TRẦN HỮU THÁP (Chủ biên)
NGUYỄN VĂN CHI - HUỲNH THANH HÙNG
HỒ TẤN YÊN - ĐỊNH VĂN THÂN - ĐOÀN VĂN TRÚC

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC
và CÁC DẠNG ĐỀ ÔN THI VÀO LỚP 10
Môn TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Để đáp ứng nhu cầu của đông đảo thầy cô giáo, các bậc phụ huynh và học sinh trên địa bàn tỉnh Quảng Ngãi có một tài liệu ôn tập môn Toán cấp Trung học cơ sở (THCS) nói chung và ôn tập môn Toán lớp 9 nói riêng. Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Ngãi đã tổ chức biên soạn tài liệu này.

Nội dung của tài liệu này dựa trên chương trình bộ môn Toán cấp THCS (trọng tâm là lớp 9) hiện hành và hướng dẫn nội dung ôn thi vào lớp 10 năm học 2015 - 2016 của Sở Giáo dục và Đào tạo Quảng Ngãi.

Cấu trúc của tài liệu gồm có bốn phần chính :

– Phần một : **Đại số.**

– Phần hai : **Hình học.**

– Phần ba : **Số học và toán suy luận lô-gic** (dành cho học sinh khá, giỏi).

– Phần tư : **Một số đề thi vào lớp 10 THPT và THPT chuyên Lê Khiết.**

Trong các phần thứ nhất, thứ hai, thứ ba được phân loại theo từng chủ đề liên quan mật thiết đến những dạng toán trong cấu trúc của đề thi. Các bạn có đồng ý với chúng tôi rằng : "*Dạy và học phương pháp giải toán vẫn tốt hơn là dạy và học từng bài toán cụ thể*". Với quan điểm như thế nên trong từng chủ đề chúng tôi đã cố gắng thể hiện theo trình tự như sau :

– Kiến thức cần sử dụng.

– Các dạng toán thường gặp. Gồm có :

+ Phương pháp giải cho từng dạng cụ thể.

+ Các ví dụ minh hoạ phương pháp giải cho từng dạng toán.

– Bài tập vận dụng (gồm hệ thống bài tập cơ bản, bài tập nâng cao...).

Với hi vọng sẽ giúp bạn đọc trong một thời gian ngắn có thể hệ thống được toàn bộ những kiến thức cần nhớ trong chương trình môn Toán cấp THCS (trọng tâm là môn Toán lớp 9), đặc biệt hơn cả là cung cấp cho bạn đọc những phương pháp giải toán cơ bản để các bạn có nhiều hướng giải quyết trước một vấn đề cụ thể. Các bài tập tổng hợp nhằm giúp bạn đọc vận dụng linh hoạt những hiểu biết riêng lẻ từ các ví dụ minh hoạ để giải quyết những vấn đề phức tạp hơn.

Phần thứ tư sẽ giới thiệu một số đề thi để bạn đọc làm quen trước khi bước vào kì thi tuyển sinh vào lớp 10 Trung học phổ thông và Trung học phổ thông chuyên Lê Khiết năm học 2015 - 2016.

Tài liệu ôn tập này do tập thể các giáo viên có nhiều năm kinh nghiệm trong giảng dạy bộ môn Toán ở các trường THCS trên địa bàn tỉnh biên soạn.

Chúng tôi hi vọng rằng, tài liệu ôn tập này, không dám nói là cẩm nang, thì cũng là một trong những tài liệu thật sự bổ ích không những cho học sinh mà còn là tài liệu tham khảo hết sức cần thiết cho nhiều giáo viên trong việc hướng dẫn học sinh ôn tập môn Toán lớp 9 và luyện thi vào lớp 10.

Vì khuôn khổ cuốn sách và thời gian biên soạn có hạn nên chúng tôi dù đã cố gắng rất nhiều nhưng vẫn không thể hiện hết những gì bạn đọc mong muốn. Mong nhận được những góp ý của bạn đọc để lần tái bản sách sẽ được tốt hơn.

Quảng Ngãi, tháng 03 năm 2015

Tập thể tác giả

Phần một. ĐẠI SỐ

Chủ đề 1 BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

1. Đa thức : Khái niệm đa thức ; khái niệm bậc và nghiệm của đa thức ; các phép toán về đa thức.
2. Phân thức : Khái niệm ; tính chất ; các phép toán về phân thức.
3. Căn thức : Khái niệm căn bậc hai và căn bậc hai số học ; điều kiện tồn tại căn bậc hai ; các phép tính về căn thức.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. RÚT GỌN, TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Đối với bài tập rút gọn biểu thức : Biểu thức cần rút gọn thường gồm nhiều đơn thức, nhị thức chứa luỹ thừa và căn thức, kết hợp với nhau trong một dãy các phép tính phức tạp, ta có thể tiến hành các bước như sau :

Bước 1 : Nhận *x*ét chung toàn bộ biểu thức để thấy các biểu thức con phức tạp, cồng kềnh và các biểu thức con tương đối đơn giản hơn. Nhận xét các luỹ thừa và căn thức có thể liên quan đến các hằng đẳng thức quen thuộc. Tìm điều kiện xác định.

Bước 2 : Rút gọn từng biểu thức con đã cho ; có thể kí hiệu riêng từng biểu thức con đó bằng một chữ cái A, B, C,… riêng biệt. Thực hiện đúng thứ tự các phép tính. Chú ý nhóm các số hạng thích hợp.

Bước 3 : Kết hợp các kết quả của bước 2 vào biểu thức để bài đã cho tiếp tục thực hiện các phép biến đổi.

Chú ý :

- *Luôn phải kiểm tra lại các điều kiện thực hiện các biến đổi, các công thức vận dụng.*
- *Có thể giải quyết gọn nhờ tiến hành ngay các phép tính giữa các biểu thức phức tạp của đề bài, không cần rút gọn từng biểu thức con.*
- *Các bài tập rút gọn có chứa căn thức có thể vận dụng đưa một thừa số ra hoặc vào dấu căn ; trục căn thức ở mẫu số nếu có.*
- *Các bài tập có dạng phân thức chú ý đến cách phân tích đa thức thành nhân tử.*
- *Bài tập tính giá trị một biểu thức thường rút gọn trước, cũng có thể tính trực tiếp giá trị từng biểu thức con rồi kết hợp lại.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$x^3(x + y) - x^2(x^2 + y) + x(xy - y) \text{ tại } x = 1 \text{ và } y = 2.$$

Hướng dẫn giải

$$x^3(x + y) - x^2(x^2 + y) + x(xy - y) = x^4 + x^3y - x^4 - x^2y + x^2y - xy$$

$$= x^3y - xy = xy(x^2 - 1).$$

Thay $x = 1$ và $y = 2$ vào biểu thức, ta được $1.2.(1^2 - 1) = 0$.

Vậy giá trị của biểu thức đã cho tại $x = 1$ và $y = 2$ bằng 0.

Ví dụ 2 : Cho phân thức $Q = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{(x+1)(x-3)(x+5)}$.

a) Rút gọn Q.

b) Tìm giá trị của Q khi $x = 2015$.

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ : $x \neq -1$; $x \neq 3$; $x \neq -5$.

$$Q=\frac{x^2+6x+5}{(x+1)(x-3)(x+5)}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x-3)(x+5)}=\frac{1}{x-3}.$$

b) Thay x = 2015 vào biểu thức Q ta được $Q=\frac{1}{2015-3}=\frac{1}{2012}$.

Vậy giá trị của biểu thức Q tại x = 2015 là $\frac{1}{2012}$.

Ví dụ 3 : Cho biểu thức A = $\frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}+\frac{x}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

b) Rút gọn A.

c) Tính giá trị của A khi $x = 6 + 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

a) A có nghĩa $\Leftrightarrow x>0$ và $x\neq 1$.

b) $A=\frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}+\frac{x}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}+\frac{x}{\sqrt{x}-1}=\frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{x}{\sqrt{x}-1}$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}-1$$

c) $x=6+2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $x=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$ là

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}-1=\sqrt{5}+1-1=\sqrt{5}$$

Dạng 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để chứng minh một đẳng thức A = B ta có thể thực hiện :

– Biến đổi đại số một vế của đẳng thức (A hoặc B) để được kết quả là vế kia. Thông thường là *x*uất phát từ một vế phức tạp hơn vế kia. Như vậy, thực chất là tiến hành một bài tập rút gọn biểu thức đã trình bày ở trên.

– Biến đổi đồng thời cả hai vế để được cùng một kết quả là C.

– Chứng minh hiệu A – B = 0 hoặc B – A = 0.

– Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

– Khi chứng minh đẳng thức có điều kiện, ta sử dụng điều kiện của giả thiết thay vào biểu thức hoặc bình phương hai vế của đẳng thức cần chứng minh và kết hợp với điều kiện của giả thiết.

Chú ý :

– Khác với bài tập rút gọn, bài tập chứng minh đòi hỏi các biến đổi đại số có định hướng rõ rệt về một dạng định sẵn (vế còn lại hoặc biểu thức C trung gian).

– Chứng minh một biểu thức có chứa chữ không phụ thuộc vào biến là chứng minh biểu thức đó là một hằng số.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Chứng minh đẳng thức $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có VT $= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$

$= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2$

$= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 =$ VP.

Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2 : Chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}\,.$$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$VT = \sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=2 \qquad (1)$$

$$VP = \sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}$$

$$=\left|\sqrt{7}+1\right|-\left|\sqrt{7}-1\right|=2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$. Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3 : $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}-a}{1-\sqrt{a}}$ (với a $\geq 0\,; a\neq 1$).

Hướng dẫn giải

Điều kiện a $\geq 0\,; a\neq 1$.

Ta có $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}-a}{1-\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(1+\sqrt{a})}-\dfrac{\sqrt{a}(1-\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})}=\sqrt{a}-\sqrt{a}=0.$

Vậy $\dfrac{a+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}-a}{1-\sqrt{a}}$. Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng với mọi số *n* nguyên dương ta có

$$1^2+2^2+3^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Hướng dẫn giải

− Khi n = 1 : Vế trái $1^2 = 1$; Vế phải $\dfrac{1.2.3}{6}=1$. Đẳng thức đúng.

− Giả sử đẳng thức đúng khi $n = k$, khi đó :

$$1^2+2^2+3^2+.....+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

– Ta chứng minh đẳng thức đúng khi $n = k + 1$. Thật vậy :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2\text{k}+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(\text{k}+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)[(\text{k}+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5 : Cho x, y thoả mãn $x + y = 1$. Chứng minh $x^3 + y^3 + 3xy = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$.

Do đó : $x^3 + y^3 + 3xy = x^3 + (1 - x)^3 + 3x(1 - x)$

$= x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 3x - 3x^2 = 1$.

Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6 : Cho biểu thức

$$A = 2015 - \frac{x^2}{x-y}\sqrt{\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^4}} \text{ (với } x \neq 0 \text{ và } x \neq y).$$

Chứng tỏ giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào hai biến x và y.

Hướng dẫn giải

Với $x \neq 0$ và $x \neq y$, ta có :

$$A = 2015 - \frac{x^2}{x-y}\sqrt{\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^4}} = 2015 - \frac{x^2}{x-y}.\frac{|x-y|}{x^2} = 2015 - \frac{|x-y|}{x-y}.$$

Khi $x - y > 0$: $A = 2015 - 1 = 2014$.

Khi $x - y < 0$: $A = 2015 + 1 = 2016$.

Vậy với $x \neq 0$ và $x \neq y$ thì giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào hai biến x và y.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. a) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

b) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài 2. Thực hiện phép tính $\left(\dfrac{x}{x-1}-1\right):\left(1+\dfrac{3x^2}{x^2-1}\right)$.

Bài 3. Rút gọn biểu thức $\dfrac{x^3-x^2y-xy^2+y^3}{x^3+x^2y-xy^2-y^3}$.

Bài 4. Tìm x để phân thức $A=\dfrac{x^2-3x-4}{x^3+2x^2-x-2}$ bằng 0.

Bài 5. Thực hiện các phép tính

a) $\sqrt{4+\sqrt{12}}+3\sqrt{3}\;+6$; b) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$;

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$;

d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right)+\dfrac{\sqrt{216}}{3\sqrt{6}}$.

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

a) $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right)\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x>0\,;\,y>0\,;\,x\neq y)$;

b) $B=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{4y}{x-y}$ (với $x>0\,;\,y>0\,;\,x\neq y$) ;

c) $C=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)$ (với $x>0\,;\,x\neq 1$) ;

d) $D=\left(\dfrac{2}{\sqrt{1+x}}-1:\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right):\left(\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)$ (với $-1<x<1$) ;

e) $E = \dfrac{x\sqrt{y}+y}{x-y}\sqrt{\dfrac{xy+y^2-2y\sqrt{xy}}{x\left(x+2\sqrt{y}\right)+y}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (với $x > y > 0$) ;

g) $G = \dfrac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1}$ (với $x \geq 2$; $x \neq 3$) ;

h) $H = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2014+\sqrt{2015}}}$.

Bài 7. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị tương ứng của A là số nguyên.

Bài 8. Cho biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}-\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right)\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$,

với $x > 0$; $y > 0$ và $x \neq y$. Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào 2 biến x và y.

Bài 9. Cho biểu thức : $C = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$.

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức xác định.

b) Rút gọn C.

c) Tính giá trị của C khi $x = 4 + \sqrt{12}$.

Bài 10. Cho biểu thức $E = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

a) Tìm điều kiện của x để E có nghĩa.

b) Rút gọn E.

c) Tính giá trị của E khi $x = \sqrt{16-6\sqrt{7}}+\sqrt{7}$.

d) Tìm các giá trị nguyên của x sao cho giá trị tương ứng của E là số nguyên.

Bài 11. Tính $A = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$.

2. BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi a,b,c ta luôn có :

$$(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Bài 2. Cho ab = 1. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b)$.

Bài 3. a) Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Tính giá trị của biểu thức $A = a^4 + b^4 + c^4$.

b) Giả sử $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

Bài 4. Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}$.

Bài 5. Cho a, b, c và x, y, z khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng nếu :

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ thì $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Bài 6. Cho $0 < x < y$ và $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Chứng minh rằng $\dfrac{x+y}{x-y} = 3$.

Bài 7. Biết $xyz = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}=1$.

Bài 8. Chứng minh rằng

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Bài 9. Tính giá trị của biểu thức :

$$N = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}} \text{ tại } x = \frac{1}{5}.$$

3. BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho biểu thức $A = \dfrac{5x+1}{x^3-1} - \dfrac{1-2x}{x^2+x+1} - \dfrac{2}{1-x}$.

a) Tìm điều kiện của x để A $x$ác định.

b) Rút gọn A.

c) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 2. Rút gọn các biểu thức :

a) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ (với a ≥ 0 ; $a \neq 1$) ;

c) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (với a > 0 ; b > 0) ; d) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (với $x > 0$; $y > 0$).

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức :

$$\text{M} = \frac{x+y}{y}\sqrt{\frac{xy^2+xy^3}{x^2+2xy+y^2}} \text{ tại } x = 1 \text{ và } y = 3.$$

Bài 4. Tính :

a) $P = \sqrt{1+2014^2+\dfrac{2014^2}{2015^2}}+\dfrac{2014}{2015}$; b) $Q = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

Chủ đề 2 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

1. Phương trình : Phương trình bậc nhất ; hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ; phương trình bậc hai ; các phương trình quy về bậc nhất hoặc phương trình bậc hai (Dạng tổng quát và cách giải từng loại đó, tính chất các nghiệm).
2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1 : Biến đổi phương trình đã cho về dạng tổng quát $ax^2+bx+c=0$.

– Nếu hệ số a có chứa tham số thì xét trường hợp a = 0 sau đó *x*ét trường hợp a $\neq 0$.

– Nếu phương trình ban đầu có chứa ẩn ở mẫu thì phải đặt điều kiện cho ẩn từ điều kiện mẫu khác 0. Tìm mẫu chung để quy đồng mẫu, sau đó khử mẫu bằng cách nhân cả hai vế của phương trình với mẫu chung.

– Nếu phương trình chứa các hệ số là tham số, khi biến đổi luôn phải chú ý đặt điều kiện thích hợp cho các tham số đó.

Bước 2 : Xác định các hệ số a ; b ; c và tính biệt số Δ (hoặc Δ' nếu b = $2b'$) sau đó tính $\sqrt{\Delta}$ (hoặc $\sqrt{\Delta'}$). Cần chú ý với biểu thức A bất kì thì $\sqrt{A^2}=|A|$.

Chẳng hạn $\Delta=m^2-2m+1=(m-1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=|m-1|$.

Bước 3 : Tính các nghiệm số (nếu có) theo công thức : $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ hoặc $x_{1,2}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$.

Bước 4 : Đối chiếu các điều kiện đã đặt ra trong quá trình biến đổi, để kết luận về nghiệm của phương trình.

Chú ý :

- *Nên biến đổi phương trình ở dạng tổng quát* $ax^2+bx+c=0$ *sao cho* $a>0$ *để các tính toán sau đó ít bị nhầm dấu.*
- *Cần nhận xét các biểu thức của một phương trình phức tạp, tìm ra mối liên hệ giữa các biểu thức con, trên cơ sở đó lựa chọn ẩn phụ thay cho một biểu thức để lời giải đơn giản hơn.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Giải phương trình $\dfrac{a-x}{1-ax}=\dfrac{1-bx}{b-x}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases}1-ax\neq 0\\ b-x\neq 0.\end{cases}$ (1)

Với điều kiện trên phương trình tương đương với

$$(1-ab)x^2-1+ab=0 \Leftrightarrow (1-ab)x^2=1-ab \qquad (*)$$

+ Nếu 1 – ab = 0 thì mọi x thoả mãn điều kiện (1) là nghiệm của phương trình.

+ Nếu 1 – ab $\neq 0$ ta có (*) $\Leftrightarrow x=\pm 1$. Trong trường hợp này đối chiếu điều kiện (1) ta có nếu $a\neq\pm 1$; $b\neq\pm 1$ thì $x=\pm 1$ là nghiệm.

Ví dụ 2 : Giải phương trình $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\neq 0$. Ta có :

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}-\frac{8}{3}\Rightarrow 3\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}-8.$$

Đặt $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}$. Ta có phương trình $3y^2-10y+8=0 \Rightarrow y=2$; $y=\dfrac{4}{3}$.

Tiếp tục giải phương trình đối với x :

* Với y = 2 ta có : $\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}=2\Rightarrow x^2-6x-12=0$

$$\Delta'=21 ;\ x_1=3+\sqrt{21},\ x_2=3-\sqrt{21}.$$

* Với $y=\dfrac{4}{3}$ ta có : $\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow x^2-4x-12=0.$

$$\Delta'=16 ;\ x_3=6,\ x_4=-2.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x_1=3+\sqrt{21},\ x_2=3-\sqrt{21}$; $x_3=6$, $x_4=-2$.

Dạng 2. ĐIỀU KIỆN VỀ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1 : Xác định các hệ số a,b,c của phương trình dạng $ax^2+bx+c=0$ đã cho, xác định các giả thiết đã cho về điều kiện các hệ số đó hoặc tìm các điều kiện đó.

Bước 2 : (Khi $a \neq 0$) Lập biểu thức biệt số Δ(hoặc Δ'), biến đổi biểu thức này về dạng dễ nhận xét dấu của toàn biểu thức (có thể biến đổi về dạng tổng bình phương các nhị thức).

Bước 3 : Tuỳ theo yêu cầu của đề bài để đặt điều kiện cho biểu thức Δ (hoặc Δ').

Chú ý : *Việc giải điều kiện của biệt số Δ có thể dẫn tới việc giải một phương trình hoặc một bất phương trình.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Cho phương trình $(m-2)x^2-2mx+2m-3=0$ (với $m \neq 2$).

Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm số kép ? Tìm nghiệm số kép đó.

Hướng dẫn giải

Với $m \neq 2$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Phương trình có nghiệm số kép khi $\Delta' = m^2-(m-2)(2m-3)=0 \Leftrightarrow -m^2+7m-6=0 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=6$.

Vậy với $m=1$ hoặc $m=6$ phương trình đã cho có nghiệm kép.

+ Khi $m=1$ nghiệm kép đó là $x=\dfrac{m}{(m-2)}=-1$.

+ Khi $m=6$ nghiệm kép đó là $x=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng phương trình $ax^2+(ab+1)x+b=0$ luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của *a* và *b*. Tìm *a* và *b* để phương trình có một nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

– Nếu $a=0$, phương trình có nghiệm $x=-b$.

– Nếu $a\neq 0$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai và có

$\Delta=(ab+1)^2-4ab \ =(ab)^2+2ab+1-4ab=(ab-1)^2\geq 0$ (với mọi a, b).

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của *a* và *b*.

* Khi $a=0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=-b$, để phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$ thì $b=-\dfrac{1}{2}$.

* Khi $a\neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$ thì $\Delta=0$ và $\dfrac{1}{2}$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Do đó ta có : $\begin{cases} ab-1=0 \\ \dfrac{-(ab+1)}{2a}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ \dfrac{-2}{2a}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$ khi $a=0$ và $b=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $a=-2$ và $b=-\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng nếu $a+b>c$ và $|a-b|<c$ thì phương trình

$$a^2x^2+(a^2+b^2-c^2)x+b^2=0 \text{ vô nghiệm.}$$

Hướng dẫn giải

Nếu $a = 0$ thì không thể có đồng thời $b > c$ và $|b| < c$ do đó $a \neq 0$. Phương trình đã cho là phương trình bậc hai có :

$$\Delta = (b^2 + a^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (b^2 + a^2 - c^2 - 2ab)(b^2 + a^2 - c^2 + 2ab)$$
$$= \left[(a-b)^2 - c^2\right]\left[(a+b)^2 - c^2\right]$$

Theo giả thiết $a + b > c$ và $c > |a - b|$ nên $(a+b)^2 > c^2$ và $(a-b)^2 < c^2$.

Vậy $\Delta < 0$ và phương trình đã cho vô nghiệm.

Dạng 3. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ VI-ÉT

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

* Biến đổi biểu thức biểu thị quan hệ đại số giữa hai nghiệm số x_1, x_2 mà đề bài đã cho (hoặc thay thế quan hệ đại số được diễn tả bằng lời trong đề bài bằng biểu thức đại số) để nhận được một biểu thức mới chứa một dãy các phép tính chứa tổng và tích hai nghiệm số.

* Áp dụng định lí Vi-ét vào dãy các phép tính nói trên.

Chú ý :

- *Các quan hệ đại số giữa hai nghiệm thường được cho bởi các biểu thức liên quan đến các hằng đẳng thức quen thuộc.*
- *Để lập phương trình bậc hai nhận hai số α và β làm nghiệm ta cần tính $S = \alpha + \beta$ và $P = \alpha.\beta$ rồi áp dụng định lí Vi-ét. Nếu α, β liên quan đến các nghiệm của phương trình bậc hai cho trước thì lại áp dụng định lí Vi-ét để biến đổi.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Cho phương trình $x^2 - ax + a - 1 = 0$.

a) Chứng tỏ phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

b) Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{3x_1^2 + 3x_2^2 - 3}{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1}$.

c) Tìm một biểu thức liên hệ giữa x_1 ; x_2 không phụ thuộc vào *a*.

d) Tìm *a* để tổng các bình phương hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a) $\Delta = (-a)^2 - 4(a-1) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0$ nên phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2.

b) Sử dụng định lí Vi-ét, ta có :

$$M = \frac{3(x_1{}^2 + x_2{}^2 - 1)}{x_1x_2(x_1 + x_2)} = \frac{3\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 1\right]}{x_1x_2(x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{3\left[a^2 - 2(a-1) - 1\right]}{a(a-1)} = \frac{3(a-1)}{a} = 3 - \frac{3}{a}.$$

c) Theo định lí Vi-ét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = a & (1) \\ x_1.x_2 = a - 1 & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế (1) và (2) ta được : $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1,$ đây là biểu thức liên hệ cần tìm.

d) Ta có

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a-1) = a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1$

(vì $(a-1)^2 \geq 0$)

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ khi *a* = 1. Vậy $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất khi *a* = 1.

Ví dụ 2 : Cho phương trình $3x^2 + 7x + 4 = 0.$ Không giải phương trình, gọi α, β là các nghiệm số của nó, hãy lập một phương trình bậc hai có các nghiệm là $\dfrac{\alpha}{\beta - 1}$ và $\dfrac{\beta}{\alpha - 1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\alpha + \beta = -\dfrac{7}{3}$; $\alpha.\beta = \dfrac{4}{3}$ (1) (Định lí Vi-ét đối với phương trình đã cho).

Phương trình cần tìm có dạng $y^2 - Sy + P = 0,$ phương trình có hai nghiệm là $\dfrac{\alpha}{\beta - 1}$ và $\dfrac{\beta}{\alpha - 1}$ nên ta có :

$$S = \frac{\alpha}{\beta - 1} + \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta}{(\beta - 1)(\alpha - 1)} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}$$

$$P = \frac{\alpha}{\beta - 1} \cdot \frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}.$$

Thay các hệ thức ở (1) vào S và P ta được $S = \dfrac{23}{21}$ và $P = \dfrac{6}{21}$.

Vậy phương trình cần tìm là $21y^2 - 23y + 6 = 0.$

Dạng 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Phương pháp đồ thị (minh hoạ hình học tập nghiệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn) ;

– Phương pháp thế ;

– Phương pháp cộng đại số.

Chú ý :

** Mỗi nghiệm của hệ là một cặp giá trị tương ứng của x, y. Cặp $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ khi và chỉ khi ta có $\begin{cases} ax_0+by_0=c \\ a'x_0+b'y_0=c' \end{cases}$.*

** Số nghiệm của hệ là số giao điểm của hai đường thẳng có phương trình tương ứng với mỗi phương trình của hệ.*

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : a) Với giá trị nào của k thì hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1 \\ kx+2y=k \end{cases}$ có nghiệm duy nhất ? có vô số nghiệm ?

b) Với giá trị nào của k và m thì hệ $\begin{cases} kx-my+1=0 \\ mx+y+1=0 \end{cases}$ nhận cặp $(x=-1 ; y=0)$ làm nghiệm ?

Hướng dẫn giải

a) Từ phương trình đầu ta có $y=1-x$, thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình $(k-2)x=k-2$. (*)

– Khi $k=2$, phương trình (*) có nghiệm vô số nghiệm, do đó hệ đã cho có vô số nghiệm.

– Khi $k\neq 2$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất, do đó hệ có nghiệm duy nhất.

b) $x=-1,\ y=0$ là nghiệm của hệ đã cho khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -k+1=0 \\ -m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow k=m=1.$$

Ví dụ 2 : Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}=3 \\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3y}{y+1}=-1. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \neq -1$; $y \neq -1$.

Đặt $\dfrac{x}{x+1} = u$; $\dfrac{y}{y+1} = v$ từ hệ đã cho ta có :

$$\begin{cases} 2u + v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = 3 \\ 2u + 6v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5v = -5 \\ 2u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ u = 2 \end{cases}.$$

Từ đó ta có : $\dfrac{x}{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = -2$ (thoả mãn)

$\dfrac{y}{y+1} = -1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(-2 ; -\dfrac{1}{2})$.

Dạng 5. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HOẶC HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Biến đổi phương trình hoặc hệ phương trình đã cho và nhóm các biểu thức thích hợp rồi đặt ẩn phụ.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Giải phương trình : $4x^4 + 5x^2 - 9 = 0$. (*)

Hướng dẫn giải

Đặt $x^2 = t \geq 0$ (*) $\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 9 = 0$.

Có dạng : a + b + c = 4 + 5 − 9 = 0.

Ta có nghiệm $t_1 = 1$ (nhận) và $t_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{9}{4}$ (loại).

Do đó : $x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm là S = {−1 ; 1}.

Ví dụ 2 : Giải phương trình : $\frac{50}{x+1} - \frac{36}{x} = 1$. (1)

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq -1$

(1) $\Rightarrow 50x - 36(x + 1) = x(x + 1) \Leftrightarrow 50x - 36x - 36 = x^2 + x$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$ (*)

$\Delta = (-13)^2 - 4.36 = 169 - 144 = 25 > 0$; $\sqrt{\Delta} = 5$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt : $x_1 = \frac{13+5}{2} = 9$; $x_2 = \frac{13-5}{2} = 4$.

Cả hai giá trị $x = 9$ và $x = 4$ đều thoả mãn điều kiện. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là : $x = 9$ và $x = 4$. Tập nghiệm S = {4 ; 9}.

Ví dụ 3 : Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + 4x = 0$.

Hướng dẫn giải

$x^3 + 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 0. \end{array}\right.$

Ta có $\Delta' = 1^2 - 1.4 = -3 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là x = 0. Tập nghiệm S = $\{0\}$.

Ví dụ 4 : Giải phương trình : $\sqrt{x-4} = \sqrt{6-x}$.

Hướng dẫn giải

Chú ý $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

$$\sqrt{x-4} = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 4 = 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{5\}$.

Ví dụ 5 : Giải phương trình $(x+1)^4 + (x-2)^4 = 257$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x + 1$ = u ; x – 2 = v. (1)

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} u^4 + v^4 = 257 \\ u - v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 1. \end{cases}$

Thay u và v vào (1) ta được x = 3.

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{3\}$.

Ví dụ 6 : Giải phương trình $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 7$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \geq 2$. Đặt $u = \sqrt{x+5}$; $v = \sqrt{x-2}$ (u ; $v \geq 0$).

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 - v^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 3. \end{cases}$

Thay u và v vào (1) ta được x = 11 (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{11\}$.

Dạng 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Các bài tập này đề cập đến nhiều đối tượng khác nhau. Sự chuyển động của động tử, quan hệ giữa các số, sắp xếp chỗ ngồi hoặc phân phối hàng hoá theo quy định, thực hiện một công việc, các hiện tượng vật lí, hoá học, các bài toán liên quan đến hình học.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1 : Lập phương trình

* Xét xem bài toán đề cập đến đối tượng nào. Thường bài toán yêu cầu tìm giá trị của một đại lượng nào đó thì chọn giá trị đó làm ẩn (chiều dài, thời gian, vận tốc,…). Cần ghi rõ đơn vị của giá trị ẩn số.

Theo đề bài quy định cho giá trị ẩn số mà đặt điều kiện thích hợp. Nếu không chọn giá trị của đại lượng bài toán yêu cầu làm ẩn số thì phải chọn được một đại lượng khác mà qua đó có thể tính ngay giá trị đại lượng cần tìm.

* Dùng ẩn số và các số khác đã biết để "phiên dịch" từng câu diễn đạt về quan hệ trong đề bài thành các biểu thức đại số, qua đó biểu thị các số chưa biết khác.

Ví dụ :

– Bài toán chuyển động phải "phiên dịch"và lập đủ các quan hệ của ba đại lượng : quãng đường, thời gian, vận tốc chuyển động đều theo công thức $S = v.t$.

– Bài toán về "vòi nước chảy" hoặc "làm chung công việc" với giả thiết là trong mỗi đơn vị thời gian, phần công việc hoàn thành như nhau thì tương quan chung là : Nếu toàn bộ công việc được hoàn thành trong x đơn vị thời gian thì mỗi đơn vị thời gian làm được $\frac{1}{x}$ công việc…

* Sau khi đã "phiên dịch" đề bài thành các biểu thức đại số tiến hành lập phương trình (biểu thị bằng quan hệ đẳng thức giữa các biểu thức đại số).

Bước 2 : Giải phương trình.

Bước 3 : Nhận định kết quả, trả lời.

* Đối chiếu nghiệm số tìm được với điều kiện thích hợp của ẩn số.

* Biện luận (nếu cần).

* Thử lại và trả lời theo nội dung câu hỏi của đề bài.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Hai người khởi hành cùng một lúc và đi ngược chiều từ hai đầu đoạn đường AB dài 18km và gặp nhau sau 2 giờ. Người đi từ A mỗi km đi nhanh hơn 3 phút so với người đi từ B. Hỏi mỗi người đi với vận tốc là bao nhiêu ?

Hướng dẫn giải

2 giờ = 120 phút.

Gọi x phút là thời gian người A (đi từ A) đi 1km . Điều kiện $x > 0$.

Thời gian người B đi 1km là $(x+3)$ phút.

Trong 2 giờ người A đi được quãng đường $\frac{120}{x}$km, người B đi được quãng đường $\frac{120}{x+3}$km.

Sau 2 giờ họ gặp nhau nên ta có phương trình :

$$\frac{120}{x}+\frac{120}{x+3}=18 \text{ hay } 3x^2-31x-60=0$$

Giải phương trình này được $x_1=12$; $x_2=-\frac{5}{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta loại nghiệm x_2.

Trả lời : Người A đi 1km hết 12 phút vậy trong 1 giờ (60 phút) đi được $\frac{60}{12}=5$ km.

Vận tốc của người A là 5km/h.

Trong 60 phút người B đi được $\frac{60}{12+3}=4$ (km).

Vận tốc của người B là 4km/h.

Ví dụ 2 : Hai người làm chung một công việc trong 10 ngày sẽ hoàn thành. Sau khi làm chung được 6 ngày thì người thứ nhất nghỉ, người thứ hai tiếp tục làm được 6 ngày. Phần việc còn lại người thứ hai nghỉ, người thứ nhất làm trong 3 ngày thì xong. Hỏi nếu làm riêng mỗi người phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc.

Hướng dẫn giải

Gọi thời gian người thứ nhất, người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc lần lượt là x (ngày) ; y (ngày). Điều kiện : x ; $y > 10$.

Trong 1 ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$.

Người thứ nhất làm trong 9 ngày được $\frac{9}{x}$ (công việc).

Người thứ hai làm trong 12 ngày được $\frac{12}{y}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\frac{9}{x} + \frac{12}{y} = 1$.

Ta được hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{9}{x} + \frac{12}{y} = 1. \end{cases}$

Đặt $X = \frac{1}{x}$; Y = $\frac{1}{y}$.

Ta có : $\begin{cases} X + Y = \frac{1}{10} \\ 9X + 12Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9X + 9Y = \frac{9}{10} \\ 9X + 12Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3Y = \frac{1}{10} \\ X = \frac{1}{10} - Y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{1}{30} \\ X = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

Do đó : $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 30 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện ẩn).

Vậy thời gian để người thứ nhất, người thứ hai làm riêng hoàn thành công việc lần lượt là 15 ngày ; 30 ngày.

Ví dụ 3 : Tìm một số có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu đem số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.

Hướng dẫn giải

Gọi chữ số hàng chục là a, chữ số hàng đơn vị là b.

Điều kiện : a, b là các số tự nhiên : $1 \le a \le 9$; $0 < b \le 9$.

Vì số cần tìm gấp 7 lần chữ số đơn vị của nó, nên ta có phương trình :

$$10a + b = 7b \Leftrightarrow 10a - 6b = 0 \Leftrightarrow 5a - 3b = 0.$$

Số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3, ta có phương trình :

$$10a + b = 4(a + b) + 3 \Leftrightarrow 6a - 3b = 3 \Leftrightarrow 2a - b = 1.$$

Ta được hệ phương trình :

$\begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 3(2a - 1) = 0 \\ b = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -3 \\ b = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện của ẩn).

Vậy số có hai chữ số cần tìm là 35.

Ví dụ 4 : Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng là 6m, có diện tích là $280m^2$. Tìm chu vi của mảnh vườn đó.

Hướng dẫn giải

Gọi chiều rộng hình chữ nhật là x (m). Điều kiện : $x > 0$.

Chiều dài hình chữ nhật là $x + 6$ (m).

Theo đề bài ta có phương trình :

$$x(x + 6) = 280 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 280 = 0$$

$$\Delta' = 9 + 280 = 289 > 0 \; ; \; \sqrt{\Delta'} = 17$$

$$x_1 = -3 + 17 = 14$$

$x_2 = -3 - 17 = -20$ (loại)

Giá trị $x = 14$ thoả mãn điều kiện ẩn.

Chiều rộng hình chữ nhật là 14m. Chiều dài hình chữ nhật là 20m.

Chu vi hình chữ nhật là 68m.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $x^2 + x - 12 = 0$; b) $9x^2 + 6x + 2 = 0$; c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (m + 1)x + m = 0$. Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 3. Cho phương trình ẩn x : $(2a - 1)x^2 - 2(a + 4)x + 5a + 2 = 0$. Tìm a để phương trình có nghiệm.

Bài 4. Giải các phương trình :

a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$; b) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$;

c) $\sqrt{x-1} = 3$; d) $\sqrt{x+4} = x - 2$.

Bài 5. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm với mọi $m \neq -1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu và nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

Bài 6. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $x^2 - (2a - 3)x + a^2 - 3a = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi a. Tìm các nghiệm đã cho theo a.

b) Tìm a để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu.

c) Gọi x_1 ; x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho, tìm a sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $kx^2 - (k - 1)x - 1 = 0$.

a) Tìm giá trị của k để phương trình có nghiệm $x = -1$.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi k. Tìm hệ thức độc lập đối với k giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình.

Bài 8. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm.

b) Tìm m để hai nghiệm của phương trình cùng âm.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 thoả mãn điều kiện

$$2x_1 - 2x_2 = 15.$$

Bài 9. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $3x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

c) Đặt $y = x_1^2 x_2^2 + 2x_1x_2 + (x_1 + x_2)$.

Tính y theo m. Tìm m để y đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10. Minh hoạ hình học tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

Bài 11. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y\sqrt{2} = \sqrt{3} \\ x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \end{cases}$

Bài 12. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - ay = -3 \\ ax + 3y = 4 \end{cases}$. Với giá trị nguyên nào của a thì nghiệm của hệ thoả mãn $x < 0$ và $y > 0$?

Bài 13. Một người đi bộ đoạn đường AB với vận tốc 12km/h rồi đi tiếp đoạn đường BC với vận tốc 6km/h hết cả thảy 1 giờ 15 phút. Lúc về, người đó đi đoạn đường CB với vận tốc 8km/h rồi đi đoạn đường BA với vận tốc 4km/h, mất thời gian khi về cả thảy là 1 giờ 30 phút. Tính quãng đường AB và BC.

Bài 14. Hai ca nô cùng khởi hành một lúc từ hai bến A và B cách nhau 85km và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì hai ca nô gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi dòng hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9km/h và vận tốc dòng nước là 3km/h. Cho biết ca nô đi từ A đi xuôi dòng và ca nô đi từ B đi ngược dòng.

Bài 15. Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ Quảng Ngãi đến thành phố Quy Nhơn cách nhau 180km. Mỗi giờ xe thứ nhất chạy nhanh hơn xe thứ hai 5km nên đã đến thành phố Quy Nhơn trước xe thứ hai 24 phút. Tìm vận tốc của mỗi xe.

Bài 16. Hai đội cùng làm trong 8 giờ thì *x*ong một công việc. Nếu để riêng đội thứ nhất làm $\frac{1}{2}$ công việc rồi nghỉ, và đội thứ hai làm tiếp đến lúc hoàn thành công việc thì thời gian tổng cộng là 18 giờ. Hỏi mỗi đội làm riêng thì *x*ong công việc trong bao lâu ?

Bài 17. Một nhóm thợ theo kế hoạch dự định sản xuất 1200 sản phẩm. Trong 12 ngày đầu họ làm theo đúng kế hoach đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên hoàn thành kế hoạch sớm 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm thợ cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm ?

Bài 18. Một đội xe cần chuyên chở 140 tấn hàng. Hôm làm việc có hai xe phải điều đi nơi khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 8 tấn. Hỏi đội xe có bao nhiêu xe ?

