nên ta được $p\ge\sqrt{R^2+R\sqrt{R^2-d^2}}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $OM.ON=0$ tương đương với AC hoặc BD là đường kính của đường tròn (O)

Vậy tứ giác ABCD có chu vi nhỏ nhất khi và chỉ khi AC hoặc BD là đường kính của đường tròn (O).

Bài 16. Hạ AH vuông góc với BC tại H, khi đó H khác B và C.



Các đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ lần lượt ngoại tiếp các tam giác ABH, ACH có đường kính là AB, AC.

Do đó tổng các bán kính của hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ là $\dfrac{AB+AC}{2}$

Gọi $R_1;R_2$ lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMB và AMC.

+ Xét đường hợp M và H trùng nhau, khi đó đường tròn ngoại tiếp AMB và AMC lần lượt là $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$

Do đó ta được $R_1+R_2=\dfrac{AB+AC}{2}$

+ Xét điểm M nằm ngoài các đường thẳng AB, AC và M khác H. Khi đó hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ cắt nhau tại A và H nên điểm M không thuộc đường tròn $\left(O_1\right)$ hoặc không thuộc đường tròn $\left(O_2\right)$.

Giả sử M không thuộc đường tròn $\left(O_1\right)$, ta được $\widehat{AMB}\ne 90^0$

Do $\widehat{AMB} \neq 90^0$ nên AB là một dây cung khác đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB.

Từ đó suy ra $AB < 2R_1 \Rightarrow R_1 > \dfrac{AB}{2}$. Tương tự ta cũng có $R_2 \geq \dfrac{AC}{2}$. Do đó

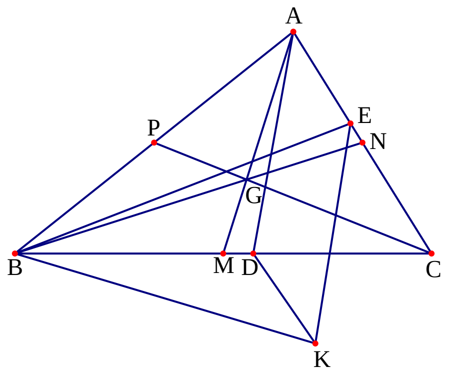
$R_1 + R_2 > \dfrac{AB + AC}{2}$.

Kết hợp lại ta được $R_1 + R_2 \geq \dfrac{AB + AC}{2}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi M và H trùng nhau.

Vậy tổng bán kính các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và MAC nhận giá trị bé nhất là $\dfrac{AB + AC}{2}$. Giá trị này đạt được khi và chỉ khi M là chân đường cao hạ từ A xuống AB.

Bài 17. Trước hết ta phát biểu không chứng minh nhận xét: Hai tam giác ABC và MNP có $AB = MN; AC = MP$ khi đó $CB > NP$ khi và chỉ khi $\widehat{BAC} > \widehat{NMP}$.

+ Ta chứng minh $a > b \Leftrightarrow m_a < m_b$.



Thật vậy, giả sử AM, BN, CP là ba đường trung tuyến của tam giác ABC ứng với đỉnh A, B, C và G là trọng tâm tam giác ABC.

Hai tam giác APC và BPC có chung cạnh CP và $AP = BP$.

Hai tam giác APG và BPG có chung cạnh PG và $AP = BP$ nên theo nhận xét trên ta có

$$a > b \Leftrightarrow BC > AC \Leftrightarrow \widehat{BPC} > \widehat{APC}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{BPG} > \widehat{APG} \Leftrightarrow BG > AG \Leftrightarrow BN > AM$$

Hay ta được $a > b \Leftrightarrow m_a < m_b$

+ Ta chứng minh $a > b \Leftrightarrow l_a < l_b$

Thật vậy, gọi AD và BE là các đường phân giác của tam giác ABC. Dựng hình bình hành ADKE.

Giả sử $a > b$, khi đó ta được $\widehat{A} > \widehat{B}$ hay ta được $\widehat{DKE} = \widehat{DAE} = \dfrac{\widehat{A}}{2} = \dfrac{\widehat{B}}{2} = \widehat{EBD}$

Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BD}{BD + DC} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow BD = \dfrac{ca}{b + c}$

Hoàn toàn tương tự ta được $AE = \dfrac{bc}{a + c}$

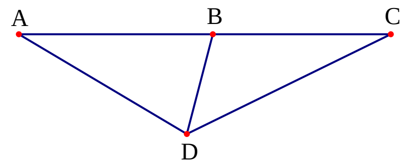
Do $a > b$, nên ta được $BD > AE = KD$ suy ra $\widehat{DKB} > \widehat{DBK}$

Từ đó ta được $\widehat{KEB} = \widehat{DKE} + \widehat{DKB} > \widehat{EBK} + \widehat{DBK} = \widehat{EBK}$

Suy ra $BE > EK = AD$ hay $l_a < l_b$. Vậy ta được $a > b \Rightarrow l_a < l_b$

Dễ thấy $a = b \Leftrightarrow l_a = l_b$. Do đó nếu $l_a < l_b$ thì bằng phương pháp phản chứng ta chứng minh được $a > b$. Từ đó suy ra $a > b \Leftrightarrow l_a < l_b$. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 18. Giả sử bốn điểm phân biệt đó là A, B, C, D.



Khi đó có các trường hợp sau

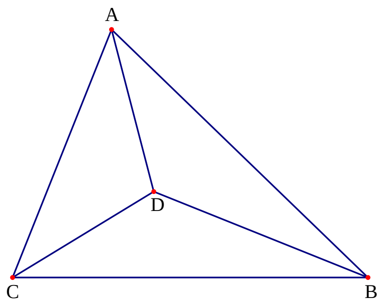
+ Trường hợp 1: Trong bốn điểm A, B, C, D có ba điểm thẳng hàng. Không mất tính tổng quat ta giả sử ba điểm đó là A, B, C và B nằm giữa A, C. Khi đó

$M \ge AC = AB + BC \ge 2m > \sqrt{2}m$

Do đó ta được $M > \sqrt{2}m$

+ Trường hợp 2: Trong bốn điểm A, B, C, D không có ba điểm nào thẳng hàng. Khi đó ta có hai khả năng như sau:

- Trong bốn điểm A, B, C, D có một điểm nằm trong tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại. Chẳng hạn tam giác ABC chứa điểm D. Khi đó trong ba góc $\widehat{ADB}; \widehat{BDC}; \widehat{CDA}$ tồn tại một góc không lớn hơn 120^0. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\widehat{ADB} \ge 120^0 > 90^0$.



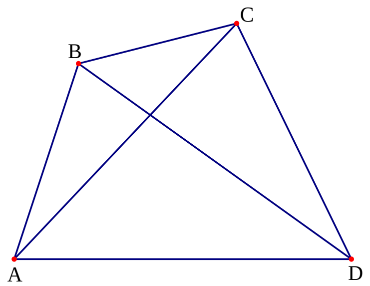
Khi đó ta có

$M^2 \ge AB^2 > AD^2 + BD^2 \ge 2m^2 \Rightarrow M > \sqrt{2}m$

- Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ giác lồi, chẳng hạn tứ giác ABCD, không mất tính tổng quát ta giả sử trong tứ giác ABCD thì góc $\widehat{A}$ lớn nhất, suy ra $\widehat{A} \ge 90^0$ và $\widehat{A} = 90^0$ khi tứ giác ABCD là hình chữ nhật

Khi đó ta có

$M^2 \ge BD^2 \ge AB^2 + AD^2 \ge 2m^2 \Rightarrow M \ge \sqrt{2}m$



Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi

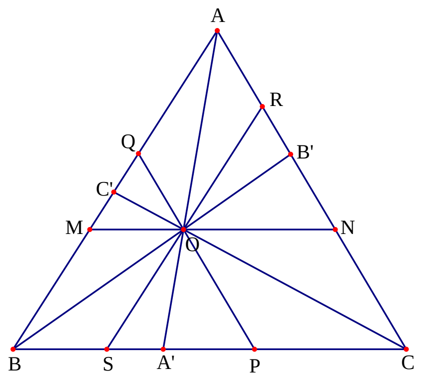
$$\begin{cases} BD^2 = AB^2 + AD^2 \\ AB = AD = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 90^0 \\ AB = AD \end{cases}$$

Hay hình chữ nhật ABCD có $AB = AD$ tương đương với ABCD là hình vuông.

Ngược lại khi ABCD là hình vuông thì $M = BD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}m$

Vậy ta được $M \ge \sqrt{2}m$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi ABCD là hình vuông.

Bài 19.



a) Điểm O không thể thuộc cả ba cạnh của tam giác ABC. Chẳng hạn O không thuộc cạnh BC.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} OA+OB\ge AB \\ OB+OC>BC \\ OC+OA\ge AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\left(OA+OB+OC\right)>AB+BC+CA=2p$$

Từ đó suy ra $OA+OB+OC>p$

Điểm O không thể ít nhất hai đỉnh của tam giác ABC, giả sử $O\ne A;\ O\ne B$ khi đó ta được

$$\begin{cases} OA+OB\le CA+CB \\ OB+OC\le AB+AC \\ OC+OA<BC+BA \end{cases}\Rightarrow 2\left(OA+OB+OC\right)<2\left(AB+BC+CA\right)=4p$$

Từ đó ta được $OA+OB+OC<2p$. Kết hợp lại ta được $p<OA+OB+OC<2p$

b) Qua điểm O kẻ đường thẳng MN song song với BC với M thuộc AB và N thuộc AC, đường thẳng PQ song song với CA với P thuộc BC và Q thuộc AB, đường thẳng RS song song với AB với R thuộc AC và S thuộc BC. Khi đó dễ dàng chứng minh được các tam giác ABC, QMO, OSP, RON đồng dạng với nhau.

Mà ta có $AB\ge BC\ge CA$ nên ta được $QM\ge MO\ge OQ;OS\ge SP\ge PO;RO\ge ON\ge NR$

Ta có $OA<OQ+QA\le MQ+QA;OB<OS+SB\le MB+SB;OC<OP+PC\le SP+PC$

Cộng thaeo vế các bất đẳng thức trên ta được

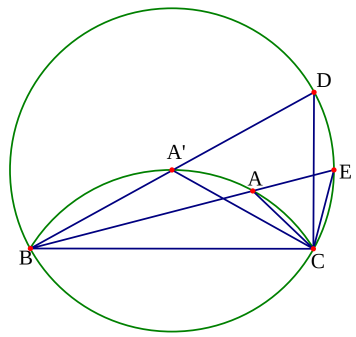
$$OA+OB+OC=\left(MQ+QA+MB\right)+\left(SN+SP+PC\right)=AB+BC$$

Do đó ta được $OA+OB+OC<AB+BC$

c) Ta có $\left[\begin{array}{l} OA'\le Max\left(OS;OP\right)=OS=MB \\ OB'\le Max\left(OR;ON\right)=OR=AQ \\ OC'\le Max\left(OM;OQ\right)=OM\le QM \end{array}\right.$

Từ đó ta được $OA'+OB'+OC'<AQ+QM+MB=AB$.

Bài 20. Giả sử tam giác A′BC cân tại A′ và $\widehat{BA'C}=\alpha$.



Xét tam giác ABC không cân tại A có $\widehat{BAC}=\alpha$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử điểm A và điểm A′ nằm cùng phía so với BC, khi đó điểm A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác A′BC.

Vẽ đường tròn (A′) có bán kính $A'B=A'C=R$, dựng đường kính BD của đường tròn (A′).

Khi đó dễ thấy $\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\widehat{BA'C}=\frac{1}{2}\alpha$.

Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE=AC$

Khi đó ta được $\widehat{BEC}=\widehat{ACE}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\alpha=\widehat{BDC}$

Từ đó suy ra điểm E thuộc đường tròn (A′). Vì hai điểm A và A′ phân biệt nên BE là một dây cung khác đường kính của đường tròn (A′).

Từ đó ta được $AB+AC=AB+AE=BE<BD<A'B+A'C$.

Do đó chu vi tam giác ABC bé hơn chu vi tam giác A′BC.

Vậy trung các tam giác chung hai đỉnh B, C và góc ở đỉnh thứ ba là α thì tam giác cân tại đỉnh thứ ba có chu vi lớn nhât.