Bài 19. Trong một hội trường có 120 người dự họp, được sắp xếp ngồi vừa đủ trên các dãy ghế, mỗi dãy ghế có số người ngồi như nhau. Nếu bớt đi 2 dãy ghế thì mỗi dãy ghế phải ngồi thêm 2 người nữa mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu trong hội trường có mấy dãy ghế và mỗi dãy được xếp bao nhiêu người ngồi ?

Bài 20. Hai công nhân A và B cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 2 giờ. Nếu làm riêng, công nhân A hoàn thành sớm hơn công nhân B là 3 giờ. Tính thời gian để công nhân A làm riêng hoàn thành công việc.

Bài 21. Một số có hai chữ số, chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7. Nếu đổi chữ số cho nhau thì được một số mới bằng $\frac{2}{9}$ số ban đầu. Tìm số ban đầu.

Bài 22. Một hình chữ nhật có chu vi 216m. Nếu giảm chiều dài đi 20%, tăng chiều rộng thêm 25% thì chu vi hình chữ nhật không đổi. Tính diện tích hình chữ nhật đó.

Bài 23. Có hai loại dung dịch của một thứ axit ; loại 1 chứa 20% axit, loại 2 chứa 5% axit. Muốn có 30 lít loại dung dịch hỗn hợp chứa 10% axit thì phải trộn bao nhiêu lít mỗi loại ?

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Cho ba số a, b, c $\neq 0$. Chứng minh rằng ba phương trình sau không thể đồng thời vô nghiệm : $ax^2 + 2bx + c = 0$; $bx^2 + 2cx + a = 0$; $cx^2 + 2ax + b = 0$.

Bài 2. Giải phương trình :

a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 15$;

b) $2\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 8x + 16 + 2\sqrt{2}$.

Bài 3. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của k để phương trình :

$x^2 - 2(k + 1)x + 3 + k^2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Bài 4. Giải phương trình : $x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2)$.

Bài 5. Xác định các số thực a và b sao cho hai phương trình

$x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm chung và $|a| + |b|$ nhỏ nhất.

Bài 6. Giả sử a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và b, c là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 2 = 0$.

Chứng minh hệ thức : $(b - a)(b - c) = m.n - 6$.

Bài 7. Tìm nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$, biết rằng chúng là những số nguyên và $p + q = 18$.

Bài 8. Giải các hệ phương trình : a) $\begin{cases} 7xy = 12(x+y) \\ 9yz = 20(y+z) \\ 8zx = 15(z+x) \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z+t=4 \\ z+t+x=5 \\ t+x+y=6 \end{cases}$.

Bài 9. Giải các hệ phương trình : a) $\begin{cases} x^2 + xy - xz = 2 \\ y^2 + xy - yz = 3 \\ z^2 - xz - yz = -4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} = 4\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{xyz}{y+z} = 3\dfrac{3}{7} \\ \dfrac{xyz}{z+x} = 4 \end{cases}$.

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x^{2014} + y^{2014} + z^{2014} = 3^{2015} \end{cases}$.

3. Bài tập tự giải

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$.

Bài 2. Cho phương trình : $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ (m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Tìm m để phương trình có nghiêm số kép. Tính nghiệm kép đó.

c) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm $x = 2$.

d) Tìm m để phương trình có hai nghiêm trái dấu.

e) Tìm hệ thức giữa hai nghiệm độc lập với m.

Bài 3. Một ôtô phải đi quãng đường AB dài 60km trong một thời gian nhất định. Ôtô đi nửa đoạn đường đầu với vận tốc hơn vận tốc dự định 10km/h và đi nửa đoạn đường sau với vận tốc kém vận tốc dự định 6km/h. Biết ôtô đến B đúng thời gian quy định. Tính thời gian ôtô dự định đi quãng đường AB.

Bài 4. Một đội xe dự định chở 180 tấn hàng, số hàng chia đều cho mỗi xe, nhưng khi thực hiện có 3 xe bị hỏng , do đó mỗi xe phải chở thêm 5 tấn hàng nữa thì mới hết số hàng. Tính số xe ban đầu của đội.

Bài 5. Một hội trường có 360 ghế được xếp thành từng hàng, mỗi hàng có số ghế bằng nhau. Nhưng để đủ chổ cho 400 người ngồi, phải kê thêm một hàng và mỗi hàng kê thêm một ghế. Hỏi ban đầu hội trường có mấy hàng ghế, mỗi hàng có mấy chiếc ghế ?

Chủ đề 3 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

Khái niệm, tính chất và dạng đồ thị của các hàm số

$$y = ax + b \text{ và } y = ax^2 \ (a \neq 0).$$

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Viết công thức tổng quát của hàm số cần tìm.

- Từ các điều kiện đã cho, ta thiết lập được một phương trình (hoặc một hệ) mà ẩn số là các hệ số, trong công thức tổng quát của hàm số cần tìm. Từ đó tìm được các hệ số.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Tìm hàm số bậc nhất biết đồ thị của nó đi qua hai điểm M(1 ; −2) và N(−1 ; −8).

Hướng dẫn giải

Hàm số cần tìm có dạng : $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

* Đồ thị hàm số đi qua điểm M(1 ; −2) nên $-2 = a + b$. (1)

* Đồ thị hàm số đi qua điểm N(−1 ; −8) nên $-8 = -a + b$. (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=-10 \\ a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}$.

Hàm số cần tìm là : y = 3x − 5.

Ví dụ 2 : Cho hàm số (P) : $y = ax^2$. (1)

Tìm giá trị của *a* để đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $(2\,;-1)$.

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số qua điểm $(2\,;-1) \Leftrightarrow -1 = a.2^2 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{4}$.

Vậy với $a = -\dfrac{1}{4}$ thì đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $(2\,;-1)$.

Dạng 2. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

a) Hàm số y = ax + b (a ≠ 0).

Cách vẽ đồ thị hàm số y = ax + b (a ≠ 0) :

Cách 1 : Xác định toạ độ giao điểm của đồ thị với hai trục toạ độ.

Cách 2 : Xác định hai điểm phân biệt bất kì thuộc đồ thị, rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

b) *Hàm số $y = ax^2$ (a ≠ 0).*

Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ (a ≠ 0).

- Lập bảng giá trị tương ứng (x ; f(x)).

- Vẽ tất cả các điểm $(x\,;f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

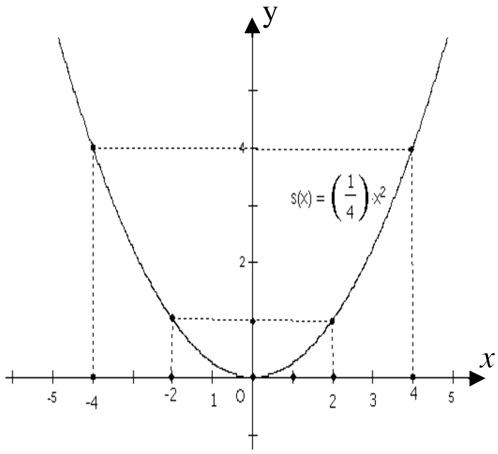
2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ : Vẽ đồ thị các hàm số a) $y = x + 3$ (d) ; b) $y = \frac{1}{4}x^2$ (P).

Hướng dẫn giải

a) Cho $x = 0$ thì $y = 3$, ta được điểm A(0 ; 3).

Cho $y = 0$ thì $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ ta được điểm B(-3 ; 0). Đường thẳng AB là đồ thị của hàm số $y = x + 3$.



b) Lập bảng một số giá trị tương ứng của x và y :

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	$\frac{9}{4}$	1	0	1	$\frac{9}{4}$	4

Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ là một đường parabol nằm phía trên trục hoành, nhận trục tung làm trục đối xứng ; nhận gốc toạ độ O(0 ; 0) làm đỉnh.

Dạng 3. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐIỂM THUỘC HOẶC KHÔNG THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ ; ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN, THỎA MÃN TÍNH CHẤT CHO TRƯỚC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Để xác định điểm thuộc hoặc không thuộc đồ thị ta thay toạ độ điểm đã cho vào hàm số.

– Hàm số bậc nhất $y = ax + b \quad (a \neq 0)$ đồng biến khi a > 0 và nghịch biến khi a < 0.

– Hàm số $y = ax^2$ (a $\neq$ 0) :

+ Khi a > 0 : đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

+ Khi a < 0 : đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (d) : $y = -2x - 2$.

a) Giải thích vì sao điểm A(-3 ; 4) nằm trên đường thẳng (d).

b) Tìm m sao cho đường thẳng (d') : $y = mx - 1$ cắt (d).

Hướng dẫn giải

a) Thay $x = x_A = -3$ vào phương trình của (d), ta có :

$$y = -2(-3) - 2 = 6 - 2 = 4 = y_A.$$

Do đó A nằm trên (d).

b) Để (d) và (d') : $y = mx - 1$ cắt nhau ta phải có $m \neq -2$.

Ví dụ 2 : Tìm m để hàm số $y = \left(-\frac{2}{3}m - 4\right)x + 2$ là hàm số bậc nhất và đồng biến.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \left(-\frac{2}{3}m - 4\right)x + 2$ là hàm số bậc nhất và đồng biến

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{3}m - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{-2m - 12}{3} > 0 \Leftrightarrow -(2m + 12) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 12 < 0 \Leftrightarrow 2m < -12 \Leftrightarrow m < -6.$$

Vậy với $m < -6$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và đồng biến.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = (m - 3)x^2$. Tìm giá trị của m để :

a) Hàm số nghịch biến với $x < 0$;

b) Có giá trị $y = 3$ khi $x = -1$.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = (m - 3)x^2$ nghịch biến với $x < 0 \Leftrightarrow m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

b) Vì hàm số có giá trị $y = 3$ khi $x = -1$ nên

$$3 = (m - 3).(-1)^2 \Leftrightarrow 3 = m - 3 \Leftrightarrow m = 6.$$

Dạng 4. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để xét sự tương giao của hai đồ thị, ta xét số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$, với $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số đã cho. Do yêu cầu đòi hỏi của đề bài để lập luận phương trình đó vô nghiệm, có nghiệm kép, hoặc có số nghiệm cần thiết.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho parabol (P) : $y = 2x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -3x - 4$.

Chứng tỏ rằng (P) và (d) không có điểm chung.

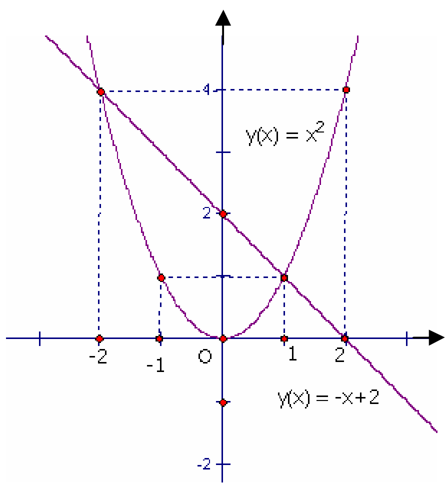
Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$2x^2 = -3x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\Delta = 9 - 32 = -23 < 0.$$

Vậy (d) và (P) không có điểm chung.



Ví dụ 2. Trên cùng hệ trục toạ độ Oxy :

a) Vẽ đồ thị hàm số (P) : $y = x^2$ và (d) : $y = -x + 2$.

b) Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d).

c) Kiểm nghiệm lại toạ độ giao điểm nói trên bằng phép tính.

Hướng dẫn giải

a) Bảng giá trị

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y		4	1	0	1	4	

Đồ thị của hàm số y = $-x + 2$ là một đường thẳng cắt trục hoành tại điểm (2 ; 0) và cắt trục tung tại điểm (0 ; 2).

b) Trên đồ thị ta thấy (d) cắt P tại hai điểm A(-2 ; 4) và B(1 ; 1).

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Phương trình có dạng a + b + c = 0 nên có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a} = -2$, suy ra $y_1 = 1$; $y_2 = 4$. Vậy (d) cắt (P) tại điểm A(-2 ; 4) và B(1 ; 1).

Dạng 5. CHỨNG MINH ĐỒ THỊ ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH VỚI MỌI GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Có hai cách :

– Chọn $x = x_0$ thích hợp thay vào biểu thức của hàm số, nhận được một giá trị không phụ thuộc tham số.

– Xem phương trình y = f(x, m) (m là tham số) với ẩn là m và chuyển về dạng : $g(x, y).m^2 + h(x, y).m + k(x, y) = 0$. Toạ độ điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \\ h(x, y) = 0 \\ k(x, y) = 0 \end{cases}$$

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ : Chứng minh rằng đường thẳng (d) : $y = mx - 2(m+1)$ luôn luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $y = mx - 2(m+1) \Leftrightarrow m(x-2) - (2+y) = 0$.

Nếu $\left(x_0 \,;\, y_0\right)$ là điểm cố định của đồ thị thì $m(x_0 - 2) - (2 + y_0) = 0$ với mọi m.

Đây là phương trình bậc nhất đối với m . Phương trình này được nghiệm đúng với mọi m nên phải có

$$\begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ 2 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số luôn đi qua điểm cố định $\left(2\,;-2\right)$ với mọi giá trị của m.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Xác định a và b sao cho đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm P(4 ; -3) và song song với đường thẳng $y = -\dfrac{2}{3}x + 1$.

Bài 2. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng : $y = -3x + 2$ và $y = 4(x - 3)$.

Bài 3. Tìm hàm số bậc nhất biết hệ số góc bằng -2 và đồ thị hàm số đi qua điểm A(3 ; 2).

Bài 4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng (d) : $y = x + 1$.

Viết phương trình đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm N có tung độ bằng -4.

Bài 5. Cho hàm số $y = (m^2 - 3)x^2$ có đồ thị là (P).

a) Tìm giá trị của m biết (P) đi qua điểm A(1 ; 6).

b) Với giá trị đó của m, đồ thị của hàm số có đi qua điểm B(-1 ; -6) không ?

Bài 6. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P).

a) Tìm a biết đồ thị đi qua M $\left(-1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Tìm m sao cho N(-3 ; m) $\in$ (P).

Bài 7. Cho hàm số $y = -x^2$. Vẽ đồ thị của hàm số.

Bài 8. Cho đường thẳng có phương trình : $mx + 3 + (3m - 1)y = 0$ (d).

a) Biết đường thẳng đi qua $A(1 ; -2)$. Tìm hệ số góc của đường thẳng này.

b) Chứng tỏ rằng đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định khi giá trị của m thay đổi. Tìm toạ độ điểm cố định đó.

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Tìm a để ba đường thẳng sau đây đồng quy :

$$y = 3x \; ; \; y = -x + 4 \text{ và } y = ax - \frac{3}{2}.$$

Bài 2. Lập phương trình đường thẳng (d) qua điểm $A(3 ; 0)$ và vuông góc với đường thẳng (d') : $y = 2x + 1$.

Bài 3. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy lấy ba điểm $A(1 ; 2)$; $B(1 ; -1)$ và $C(0 ; 2)$.

a) Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

b) Tính diện tích ΔABC.

c) Viết phương trình đường thẳng BC.

Bài 4. Trên cùng hệ trục toạ độ Oxy cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (D) : $y = -x - 2$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (P) song song với (D). Chỉ rõ toạ độ tiếp điểm.

Bài 5. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị là (P).

a) Xác định a biết đồ thị đi qua điểm $A(1 ; 1)$.

b) Gọi (D) là đường thẳng đi qua A và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là m ($m \neq 1$). Viết phương trình đường thẳng (D).

c) Tìm giá trị m để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).

Bài 6. Cho hàm số $y = (m + 1)x + m + 1$.

a) Tìm m để hàm số đã cho đồng biến và đồ thị của nó đi qua điểm $(1 ; 2)$.

b) Tìm m để trong cùng một hệ trục toạ độ đồ thị của hàm số đã cho tiếp xúc với parabol $y = -2x^2$. Tìm toạ độ tiếp điểm.

3. Bài tập tự giải

Bài 1. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị (P).

a) Tìm a biết (P) đi qua M($-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{12}$). Vẽ (P) với a vừa tìm được.

b) Tìm toạ độ các điểm trên (P) có hoành độ bằng $-\frac{1}{3}$; có tung độ bằng 4.

c) Chứng tỏ rằng nếu điểm (a ; b) thuộc (P) thì điểm ($-$a ; b) cũng thuộc (P).

d) Tìm m sao cho C(-3 ; m) thuộc (P).

e) Tìm những điểm trên thuộc parabol (P) cách đều hai trục toạ độ.

Bài 2. Cho hai hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và $y = 2x + 3$ có đồ thị (D).

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng hệ trục toạ độ.

b) Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (D).

c) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với (D) và tiếp xúc (P). Xác định toạ độ tiếp điểm.

Chủ đề 4 BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

1. Định nghĩa và các tính chất của bất đẳng thức.

2. Các quy tắc cộng trừ cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức, quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương, với cùng một số âm.

3. Bất đẳng thức Cô-si.

4. Biết cách giải bất phương trình bậc nhất, bậc hai một ẩn.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1.	CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Dùng định nghĩa bất đẳng thức.

– Biến đổi tương đương (thành tổng các biểu thức có giá trị không âm).

– Áp dụng bất đẳng thức Cô-si.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. *Chứng minh* $a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc$.

Hướng dẫn giải

Ta có $a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc = (a + 2c - 2b)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức được chứng minh).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0. \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) luôn đúng nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2+d^2 \ge ab+ac+ad$.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad=\left(\frac{a^2}{4}-ab+b^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ac+c^2\right)+$$

$$+\left(\frac{a^2}{4}-ad+d^2\right)+\frac{a^2}{4}$$

$$=\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\frac{a^2}{4}\ge 0$$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \ge ab+ac+ad$ (đpcm).

Ví dụ 4. Chứng minh rằng : $a^2+4b^2+4c^2 \ge 4ab-4ac+8bc$.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$a^2+4b^2+4c^2-4ab+4ac-8bc=(a^2-4ab+4b^2)+4c^2+(4ac-8bc)$$

$$=(a-2b)^2+2.(a-2b).2c+(2c)^2 \;=(a-2b+2c)^2\ge 0.$$

$\Rightarrow \quad a^2+4b^2+4c^2 \ge 4ab-4ac+8bc$ (đpcm).

Ví dụ 5. Cho $a+b>1$. Chứng minh : $a^4+b^4>\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $(a-b)^2\ge 0 \Rightarrow a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad a^4+b^4 \ge \frac{(a^2+b^2)^2}{2}>\frac{1}{8}$ (đpcm).

Ví dụ 6. Cho a, b > 0 thoả mãn điều kiện : $a.b = 1$. Chứng minh rằng :

$$(a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}\geq 8.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a^2 và b^2 ta có :

$$a^2+b^2\geq 2ab=2$$

$$\Rightarrow\quad (a+b+1)(a^2+b^2)+\frac{4}{a+b}\geq 2(a+b+1)+\frac{4}{a+b}$$

$$=(a+b)+\left(a+b+\frac{4}{a+b}\right)+2 \qquad (1)$$

Tương tự : áp dụng BĐT Cô-si, ta có :

$$\left.\begin{array}{l} a+b\geq 2\sqrt{ab}=2 \\ a+b+\dfrac{4}{a+b}\geq 2\sqrt{(a+b).\dfrac{4}{(a+b)}}=4 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\quad (a+b)+\left(a+b+\frac{4}{a+b}\right)+2\geq 2+4+2=8 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $(a+b+1)(a^2+b^2)+\dfrac{4}{a+b}\geq 8$ (đpcm).

Dạng 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cho biểu thức f(x, y…).

* Ta nói M là giá trị lớn nhất của f(x, y…) kí hiệu ma$x$f(x, y…) = M, nếu hai điều kiện sau được thoả mãn :

– Với mọi x, y… để f(x, y…) $x$ác định thì f(x, y…) $\le$ M.

– Tồn tại x_0, y_0… sao cho f(x_0, y_0…) = M.

* Ta nói m là giá trị nhỏ nhất của f(x, y…) kí hiệu minf(x, y…) = m, nếu hai điều kiện sau được thoả mãn :

– Với mọi x, y… để f(x, y…) $x$ác định thì f(x, y…) $\ge$ m.

– Tồn tại x_0, y_0… sao cho f(x_0, y_0…) = m.

Chú ý :

+ $A = k + M^2 \ge k$. Giá trị nhỏ nhất của A là k $\Leftrightarrow$ M = 0.

+ $B = h - N^2 \le h$. Giá trị lớn nhất của B là h $\Leftrightarrow$ N = 0.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. a) Tìm GTNN của $A = 3x^2 - 4x + 1$.

b) Tìm GTLN của $B = -5x^2 + 6x - 2$.

Hướng dẫn giải

a) $A = 3\left(x^2 - 2.x.\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{3} = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \ge -\frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của A là $-\frac{1}{3}$, điều này xảy ra khi $x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

b) $B = -5\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}\right) - \frac{1}{5} = -5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} \le -\frac{1}{5}$.

Vậy GTLN của B là $-\frac{1}{5}$, điều này xảy ra khi $x - \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị nhỏ nhất của $B(x) = x^2 + 4y^2 - 6x + 12y + 21$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}B(x) &= x^2 + 4y^2 - 6x + 12y + 21\\ &= (x^2 - 6x + 9) + (4y^2 + 12y + 9) + 3\\ &= (x-3)^2 + (2y+3)^2 + 3 \ge 3.\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B(x) bằng 3 khi $x = 3$ và $y = \dfrac{-3}{2}$.

Ví dụ 3 : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức E = $\dfrac{3x-6\sqrt{x}+21}{x-2\sqrt{x}+4}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $x \ge 0$;

$$E = \frac{3x-6\sqrt{x}+21}{x-2\sqrt{x}+4} = \frac{3\left(x-2\sqrt{x}+4\right)+9}{x-2\sqrt{x}+4} = 3 + \frac{9}{x-2\sqrt{x}+4}$$

$$= 3 + \frac{9}{\left(x-2\sqrt{x}+1\right)+3} = 3 + \frac{9}{(\sqrt{x}-1)^2+3}.$$

Vì $\dfrac{9}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+3} \le \dfrac{9}{3} = 3.$

Vậy giá trị lớn nhất của E là 6 $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thoả điều kiện).

Dạng 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Vận dụng quy tắc cộng vào hai vế của một bất phương trình một số hoặc một đa thức chứa ẩn thì được một bất phương trình mới tương đương.

– Vận dụng quy tắc nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số dương thì được một bất phương trình mới tương đương. Nếu nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số âm và đổi chiều của bất phương trình thì được một bất phương trình mới tương đương.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình

a) $3(1-x)>1+2x$;   b) $(x+1)(x+3)<1+4x$.

Hướng dẫn giải

a) $3(1-x)>1+2x \Leftrightarrow 3-3x>1+2x$

$$\Leftrightarrow -3x-2x>1-3 \Leftrightarrow -5x>-2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{5}.$$

Vậy $S=\left\{x\,/\,x<\frac{2}{5}\right\}$.

b) $(x+1)(x+3)<1+4x \Leftrightarrow x^2+4x+3<1+4x$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-4x<1-3 \Leftrightarrow x^2<-2.$$

Ta nhận thấy với mọi $x\in R$, $x^2\geq 0$ và vế phải là một số âm.

Vậy không có giá trị nào của x là nghiệm của bất phương trình. Do đó $S=\varnothing$.

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình sau có tập nghiệm là R

$$m(x-1)+m^2-3x+1\geq 0.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $m(x-1)+m^2-3x+1\geq 0 \Leftrightarrow (m-3)x+m^2-m+1\geq 0$.

Để mọi $x\in R$ đều là nghiệm thì ta phải có

$$\begin{cases} m-3=0 \\ m^2-m+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m^2-m+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3.$$

Vậy m = 3 thì bất phương trình đã cho có tập nghiệm là R.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $(x-2)(x+3)\geq 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(x-2)(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\geq 0\ ;\ x+3\geq 0 \\ x-2\leq 0\ ;\ x+3\leq 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2\ ;\ x\geq -3 \\ x\leq 2\ ;\ x\leq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x\leq -3 \end{array}\right..$$

Vậy S = { $x/\,x\geq 2$ hoặc $x\leq -3$ }.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Chứng minh rằng :

a) $2(a^4 + b^4) \geq (a+b)(a^3 + b^3)$; (1)

b) $3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3)$. (2)

Bài 2. Giả sử $2014 \leq x \leq 2016$. Chứng minh $\sqrt{2016 - x} + \sqrt{x - 2014} \leq 2$.

Bài 3. Chứng minh bất đẳng thức : $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi $x \in$ R : $\dfrac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 + 3}} \geq 4$.

Bài 5. Cho bốn số dương a ; b ; c thoả mãn ad – bc = 1.

Chứng minh rằng : $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}$.

Bài 6. Cho ba số a, b, c thoả mãn điều kiện : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng : $2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) + abc \geq 0$.

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = -2\sqrt{x} + x + 5$.

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \dfrac{1}{2\sqrt{x} - x - 3}$.

Bài 9. a) Cho $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = 3xy - 4$.

b) Cho $x - 2y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = x^2 + 2y^2 - x + 3y$.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M = \sqrt{3x - 5} + \sqrt{7 - 3x} \text{ với } \frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}.$$

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Cho a, b, c > 0.

Chứng minh rằng : $a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$. (1)

Bài 2. Chứng minh rằng : $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$ với $a, b > 0$.

Bài 3. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$.

Bài 4. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$.

Bài 5. Chứng minh bất đẳng thức : $|x|+|y|\geq\sqrt{(x+y)^2}$.

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = (x-2)^2 + (x-3)^2$.

Bài 7. Tìm cặp số (x, y) với y nhỏ nhất thoả mãn điều kiện :

$$x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0.$$

Bài 8. Cho x, y liên hệ với nhau bởi hệ thức : $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $S = x + y + 1$.

Bài 9. Giải và biện luận bất phương trình $5x-mx>3+x$ (m là tham số).

3. Bài tập tự giải

Bài 1. Cho a, b, c > 0. Chứng minh :

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$; b) $a.\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b.\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 6$.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn : $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A=\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}.$$

GỢI Ý - HƯỚNG DẪN GIẢI PHẦN ĐẠI SỐ

Chủ đề 1. BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. a) $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3$.

b) Vì $a + b + c = 0$ nên $a + b = -c \Rightarrow (a + b)^3 = -c^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$

Bài 2. $\left(\dfrac{x}{x-1}-1\right):\left(1+\dfrac{3x^2}{x^2-1}\right)=\dfrac{x-x+1}{x-1}:\dfrac{x^2-1+3x^2}{x^2-1}$

$$=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{4x^2-1}=\frac{x+1}{4x^2-1}.$$

Bài 3. $\dfrac{x^3-x^2y-xy^2+y^3}{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=\dfrac{x^2(x-y)-y^2(x-y)}{x^2(x+y)-y^2(x+y)}=\dfrac{(x-y)(x^2-y^2)}{(x+y)(x^2-y^2)}=\dfrac{x-y}{x+y}.$

Bài 4. Điều kiện $x^3 + 2x^2 - x - 2 \neq 0$. Ta có

$$x^2(x+2)-(x+2)\neq 0 \Rightarrow (x+2)(x+1)(x-1)\neq 0$$

$\Rightarrow x\neq -2$; $x\neq -1$; $x\neq 1$.

$A=0\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x^2-4x+x-4=0$

$\Rightarrow x(x-4)+(x-4)=0\Rightarrow (x-4)(x+1)=0.$

Suy ra $x = 4$ (thoả mãn điều kiện) ; $x = -1$ (loại).

Vậy A = 0 khi $x = 4$.

Bài 5. a) $\sqrt{4+\sqrt{12}}+3\sqrt{3}+6=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+3\sqrt{3}+6$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+3\sqrt{3}+6 = \sqrt{3}+1+3\sqrt{3}+6=4\sqrt{3}+7$

$=(2+\sqrt{3})^2.$

b) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$

$=\sqrt{6-2\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$

$=\left(\sqrt{5}-1\right)^2\left(3+\sqrt{5}\right)=\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=2\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$

$= 2(9-5) = 8.$

c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

$=\dfrac{8-2\sqrt{15}+8+2\sqrt{15}}{5-3}-\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{5-1}=\dfrac{16}{2}-\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}$

$=8-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{13-\sqrt{5}}{2}.$

d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right)+\dfrac{\sqrt{216}}{3\sqrt{6}}$

$=\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left[\dfrac{\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-1\right)}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1\right)}{1-\sqrt{3}}\right]+2$

$=\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(-\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+2$

$=-\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)+2=-2+2=0.$

Bài 6. a) $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right).\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $(x>0\ ;\ y>0\ ;\ x\neq y)$

$=\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right].\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \sqrt{xy}\right].\frac{1}{x-y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 1.$$

b) Với $x > 0$; $y > 0$; $x \neq y$, ta có :

$$B = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{4y}{x-y}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x-y} + \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x-y} - \frac{4y}{x-y}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{xy}+y+x-2\sqrt{xy}+y-4y}{x-y} = \frac{2(x-y)}{(x-y)} = 2.$$

c) Với $x > 0$; $x \neq 1$, ta có :

$$C = \frac{1}{1-m}x - \frac{m}{1-m} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\left[\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)} = \frac{2}{x-1}.$$

d) Với $-1 < x < 1$, ta có :

$$D = \left(\frac{2}{\sqrt{1+x}} - 1 : \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) : \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{1+x}} - \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1+x}} : \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1+x}} . \frac{\sqrt{1+x}.\sqrt{1-x}}{\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)} = \sqrt{1-x}.$$

e) Với $x > y > 0$, ta có :

$$E = \frac{x\sqrt{y}+y}{x-y} . \sqrt{\frac{xy+y^2-2y\sqrt{xy}}{x\left(x+2\sqrt{y}\right)+y}} : \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{y}\left(x+\sqrt{y}\right)}{x-y} . \sqrt{\frac{y\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)}{x^2+2x\sqrt{y}+y}} : \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{y}(x+\sqrt{y})}{x-y} . \sqrt{\frac{y\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\left(x+\sqrt{y}\right)^2}} .(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$= \frac{\sqrt{y}\left(x+\sqrt{y}\right).\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{(x-y)\left(x+\sqrt{y}\right)} = \frac{y\left(x+\sqrt{y}\right)(x-y)}{(x-y)\left(x+\sqrt{y}\right)} = y.$$

g) Với $x \geq 2$; $x \neq 3$, ta có :

$$G = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1} = \frac{\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1}}{\sqrt{x-2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}}{\sqrt{x-2}-1} = \frac{\left|\sqrt{x-2}-1\right|}{\sqrt{x-2}-1} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x > 3 \\ -1 & \text{nếu} \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

h) $H = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2014+\sqrt{2015}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2014}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \ldots + \frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{1} = \sqrt{2015}-1.$$

Bài 7. a) Điều kiện $x > 0$ và x nguyên, $x \neq 1$. Ta có :

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right].\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x-1}.$$

b) A nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow x - 1 \in$ Ư$(2) = \{\pm 1 ; \pm 2\}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \\ x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Vậy với $x = 2$ hoặc $x = 3$ thì giá trị tương ứng của A nguyên.

Bài 8. Với $x > 0$; $y > 0$ và $x \neq y$, ta có :

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} - \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right).\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2(x-y)} - \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right].\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2(x-y)}.\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right] + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2.\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 1.$$

Vậy với $x > 0$; $y > 0$ và $x \neq y$ thì giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào hai biến x và y.

Bài 9. a) C xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ \sqrt{x} - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \text{ ; } x \neq 1.$

b) $C = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$

$$= \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} - 1.$$

c) $x = 4 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

Do đó giá trị của biểu thức C tại $x = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$ là

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} - 1 = \sqrt{3} + 1 - 1 = \sqrt{3}.$$

Bài 10. a) E có nghĩa $\Leftrightarrow x > 0$ và $x \neq 1$.

b) $E = \left[\dfrac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right]\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}.\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x-1}.$$

c) $x = \sqrt{16-6\sqrt{7}} + \sqrt{7} = \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{7}$

$= \left|3-\sqrt{7}\right| + \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} + \sqrt{7} = 3.$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $x = 3$ là $A = \dfrac{2}{3-1} = 1.$

d) E nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của 2 (Ư(2) = $\{\pm 1\ ;\ \pm 2\}$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \\ x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Theo điều kiện ở câu a) chỉ có hai giá trị $x = 2$ hoặc $x = 3$ là thoả mãn.

Vậy với $x = 2$ hoặc $x = 3$ thì E nhận giá trị nguyên.

Bài 11. $A = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} \Rightarrow A^3 = (\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}})^3$

$\Rightarrow\ A^3 = 5+2\sqrt{13}+5-2\sqrt{13}+3\sqrt[3]{(5+2\sqrt{13})(5-2\sqrt{13})}.A = 10-9A$

$\Rightarrow\ A^3+9A-10=0 \Rightarrow (A-1)(A^2+A+10)=0 \Rightarrow A-1=0$

$\Rightarrow\ A = 1$ (Vì $A^2+A+10>0$ với mọi A).

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Ta có

* $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (ab + ac + b^2 + bc)(c + a) + abc$

$= abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + b^2a + bc^2 + abc + abc$

$= 3abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + b^2a + bc^2$ (1)

* $(a + b + c)(ab + bc + ca)$

$= a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2$

$= 3abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + b^2a + bc^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$.

Bài 2. $(a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b) = a^5 + b^5 + a^3b^2 + a^2b^3 - (a + b)$

$= a^5 + b^5 + a^2b^2(a + b) - (a + b)$

$= a^5 + b^5 + (a + b) - (a + b) = a^5 + b^5$ (do $ab = 1$).

Bài 3. a) $14^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$

$\Leftrightarrow \quad 196 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$

$\Leftrightarrow \quad a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Lại có $a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$

$\Rightarrow \quad ab + bc + ca = -7$

$\Rightarrow \quad (ab + bc + ca)^2 = 49$

$\Rightarrow \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2ab^2c + 2bc^2a + 2ca^2b = 49$

$\Rightarrow \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(b + c + a) = 49.$

Do đó $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$.

Suy ra A = $a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2.49 = 98.$

b) Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

Thay $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ ta được

$(a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc = 0$

$\Leftrightarrow \quad (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0. \end{array}\right.$$

* Nếu a + b + c = 0 thì

$$B = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = \frac{b + a}{b} \cdot \frac{c + b}{c} \cdot \frac{a + c}{a} = \frac{(-c)}{b} \cdot \frac{(-a)}{c} \cdot \frac{(-b)}{a} = -1.$$

* Nếu $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ thì $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$

Khi đó $B = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8.$

Bài 4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + z^3 - 3xyz$

$= [(x + y)^3 + z^3] - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2] - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$

$$M = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx} = \frac{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)}{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}$$

$= x + y + z.$

Bài 5. Ta có : $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Rightarrow ayz + bxz + cxy = 0$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2.\frac{ayz + bxz + cxy}{abc} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bài 6. $A^2 = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 + 4xy}{2x^2 + 2y^2 - 4xy}.$

Vì $2x^2 + 2y^2 = 5xy$ nên $A^2 = \frac{5xy + 4xy}{5xy - 4xy} = \frac{9xy}{xy} = 9.$

Vì $x > y > 0 \Rightarrow x + y > 0$; $x - y > 0 \Rightarrow A > 0$.

Ta có $A^2 = 9$ và $A > 0 \Rightarrow A = 3$.

Bài 7. Ta có $xyz = 1$ nên :

$$A = \frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}$$

$$= \frac{z}{z + zx + xyz} + \frac{xz}{xz + yxz + yxz^2} + \frac{1}{1 + z + zx}$$

$$= \frac{z}{z + zx + 1} + \frac{xz}{zx + 1 + z} + \frac{1}{1 + z + zx} = \frac{z + zx + 1}{1 + z + zx} = 1.$$

Bài 8. - Khi n = 1 : Vế trái S = 1.2.3 = 6 ; Vế phải $\frac{1.2.3.4}{4} = 6$. Đẳng thức đúng.

- Giả sử đẳng thức đúng khi $n = k$, tức là :

S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 +......+ $k(k + 1)(k + 2) = \dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$.

Ta chứng minh đẳng thức đúng khi $n = k + 1$.

Ta có

S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 +......+ $k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)(k + 2)(k +3)$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)+4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

Đẳng thức được chứng minh.

Bài 9. Điều kiện : $-1\le x\le 1$.

$$\text{N} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}.(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(1+x+\sqrt{1-x^2}+1-x)}{2+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}.\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow N^2=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x-2\sqrt{1-x^2}+1-x\right)$$

$$=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\left(2-2\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)=2x^2.$$

Do đó : N = $\sqrt{2x^2}=|x|\sqrt{2}$.

Tại $x=\dfrac{1}{5}$, giá trị của biểu thức N là N = $\left|\dfrac{1}{5}\right|\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Chủ đề 2. PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. a) $\Delta = 1^2 - 4.1.(-12) = 1 + 48 = 49 > 0$; $\sqrt{\Delta} = 7$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là :

$$x_1 = \frac{-1+7}{2} = 3 \; ; x_2 = \frac{-1-7}{2} = -4.$$

Vậy S = {3 ; −4}.

b) $\Delta' = 3^2 - 9.2 = 9 - 18 = -9 < 0$.

Phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy $S = \varnothing$.

c) $\Delta' = (-6)^2 - 4.9 = 36 - 36 = 0$

Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. Vậy $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Bài 2. $\Delta = (m + 1)^2 - 4m = m^2 + 2m + 1 - 4m$

$= m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0$ với mọi m.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 3. * Khi $a = \dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho trở thành

$$-9x + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 9x = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

* Khi $a \neq \dfrac{1}{2}$, ta có

$$\Delta' = (a+4)^2 - (2a-1)(5a+2)$$

$$= a^2 + 8a + 16 - 10a^2 + a + 2 = -9a^2 + 9a + 18 = -9(a^2 - a - 2).$$

Để phương trình có nghiệm ta phải có $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 2a - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a(a+1) - 2(a+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1 \geq 0 \; ; a-2 \leq 0 \\ a+1 \leq 0 \; ; a-2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge -1\ ;\ a \le 2 \\ a \le -1\ ;\ a \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \le a \le 2. \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le a \le 2$.

Bài 4. a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 7x + 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3\ ;\ x = 4. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm : $x_1 = 0$; $x_2 = 3$ và $x_3 = 4$.

Tập hợp nghiệm S = {0 ; 3 ; 4}.

b) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ (1). Đặt $X = x^2$ $(X \ge 0)$ (1) $\Leftrightarrow X^2 - 4X - 5 = 0$.

Có dạng a – b + c = 1 + 4 – 5 = 0. Suy ra $X_1 = -1$ (loại) ; $X_2 = 5$ (nhận).

Do đó $x^2 = 5$ suy ra $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5}$. Vậy $S = \left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right\}$.

c) Điều kiện : $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$

$\sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 = 3^2$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 9 + 1 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là S = $\{10\}$.

d) $\sqrt{x+4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ x + 4 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x + 4 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x(x-5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x = 0\ ;\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $x = 5$.

Bài 5. a) Với $m \ne -1$;

$\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m+1)(m-3) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m + 3 = 4 > 0$.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \ne -1$.

b) Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu ta phải có $\begin{cases}\Delta \geq 0 \\ P > 0.\end{cases}$

Ta có : P = $x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{m+1} > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3>0\ ;\ m+1>0 \\ m-3<0\ ;\ m+1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3\ ;\ m>-1 \\ m<3\ ;\ m<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<-1. \end{array}\right.$$

Vậy với m > 3 hoặc m < −1 thì phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.

c) Theo câu b) phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi m > 3 hoặc m < –1.

Gọi hai nghiệm là x_1 và x_2 và giả sử $x_1 = 2x_2$.

Theo định lí Vi-ét, ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{m+1} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ 2x_2^2 = \dfrac{m-3}{m+1} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{2(m-1)}{3(m+1)} \\ x_2^2 = \dfrac{m-3}{2(m+1)} \end{cases}.$$

Do đó : $\dfrac{4(m-1)^2}{9(m+1)^2} = \dfrac{m-3}{2(m+1)}$

$\Leftrightarrow 8(m-1)^2 = 9(m-3)(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 2m - 35 = 0$

$\Delta' = 1 + 35 = 36 > 0$

$m_1 = 1 + 6 = 7$; $m_2 = 1 - 6 = -5$.

Cả hai giá trị này đều thoả mãn m > 3 hoặc m < –1.

Vậy phương trình có hai nghiệm cùng dấu và nghiệm này gấp đôi nghiệm kia khi m = 7 hoặc m = –5.

Bài 6. a) $\Delta = (2a-3)^2 - 4(a^2 - 3a) = 4a^2 - 12a + 9 - 4a^2 + 12a = 9 > 0$.

Vậy phương trình bậc hai đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi a.

Hai nghiệm của phương trình là :

$$x_1 = \frac{2a-3-3}{2} = a - 3\ ;\ x_2 = \frac{2a-3+3}{2} = a.$$

b) Để phương trình có hai nghiệm trái dấu, ta phải có :

$$\Leftrightarrow x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow \text{a(a – 3)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0\,;\, a-3>0 \\ a>0\,;\, a-3<0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0\,;\, a>3 \text{ (loại)} \\ a>0\,;\, a<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < a < 3$$

c) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a - 3)^2 - 2(a^2 - 3a)$

$= 4a^2 - 12a + 9 - 2a^2 + 6a$

$= 2a^2 - 6a + 9 = 2\left(a^2 - 3a + \dfrac{9}{2}\right) = 2\left[\left(a^2 - 2a.\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4}\right) - \dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2}\right]$

$= 2\left[\left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}\right] = 2\left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} \geq \dfrac{9}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ là $\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi $a - \dfrac{3}{2} = 0$ hay $a = \dfrac{3}{2}$.

Bài 7. a) Vì $x = -1$ là nghiệm của phương trình nên :

$k.(-1)^2 - (k - 1).(-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow k + k - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2k = 2 \Leftrightarrow k = 1.$

Vậy k = 1 thì phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$.

b) * Khi k = 0, phương trình đã cho trở thành : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

* Khi $k \neq 0$:

$\Delta = (k - 1)^2 + 4k = k^2 - 2k + 1 + 4k = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \geq 0$ với mọi $k \neq 0$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi k.

Trong trường hợp $k \neq 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Theo định lí Vi-ét ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{k-1}{k} \\ x_1x_2 = \dfrac{-1}{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - \dfrac{1}{k} & (1) \\ x_1x_2 = \dfrac{-1}{k} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta suy ra : $x_1 + x_2 = 1 + x_1x_2$, đây là hệ thức độc lập giữa x_1 và x_2 đối với k.

Bài 8. a) $\Delta = (2m-1)^2 - 8(m-1) = 4m^2 - 4m + 1 - 8m + 8 = 4m^2 - 12m + 9$

$= (2m-3)^2 \geq 0.$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Để phương trình có hai nghiệm cùng âm thì

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-1}{2} > 0 \\ \dfrac{-(2m-1)}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

c) Theo Vi-ét và đề cho ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-(2m-1)}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-1}{2} \\ 2x_1 - 2x_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1 - 2m & (1) \\ 2x_1 - 2x_2 = 15 & (2) \\ x_1x_2 = \dfrac{m-1}{2} & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) : $4x_1 = 16 - 2m \Leftrightarrow x_1 = 4 - \dfrac{m}{2} = \dfrac{8-m}{2}$.

Thay vào (2) : $8 - m - 2x_2 = 15 \Leftrightarrow 2x_2 = -7 - m \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{-7-m}{2}$.

Thay x_1 và x_2 theo m vào (3) : $\left(\dfrac{8-m}{2}\right).\left(\dfrac{-7-m}{2}\right) = \dfrac{m-1}{2}$

$\Leftrightarrow -56 - m + m^2 = 2m - 2 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 54 = 0$

$\Delta = 9 + 216 = 225 > 0$; $\sqrt{\Delta} = 15$

$m_1 = \dfrac{3+15}{2} = 9$; $m_2 = \dfrac{3-15}{2} = -6$.

Vậy với $m = 9$ hoặc $m = -6$ thì phương trình thoả mãn điều kiện

$$2x_1 - 2x_2 = 15.$$

Bài 9. a) $\Delta' = 4 - 6(m - 1) = 10 - 6m$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt ta phải có $\Delta > 0 \Leftrightarrow 10 - 6m > 0$

$$\Leftrightarrow 6m < 10 \Leftrightarrow m < \frac{5}{3}.$$

b) Để phương trình có hai nghiệm cùng dương thì

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{3} \\ S = \frac{4}{3} > 0 \\ P = \frac{2(m-1)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{3} \\ S = \frac{4}{3} > 0 \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{5}{3}. \\ m > 1 \end{cases}$$

Vậy với $1 < m \leq \frac{5}{3}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dương.

c) $y = (x_1x_2)^2 + 2x_1x_2 + x_1 + x_2 = \frac{4}{9}(m-1)^2 + \frac{4}{3}(m-1) + \frac{4}{3}$

$$= \frac{4}{9}(m^2 + m + 1) = \frac{4}{9}\left[\left(m^2 + 2m.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1\right]$$

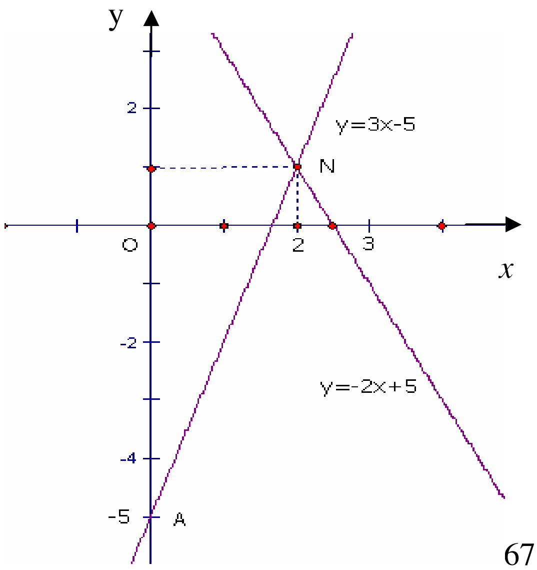
$$= \frac{4}{9}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = \frac{4}{9}\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}.$$

y đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $m = -\frac{1}{2}$.

Bài 10. Hệ đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} y = 3x - 5 & (1) \\ y = -2x + 5 & (2) \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hai hàm số (1) và (2). Hai đường thẳng (1) và (2) có hệ số góc khác nhau nên trên mặt phẳng toạ độ Oxy chúng cắt nhau tại một điểm N có toạ độ giao điểm là ($x = 2$; $y = 1$). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là (2 ; 1).



Bài 11. a) $\begin{cases}2x-y=-3\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=-3\\2x+6y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7y=11\\x+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{11}{7}\\x=4-\dfrac{33}{7}=-\dfrac{5}{7}.\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất ($x = \dfrac{-5}{7}$; $y = \dfrac{11}{7}$).

b) $\begin{cases}x-y=2\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\x-y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0x+0y=-4 & (1)\\x-y=6 & (2)\end{cases}$

Phương trình (1) của hệ vô nghiệm nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) $\begin{cases}x+y\sqrt{2}=\sqrt{3}\\x\sqrt{3}-y\sqrt{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+\sqrt{3})x=1+\sqrt{3}\\x+y\sqrt{2}=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y\sqrt{2}=\sqrt{3}-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : $\left(1\,;\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài 12. Ta có : $\begin{cases}2x-ay=-3\\\text{ax +3y=4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-3ay=-9\\a^2x+3ay=4a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a^2+6)x=4a-9\\\text{ax+3y = 4}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4a-9}{a^2+6}\\a.\dfrac{(4a-9)}{a^2+6}+3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4a-9}{a^2+6}\\y=\dfrac{3a+8}{a^2+6}.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất là :

$$\left(\frac{4a-9}{a^2+6};\frac{3a+8}{a^2+6}\right).$$

Để nghiệm của hệ thoả mãn $x < 0$; $y > 0$, ta có :

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 9 < 0 \\ 3a + 8 > 0 \end{cases} \text{(Vì } a^2 + 6 > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{9}{4} \\ a > -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-8}{3} < a < \dfrac{9}{4}.$$

Vì a nguyên nên $a = -2$; $a = -1$; $a = 0$; $a = 1$; $a = 2$.

Bài 13. 1 giờ 15 phút = $\dfrac{5}{4}$ giờ ; 1 giờ 30 phút = $\dfrac{3}{2}$ giờ.

Gọi quãng đường AB ; quãng đường BC lần lượt là x(km) ; y(km). Điều kiện : $x, y > 0$.

Thời gian đi quãng đường AB là $\dfrac{x}{12}$ (giờ).

Thời gian đi quãng đường BC là $\dfrac{y}{6}$ (giờ).

Ta có phương trình : $\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{5}{4}$.

Thời gian về trên quãng đường CB là $\dfrac{y}{8}$ (giờ).

Thời gian về trên quãng đường BA là $\dfrac{x}{4}$ (giờ).

Ta có phương trình : $\dfrac{y}{8} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 15 \\ 2x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 30 \\ 2x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 18 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 3 \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện của ẩn).}$$

Vậy quãng đường AB dài 3km ; quãng đường BC dài 6km.

Bài 14. 1 giờ 40 phút = $\frac{5}{3}$ (giờ).

Gọi vận tốc riêng của ca nô đi từ A và ca nô đi từ B lần lượt là x(km/h) ; y (km/h).

Điều kiện : $x > 0$; $y > 3$.

Quãng đường ca nô A đi trong $\frac{5}{3}$ (giờ) là : $\frac{5}{3}(x + 3)$ (km).

Quãng đường ca nô B đi trong $\frac{5}{3}$ giờ là : $\frac{5}{3}(y - 3)$ (km).

Ta có phương trình : $\frac{5}{3}(x + 3) + \frac{5}{3}(y - 3) = 85$.

Vì vận tốc ca nô đi xuôi dòng hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9km/h nên ta có phương trình : $(x + 3) - (y - 3) = 9 \Leftrightarrow x - y = 3$.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{5}{3}(x+3) + \frac{5}{3}(y-3) = 85 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 255 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 51 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 54 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ y = 24 \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện của ẩn).}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô A là 27km/h, vận tốc riêng của ca nô B là 24km/h.

Bài 15. 24 phút = $\frac{2}{5}$ (giờ).

Gọi vận tốc xe thứ nhất, xe thứ hai lần lượt là x (km/h) ; y (km/h). Điều kiện $x > y > 0$.

Theo đề bài ta có phương trình : $x - y = 5$.

Thời gian xe thứ nhất đi từ Quảng Ngãi đến thành phố Quy Nhơn là : $\frac{180}{x}$ (giờ).

Thời gian xe thứ hai đi từ Quảng Ngãi đến thành phố Quy Nhơn là : $\dfrac{180}{y}$ (giờ).

Ta có phương trình : $\dfrac{180}{y} - \dfrac{180}{x} = \dfrac{2}{5}$.

Ta được hệ phương trình : $\begin{cases} x - y = 5 & (1) \\ \dfrac{180}{y} - \dfrac{180}{x} = \dfrac{2}{5} & (2) \end{cases}$

Từ (1) : $x = y + 5$. (3)

Thay vào (2) : $\dfrac{180}{y} - \dfrac{180}{y+5} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 900(y + 5) - 900y = 2y(y + 5)$

$\Leftrightarrow 4500 = 2y^2 + 10y \Leftrightarrow y^2 + 5y - 2250 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 45y + 50y - 2250 = 0$

$\Leftrightarrow y(y - 45) + 50(y - 45) = 0 \Leftrightarrow (y - 45)(y + 50) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = 45 & \text{(thoả mãn điều kiện)} \\ y = -50 & \text{(loại)} \end{array}\right.$

Thay $y = 45$ vào (3) : $x = 45 + 5 = 50$ (thoả mãn điều kiện của ẩn).

Vậy vận tốc của xe thứ nhất là 50km/h, vận tốc của xe thứ hai là 45km/h.

Bài 16. Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng hoàn thành công việc là x (giờ).

Điều kiện : $8 < x < 36$.

Thời gian đội thứ hai làm riêng hoàn thành công việc là y (giờ).

Điều kiện : $8 < y < 36$.

Trong 1 giờ đội thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 giờ đội thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{8}$.

Thời gian đội thứ nhất làm $\frac{1}{2}$ công việc là $\frac{x}{2}$ (giờ).

Thời gian đội thứ hai làm $\frac{1}{2}$ công việc là $\frac{y}{2}$ (giờ).

Ta có phương trình : $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 18$.

Ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8} \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8} \\ x+y=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{36-x}=\frac{1}{8} & (1) \\ y=36-x & (2) \end{cases}$$

Từ (1) : $8(36 - x) + 8x = x(36 - x) \Leftrightarrow 288 = 36x - x^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 36x + 288 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 24x + 288 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x - 12) - 24(x - 12) = 0 \Leftrightarrow (x - 12)(x - 24) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 12$; $x_2 = 24$ (thoả mãn điều kiện ẩn).

Khi $x_1 = 12$ thì $y_1 = 36 - 12 = 24$ thoả mãn điều kiện.

Khi $x_2 = 24$ thì $y_2 = 36 - 24 = 12$ thoả mãn điều kiện ẩn.

Vậy : Đội thứ nhất làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc trong 12 giờ và đội thứ hai làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc trong 24 giờ.

Đội thứ nhất làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc trong 24 giờ thì đội thứ hai làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc trong 12 giờ.

Bài 17. Gọi số sản phẩm làm trong một ngày theo dự định là x (sản phẩm).

Điều kiện : x nguyên dương.

Thời gian dự định là $\frac{1200}{x}$ (ngày).

Thời gian về sau kể từ khi tăng năng suất là

$$\frac{1200}{x} - 12 - 2 = \frac{1200}{x} - 14 \text{ (ngày).}$$

Số sản phẩm làm trong 12 ngày đầu là $12x$ (sản phẩm).

Số sản phẩm làm sau khi tăng năng suất là $(\frac{1200}{x}-14)(x+10)$ (sản phẩm).

Ta có phương trình :

$$12x + (\frac{1200}{x}-14)(x+10)=1200$$

$$\Rightarrow \quad 12x+1200+\frac{12000}{x}-14x-140=1200$$

$$\Rightarrow \quad -2x+\frac{12000}{x}-140=0$$

$$\Rightarrow \quad x-\frac{6000}{x}+70=0 \Rightarrow x^2+70x-6000=0.$$

Giải phương trình tìm được $x = 50$ (thoả mãn) ; $x = -120$ (loại).

Vậy theo kế hoạch thì trong một ngày nhóm thợ đó làm 50 sản phẩm.

Bài 18. Gọi số xe của đội là x (xe). Điều kiện : x nguyên ; $x > 2$.

Số xe về sau : $x - 2$ (xe).

Lúc đầu mỗi xe chở $\frac{140}{x}$ (tấn). Về sau mỗi xe chở $\frac{140}{x-2}$ (tấn).

Theo đề ta có phương trình :

$$\frac{140}{x-2} - \frac{140}{x} = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 140x - 140(x-2) = 8x(x-2) \Leftrightarrow 280 = 8x^2 - 16x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 35 = 0$$

$\Delta' = 1 + 35 = 36 > 0$; $\sqrt{\Delta'} = 6$

$x_1 = 1 + 6 = 7$; $x_2 = 1 - 6 = -5$ (loại).

Giá trị $x = 7$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy số xe của đội là 7 xe.

Bài 19. Gọi số dãy ghế ban đầu trong hội trường là x (dãy). Điều kiện : x nguyên ; $x > 2$.

Số dãy ghế còn lại sau khi đã bớt đi 2 dãy là : $x - 2$ (dãy).

Số người ngồi trên mỗi dãy lúc ban đầu là $\frac{120}{x}$ (người).

Số người ngồi trên mỗi dãy về sau là $\frac{120}{x-2}$ (người).

Theo đề ta có phương trình : $\frac{120}{x-2} - \frac{120}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 120 = 0$

$\Delta' = 1 + 120 = 121 > 0$; $\sqrt{\Delta'} = 11$

$x_1 = 1 + 11 = 12$; $x_2 = 1 - 11 = -10$ (loại).

Đối chiếu với điều kiện và thử lại ta thấy $x = 12$ là thích hợp.

Vậy số dãy ghế ban đầu là 12 dãy và mỗi dãy ghế có : $\frac{120}{12} = 10$ (người).

Bài 20. Gọi thời gian để công nhân A làm riêng xong công việc là x (giờ). Điều kiện $x > 2$.

Thời gian để công nhân B làm riêng xong công việc là $x + 3$ (giờ).

Trong 1 giờ công nhân A làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 giờ công nhân B làm được $\frac{1}{x+3}$ (công việc).

Theo đề ta có phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+3) + 2x = x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$

$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$; $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ (loại).

Giá trị $x = 3$ thoả mãn điều kiện.

Vậy thời gian để công nhân A làm riêng hoàn thành công việc trong 3 giờ.

Bài 21. Gọi chữ số hàng chục là a. Chữ số hàng đơn vị là b.

Điều kiện : $7 \le a \le 9$; $0 < b < 3$; a, b nguyên.

Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 7 nên ta có phương trình : $a - b = 7$.

Đổi chữ số cho nhau được số mới bằng $\frac{2}{9}$ số ban đầu nên ta có phương trình :

$10b + a = \frac{2}{9}(10a + b) \Leftrightarrow 90b + 9a = 20a + 2b$

$$\Leftrightarrow 11a - 88b = 0 \Leftrightarrow a - 8b = 0.$$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a - b = 7 \\ a - 8b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 7 \\ b + 7 - 8b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện của ẩn). Vậy số cần tìm là 81.

Bài 22. $20\% = \frac{1}{5}$; $25\% = \frac{1}{4}$.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m), chiều rộng hình chữ nhật là y (m).

Điều kiện $x > y > 0$.

Vì hình chữ nhật có chu vi là 216m nên có phương trình $x + y = 108$. (1)

Chiều dài về sau là $x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$; chiều rộng về sau là $y + \frac{y}{4} = \frac{5y}{4}$.

Vì chu vi không đổi nên có phương trình

$$\frac{4x}{5} + \frac{5y}{4} = 108 \Leftrightarrow 16x + 25y = 2160 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 108 \\ 16x + 25y = 2160. \end{cases}$

Giải hệ ta được $x = 60$ và $y = 48$ (thoả mãn).

Diện tích hình chữ nhật ban đầu là $60 \cdot 48 = 2880$ (m^2).

Bài 23. Gọi lượng dung dịch loại I là x (lít) ; lượng dung dịch loại II là y (lít). Điều kiện : $0 < x$; $y < 30$.

Ta có phương trình : $x + y = 30$.

Lượng axit chứa trong dung dịch loại I là $\frac{20}{100}x$.

Lượng axit chứa trong dung dịch loại II là : $\frac{5y}{100}$.

Ta có phương trình :

$$\frac{20x}{100} + \frac{5y}{100} = \frac{10}{100}(x + y) \Leftrightarrow 20x + 5y = 10x + 10y \Leftrightarrow 10x - 5y = 0.$$

Ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 10x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy lượng dung dịch loại I là 10 lít. Lượng dung dịch loại II là 20 lít.

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Ta có : $\Delta'_1 = b^2 - ac$; $\Delta'_2 = c^2 - ab$; $\Delta'_3 = a^2 - bc$

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] \geq 0.$$

Do đó tồn tại ít nhất một trong ba số Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 không âm. Vậy ba phương trình đã cho không thể cùng vô nghiệm.

Bài 2. a) Ta có $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 15$

$\Rightarrow \quad (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) = 15$

$\Rightarrow \quad (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 15 \qquad (*)$

Đặt t = $x^2 + 5x + 4$; (*) $\Rightarrow$ t(t + 2) = 15 $\Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0$

$\Delta' = 1 + 15 = 16 > 0$; $\sqrt{\Delta'} = 4$

$t_1 = -1 + 4 = 3$; $t_2 = -1 - 4 = -5$.

* Khi t = 3, ta có :

$x^2 + 5x + 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0$.

$\Delta = 25 - 4 = 21 > 0$

$x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}$.

* Khi t = −5, ta có :

$x^2 + 5x + 4 = -5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 9 = 0$

$\Delta = 25 - 36 = -11 < 0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là :

$x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}$ và $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}$.

b) Điều kiện : $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$.

$$2\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 8x + 16 + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = (x-4)^2 + 2\sqrt{2}.$$

Vế trái của phương trình luôn $\leq 2\sqrt{2}$ còn vế phải của phương trình luôn $\geq 2\sqrt{2}$ nên để phương trình có nghiệm thì phải có đồng thời hai vế đều bằng $2\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2\sqrt{2} & (1) \\ (x-4)^2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra : x = 4. Thay x = 4 vào (1) : $2\sqrt{2} + 0 = 2\sqrt{2}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là : x = 4.

Bài 3. Ta có $\Delta' = (k+1)^2 - (3 + k^2) = k^2 + 2k + 1 - 3 - k^2 = 2k - 2$.

Để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2k - 2 > 0$ $\Leftrightarrow 2k > 2 \Leftrightarrow k > 1$

Vậy k nguyên nhỏ nhất là k = 2 thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

Bài 4. Ta có $x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2) \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0$.

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được :

$$x^2 - 5x + \frac{10}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 5\left(x - \frac{2}{x}\right) = 0 \qquad (*)$$

Đặt $t = x - \frac{2}{x} \Leftrightarrow t^2 + 4 = x^2 + \frac{4}{x^2}$ phương trình (*) $\Leftrightarrow t^2 + 4 - 5t = 0 \Leftrightarrow$ $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Có dạng a + b + c = 0 nên $t_1 = 1$ và $t_2 = 4$.

Khi t = 1 : $x - \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Suy ra $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

Khi t = 4 : $x - \frac{2}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$. Suy ra $x_3 = 2 + \sqrt{6}$; $x_4 = 2 - \sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là : $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2 + \sqrt{6}$; $x_4 = 2 - \sqrt{6}$.

Bài 5. Giả sử hai phương trình $x^2 + ax + 1$ và $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm chung là x_0.

Lúc đó : $x_0^2 + ax_0 + 1 = 0$

$$x_0^2 + bx_0 + 2 = 0 \Rightarrow 2x_0^2 + (a + b)x_0 + 3 = 0$$

$$\Delta = (a + b)^2 - 24 \geq 0 \Leftrightarrow |a+b| \geq \sqrt{24} \Leftrightarrow |a+b| \geq 2\sqrt{6}$$

Do $|a| + |b| \geq |a+b|$ nên $|a| + |b| \geq 2\sqrt{6}$.

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow |a| + |b| \geq 2\sqrt{6}$.

Mặt khác : $|a| + |b|$ nhỏ nhất là $2\sqrt{6}$.

Mà $|a|+|b|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép

$$x_{01} = x_{02} = \frac{-(a+b)}{4} = \frac{\pm 2\sqrt{6}}{4} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Thay $x_0 = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ vào hai phương trình đã cho ta tìm được :

$$\left(a = \frac{5}{\sqrt{6}}\ ;\ b = \frac{7}{\sqrt{6}}\right) \text{ hoặc } \left(a = \frac{-5}{\sqrt{6}}\ ;\ b = \frac{-7}{\sqrt{6}}\right).$$

Bài 6. Vì a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ nên theo định lí Vi-ét ta có :

$$\begin{cases} a+b=-m \\ a.b=1 \end{cases}$$

Vì b và c là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 2 = 0$ nên theo định lí Vi-ét ta có :

$$\begin{cases} b+c=-n \\ bc=2 \end{cases}$$

Mặt khác : $(b - a)(b - c) = b^2 - bc - ab + ac$

$= b^2 + ab + bc + ac - 2(ab + bc) = b(a + b) + c(a + b) - 2(ab + bc)$

$= (a + b)(b + c) - 2(ab + bc) = (-m)(-n) - 2(1 + 2) = mn - 6$

Bài 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ (x_1 ; $x_2 \in \mathbb{Z}$).

Theo Vi-ét, ta có : $x_1 + x_2 = -p$; $x_1.x_2 = q$.

Do đó : $18 = p + q = -(x_1 + x_2) + x_1.x_2 = -x_1 - x_2 + x_1x_2$

$= (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 19$

Do 19 là số nguyên tố, nên cặp số ($x_1 - 1$; $x_2 - 1$) hoặc trùng với cặp số (1 ; 19) hoặc trùng với cặp số (-1 ; -19).

Vậy nghiệm của phương trình là : ($x_1 = 2$; $x_2 = 20$) ứng với $p = -22$; $q = 40$ hoặc ($x_1 = 0$; $x_2 = -18$) ứng với $p = 18$; $q = 0$.

Bài 8. a) $(x ; y ; z) = (0 ; 0 ; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Khi $x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$ hệ đã cho tương đương với hệ.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{9}{20} \\ \dfrac{z+x}{zx} = \dfrac{8}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{9}{20} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{8}{15} \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế các phương trình của hệ, ta được

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{47}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{47}{60}.$$

* Vì $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{47}{60} - \dfrac{7}{12} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow z = 5.$

* Vì $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{9}{20} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{47}{60} - \dfrac{9}{20} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = 3.$

* Vì $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{8}{15} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{47}{60} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = 4.$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai bộ nghiệm là : $(x ; y ; z) = (0 ; 0 ; 0)$ và $(x ; y ; z) = (3 ; 4 ; 5)$.

b) Cộng vế theo vế các phương trình của hệ, ta được :

$$3(x + y + z + t) = 18 \Rightarrow x + y + z + t = 6$$

* Vì $x + y + z = 3$ nên $t = 3$.
* Vì $y + z + t = 4$ nên $x = 2$.
* Vì $z + t + x = 5$ nên $y = 1$.
* Vì $t + x + y = 6$ nên $z = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là : $(x = 2 ; y = 1 ; z = 0 ; t = 3)$.

Bài 9. a) Cộng từng vế các phương trình của hệ, ta có :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz = 1 \Leftrightarrow (x + y - z)^2 = 1$$

$\Leftrightarrow$ $x + y - z = 1$ hoặc $x + y - z = 1$.

Mặt khác hệ phương trình đã cho được viết dưới dạng :

$$\begin{cases} x(x+y-z)=2 \\ y(y+x-z)=3 \\ z(z-x-y)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y-z)=2 \\ y(x+y-z)=3 \\ -z(x+y-z)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y-z)=2 \\ y(x+y-z)=3 \\ z(x+y-z)=4 \end{cases}$$

* Khi $x + y - z = 1$ ta được nghiệm của hệ là : $(x = 2\ ;\ y = 3\ ;\ z = 4)$.

* Khi $x + y - x = -1$. Ta có : $\begin{cases} x.(-1)=2 \\ y(-1)=3 \\ z.(-1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3. \\ z=-4 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là : $(x = 2\ ;\ y = 3\ ;\ z = 4)$ và $(x = -2\ ;\ y = -3\ ;\ z = -4)$.

b) Điều kiện : $x \neq 0\ ;\ y \neq 0\ ;\ z \neq 0$.

Hệ đã cho viết dưới dạng :

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xyz}=\dfrac{5}{24} \\ \dfrac{y+z}{xyz}=\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{z+x}{xyz}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{5}{24} \\ \dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (*')$$

Cộng từng vế các phương trình của hệ, ta được

$$2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{3}{8}$$

Kết hợp với hệ (*) ta được : $\begin{cases} xy=6 \\ zy=12 \\ zx=8 \end{cases}$ (*')

Nhân vế theo vế hệ (*') ta được : $(xyz)^2 = 576 = (\pm 24)^2$.

Do đó :

* Khi $xyz = 24$ ta tìm được nghiệm của hệ là : $(x = 2\ ;\ y = 3\ ;\ z = 4)$.

* Khi $xyz = -24$, ta tìm được nghiệm của hệ là : $(x = -2\ ;\ y = -3\ ;\ z = -4)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là : $(x = 2\ ;\ y = 3\ ;\ z = 4)$ và $(x = -2\ ;\ y = -3\ ;\ z = -4)$.

Bài 10. Ta có : $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2xy + 2yz + 2zx$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\ 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được :

$$3.x^{2014} = 3^{2015} \Leftrightarrow x^{2014} = 3^{2014} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $x = y = z = 3$.

Chủ đề 3 : HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Vì đường thẳng y = ax + b song song với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x + 1$ nên $a = -\frac{2}{3}$ và $b \neq 1$. Khi đó : $y = -\frac{2}{3}x + b$.

Đường thẳng này đi qua điểm P(4 ; −3) nên : $-3 = -\frac{2}{3}4 + b \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$ (thoả mãn).

Vậy : $a = -\frac{2}{3}$ và $b = -\frac{1}{3}$.

Bài 2. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là :

$$-3x + 2 = 4(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x + 2 = 4x - 12 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2.$$

Khi $x = 2$, giá trị y tương ứng là : $y = -3.2 + 2 = -4$.

Vậy toạ độ giao điểm của hai đường thẳng là : ($x = 2$; $y = -4$).

Bài 3. Hàm số cần tìm có dạng : y = ax + b (a ≠ 0).

- Vì hàm số có hệ số góc bằng −2 nên : $a = -2 \Rightarrow y = -2x + b$.
- Vì đồ thị của hàm số đi qua A(3 ; 2) nên : $2 = -2.3 + b \Rightarrow b = 8$.

Hàm số cần tìm là : $y = -2x + 8$.

Bài 4. Phương trình đường thẳng (d') cần lập có dạng : $y = ax + b$.

* Vì (d') song song với (d) nên a = 1. Lúc đó (d') : $y = x + b$.

* Vì (d') đi qua điểm N trên trục tung có tung độ là -4 hay (d') đi qua điểm N có toạ độ $(0\ ;\ -4)$ nên : $y_N = ax_N + b \Leftrightarrow -4 = a.0 + b \Leftrightarrow b = -4$.

Vậy đường thẳng (d') cần lập là : $y = x - 4$.

Bài 5. a) Vì đồ thị của (P) : $y = (m^2 - 3)x^2$ đi qua A(1 ; 6) nên

$$6 = m^2 - 3 \Leftrightarrow m^2 = 9.$$

$$\Leftrightarrow \qquad m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (m+3)(m-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 3 \end{array}\right..$$

Vậy với m = 3 hoặc $m = -3$ thì đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1 ; 6).

b) Khi m = 3 hoặc $m = -3$ ta được hàm số $y = 6x^2$.

Do đó điểm $B(-1\ ;\ -6)$ không thuộc đồ thị của hàm số.

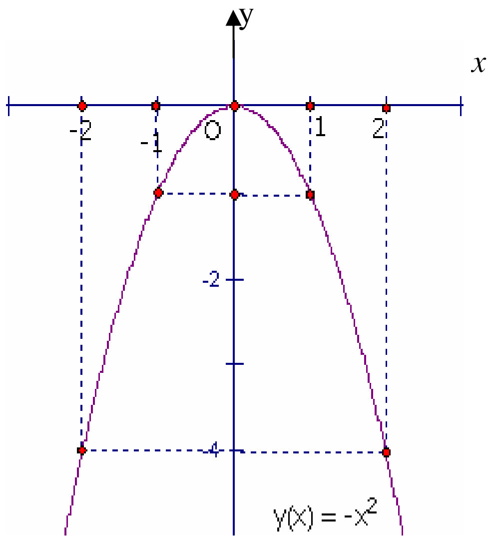
Bài 6. a) Đồ thị đi qua $M\left(-1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ nên : $\dfrac{1}{2} = a.(-1)^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Lúc đó : $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

b) Vì $N(-3\ ;\ m) \in (P)$ nên : $m = \dfrac{1}{2}.(-3)^2 = \dfrac{9}{2}$.

Bài 7. Lập bảng một số giá trị tương ứng của x và y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Đồ thị hàm số $y = -x^2$ là một đường parabol nằm phía dưới trục hoành nhận trục tung là trục đối xứng ; nhận gốc toạ độ O(0 ; 0) làm đỉnh.



Bài 8. a) $mx + 3 + (3m - 1)y = 0$ (*)

Vì đường thẳng đi qua $A(1 ; -2)$ nên

$$m.1 + 3 + (3m - 1)(-2) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad m + 3 - 6m + 2 = 0 \Leftrightarrow -5m + 5 = 0 \Leftrightarrow 5m = 5 \Leftrightarrow m = 1$

Khi $m = 1$ (*) $\Leftrightarrow x + 3 + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = -x - 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Vậy hệ số góc của đường thẳng là $-\frac{1}{2}$.

b) Gọi $A(x_0 ; y_0)$ là điểm cố định mà (d) luôn đi qua.

Ta có : $mx_0 + 3 + (3m - 1)y_0 = 0 \ (\forall m)$

$\Leftrightarrow \quad mx_0 + 3my_0 = y_0 - 3 \ (\forall m)$

$\Leftrightarrow \quad m(x_0 + 3y_0) = y_0 - 3 \ (\forall m)$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 + 3y_0 = 0 \\ y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -9 \\ y_0 = 3 \end{cases}.$

Vậy (d) luôn đi qua điểm cố định $A(-9 ; 3)$.

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số $y = 3x$ và $y = -x + 4$ là :

$$3x = -x + 4 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Lúc đó giá trị y tương ứng : $y = 3.1 = 3$.

Toạ độ giao điểm của chúng là : $(x = 1 ; y = 3)$.

Thay toạ độ này vào hàm số : $y = ax - \frac{3}{2}$, ta có :

$$3 = a.1 - \frac{3}{2} \Rightarrow a = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

Vậy : $a = \frac{9}{2}$ thì ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Bài 2. Phương trình đường thẳng (d) có dạng y = ax + b (a $\neq$ 0).

Vì (d) vuông góc (d') nên 2a = – 1. Suy ra : a = $-\dfrac{1}{2}$.

Khi đó (d) : y = $-\dfrac{1}{2}x$ + b.

Vì (d) đi qua A(3 ; 0) nên 0 = $-\dfrac{1}{2}.3 + b \Rightarrow b = \dfrac{3}{2}$.

Vậy đường thẳng (d) cần tìm là : y = $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Bài 3. a) ΔABC có AC = 1 ; AB = 3 và

BC = $\sqrt{AC^2 + AB^2}$

$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

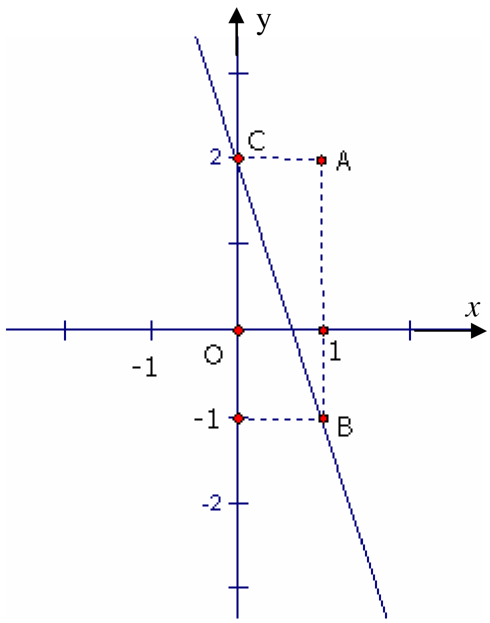
b) $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC}{2} = \dfrac{3.1}{2} = \dfrac{3}{2}$ (đvdt).

c) Phương trình đường thẳng BC có dạng y = ax + b (a $\neq$ 0)

Vì đường thẳng đi qua B(1 ; -1) nên -1 = a + b.

Vì đường thẳng đi qua C(0 ; 2) nên 2 = a.0 + b $\Rightarrow$ b = 2.

Do đó : a = $-$b $-$ 1 = $-$2 $-$ 1 = $-$3.



Vậy phương trình đường thẳng BC là y = $-3x + 2$.

Bài 4. Phương trình tiếp tuyến với (P) có dạng y = ax + b (D')

vì (D') // (D) nên a = $-$1. (D') : y = $-x$ + b.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với (D') :

$$-x^2 = -x + b \Leftrightarrow x^2 - x + b = 0 \quad (1)$$

$\Delta = 1 - 4b$

Do (D') và (P) tiếp $x$úc nên $\Delta = 0$. Hay $1 - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{4}$.

Suy ra (D') : $y = -x + \frac{1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm kép của phương trình (1) : $x_0 = \frac{1}{2}$.

Do đó toạ độ tiếp điểm là $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right)$.

Bài 5. a) Vì đồ thị của hàm số $y = ax^2$ đi qua A(1 ; 1) nên : $1 = a.1^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Lúc đó : $y = x^2$.

b) Phương trình đường thẳng (D) cần tìm có dạng : $y = ax + b$.

Vì (D) đi qua A(1 ; 1) nên : $1 = a + b$.

Vì (D) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ m ($m \neq 1$) nên : $0 = a.m + b$.

Ta được hệ phương trình : $\begin{cases} a+b=1 \\ ma+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)a=1 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{1-m} \\ b=\dfrac{-m}{1-m} \end{cases}$.

Do đó phương trình đường thẳng (D) là : $y = \frac{1}{1-m}x - \frac{m}{1-m}$ ($m \neq 1$).

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D)

$$x^2 = \frac{1}{1-m}x - \frac{m}{1-m} \quad (m \neq 1) \Rightarrow (1 - m)x^2 - x + m = 0$$

$$\Delta = 1 - 4m(1 - m) = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2$$

Để (P) và (D) tiếp xúc $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì (P) và (D) tiếp xúc.

Bài 6. a) Hàm số $y = (m + 1)x + m + 1$ đồng biến

$\Leftrightarrow \quad m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \qquad (1)$

Vì đồ thị của hàm số đi qua điểm (1 ; 2) nên :

$$2 = m + 1 + m + 1 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) để hàm số đã cho là đồng biến và đi qua điểm (1 ; 2) khi m = 0.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol là :

$$-2x^2 = (m + 1)x + m + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (m + 1)x + m + 1 = 0 \qquad (*)$$

$$\Delta = (m + 1)^2 - 8(m + 1) = m^2 - 6m - 7$$

Để đường thẳng và parabol tiếp $x$úc $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0$

$$\Delta' = 9 + 7 = 16 > 0$$

$$m_1 = 3 + 4 = 7 \; ; \; m_2 = 3 - 4 = -1.$$

Vậy với m = 7 hoặc m = -1 thì đường thẳng và (P) tiếp xúc.

* Khi m = -1, đường thẳng trở thành y = 0 và tiếp xúc với (P) tại gốc toạ độ O(0 ; 0).

* Khi m = 7, phương trình (*) có nghiệm kép :

$$x_1 = x_2 = \frac{-(m+1)}{4} = -2, \text{ lúc đó : } y_1 = y_2 = -8.$$

Vậy toạ độ tiếp điểm là M(-2 ; -8).