Bài 21. Bạn đọc tự vẽ hình

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC vuông hoặc tù, chẳng hạn tam giác ABC có $\widehat{BAC}\ge 90^0$.

Khi đó xét đường tròn đường kính BC. Gọi O là trung điểm của BC, thì O là tâm của đường tròn $\left(O;\frac{BC}{2}\right)$

Dễ dàng chứng minh được $AO\le\frac{BC}{2}$. Do đó đường tròn $\left(O;\frac{BC}{2}\right)$ chứa tam giác ABC.

Mặt khác nếu đường tròn $\left(O';R'\right)$ khác chứa tam giác ABC, khi đó ta được $BC<2R'$ hay $R'>\frac{BC}{2}$

Vậy trong các đường tròn chứa tam giác ABC vuông hoặc tù thì đường tròn lấy cạnh lớn nhất của tam giác làm đường kính là đường tròn có bán kính bé nhất.

+ Trường hợp tam giác ABC nhọn. Giả sử đường tròn $\left(O;R\right)$ ngoại tiếp tam giác ABC.

Do tam giác ABC nhọn nên điểm O nằm trong tam giác ABC. Gọi các tia đối của tia OA, OB, OC lần lượt là Ox, Oy, Oz. Khi đó ba góc $\widehat{xOy};\ \widehat{yOz};\ \widehat{zOx}$ phủ kín mặt phẳng chứa tam giác ABC.

Giả sử đường tròn $(O';\, R')$ chứa tam giác ABC, khi đó

- Nếu hai điểm O và O′ trùng nhau thì $R = OA = O'A \le R'$
- Nếu hai điểm O và O′ không trùng nhau, khi đó điểm O′ thuộc miền trong của một trong ba góc. Không mất tính tổng quát ta giả sử O′ nằm trong góc $\widehat{xOy}$, khi đó tam giác O′AB chứa tam giác OAB(nhưng không trùng với nó). Từ đó ta được

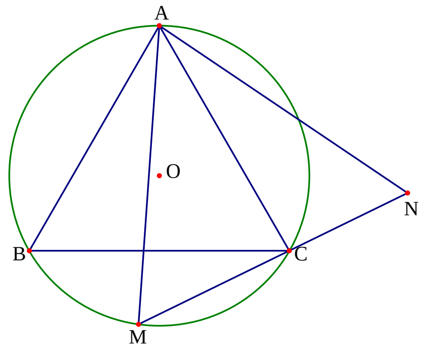
$O'A + O'B > OA + OB = 2R$, suy ra một trong hai đoạn O′A, O′B lớn hơn R, chẳng hạn

$O'A > R \Rightarrow R' \ge O'A > R$

Vậy trong các đường tròn chứa tam giác nhọn ABC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bé nhất.

Bài 22. Dựng tam giác đều AMN sao cho góc $\widehat{MAN}$ cùng chiều với góc $\widehat{BAC}$ (tính theo chiều kim đồng hồ). Khi đó ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ nên

$\Delta BAM = \Delta CAN \Rightarrow BM = NC$



Từ đó ta được

$MA = MN \le MC + NC = MC + MB$,

Do đó $MA \le MB + MC$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MN = MC + NC \Leftrightarrow$ điểm C thuộc đoạn thẳng MN hay M trùng với B hoặc C, hoặc C nằm giữa M và N.

+ Nếu C nằm giữa M và N thì ta được $\widehat{MAC} < \widehat{MAN} = \widehat{BAC}$, suy ra điểm M nằm trong góc $\widehat{BAC}$

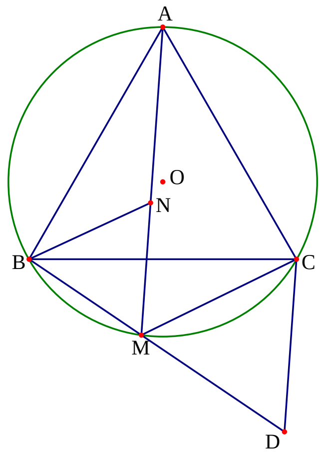
Lại có $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^0$ nên M thuộc cung BC không chứa điểm A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ngược lại nếu M thuôc cung BC không chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì góc $\widehat{MAC}$ cùng chiều với góc $\widehat{MAN}$ và $\widehat{AMC} = 60^0 = \widehat{AMN}$ nên tia MC trùng với tia MN và C nằm giữa hai điểm M và N.

+ Nếu điểm M trùng với B hoặc C, khi đó ta luôn có $MA = MB + MC$

Vậy với mọi điểm M ta luôn có $MA \le MB + MC$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M thuộc cung BC không chứa điểm A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 23. a) Giả sử $AB = BC = CA = a$ với $a = \sqrt{3}R$.



Nếu điểm M trùng với một trong ba đỉnh của tam giác ABC thì hiển nhiên ta có $MA + MB + MC = 2a$

Giả sử M không trùng với các điểm A, B, C và M thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

Khi đó các cung $\overset{\frown}{ABM}; \overset{\frown}{ACM}$ đều có số đo lớn hơn 120^0 nên cung nhỏ $\overset{\frown}{AM}$ có số đo lớn hơn 120^0.

Mà các cung lớn $\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{AC}$ có số đo bằng 120^0.

Từ đó ta được $MA > AB = a$. Goài ra ta có

$MC + MC > BC = a$

Suy ra $MA + MB + MC > 2a$.

Trường hợp điểm M thuộc các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{AC}$, chứng minh tương tự ta được

$MA + MB + MC > 2a$.

Vậy $MA + MB + MC$ đạt giá trị bé nhất bằng 2a khi và chỉ khi M trùng với một trong ba điểm A, B, C.

b) Giả sử M thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Khi đó lấy điểm N trên đoạn AM sao cho $BM = MN$. Từ đó ta chứng minh được $\Delta ABN = \Delta CBM$ nên $CM = AN$. Từ đó ta được

$AM = AN + MN = BM + CM$.

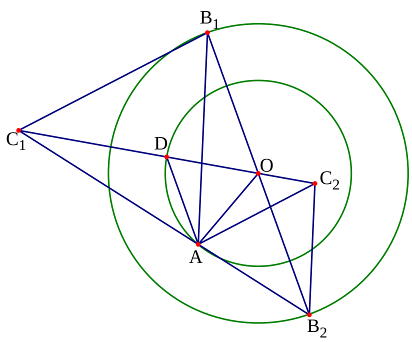
Từ đó ta được $MA + MB + MC = 2MA \le 4R$. Dấu bằng xẩy ra khi AM là đường kính của đường tròn $(O;R)$ hay M là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

Trường hợp điểm M thuộc các cng nhỏ $\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{AC}$, chứng minh tương tự ta được

$MA + M + MC \le 4R$.

Vậy $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4R khi và chỉ khi M là điểm chính giữa một trong ba cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}; \overset{\frown}{BC}; \overset{\frown}{CA}$.

Bài 24. Vẽ tam giác đều AOD cùng chiều với tam giác đều ABC (tính theo chiều ngược kim đồng hồ).



Vì $\widehat{BAC} = \widehat{OAD} = 60^0$ và hai góc $\widehat{BAC}; \widehat{OAD}$ cùng chiều nên $\widehat{OAB} = \widehat{DAC}$. Ngoài ra ta có

$DA = OA = OD = R$ và $CA = BA$ nên ta được

$\Delta DAC = \Delta OAB$. Từ đó ta được $DC = OB = R'$.

Mà ta có $OC + DC \ge OC = DC - OD$, do đó ta suy ra được $R + R' \ge OC \ge R' - R$. Ta cần dựng được các tam giác AB_1C_1 và AB_2C_2 với $B_1; B_2 \in (O; R')$ sao cho $OC_1 = R + R'; OC_2 = R' - R$

Dựng tam giác đều AOD, suy ra điểm D thuộc đường tròn $(O; R)$

+ Kéo dài OD một đoạn $DC_1 = R'$. Dựng tam giác đều AB_1C_1 cùng chiều với tam giác đều AOD.

Khi đó ta được $\Delta AOB_1 = \Delta ADC_1$ nên ta được $OC_1 = DC_1 = R'$ nên $B_1 \in (O; R')$

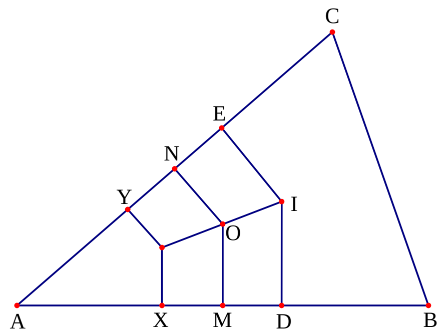
Mặt khác ta có $OC_1 = OD + DC_1 = R + R'$. Vậy OC có giá trị lớn nhất bằng $R + R'$.

+ Kéo dài OD một đoạn $OC_2 = R' - R$ thì ta được $DC_2 = OD + OC_2 = R'$

Dựng tam giác AB_2C_2 cùng chiều với AOD. Khi đó dễ thấy $\Delta AOB_2 = \Delta ADC_2$

Nên $OB_2 = DC_2 = R' \Rightarrow B_2 \in (O; R')$. Mặt khác $OC_2 = R' - R$ nên OC đạt giá trị bé nhất là $R' - R$

Bài 25. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và hình chiếu của I trên AB, AC lần lượt là D, E. Gọi O là trong điểm của IP và M, N lần lượt là hình chiếu của O trên AB, AC.



Khi đó ta được M, N lần lượt là trung điểm của DX và EY.

Từ giả thiết $CA + BC = XA + XB$ và $AB + AY = BC + CY$ ta được

$$AX = \frac{AB + BC - CA}{2};\ AY = \frac{BC + CA - AB}{2}$$

Từ đó suy ra $AD = AE = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

Từ đó suy ra $BD = AB - AD = AB - \dfrac{CA + AB - BC}{2} = \dfrac{AB + BC - CA}{2} = AX$.

Do M là trung điểm của XD nên M là trung điểm của AB. Hoàn toàn tương tự ta cũng được N là trung điểm của AC. Như vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do $\widehat{BAC} < 60^0$ nên ta được O và A nằm cùng một phía so với BC. Từ đó $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta có

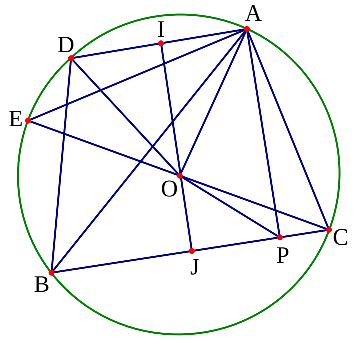
$$\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\widehat{IBC} - \widehat{ICB}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Mặt khác từ $\widehat{BAC} < 60^0$ nên ta có $2\widehat{BAC} < 90^0 + \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{BOC} < \widehat{BIC}$

Do đó I nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác cân BOC vì O và I nằm cùng phía so với BC. Tuy nhiêm do điểm O là trung điểm của PI, nên P phải nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

Từ đó ta được $\widehat{BPC} < \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

- **Bài 26.** Từ A vẽ đoạn thẳng song song với BC cắt vòng tròn tại D, vậy ADBC là hình thang cân có hai góc đáy bằng nhau $\widehat{C} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD}$. Theo giả thiết $\widehat{C} \geq \widehat{ABC} + 30^0$ nên ta được $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} \geq \widehat{ABC} + 30^0$ suy a $\widehat{ABD} \geq 30^0$