Chủ đề 4 : BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. a) Ta có :

$$(1) \;\Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 - (a^4 + a^3b + ab^3 + b^4) \geq 0 \Leftrightarrow (a^4 - a^3b) + (b^4 - ab^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3(a-b) - b^3(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]\geq 0 \qquad (1')$$

Do bất đẳng thức (1') đúng suy ra $2(a^4+b^4)\geq (a+b)(a^3+b^3)$.

b) Ta có :

$$(2)\quad \Leftrightarrow 3a^4+3b^4+3c^4-(a^4+ab^3+ac^3+a^3b+b^4+bc^3+a^3c+b^3c+c^4)$$

$$\Leftrightarrow (a^4+b^4-a^3b-ab^3)+(b^4+c^4-b^3c-bc^3)+(c^4+a^4-a^3c-ac^3)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2)+(b-c)^2(b^2+bc+c^2)+$$

$$+(c-a)^2(c^2+ca+a^2)\geq 0 \qquad (2')$$

Do bất đẳng thức (2') đúng suy ra

$$3(a^4+b^4+c^4)\geq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3).$$

Bài 2. Áp dụng tính chất $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ với mọi a, b$\in \mathbb{R}$.

Điều kiện $2014 \leq x \leq 2016$, ta có :

$$(\sqrt{2016-x}+\sqrt{x-2014})^2\leq 2(2016-x+x-2014)$$

$$\Leftrightarrow\ (\sqrt{2016-x}+\sqrt{x-2014})^2\leq 2.2\ = 4 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{2016-x}+\sqrt{x-2014}\leq 2$$

Bài 3. Xét hiệu : $(ac+bd)^2-(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$= a^2c^2+2acbd+b^2d^2-a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2$

$= -(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)$

$= -(ad-bc)^2\leq 0$ với $\forall$a ; b ; c ; d.

Vậy $(ac+bd)^2\leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

Bài 4. Với $\forall\, x\in \mathbb{R}$, ta có :

$$\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+3-4\sqrt{x^2+3}+4\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2+7\geq 4\sqrt{x^2+3}\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2+7}{\sqrt{x^2+3}}\geq 4$$

Bài 5. Ta có : $(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}$

Nên $A = ac + bd + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$= ac + bd + (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq ac + bd + 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}$ (*)

Mà : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$= a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 + a^2c^2 + 2adbc + b^2d^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$

$= 1 + (ac + bd)^2$ (do $ad - bc = 1$)

Thay vào (*) ta được : $A \geq ac + bd + 2\sqrt{1+\left(ac+bd\right)^2}$. Đặt $x = ac + bd$

Suy ra : $A \geq x + 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow A^2 \geq (x + 2\sqrt{x^2+1})^2$

$= x^2 + 4x\sqrt{x^2+1} + 4(x^2 + 1) = \left[\left(x^2+1\right)+4x\sqrt{x^2+1}+4x^2\right]+3$

$= \left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)^2 + 3 \geq 3 \Leftrightarrow A^2 \geq 3 \Leftrightarrow A \geq \sqrt{3}.$

Bài 6. Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (giả thiết)

$\Rightarrow\ |a| \leq 1\,;\ |b| \leq 1\,;\ |c| \leq 1 \Rightarrow (1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \geq 0$ (1)

Mặt khác :

$\frac{1}{2}(a + b + c + 1)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2ab + 2ac + 2bc +$

$+ 2a + 2b + 2c) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}(2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2a + 2b + 2c) \geq 0$

$\Leftrightarrow\ 1 + ab + bc + ac + a + b + c \geq 0$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2), ta suy ra :

$$2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) + abc \geq 0.$$

Bài 7. Điều kiện $x \geq 0$.

Ta có A = $-2\sqrt{x} + x + 5 = (x - 2\sqrt{x} + 1) + 4 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 4 \geq 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4 $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 8. C = $\dfrac{1}{2\sqrt{x} - x - 3}$. Điều kiện : $x \geq 0$.

Ta có :

$$2\sqrt{x} - x - 3 = -\left(x - 2\sqrt{x} + 3\right) = -\left[\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right) + 2\right] = -\left[\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + 2\right]$$

Do đó : C $= \dfrac{-1}{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + 2}$.

Vì $\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + 2 \geq 2$ với $\forall x \geq 0$. Suy ra : C $\geq -\dfrac{1}{2}$.

Vậy : giá trị nhỏ nhất của C là $-\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ thoả điều kiện.

Bài 9. a) $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

$$\Rightarrow \text{P} = 3(1 - y)y - 4 = -3y^2 + 3y - 4 = -3\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \leq -\frac{13}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $-\dfrac{13}{4} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

b) $x - 2y = 2 \Rightarrow x = 2y + 2$

$$\Rightarrow \text{Q} = 4y^2 + 8y + 4 + 2y^2 - 2y - 2 + 3y = 6y^2 + 9y + 2$$

$$= 6(y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{3}) = 6\left(y^2 + 2\cdot\frac{3}{4}y + \frac{9}{16}\right) - \frac{11}{8} = 6\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{11}{8} \geq -\frac{11}{8}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $-\frac{11}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

Bài 10. Ta có : $M^2 = 3x - 5 + 7 - 3x + 2\sqrt{(3x-5)(7-3x)} = 2 + 2\sqrt{(3x-5)(7-3x)}$.

$\Rightarrow M^2 \geq 2 \Rightarrow M \geq \sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là $\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$.

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Giả sử $a, b \geq c > 0$.

Khi đó ta có : (1) $\Leftrightarrow 3abc - a^2(b+c-a) - b^2(c+a-b) - c^2(a+b-c) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(a^2 - ab - ac + bc) + b(b^2 - bc - ba + ac) + c(c^2 - ac - bc + ab) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) + c(a-c)(b-c) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0$ (*)

Bất đẳng thức (*) luôn đúng (Vì $a, b \geq c > 0$). Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2. Ta có : $4(a^3+b^3) - (a+b)^3 = (a+b)\left[4(a^2 - ab + b^2) - (a+b)^2\right]$

$= (a+b)\left[(4a^2 - 4ab + 4b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)\right] = 3(a+b)(a-b)^2 \geq 0$

Vậy $4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$ với $a,\ b > 0$.

Bài 3. Ta có :

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$.

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$.

Bài 4. Áp dụng BĐT : Nếu $0<x<y,\ m>0$ thì $\frac{x}{y}<\frac{x+m}{y+m}$.

Ta có : $\frac{a}{a+b}<\frac{c+a}{a+b+c}$; $\frac{b}{b+c}<\frac{a+b}{a+b+c}$; $\frac{c}{c+a}<\frac{b+c}{a+b+c}$

$\Rightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$ (đpcm).

Bài 5. Vì hai vế của bất đẳng thức đã cho đều không âm.

$$|x|+|y|\geq\sqrt{(x+y)^2} \Leftrightarrow \left|x^2\right|+|y|^2+2|x|.|y| \geq (x+y)^2$$

$\Leftrightarrow \qquad x^2+y^2+2|x.y| \geq x^2+y^2+2xy$

$\Leftrightarrow \qquad |x.y| \geq xy$ (luôn luôn đúng).

Vậy $\qquad |x|+|y|\geq\sqrt{(x+y)^2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow xy\geq 0$ nghĩa là x và y cùng dấu.

Bài 6. A = $x^2-4x+4+x^2-6x+9=2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+\frac{1}{2}=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Bài 7. Ta có $x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)^2+(y+1)^2=4\Rightarrow (y+1)^2\leq 4\Rightarrow (y+3)(y-1)\leq 0\Rightarrow -3\leq y\leq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là –3 $\Leftrightarrow$ $x = -6$. Vậy cặp số $(x ; y) = (-6 ; -3)$ là cần tìm.

Bài 8. Ta có $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2+8xy+28x+28y+8y^2+40=0 \Leftrightarrow (2x+2y+7)^2+4y^2=9$

$\Leftrightarrow (2x+2y+7)^2 \le 9 \Leftrightarrow (x+y+5)(x+y+2) \le 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \ge 0 \\ x+y+2 \le 0 \end{cases}$ (*) (vì $x+y+2 \le x+y+5$)

Vì S = x + y + 1 nên (*) $\Leftrightarrow -4 \le$ S ≤ -1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là – 4 $\Leftrightarrow$ $x = -5$, $y = 0$.

Giá trị lớn nhất của S là -1 $\Leftrightarrow$ $x = -2$, $y = 0$.

Bài 9. $5x - mx > 3 + x \Leftrightarrow (4-m)x > 3$

- Với $4 - m \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 4$

* $4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{4-m}$

* $4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{4-m}$

- Với $m = 4$ bất phương trình có dạng $0.x > 3$.

Suy ra không có giá trị nào của x nhân với 0 cho ta một số lớn hơn 3.

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Kết quả :

- Với $m < 4 \Rightarrow x > \dfrac{3}{4-m}$.

- Với $m > 4 \Rightarrow x < \dfrac{3}{4-m}$.

- Với $m = 4 \Rightarrow S = \varnothing$.

Phần hai. HÌNH HỌC

Chủ đề 1 TÍNH TOÁN CÁC ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

1. Tam giác, tứ giác, đa giác n cạnh.
2. Đa giác đều.
3. Đường thẳng song song, cát tuyến.
4. Diện tích đa giác ; diện tích đa giác đều ; diện tích quạt tròn.
5. Hàm số lượng giác.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. TÍNH SỐ ĐO GÓC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Tính chất đường phân giác của một góc, của tam giác.

– Tính chất hai đường thẳng song song, đường trung bình của tam giác, của hình thang.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn. Gọi D và E thứ tự là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và AB. Gọi F là giao điểm của BD và CE.

a) Tính số đo của $\widehat{BFC}$.

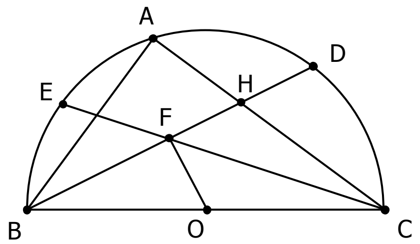
b) Tính số đo của $\widehat{BFO}$, biết rằng AB = 3cm ; R = 2,5cm.

Gợi ý : *Sử dụng các biểu thức : tổng ba góc của tam giác, định lí Pi-ta-go, tam giác bằng nhau, tính chất của góc nội tiếp, số đo cung, tính chất đường phân giác.*

Hướng dẫn giải

a) $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$.



Vì $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow \widehat{DBA} = \widehat{DBC}$ nên BD là phân giác của $\widehat{ABC}$.

Vì $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{EB} \Rightarrow \widehat{ECA} = \widehat{ECB}$ nên CE là phân giác của $\widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{FBC} + \widehat{FCB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$

$$= \frac{1}{2}.90^0 = 45^0.$$

Từ ΔABC suy ra $\widehat{BFC} = 135^0$.

b) Tam giác ABC vuông tại A. Áp dụng định lí Pi-ta-go tính được AC = 4cm.

Gọi H là giao điểm của BD và AC. Vì BH là phân giác của ΔABC nên $\frac{HC}{HA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow$ CH = 2,5cm.

Dễ thấy $\Delta CFH = \Delta CFO$ (c-g-c) (vì CH = CO = 2,5cm ; CF cạnh chung ; $\widehat{FCH} = \widehat{FCO}$) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{CFO}$, mà $\widehat{BFC} = 135^0$ nên $\widehat{CFH} = 45^0$. Do đó $\widehat{BFO} = 90^0$.

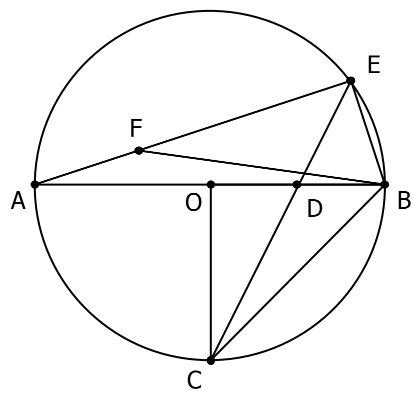
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là điểm chính giữa cung AB ; D là trung điểm của OB. Tia CD cắt đường tròn (O) ở E.

a) Tính số đo của $\widehat{ABE}$.

b) Trên cạnh AE lấy điểm F sao cho AF = BE. Tính tổng $\widehat{BAE} + \widehat{BFE}$.

Gợi ý : *Áp dụng số đo cung, tính chất góc nội tiếp, tính chất đường phân giác, tỉ số lượng giác của góc nhọn (kết hợp với máy tính cầm tay), tam giác vuông cân, tam giác đồng dạng.*

Hướng dẫn giải



a) Vì $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB} \Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{BCE} \Rightarrow$ EC là phân giác của $\widehat{AEB}$

Vì ED là phân giác của ΔABE

$\Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{DA}{DB}$.

Mà D là trung điểm OB nên DA = 3DB

$\Rightarrow$ EA = 3EB.

Vì AB là đường kính của (O)

$\Rightarrow \widehat{AEB} = 90^0$.

ΔABE vuông tại E $\Rightarrow \tan \widehat{ABE} = \dfrac{EA}{EB} = 3 \Rightarrow \widehat{ABE} = 71^0 34'$.

b) Vì AE = 3BE và AF = BE $\Rightarrow$ FE = 2BE.

ΔFBE vuông tại E $\Rightarrow \tan \widehat{BFE} = \dfrac{EB}{EF} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BFE} = 26^0 34'$

Do đó $\widehat{BAE} + \widehat{BFE} = 18^0 26' + 26^0 34' = 45^0$.

Cách khác : Dễ thấy $\Delta OCD \backsim \Delta EFB$ (c-g-c), $\widehat{BAE} = \widehat{BCE}$, $\widehat{OCB} = 45^0$ $\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{BFE} = 45^0$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho AC < CB. Trên dây CB lấy điểm D sao cho BD = AC. Gọi E là trung điểm của CD. Tính số đo của $\widehat{OEB}$.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất của hai đường thẳng song song, tính chất tam giác vuông cân, tính chất của góc nội tiếp chắn nửa đường tròn..*

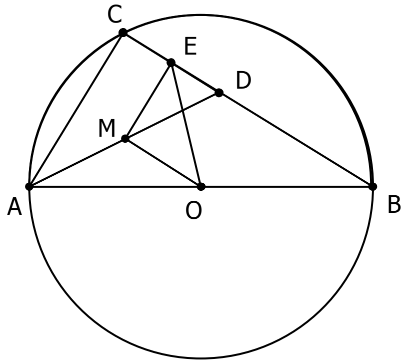
Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của AD.

Dễ thấy ME, MO thứ tự là đường trung bình của các tam giác ACD và ABD

$\Rightarrow ME // = \dfrac{AC}{2}$; MO// $= \dfrac{BD}{2}$.

Mà BD = AC nên ME = MO (1).



$\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0$.

Vì ME // AC và MO // BD nên $\widehat{EMO} = 90^0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có ΔEMO vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{MOE} = 45^0$.

Vì MO // BD $\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{MOE}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{OEB} = 45^0$.

Chú ý : *Giả thiết cho biết E là trung điểm của CD và ta nhận thấy O là trung điểm của đường kính AB. Gợi ý cho ta vẽ thêm điểm M là trung điểm của AD là hết sức quan trọng.*

Ví dụ 4. Cho hình vuông ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên các đoạn thẳng AB và OC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $AE = OF.\sqrt{2}$.

Tính các góc của tam giác DEF.

Gợi ý : *Cho thêm điểm G để tạo ra tam giác vuông cân, hình bình hành, sử dụng kiến thức về tam giác bằng nhau, tính chất ba đường cao, tính chất hình vuông, quan hệ từ vuông góc đến song song*

Hướng dẫn giải

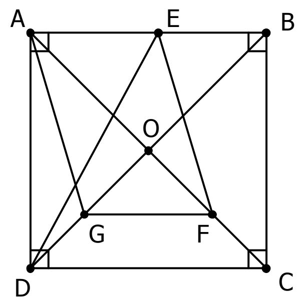
Trên đoạn OD lấy điểm G sao cho OG = OF.

Vì ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$ tại O.

Do đó tam giác OGF vuông cân tại O. Suy ra $GF = OF\sqrt{2}$, mà $AE = OF.\sqrt{2}$ nên GF = AE.

Vì AE // = GF nên AEFG là hình bình hành

$\Rightarrow$ AG // = EF (1)



Vì O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình vuông ABCD nên $AC \perp BD$ tại O và OA = OB = OC = OD. Từ đó $\Delta AOG = \Delta DOF$ (c-g-c) $\Rightarrow AG = DF$ (2).

Từ (1), (2) suy ra EF = DF (*). Dễ thấy G là trực tâm của ΔADF ($DO \perp AF ; FG \perp AD$) $\Rightarrow AG \perp DF$.

Mà AG // EF nên EF $\perp$ DF (**). Từ (*) và (**) suy ra tam giác DEF vuông cân tại F.

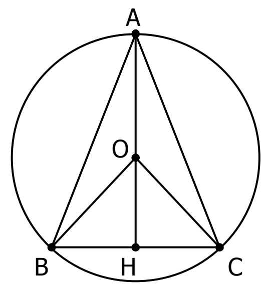
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O ; R). Biết BC = R$\sqrt{2}$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Gợi ý : *Áp dụng định lí Pi-ta-go đảo, tính chất góc nội tiếp, tổng ba góc của tam giác, định nghĩa số đo cung.*

Hướng dẫn giải

** Trường hợp 1 : Đỉnh A thuộc cung lớn của cung BC*

a) Ta có $OB^2 + OC^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$.



Ta lại có $BC^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

ΔBOC có $BC^2 = OB^2 + OC^2$, nên theo định lí Pi-ta-go đảo thì ΔBOC vuông tại O.

Suy ra sđ$\overparen{BC} = \widehat{BOC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overparen{BC} = 45^0$.

Tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \left(180^0 - 45^0\right) : 2 = 67^0 30'$.

** Trường hợp 2 : Đỉnh A thuộc cung nhỏ của cung BC*

Số đo cung nhỏ BC bằng 90^0 nên số đo cung lớn BC bằng 270^0.

Khi đó $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp chắn cung lớn BC nên $\widehat{BAC} = 135^0$.

Tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow$ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 22^0 30'$.

Ví dụ 6 : Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn tâm O đường kính CD = 2R. Biết AC = R$\sqrt{3}$ và BD = R$\sqrt{2}$. Tính các góc của tứ giác ABCD.

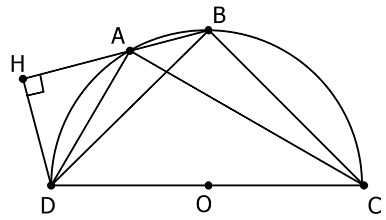
Gợi ý : *Áp dụng tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, định lí Pi-ta-go, tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính chất của tam giác vuông cân, tính chất của tứ giác nội tiếp.*

Hướng dẫn giải

Góc DAC nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O đường kính CD nên $\widehat{DAC} = 90^0$.

Áp dụng định lí Pi-ta-go tính được : AD = R.

Tam giác DAC vuông tại A, ta có



$$\sin\widehat{ADC} = \frac{AC}{CD} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ACD} = 30^0$.

Góc DBC nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O đường kính CD nên $\widehat{DBC} = 90^0$.

Áp dụng định lí Pi-ta-go tính được : BC = R$\sqrt{2}$.

Do đó ΔDBC vuông cân tại B $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 45^0$.

Tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{ABC} = 180^0 - \widehat{ADC} = 180^0 - 60^0 = 120^0$; $\widehat{DAB} = 135^0$.

Dạng 2. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG ; TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Công thức tính diện tích của các hình.

– Quy về việc giải một phương trình, hoặc hệ phương trình.

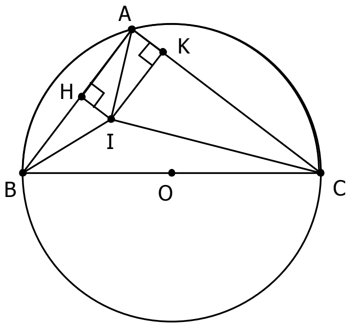
2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có AB = 3, AC = 4, nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Gọi I là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho IA = IB – 1 = IC – 2. Tính độ dài IA.

Gợi ý : *Kẻ IH $\perp$ AB, IK $\perp$ AC. Áp dụng định lí Pi-ta-go để lập phương trình.*

Hướng dẫn giải

ΔABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính $BC \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.



* Kẻ IH ⊥ AB, IK ⊥ AC.

* Đặt IA = x, IH = y, IK = z $\Rightarrow$ $IB = x + 1$, $IC = x + 2$.

* Áp dụng định lí Pi-ta-go vào các tam giác vuông, ta có :

$x^2 = y^2 + z^2$; $y^2 + (3 - z)^2 = (x + 1)^2$;

$(4 - y)^2 + z^2 = (x + 2)^2$.

Từ đó suy ra phương trình : $x^2 = \left(\dfrac{3-x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{4-x}{3}\right)^2$.

Giải phương trình trên ta tính được OA.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm là G. Lấy điểm O bất kì trong tam giác đều khác G. Đường thẳng OG cắt các đường thẳng BC, CA, AB thứ tự tại A_1 ; B_1 ; C_1.

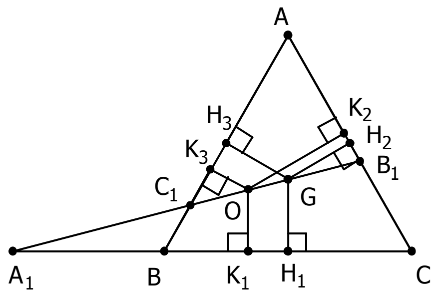
Tính tỉ số $\dfrac{OA_1}{GA_1} + \dfrac{OB_1}{GB_1} + \dfrac{OC_1}{GC_1}$.

Gợi ý : *Kẻ GH_1 ; GH_2 ; GH_3 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Kẻ OK_1 ; OK_2 ; OK_3 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Áp dụng định lí Ta-lét.*

Hướng dẫn giải

* Kẻ GH_1 ; GH_2 ; GH_3 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB.

* Kẻ OK_1 ; OK_2 ; OK_3 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB.



* Áp dụng định lí Ta-let ta được :

$$\frac{OA_1}{GA_1} = \frac{OK_1}{GH_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{OA_1}{GA_1} + \frac{OB_1}{GB_1} + \frac{OC_1}{GC_1} = 3$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC, biết rằng $3.\widehat{A}+2.\widehat{B}=180^0$.

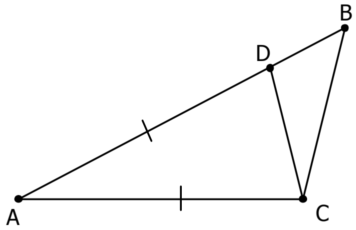
Gợi ý : *Áp dụng tam giác đồng dạng để lập phương trình. Chú ý xét hai trường hợp.*

Hướng dẫn giải

* Ta có $3.\widehat{A}+2.\widehat{B}=180^0 \Rightarrow 3.\widehat{A}+2.\widehat{B}=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{C}$ là góc lớn nhất $\Rightarrow$ cạnh AB là cạnh lớn nhất.

* Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = AC.



* Từ đó suy ra $\Delta ABC \quad \Delta CBD$ (g-g)

$\Rightarrow BC^2 = AB.BD = AB(AB-AC)$

$= AB^2 - AB.AC$.

* Trường hợp 1 : $AB=n+2$; $BC=n+1$; $AC=n$.

* Trường hợp 2 : $AB=n+2$; $BC=n$; $AC=n+1$.

Ví dụ 4 : Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^0$; AB = a ; AC = 2a.

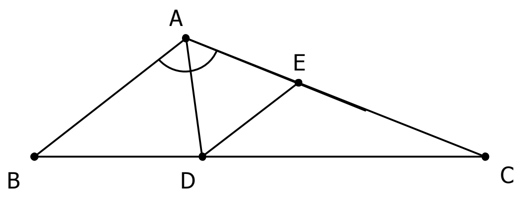
a) Tính độ dài đường phân giác AD.

b) Hãy xét bài toán trong trường hợp $\widehat{A}=60^0$; $\widehat{A}=90^0$; $\widehat{A}=\alpha$.

Gợi ý : *Kẻ DE song song với AB (E thuộc AC). Áp dụng định lí Ta-lét và tính chất của tam giác đều, tam giác cân.*

Hướng dẫn giải

a) Qua D vẽ đường thẳng song song với AB cắt cạnh AC tại E. Dễ dàng chứng minh được ΔADE là tam giác đều, suy ra AD = DE = EA = *x*.



Áp dụng định lí Ta-lét, ta có $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{CE}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{2a-x}{2a} \Rightarrow 2ax = 2a^2 - ax \Rightarrow 3ax = 2a^2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}a$.

b) Vẽ DE song song với AB (E $\in$ AC) $\Rightarrow$ DE = EA = x.

Áp dụng định lí Ta-lét tương tự như câu a), rồi vẽ thêm EH $\perp$ AD để tính AH, từ đó suy ra AD.

Ví dụ 5 : Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $\widehat{B} = \alpha$; $\widehat{C} = \beta$, BC = a.

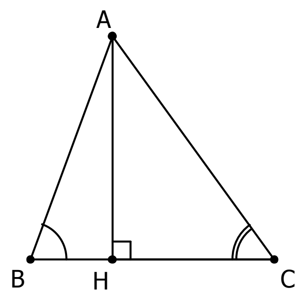
Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC theo a, α, β.

Gợi ý : *Áp dụng định nghĩa về tỉ số lượng giác của góc nhọn.*

Hướng dẫn giải

Tam giác ABH vuông tại H $\Rightarrow$ cotB = $\dfrac{BH}{AH}$

$\Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{BH}{AH}$. (1)



Tam giác ACH vuông tại H $\Rightarrow$ cotC = $\dfrac{BH}{AH}$

$\Rightarrow \cot\beta = \dfrac{CH}{AH}$. (2)

Vì α ; $\beta < 90^0$ nên BH + CH = BC = a.

Do đó từ (1) và (2) suy ra $AH = \dfrac{a}{\cot\alpha + \cot\beta}$.

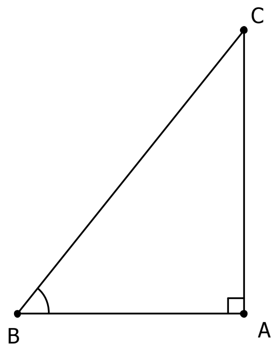
Ví dụ 6 : Cho góc nhọn α, thỏa mãn $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $\sin\alpha + \cos\alpha$; b) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; c) $\dfrac{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 3\sin\alpha.\cos\alpha}$.

Gợi ý : *Áp dụng định nghĩa về tỉ số lượng giác của góc nhọn hoặc sử dụng các công thức :* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, …

Hướng dẫn giải

a) * ***Cách 1 :*** Vì $\tan\alpha = \sqrt{2}$ nên tồn tại tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \alpha$; AB = 1 ; AC = $\sqrt{2}$.



Tam giác ABC vuông tại A, ta có :

$\tan B = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$.

Áp dụng định lí Pi-ta-go ta có

BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.

Do đó $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy : $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$.

* ***Cách 2 :*** Ta có $\tan\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{2}.\cos\alpha$.

Ta lại có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} > 0$.

Do đó $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, từ đó tính được : $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$.

b) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1} = \dfrac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$.

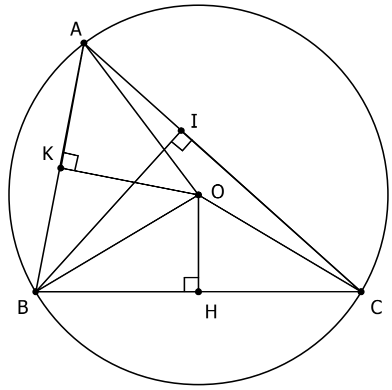
c) $\dfrac{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 3\sin\alpha.\cos\alpha} = \dfrac{\tan^2\alpha - 2\tan\alpha}{1 + 3\tan\alpha} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2} - 10}{17}$.

Ví dụ 7 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Biết $\widehat{A} = 60^0$; $\widehat{B} = 75^0$. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC theo R.

Gợi ý : *Áp dụng hệ quả về góc nội tiếp, tỉ số lượng giác của góc nhọn, định lí Pi-ta-go.*

Hướng dẫn giải

$\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp và $\widehat{BOC}$ là góc ở tâm cùng chắn một cung



$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 2.60^0 = 120^0.$$

Kẻ OH $\perp$ BC $\Rightarrow HB = HC = \dfrac{BC}{2}$ (1).

ΔBOC cân tại O có OH là đường cao nên OH cũng là phân giác của góc BOC

$$\Rightarrow \widehat{BOH} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}.120^0 = 60^0.$$

ΔBOH vuông tại H $\Rightarrow HB = OB.\sin\widehat{BOH} = R.\sin 60^0 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $C = R\sqrt{3}$. ΔABC có $\widehat{A} = 60^0$; $\widehat{B} = 75^0 \Rightarrow \widehat{C} = 45^0$.

Tương tự $\widehat{AOB} = 90^0$. Áp dụng định lí Pi-ta-go tính được : $AB = R\sqrt{2}$.

Kẻ BI vuông góc với AC. Dễ thấy ΔBIC vuông cân tại I ; ΔAIB là nửa tam giác đều nên

$$IB = IC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{2} \ ; \ IA = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow AC = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)R}{2}.$$

Cách khác : Sau khi tính được BC, ta tính được BC theo công thức $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$.

Chú ý : Từ công thức trên ta chứng minh được : $\sin 75^0 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Dạng 3. TÍNH CHU VI ĐA GIÁC, CHU VI ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC, TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Tỉ số diện tích của hai tam giác có đáy bằng nhau thì bằng tỉ số hai chiều cao tương ứng.

– Tỉ số diện tích của hai tam giác có chiều cao bằng nhau thì bằng tỉ số hai đáy tương ứng.

– Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng thì bằng tỉ số đồng dạng.

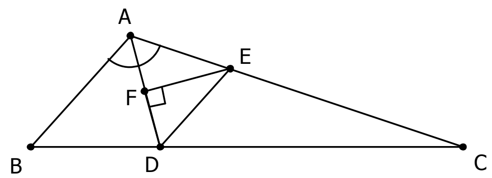
– Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng thì bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích của tam giác ABC, biết rằng AB = 14cm ; AC = 35cm và đường phân giác AD = 12cm.

Gợi ý : *Kẻ DE // AB (E thuộc AC). Áp dụng tính chất định lí Ta-lét, tính chất tam giác cân, tính chất đường phân giác của tam giác, tỉ số diện tích.*

Hướng dẫn giải



Vẽ DE // AB (E $\in$ AC) tính được DE = AE = 10cm.

Vẽ EF $\perp$ AD $\Rightarrow$ FA = FD = 6cm $\Rightarrow$ EF = 8cm.

Do đó

$S_{ADE} = \frac{1}{2}AD.EF = \frac{1}{2}.12.8 = 48$ (cm^2)

Do AD là phân giác của tam giác ABC nên $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AB+AC}{AC} = \frac{14+35}{35} = \frac{7}{5}$.

Ta có $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{BC}{DC} = \frac{7}{5}$; $\frac{S_{ADC}}{S_{ADE}} = \frac{AC}{AE} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

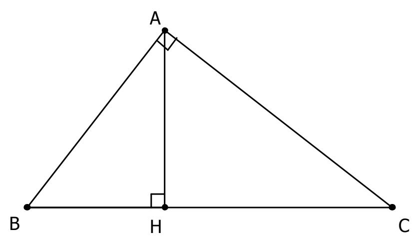
$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{7}{5}.\frac{7}{2} = \frac{49}{10} \Rightarrow S_{ABC} = 235,2\,(\text{cm}^2).$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính chu vi của tam giác ABC, biết rằng chu vi của hai tam giác AHB và AHC lần lượt bằng 36cm và 48cm.

Gợi ý : *Áp dụng tam giác đồng dạng, tính chất tỉ số chu vi bằng tỉ số đồng dạng, định lí Pi-ta-go.*

Hướng dẫn giải

Dễ dàng chứng minh được các tam giác ABC ; HBA ; HAC đồng dạng (g-g).



Gọi P ; P_1 ; P_2 lần lượt là chu vi của các tam giác ABC ; HBA ; HAC.

Khi đó ta có : $\frac{P_1}{P} = \frac{BA}{BC}$ và $\frac{P_2}{P} = \frac{AC}{BC}$.

Vì ΔABC vuông tại A nên

$$\Rightarrow \frac{P_1^2}{P^2} + \frac{P_2^2}{P^2} = \frac{BA^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

Do đó $P^2 = P_1^2 + P_2^2 = 36^2 + 48^2 \Rightarrow P = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60(\text{cm})$.

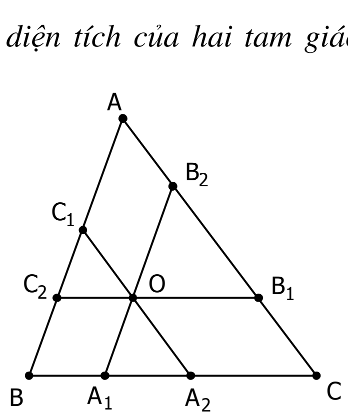
Ví dụ 3 : Qua một điểm O tuỳ ý nằm trong tam giác ABC, vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác ABC thành sáu phần không có điểm trong chung, trong đó có ba phần là ba tam giác có diện tích lần lượt là m, n, p. Tính diện tích của tam giác ABC theo m, n, p.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất hình bình hành, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.*

Hướng dẫn giải

* Từ các hình bình hành AB_2OC_1 ; BC_2OA_1 ; CA_2OB_1 ta có $C_2O = BA_1$; $OB_1 = A_2C$.

* Các tam giác OA_1A_2 ; B_2OB_1 ; C_1C_2O đồng dạng với ΔABC.



* Áp dụng "Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng".

Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Từ đó tính được $S = \left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}\right)^2$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BC = a, CA = b, AB = c.

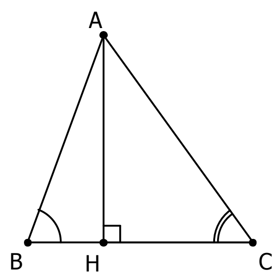
Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC theo a, b, c.

Chứng minh công thức $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Gợi ý : *Áp dụng định lí Pi-ta-go, biến đổi đồng nhất biểu thức hữu tỉ.*

Hướng dẫn giải

a) Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên H nằm giữa B và C.



Đặt BH = $x \Rightarrow$ CH = a – x.

Áp dụng định lí Pi-ta-go vào các tam giác vuông ABH, ACH ta được :

$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$$

$$\Rightarrow c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Do đó $AH^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$

$$= \frac{b^2-(a-c)^2}{2a}.\frac{(a+c)^2-b^2}{2a} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4a^2}$$

Đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

b) Diện tích của tam giác ABC là : $\frac{1}{2}BC.AH = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(Công thức tính diện tích theo độ dài ba cạnh này còn gọi là công thức Hê-rông).

Ví dụ 5 : Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 15cm, AC = 20cm, ngoại tiếp đường tròn tâm I. Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB thứ tự ở D, E, F. Qua điểm M tuỳ ý trên cung nhỏ EF, vẽ tiếp tuyến của đường tròn (I) cắt các đoạn AE, AF lần lượt ở N, P.

a) Tính chu vi của tam giác ANP.

b) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác ANP lớn nhất.

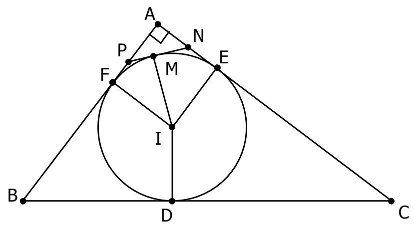
Gợi ý : *Áp dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ; định lí Pi-ta-go ; bất đẳng thức Cô-si.*

Hướng dẫn giải

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có

AE = AF, BF = BD, CD = CE,

NE = NM, PM = PF.



Do đó

AB + AC = (AF + BF) + (AE + CE)

= (AE + AE) + (BD + CD) = 2AE + BC

Tam giác ABC vuông tại A

$\Rightarrow$ BC = 25cm.

Từ đó suy ra AE = (AB + AC – BC) : 2 = (15 + 20 – 25) : 2 = 5 (cm).

Chu vi ΔANP là :

AN + AP + NP = AN + AP + (NM + PM) = AN + AP + (NE + PF)

= (AN + NE) + (AP + DF) = AE + AF = 2AE = 10 (cm).

b) Đặt $AN = x$; $AP = y$ ($0 < x < 5$; $0 < y < 5$) $\Rightarrow NE = 5 - x$; $PF = 5 - y$.

Vì tam giác ANP vuông tại A nên ta có :

$$AN^2 + AP^2 = NP^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (10 - x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow xy + 50 = 10x + 10y \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương x, y ta được : $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Do đó từ (1) suy ra :

$$xy + 50 \geq 20\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy - 20\sqrt{xy} + 100 \geq 50 \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - 10\right)^2 \geq 50.$$

Vì $0 < x < 5$; $0 < y < 5$ nên

$$10 - \sqrt{xy} \geq 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq 10 - 5\sqrt{2} \Leftrightarrow xy \leq 150 - 100\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 10 - 5\sqrt{2}$ (thoả mãn $0 < x < 5$; $0 < y < 5$).

Vậy maxS_{ANP} = $75 - 50\sqrt{2}$ (cm^2), đạt được khi M là điểm chính giữa cung nhỏ EF của đường tròn (I).

Ví dụ 6 : Cho hai đường tròn (O ; 3cm) và (O' ; 1cm) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B ∈ (O), C ∈ (O')).

a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi các cung nhỏ AB, AC và đoạn thẳng BC.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất tiếp tuyến, tính chất hình chữ nhật, tỉ số lượng giác của góc nhọn, công thức tính độ dài cung, công thức tính diện tích hình quạt, tính chất của diện tích.*

Hướng dẫn giải

a) Kẻ O'H ⊥ OB. Vì BC là tiếp tuyến chung ngoài nên

OB ⊥ BC và O'C ⊥ BC

⇒ HBCO' là hình chữ nhật

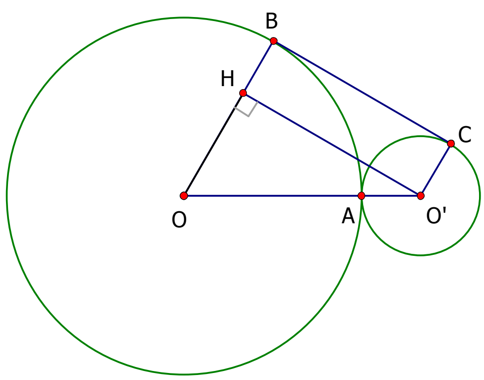
⇒ HB = O'C = 1cm

⇒ OH = OB – HB = 3 – 1 = 2 (cm).

Vì (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A

nên OO' = OA + O'A

= 3 + 1 = 4 (cm).



Tam giác OHO' vuông tại H, ta có :

$$\cos\widehat{HOO'} = \frac{OH}{OO'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HOO'} = 60^0.$$

Do đó $l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi.3.60^0}{180^0} = \pi$ (cm).

b) Vì OB // O'C (cùng vuông góc với BC), mà $\widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AO'C} = 120^0$.

Diện tích quạt AOB là : $\dfrac{\pi.3^2.60^0}{360^0} = \dfrac{3\pi}{2}$ (cm^2).

Diện tích quạt AO'C là : $\dfrac{\pi.1^2.60^0}{360^0} = \dfrac{\pi}{6}$ (cm^2).

Tam giác OHO' vuông tại H có $\widehat{HOO'} = 60^0$, suy ra

$$HO' = OH.\tan 60^0 = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$S_{OBCO'} = \frac{(3+1)2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích cần tìm là : $4\sqrt{3} - \left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{24\sqrt{3} - 10\pi}{6}$ (cm^2).

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1. Tính số đo góc

Bài 1. Gọi I là điểm nằm trong hình vuông ABCD sao cho IA : IB : IC = 1 : 2 : 3. Tính số đo của góc AIB.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là một điểm trên cung nhỏ AB. Kẻ MD $\perp$ AC ; ME $\perp$ BC. Gọi I và J thứ tự là trung điểm của AB và DE. Tính số đo của $\widehat{MJI}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AB = CH. Tính số đo của các góc B và C của tam giác ABC (làm tròn đến độ).