- Do đó ta được $\widehat{AOD} \geq 60^0$ nên ta được $AD \geq R$ là bán kính đường tròn (O). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, khi đó ta có $IA = JP \geq \dfrac{R}{2}$.
- Trong một tam giác vuông đường huyền dài hơn mỗi cạnh nên ta được $OP > IP \geq \dfrac{R}{2}$ (1).
- Cũng vậy, trong tam giác vuông OJC ta có $JC < OC$ nên $JC < R$.
- Nếu $JP \geq \dfrac{R}{2}$ thì ta được $JC - JP < \dfrac{R}{2}$ nên $PC < \dfrac{R}{2}$ (2). Kéo dài bán kính CO cắt đường tròn tại E.
- Từ (1) và (2) suy ra $OP > PC$ nên ta được $\widehat{PCO} > \widehat{COP}$, suy ra $\widehat{BAE} > \widehat{COP}$.
- Vậy nếu $\widehat{CAB} + \widehat{BAE} = 90^0$ thì ta được $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < 90^0$.
- **Bài 27.** Bạn đọc tự vẽ hình
- Áp dụng bất đẳng thức Ptoleme cho tứ giác ACDE ta được $DE.AC + DC.AE \geq DA.CE$.
- Mà ta có $DE = DC$ nên ta được $DE.\left(AC + AE\right) \geq DA.CE$. Suy ra $\dfrac{DE}{DA} \geq \dfrac{CE}{AC + AE}$
- Tương tự ta có $\dfrac{FA}{FC} \geq \dfrac{EA}{CE + CA}$ và $\dfrac{BC}{BE} \geq \dfrac{CA}{EA + EC}$
- Cộng các bất đẳng thức trên ta được $\dfrac{BC}{BE} + \dfrac{DE}{DA} + \dfrac{FA}{FC} \geq \dfrac{CE}{AC + AE} + \dfrac{EA}{CE + CA} + \dfrac{CA}{EA + EC}$
- Mà theo bất đẳng thức Nesbitt ta thu được $\dfrac{CE}{AC + AE} + \dfrac{EA}{CE + CA} + \dfrac{CA}{EA + EC} \geq \dfrac{3}{2}$

- Để có dấu bằng ta phải có dấu bằng ở ba bất đẳng thức Ptoleme và ở bất đẳng thức Nesbitz. Dấu bằng ở bất đẳng thức Nesbitz xảy ra khi tam giác ACE đều, như thế $\widehat{CAE} = 60^0$. Vì ACDE là tứ giác nội tiếp nên góc $\widehat{D} = 120^0$. Do đó các tam giác ABC, CDE, EFA phải bằng nhau (Tam giác ABC cân, vì vậy các góc của nó bằng 30^0, 120^0, 30^0 và cạnh AC là cạnh của tam giác đều). Như thế lục giác có tất cả các cạnh đều bằng nhau và tất cả các góc bằng 120^0. Vậy nó là lục giác đều. Ngược lại, hiển nhiên là với lục giác đều, ta có dấu bằng xảy ra.

Bài 28. Bạn đọc tự vẽ hình

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BGC. Nối dài trung tuyến AL cắt đường tròn này tại K. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AC, AB tương ứng.

- Áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác BGL, ta có $\dfrac{BG}{\sin\widehat{BLG}} = \dfrac{BL}{\sin\widehat{BGK}}$.
- Tương tự, áp dụng định lý hàm số sin cho CGL, ta có $\dfrac{CG}{\sin\widehat{CLG}} = \dfrac{CL}{\sin\widehat{CGK}}$.
- Nhưng L là trung điểm của BC và $\sin\widehat{BLG} = \sin\widehat{CLG}$ nên ta được $\dfrac{BG}{CG} = \dfrac{\sin\widehat{CGK}}{\sin\widehat{BGK}}$.
- Ta có $BK = 2R.\sin\widehat{BGK}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.
- Tương tự $CK = 2R.\sin\widehat{CGK}$, do đó ta suy ra $\dfrac{CK}{BK} = \dfrac{BG}{CG}$ nên ta được $\dfrac{BG}{CK} = \dfrac{CG}{BK}$.
- Tương tự ta có $\dfrac{AG}{BG} = \dfrac{\sin\widehat{BGN}}{\sin\widehat{AGN}} = \dfrac{\sin\widehat{BGN}}{\sin\widehat{CGN}}$.
- Vì BGCK là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BKC} = \widehat{BGN}$ suy ra $BC = 2R.\sin\widehat{BKC} = 2R.\sin\widehat{BGN}$
- Từ đó ta được $\dfrac{BC}{CK} = \dfrac{\sin\widehat{BGN}}{\sin\widehat{CGK}} = \dfrac{AG}{BG}$, từ đó ta được

$\dfrac{BG}{CK} = \dfrac{AG}{BC}$; $BC : CK : BK = AG : BG : CG$.

- Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Ptoleme cho tứ giác PBKC ta được

$PK.BC \le BP.CK + CP.BK$.

- Từ đó ta có $PK.AG \le BP.BG + CP.CG$. Suy ra

$(AP + PK)AG \le AP.AG + BP.BG + CP.CG$

- Hay $AK.AG \le AP.AG + BP.BG + CP.CG$. Dấu bằng xảy ra khi P nằm trên đường tròn giữa C và B, đồng thời P nằm trên AK. Do đó giá trị này đạt được khi P trùng với G. Khi đó ta tính được

- $$AP.AG + BP.BG + CP.CG = AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{3}$$

Bài 29. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C và S_1, S_2, S_3, S lần lượt là diện tích tam giác MBC, MCA, MAB, ABC. Khi đó ta có

$$S_1 + S_2 + S_3 = S \Leftrightarrow \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(h_a + h_b + h_c\right) = \left(h_a + h_b + h_c\right)\left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}\right) \ge \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{h_a + h_b + h_c} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{b\sin C + c\sin A + a\sin B}$$

$$= \sqrt{\frac{bc + ca + ab}{2R}} \le \sqrt{\frac{\frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2}{2}}{2R}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{h_a^2}{x} = \frac{h_b^2}{y} = \frac{h_c^2}{z} \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ a = b = c \end{cases}$ hay M là trọng tâm tam giác đều ABC

Bài 30. Ta có $IA = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}} \Rightarrow IA^2 = \frac{(p-a)^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{2(p-a)^2}{1+\cos A} = \frac{2(p-a)^2}{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{bc(p-a)}{p}$

Vậy ta được $IA^2 = \frac{bc(p-a)}{p}$. Tương tự ta được $IB^2 = \frac{ca(p-b)}{p}$; $IC^2 = \frac{ab(p-c)}{p}$

Do đó suy ra $\frac{IA^2}{a^2} = \frac{bc(p-a)}{a^2 p} = \frac{abc}{2p}\left(\frac{b}{a^3} + \frac{c}{a^3} - \frac{1}{a^2}\right)$

Tương tự cũng có $\frac{IB^2}{b^2} = \frac{abc}{2p}\left(\frac{c}{b^3} + \frac{a}{b^3} - \frac{1}{b^2}\right)$ và $\frac{IC^2}{c^2} = \frac{abc}{2p}\left(\frac{a}{c^3} + \frac{b}{c^3} - \frac{1}{c^2}\right)$

Nên ta được $T = \frac{IA^2}{a^2} + \frac{IB^2}{b^2} + \frac{IC^2}{c^2} = \frac{abc}{2p}\left[\left(\frac{a}{c^3} + \frac{b}{a^3} + \frac{c}{b^3}\right) + \left(\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3}\right) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a}{c^3} + \frac{a}{c^3} + \frac{1}{a^2} \ge \frac{3}{c^2}$; $\frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^3} + \frac{1}{b^2} \ge \frac{3}{a^2}$; $\frac{c}{b^3} + \frac{c}{b^3} + \frac{1}{c^2} \ge \frac{3}{b^2}$

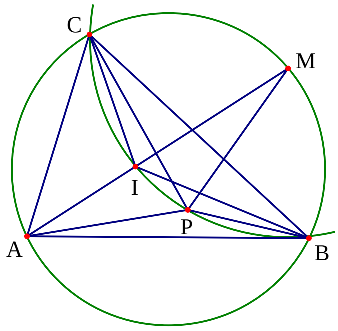
Do đó suy ra $\frac{a}{c^3} + \frac{b}{a^3} + \frac{c}{b^3} \ge \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Tương tự ta cũng được $\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \ge \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Do đó suy ra: $T \ge \frac{abc}{2p}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \Leftrightarrow T \ge \frac{1}{2p}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \ge 2c$; $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \ge 2a$; $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2b$

Suy ra $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \ge a + b + c = 2p$

Từ đó ta được $T \ge 1$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay tam giác ABC đều



- **Bài 31.** Ta có $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}+\widehat{PBC}+\widehat{PCB}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}$

. Dựa vào giả thiết ta tính được

- $\widehat{PBC}+\widehat{PCB}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)=\frac{1}{2}\left(180^2-\widehat{BAC}\right)=90^0-\frac{1}{2}$

- Từ đó suy ra

$$\widehat{BPC}=180^0-\left(\widehat{PBC}+\widehat{PCB}\right)=180^0-\left(90^0-\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right)$$ -

-

$$=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

- Mặt khác ta lại có $\widehat{BIC}=180^0-\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)=90^0+\frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

- Do đó ta được $\widehat{BPC}=\widehat{BIC}$. Điều này dẫn đến B, C, I, P nằm trên một đường tròn. Đường tròn đó chính là đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCI mà tâm là điểm M ở chính giữa cung BC. Điểm M cũng chính là giao điểm của phân giác AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- Từ tam giác APM ta có $AP+PM\ge AM=AI+IM=AI+PM$. Do đó ta được $AP\ge AI$

.

- Đặc biệt $AP=AI$ khi và chỉ khi P nằm trên đoạn thẳng AI, tức đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai điểm P và I trùng nhau.

Bài 32. Dễ thấy NP, PM, MN là phân giác ngoài của các góc A, B, C.

Suy ra tam giác MNP nhọn với các đường cao MA, NB, PC.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, khi đó ta được

$$S_{MNP}=\frac{1}{2}\left(BC.JM+CA.JN+AB.JP\right)=p.R$$

ở đây R là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MNP. Ta chứng minh được $R\ge 2r$.

Từ đó ta được $\frac{1}{2}r\left(MN+PN+PM\right)=pR\ge 2pr$

Suy ra $MN+NP+PM\ge 4p$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác MNP đều hay tam giác ABC đều

Bài 33. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PKL. Ta có $\widehat{ILK}=\frac{1}{2}\widehat{PLK}$ (1)

Và $\widehat{PLK}=\widehat{LAC}+\widehat{LCA}=2\widehat{LAC}$. Mà $\widehat{LAC}=\widehat{ABC}\Rightarrow\widehat{PLK}=2\widehat{ABC}$ (2)

Từ đó ta được $\widehat{ILK}=\widehat{ABC}$. Tương tự ta có $\widehat{IKL}=\widehat{ACB}$. Suy ra $\Delta ILK \backsim \Delta ABC$ nên $\frac{S_{\Delta IKL}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{KL}{BC}\right)^2$

Gọi h, r, S, p lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh P, bán kính đường tròn nội tiếp, diện tích, nửa chu vi của tam giác PKL, khi đó ta có

$$\frac{S_{PKL}}{S_{IKL}}=\frac{h}{r}=\frac{\frac{2S}{KL}}{\frac{S}{p}}=\frac{2p}{KL}=\frac{2BP}{KL}\Rightarrow S_{PKL}=\frac{2BP}{KL}.S_{IKL}$$. Từ đó ta được $\frac{S_{\Delta PKL}}{S_{\Delta ABC}}=2.\frac{BP.KL}{BC^2}$

Mặt khác ta lại có $2.KL<KL+KP+PL=2p=2.BP\Rightarrow 2.KL.BP<2.BP^2$.

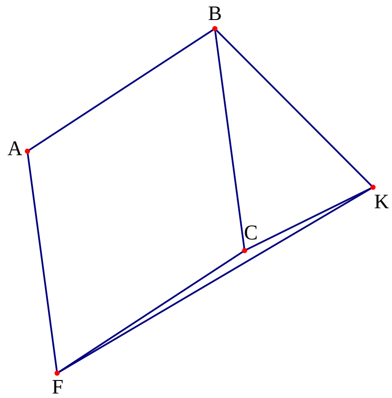
Do $\widehat{BPC}>90^0$ nên ta được $PB^2+PC^2<BC^2$ hay $2.PB^2<BC^2$. Suy ra $2.BP.KL<BC^2$

Từ các điều trên ta được $\frac{S_{PKL}}{S_{ABC}}<1\Leftrightarrow S_{\Delta PKL}<S_{\Delta ABC}$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 34. Xét lục giác ABCDEF. Gọi số đo các góc trong của lục giác là $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},\widehat{D},\widehat{E},\widehat{F}$.

Khi đó ta được $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=720^0$

Kẻ các đường chéo AC, AD, AE của lục giác. Khi đó áp dụng định lí về tổng ba góc của một tam giác ta tính được $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=720^0$



Dễ dàng chứng minh được trong các cặp góc $\widehat{A};\ \widehat{B}$, $\widehat{C};\ \widehat{D}$, $\widehat{E};\ \widehat{F}$ luôn tồn tại một cặp góc khôn lớn hơn 240^0 (nhưng lớn hơn 180^0) và tồn tại một cặp góc không nhỏ hơn 240^0.

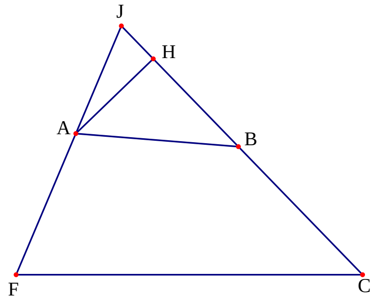
a) Giả sử ta có $\widehat{FAB}+\widehat{ABC}\le 240^0$, ta sẽ chứng minh đường chéo $CF\le 2$. Thật vậy, dựng hình thoi ABKF, ta có

$$\widehat{KBC}=\widehat{ABC}-\left(180^0-\widehat{FAB}\right)=\left(\widehat{FAB}+\widehat{ABC}\right)-180^0\le 240^0-180^0=60^0$$

Từ đó do tam giác KBC cân nên ta được $KC\le BC=1$

Suy ra $CF\le KC+KF\le 1+1=2$

b) Giả sử $\widehat{FAB}+\widehat{ABC}\ge 240^0$, ta sẽ chứng minh đường chéo $CF>\sqrt{3}$.



Thật vậy, kéo dài FA và BC cắt nhau tại J.

Đặt $AJ=a;\ BJ=b;\ \widehat{AJB}=\alpha$

Khi đó từ $\widehat{FAB}+\widehat{ABC}\ge 240^0$ suy ra $\alpha\ge 60^0$ và $\cos\alpha\le\dfrac{1}{2}$

Trong tam giác AJB có $1=AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

Thật vậy, khi $BH\le BJ$ thì ta có

$$AB^2=AH^2+BH^2=AH^2-\left(b-IH\right)^2=AH^2+b^2+JH^2-2b.JH=a^2+b^2-2ab.\cos\alpha$$

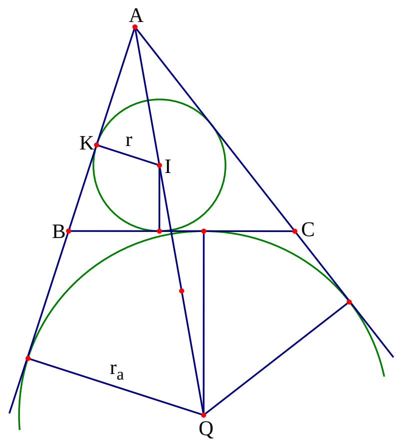
Xét trường hợp $BH>BJ$, lập luận tương tự ta cũng được $AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$.

Trong tam giác FJC có

$$\begin{aligned}CF^2=JF^2+JC^2-2JF.JC.\cos\alpha&=\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2-2\left(a+1\right)\left(b+1\right)\cos\alpha\\&=\left(a^2+b^2-2ab\cos\alpha\right)+2\left(a+b+1\right)-2\left(a+b+c\right)\cos\alpha\\&\ge 3+2a+2b-\left(a+b+1\right)=a+b+2>AB+2=3\end{aligned}$$

Từ đó ta được $CF>\sqrt{3}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 35. Với kí hiệu như hình bên ta có $AK=p-a;AH=p$, trong đó $2p=a+b+c$



Ta có $\Delta AKI\backsim\Delta AHQ$ nên ta được

$$\frac{r}{r_a}=\frac{IK}{HQ}=\frac{AK}{AH}=\frac{p-a}{p}\Rightarrow r_a=\frac{rp}{p-a}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $r_b=\dfrac{pr}{p-b};\ r_c=\dfrac{pr}{p-c}$

Xét hiệu $T=\dfrac{abc}{r}-\left(\dfrac{a^3}{r_a}+\dfrac{b^3}{r_b}+\dfrac{c^3}{r_c}\right)$ ta được

$$\begin{aligned}T=\frac{abc}{r}-\left(\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c}\right)&=\frac{abc}{r}-\frac{a^3\left(p-a\right)}{rp}-\frac{b^3\left(p-b\right)}{rp}-\frac{c^3\left(p-c\right)}{rp}\\&=\frac{1}{rp}\left[pabc-a^3\left(p-a\right)-b^3\left(p-b\right)-c^3\left(p-c\right)\right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $T\ge 0\Leftrightarrow pabc-a^3\left(p-a\right)-b^3\left(p-b\right)-c^3\left(p-c\right)\ge 0$.

Thật vậy, vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$.

Đặt $P=2\left[pabc-a^3\left(p-a\right)-b^3\left(p-b\right)-c^3\left(p-c\right)\right]$

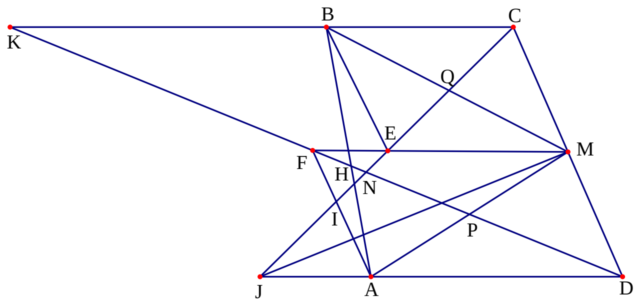
Khi đó ta có

$$\begin{aligned}P&=(a+b+c)abc-a^3(b+c-a)-b^3(c+a-b)-c^3(a+b-c)\\&=a^2bc+b^2ca+c^2ab-a^3b-a^3(c-a)-b^3c-b^3(a-b)-c^3a-c^3(b-c)\\&=a^2b(c-a)-a^3(c-a)+b^2c(a-b)-b^3(a-b)+c^2a(b-c)-c^3(b-c)\\&=a^2(c-a)(b-a)+b^2(a-b)(c-b)+c^2(b-c)(a-c)\\&=(c-b)(b-a)(a^2-b^2)+b^2(a-b)^2+c^2(b-c)(a-c)\end{aligned}$$

Dễ thấy với $a\ge b\ge c$ thì $P\ge 0$ nên $T\ge 0$

Từ đó suy ra $\frac{abc}{r}\ge\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 36. Đặt $BC=a;\ AD=b$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt CQ tại E và cắt DK tại F. Ta có tứ giác ADMF là hình bình hành và tứ giác BCME cũng là hình bình hành.



Do đó ta được

$DJ=2ME=2a;\ CK=2MF=2b$

Để điểm N nằm trong tam giác AMB thì N phải thuộc đoạn PH và N thuộc đoạn IQ.

Hay ta cần có $\frac{DP}{DN}\le 1\le\frac{DH}{DN}$ và $\frac{CQ}{CN}\le 1\le\frac{CI}{CN}$

Do $\frac{DN}{NK}=\frac{DJ}{CK}$ nên ta suy ra $\frac{DP}{DN}=\frac{DP}{DK}:\frac{DN}{DK}=\frac{1}{4}:\frac{2a}{2a+2b}=\frac{a+b}{4a}$

Từ đó ta được $\frac{DP}{DN}\le 1$ khi và chỉ khi $a\ge\frac{b}{3}$. Lại có

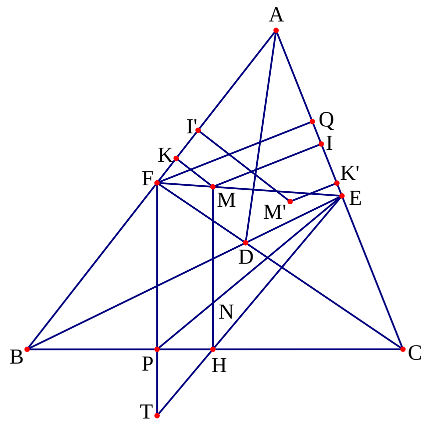
$\frac{DH}{DN}=\frac{DH}{DK}:\frac{DN}{DK}=\frac{b}{3b-a}:\frac{2a}{2a+2b}=\frac{b(a+b)}{a(3b-a)}$

Tờ đó ta được $\frac{DH}{DN}\ge 1$ khi và chỉ khi $ab+b^2\ge 3ab-a^2\Leftrightarrow a^2+b^2-ab\ge 0$, điều này hiển nhiên đúng.

Vậy để $\frac{DP}{DN}\le 1\le\frac{DH}{DN}$ thì ta cần có $a\ge\frac{b}{3}$. Hoàn toàn tương tự thì để $\frac{CQ}{CN}\le 1\le\frac{CI}{CN}$ ta cần có $b\ge\frac{a}{3}$.

Như vậy điểm N nằm trong tam giác AMB khi và chỉ khi $\frac{1}{3}\le\frac{a}{b}\le 3$ hay $\frac{1}{3}\le\frac{BC}{AD}\le 3$

Bài 37. Đặt $BC = a; AC = b;\ AB = c$. Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với BC, CA, AB tại H, I, K. Kẻ FP, FQ lần lượt vuông góc với BC, CA tại P và Q. Đoạn thẳng EP cắt MH tại N. Theo định lí Talets ta có $\frac{MN}{FP} = \frac{EM}{EF} = \frac{MI}{FQ}$



Vì CF là đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$ nên ta được $FP = FQ$ nên suy ra $MN = MI$.

Từ E kẻ đường vuông góc xuống BC và BA, chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$NH = MK$

Từ đó ta được $MI + MK = MN + NH = MH$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{2S_B} + \sqrt{2S_C} = \sqrt{b.MI} + \sqrt{c.MK} \le \sqrt{(b+c)(MI+MK)} = \sqrt{(b+c)MH}$$

$$= \sqrt{(b+c)\frac{MH.a}{a}} = \sqrt{\frac{b+c}{a}}.\sqrt{2S_A}$$

Từ đó ta được $\frac{\sqrt{S_B} + \sqrt{S_C}}{\sqrt{S_A}} \le \sqrt{\frac{b+c}{a}}$ hay $\frac{\sqrt{S_B} + \sqrt{S_C}}{\sqrt{S_A}} \le \sqrt{\frac{AC+AB}{BC}}$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{MI}{MK} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow MI.c = MK.b$.

Lấy điểm M′ đối xứng với M qua đường phân giác AD. Kẻ M′I′ và M′K′ lầm lượt vuông góc với AB, AC tại I′ và K′. Khi đó ta được $M'I' = MI;\ M'K' = MK$.

Từ đó ta được $S_{M'AB} = \frac{1}{2}M'I'.c = \frac{1}{2}MI.c = \frac{1}{2}MK.b = \frac{1}{2}M'K'.b = S_{M'AC}$

Suy ra M′ nằm trên đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC.

Vậy đẳng thức xẩy ra khi M là giao điểm của EF với Ax, trong đó Ax là đường đối xứng với đường trung tuyến hạ từ A qua tia phân giác AD.

Bài 38. Đặt $A_1A_2 = a;\ A_1A_3 = b;\ A_1A_4 = c$.

Do $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ là thất giác đều nên trong tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ ta có

$$A_3A_4 = A_4A_5 = a;\ A_1A_3 = A_3A_5 = b;\ A_1A_4 = A_1A_5 = c$$

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ nội tiếp ta có

$A_1A_4.A_3A_5 = A_1A_3.A_4A_5 + A_3A_4.A_1A_5$

Hay ta có $ab+ac=bc\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{a}{c}=1$.

Ta lại có $\Delta A_1A_2A_3 \backsim \Delta B_1B_2B_3$ nên ta được $\frac{B_1B_2}{B_1B_3}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3}$ suy ra $B_1B_2=\frac{a^2}{b}$

Hoàn tương tự ta tính được $C_1C_2=\frac{a^2}{c}$.