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$, biết BC = 2DE.

Bài 5. Tìm góc nhọn α, biết rằng :

a) $\sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; b) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$.

c) $\sqrt{3}\,(\cot\alpha - 1) = 1 - \tan\alpha$; d) $2\cos\alpha = 3\tan\alpha$.

Dạng 2. Tính độ dài đoạn thẳng ; tính giá trị của biểu thức

Bài 1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi M là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm D và E sao cho $\widehat{DME} = 60^0$. Tính khoảng cách từ M đến đường thẳng DE theo R.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Lấy điểm M tuỳ ý trong tam giác đều ABC. Kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Tính tỉ số $\dfrac{MD+ME+MF}{AF+BD+CE}$.

Bài 3. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Đường thẳng qua A cắt cạnh BC tại E và cắt tia DC tại F. Tính độ dài đoạn AE, biết EF bằng cạnh hình vuông.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) với R > r, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O)$; $C \in (O')$).

Tính độ dài BC theo R và r.

Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BC theo R và r.

Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng BC và OO'. Tính OD theo R và r.

Dạng 3. Tính chu vi đa giác, chu vi đường tròn.
Tính diện tích đa giác, tính diện tích hình tròn

Bài 1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn tâm O đường kính CD = 2R.

Biết $AC = R\sqrt{3}$ và $BD = R\sqrt{2}$.

a) Tính độ dài cạnh AB theo R.

b) Tính diện tích tứ giác ABCD theo R.

c) Tính độ dài cung nhỏ AB theo R.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau. Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC theo a, biết AC = $6a$.

Bài 3. Tính diện tích của một tứ giác, biết độ dài của hai đường chéo và độ dài của đoạn nối trung điểm của hai cạnh đối diện lần lượt là a, b, c.

ư

Chủ đề 2 CHỨNG MINH CÁC YẾU TỐ HÌNH HỌC, QUAN HỆ HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

1. Đường thẳng ; đoạn thẳng.
2. Quan hệ vuông góc ; quan hệ song song.
3. Tam giác ; tứ giác ; đa giác.
4. Cung tròn ; đường thẳng.
5. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1.	CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Tính chất của đường phân giác.

– Tính chất của hai đường thẳng song song.

– Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} \neq 120^0$. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác đều ABD ; ACE và BCF . Gọi I là giao điểm của BE và CD.

a) Chứng minh rằng : BE = CD.

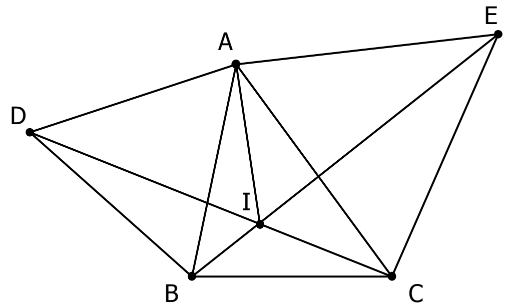
b) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc DIE.

Gợi ý : *Áp dụng tam giác bằng nhau, tính chất đường phân giác, tính chất của góc ngoài.*

Hướng dẫn giải

a) Vì AB = AD (ΔABD đều) ;

AE = AC (ΔACE đều) ;



$\widehat{BAE} = \widehat{DAC} = 60^0 + \widehat{BAC}$

$\Rightarrow$ ΔABE = ΔADC (c-g-c)

$\Rightarrow$ BE = DC.

b) Vì ΔABE = ΔADC (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$

hay $\widehat{ABI} = \widehat{ADI}$ $\Rightarrow$ Tứ giác AIBD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{ABD}$, mà $\widehat{ABD} = 60^0$ (ΔABD đều) nên $\widehat{AID} = 60^0$. Tương tự $\widehat{BID} = \widehat{BAD} = 60^0$.

Từ đó suy ra $\widehat{AIE} = 60^0$.

Suy ra IA là phân giác của góc DIE.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các cạnh AB và AC. Đường thẳng DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt ở M và N.

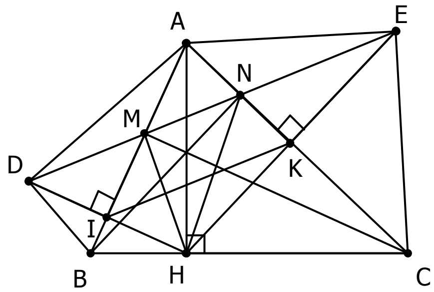
a) Chứng minh rằng $\widehat{MHN} = \widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$ **.**

Gợi ý : *Áp dụng tính chất đối xứng trục, tam giác bằng nhau, tính chất tam giác cân, tính chất góc nội tiếp.*

Hướng dẫn giải

a) Theo tính chất đối xứng trục ta có



$\Delta AMH = \Delta AMD$; $\Delta ANH = \Delta ANE$.

$\Rightarrow$ AD = AH = AE

$\Rightarrow$ ΔADE cân tại A.

Từ đó suy ra $\widehat{MHN} = \widehat{B} + \widehat{C} - \widehat{A}$.

b) Theo tính chất đối xứng trục ta có

$\Delta ABD = \Delta ABH$; $\Delta ACE = \Delta ACH$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AHB}$; $\widehat{AEC} = \widehat{AHC}$

Mà $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^0$ nên $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$ $\Rightarrow$ BD // CE (cùng vuông góc với DE).

Tứ giác AHCE có $\widehat{AHC} + \widehat{AEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ suy ra tứ giác AHCE nội tiếp (1).

Gọi I là giao điểm của AB và HD ; K là giao điểm của AC và HE $\Rightarrow$ IH = ID ; KH = KE.

Do đó IK là đường trung bình của tam giác HDE $\Rightarrow$ IK // DE

$\Rightarrow \widehat{HKI} = \widehat{HED}$ (đồng vị) (2).

Tứ giác AKHI có $\widehat{AKH} + \widehat{AIH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác AKHI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HKI} = \widehat{HAI}$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HAM}$ $\Rightarrow$ Tứ giác AEHM nội tiếp (4).

Từ (1) và (4) $\Rightarrow$ 5 điểm A, E, C, H, M cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AEM}$.

Tương tự ta cũng chứng minh được : $\widehat{ABN} = \widehat{ADN}$, mà $\widehat{AEM} = \widehat{ADN}$ nên $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$ **.**

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (K). Kẻ KM $\perp$ AC ; KN $\perp$ AB. Gọi G là giao điểm của BM và CN. Gọi P là một điểm thuộc cạnh BC. Vẽ PE // CN (E $\in$ AB) ; PF // BM (F $\in$ AC). Nối E với F cắt BM và CN lần lượt ở I và J.

Chứng minh rằng IE = JF và PG đi qua trung điểm của EF.

Gợi ý : *Áp dụng định li Ta-lét, tính chất trọng tâm của tam giác, định lí Ta-lét đảo, tính chất hình bình hành*

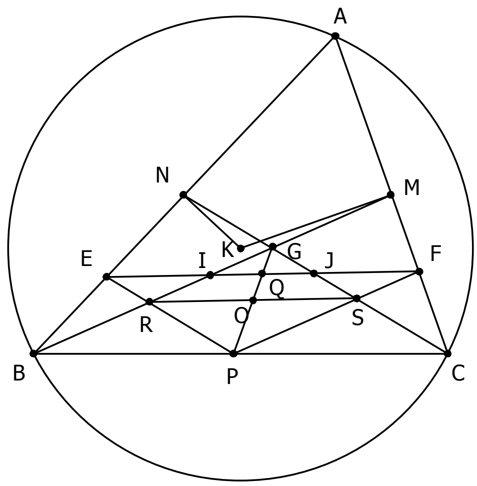
Hướng dẫn giải

Gọi R là giao điểm của PE và BM ; S là giao điểm của PF và CN. Vì PF // BM, theo định lí Ta-lét ta có $\dfrac{SF}{GM} = \dfrac{SP}{GB}$ (vì cùng bằng $\dfrac{CS}{CG}$) $\Rightarrow \dfrac{SF}{SP} = \dfrac{GM}{GB} = \dfrac{1}{2}$ (vì G là trọng tâm của ΔABC)   (1)

Vì PE // CN, theo định lí Ta-lét ta có

$\dfrac{RE}{GN} = \dfrac{RP}{GC}$ (vì cùng bằng $\dfrac{BR}{BG}$)

$\Rightarrow \dfrac{RE}{RP} = \dfrac{GN}{GC} = \dfrac{1}{2}$ (vì G là trọng tâm của ΔABC) (2)



Vì RI // PF, theo Ta-lét ta có :

$$\frac{ER}{RP} = \frac{EI}{IF} \qquad (3)$$

Vì SJ // PE, theo Ta-lét ta có :

$$\frac{FS}{SP} = \frac{FJ}{JE} \qquad (4)$$

Từ (1) ; (2) ; (3) và (4) suy ra :

$$\frac{EI}{IF} = \frac{FJ}{JE} \Rightarrow \frac{EI}{EI + IF} = \frac{FJ}{FJ + JE} \Rightarrow \frac{EI}{EF} = \frac{FJ}{EF} \Rightarrow EI = FJ \qquad (5)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{SF}{SP} = \dfrac{RE}{RP}$, theo định lí Ta-lét đảo suy ra RS // EF.

Dễ thấy tứ giác PRGS là hình bình hành, do đó GP đi qua trung điểm O của RS.

Gọi Q là giao điểm của GP và EF.

Vì IJ // RS, theo định lí Ta-lét ta có :

$$\frac{QI}{OR} = \frac{QJ}{OS} \text{ (vì cùng bằng } \frac{GQ}{GO}) \Rightarrow \text{QI = QJ} \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra GP đi qua trung điểm Q của EF.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M nằm ngoài (O) sao cho MA cắt (O) ở C. Gọi N là giao điểm BC và MO ; Kéo dài AN cắt MB tại D ; E là giao điểm của CD và MO. Chứng minh rằng EC = ED.

Gợi ý : *Áp dụng định lí Ta-lét, biến đổi đồng nhất các biểu thức hữu tỉ.*

Hướng dẫn giải

a) Qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt MA và MB thứ tự ở I và J.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có :

$$\frac{NI}{OA} = \frac{NJ}{OB} = \frac{MN}{MO}.$$

Mà OA = OB nên NI = NJ. (1)

Áp dụng định lí Ta-lét ta có :

$$\frac{CN}{CB} = \frac{IN}{AB} \; ; \; \frac{DN}{DA} = \frac{NJ}{AB}. \qquad (2)$$

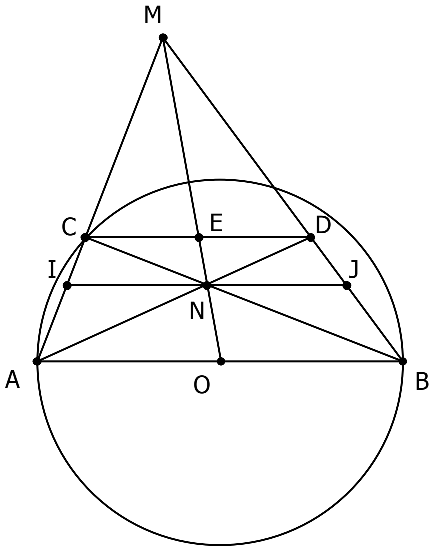
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CN}{CB} = \frac{DN}{DA}$.

Theo định lí Ta-lét đảo ta có CD // AB.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có :

$$\frac{EC}{OA} = \frac{ED}{OB} = \frac{MN}{MO}.$$

Mà OA = OB nên EC = ED.

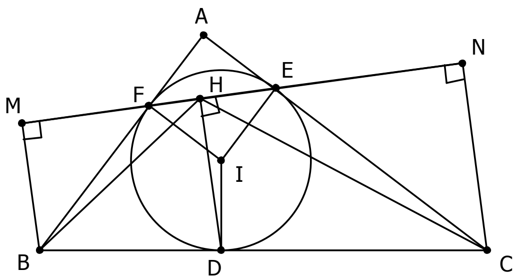


Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB thứ tự ở D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. Chứng minh rằng HD là phân giác của tam giác BHC.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, tính chất tam giác cân, tam giác đồng dạng.*

Hướng dẫn giải

Kẻ BM và CN lần lượt vuông góc với đường thẳng EF.



Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có : AE = AF, BF = BD, CD = CE.

Do đó ΔAEF cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE}$.

Ta lại có $\widehat{AEF} = \widehat{CEN}$ (đối đỉnh) ; $\widehat{AFE} = \widehat{BFN}$ (đối đỉnh) $\widehat{CEN} = \widehat{BFN}$.

Từ đó suy ra $\Delta BFM \quad \Delta CEN$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BD}{CD}$.

Vì BM // DH // CN (cùng vuông góc với EF), áp dụng định lí Ta-lét ta được :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{MH}{NH} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{MH}{NH}$$

$$\Rightarrow \Delta BMH \quad \Delta CNH \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{CHN}.$$

Vì DH vuông góc với EF nên $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

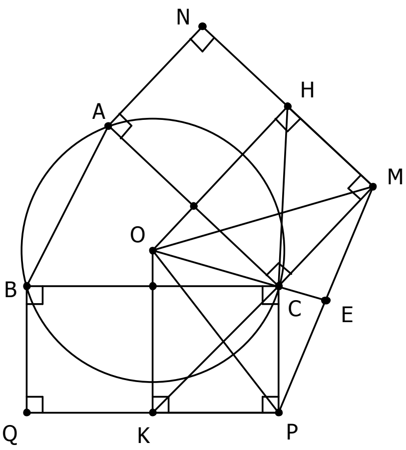
Vậy HD là phân giác của tam giác BHC.

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Về phía ngoài tam giác ABC, dựng các hình chữ nhật ACMN và BCPQ có diện tích bằng nhau.

Chứng minh rằng đường thẳng OC đi qua trung điểm E của đoạn MP.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất hình chữ nhật, tính chất về diện tích, tam giác bằng nhau.*

Hướng dẫn giải



* Vẽ OH $\perp$ MN và OK $\perp$ PQ. Từ đó suy ra : HM = HN ; KP = KQ.

* Dễ thấy hai tam giác OCM và HCM có diện tích bằng nhau (vì OH // CM).

* Dễ thấy hai tam giác OCP và KCP có diện tích bằng nhau (vì OK // CP).

* Ta lại có hai tam giác HCM và KCP có diện tích bằng nhau (vì cùng bằng $\dfrac{1}{4}$ diện tích của các hình chữ nhật ACMN và BCPQ).

Do đó hai tam giác OCM và OCP có diện tích bằng nhau.

* Từ đó suy ra OC là đường trung tuyến của tam giác OMP.

* Do đó đường thẳng OC đi qua trung điểm E của đoạn MP.

Dạng 2. CHỨNG MINH QUAN HỆ VUÔNG GÓC, QUAN HỆ SONG SONG

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Định lí Pi-ta-go đảo, định lí Ta-lét đảo.

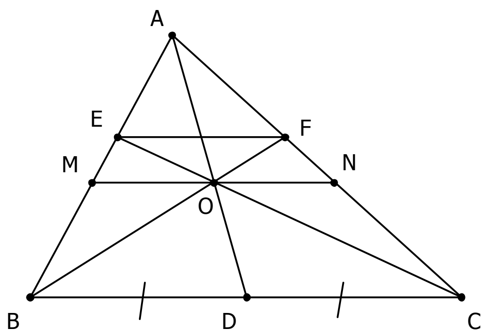
– Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Trên đoạn AD lấy điểm O tuỳ ý. Tia BO cắt AC tại F. Tia CO cắt AB tại E. Chứng minh rằng EF song song với BC.

Gợi ý : *Áp dụng định lí Ta-lét đảo, biến đổi đồng nhất biểu thức hữu tỉ.*

Hướng dẫn giải



* Qua O vẽ đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB và AC thứ tự ở M và N.

Áp dụng định lí Ta-lét (hoặc tam giác đồng dạng)

* $\dfrac{OM}{DB} = \dfrac{ON}{DC} = \dfrac{AO}{AD}$, mà DB = DC nên OM = ON.

* $\dfrac{MO}{BC} = \dfrac{EO}{EC}$; $\dfrac{ON}{BC} = \dfrac{FO}{FB}$

$\Rightarrow \dfrac{EO}{EC} = \dfrac{FO}{FB}$.

Theo định lí Ta-let đảo ta có EF // BC.

Chú ý : Áp dụng định lí Cê-va đối với ba đường AD, BF, CE đồng quy tại O,

ta có : $\dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{FC}{FA} \cdot \dfrac{EA}{EB} = 1$, mà DB = DC

nên $\dfrac{FC}{FA} \cdot \dfrac{EA}{EB} = 1 \Rightarrow \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{FA}{FC} \Rightarrow$ EF//BC.

Áp dụng kết quả bài toán trên ta giải được bài toán sau : *Cho hình bình hành ABCD. Chỉ dùng thước thẳng, hãy dựng một đường thẳng d đi qua điểm A sao cho d // BD.*

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BE, CF. Đường tròn (O) đi qua hai điểm B và C cắt các đoạn BE và CF thứ tự ở K và I. Chứng minh rằng KI song song với EF.

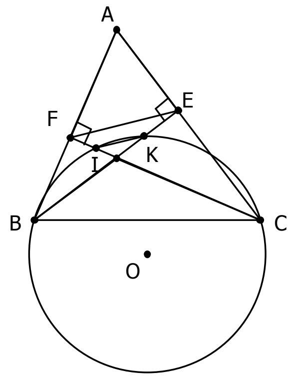
Gợi ý : *Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.*

Hướng dẫn giải

Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{CIK} = \widehat{CBK}$. (1)

Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ nên BFEC là tứ giác nội tiếp $\widehat{CFE} = \widehat{CBE}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CIK} = \widehat{CFE}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ IK // EF.



Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ BM $\perp$ AC, CN $\perp$ AB, MP $\perp$ AB, NQ $\perp$ AC (N,P$\in$ AB ; M,Q $\in$ AC). Chứng minh rằng PQ song song với BC.

Gợi ý : *Áp dụng định lí Ta-lét đảo hoặc dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.*

Hướng dẫn giải

BM // NQ (cùng vuông góc với AC) ;

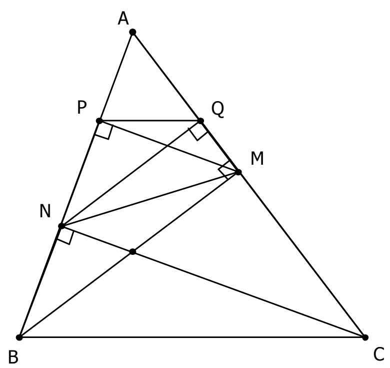
CN // MP (cùng vuông góc với AB) ;

Áp dụng định lí Ta-lét :

$\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AQ}{AM}$; $\dfrac{AP}{AN} = \dfrac{AM}{AC}$

Nhân vế theo vế ta được $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$.

Theo định lí Ta-lét đảo $\Rightarrow$ PQ // BC.

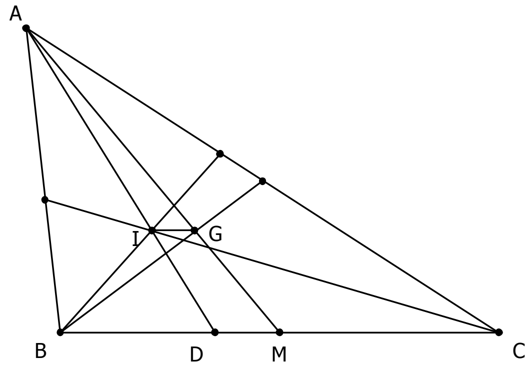


Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có cạnh BC là trung bình cộng của hai cạnh AB và AC. Gọi I là giao điểm các đường phân giác và G là trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng IG song song với BC.

Gợi ý : *Áp dụng định lí Ta-lét đảo.*

Hướng dẫn giải



Gọi D, M thứ tự là giao điểm của các tia AI, AG với cạnh BC.

Theo tính chất của đường phân giác trong các tam giác ABD và ACD ta có :

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$$

$$= \frac{BD + CD}{BA + CA} = \frac{BC}{BA + CA}.$$

Ta lại có BC là trung bình cộng của AB và AC nên $\frac{BC}{BA + CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\frac{ID}{IA} = \frac{1}{2}$.

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{ID}{IA} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$, theo định lý Ta-lét đảo suy ra IG // BC.

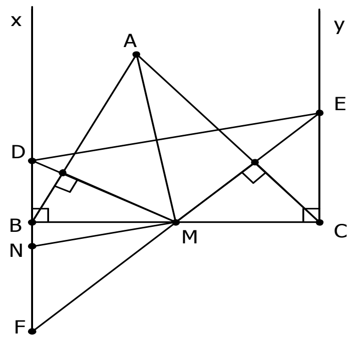
Ví dụ 5. Cho tam giác nhọn ABC, đường trung tuyến AM. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A, vẽ các tia Bx và Cy cùng vuông góc với BC. Đường thẳng qua M và vuông góc với AB cắt tia Bx tại D. Đường thẳng qua M và vuông góc với AC cắt tia Cy tại E. Chứng minh rằng DE vuông góc với AM.

Gợi ý : *Áp dụng quan hệ từ vuông góc đến song song.*

Hướng dẫn giải

Kéo dài EM cắt tia đối của tia Bx tại F.

Dễ thấy $\Delta BMF = \Delta CME$ (g-c-g) suy ra MF = ME và $\widehat{MFB} = \widehat{MEC}$.



Ta lại có $\widehat{ABM} = \widehat{MDB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABx}$) ; $\widehat{ACM} = \widehat{MEC}$ (cùng phụ với $\widehat{ACy}$).

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta MDF$ (g-g). Gọi N là trung điểm của DF $\Rightarrow$ MN là đường trung bình của tam giác DEF $\Rightarrow$ MN // DE (1).

Ta lại có AM và MN thứ tự là các trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng nói trên nên $\Delta ABM \quad \Delta MDN$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DMN}$,

mà $\widehat{BAM} + \widehat{AMD} = 90^0$ nên $\widehat{AMN} = 90^0$ hay AM vuông góc với MN (2).

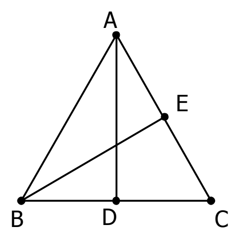
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AM vuông góc với DE.

Ví dụ 6 : Cho tam giác ABC có AD và BE là hai đường trung tuyến. Chứng minh rằng AD và BE cũng là các đường cao nếu $\widehat{DAC} = \widehat{EBC} = 30^0$**.**

Gợi ý : *Áp dụng tính chất : "Một tam giác có một cạnh bằng nửa cạnh thứ hai và góc đối diện với cạnh đó bằng 30*^{0} *thì tam giác là tam giác vuông".*

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $\Delta ACD \backsim \Delta BCE$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{CE}$.



Mà BC = 2CD ; AC = 2CE nên AC = BC

Tam giác ACD có $\widehat{DAC} = 30^0$ và AC = 2CD nên tam giác ACD là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0$. Tương tự $\widehat{BEC} = 90^0$.

Vậy AD và BE cũng là các đường cao của tam giác ABC.

Dạng 3. CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn được quy về việc chứng minh 4 điểm cùng nằm trên một đường tròn. Để chứng minh 4 điểm cùng nằm trên một đường tròn (hay chứng minh tứ giác nội tiếp đường tròn) ta có thể sử dụng các kiến thức sau :

- Chỉ ra một điểm cách đều tất cả các điểm đó (định nghĩa đường tròn).

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0 (hay một góc của tứ giác bằng góc ngoài của góc đối diện với nó).

- Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

- Đôi khi ta cần chọn thêm điểm phụ thì việc giải bài toán sẽ thuận lợi hơn.

Chú ý :

+ Nếu hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD cắt nhau tại E sao cho EA.EC = EB.ED thì ta suy ra được $\Delta AEB \backsim \Delta DEC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{CDB} \Rightarrow$ tứ giác ABCD nội tiếp.

+ Nếu phần kéo dài của các cạnh AB và CD của tứ giác ABCD cắt nhau tại E sao cho EA.EB = EC.ED thì ta suy ra được $\Delta AED \quad \Delta ECB$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{ECB} \Rightarrow$ tứ giác ABCD nội tiếp.

+ Hình thang cân là tứ giác nội tiếp.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho AD = CE. Gọi F là giao điểm của BE và CD. Chứng minh AEFD là tứ giác nội tiếp.

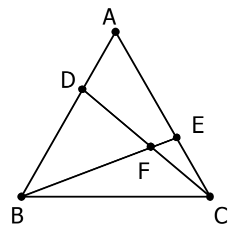
Gợi ý : *Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0 (hay tứ giác có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh của góc đối).*

Hướng dẫn giải

Vì tam giác ABC đều nên AB = BC = CA ; $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^0$.

Ta lại có AD = CE nên $\Delta ADC = \Delta CEB$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{CEB} \Rightarrow$ AEFD là tứ giác nội tiếp.



Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH. Gọi D và E thứ tự là hình chiếu của H trên các cạnh AB và AC. Chứng minh ADHE và BDEC là các tứ giác nội tiếp.

Gợi ý : *Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0 (hay tứ giác có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh của góc đối)*

Hướng dẫn giải

Tứ giác ADHE có $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

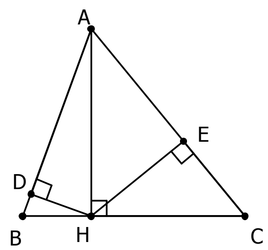
$\Rightarrow$ ADHE là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

Mà $\widehat{AHE} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ với $\widehat{EHC}$)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ BDEC là tứ giác nội tiếp.



Ví dụ 3. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAF} = 45^0$. Đường chéo BD cắt các đoạn thẳng AE và AF thứ tự ở M và N.

Chứng minh rằng ABEN và MEFN là các tứ giác nội tiếp.

Gợi ý : *Hai đỉnh liên tiếp của tứ giác cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.*

Hướng dẫn giải

Vì ABCD là hình vuông, BD là đường chéo nên $\widehat{DBC} = 45^0$.

Do đó $\widehat{EBN} = \widehat{EAN} = 45^0 \Rightarrow$ ABEN là tứ giác nội tiếp.

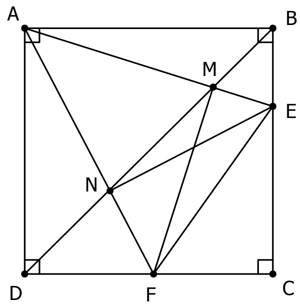
Mà $\widehat{ABE} = 90^0$ nên $\widehat{ANE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ENF} = 90^0$. (1)

Tương tự thì ADFM cũng là tứ giác nội tiếp.

Mà $\widehat{ADF} = 90^0$ nên $\widehat{AMF} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{EMF} = 90^0$.   (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ENF} = \widehat{EMF} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm.



Ví dụ 4. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. Qua H vẽ dây cung DE của đường tròn (D thuộc cung nhỏ BC). Chứng minh rằng ADOE là tứ giác nội tiếp.

Gợi ý : *Hai đỉnh liên tiếp của tứ giác cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.*

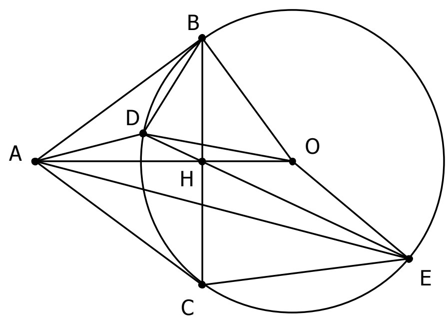
Hay "Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E có EA.EC = EB.ED".

Hướng dẫn giải

Vì AB, AC là các tiếp tuyến (B, C là tiếp điểm) nên AB = AC và AO là phân giác của $\widehat{BAC}$

$\Rightarrow$ AO $\perp$ BC tại H và HB = HC (1).

Vì AB là tiếp tuyến (B là tiếp điểm) nên $\widehat{ABO} = 90^0$.



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có :

HB^2 = HA.HO   (2)

Dễ thấy ΔHBD ΔHEC (g-g) $\Rightarrow$ HB.HC = HD.HE.   (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ HA.HO = HD.HE $\Rightarrow$ ADOE là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Về phía ngoài tam giác, dựng tam giác ACD vuông cân tại A. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho EF = EB.

Chứng minh rằng BDFC là tứ giác nội tiếp.

Gợi ý : *Áp dụng định nghĩa đường tròn hay nhiều điểm cách đều một điểm.*

Hướng dẫn giải

Tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (1).

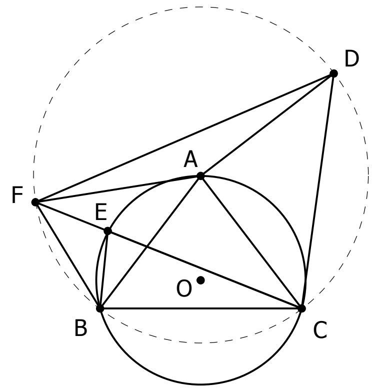
Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$).

Mà $\widehat{AEC} + \widehat{AEF} = 180^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{AEF} = 180^0$. (2)

Tứ giác AEBC nội tiếp (O)

$\Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 180^0$. (3)



Từ (1) (2) và (3) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AEF}$.

Mà EB = EF nên $\Delta AEB = \Delta AEF$ (c-g-c)

$\Rightarrow$ AB = AF.

Dễ thấy AB = AC ; AC = AD.

Do đó AB = AC = AD = AF $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 6. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE (D $\in$ cung nhỏ BC, $\overset{\frown}{BD} < \overset{\frown}{DC}$). Gọi F là trung điểm của DE. Chứng minh rằng 5 điểm A, B, C, O, F cùng thuộc một đường tròn.

Gợi ý : *Các điểm cùng nhìn một đoạn dưới một góc vuông hoặc xét hai hay nhiều tứ giác nội tiếp.*

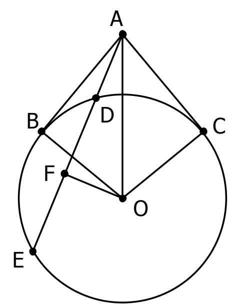
Hướng dẫn giải

Vì AB, AC là các tiếp tuyến (B, C là các tiếp điểm) nên

$$\widehat{ABO} = 90^0 \;;\; \widehat{ACO} = 90^0.$$

Vì F là trung điểm của DE nên $OF \perp DE$ hay

$$\widehat{AFO} = 90^0.$$



Vì $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên ABOC là tứ giác nội tiếp. (1)

Vì $\widehat{AFO}+\widehat{ACO}=90^0+90^0=180^0$ nên AFOC là tứ giác nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, B, C, O, F cùng thuộc một đường tròn.

Dạng 4. CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung.

– Đường thẳng vuông góc với bán kính tại một điểm trên đường tròn.

– Tia B*x* nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A sao cho $\widehat{CBx}=\widehat{BAC}$ thì tia B*x* là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MD và ME là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

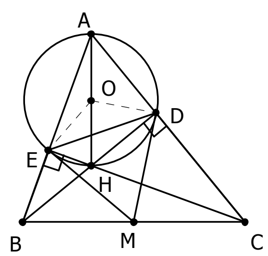
Gợi ý : *Một đường thẳng vuông góc với bán kính tại một điểm trên đường tròn.*

Hướng dẫn giải

Tứ giác ADHE có $\widehat{ADH}+\widehat{AEH}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AH.

Do đó đường tròn (O) chính là đường tròn ngoại tiếp ΔADE.



Tam giác AOH cân tại O (OA = OH)

$\Rightarrow \widehat{OAD}=\widehat{ODA}$.

Tam giác BDC vuông tại D có DM là trung tuyến nên MD = MB = MC $\Rightarrow \Delta MDC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MCD}$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên AH vuông góc với BC nên $\widehat{OAD} + \widehat{MCD} = 90^0$ suy ra $\widehat{ODA} + \widehat{MDC} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{ODM} = 90^0$. Vậy MD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tương tự ME là tiếp tuyến của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ADE.

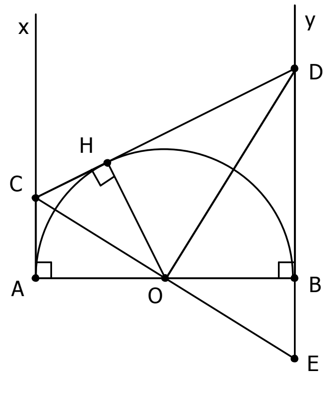
Ví dụ 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Trên các tia Ax và By lần lượt lấy các điểm C và D sao cho $\widehat{COD} = 90^0$. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Gợi ý : *Kẻ khoảng cách từ tâm đến đường thẳng, rồi chứng minh khoảng cách đó bằng bán kính.*

Hướng dẫn giải

Kẻ OH vuông góc với CD tại H.

Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng OC và BD.



Dễ thấy $\Delta AOC = \Delta BOE$ (g-c-g) $\Rightarrow$ OC = OE.

Tam giác CDE có DO vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên tam giác CDE cân tại D. Suy ra DO là phân giác của góc CDE

$\Rightarrow \widehat{CDO} = \widehat{EDO}$

$\Rightarrow \Delta OHD = \Delta OBD$ (cạnh huyền-góc nhọn)

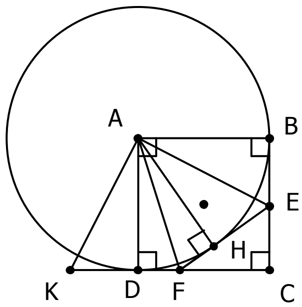
$\Rightarrow$ OH = OB.

Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 3. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAF} = 45^0$. Chứng minh rằng đường thẳng EF là tiếp tuyến của đường tròn tâm A bán kính AB.

Gợi ý : *Kẻ khoảng cách từ tâm đến đường thẳng, rồi chứng minh khoảng cách đó bằng bán kính.*

Hướng dẫn giải



Kẻ AH vuông góc với EF tại H. Trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho DK = BE suy ra

$\Delta ABE = \Delta ADK$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DAK}$ và AE = AK.

Mà $\widehat{BAE} + \widehat{EAD} = 90^0$ nên $\widehat{EAD} + \widehat{DAK} = 90^0$.

Ta có $\widehat{AEF} = 45^0 \Rightarrow \widehat{KAF} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta FAK = \Delta FAE$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AFK} = \widehat{AFE}$

$\Rightarrow \Delta AFD = \Delta AFH$ (ch-gn) $\Rightarrow$ AD = AH $\Rightarrow$ AH = AB.

Vậy đường thẳng EF là tiếp tuyến của đường tròn (A ; AB).

Chú ý : Trong các ví dụ 2 và 3, để chứng minh CD hay EF là tiếp tuyến ta cần tạo ra khoảng cách từ tâm đường tròn đến CD hay EF rồi chứng minh khoảng cách đó bằng bán kính của đường tròn.

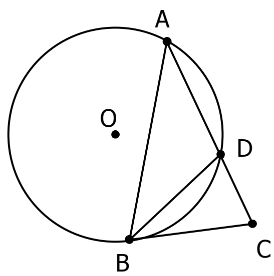
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 36^0$, đường phân giác BD. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Gợi ý : *Chứng minh* $\widehat{CBD} = \widehat{BAD}$.

Hướng dẫn giải

Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 36^0$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^0 - 36^0}{2} = 72^0$.



Vì BD là phân giác của ΔABC

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{72^0}{2} = 36^0$.

Do đó $\widehat{CBD} = \widehat{BAD} = 36^0$. Tia BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm A và $\widehat{CBD} = \widehat{BAD} = 36^0$ nên BC là tiếp tuyến của đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABD.

Chú ý : Đây là một dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến cần được rèn luyện để có kĩ năng trong việc giải bài toán chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn.

Dạng 5. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Định lí Pi-ta-go, định lí Ta-let, tính chất đường phân giác của tam giác.

– Công thức tính diện tích của các hình.

– Vận dụng một số bất đẳng thức thường sử dụng trong phân môn đại số.

2. CÁC VÍ DỤ

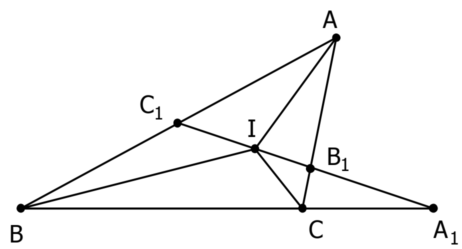
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm A_1. Đường thẳng IA_1 cắt các cạnh AC và AB thứ tự ở B_1 ; C_1. Chứng minh hệ thức : $\frac{BC}{IA_1}+\frac{CA}{IB_1}=\frac{AB}{IC_1}$.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác và biến đổi đồng nhất biểu thức hữu tỉ.*

Hướng dẫn giải

Vì AI là phân giác của ΔAB_1C_1 ta có :

$$\frac{AC_1}{IC_1}=\frac{AB_1}{IB_1} \qquad (1)$$



Vì BI là phân giác của ΔA_1BC_1 ta có :

$$\frac{BC_1}{IC_1}=\frac{BA_1}{IA_1} \qquad (2)$$

Vì CI là phân giác ngoài của ΔA_1B_1C ta có : $\frac{CB_1}{IB_1}=\frac{CA_1}{IA_1}$ (3)

Lấy (2) trừ (3) vế theo vế ta được :

$$\frac{BC_1}{IC_1}-\frac{CB_1}{IB_1}=\frac{BA_1}{IA_1}-\frac{CA_1}{IA_1}\Rightarrow\frac{BC_1}{IC_1}-\frac{CB_1}{IB_1}=\frac{BC}{IA_1} \text{ (4).}$$

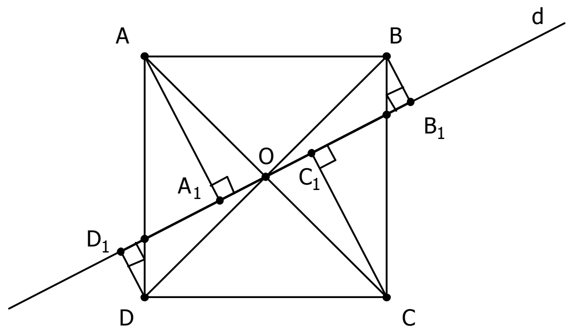
Cộng (1) và (4) vế theo vế ta được :

$$\frac{BC_1}{IC_1}-\frac{CB_1}{IB_1}+\frac{AC_1}{IC_1}=\frac{BC}{IA_1}+\frac{AB_1}{IB_1}\Rightarrow\frac{AB}{IC_1}=\frac{BC}{IA_1}+\frac{CA}{IB_1}$$

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Một đường thẳng d quay quanh tâm O của hình vuông. Chứng minh rằng tổng các bình phương của các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng d không đổi.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất của hình vuông, tam giác bằng nhau, định lí Pi-ta-go.*

Hướng dẫn giải



Vẽ AA_1 ; BB_1 ; CC_1 ; DD_1 lần lượt vuông góc với đường thẳng d.

Dễ thấy $\Delta BOB_1 = \Delta OCC_1$ (cạnh huyền-góc nhọn) nên

$BB_1 = OC_1$; $OB_1 = CC_1$.

Áp dụng định lí Pi-ta-go vào tam giác vuông OBB_1 ta có

$BB_1^2 + OB_1^2 = OB^2 \Rightarrow BB_1^2 + CC_1^2 = OB^2$.

Tương tự $AA_1^2 + DD_1^2 = OA^2$.