Mọi thất giác đều đồng dạng với nhau nên ta được

$$\frac{S_B}{S_A}+\frac{S_C}{S_A}=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\Rightarrow \frac{S_B+S_C}{S_A}=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

Do $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2\le\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)^2-\frac{2a^2}{bc}=1-\frac{2a^2}{bc}<1$

Để ý là $b\ne c$ nên ta được $\frac{1}{2}<\frac{S_B+S_C}{S_A}<1$. Từ đó suy ra $\frac{S_A}{2}<S_B+S_C<S_A$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 39. Giả sử $S_{ABC}=\text{Min}\left\{S_{ABC}, S_{BCD}, S_{CDE}, S_{DEA}, S_{ABE}\right\}$

Khi đó ta có $S_{ABCDE}<S_{EAD}+S_{ECD}+S_{ABCQ}$.

Vì Q nằm trên đoạn EC, mà lại có $S_{ABE}\ge S_{ABC}$ nên ta được $S_{ABE}\ge S_{ABQ}$

Hoàn toàn tương tự ta được $S_{BCD}\ge S_{BCQ}$

Từ đó ta được $S_{ABCQ}=S_{ABQ}+S_{BCQ}\le S_{ABE}+S_{BCD}<S_{ABE}+S_{BCD}+S_{ABC}$

Từ đó suy ra $S_{ABCDE}<S_{ABC}+S_{ABE}+S_{AED}+S_{ECD}+S_{BCD}$

Vậy ta được $S_{MNPQR}<S_{AMB}+S_{BNC}+S_{COD}+S_{DQE}+S_{AER}$

Bài 40. Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Điểm M nằm trên cung BC không chứa điểm A. Khi đó tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn.

Áp dụng định lí Ptoleme ta được $MA.BC=MB.AC+MC.AB$

Từ đó ta được $MA=MB.\frac{AC}{BA}+MC.\frac{AB}{BC}$. Suy ra ta được

$$MA+MB+MC=MB\left(\frac{AC}{BC}+1\right)+MC\left(\frac{AB}{BC}+1\right)=MB.\frac{AC+BC}{BC}+MC.\frac{AB+BC}{BC}$$

$$=MB.\frac{AF}{BC}+MC.\frac{AE}{BC}\le\sqrt{\left(MB^2+MC^2\right)\left(\frac{AF^2}{BC^2}+\frac{AE^2}{BC^2}\right)}$$

$$=\sqrt{BC^2.\frac{AF^2+AE^2}{BC^2}}=\sqrt{AF^2+AE^2}=EF$$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{MB}{\frac{AF}{BC}}=\frac{MC}{\frac{AE}{BC}}\Leftrightarrow\frac{MB}{AF}=\frac{MC}{AE}$

Khi đó ta được $\Delta MBC \backsim \Delta AFE$ nên ta được $\widehat{MBC} = \widehat{AFE}$

+ Trường hợp 2: Điểm M nằm trên cung BC có chứa A. Gọi M′ là điểm đối xứng với M qua BC, khi đó ta được $MA < M'A$ và $MB = M'B$; $MC = M'C$

Khi đó suy ra $MA + MB + MC < M'A + M'B + M'C$

Hoàn toàn tương tự như trường hợp 1 ta chứng minh được $M'A + M'B + M'C \le EF$

Từ đó suy ra $MA + MB + MC < EF$.

Kết luận: Vậy ta luôn có $MA + MB + MC \le EF$. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi điểm M nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{AFE}$

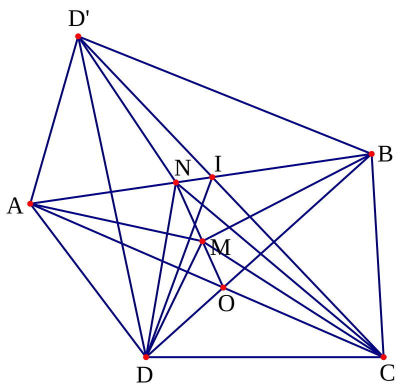
Bài 41. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác, khi đó ta luôn có $MB + MC \le AB + AC$

Thật vậy, gọi giao điểm của BM với AC là I khi đó ta có

$$AB + AC = AB + AI + CI \ge BI + CI = BM + IM + CI \ge BM + CM$$

Bổ đề được chứng minh.

Gọi O là giao điểm của AC với BD. Vì M nằm trong tứ giác ABCD nên M thuộc một trong các tam giác OAB, OBC, OCD, OAD. Không mất tính tổng quát ta giả sử điểm M thuộc tam giác OAB. Gọi N là giao điểm của tia OM với AB. Khi đó điểm M thuộc các tam giác NAC, NBD.



Áp dụng bổ đề trên ta được $\begin{cases} MA + MC \le NA + NC \\ MB + MD \le NB + BD \end{cases}$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD &\le NA + NB + NC + ND \\ &= AB + NC + ND \end{aligned}$$

Điểm N nằm trên đoạn thẳng AB. Gọi D′ là điểm đối xứng với điểm D qua AB. Vì hai điểm C, D nằm về một phía so với AD nên D′, C′ nằm về hai phía so với AB. Suy ra hai đoạn thẳng CD′ và AB cắt nhau. Gọi I là giao điểm của CD′ với AB. Do M thuộc đoạn AB nên I thuộc tia NA hoặc tia NB.

Từ đó ta được $NC + ND \le AC + AD$ hoặc $NC + ND \le BC + BD$

Từ đó ta được $NC + ND \le Max\left\{AC + AD;\ BC + BD\right\}$

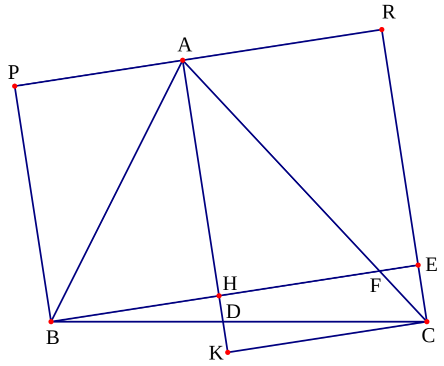
Suy ra $MA + MB + MC + MD \le Max\left\{AB + AC + AD; BC + BD + BA\right\}$

Hay ta được $MA + MB + MC + MD \le Max\left\{a; b\right\}$

Từ đó ta được $MA + MB + MC + MD \le Max\left\{a; b; c; d\right\}$.

Bài 42.

Cách 1: Gọi AD là đường phân giác trong của tam giác ABC và AP, Ả là đường phân giác ngoài. Khi đó ta có $PR \perp AD$.



Đặt $AB = c; BC = a; CA = b$ và $2p = a + b + c$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $AC \geq AB$. Khi đó vẽ BE vuông góc với CR tại E và BE cắt AC tại F.

Ta có $AB = AF$ và $CF = AC - AF = b - c$

Theo định lí Pitago ta có

$$PR^2 = BE^2 = BC^2 - CE^2 \geq BC^2 - CF^2 = 4(p-b)(p-c)$$

Từ đó ta được $PR \geq 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$

Hoàn toàn tương tự ta được $MN \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$; $QS \geq 2\sqrt{(p-c)(p-a)}$

Do đó ta được $MN + PR + QS \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} \geq 6\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Theo công thức Heron ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ta suy ra được

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p}$$

Do đó ta có $2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} \geq 6\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}$

Lại có $S = pr$ nên ta được $r = \frac{S}{p}$ do đó ta được

$$2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} \geq 6\sqrt[3]{S.r}$$

Từ đó suy ra $MN + PR + QS \geq 6\sqrt[3]{rS}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

Cách 2: Vẽ BH và CK vuông với đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Ta có $PR = AP + AR = BH + CK = \frac{2S_{ABD}}{AD} + \frac{2S_{ACD}}{AD} = \frac{2S_{ABC}}{AD}$

Theo công thức về đường phân giác ta được $AD = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}.\sqrt{p(p-a)} \leq \sqrt{p(p-a)}$

Do đó ta được $PR \ge \dfrac{2S}{\sqrt{p(p-a)}}$. Hoàn toàn tương tự ta được

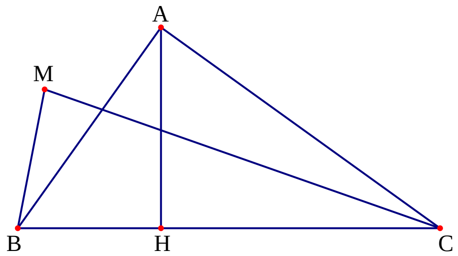
$MN \ge \dfrac{2S}{\sqrt{p(p-c)}}$; $QR \ge \dfrac{2S}{\sqrt{p(p-b)}}$

Do đó ta được $MN.PR.QS \ge \dfrac{8S^3}{\sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}} = \dfrac{8S^3}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \dfrac{8S^2}{p}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $MN + PR + QS \ge 3.\sqrt[3]{MN.PR.QS} \ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{8S^2}{p}} = 6\sqrt[3]{rS}$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 43. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được



$$\left(AB^2 + AC^2\right)\left(\frac{MB^2}{AB^2} + \frac{MC^2}{AC^2}\right)$$
$$\ge \left(AB.\frac{MB}{AB} + AC\frac{MC}{AC}\right)^2 = (MB + MC)^2$$

Mà ta có $MB + MC \ge BC$ và theo định lí Pitago ta được $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Do đó ta được $BC^2\left(\dfrac{MB^2}{AB^2} + \dfrac{MC^2}{AC^2}\right) \ge BC^2$ hay $\dfrac{MB^2}{AB^2} + \dfrac{MC^2}{AC^2} \ge 1$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\frac{MB}{AB}}{AB} = \dfrac{\frac{MC}{AC}}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{AB^2} = \dfrac{MC}{AC^2}$ và $MB + MC = BC$.

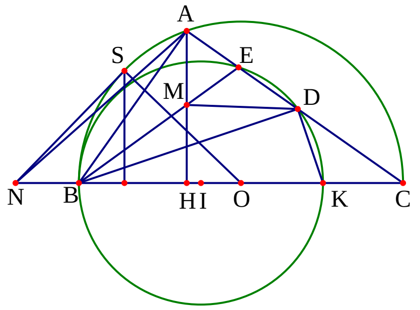
Điều này tương đường với $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ và M thuộc đoạn BC.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC, Khi đó ta được $\dfrac{BH}{CH} = \dfrac{BH.BC}{CH.BC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Từ đó ta được $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{BH}{CH}$. Mà H, M thuộc đoạn thẳng BC nên suy ra hai điểm M và H trùng nhau.

Vậy dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu của A trên BC.

Bài 44. Gọi K là giao điểm của đường tròn (I) với BC(K khác B). Khi đó ta có $\widehat{BAE} = \widehat{BDK} = 90^0$



Lại có $\widehat{AEB} = \widehat{DKB}$ nên ta được $\widehat{ABM} = \widehat{DBC}$.

Mà ta lại có $\widehat{BAM} = \widehat{DBC}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$).

Do đó hai tam giác ABM và CBD đồng dạng với nhau.

Do đó ta được $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AM}{CD} \Rightarrow AB.CD = AM.BC$

Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH nên ta có $AB.AC = AH.BC$

Mà ta có $AB = 2CD$ nên ta được $AH = 2AM$ suy ra M là trung điểm của AH.

Từ đó suy ra $MD = \dfrac{1}{2}HC$. Cho nên ta được $MA + MD = \dfrac{1}{2}(AH + HC)$.

Gọi S là điểm thuộc nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOS} = 45^0$. Tiếp tuyến tại S của nửa đường tròn (O) cắt BC tại N. Khi đó ta có các trường hợp sau

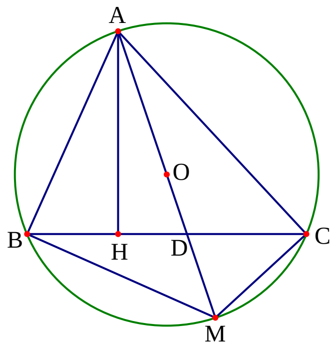
+ Nếu điểm A trùng với điểm S thì ta được $AH + HC = CN$. Khi đó $MA + MD = \dfrac{1}{2}CN$ không đổi.

+ Nếu điểm A khác điểm S thì tia NA nằm giữa hai tia NS và NK. Khi đó ta có $\widehat{ANK} < 45^0$

Từ đó ta được $\widehat{NAH} > 45^0$ nên $AH < NH$. Từ đó suy ra $MA + MD < \dfrac{1}{2}NC$

Như vậy khi điểm A trùng với điểm S thì A để $MA + MD$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 45. Vẽ AM là đường kính của đường trong (O).



Ta có $\widehat{HBA} = \widehat{CMA}$ và $\widehat{AHB} = \widehat{ACM} = 90^0$ nên ta được $\Delta HBA \backsim \Delta CMA$

Suy ra $\dfrac{HB}{CM} = \dfrac{BA}{MA}$. Tương tự ta được $\dfrac{HC}{BM} = \dfrac{CA}{MA}$

Từ đó ta được $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{MC}{MB}$.

Ta có $\Delta ADB \backsim \Delta CDM$ nên suy ra $\dfrac{DB}{DM} = \dfrac{AB}{CM}$.

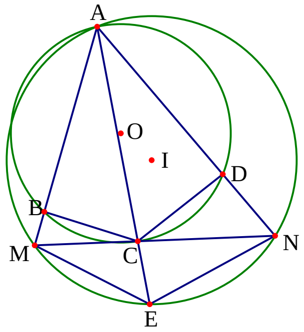
Tương tự ta cũng có $\dfrac{DC}{DM} = \dfrac{AC}{BM}$. Do đó ta được $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{MB}{MC}$.

Như vậy ta được $\dfrac{HB}{HC} + \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}\left(\dfrac{MC}{MB} + \dfrac{MB}{MC}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{AB}{AC}\left(\frac{MC}{MB}+\frac{MB}{MC}\right)\ge 2\frac{AB}{AC}\sqrt{\frac{MC}{MB}.\frac{MB}{MC}}=2\frac{AB}{AC}$

Vậy ta được $\frac{HB}{HC}+\frac{DB}{DC}\ge 2\frac{AB}{AC}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC cân tại A.

Bài 46. Vẽ đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AMN. Gọi E là giao điểm của đường tròn (I) với AC(E khác A).



Khi đó $\widehat{CBD}=\widehat{CAD}$ và $\widehat{CAD}=\widehat{EMN}$ nên ta được $\widehat{CBD}=\widehat{EMN}$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{CDB}=\widehat{ENM}$.

Xét hai tam giác CBD và EMN có $\widehat{CBD}=\widehat{EMN}$ và $\widehat{CDB}=\widehat{ENM}$ nên ta được $\Delta CBD\backsim\Delta EMN$. Từ đó suy ra

$$\frac{S_{CBD}}{S_{EMN}}=\frac{BD^2}{MN^2}$$

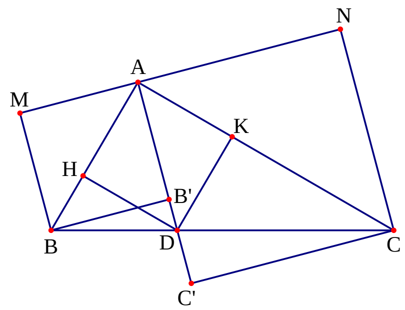
Ta có $\frac{S_{MCE}}{S_{MAC}}=\frac{S_{NCE}}{S_{NAC}}$ nên ta được $\frac{S_{MCE}}{S_{MAC}}=\frac{S_{MCE}+S_{NCE}}{S_{MAC}+S_{NAC}}=\frac{S_{EMN}}{S_{AMN}}$

Xét hai tam giác CMA và CEN có $\widehat{CMA}=\widehat{CEN}$ và $\widehat{MCA}=\widehat{ECN}$ nên ta được $\Delta CMA\backsim\Delta CEN$

Từ đó ta được $\frac{MC}{EC}=\frac{AC}{NC}\Rightarrow MC.NC=AC.EC$. Do vậy ta có

Do đó ta luôn có $\frac{S_{BCD}}{S_{AMN}}\le\left(\frac{BD}{2AC}\right)^2$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi C là trung điểm của MN.

Bài 47. Xét tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác AD. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AD tại A. Gọi B′, C′ lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C trên đường thẳng d. Vẽ DH vuông góc với AB tại H, DK vuông góc với AC tại K. Dễ thấy tứ giác AHDK là hình vuông, do đó ta được



$$DH=DK=\frac{\sqrt{2}}{2}AD.$$

Tam giác ABC vuông tại A nên $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC$

Lại có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AB.DH + \frac{1}{2}AC.DK = \frac{1}{2}DH(AB+AC) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}AD(AB+AC)$

Từ đó ta được $AB.AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AD.(AB+AC)$ nên suy ra $AD = \frac{\sqrt{2}AB.AC}{AB+AC}$

Tam giác ABB′ vuông tại B′ có $\widehat{BAB'} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45^0$ nên vuông cân tại B′.

Do đó ta được $BB' = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$. Tương tự ta cũng có $CC' = \frac{1}{2}AC$

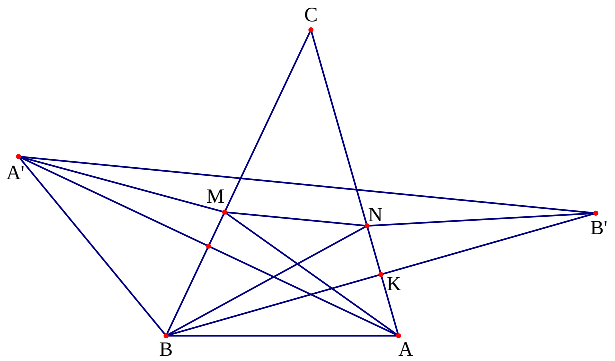
Suy ra $\frac{MN}{2} = \frac{BB'+CC'}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(AB+CD)$. Mặt khác ta lại có $AB.AC \le \frac{1}{4}(AB+AC)^2$.

Do đó ta được $\frac{\sqrt{2}AB.AC}{AB+AC} \le \frac{\sqrt{2}(AB+AC)^2}{4(AB+AC)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(AB+AC) = \frac{MN}{2}$

Suy ra $AD \le \frac{MN}{2}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $AB = AC$ hay tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 48.

Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{ABC} = \beta$; $\widehat{ACB} = \gamma$. Theo bài ra thì trong tam giác ABC có AB bé nhất nên $\widehat{ACB}$ là góc bé nhất. Từ đó suy ra $\widehat{ACB} \le 60^0$ hay $\gamma \le 60^0$. Điều này dẫn đến hai góc còn lại có ít nhất một góc không nhỏ hơn 60^0. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\alpha \ge 60^0$. Lấy A′ đối xứng với A qua BC và B′ đối xứng với B qua AC.



Khi đó dễ thấy $A'M = AM; A'N = AN; A'B = AB$

Từ đó ta được $A'M + MN + B'N = AM + MN + BN$ hay độ dài đường gấp khúc AMNB bằng độ dài đường gấp khúc A′MNB′.

Dễ thấy độ dài đường gấp khúc A′MNB′ lớn hơn hoặc bằng độ dài A′B′.

Như vậy bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được $A'B' \ge 2AB$.

Đặt $AB = c$ khi đó ta có gọi K là giao điểm của BB′ với AC thì ta được $BK = AB\sin\alpha$

Do đó suy ra $2BK = 2AB.\sin\alpha \Rightarrow BB' = 2AB.\sin\alpha$. Mà ta có $\alpha \ge 60^0$ nên $BB' \ge c\sqrt{3}$.

Mặt khác ta lại có

$$\widehat{B'BA'} = \widehat{ABA'} - \widehat{ABB'} = 2\beta - \left(90^0 - \alpha\right) = \left(\alpha + \beta\right) + \beta - 90^0$$
$$= 180^0 - \gamma + \beta - 90^0 = 90^0 + \left(\beta - \gamma\right)$$

Do $\beta \ge \gamma$ nên ta được $\widehat{B'BA'} \ge 90^0$.

Do đó trong tam giác B′BA′ ta có $A'B' \ge \sqrt{A'B^2 + B'B^2} \ge \sqrt{c^2 + \left(\sqrt{3}c\right)^2} = 2c$

Từ đó ta suy ra được $A'M + MN + B'N \ge 2AB \Rightarrow AM + MN + BN \ge 2AB$.

Bài 49.

Ta có

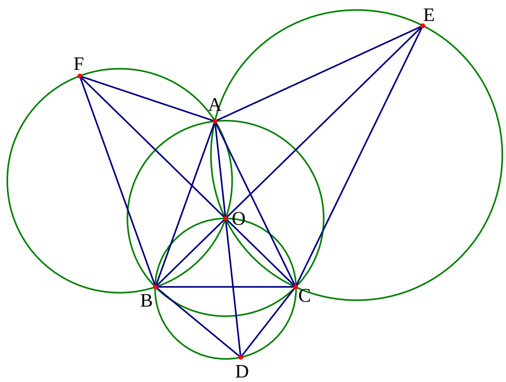
$\widehat{DBC} = \widehat{DOC} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} = 180^0 - 2\widehat{ABC}$

Tương tự ta cũng có $\widehat{DCB} = 180^0 - 2\widehat{ACB}$.

Như vậy tam giác DBC có các góc

$\widehat{DBC} = 180^0 - 2\widehat{ABC}$ và $\widehat{DCB} = 180^0 - 2\widehat{ACB}$

Áp dụng tương tự cho các tam giác AEC và ABF.



Khi đó ta suy ra được

$\Delta BDC \backsim \Delta ABF \backsim \Delta EAC$.

Đặt $BC = x;\ DC = y;\ DB = z$.

Ta có $\dfrac{BF}{x} = \dfrac{AF}{y} = \dfrac{AB}{z}$ và $\dfrac{EC}{x} = \dfrac{AC}{y} = \dfrac{EA}{z}$.

Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác OBDC nội tiếp ta có $OD.BC = OB.CD + OC.BD$

Từ đó ta được $OD = R.\dfrac{y+z}{x}$.

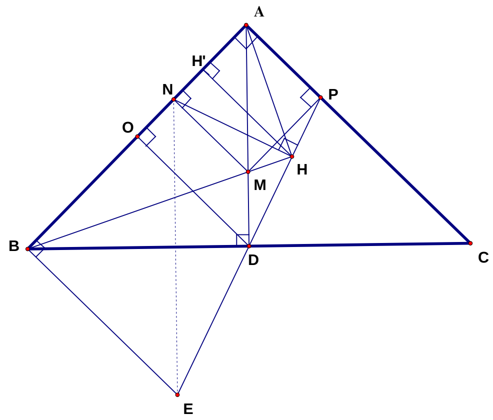
Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác OAEC nội tiếp ta tính được $OE = R.\dfrac{z+x}{y}$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $OF = R.\dfrac{x+y}{z}$.

Từ đó ta được $OD.OE.OF = R^3.\dfrac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{xyz} \ge 8R^3$. Bài toán được chứng minh.

Bài 50.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A nên AD là phân giác góc A và $AD \perp BC$. Do đó D thuộc đường tròn tâm O đường kính AB. Ta có ANMP là hình vuông (hình chữ nhật có AM là phân giác)



Suy ra tứ giác ANMP nội tiếp đường tròn đường kính NP

mà $\widehat{NHP} = 90^0 \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính NP nên $\widehat{AHN} = \widehat{AMN} = 45^0$ (1)

Kẻ $Bx \perp AB$ cắt đường thẳng PD tại E suy ra tứ giác BNHE nội tiếp đường tròn đường kính NE

Mặt khác $\Delta BED = \Delta CDP$ nên $BE = PC$ mà $PC = BN \Rightarrow BN = BE$ do đó ΔBNE vuông cân tại B

Suy ra $\widehat{NEB} = 45^0$ mà $\widehat{NHB} = \widehat{NEB}$ (cùng chắn cung BN) nên $\widehat{NHB} = 45^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHB} = 90^0$, do đó H thuộc đường tròn tâm O đường kính AB

Gọi H' là hình chiếu của H trên AB, khi đó ta được

$$S_{AHB} = \frac{HH'.AB}{2} \Rightarrow S_{AHB} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow HH' \text{ lớn nhất}$$

Mà $HH' \le OD = \frac{1}{2}AB$ (do H; D cùng thuộc đường tròn đường kính AB và $OD \perp AB$)

Dấu bằng xẩy ra $\Leftrightarrow H \equiv D \Leftrightarrow M \equiv D$.