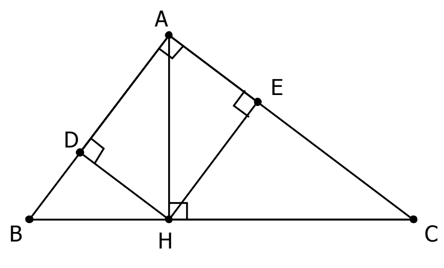
Do đó : $AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 + DD_1^2 = 2OA^2 = AB^2 = a^2$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB và AC. Chứng minh rằng :

a) AD.AB = AE.AC   b) $\dfrac{BD}{CE} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$ c) $BD.CE.BC = AH^3$.

Gợi ý : *Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, biến đổi đồng nhất.*

Hướng dẫn giải



a) Tam giác ABH vuông tại H, đường cao HD, ta có : $AH^2 = AB.AD$ (1)

Tam giác ACH vuông tại H, đường cao HE, ta có : $AH^2 = AC.AE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AD.AB = AE.AC.

b) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có :

$AB^2 = BC.BH$; $AC^2 = BC.CH \Rightarrow \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ (*)

Tam giác ABH vuông tại H, đường cao HD, ta có : $BH^2 = BD.BA$. (3)

Tam giác ACH vuông tại H, đường cao HE, ta có : $CH^2 = CA.CE$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{BH^2}{CH^2} = \dfrac{AB}{AC}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\dfrac{BD}{CE} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có :

$AH^2 = BH.CH \Rightarrow AH^4 = BH^2.CH^2 = BD.BA.CA.CE = BD.CE.AB.AC$ (5)

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có : $AB.AC = BC.AH$ (6)

Thay (6) vào (5) ta được : $AH^4 = BD.CE.BC.AH \Rightarrow BD.CE.BC = AH^3$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng :

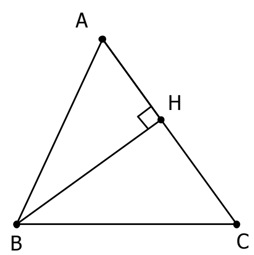
a) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$; b) $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$;

c) $\dfrac{AB^2}{\text{cotg}\,A + \text{cotg}\,B} = \dfrac{BC^2}{\text{cotg}\,B + \text{cotg}\,C} = \dfrac{CA^2}{\text{cotg}\,C + \text{cotg}\,A}$;

Gợi ý : *Áp dụng định nghĩa về tỉ số lượng giác của góc nhọn, công thức tính diện tích tam giác.*

Hướng dẫn giải

a) Vẽ đường cao BH của tam giác ABC



$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BH$ (1)

Tam giác ABH vuông tại H, ta có BH = AB.sinA (2)

Thay (2) vào (1) ta được $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$.

b) Theo câu a) ta có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}BA.BC.\sin B = \frac{1}{2}CB.CA.\sin C$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC.CA.AB}{2S_{ABC}}.$$

c) ΔABH vuông tại H, ta có cotA = $\frac{AH}{BH}$.

ΔBCH vuông tại H, ta có cotC = $\frac{CH}{BH}$. Do đó cotA + cotC = $\frac{AH}{BH}$ + $\frac{CH}{BH}$ = $\frac{AH+CH}{BH} = \frac{AC}{BH}$, suy ra $BH = \frac{AC}{\cot A + \cot C}$

$$\Rightarrow 2S_{ABC} = AC.BH = \frac{AC^2}{\cot A + \cot C}.$$

Vậy : $\frac{AB^2}{\cot A + \cot B} = \frac{BC^2}{\cot B + \cot C} = \frac{CA^2}{\cot C + \cot A} = 2S_{ABC}$.

Dạng 6. CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM THẲNG HÀNG, NHIỀU ĐƯỜNG ĐỒNG QUY

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Chứng minh nhiều điểm thẳng hàng có thể quy về việc chứng minh ba điểm thẳng hàng. Chứng minh nhiều đường đồng quy thực chất cũng chuyển về chứng minh ba đường đồng quy. Bài toán chứng minh ba đường đồng quy và bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng có thể biến đổi qua lại với nhau.

– Qua một điểm cho trước có duy nhất đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

– Qua một điểm cho trước ở ngoài một đường thẳng cho trước có duy nhất đường thẳng song song với đường thẳng đó.

– Các đường đồng quy trong tam giác.

– Tính chất đối xứng trục, đối xứng tâm.

2. CÁC VÍ DỤ

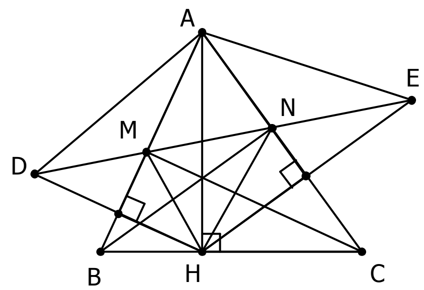
Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các cạnh AB và AC. Đường thẳng DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, BN, CM đồng quy.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất đồng quy của ba đường phân giác, của ba đường cao trong tam giác.*

Hướng dẫn giải

* Theo tính chất đối xứng trục ta có

$\Delta AMH = \Delta AMD$; $\Delta ANH = \Delta ANE$; ΔADE cân tại A $\Rightarrow$ HA là phân giác của $\widehat{MHN}$, mà HA $\perp$ HC nên HC là phân giác ngoài tại đỉnh H của ΔMHN.



* Dễ thấy NC là phân giác ngoài tại đỉnh N của ΔMHN .

* Từ đó suy ra MC là phân giác của $\widehat{HMN}$, mà MB là phân giác ngoài tại đỉnh M của tam giác MHN nên MC $\perp$ MB. Tương tự NB $\perp$ NC.

* Do đó AH, BN, CM là ba đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} \neq 120^0$. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác đều ABD ; ACE và BCF . Gọi I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc DIE. Từ đó suy ra 3 điểm A, I, F thẳng hàng.

Gợi ý : *Hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.*

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $\Delta ABE = \Delta ADC$ (c-g-c).

Áp dụng tính chất của góc ngoài tam giác tính được $\widehat{BIC} = 120^0$. Vẽ AH $\perp$ BE ; AK $\perp$ CD.

Vì ΔABE = ΔADC nên AH = AK $\Rightarrow$ IA là phân giác của góc DIE. (1)

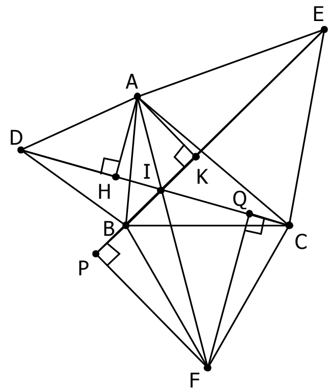
Vẽ FP $\perp$ BE ; FQ $\perp$ CD

$\Rightarrow$ ΔFPB = ΔFQC (ch– gn)

$\Rightarrow$ FP = FQ

$\Rightarrow$ IF là phân giác của góc BIC. (2)

Vì $\widehat{DIE}$ và $\widehat{BIC}$ là hai góc đối đỉnh nên từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, I, F thẳng hàng.



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân đỉnh B và đỉnh C là ABD và ACE.

a) Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng AH, BE, CD đồng quy.

c) Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh tam giác MBC là tam giác vuông cân.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất của hai góc kề bù, tính chất ba đường cao của tam giác thì đồng quy.*

Hướng dẫn giải

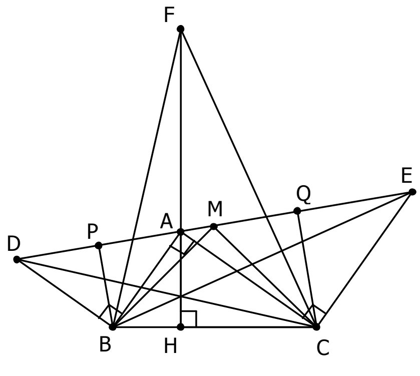
a) Dễ thấy $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 180^0$.

b) Trên tia đối của tia AH lấy điểm F sao cho AF = BC.

Cần chứng minh : ΔABF = ΔBDC (c-g-c) ;

ΔACF = ΔCEB (c-g-c), suy ra BF $\perp$ CD, CF $\perp$ BE. Do đó FH, BE, CD là ba đường cao của tam giác FBC $\Rightarrow$ đpcm.

c) Vẽ BP $\perp$ DE ; CQ $\perp$ DE $\Rightarrow$ BP = PA = PD ;



CQ = QA = QE. Do đó ΔBPM = ΔMQC (c-g-c)

$\Rightarrow$ BM = MC và $\widehat{BMC} = 90^0$ $\Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại M.

Ví dụ 4. Cho hình thang ABCD, đáy lớn CD. Các đường thẳng kẻ từ A và B lần lượt song song với CB và AD cắt các đường chéo BD và AC tương ứng ở F và E đồng thời cắt đáy lớn CD thứ tự ở M và N. Các đường thẳng kẻ từ M và N lần lượt song song với AC và BD cắt AD và BC thứ tự ở P và Q.

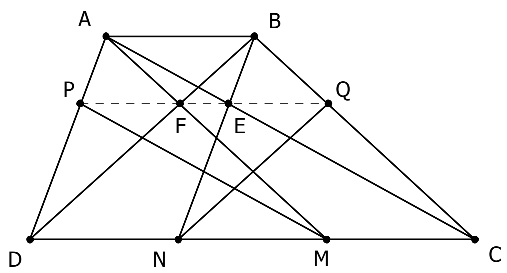
a) Chứng minh rằng 4 điểm E ; F ; P và Q thẳng hàng.

b) Tính độ dài đoạn thẳng PQ, biết rằng AB = a ; CD = b.

Gợi ý : *Áp dụng tiên đề Ơ-clit : "Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng có duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng đó".*

Hướng dẫn giải

a) Vì AB // CD nên $\frac{BF}{FN} = \frac{AB}{CN}$. (1)



Vì AB // CD nên $\frac{BE}{ED} = \frac{AB}{DM}$. (2)

Do ABND và ABCM là các hình bình hành nên

DN = CM = AB $\Rightarrow$ DM = CN. (3)

Từ (1) ; (2) và (3) $\Rightarrow$ $\frac{BE}{ED} = \frac{BF}{FN}$.

Theo định lí Ta-lét đảo $\Rightarrow$ EF song song với AB.

Vì MP // AC $\Rightarrow$ $\frac{AP}{PD} = \frac{CM}{MD}$. (4)

Vì NQ // BD $\Rightarrow$ $\frac{BQ}{QC} = \frac{DN}{NC}$. (5)

Từ (1) ; (2) ; (3) ; (4) và (5) suy ra $\frac{AP}{PD} = \frac{BE}{ED} = \frac{BF}{FN} = \frac{BQ}{QC}$.

Theo định lí Ta-lét đảo ta có PE // AB ; EF // AB ; FQ // CD.

Ta lại có AB // CD nên theo tiên đề Ơ-clít suy ra 4 điểm P ; Q ; E ; F thẳng hàng.

b) Vì PE // AB nên $\frac{PE}{AB} = \frac{DP}{DA}$ (1). Vì PE // CD nên $\frac{PE}{DM} = \frac{AP}{AD}$ (2).

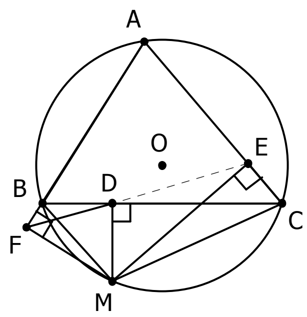
Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được $\frac{PE}{AB}+\frac{PE}{DM}=1$.

Mà AB = a ; DM = DC – CM = DC – AB = b – a (vì b > a). Do đó $\frac{PE}{a}+\frac{PE}{b-a}=1 \Rightarrow PE=\frac{a(b-a)}{b}$. Ta lại có ABQE là hình bình hành nên EQ = AB = a. Vậy $PQ=PE+EQ=\frac{a(b-a)}{b}+a=\frac{a(2b-a)}{b}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ BC. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất của hai góc kề bù, định nghĩa của hai góc đối đỉnh.*

Hướng dẫn giải



Tứ giác BDMF có :

$\widehat{BDM}+\widehat{BFM}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác BDMF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FBM}=\widehat{FDM}$ (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FM}$).

Tứ giác MDEC có : $\widehat{MDC}=\widehat{MEC}=90^0$.

$\Rightarrow$ Tứ giác MDEC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MDE}+\widehat{MEC}=180^0$ (2)

Tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{FBM}=\widehat{ACM}$ (vì cùng bù với góc ABM) (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra $\widehat{FDM}+\widehat{MDE}=180^0$.

Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Chú ý : *Đường thẳng DEF gọi là đường thẳng Sim-son.*

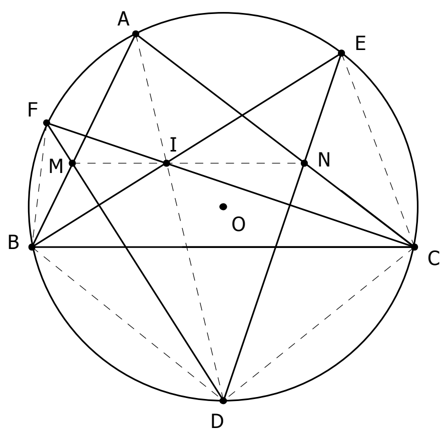
Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F thứ tự là điểm chính giữa các cung nhỏ BC, CA, AB. Gọi I là giao điểm của BE và CF. Gọi

M là giao điểm của DF và AB. Gọi N là giao điểm của DE và AC. Chứng minh rằng :

a) Ba điểm A, I, D thẳng hàng ; b) Ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất ba đường phân giác của tam giác thì đồng quy, tiên đề Ơ-clít.*

Hướng dẫn giải



a) Vì D, E, F thứ tự là điểm chính giữa các cung nhỏ BC, CA, AB nên $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC}$; $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{EA}$; $\overset{\frown}{FA} = \overset{\frown}{FB}$.

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$; $\widehat{EBC} = \widehat{EBA}$; $\widehat{FCA} = \widehat{FCB}$

Do đó AD, BE, CF là ba đường phân giác của ΔABC suy ra ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Vậy ba điểm A, I, D thẳng hàng.

b) Vì $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC}$; $\overset{\frown}{FA} = \overset{\frown}{FB}$ nên suy ra $\widehat{DFB} = \widehat{DFC}$; $\widehat{FDB} = \widehat{FDA} \Rightarrow \Delta DFB = \Delta DFI$ (g-c-g)

$\Rightarrow$ DB = DI ; FB = FI.

Do đó DF là đường trung trực của đoạn thẳng BI, mà M $\in$ DF nên MB = MI.

Do đó ΔMBI cân tại M, suy ra $\widehat{MBI} = \widehat{MIB}$. Ta lại có $\widehat{MBI} = \widehat{IBC}$ (cmt) nên $\widehat{MIB} = \widehat{IBC}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên IM // BC (1). Chứng minh tương tự ta được IN // BC. (2)

Theo Tiên đề Ơ-clit, từ (1) và (2) suy ra ba điểm M, I, N thẳng hàng.

Dạng 7. CHỨNG MINH TAM GIÁC, TỨ GIÁC ĐẶC BIỆT
(Nhận dạng tam giác, tứ giác)

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

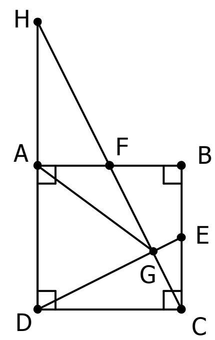
Áp dụng các dấu hiệu nhận biết về các tam giác, tứ giác đặc biệt như : tam giác vuông, tam giác cân, tam giác vuông cân, tam giác đều, hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD. Gọi E và F thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và BC. Gọi G là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng tam giác ADG là tam giác cân.

Gợi ý : *Áp dụng dấu hiệu : "Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân".*

Hướng dẫn giải



Dễ thấy $\Delta CBE = \Delta DCF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{CDF}$

Mà $\widehat{BCE} + \widehat{ECD} = 90^0$ nên $\widehat{CDF} + \widehat{ECD} = 90^0$.

Do đó ΔCDG vuông tại G

$\Rightarrow \widehat{CGD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DGE} = 90^0$.

Kéo dài CE cắt đường thẳng AD tại H.

Dễ thấy $\Delta CBE = \Delta HAE$ (g-c-g) $\Rightarrow$ BC = AH

$\Rightarrow$ AH = AD.

Tam giác DGH vuông tại G có GA là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ GA = AD = AH $\Rightarrow \Delta ADG$ cân tại A.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có AD và BE là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu $\widehat{CAD} = \widehat{CBE} = 30^0$.

Gợi ý : *Áp dụng dấu hiệu : "Tam giác cân có một góc bằng 60^0 là tam giác đều".*

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $\Delta CAD \quad \Delta CBE$ (g-g), suy ra

$\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CE}$,

mà $CD = \dfrac{CB}{2}$; $CE = \dfrac{CA}{2}$

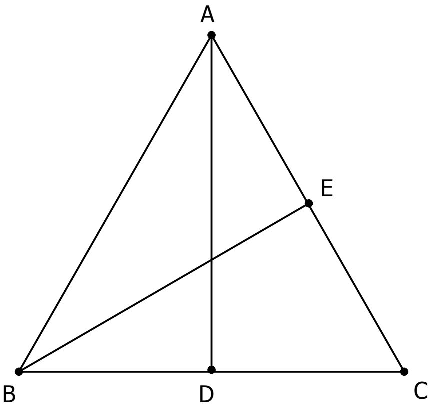
nên $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CB}{CA}$

$\Rightarrow CA^2 = CB^2 \Rightarrow CA = CB$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Vì CA = CB và $CD = \dfrac{CB}{2}$

nên $CD = \dfrac{CA}{2}$.



Tam giác CAD có $\widehat{CAD} = 30^0$ và $CD = \dfrac{CA}{2}$ nên ΔCAD là nửa tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{ACD} = 60^0 \Rightarrow$ đpcm.

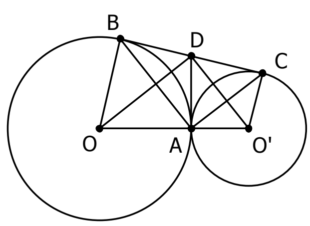
Ví dụ 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B, C là các tiếp điểm, B $\in$ (O), C $\in$ (O')). Vẽ tiếp tuyến chung trong tại A cắt BC ở D. Chứng minh rằng các tam giác ABC và ODO' là các tam giác vuông.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù, đường trung tuyến ứng với một cạnh và bằng nửa cạnh ấy.*

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có :

* DA = DB = DC = $\dfrac{BC}{2} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.



* DO, DO' thứ tự là phân giác của $\widehat{ADB}, \widehat{ADC}$.

Mà $\widehat{ADB}, \widehat{ADC}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{ODO'} = 90^0$, suy ra $\Delta ODO'$ vuông tại D.

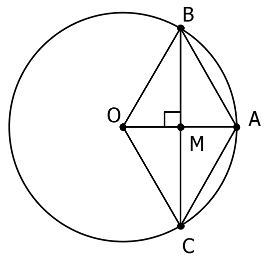
Ví dụ 4. Cho đường tròn (O ; R) bán kính A. Gọi M là trung điểm của OA. Vẽ dây cung BC đi qua M và vuông góc với OA.

a) Chứng minh rằng tam giác AOB là tam giác đều.

b) Tứ giác ABOC là hình gì ? Vì sao ?

Gợi ý : *Áp dụng dấu hiệu : "Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều" ; "Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là hình thoi".*

Hướng dẫn giải



a) Tam giác AOB có BM vừa là trung tuyến, vừa là đường cao nên tam giác AOB cân tại B, suy ra OB = AB.

Ta lại có OA = OB = R

nên OA = OB = AB $\Rightarrow$ đpcm.

b) Tương tự câu a) ta suy ra OB = BA = AC = CO

$\Rightarrow$ ABOC là hình thoi.

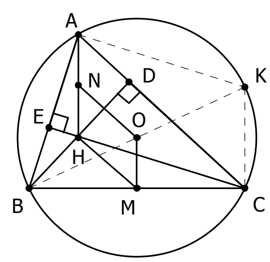
Cách khác : Vì OM $\perp$ BC nên MB = MC.

Tứ giác ABOC có MA = MO, MB = MC và OA $\perp$ BC $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 5. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của BC và AH. Tứ giác HNOM là hình gì ? Vì sao ?

Gợi ý : *Áp dụng dấu hiệu : "Tứ giác có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành".*

Hướng dẫn giải



Vẽ đường kính BK của đường tròn (O), ta có

$\widehat{BAK} = \widehat{BCK} = 90^0$.

Theo tính chất ba đường cao

$\Rightarrow$ AH $\perp$ BC ; CH $\perp$ AB.

Do đó AH // KC và AK // CH $\Rightarrow$ AHCK là hình bình hành

$\Rightarrow$ AH = CK, mà NA = NH $\Rightarrow NA = NH = \dfrac{CK}{2}$. (1)

Dễ thấy OM là đường trung bình của ΔBCK $\Rightarrow$ OM //= $\dfrac{CK}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ NH //= OM $\Rightarrow$ AHCK là hình bình hành.

Ví dụ 6. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, vẽ các tia A*x* và B*y* cùng vuông góc với AB. Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt các tia A*x* và B*y* thứ tự ở D và E. Gọi H là giao điểm của OD và AC ; K là giao điểm của OE và BC.

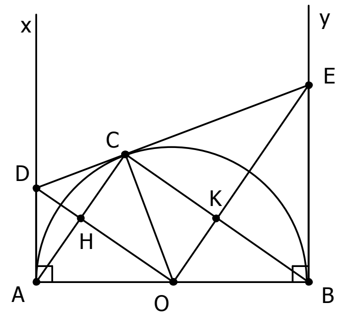
a) Tứ giác OHCK là hình gì ? Vì sao ?

b) Điểm C phải thỏa mãn điều kiện gì để OHCK là hình vuông ?

Gợi ý : *Áp dụng dấu hiệu : 'Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật" ; Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau hoặc có một đường chéo là phân giác của một góc hoặc có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông".*

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có DA = DC.



Ta lại có OA = OC = R. Do đó OD là trung trực của AC, suy ra OD $\perp$ AC tại H và HA = HC = $\dfrac{AC}{2}$.

Tương tự : OE $\perp$ BC tại K và KB = KC = $\dfrac{BC}{2}$.

Dễ thấy $\widehat{ACB} = 90^0$. Từ đó suy ra OHCK là hình chữ nhật.

b) Hình chữ nhật OHCK là hình vuông $\Leftrightarrow$ CH = CK $\Leftrightarrow AC = BC \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$.

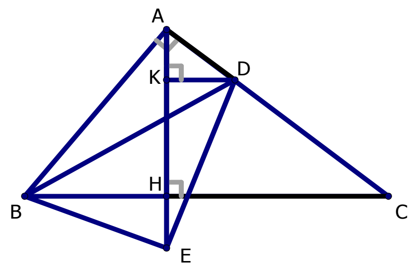
Vậy khi C là điểm chính giữa cung AB thì OHCK là hình vuông.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AC = 3AD. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho AH = 3HE. Chứng minh rằng tam giác BED là tam giác vuông.

Gợi ý : *Áp dụng định lí Pi-ta-go đảo.*

Hướng dẫn giải

Qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AH tại K.



Áp dụng định lí Talét ta có

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow AH = 3AK$ (vì AC = 3AD)

Ta lại có AH = 3HE nên AK = HE. Do đó KE = AH.

Áp dụng định lí Pi-ta-go vào các tam giác vuông BHE ; DKE ; AHB ; ADK ; ABD ta được :

$BE^2 + FE^2 = BH^2 + HE^2 + KE^2 + KD^2$

$= BH^2 + AH^2 + AK^2 + KD^2$ (vì AH = KE ; HE = AK).

$= AB^2 + AD^2 = BD^2$.

Theo định lí Pi-ta-go đảo suy ra ΔBED vuông tại E.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau

Bài 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài CD (C ∈ (O), D ∈ (O')). Chứng minh rằng AB đi qua trung điểm E của CD**.**

Bài 2. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai các tuyến ABC và ADE với đường tròn (B nằm giữa A và C ; D nằm giữa A và E). Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với OA. Đường thẳng d cắt các đường thẳng BE và CD thứ tự ở M và N. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của O lên BE và CD. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AKC} = \widehat{AHE}$; b) AM = AN.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn đường kính AB cắt cạnh AC ở H. Đường tròn đường kính AC cắt cạnh AB ở K. Đường tròn đường kính AB cắt đoạn CK ở D. Đường tròn đường kính AC cắt đoạn BH ở E. Chứng minh rằng :

a) AD = AE.

b) Đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác AEB và ADC bằng nhau.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Dây cung BC của (O) kéo dài tiếp xúc với (O') tại D. Kéo dài BA cắt (O') tại E. Chứng minh rằng AD là phân giác của góc CAE.

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD không cắt AB. Các tiếp tuyến tại C và D của (O) cắt nhau ở E. Gọi H là hình chiếu của E trên AB. Chứng minh rằng $\widehat{EHC} = \widehat{EHD}$.

Dạng 2. Chứng minh quan hệ vuông góc, quan hệ song song

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ BC, CA, AB. Gọi M là giao điểm của AB và DF ; N là giao điểm của AD và CF.

a) Chứng minh rằng AD vuông góc với EF.

b) Chứng minh rằng MN song song với BC.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng OA vuông góc với DE.

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nủa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Điểm C thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại C cắt Ax và By thứ tự ở D và E.

a) Chứng minh rằng tam giác DOE là tam giác vuông.

b) Gọi F là giao điểm của AE và BD. Chứng minh rằng CF song song với Ax.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho CD = AB. Gọi E là hình chiếu của D lên AB. Tia phân giác của góc B cắt DE ở F. Tia AF cắt BC ở M. Gọi N là trung điểm của AC. Chứng minh rằng MN song song với BF.

Dạng 3. Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC < BC). Vẽ các đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N, P thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng 6 điểm D, E, F, M, N, P cùng thuộc một đường tròn.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại D. Tia phân giác của góc B cắt AD ở E. Vẽ tia D*x* vuông góc với AD, trên tia A*x* lấy điểm F sao cho DF = DC. Chứng minh rằng BECF là tứ giác nội tiếp.

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Điểm E nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{EAD} = \widehat{ECD}$. Gọi I là trung điểm của AE. Gọi F là điểm đối xứng với D qua I (F và D nằm khác phía đối với AB). Chứng minh rằng AFBE là tứ giác nội tiếp.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C tuỳ ý. Vẽ cát tuyến CDE của đường tròn (O). Vẽ cát tuyến CMN của đường tròn (O’). Chứng minh rằng 4 điểm D, E, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE (D nằm giữa A và E). Gọi H là giao điểm của BC và OA. Chứng minh rằng DEOH là tứ giác nội tiếp.

Dạng 4. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

Bài 1. Cho tam giác ABC đường cao AH nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BC. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Vẽ các tiếp tuyến BD và CE của đường tròn (A) (D, E khác điểm H). Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng của B qua H. Vẽ đường tròn tâm O đường kính CD cắt cạnh AC tại E. Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Điểm D thuộc cung nhỏ AC. Tia AD cắt đường thẳng BC tại E. Vẽ đường tròn (O’) ngoại tiếp tam giác BDE. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn (O’).

Bài 4. Cho hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của AB. Trên các cạnh CD và CB lần lượt lấy các điểm E và F sao cho AE song song với MF. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 5. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I. Đường thẳng qua I và vuông góc với AI cắt các cạnh AB và AC thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.

Dạng 5. Chứng minh đẳng thức hình học

Bài 1. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của tam giác nhọn ABC. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=2R$; b) $S_{ABC}=\dfrac{BC.CA.AB}{4R}$;

c) $2Rr=\dfrac{BC.CA.AB}{BC+CA+AB}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi P là giao điểm của ba đường phân giác trong. Đường thẳng qua P và vuông góc với CP cắt CA và CB thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{AM}{BN}=\left(\dfrac{AP}{BP}\right)^2$;

b) $BC.AP^2+CA.BP^2+AB.CP^2=AB.BC.CA$.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD, trực tâm H. Chứng minh rằng :

a) $\tan B.\tan C=\dfrac{AD}{HD}$;

b) $\tan A+\mathrm{tanB}+\mathrm{tanC}=\tan A.\mathrm{tanB}.\mathrm{tanC}$.

Dạng 6. Chứng minh nhiều điểm thẳng hàng, nhiều đường đồng quy

Bài 1. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O’ ; r) với R > r, cắt nhau tại A và B. Đoạn nối tâm OO’ cắt các đường tròn (O) và (O’) thứ tự ở C và D. Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn là MP và NQ (M, N $\in$ (O) ; P, Q $\in$ (O’)).

a) Chứng minh ba đường thẳng MP, NQ và OO' đồng quy.

b) Gọi E là giao điểm của MC và PD. Chứng minh ba điểm A, E, B thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm O đường kính AB cắt cạnh BC tại D. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt cạnh AC tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB.

a) Chứng minh rằng đường thẳng BE đi qua trung điểm K của DH.

b) Đường thẳng qua B và song song với AC cắt đường thẳng AK ở F. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 3. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác đều ABD, BCE, CAF. Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp của các tam giác đều nói trên cùng đi qua một điểm.

Bài 4. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Trên đoạn AD lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EBA} = \widehat{FBC}$ (E nằm giữa A và F). Vẽ các đường tròn (O_1) và (O_2) thứ tự ngoại tiếp các tam giác AEB và AFC. Tia CE cắt đường tròn (O_1) tại M ; Tia BF cắt đường tròn (O_2) tại N. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC, H là trực tâm, O là điểm cách đều các đỉnh của tam giác. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Gọi N là điểm sao cho O là trung điểm của BN.

a) Chứng minh rằng : CN = 2.OM và CN = AH.

b) Gọi G là giao điểm của AM và OH. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

(Đường thẳng đi qua 3 điểm O, G, H gọi là đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC).

Bài 6. Chứng minh rằng : Trong một tứ giác, đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo và hai đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh đối diện thì đồng quy.

Dạng 7. Chứng minh tam giác, tứ giác đặc biệt

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D và E thứ tự là điểm chính giữa các cung nhỏ AB và AC. Dây DE cắt các dây AB và AC thứ tự ở M và N. Gọi P là giao điểm của BE và CD.

a) Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

b) Tứ giác AMPN là hình gì ? Vì sao ?

Bài 2. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, CD vuông góc với nhau. Vẽ đường kính AE (E thuộc cung nhỏ BD). Tứ giác BCDK là hình gì ? Vì sao ?

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O ; R) dây AB = $R\sqrt{3}$. Trên cung lớn AB lấy các điểm C và D sao cho C thuộc cung nhỏ BD. Gọi M, N, P, Q thứ tự là trung điểm của các dây AD, DC, CB, BA. Tính diện tích tứ giác ABCD theo R trong trường hợp MNPQ là hình vuông.

Chủ đề 3 TẬP HỢP ĐIỂM

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

1. Tập hợp điểm.
2. Quỹ tích cơ bản.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. TÌM VÀ CHỨNG MINH VỀ TẬP HỢP ĐIỂM

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cần nắm chắc các tập hợp điểm đã học sau đây :

– Tập hợp các điểm cách đều hai cạnh của một góc là tia phân giác của góc đó.

– Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

– Tập hợp các điểm cách một đường thẳng *a* cho trước một khoảng không đổi *h* cho trước là hai đường thẳng song song với đường thẳng *a* và cách đường thẳng *a* một khoảng bằng *h*.

– Tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng R > 0 không đổi là đường tròn (O ; R).

– Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới góc α không đổi là hai cung tròn chứa góc α dựng trên đoạn AB và đối xứng với nhau qua AB.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC. Các điểm D và E lần lượt chuyển động trên các cạnh AB và AC sao cho AD = CE. Gọi F là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng điểm F thuộc một cung tròn cố định.

Gợi ý : *Áp dụng : "Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới góc α không đổi là hai cung tròn chứa góc α dựng trên đoạn AB và đối xứng với nhau qua AB".*

Hướng dẫn giải

Tam giác ABC là tam giác đều nên AB = BC = CA và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^0$.

Xét hai tam giác ACD và CBE có :

AD = CE (gt) ; AC = CB ; $\widehat{A} = \widehat{C} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta CBE$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CBE}$

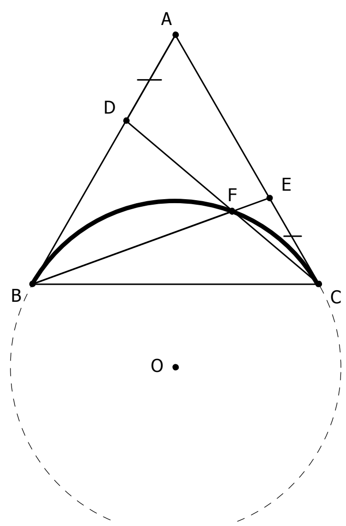
Mà $\widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \widehat{ACB} = 60^0$

nên $\widehat{CBE} + \widehat{DCB} = 60^0$.

Do đó trong tam giác BFC ta có $\widehat{BFC} = 120^0$.

Điểm F chuyển động nhìn đoạn thẳng BC cố định dưới góc $\widehat{BFC} = 120^0$ không đổi nên điểm F nằm trên hai cung tròn chứa góc 120^0 dựng trên đoạn BC cố định.

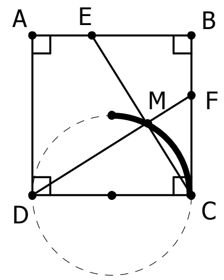
Vì D và E chuyển động trên cạnh AB và AC nên điểm F chỉ thuộc một cung nói trên như hình vẽ.



Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD. Các điểm E và F lần lượt chuyển động trên các cạnh AB và BC sao cho AE = BF. Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng tỏ rằng điểm M thuộc một cung tròn cố định.

Gợi ý : *Áp dụng : "Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc 90^0 là đường tròn đường kính AB".*

Hướng dẫn giải



Vì ABCD là hình vuông nên AB = BC = CD = DA, mà AE = BF nên BE = CF.

Vì ABCD là hình vuông nên $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^0$.

Từ đó suy ra $\Delta BCE = \Delta CDF$ (c-g-c), suy ra

$\widehat{BCE} = \widehat{CDF}$, mà $\widehat{BCE} + \widehat{ECD} = \widehat{BCD} = 90^0$

nên $\widehat{CDF} + \widehat{ECD} = 90^0$.

Do đó ΔCDM vuông tại M.

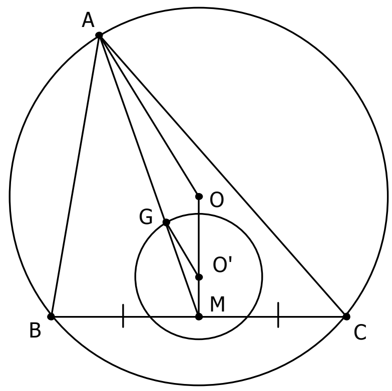
Điểm M chuyển động và nhìn đoạn thẳng CD cố định dưới một góc vuông nên điểm M thuộc đường tròn đường kính CD.

Vì các điểm E và F lần lượt chuyển động trên các cạnh AB và BC nên điểm M chỉ thuộc cung phần tư của đường tròn nói trên như hình vẽ.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC < 2R. Điểm A chuyển động trên đường tròn (O). Chứng tỏ rằng trọng tâm G của tam giác ABC thuộc một đường tròn cố định.

Gợi ý : *Áp dụng định nghĩa đường tròn.*

Hướng dẫn giải



Vẽ trung tuyến AM của tam giác ABC, suy ra M là trung điểm của cạnh BC cố định.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\dfrac{MG}{MA} = \dfrac{1}{3}$.

Qua G kẻ đường thẳng song song với AO cắt OM

tại O', áp dụng định lí Ta-let ta có :

$$\frac{O'G}{OA}=\frac{MO'}{MO}=\frac{MG}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow MO'=\frac{1}{3}MO\,;\,O'G=\frac{R}{3}.$$

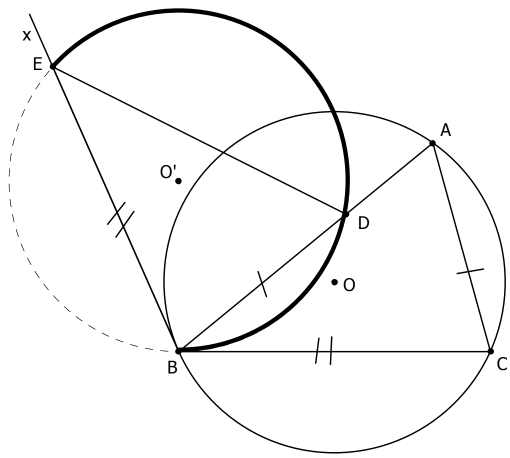
Vì O và M cố định nên O' cố định và $O'G=\frac{R}{3}$.

Điểm G chuyển động cách điểm O' cố định một khoảng $\frac{R}{3}$ không đổi nên điểm G thuộc đường tròn tâm O' bán kính $\frac{R}{3}$ khi điểm A chuyển động trên đường tròn (O ; R).

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC < 2R. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Trên tia BA lấy điểm D sao cho BD = AC. Chứng tỏ rằng điểm D thuộc một đường cố định.

Gợi ý : *Áp dụng : "Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới góc α không đổi là hai cung tròn chứa góc α dựng trên đoạn AB và đối xứng với nhau qua AB".*

Hướng dẫn giải



Vì đường tròn (O ; R) và dây BC < 2R cố định nên số đo cung nhỏ BC không đổi, suy ra $\widehat{BAC}=\alpha$ không đổi.

Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C, vẽ tia Bx tiếp tuyến của đường tròn (O), suy ra $\widehat{ABx}=\widehat{ACB}$ (cùng bằng nửa số đo $\overset{\frown}{AB}$).

Trên tia Bx lấy điểm E sao cho BE = BC.

Từ đó suy ra $\Delta DEB=\Delta ABC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{EDB}=\widehat{BAC}=\alpha$ không đổi.

Vì đường tròn (O ; R) và dây BC < 2R cố định nên tia Bx cố định hay đoạn thẳng BE cố định.

Điểm D chuyển động nhìn đoạn BE cố định dưới một góc bằng α không đổi nên điểm D thuộc hai cung tròn chứa góc α dựng trên đoạn BE và đối xứng qua BE.

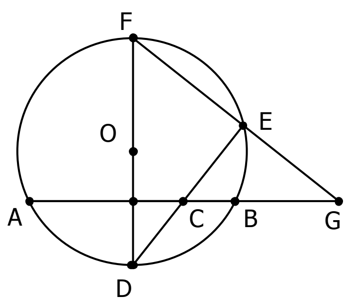
Tuy nhiên, vì điểm A chỉ chuyển động trên cung lớn BC nên điểm D chỉ thuộc $\overset{\frown}{BDE}$.

Ví dụ 5. Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB cố định sao cho AC = 3CB. Đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua A và B. Gọi D là điểm chính giữa cung AB. Tia DC cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh rằng điểm E thuộc một đường tròn cố định.

Gợi ý : *Áp dụng : "Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc 90^0 là đường tròn đường kính AB".*

Hướng dẫn giải

Vẽ đường kính DF của đường tròn (O). Tia FE cắt đường thẳng AB tại G. Vì D là điểm chính giữa cung AB nên $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DEB}$.



Do đó EC là phân giác của góc AEB. Vì $\widehat{FED}$ chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{FED} = 90^0$.

Do đó EG là phân giác ngoài của tam giác AEB, suy ra $\dfrac{GB}{GA} = \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{1}{3}$ (vì AC = 3CB).

Mà AB cố định nên G cố định. Điểm E chuyển động nhìn đoạn CG cố định dưới $\widehat{CEG} = 90^0$.