Vậy tam giác AHB có diện tích lớn nhất khi M trùng với D.

Bài 51. a) Vẽ đường thẳng $BB_1 \perp AM, CC_1 \perp AM$.

Xét $S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}AM.BB_1 + \frac{1}{2}AM.CC_1 = \frac{1}{2}AM\left(BB_1 + CC_1\right) \le \frac{1}{2}AM.BC$

Dấu bằng xảy ra khi $AM \perp BC$

Tương tự ta có

$$S_{\Delta BCM} + S_{\Delta ABM} \le \frac{1}{2}BM.AC. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } BM \perp AC$$

$$S_{\Delta BCM} + S_{\Delta ACM} \le \frac{1}{2}CM.AB. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } CM \perp AB$$

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức

Ta có $2\left(S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ACM}+S_{\Delta BCM}\right)\le\frac{1}{2}\left(MA.BC+MB.AC+MC.AB\right)$

$\Leftrightarrow MA.BC+MB.AC+MC.AB\ge 4S_{\Delta ABC}$

Dấu bằng xảy ra khi $AM\perp BC, MB\perp AC, MC\perp BC$ hay M là trực tâm của tam giác ABC

b) Gọi $S_{AMB}=S_1$, $S_{AMC}=S_2$, $S_{BMC}=S_3$. Khi đó ta có $\frac{S_{RAM}}{S_{AMB}}=\frac{RM}{BM}$ và $\frac{S_{RMC}}{s_{BMC}}=\frac{RM}{BM}$

Do đó ta được $\frac{RM}{BM}=\frac{S_{RAM}}{S_{AMB}}=\frac{S_{RMC}}{S_{BMC}}=\frac{S_{RAM}+S_{RMC}}{S_{AMB}+S_{BMC}}=\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}+S_{BMC}}=\frac{S_2}{S_1+S_3}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{MQ}{MC}=\frac{S_1}{S_2+S_3}$; $\frac{MP}{MA}=\frac{S_3}{S_1+S_2}$

Lại có $\frac{S_{RMQ}}{S_{BMC}}=\frac{S_{RMQ}}{S_{RMC}}.\frac{S_{RMC}}{S_{BMC}}=\frac{S_1.S_2}{\left(S_2+S_2\right)\left(S_1+S_3\right)}$

Suy ra $S_{RMQ}=\frac{S_1.S_2.S_3}{\left(S_2+S_3\right)\left(S_1+S_3\right)}\le\frac{S_1.S_2.S_3}{2\sqrt{S_2.S_3}.2\sqrt{S_1.S_3}}=\frac{\sqrt{S_1.S_2}}{4}$

Tương tự ta có $S_{RMP}=\frac{\sqrt{S_2.S_3}}{4}$; $S_{PQM}=\frac{\sqrt{S_1.S_3}}{4}$

Do đó ta được $S_{PQR}=S_{MQR}+S_{RMP}+S_{PMQ}=\frac{\sqrt{S_1.S_2}}{4}+\frac{\sqrt{S_2.S_3}}{4}+\frac{\sqrt{S_1.S_3}}{4}\le\frac{1}{4}\left(S_1+S_2+S_3\right)=\frac{S_{ABC}}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của S_{PQR} là $\frac{S_{ABC}}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 52. Ta xét các trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1: Tam giác ABC không tù, khi đó trong ba góc của tam giác ABC có ít nhất một góc lớn lớn hơn hoặc bằng 60^0.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{A}\ge\widehat{B}\ge\widehat{C}\Rightarrow\widehat{A}\ge 60^0$

Kẻ các đường cao BD và CE, khi đó ta được $S_{ABC}=\frac{1}{2}BD.AC$

Mà $BD\le BB_1\le 1$ nên ta được $S_{ABC}=\frac{1}{2}BD.AC\le\frac{1}{2}.BB_1.AC\le\frac{1}{2}.AC$

Chứng minh tương tự ta được $S_{ABC}\le\frac{1}{2}.AB$. Do đó ta có $S_{ABC}^2\le\frac{1}{4}.AB.AC$.

Lại có $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin A\ge\frac{1}{2}.AB.AC.\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}.AB.AC}{4}$

Do đó ta được $S_{ABC}\ge\frac{\sqrt{3}.AB.AC}{4}\ge\sqrt{3}.S_{ABC}^2\Rightarrow S_{ABC}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

+ Trường hợp 2: Tam giác ABC tù, không mất tính tổng quát ta giả sử $\widehat{A}>90^0$

- Khi đó nếu $90^0 < \widehat{A} \le 120^0$, chứng minh tương tự trương hợp tam giác ABC không từ.
- Khi $\widehat{A} > 120^0$, trong tam giác ABB_1 có $\widehat{A} > 90^0 > \widehat{AB_1B}$ nên ta được $AB < BB_1 < 1$.

Trong tam giác ACC_1 có $\widehat{A} > 90^0 > \widehat{AC_1C}$ nên ta được $AC < CC_1 < 1$.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.CK = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{KAC} < \frac{1}{2}.1.1.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy ta luôn có

Bài 53.

a) Đặt $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Ta có

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2b^2 + 2c^2 &= 3a^2 + 2\left(HC^2 + HA^2\right) + 2\left(HA^2 + HB^2\right) \\ &= 3a^2 + 2\left(HC^2 + HB^2\right) + 4HA^2 \\ &\ge 3a^2 + \left(HC + HB\right)^2 + 4HA^2 = 3a^2 + BC^2 + 4AH^2 = 4\left(a^2 + AH^2\right) \\ &\ge 8a.AH = 16S \end{aligned}$$

Vậy ta có $3a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 16S$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} HB = HC \\ H \in BC \\ AH = a \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A và $AH = a \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{\sqrt{5}} = \frac{c}{\sqrt{5}}$

b) Trước hết ta chứng minh $xy + yz + zx > 0$

Thật vậy, nếu x, y, z là các số dương thì $xy + yz + zx > 0$

Nếu trong ba số x, y, z có một số âm, không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là x.
khi đó ta có $y \ge -x > 0;\ z \ge -x > 0$.

Do $\sqrt{x+y},\ \sqrt{y+z},\ \sqrt{z+x}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{z+x} > \sqrt{y+z} \Leftrightarrow 2x + y + z + 2\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)} > y + z$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)} > -x \Leftrightarrow x^2 + xy + yz + zx > x^2 \Leftrightarrow xy + yz + zx > 0$$

Vì $x + y > 0;\ y + z > 0;\ z + x > 0$ nên trong ba số x, y, z không thể có hai số không dương. Do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $y > 0;\ z > 0$ và $y + z = Max\left\{x + y, y + z, z + x\right\}$.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC, ta có $HB + HC \ge BC$. Ta có

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 = xa^2 + y\left(HC^2 + HA^2\right) + z\left(HA^2 + HB^2\right) = xa^2 + \left(yHC^2 + zHB^2\right) + \left(y+z\right)HA^2 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$yHC^2+zHB^2=\frac{yz}{y+z}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{y}.HC\right)^2+\left(\sqrt{z}.HB\right)^2\right]$$

$$\ge\frac{yz}{y+z}\left(CH+BH\right)^2=\frac{yz}{y+z}.BC^2$$

Thay vào hệ thức (1) ta có

$$xa^2+yb^2+zc^2\ge\left(x+\frac{yz}{y+z}\right)BC^2+\left(y+z\right)HA^2=\frac{xy+yz+zx}{y+z}.BC^2+\left(y+z\right)HA^2$$

$$\ge2\sqrt{xy+yz+zx}.BC.HA=4\sqrt{xy+yz+zx}.S$$

Vậy ta được $xa^2+yb^2+zc^2\ge4\sqrt{xy+yz+zx}.S$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

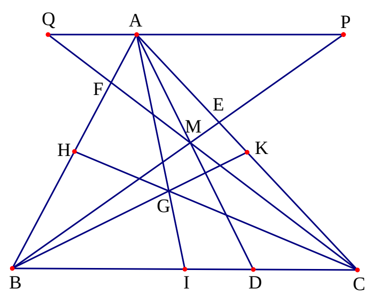
$$\begin{cases}yHC=zHB\\ \sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{y+z}}.BC=\sqrt{y+z}.AH\\ H\in BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}HC=\dfrac{z}{y+z}BC\\ HB=\dfrac{y}{y+z}BC\\ \sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{y+z}}.BC=\sqrt{y+z}.AH\end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases}HC^2+HA^2=\dfrac{x+z}{y+z}BC^2\\ HB^2+HA^2=\dfrac{x+y}{y+z}BC^2\end{cases}$

Do $y+z=Max\left\{x+y,y+z,z+x\right\}$ nên từ hệ trên ta được $HC<BC;\ BH<BC$ suy ra H thuộc đoạn BC, do đó ta được $BH+HC=BC$.

Vậy đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}AC^2=\dfrac{x+z}{y+z}BC^2\\ AB^2=\dfrac{x+y}{y+z}BC^2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a}{\sqrt{y+z}}=\dfrac{b}{\sqrt{z+x}}=\dfrac{c}{\sqrt{x+y}}$.

Bài 54. Trước hết ta chứng minh $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AE}{EC}+\dfrac{AF}{FB}$.



Thật vậy, qua điểm A ke đường thẳng song song với BC cắt BM và CM lần lượt tại P và Q. Khi đó ta có

$$\frac{AM}{MD}=\frac{AQ}{DC}=\frac{AP}{BD}$$

Do đó ta được $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AQ+AP}{CD+DB}=\dfrac{AQ+AP}{BC}$

Cũng theo định lí Talét ta có $\frac{AQ}{BC}=\frac{AF}{FB};\frac{AP}{BC}=\frac{AE}{EC}$

Nên ta được $\frac{AQ+QP}{BC}=\frac{AQ}{BC}+\frac{AP}{BC}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}$. Do vậy ta được $\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}$.

Kẻ ba đường trung tuyến AI, BK, CH cắt nhau tại G. Khi đó ba đường trung tuyến chia tam giác ABC thành 6 tam giác gồm BGI, CGI, CGK, AGK, AGH, BGH. Do đó điểm M sẽ nằm ở một trong 6 tam giác kể trên. Không mất tính tổng quát ta giả sử M nằm trên tam giác AGK.

Khi đó ta có $\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}\le\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{KC}\le 2$

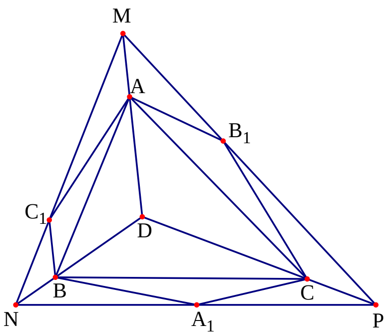
Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\frac{BM}{ME}=\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{DC}\ge\frac{BF}{FA}+\frac{BD}{IC}\ge 2$

Vậy với điểm G ta đã chỉ ra được $\frac{AM}{MD}\le 2$ và $\frac{BM}{MD}\ge 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M và G trùng nhau.

Bài 55. Theo bài ra ta cần chứng minh

$S_{MNP}<2S_{AB_1CA_1BC_1}$



Ta có BA//MN, CA//MP, BC//NP, điều này chứng tỏ MA, NB, CP đồng quy tại một điểm, ta gọi điểm đó là D.

Đặt $\frac{DC}{DP}=k$, Do CA//MP và BC//NP nên theo định lí Talets ta có $\frac{DM}{DN}=\frac{DA}{DM}=\frac{DC}{DP}=k$. Do AC//MP nên ta có

$S_{AB_1C}=S_{APC}$ suy ta $S_{AB_1C}+S_{ADC}=S_{APC}+S_{ADC}$

Do đó ta được $S_{AB_1CD}=S_{APD}$. Suy ra ta có $\frac{S_{AB_1CD}}{S_{MDP}}=\frac{S_{APD}}{S_{MDP}}=\frac{AD}{MD}=k$.

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{S_{B_1CD}}{S_{MND}}=\frac{S_{DBA_1C}}{S_{DNP}}=\frac{S_{AB_1CD}}{S_{DMP}}=k\Rightarrow\frac{S_{B_1CD}+S_{DBA_1C}+S_{AB_1CD}}{S_{MND}+S_{DPN}+S_{DMP}}=k$$

Do đó ta được $\frac{S_{AB_1CA_1BC_1}}{S_{MNP}}=k$. Lại có AC//MP nên $S_{AB_1C}=S_{APC}$ suy ra $\frac{S_{AB_1C}}{S_{ADC}}=\frac{S_{APC}}{S_{ADC}}=\frac{PC}{DC}$

Tưng tự ta suy ra

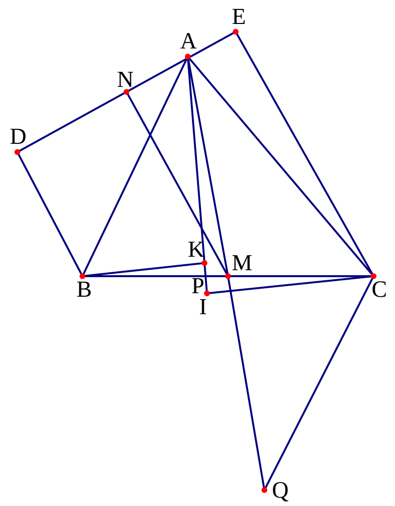
$$\frac{S_{AC_1B}}{S_{ABD}} = \frac{AM}{AD} = \frac{NB}{DB} = \frac{S_{BA_1C}}{S_{BDC}} = \frac{PC}{DC} = \frac{S_{AB_1C}}{S_{ADC}}$$
$$= \frac{S_{AC_1B} + S_{BA_1C} + S_{AB_1C}}{S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ACD}} = \frac{S_{AC_1B} + S_{BA_1C} + S_{AB_1C}}{S_{ABC}} < 1$$

Từ đó ta được $\frac{AM}{AD} < 1 \Rightarrow \frac{AM + AD}{AD} < 2 \Rightarrow \frac{DM}{AD} < 2 \Rightarrow k = \frac{AD}{MD} > \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{S_{AB_1CA_1BC_1}}{S_{MNP}} > \frac{1}{2}$ hay $S_{MNP} < 2S_{AB_1CA_1BC_1}$

Bài 56. Ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Đường thẳng Δ không cắt cạnh BC.



Gọi M là trung điểm của BC và gọi D, N, E lần lượt là chân đường cao hai từ B, M, C xuống đường thẳng Δ, khi đó ta được Mn là đường trung bình của hình thang BDEC.

Ta có $MN = \frac{1}{2}(BD + EC) = \frac{1}{2}\left(d_{B/\Delta} + d_{C/\Delta}\right)$

Trong tam giác AMN vuông tại N nên ta có $MN \le MA$.

Do đó ta được $d_{B/\Delta} + d_{C/\Delta} \le 2AM$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\Delta \perp AM$

+ Trường hợp 2: Đường thẳng Δ cắt cạnh BC tại P.

Gọi K và I lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuông đường thẳng Δ.

Khi đó các tam giác BKP và CIP lần lượt vuông góc tại K và I nên ta được $BK \le BP;\ CI \le CP$

Do đó ta được $d_{B/\Delta} + d_{C/\Delta} = BK + CI \le BP + CP = BC$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\Delta \perp BC$

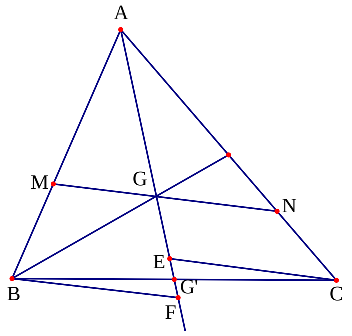
Để ý là $\widehat{BAC} < 90^0$ nên ta sẽ chứng minh $2AM > BC$.

Thật vậy, lấy Q đối xứng với A qua M. Xét các tam giác ABC và ACQ có $AB = CQ$ và cạnh AC chung

Lại có $\widehat{ACQ} = 180^0 - \widehat{BAC} > 90^0 > \widehat{BAC}$. Do đó ta được $BC < AQ = 2AM$.

Như vậy ta được $\text{Max}\left(d_{B/\Delta} + d_{C/\Delta}\right) = 2AM$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\Delta \perp AM$.

Bài 57. Qua B và C kẻ các đường thẳng song song với MN cắt AG lần lượt tại E và F.



Theo định lí Talet ta có $\frac{AB}{AM}=\frac{AF}{AG};\frac{AC}{AN}=\frac{AE}{AG}$

Do đó ta được $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AE+AF}{AG}=3$

Ta có $\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=\frac{AB.AC}{AM.AN}\le\frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}\right)^2=\frac{9}{4}$

Do đó ta được $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}\ge\frac{4}{9}$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi MN//BC.

Mặt khác do M và N nằm trên các đoạn thẳng AB, AC và Mn đi qua trọng tâm của tam giác ABC nên ta được $\frac{AB}{AM}>1$ và $\frac{AC}{AN}<2$. Đặt $x=\frac{AM}{AB};\ y=\frac{AN}{AC}$ nên ta được $\frac{1}{2}<x;\ y<1$

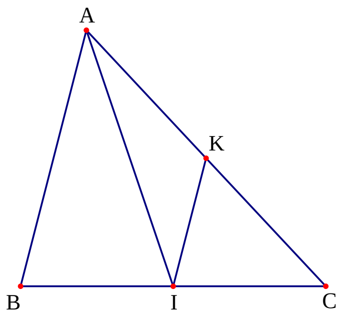
Từ hệ thức $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$ ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3\Leftrightarrow x+y=3xy$

Từ điều kiện $\frac{1}{2}<x;\ y<1$ ta có $(1-x)(1-y)>0\Leftrightarrow 1-(x+y)+xy>0$

Do đó ta được $1-2xy>0\Rightarrow xy<\frac{1}{2}$ hay $\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}<\frac{1}{2}$. Suy ra $\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=\frac{AB.AC}{AM.AN}<\frac{1}{2}$

Vậy ta được $\frac{4}{9}\le\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}<\frac{1}{2}$.

Bài 58. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Lấy điểm A bất kì. Khi đó



+ Nếu A trùng với B hoặc với C thì ta được

$AI=\frac{1}{2}(AB+AC)$

+ Nếu A không trùng với B và C, gọi K là trung điểm của AC, khi đó IK là đường trung bình của tam giác ABC nên $KI=\frac{1}{2}AB$.

Trong tam giác AKI có

$AI<KI+KA\Rightarrow AI<\frac{1}{2}(AB+AC)$

Như vậy ta luôn có $AI\le\frac{1}{2}(AB+AC)$. Áp dụng kết qua trên cho các điểm $A_1;A_2;...;A_n$ ta được

$$A_1I \le \frac{1}{2}(A_1B + A_1C);\ A_2I \le \frac{1}{2}(A_2B + A_2C);\ \ldots;A_nI \le \frac{1}{2}(A_nB + A_nC)$$

Do các bất đẳng thức trên không đồng thời xẩy ra dấu bằng nên ta được

$$A_1I + A_2I + \ldots + A_nI < \frac{1}{2}(A_1B + A_1C) + \frac{1}{2}(A_2B + A_2C) + \ldots + \frac{1}{2}(A_nB + A_nC)$$

Hay $A_1I + A_2I + \ldots + A_nI < \frac{1}{2}(A_1B + A_2B + \ldots + A_nB) + \frac{1}{2}(A_1C + A_2C + \ldots + A_nC) = t$

Như vậy ta được $A_1I + A_2I + \ldots + A_nI < t$.

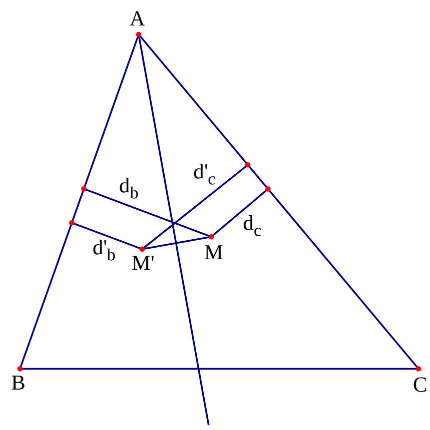
Đến đây chọn M trùng với điểm I thì ta được $A_1M + A_2M + \ldots + A_nM < t$. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 59.

a) Ta có

$bd_b + cd_c = 2S_{MAC} + 2S_{MAB} = 2S_{ABMC} \le BC.MA = a.MA$

Vậy ta được $a.MA \ge bd_b + cd_c$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $BC \perp AH$ hoặc $M \equiv A$



b) Nếu M nằm bên trong tam giác ABC hoặc trên cạnh của tam giác ABC thì M thuộc cạnh hoặc miền trong của cả ba góc $\widehat{BAC};\ \widehat{ABC};\ \widehat{ACB}$. Khi đó tương tự như trên ta được

$a.MA \ge bd_b + cd_c;\ b.MB \ge cd_c + ad_a;\ c.MC \ge ad_a + bd_b$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$abc.MA.MB.MC \ge (bd_b + cd_c)(cd_c + ad_a)(ad_a + bd_b) \ge 8abc.d_ad_bd_c$$

Hay ta được $MA.MB.MC \ge 8d_ad_bd_c$. Dấu bằng xẩy nếu M trùng với một đỉnh của tam giác ABC hoặc nếu M không trùng với đỉnh nào của tam giác ABC thì dấu bằng xẩy ra khi

$ad_a = bd_b = cd_c$ và M là trực tâm tam giác ABC

Điều này tương đương với $S_{MBC} = S_{MCA} = S_{MAB}$ hay M là trọng tâm tam giác ABC và M là trực tâm tam giác ABC.

Vậy nếu M không trùng với đỉnh của tam giác ABC thì M vừa là trọng tâm vừa là trực tâm của tam giác ABC, điều này tương đường với tam giác ABC là tam giác đều.

Tóm lại ta luôn có $MA.MB.MC \ge 8d_ad_bd_c$, dấu bằng xẩy ra khi M trùng với một đỉnh của tam giác ABC hoặc tam giác ABC đều và M là trọng tâm.

c) Lấy điểm M′ đối xứng với M qua đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Gọi khoảng cách từ M′ đến AC, AB tương ứng là $d_b';d_c'$. Khi đó ta được $d_b = d_c'; d_c = d_b'$

Chứng minh như trên ta được $a.MA = a.M'A \ge bd_b' + cd_c' \Rightarrow MA \ge \frac{b}{a}d_b' + \frac{c}{a}d_c' = \frac{b}{a}d_c + \frac{c}{a}d_b$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $M' \equiv M \equiv A$ hoặc $AM' \perp BC$

Chứng minh tương tự ta được $MB \ge \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$, dấu bằng xẩy ra khi $M \equiv B$ hoặc $M''B \perp AC$ (Trong đó M″ đối xứng với M qua đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$) và $MC \ge \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$, dấu bằng xẩy ra khi $M \equiv C$ hoặc $M'''B \perp AC$ (Trong đó M‴ đối xứng với M qua đường phân giác của góc $\widehat{ACB}$)

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &\ge \frac{b}{a}d_c + \frac{c}{a}d_b + \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a + \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)d_c + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)d_b + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)d_a \ge 2\left(d_a + d_b + d_c\right) \end{aligned}$$

Vậy ta được $MA + MB + MC \ge 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$.

Ta xét điều kiện để dấu bằng xẩy ra:

+ Nếu M trùng với một đỉnh của tam giác ABC, khi đó chỉ có một trong ba bất đẳng thức trên xẩy ra dấu bằng. Do đó bất đẳng thức cuối không xẩy ra đấu bằng.

+ Nếu M không trùng với đỉnh nào của tam giác ABC thì bất đẳng thức cuối xẩy ra dấu bằng khi

$$\begin{cases} AM' \perp BC; M''B \perp AC; M'''B \perp AC \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow \text{ tam giác ABC đều và M là trực tâm}$$

Ngược lại nếu tam giác ABC đều và M là trực tâm thì ta luôn có $MA + MB + MC = 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$.

Vậy với mọi tam giác ABC ta luôn có $MA + MB + MC \ge 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M là trực tâm.