Vậy điểm E thuộc đường tròn đường kính CG cố định.

Dạng 2.	CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG TRÒN ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

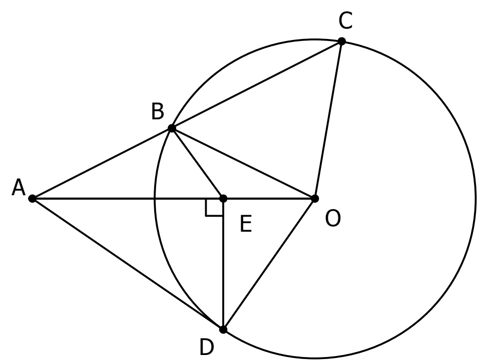
Điểm cần tìm là giao của hai đường thẳng cố định ; của một đường thẳng và một đường tròn cố định hoặc là giao của hai đường tròn cố định.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R). Một cát tuyến thay đổi đi qua A cắt đường tròn (O) tại B và C. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC luôn đi qua một điểm cố định.

Gợi ý : *Dự đoán : Giao điểm E của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC với đoạn OA là điểm cố định và nhận xét rằng AB.AC = AE.AO.*

Hướng dẫn giải



Vẽ tiếp tuyến AD với đường tròn (O), D là tiếp điểm, suy ra $\widehat{ADO} = 90^0$. Kẻ DE $\perp$ OA tại E.

Tam giác AOD vuông tại D, đường cao DE, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có :

AE.AO = $AD^2 \Rightarrow AE = \dfrac{AD^2}{AO}$. (1)

Vì A và đường tròn (O) cố định nên D cố định.

Do đó từ (1) suy ra điểm E cố định.

Vì AD là tiếp tuyến và ABC là cát tuyến của đường tròn (O) nên AD^2 = AB.AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AE.AO = AB.AC $\Rightarrow \dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AE}{AC}$

$\Rightarrow$ $\Delta ABE \backsim \Delta AOC$ (c-g-c) $\Rightarrow$ $\widehat{AEB} = \widehat{ACO}$ $\Rightarrow$ Tứ giác BCOE nội tiếp.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC đi qua điểm E cố định.

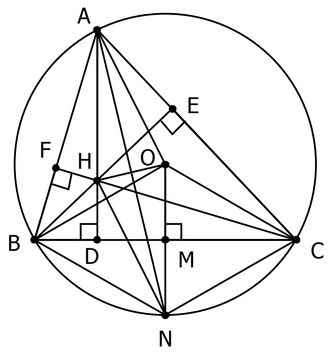
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC = R$\sqrt{3}$ cố định. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC luôn là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh đường thẳng đi qua A và vuông góc với OH luôn đi qua một điểm cố định.

Gợi ý : *Dự đoán : Đường thẳng đi qua A và vuông góc với OH đi qua điểm chính giữa N của cung nhỏ BC. Từ đó tìm cách chứng minh AN là phân giác của góc BAC hoặc ON $\perp$ BC.*

Hướng dẫn giải

Kẻ bán kính ON vuông góc với BC tại M suy ra

MB = MC = $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.



ΔBMO vuông tại M

$\Rightarrow \sin\widehat{BOM} = \dfrac{MB}{OB} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BOM} = 60^0$.

ΔBOC cân tại O (OB = OC = R), đường cao OM nên đồng thời cũng là phân giác của góc BOC $\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{BOM} = 120^0$.

Vì $\widehat{BAC}$ là góc nội tiếp và $\widehat{BOC}$ là góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}.120^0 = 60^0$

Vẽ các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H của tam giác ABC.

Tứ giác AEHF có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác AEHF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAF} + \widehat{EHF} = 180^0$, mà $\widehat{EAF} = 60^0$ nên $\widehat{EHF} = 120^0$ $\Rightarrow \widehat{BHC} = 120^0$ (đđ).

Do đó $\widehat{BHC} = \widehat{BOC} = 120^0$. Tứ giác BHOC có hai đỉnh liên tiếp H và O cùng nhìn cạnh BC dưới cùng một góc nên BHOC nội tiếp.

Dễ thấy các tam giác BON và CON là các tam giác đều, suy ra

NB = NC = NO = R.

Do đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BHOC $\Rightarrow$ NH = R.

Vì ON và AH cùng vuông góc với BC nên ON // AH $\Rightarrow \widehat{ONA} = \widehat{NAH}$ (so le trong).

ΔAON cân tại O (OA = ON = R) $\Rightarrow \widehat{ONA} = \widehat{OAN}$ $\Rightarrow$ $\widehat{OAN} = \widehat{NAH}$ $\Rightarrow$ AN là phân giác của $\widehat{OAH}$.

Ta lại có NO = NH = R nên O và H đối xứng với nhau qua AN $\Rightarrow$ AN $\perp$ OH.

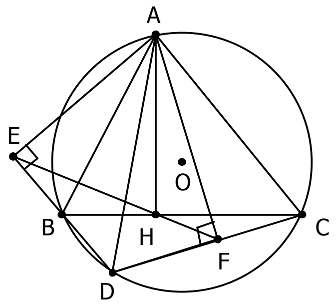
Vậy đường thẳng qua A và vuông góc với OH luôn đi qua điểm N cố định.

Ví dụ 3 : Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm D chuyển động trên cung nhỏ BC. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A đến các đường thẳng DB và DC. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Gợi ý : *Dự đoán : Giao điểm H của đường thẳng EF và cạnh BC là chân đường cao kẻ từ đỉnh A. Từ đó tìm cách chứng minh tứ giác AHBE nội tiếp.*

Hướng dẫn giải

Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC.



Vì $\widehat{AEB}+\widehat{AFB}=90^0+90^0=180^0$ nên tứ giác AEBF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{ADF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{FA}$). (1)

Ta có $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{AC}$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEH}=\widehat{ABH}$. Tứ giác AEBH có hai đỉnh liên tiếp E và B cùng nhìn cạnh AH dưới hai góc bằng nhau nên AEBH nội tiếp

Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC.

Vì $\widehat{AEB}+\widehat{AFB}=90^0+90^0=180^0$ nên tứ giác AEBF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{ADF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{FA}$). (1)

Ta có $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{AC}$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEH}=\widehat{ABH}$. Tứ giác AEBH có hai đỉnh liên tiếp E và B cùng nhìn cạnh AH dưới hai góc bằng nhau nên AEBH nội tiếp. Do đó

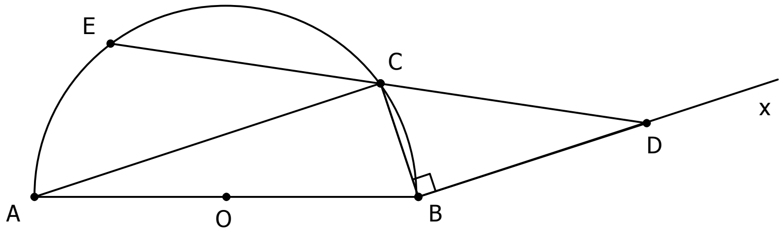
$\widehat{AEB}+\widehat{AHB}=180^0$, mà $\widehat{AEB}=90^0$ nên $\widehat{AHB}=90^0$. Vì ΔABC cố định nên điểm H cố định.

Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm H cố định.

Ví dụ 4 : Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ tia Bx vuông góc với BC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho BD = 2BC. Chứng minh rằng đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Gợi ý : *Dự đoán : Giao điểm E của đường thẳng CD và nửa đường tròn (O) là điểm cố định. Từ đó tìm cách chứng minh số đo cung AE không đổi.*

Hướng dẫn giải



Tam giác BCD vuông tại B, ta có $\tan D = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BC}{2BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BDC} = \alpha$ không đổi.

Kéo dài DC cắt đường tròn tại E. Vì $\widehat{ACB} = 90^0$ (chắn nửa đường tròn (O)), suy ra $\widehat{ACE} + \widehat{BCD} = 90^0$.

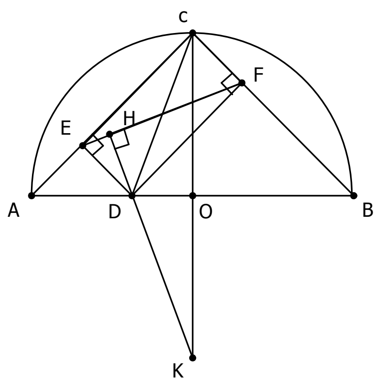
Tam giác BCD vuông tại B nên $\widehat{BCD} + \widehat{BDC} = 90^0$. Do đó $\widehat{ACE} = \alpha$, suy ra sđ $\overset{\frown}{AE} = 2\alpha$ không đổi, mà A và nửa đường tròn (O) cố định nên điểm E cố định.

Vậy đường thẳng CD luôn đi qua điểm E cố định.

Ví dụ 5 : Gọi C là điểm chính giữa cung AB của nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Điểm D chuyển động trên đường kính AB. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên CA và CB. Chứng minh đường thẳng đi qua D và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.

Gợi ý : *Dự đoán : Giao điểm K của đường thẳng đi qua D và vuông góc với EF với đường thẳng CO là điểm cố định. Nhận xét OK = OC hoặc K là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O) còn lại.*

Hướng dẫn giải



Tứ giác DECF có

$\widehat{DEC} + \widehat{DFC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác DECF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DCF} = \widehat{DEF}.$ (1)

Giả sử đường thẳng đi qua D và vuông góc với EF tại H cắt đường thẳng CO tại K.

Tam giác DEH vuông tại H

$\Rightarrow \widehat{HED} + \widehat{HDE} = 90^0.$ (2)

Tam giác DCF vuông tại F

$\Rightarrow \widehat{FCD} + \widehat{FDC} = 90^0.$ (3)

Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{FDC}.$ (4)

Ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

Vì C là điểm chính giữa cung AB nên CA = CB.

Do đó tam giác ABC vuông cân tại C, suy ra $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 45^0$.

Từ đó suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{BDF} = 45^0.$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{BDC}$, mà $\widehat{ADH} = \widehat{BDK}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{BDC} = \widehat{BDK}$. (6)

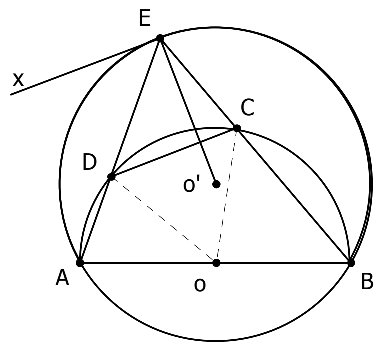
Vì C là điểm chính giữa cung AB của nửa đường tròn tâm O đường kính AB nên CK $\perp$ AB tại O. (7)

Từ (6) và (7) suy ra ΔCDK cân tại D $\Rightarrow$ DO là trung tuyến của $\Delta CDK \Rightarrow$ OK = OC. Do đó điểm K cố định. Vậy đường thẳng đi qua D và vuông góc với EF luôn đi qua điểm cố định K.

Ví dụ 6 : Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Hai điểm C và D chuyển động trên nửa đường tròn sao cho dây CD = R, D thuộc cung AC. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua E và vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.

Gợi ý : *Dự đoán : đường thẳng đi qua E và vuông góc với CD đi qua tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB. Từ đó tìm cách chứng minh đường tròn (O') cố định, tức là chứng minh $\widehat{AEB}$ không đổi.*

Hướng dẫn giải



Tam giác COD là tam giác đều (vì OC = OD = CD = R)

$\Rightarrow \widehat{COD} = 60^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{CD} = 60^0$. Góc AEB là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn $\Rightarrow \widehat{AEB} = \left(180^0 - 60^0\right) : 2 = 60^0$.

Dựng đường tròn tâm O' ngoại tiếp tam giác

AEB $\Rightarrow \widehat{AO'B} = 120^0$. Ta lại có tam giác AO’B cân tại O’ và AB cố định nên O’ cố định. Trên nửa mặt phẳng bờ AE không chứa điểm B, vẽ tia Ex $\perp$ O’E.

Ex là tia tiếp tuyến tại E của đường tròn (O’) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AEx}$ (cùng bằng nửa sđ$\overparen{AE}$). (1)

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{EDC}$ (cùng bù với góc ADC). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AEx} = \widehat{EDC}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên E*x* // CD. Do đó O’E $\perp$ CD.

Vậy đường thẳng đi qua E và vuông góc với CD luôn đi qua điểm O’ cố định.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1. Tìm và chứng minh về tập hợp điểm

Bài 1. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC cố định. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng trung điểm M của AH thuộc một đường tròn cố định.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn (O ; R). Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác đều ACE. Chứng minh rằng điểm E thuộc một đường cố định.

Bài 3. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R). Một đường thẳng quay quanh điểm A cắt đường tròn (O ; R) ở B và C. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC thuộc một đường cố định.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O’ ; r) với R > r tiếp xúc với nhau tại A. Đường thẳng đi qua A cắt (O ; R) và (O’ ; r) thứ tự ở B và C. Chứng minh rằng trung điểm M của đoạn BC thuộc một đường tròn cố định.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng, đường tròn đi qua điểm cố định

Bài 1. Cho đường tròn (O ; R) và dây AB. Điểm C chuyển động trên đường tròn (O ; R). Điểm D thuộc dây BC sao cho CD = 2BD. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua D và vuông góc với AC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB và đường thẳng d vuông với đoạn AB tại C (AC < CB). Điểm D chuyển động trên d (D khác C). Chứng minh rằng đường tròn đi qua trung điểm ba cạnh của tam giác ABD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (AB < AC). Điểm D chuyển động trên đường tròn (A ; AH) sao cho D nằm ngoài đường thẳng BC. Gọi E và F thứ tự là trung điểm của DB và DC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔDEF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD và ngoại tiếp đường tròn (I). Điểm E chuyển động trên đường tròn (I). Gọi F là điểm đối xứng với E qua I. Chứng minh đường thẳng đi qua trung điểm của các đoạn AE và DF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A và B. Một đường thẳng quay quanh A cắt các đường tròn (O) và (O’) thứ tự ở C và D. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Chủ đề 4 CỰC TRỊ HÌNH HỌC

I. KIẾN THỨC CẦN SỬ DỤNG

1. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số lượng giác.
2. Bất đẳng thức cơ bản.

II. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Tính đồng biến, nghịch biến giữa góc nhọn và các tỉ số lượng giác của nó.

– Vị trí tương đối của một điểm và đường tròn, của đường thẳng và đường tròn, của hai đường tròn.

– Liên hệ giữa đường kính và dây cung, giữa dây và khoảng cách đến tâm, giữa dây và cung

– Vận dụng các tính chất của bất đẳng thức và một số bất đẳng thức thường sử dụng trong phân môn đại số như : Bất đẳng thức Cô-si ; $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$; $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$; ...

Chú ý về điều kiện xảy ra dấu "=" của mỗi bất đẳng thức đã áp dụng.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên các cạnh AB, BC và CA lần lượt lấy các điểm K, L và M sao cho tam giác KLM vuông cân tại K. Chứng minh rằng : $\dfrac{S_{KLM}}{S_{ABC}} \geq \dfrac{1}{5}$.

Gợi ý : *Áp dụng bất đẳng thức : $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$, dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.*

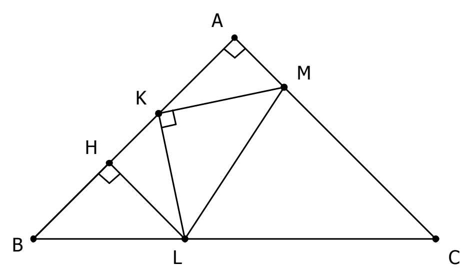
Hướng dẫn giải

Vẽ $LH \perp AB$. Dễ thấy $\Delta KLH = \Delta MKA$ (ch-gn), suy ra

$HL = AK = x$; $HK = AM = y$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên BHL cũng là tam giác vuông cân tại H

$\Rightarrow HL = HB = x$.



Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên

$$2S_{ABC} = AB^2 = (2x + y)^2 \leq \left(2^2 + 1^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = 5\left(x^2 + y^2\right)$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng :

a) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin A$;

b) $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$.

c) $\dfrac{AB^2}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B} = \dfrac{BC^2}{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C} = \dfrac{CA^2}{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}$;

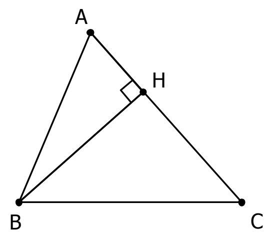
d) $AB^2 + AC^2 > BC^2$.

Gợi ý : *Áp dụng định nghĩa về tỉ số lượng giác của góc nhọn, công thức tính diện tích tam giác, tính chất của bất đẳng thức.*

Hướng dẫn giải

a) Vẽ đường cao BH của tam giác ABC.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BH$ (1)



Tam giác ABH vuông tại H, ta có BH = AB.sinA (2)

Thay (2) vào (1) ta được $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$.

b) Theo câu a) ta có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}BA.BC.\sin B = \frac{1}{2}CB.CA.\sin C$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC.CA.AB}{2S_{ABC}}$$

c) ΔABH vuông tại H, ta có cotgA = $\dfrac{AH}{BH}$. ΔBCH vuông tại H, ta có cotgC = $\dfrac{CH}{BH}$. Do đó

$$\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}C = \frac{AH}{BH} + \frac{CH}{BH} = \frac{AH + CH}{BH} = \frac{AC}{BH}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{AC}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C} \Rightarrow 2S_{ABC} = AC.BH = \frac{AC^2}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C}.$$

Vậy : $\dfrac{AB^2}{\cot g A+\cot g B}=\dfrac{BC^2}{\cot g B+\cot g C}=\dfrac{CA^2}{\cot g C+\cot g A}=2S_{ABC}$.

d) Ta có

$$\frac{AB^2}{\cot g A+\cot g B}=\frac{BC^2}{\cot g B+\cot g C}=\frac{CA^2}{\cot g C+\cot g A}$$

$$=\frac{AB^2+CA^2}{2\cot g A+\cot g B+\cot g C}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2+CA^2}{BC^2}=\frac{2\cot g A+\cot g B+\cot g C}{\cot g B+\cot g C}>1 \Rightarrow AB^2+AC^2>BC^2.$$

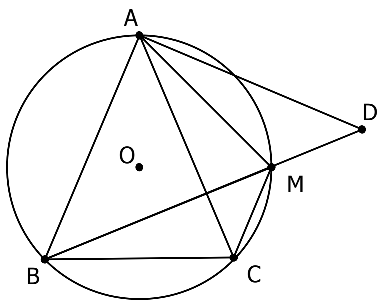
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A}<90^0$), nội tiếp đường tròn (O ; R). Điểm M chuyển động trên cung lớn BC.

Chứng minh rằng MB + MC $\le$ AB + AC, dấu "=" xảy ra khi nào ?

Gợi ý : *Tạo ra đoạn thẳng bằng tổng MB + MC hợp lí, rồi áp dụng quy tắc ba điểm.*

Hướng dẫn giải

Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho MD = MC.



Tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{ACB}$.

Ta có $\widehat{ACB}=\widehat{AMB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

Dễ thấy $\widehat{ABC}+\widehat{AMC}=180^0$;

$\widehat{AMB}+\widehat{AMD}=180^0$.

Từ đó suy ra $\Delta AMD=\Delta AMC$ (c-g-c) $\Rightarrow$ AD = AC.

Xét ba điểm A, B, D ta có : BD $\le$ AB + AD, dấu "=" xảy ra khi M trùng A.

Mà BD = MB + MD = MB + MC ; AD = AC nên MB + MC $\le$ AB + AC, dấu "=" xảy ra khi M $\equiv$ A.

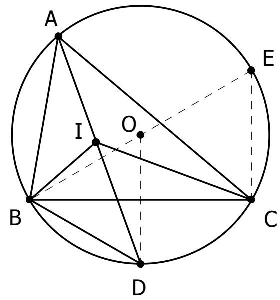
Ví dụ 4. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC = $R\sqrt{3}$. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Gọi (I ; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh IA $\le$ R, dấu "=" xảy ra khi nào ?

Gợi ý : *Áp dụng tính chất : Trong một đường tròn thì đường kính là dây cung lớn nhất.*

Hướng dẫn giải

Tia AI cắt đường tròn (O ; R) tại D. Vẽ đường kính BE của (O ; R).

Dễ thấy ΔBCE vuông tại C



$\Rightarrow \sin E = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{E} = 60^0$.

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{BEC} = 2.60^0 = 120^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^0$.

Vì (I ; r) là đường tròn nội tiếp ΔABC nên AI là phân giác của $\widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DB} =$ sđ $\overset{\frown}{DC} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{BOD} = 60^0$.

Tam giác BOD có OB = OD = R và $\widehat{BOD} = 60^0 \Rightarrow \Delta BOD$ là tam giác đều $\Rightarrow$ BD = R.

Dễ thấy $\widehat{DBI} = \widehat{DIB} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) \Rightarrow \Delta DBI$ cân tại D $\Rightarrow$ DI = DB = R.

Vì AD là dây cung của (O ; R) nên AD $\le$ 2R $\Rightarrow$ AI + DI $\le$ R $\Rightarrow$ AI $\le$ R (vì DI = R), dấu "=" xảy ra khi AD = 2R $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Dạng 2. GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Áp dụng nguyên tắc về ba điểm : "Với ba điểm A, B, M ta luôn có MA + MB $\ge$ AB, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa hai điểm A và B".

– Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng có độ dài ngắn nhất.

2. CÁC VÍ DỤ

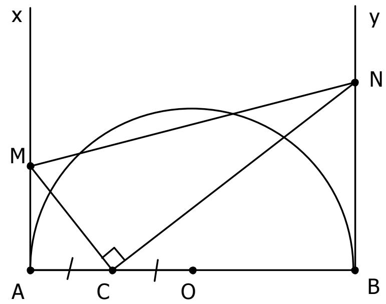
Ví dụ 1. Cho nửa đường tròn O đường kính AB = 2R. Gọi C là trung điểm của OA. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tia tiếp tuyến Ax và By. Các điểm M và N lần lượt chuyển động trên các tia Ax và By sao cho $\widehat{MCN} = 90^0$. Xác định vị trí của các điểm M và N để diện tích tam giác MCN đạt giá trị nhỏ nhất.

Gợi ý : *Áp dụng điều kiện xảy ra dấu "=" trong bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, khi biết tổng hoặc tích của chúng không đổi.*

Hướng dẫn giải

Vì Ax và By là các tia tiếp tuyến của (O) đường kính AB nên

Ax ⊥ AB ; By ⊥ AB.



Ta có $\widehat{ACM} + \widehat{BCN} = 90^0$ (vì $\widehat{MCN} = 90^0$).

ΔACM vuông tại A $\Rightarrow \widehat{ACM} + \widehat{AMC} = 90^0$.

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{BCN} \Rightarrow \Delta ACM \quad \Delta BNC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{BC}{NC}$ (1).

ΔMCN vuông tại C nên

$$S_{MCN} = \frac{1}{2}CM.CN = \frac{1}{2}CA.CB.\frac{1}{\dfrac{CA}{CM}.\dfrac{CB}{CN}} \qquad (*)$$

Ta lại có : $\dfrac{CA}{CM}.\dfrac{CB}{CN} \le \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{CA}{CM}\right)^2 + \left(\dfrac{CB}{CN}\right)^2\right]$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{CA}{CM}.\frac{CB}{CN} \le \frac{1}{2}\left[\left(\frac{CA}{CM}\right)^2 + \left(\frac{AM}{CM}\right)^2\right] = \frac{1}{2}$$

(vì $CA^2 + AM^2 = CM^2$).

Từ (*) ta có $S_{MCN} \geq CA.CB = \frac{R}{2}.\frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$, dấu “=” xảy ra khi $\frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN}$; $\frac{AM}{CM} = \frac{CB}{CN} \Leftrightarrow AM = CA$.

Vậy S_{MCN} đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3R^2}{4}$ đạt được khi AM = AC = $\frac{R}{2}$ và BN = BC = $\frac{3R}{2}$.

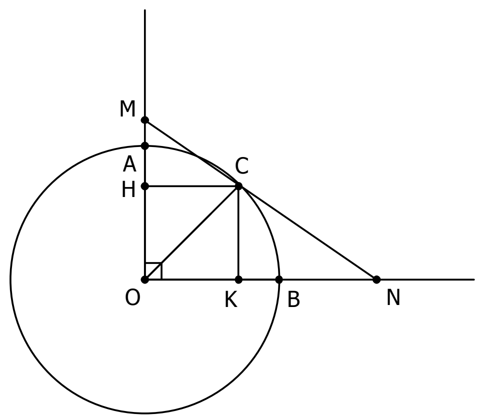
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O ; R) và hai bán kính OA, OB vuông góc với nhau. Điểm C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Đường thẳng d đi qua điểm C cắt các tia OA và OB lần lượt tại M và N. Xác định vị trí của đường thẳng d để độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất.

Gợi ý : *Áp dụng điều kiện xảy ra dấu “=” trong bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, khi biết tổng hoặc tích của chúng không đổi.*

Hướng dẫn giải

Vẽ CH // OB (M $\in$ tia OA) ;

CK // OA (K $\in$ tia OB).



Vì C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB nên $\widehat{COA} = \widehat{COB} = 45^0$ (vì $\widehat{AOB} = 90^0$).

Dễ thấy CH = HO = OK = CK = $\frac{R}{\sqrt{2}}$; MH = x ; NK = y.

Dễ thấy $\Delta MHC \quad \Delta CKN$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{MH}{CK} = \frac{CH}{NK}$

$\Rightarrow MH.NK = CH.CK \Rightarrow xy = \frac{R^2}{2}$ (không đổi)

Tam giác OMN vuông tại O, ta có :

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}} + x\right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}} + y\right)^2 \geq 2\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + x\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + y\right)$$

$$= 2\left[R^2 + \frac{R}{\sqrt{2}}(x + y)\right] \geq 4R^2$$

$\Rightarrow MN \geq 2R$, đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow$ d $\perp$ OC tại C.

Vậy : $min\,MN = 2R$ khi và chỉ khi d $\perp$ OC tại C.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Điểm D chuyển động trên cạnh BC. Trên các cạnh AB, AC thứ tự lấy các điểm E, F sao cho DE // AC và DF // AB. Xác định vị trí điểm D để :

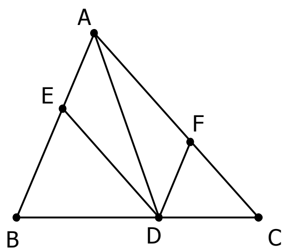
a) Tứ giác AEDF là hình thoi.

b) Diện tích tứ giác AEDF đạt giá trị lớn nhất.

Gợi ý : *Áp dụng điều kiện xảy ra dấu "=" trong bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$, khi biết $x + y$ không đổi hoặc tổng $x^2 + y^2$ không đổi.*

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy AEDF là hình bình hành. Hình bình hành AEDF là hình thoi $\Leftrightarrow$ AD là phân giác của góc BAC. Vậy khi D là giao điểm của tia phân giác góc BAC và cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình thoi.



b) Đặt AB = a ; AC = b ; DF = x ; DE = y.

Ta có $S_{AEDF} + S_{BED} + S_{CFD} = S_{ABC}$.

Vì S_{ABC} không đổi nên S_{AEDF} lớn nhất khi $S_{BED} + S_{CDF}$ nhỏ nhất.

Đặt $S_{ABC} = S$; $S_{BED} = S_1$; $S_{CDF} = S_2$.

Vì DF // AB nên $\Delta BED \quad \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{S_1}{S} = \left(\dfrac{BD}{BC}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{S_1}{S}} = \dfrac{BD}{BC}$; Tương tự $\sqrt{\dfrac{S_2}{S}} = \dfrac{CD}{BC}$.

Do đó $\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}=1 \Rightarrow \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$.

Ta lại có $2\left(S_1+S_2\right) \geq \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$ nên $S_1+S_2 \geq \frac{S}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{S_1}=\sqrt{S_2} \Leftrightarrow S_1=S_2 \Leftrightarrow DB=DC \Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC.

Như vậy S_{AEDF} lớn nhất bằng nửa S_{ABC} đạt được khi D là trung điểm của BC.

Ví dụ 4. Cho góc nhọn xOy và điểm M nằm trong góc xOy. Một đường thẳng d đi qua M cắt Ox và Oy lần lượt tại A và B.

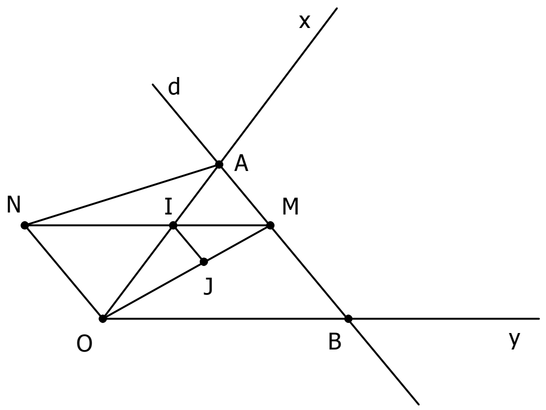
Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho tổng $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}$ đạt giá trị lớn nhất.

Gợi ý : *Áp dụng tính chất : "Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng có độ dài ngắn nhất".*

Hướng dẫn giải

Dựng hình bình hành OBMN. Gọi I là giao điểm của MN và Ox. Từ giả thiết suy ra I là điểm cố định.

Vẽ IJ // d (với J $\in$ OM). Từ hình thang OMAN, áp dụng định lí Ta-lét ta được $\frac{1}{MA}+\frac{1}{ON}=\frac{1}{IJ}$.



Vì OBMN là hình bình hành nên ON = MB.

Do đó $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{IJ}$.

Tổng $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow IJ$ đạt giá trị nhỏ nhất

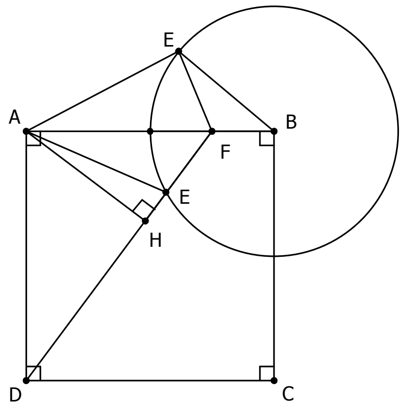
$\Leftrightarrow IJ \perp OM \Leftrightarrow d \perp OM$.

Ví dụ 5. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 2a. Vẽ đường tròn tâm B bán kính bằng a. Tìm điểm E trên đường tròn sao cho EA + 2ED đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị nhỏ nhất đó theo a.

Gợi ý : Áp dụng nguyên tắc về ba điểm : "Với ba điểm A, B, M ta luôn có MA + MB ≥ AB, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa hai điểm A và B".

Hướng dẫn giải

Gọi E là một điểm thuộc đường tròn (B ; a).



Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho BF = $\frac{a}{2}$.

Xét ΔBEF và ΔBAE có : $\widehat{ABE}$ là góc chung và $\frac{BF}{BE} = \frac{BE}{BA}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$).

Do đó $\Delta BEF \backsim \Delta BAE$ (c-g-c)

$\Rightarrow \frac{EF}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow AE = 2EF$.

Do đó EA + 2ED = 2EF + 2ED

= 2(EF + ED) ≤ DF, đẳng thức xảy ra khi E nằm giữa D và F, suy ra E là giao điểm của DF và đường tròn (B ; a).

Điều này luôn xảy ra, vì BF = $\frac{a}{2}$ < a ; BD = 2a$\sqrt{2}$ nên

F nằm trong còn D thì nằm ngoài đường tròn (B ; a),

do đó DF luôn cắt đường tròn (B ; a).

Tam giác ADF vuông tại A nên

$$DF^2 = (2a)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{25a^2}{4} \Rightarrow DF = \frac{5a}{2} = 2,5a .$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng EA + 2ED bằng 2,5a.

Ví dụ 6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Điểm M chuyển động trên nửa đường tròn (M khác A và B). Qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax và By lần lượt ở C và D.

Xác định vị trí của điểm M trong mỗi trường hợp sau :

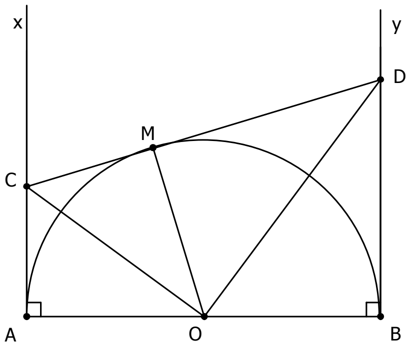
a) Diện tích tứ giác ABDC có giá trị nhỏ nhất, tính giá trị lớn nhất đó theo R.

b) Chu vi tứ giác ABDC có giá trị nhỏ nhất, tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.

c) Chu vi tam giác COD có giá trị nhỏ nhất, tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.

Gợi ý : *Áp dụng điều kiện xảy ra dấu "=" trong bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, khi biết tích của chúng không đổi.*

Hướng dẫn giải



a) Vì Ax và By cùng vuông góc với đường kính AB nên Ax và By là các tia tiếp tuyến của đường tròn (O).

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có : OC là phân giác của góc AOM ; OD là phân giác của góc MOB.

Mà hai góc AOM và MOB kề bù nên $\widehat{COD} = 90^0$.

Vì CD là tiếp tuyến và M là tiếp điểm nên OM $\perp$ CD.

Tam giác COD vuông tại O, đường cao OM, ta có : CM.DM = $OM^2 = R^2$. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có CA = CM ; DB = DM

$\Rightarrow$ AC.BD = R^2.

Tứ giác ABDC có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$ nên ABDC là hình thang vuông. Suy ra

$$S_{ABDC} = \frac{(AC + BD)AB}{2} = (AC + BD)R.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương AC và BD ta được $AC + BD \geq 2\sqrt{AC.BD} = 2\sqrt{R^2} = 2R.$

Đẳng thức xảy ra khi AC = BD và AC.BD = R^2 $\Leftrightarrow$ AC = BD = R $\Leftrightarrow$ MC = MD = R $\Leftrightarrow$ $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$. Do đó $S_{ABDC} = (AC + BD)R \geq 2R^2$, đẳng thức xảy ra khi $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$.

Vậy *min*$S_{ABCD} = 2R^2$ đạt được khi $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$.

b) Kí hiệu C_{ABCD} là chu vi của tứ giác ABDC ta có :

$$C_{ABCD} = AB + BD + DC + CA = 2R + BD + (CM + DM) + CA$$
$$= 2R + 2(AC + BD).$$

Theo câu a) ta có $AC + BD \geq 2\sqrt{AC.BD} = 2\sqrt{R^2} = 2R$, đẳng thức xảy ra khi $\overparen{MA} = \overparen{MB}$.

Do đó $C_{ABCD} \geq$ 2R + 2.2R = 6R, đẳng thức xảy ra khi $\overparen{MA} = \overparen{MB}$.

Vậy *min*C_{ABCD} = 6R đạt được khi $\overparen{MA} = \overparen{MB}$.

c) Kí hiệu C_{COD} là chu vi của tam giác COD ta có :

C_{COD} = OC + OD + CD = (OC + OD) + (CM + DM)

= (OC + OD) + (AC + BD).

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si : $OC + OD \geq 2\sqrt{OC.OD}$, dấu "=" xảy ra khi

OC = OD $\Leftrightarrow$ $\overparen{MA} = \overparen{MB}$.

ΔCOD vuông tại O, đường cao OM, ta có :

OC.OD = OM.CD = R(CM + DM) = R(AC + BD).

Do đó $C_{COD} \geq$ $2\sqrt{R\left(AC + BD\right)} + \left(AC + BD\right)$.

Theo câu a) ta có $AC + BD \geq 2\sqrt{AC.BD} = 2\sqrt{R^2} = 2R$, đẳng thức xảy ra khi $\overparen{MA} = \overparen{MB}$.

Do đó $C_{COD} \geq$ $2\sqrt{R.2R} + 2R = \left(2\sqrt{2} + 2\right)R$, đẳng thức xảy ra khi $\overparen{MA} = \overparen{MB}$.

Vậy *min*C_{COD} = $\left(2\sqrt{2} + 2\right)R$, đạt được khi $\overparen{MA} = \overparen{MB}$.

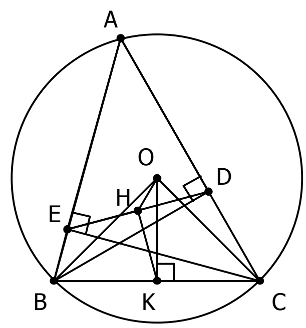
Ví dụ 7. Cho đường tròn (O ; R) dây BC = $R\sqrt{2}$ cố định. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Kẻ các đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi H là trung điểm của đoạn DE. Xác định vị trí của điểm A để OH có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất đó theo R.

Gợi ý : *Áp dụng liên hệ giữa dây và khoảng cách từ dây đến tâm.*

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lí Pi-ta-go đảo ta được $\triangle BOC$ vuông tại O.

Do đó $\widehat{BAC} = 45^0$. Tứ giác BCDE nội tiếp, suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ (cùng bù với $\widehat{CDE}$) $\Rightarrow \Delta ADE \quad \Delta ABC$ (g-g)



$\Rightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \cos A \Rightarrow DE = R\sqrt{2}.\cos s45^0 = R$.

Kẻ OK $\perp$ BC $\Rightarrow$ KB = KC

$\Rightarrow$ KH $\perp$ DE $\Rightarrow OK = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$; $KH = \dfrac{R}{2}$.

Áp dụng quy tắc ba điểm ta có : OK $\le$ OH + KH

$\Leftrightarrow$ OH $\ge \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)R}{2}$, dấu "=" xảy ra khi H $\in$ OK.

Vậy minOH = $\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)R}{2}$ đạt được khi H $\in$ OK $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung lớn AB.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1. Bất đẳng thức hình học

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = h, ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{h}{r} \le 1+\sqrt{2}$, đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Điểm D chuyển động trên đường tròn (O ; R). Chứng minh bất đẳng thức DB + DC $\le$ 2R$\sqrt{3}$, đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD, trực tâm H. Chứng minh rằng :

a) $\tan B.\tan C = \dfrac{AD}{HD}$ b) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$.

c) $\tan A.\tan B.\tan C \ge 3\sqrt{3}$, đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 4. Cho tam giác ABC. Điểm D chuyển động trên cạnh BC. Trên các cạnh AB, AC thứ tự lấy các điểm E, F sao cho DE // AC và DF // AB. Xác định vị trí điểm D để diện tích tứ giác AEDF đạt giá trị lớn nhất.

Dạng 2. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của đại lượng hình học

Bài 1. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a. Gọi O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB và AC lấy các điểm D và E sao cho $\widehat{DOE} = 60^0$.

a) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng DE theo a.

b) Xác định vị trí của các điểm D và E để diện tích tam giác DOE đạt giá trị nhỏ nhất và tính diện tích nhỏ nhất đó theo a.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Vẽ dây CD song song với AB. Gọi K và H thứ tự là hình chiếu của C và D lên đường kính AB. Xác định vị trí của dây CD để :

a) Tứ giác CDHK là hình vuông.

b) Diện tích tứ giác CDHK bằng nửa diện tích của nửa hình tròn (O ; R).

Bài 3. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R) sao cho OA = 1,5R. Vẽ cát tuyến ABC của đường tròn (B nằm giữa A và C). Xác định vị trí của cát tuyến ABC để :

a) Điểm B là trung điểm của AC và tính độ dài AC theo R trong trường hợp này.

b) Diện tích tam giác AOB gấp đôi diện tích tam giác BOC.

Một số bài tập tổng hợp thường gặp trong các đề thi

Bài 1. Cho đường tròn (O ; R). Hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm E thuộc cung nhỏ BC, điểm F thuộc cung nhỏ BD sao cho EF = $R\sqrt{2}$. Dây AE cắt CD và BC thứ tự ở M và N ; Dây AF cắt CD và BD thứ tự ở P và Q.

a) Tính số đo của góc EAF.

b) Chứng minh tứ giác MNQP nội tiếp được đường tròn.

c) Chứng minh rằng NQ song song với EF.

d) Tính chu vi tam giác BNQ theo R.

e) Xác định vị trí của dây EF để diện tích tam giác BNQ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Dây CD chuyển động trên nửa đường tròn sao cho CD = $R\sqrt{3}$ và D thuộc cung AC. Gọi E là giao điểm của AD và BC.

a) Tính số đo của góc AEB.

b) Gọi F là giao điểm của AC và BD. Tính độ dài đoạn EF theo R.

c) Xác định vị trí của dây CD để diện tích tứ giác ABCD có giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo R.

d) Chứng minh rằng điểm F thuộc một cung tròn cố định.

e) Chứng minh đường thẳng đi qua E, vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định

Bài 3. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R) sao cho OA = 2R. Vẽ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Điểm M chuyển động trên cung nhỏ BC. Qua M vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt AB, AC thứ tự ở D và E.

a) Tính số đo của góc DOE.

b) Tính chu vi tam giác ADE theo R.

c) Giả sử BC cắt OD, OE thứ tự ở P, Q. Chứng minh tứ giác DEQP nội tiếp.

d) Chứng minh rằng DE = 2PQ và ba đường thẳng OM, DQ, EP đồng quy.

e) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác ADE đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 4. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Các điểm E và F chuyển động trên đoạn AD sao cho $\widehat{EBA} = \widehat{FBC}$ (E nằm giữa A và F). Vẽ các đường tròn (O_1) và (O_2) thứ tự ngoại tiếp các tam giác AEB và AFC. Tia CE cắt đường tròn (O_1) tại M ; Tia BF cắt đường tròn (O_2) tại N. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác BMNC nội tiếp. Từ đó suy ra $MN.\sin\frac{\widehat{BAC}}{2} \le BC$;

b) Ba điểm A, M, N thẳng hàng ;

c) $\widehat{ECA} = \widehat{FCB}$;

d) Tích BE.BN không đổi.

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC). Vẽ đường tròn tâm O đi qua B và tiếp xúc với AC tại A. Vẽ đường tròn tâm O' đi qua C và tiếp xúc với AB tại A. Gọi M là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R').

a) Chứng minh đẳng thức $MA^2 = MB.MC$.

b) Gọi K là trung điểm của OO'. Gọi I là điểm đối xứng của A qua trung điểm K của OO'. Tứ giác OMIO' là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d) Chứng minh tứ giác BMIC nội tiếp.

e) Giả sử $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính diện tích tứ giác OMIO' theo a, biết R = a và R' = 2a.

Bài 6. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC < 2R. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng các tứ giác AEHF và BCEF nội tiếp.

b) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC bằng R.

c) Gọi K là giao điểm của BE và DF. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF. Từ đó suy ra BE.HK = BK.HE.

d) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) ở M và N. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác cân. Từ đó suy ra $AM^2 = AN^2 = AH.AD$.

e) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 7. Cho đường tròn (O ; R) và dây BC < 2R. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Các đường trung tuyến BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại G. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng tứ giác ADOE nội tiếp.

b) Kẻ đường kính AK của (O). Chứng minh HK đi qua trung điểm F của BC.

c) Chứng minh rằng đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định.

d) Chứng minh rằng điểm G thuộc một đường tròn cố định.

e) Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{AB^2 - AC^2}{GB^2 - GC^2}$.

Bài 8. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R). Vẽ các tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Một cát tuyến quay quanh A cắt đường tròn (O) ở D và E (D nằm giữa A, E). Các tiếp tuyến tại D và E của đường tròn (O) cắt nhau ở F.

a) Chứng minh rằng tích AD.AE không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến ADE.

b) Chứng minh đẳng thức $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE}$.

c) Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh tứ giác DHOE nội tiếp.

d) Chứng minh ba điểm B, C, F thẳng hàng.

e) Chứng minh đẳng thức $\dfrac{BD}{BE} = \sqrt{\dfrac{HD}{HE}}$.

Bài 9. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) với R > r, ở ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD (A,C $\in$ (O ; R) ; B,D $\in$ (O' ; r)). Vẽ các tiếp tuyến chung trong EF và GH (E,G $\in$ (O ; R) ; F,H $\in$ (O' ; r)). Tiếp tuyến AB cắt các tiếp tuyến EF và GH thứ tự tại M, N. Tiếp tuyến CD cắt các tiếp tuyến EF và GH thứ tự tại P, Q.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng EF, GH và OO' đồng quy tại K.

b) Chứng minh rằng 6 điểm M, N, P, Q, O, O' cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử OO' = 2(R + r). Tính độ dài đoạn thẳng MN theo R và r.

d) Gọi I là giao điểm của BH và OO'. Chứng minh ba điểm A, I, G thẳng hàng.

Bài 10. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R) sao cho OA = 2R. Vẽ các tia tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B,C là các tiếp điểm). Điểm D chuyển động trên cung nhỏ BC. Gọi E, F, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D trên các cạnh AB, BC, CA.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BEDF và CGDF nội tiếp.

b) Chứng minh đẳng thức $DF^2 = DE.DG$.

c) Tính tổng DE + DF + DG theo R.

d) Gọi M là giao điểm của BD và EF ; Gọi N là giao điểm của CD và FG. Chứng minh rằng MN song song với BC và MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác DME và DNG.

e) Xác định vị trí điểm D trên cung nhỏ BC để tích BE.CG đạt giá trị lớn nhất.

f) Chứng minh bất đẳng thức $S_{FEG} \geq \frac{3\sqrt{3}.DF^2}{4}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi (O ; r), (O_1 ; r_1), (O_2 ; r_2) thứ tự là các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC, ABH, ACH và lần lượt tiếp xúc với cạnh AB ở D và BC ở E, F.

a) Chứng minh rằng AH = r + r_1 + r_2.

b) Chứng minh rằng $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

c) Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác AO_1O_2.

d) Đường thẳng O_1O_2 cắt các cạnh AB, AC thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng các tứ giác BMO_1H, CNO_2H và BO_1O_2C nội tiếp.

e) Tính diện tích các tam giác AMN, OO_1O_2, ABC, biết $r_1 = 3\sqrt{2}$ cm ; $r_2 = 4\sqrt{2}$ cm.

Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 120^0$, BC = $2\sqrt{3}$ cm. Điểm D chuyển động trên cạnh BC. Vẽ đường tròn (O ; R) đi qua D và tiếp xúc với AB tại B. Vẽ đường tròn (O' ; R') đi qua D và tiếp xúc với AC tại C. Gọi E là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O').

1) Chứng minh rằng :

a) Tứ giác ABEC nội tiếp.

b) Đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

c) $\frac{\sqrt{3}}{ED} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EC}$.

2) Tính tổng R + R'.

3) Xác định vị trí của điểm D để DE có độ dài lớn nhất. Tính độ dài lớn nhất đó.

Bài 13. Cho ba đường tròn (O_1 ; 1cm), (O_2 ; 2cm), (O_3 ; 3cm) sao cho (O_1 ; 1cm) và (O_2 ; 2cm) tiếp xúc ngoài tại A ; (O_2 ; 2cm) và (O_3 ; 3cm) tiếp xúc ngoài tại B ; (O_3 ; 3cm) và (O_1 ; 1cm) tiếp xúc ngoài tại C.

a) Tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác gì ? Vì sao ?

b) Tính diện tích của tam giác ABC.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔABC là đường tròn nội tiếp $\Delta O_1O_2O_3$.

d) Chứng minh rằng ba đường thẳng AO_3 ; BO_1 ; CO_2 đồng quy.

Bài 14. Cho đường tròn (O ; R), dây BC = $R\sqrt{3}$, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC luôn là tam giác nhọn. Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng 4 điểm B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính AP của đường tròn (O). Chứng minh rằng 3 điểm H, I, P thẳng hàng.

c) Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Tứ giác AOKH là hình gì ? Vì sao ?

d) Đường thẳng OH cắt các cạnh AB, AC thứ tự ở M, N. Tam giác AMN là tam giác gì ?

e) Xác định vị trí điểm A để BM + CN đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R.

GỢI Ý - HƯỚNG DẪN GIẢI PHẦN HÌNH HỌC

Chủ đề 1. TÍNH TOÁN CÁC ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc

Bài 1. Về phía ngoài hình vuông ABCD, dựng tam giác BKC bằng tam giác BIA. Áp dụng định lí Pi-ta-go đảo chứng minh tam giác IKC là tam giác vuông.

Đáp số : $\widehat{AIB} = 135^0$.

Bài 2. Áp dụng tính chất của góc nội tiếp, tam giác đồng dạng.

Đáp số : $\widehat{MJI} = 90^0$.

Bài 3. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, tỉ số lượng giác của góc nhọn, quy trình ấn phím tính số đo góc khi biết tỉ số lượng giác của nó.

Đáp số : $\widehat{B} \approx 52^0$; $\widehat{C} \approx 38^0$.

Bài 4. Chứng minh $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$, rồi áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn.

Đáp số : $\widehat{BAC} = 60^0$

Bài 5. Áp dụng tính chất tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, các công thức $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt.

Đáp số : a) $\alpha = 45^0$; b) $\alpha = 45^0$;

c) $\alpha = 45^0$, $\alpha = 60^0$; d) $\alpha = 30^0$.

Dạng 2. Tính độ dài đoạn thẳng ; tính giá trị của biểu thức

Bài 1. Áp dụng tính chất của tam giác đều, nửa tam giác đều, định lí Pi-ta-go, tỉ số lượng giác của góc nhọn, tam giác đồng dạng, tam giác bằng nhau.

Đáp số : $\dfrac{3R}{4}$.

Bài 2. Áp dụng tính chất về diện tích, tính chất tam giác đều, hình thang cân , hình bình hành, định lí Pi-ta-go.

Đáp số : $MD + ME + MF = \frac{3R}{2}$; $AF + BD + CE = \frac{3R\sqrt{3}}{2}$;

$$\frac{MD + ME + MF}{AF + BD + CE} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 3. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AE cắt đường thẳng DC tại G, áp dụng tính chất của hình vuông, tam giác bằng nhau, hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Đặt $AE = x$ thì được phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 1$.

Đáp số : $x = \frac{\sqrt{5 + 4\sqrt{2}} - 1}{2}$.

Bài 4. a) Kẻ OH vuông góc với OB. Áp dụng định lí Pi-ta-go, tính chất của hình chữ nhật, tính chất đoạn nối tâm của hai đường tròn tiếp xúc, tính chất của tiếp tuyến.

Đáp số : $BC = 2\sqrt{Rr}$.

b) Kẻ AK vuông góc với BC thì AK chính là khoảng cách từ A đến BC. Gọi E là giao điểm của AK và HO’, áp dụng định lí Ta-lét.

Đáp số : $AK = \frac{2Rr}{R + r}$.

c) Áp dụng định lí Ta-lét.

Đáp số : $DO = \frac{R(R + r)}{R - r}$.

Dạng 3. Tính chu vi đa giác, chu vi đường tròn. Tính diện tích đa giác, tính diện tích hình tròn

Bài 1. a) Áp dụng tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, tính chất của góc nội tiếp, tam giác vuông cân, nủa tam giác đều, định lí Pi-ta-go.

Đáp số : $AB = \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)R}{2}$.

b) Áp dụng công thức tính diện tích $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A$.

Đáp số : $S_{ABCD} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)R^2}{4}$.

c) Áp dụng công thức tính độ dài cung $l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi Rn}{180^0}$.

Đáp số : $l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi R.30^0}{180^0} = \frac{\pi R^2}{6}$.

Bài 2. Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác, định lí Pi-ta-go, hệ thức lượng trong tam giác vuông, công thức tính diện tích tam giác.

Đáp số : $C_{ABC} = \left(6+3\sqrt{2}+3\sqrt{6}\right)a$; $S_{ABC} = 9\sqrt{2}.a^2$.

Bài 3. Áp dụng công thức tính diện tích tam giác $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, trong đó a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác, $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác. Chú ý rằng bốn trung điểm của bốn cạnh của tứ giác tạo thành một hình bình hành.

Chủ đề 2. Chứng minh các yếu tố hình học, quan hệ hình học

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau

Bài 1. Áp dụng tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, tam giác đồng dạng.

Bài 2. a) Áp dụng tính chất đường kính vuông góc với dây cung, tam giác đồng dạng.

b) Áp dụng tính chất của tứ giác nội tiếp, tính chất, dấu hiệu nhận biết tam giác cân.

Bài 3. a) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, hệ thức lượng trong tam giác vuông, tam giác đồng dạng.

b) Áp dụng công thức $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Bài 4. Qua A kẻ tiếp tuyến chung trong của (O) và (O') cắt CD tại F. Áp dụng tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

Bài 5. Áp dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, tính chất của góc nội tiếp.

Dạng 2. Chứng minh quan hệ vuông góc, quan hệ song song

Bài 1. a) Gọi H là giao điểm của AD và EF. Chứng minh $\widehat{AHE} = 90^0$ bằng cách áp dụng tính chất góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

b) Áp dụng tam giác bằng nhau, dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.

Bài 2. Áp dụng quan hệ từ vuông góc đến song song.

Bài 3. a) Áp dụng tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù.

b) Áp dụng định lí Ta-lét đảo.

Bài 4. Áp dụng dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.

Cần chứng minh MB = MD, sau đó gọi P là trung điểm của AD.

Dạng 3. Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn

Bài 1. Áp dụng tính chất : "Hình thang cân là tứ giác nội tiếp".

Bài 2. Áp dụng định nghĩa đường tròn hay nhiều điểm cách đều một điểm.

Bài 3. Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

Bài 4. Hai đỉnh liên tiếp của tứ giác cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

Hay "Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E có EA.EC = EB.ED".

Bài 5. Hai đỉnh liên tiếp của tứ giác cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

Hay "Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E có EA.EC = EB.ED".

Dạng 4. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

Bài 1. Chứng minh D, A, E thẳng hàng và OA vuông góc với DE.

Bài 2. Chứng minh HE $\perp$ OE hay chứng minh $\widehat{HEO} = 90^0$.

Bài 3. Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$.

Bài 4. Kẻ OH $\perp$ EF ; OK $\perp$ CD. Chứng minh OH = OK.

Bài 5. Chứng minh $\widehat{DIB} = \widehat{ICB}$.

Dạng 5. Chứng minh đẳng thức hình học

Bài 1. a) Vẽ đường kính BD. Áp dụng góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, tỉ số lượng giác của góc nhọn.

b) Áp dụng công thức tính diện tích tam giác và kết quả ở câu a).

c) Áp dụng công thức tính diện tích tam giác S = pr (p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác) và kết quả ở câu b).

Bài 2. a) Áp dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đồng dạng.

b) Áp dụng tam giác đồng dạng, định lí Pi-ta-go và biến đổi các đẳng thức một cách hợp lí.

Bài 3. a) Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn và tam giác đồng dạng.

b) Vẽ các đường cao BE, CF.

Áp dụng kết quả câu a) và đẳng thức $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = 1$.

Dạng 6. Chứng minh nhiều điểm thẳng hàng, nhiều đường đồng quy

Bài 1. a) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng MP và OO'. Áp dụng tính chất của tiếp tuyến, định lí Ta-lét tính được $FO = \dfrac{dR}{R-r}$ (trong đó d = OO').

Gọi F' là giao điểm của hai đường thẳng NQ và OO', tương tự

$F'O = \dfrac{dR}{R-r} \Rightarrow$ đpcm.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB và MP. Áp dụng tam giác đồng dạng để chứng minh IA = IB, tính chất đường nối tâm của hai đường tròn cắt nhau, tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, tính chất của tam giác cân, tính chất qua một điểm cho trước có duy nhất đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Bài 2. a) Áp dụng tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến, tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, tính chất của tam giác cân, tam giác vuông, định lí Ta-lét.

b) Kéo dài AD cắt đường thẳng BF tại G. Áp dụng tính chất hai góc đối đỉnh, dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song, định lí Ta-lét, tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền, tính chất tam giác cân, tính chất hai đường thẳng song song, Tiên đề Ơ-clít.

Bài 3. Gọi O_1 ; O_2 ; O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều ABD, BCE, CAF. Gọi M là giao điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Áp dụng tính chất của tam giác đều, tính chất của tứ giác nội tiếp, dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.

Bài 4. Áp dụng tính chất của góc nội tiếp, tính chất tia phân giác của một góc, tính chất của tứ giác nội tiếp, dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp để chứng minh $\widehat{CMN} = \widehat{EMA}$, suy ra hai tia MA và MN trùng nhau.

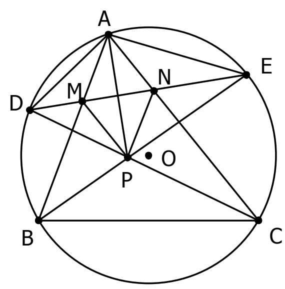
Bài 5. a) Áp dụng đường trung bình tam giác, tính chất hình bình bình hành.

b) Áp dụng định lí Ta-lét, tính chất trọng tâm của tam giác.

Bài 6. Vận dụng tính chất hai đường chéo của hình bình hành.

Dạng 7. Chứng minh tam giác, tứ giác đặc biệt

Bài 1. a) Ta có $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DB}$; $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{EC}$



$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{PDE}$; $\widehat{AED} = \widehat{PED}$

Do đó $\Delta ADE = \Delta PDE$ (g-c-g)

$\Rightarrow$ DA = DP ; EA = EP.

$\Rightarrow$ DE là trung trực của AP (1)

Dễ thấy BE và CD thứ tự là phân giác của các góc $\widehat{ABC}$; $\widehat{ACB}$ $\Rightarrow$ AP là phân giác của $\widehat{BAC}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tam giác AMN cân tại A.

b) Tam giác AMN cân tại A có AP là phân giác $\widehat{MAN}$ nên AP là trung trực của MN.

Ta lại có DE (hay MN) là trung trực của AP. Do đó tứ giác AMPN là hình thoi.

Bài 2. Cần chứng minh BCDK là hình thang nội tiếp đường tròn.

Như vậy chỉ cần chứng minh BK // CD hay BK $\perp$ AB.

Bài 3. Vì M, N, P, Q thứ tự là trung điểm của AD, DC, CB, BA nên dễ dàng chứng minh được MNPQ là hình bình hành. Hình bình hành MNPQ là hình vuông khi và chỉ khi OM = OP và $\widehat{MOP} = 90^0$

$\Leftrightarrow AC = BD$; $AC \perp BD$.

Từ đó tính được $AC = BD = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)R}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)R^2}{2}$.

Chủ đề 3. Tập hợp điểm

Dạng 1. Tìm và chứng minh về tập hợp điểm

Bài 1. Gọi K là trung điểm của BC $\Rightarrow$ K cố định. Cần chứng minh KM = R $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 2. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, dựng tam giác đều ABF, suy ra F cố định. Cần chứng minh $\widehat{AEF} = 90^0$, từ đó suy ra đpcm.

Chú ý : Bạn đọc hãy xét bài toán trên trong các trường hợp sau : Tam giác ACE vuông cân tại E hoặc vuông cân tại A hoặc vuông cân tại C hoặc tam giác ACE cân tại E và có $\widehat{E} = \alpha$ không đổi.

Bài 3. Dựng đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác BOC cắt OA tại D. Cần chứng minh D cố định, suy ra O' cách đều hai điểm cố định O và D $\Rightarrow$ O' thuộc đường trung trực của OD.

Bài 4. Xét hai trường hợp : Tiếp xúc ngoài ; Tiếp xúc trong.

Gọi I là trung điểm của OO'. Hãy chứng minh điểm I cố định và IM có độ dài không đổi.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng, đường tròn đi qua điểm cố định

Bài 1. Vẽ đường kính AE của đường tròn (O ; R). Gọi F là giao điểm của BF với đường thẳng đi qua D và vuông góc với AC. Cần chứng minh điểm F cố định.

Bài 2. Chứng minh điểm C thuộc đường tròn đi qua trung điểm ba cạnh của tam giác ABD, tức là quy về việc chứng minh tứ giác nội tiếp.

Bài 3. Dự đoán đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua điểm H. Ta cần chứng minh tứ giác DEHF nội tiếp. Hãy dựng hình bình hành DHCG, rồi chứng minh $\Delta DHG \quad \Delta HBD$ (c-g-c).

Bài 4. Dự đoán đường thẳng đi qua trung điểm của các đoạn thẳng AE và DF đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI. Hãy vận dụng tính chất hai đường chéo của hình bình hành.

Bài 5. Giả sử đường trung trực của đoạn thẳng CD đi qua điểm E. Dự đoán tứ giác AOEO' là hình bình hành. Từ đó dựng điểm E, rồi chứng minh tam giác CED cân tại E, bằng cách từ O, E, O' kẻ các đường vuông góc với CD và vận dụng tính chất của hình bình hành, suy ra đpcm.

Chủ đề 4. Cực trị hình học

Dạng 1. Bất đẳng thức hình học

Bài 1. Kẻ ID $\perp$ BC, IE $\perp$ AC $\Rightarrow$ ID = IE = r. Ta có AH $\leq$ AI + ID, dấu "=" xảy ra khi I $\in$ AH. Chú ý rằng $AI = r\sqrt{2}$.

Bài 2. Xét hai trường hợp : điểm D thuộc cung lớn BC ; điểm D thuộc cung nhỏ BC.

Áp dụng tính chất của tam giác đều, tính chất của góc góc nội tiếp, tam giác bằng nhau, bất đẳng thức tam giác. Với chú ý rằng tam giác đều nội tiếp đường tròn (O ; R) có cạnh bằng $R\sqrt{3}$.

Bài 3. a) Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn và tam giác đồng dạng.

b) Vẽ các đường cao BE, CF. Áp dụng kết quả câu a) và đẳng thức $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

c) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương tanA, tanB, tanC.

Bài 4. Áp dụng tính chất của diện tích đa giác, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng, bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương.

Đáp số : $\max S_{AEDF} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, đạt được khi D là trung điểm BC.

Dạng 2. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất

Bài 1. a) Kẻ OH $\perp$ AB ; OK $\perp$ DE ; OI $\perp$ AC . Áp dụng tính chất của tam giác đều, tam giác đồng dạng để chứng minh $\widehat{BDO} = \widehat{ODE}$, từ đó tính được $OK = OH = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Áp dụng tam giác đồng dạng, chứng minh $BD.CE = \dfrac{a^2}{4}$.

Đặt DH = DK = x ; EK = EI = y.

Khi đó DE = x + y ; BD $= x + \dfrac{a}{4}$; CE $y + \dfrac{a}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si để tìm giá tri nhỏ nhất của

$$DE = \left(x + \frac{a}{4}\right) + \left(y + \frac{a}{4}\right).$$

Bài 2. a) Hình chữ nhật là hình vuông khi hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau, áp dụng định lí Pi-ta-go để lập phương trình tính CK theo R.

Đáp số : $CK = \dfrac{2R}{\sqrt{5}}$.

b) Áp dụng công thức tính diện tích của hình chữ nhật, diện tích hình tròn, định lí Pi-ta-go để lập hệ phương trình tính CK theo R.

Đáp số : $CK = \dfrac{\left(\sqrt{4+\pi} \pm \sqrt{4-\pi}\right)R}{4}$.

Bài 3. a) Gọi O' là trung điểm của OA. Áp dụng tính chất đường trung bình tam giác để có $O'B = \dfrac{R}{2}$, từ đó suy ra cách dựng cát tuyến ABC. Áp dụng định lí Pi-ta-go để lập hệ phương trình, từ đó tính được $AC = R\sqrt{10}$.

b) Ta phân tích để tìm cách xác định điểm B.

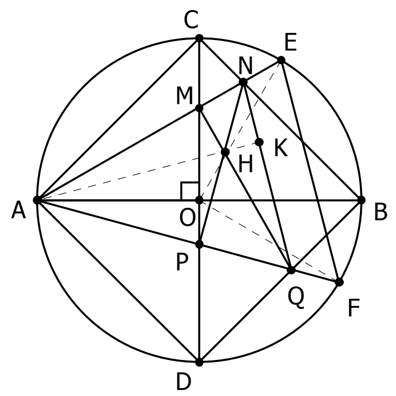
Vì diện tích tam giác AOB gấp đôi diện tích tam giác BOC nên AB = 2BC. Trên đoạn OA lấy điểm O' sao cho O'A = 2O'O. Theo định lí Ta-lét đảo $\Rightarrow$ O'B // OC.

Theo định lí Ta-lét tính được O’B = $\dfrac{2R}{3}$.

Như vậy B là giao điểm của hai đường tròn (O ; R) và (O’ ; $\dfrac{2R}{3}$).

Một số bài tập tổng hợp thường gặp trong các đề thi

Bài 1. a) Áp dụng định lí Pi-ta-go đảo để chứng minh EOF là tam giác vuông.



b) Chứng minh $\widehat{NAP} = \widehat{NCP} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{APN} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMQ} = 90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác MNQP nội tiếp.

c) Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{AFE}$;

$\widehat{AMD} = \widehat{AQN} \Rightarrow \widehat{AQN} = \widehat{AFE} \Rightarrow$ NQ song song với EF.

d) Gọi H là giao điểm của MQ và NP, kéo dài AH cắt NQ tại K. Chứng minh H là trực tâm của tam giác ANQ $\Rightarrow \Delta AKN = \Delta ACN$ (ch-gn) ; $\Delta AKQ = \Delta ADQ$ (ch-gn) $\Rightarrow$ KN = CN ; KQ = DQ. Từ đó tính được chu vi của tam giác BNQ bằng $2R\sqrt{2}$.

e) Đặt BN = x ; BQ = y $\Rightarrow$ CN = R$\sqrt{2} - x$;

DQ = R$\sqrt{2} - y$ và NQ = 2R$\sqrt{2} - x - y$.

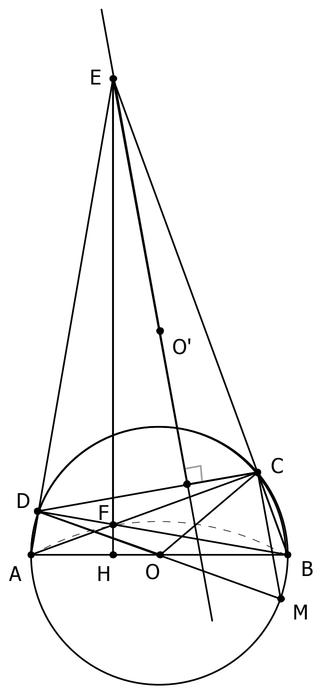
Áp dụng định lí Pi-ta-go lập được phương trình

$$xy - 2(x+y)R\sqrt{2} + 4R^2 = 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si để tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác BNQ.

Đáp số : S_{BNQ} lớn nhất bằng $2R^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$ đạt được khi EF // CD.

Bài 2. a) Vẽ đường kính CM của đường tròn (O ; R). Áp dụng tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn, tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính chất góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.



Đáp số : $\widehat{AEB} = 30^0$

b) Cần chứng minh tứ giác CEDF nội tiếp đường tròn đường kính EF. Rồi áp dụng công thức : $EF = \dfrac{CD}{\sin E}$.

c) Áp dụng tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng để chứng minh $S_{EAB} = 3S_{ABCD}$ $\Rightarrow$ S_{ABCD} lớn nhất

$\Leftrightarrow$ S_{EAB} lớn nhất

$\Leftrightarrow$ $S_{EAB} = \dfrac{1}{2}AB.EH = R.EH$ lớn nhất

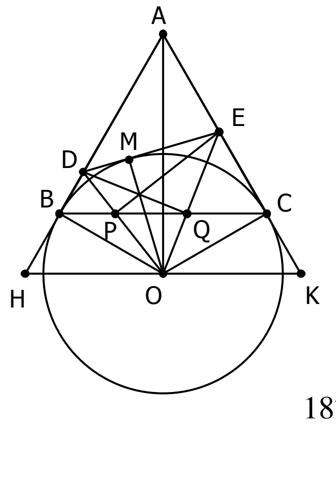
$\Leftrightarrow$ EH lớn nhất $\Leftrightarrow$ H trùng O (vì E thuộc cung chứa góc 30^0 dựng trên đoạn AB) $\Leftrightarrow$ CD // AB.

Đáp số : S_{EAB} lớn nhất bằng $\left(2+\sqrt{3}\right)R^2$ $\Rightarrow$ S_{ABCD} lớn nhất bằng $\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)R^2}{3}$ khi CD // AB.

d) Cần chứng minh $\widehat{AFB} = 150^0$.

e) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB $\Rightarrow$ O' cố định. Tìm cách chứng minh đường thẳng đi qua E và vuông góc với CD đi qua điểm O'.

Bài 3. a) Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, tỉ số lượng giác.



Đáp số : $\widehat{DOE} = 60^0$.

b) Chứng minh C_{ADE} = 2AB.

Đáp số : $C_{ADE} = 2R\sqrt{3}$.

c) Cần chứng minh các tứ giác BOQD và COPE nội tiếp

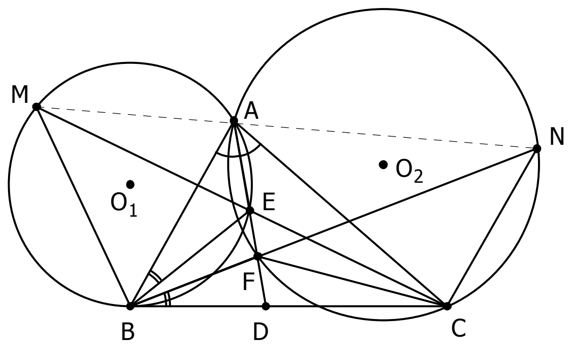
$\Rightarrow \widehat{DPE} = \widehat{DQE} = 90^0$ $\Rightarrow$ đpcm.

d) $\Delta OPQ \quad \Delta OED$ (g-g), tính chất ba đường cao.

e) Qua O vẽ HK // BC $\Rightarrow HD.KE = \dfrac{4R^2}{3}$. Đặt $BD = x$;

$CE = y \Rightarrow DE = x + y$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si để tìm giá trị nhỏ nhất của $DE = x + y$.

Bài 4.



Chứng minh $\widehat{BMC} = \widehat{CNB} \Rightarrow$ tứ giác BMNC nội tiếp. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC ta có $\dfrac{BC}{\sin \widehat{BMC}} = 2R$.

Ta lại có $\dfrac{BC}{\sin \dfrac{\widehat{BAC}}{2}} = 2R$ và $MN \le 2R \Rightarrow$ đpcm.

b) Tứ giác BMNC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{CMN}$.

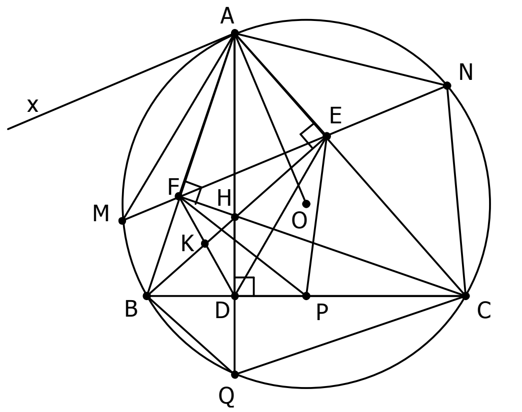
Ta lại có $\widehat{CMA} = \widehat{EBA}$; $\widehat{CBF} = \widehat{EBA}$

$\Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{CMA} \Rightarrow$ ba điểm M, A, N thẳng hàng.

c) Tứ giác BMNC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{BNM}$, mà $\widehat{BNM} = \widehat{FCA} \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{FCA} \Rightarrow \widehat{ECA} = \widehat{FCB}$.

d) Dễ thấy $\Delta BEA \backsim \Delta BCN$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BA}{BN} \Rightarrow$ BE.BN = BA.BC không đổi.

Bài 5. a) Dễ thấy $\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$; $\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$



$\Rightarrow \Delta AMB \quad \Delta CMA$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MA}$

$\Rightarrow MA^2 = MB.MC$

b) Dễ thấy AOIO’ là hình bình hành $\Rightarrow$ OI = O’M.

Nhờ đường trung bình của tam giác $\Rightarrow$ KH // MI $\Rightarrow$ đpcm.

c) Chứng minh I là giao điểm hai đường trung trực.

d) Chứng minh $\widehat{BIC} = 2.\widehat{BAC}$; $\widehat{BMC} = 2.\widehat{BAC} \Rightarrow$ đpcm.

e) OO’ = $a\sqrt{7}$; MI = $\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$; MH = AH = $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 6. a) $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp.

$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Kéo dài AD cắt (O) tại Q.

Chứng minh $\Delta BQC = \Delta BHC$ (g-c-g) $\Rightarrow$ đpcm.

c) Dễ thấy BDHF và CDHE đều là tứ giác nội tiếp.

Do đó $\widehat{HDF} = \widehat{HBF} = \widehat{HCE} = \widehat{HCE}$

$\Rightarrow$ DH là phân giác của góc EDF.

Tương tự EH cũng là phân giác của góc DEF.

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF.

Vì DB $\perp$ DH nên DB là phân giác ngoài tại đỉnh D của ΔDEF

$\Rightarrow \dfrac{DK}{DE} = \dfrac{HK}{HE} = \dfrac{BK}{BE} \Rightarrow BE.HK = BK.HE$.

d) Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) rồi chứng minh $\widehat{BAx} = \widehat{BCA} = \widehat{AFE}$

$\Rightarrow$ EF // Ax $\Rightarrow$ OA $\perp$ MN $\Rightarrow$ AM = AN

$\Rightarrow$ Tam giác AMN cân tại A $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$,

mà $\widehat{AMN} = \widehat{ACN}$ nên $\widehat{ACN} = \widehat{ANE} \Rightarrow \Delta ANE \backsim \Delta ACN$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AE}{AN} \Rightarrow AN^2 = AE.AC$.

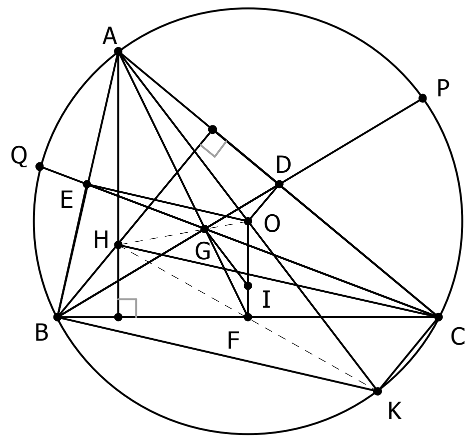
Dễ thấy $\Delta AEH \quad \Delta ADC$ (g-g) $\Rightarrow$ AE.AC = AH.AD.

Do đó $AM^2 = AN^2$ = AH.AD.

e) Gọi P là trung điểm của BC. Chứng minh $\widehat{EPF} = 2.\widehat{EBF}$; $\widehat{EDF} = 2.\widehat{EBF} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 7. a) DA = DC $\Rightarrow$ OD $\perp$ AC ; EA = EB $\Rightarrow$ OE $\perp$ AB $\Rightarrow$ tứ giác ADOE nội tiếp.

b) AK là đường kính, suy ra $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^0$; CH $\perp$ AB ; BH $\perp$ AC $\Rightarrow$ BK // CH và BH // CK $\Rightarrow$ BHCK là hình bình hành, mà FB = FC nên FH = FK.



c) Dễ thấy G là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow GA = \dfrac{2}{3}GF$.

ΔAHK có AF là trung tuyến và $GA = \dfrac{2}{3}GF$ nên G là trọng tâm của ΔAHK .

Vì HO là trung tuyến của ΔAHK nên 3 điểm H, G, O thẳng hàng $\Rightarrow$ đpcm.

d) Kẻ GI // AO $\Rightarrow \dfrac{FI}{FO} = \dfrac{FG}{FA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ I cố định.

Ta cũng có $\dfrac{FI}{FO} = \dfrac{IG}{OA} = \dfrac{FG}{FA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IG = \dfrac{R}{3} \Rightarrow$ đpcm.

e) Kéo dài BD cắt (O) tại P ; kéo dài CE cắt (O) tại Q.

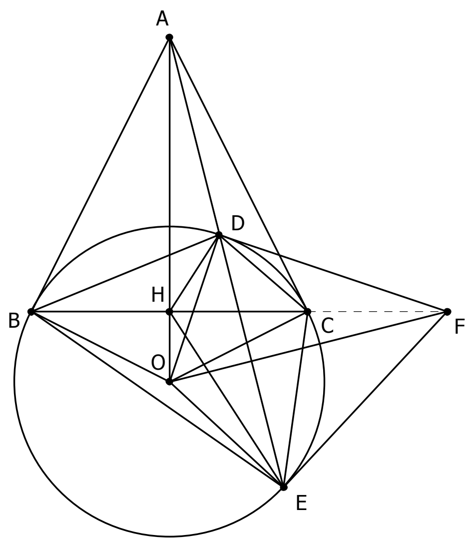
$\Rightarrow$ DP.DB = DA.DC = $\dfrac{AC^2}{4}$; EQ.EC = EA.EB = $\dfrac{AB^2}{4}$;

GB.GP = GC.GQ $\Leftrightarrow \dfrac{AB^2 - AC^2}{GB^2 - GC^2} = 3$.

Bài 8. a) Dễ thấy $\Delta ABD \quad \Delta AEB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BD}{EB} \qquad (1)$

$\Rightarrow AD.AE = AB^2$ không đổi



b) $\Delta ACD \quad \Delta AEC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{CD}{EC} \qquad (2)$

Vì AB = AC nên từ (1) và (2)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE}$.

c) Dễ thấy $OA \perp BC$ tại H và HB = HC. Cần chứng minh

AH.AO = AB^2 ; AH.AO = AD.AE $\Rightarrow$ AD.AE = AB^2.

Từ đó $\Rightarrow \Delta AHD \backsim \Delta AEO$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO} \Rightarrow \widehat{OHD} + \widehat{OED} = 180^0 \Rightarrow$ đpcm.

d) Dễ thấy $\widehat{ODF} = \widehat{OEF} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác ODFE nội tiếp.

Ta lại có tứ giác DHOE nội tiếp (cmt) $\Rightarrow$ 5 điểm D, H, O, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính OF $\Rightarrow \widehat{OHF} = 90^0$ hay $OH \perp HF$, mà $OH \perp BC$ nên B, C, F thẳng hàng.

e) Dễ thấy $\widehat{FHD} = \widehat{FHE}$ (vì FD = FE), mà $HA \perp HF \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{HD}{HE}$.

Theo câu a) thì $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BD}{EB} \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} . \dfrac{AD}{AB} = \left(\dfrac{BD}{EB}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \left(\dfrac{BD}{EB}\right)^2$.

Do đó $\dfrac{BD}{BE} = \sqrt{\dfrac{HD}{HE}}$.

Bài 9. a) Giả sử EF cắt OO' tại K ; GH cắt OO' tại K'.

Vì EF là tiếp tuyến chung trong nên $OE \perp EF$; $O'F \perp EF \Rightarrow OE // O'F$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta được $\dfrac{KO'}{KO} = \dfrac{O'F}{OE} = \dfrac{r}{R} \Rightarrow KO' = \dfrac{OO'.\text{r}}{R+r}$. Tương tự $K'O' = \dfrac{OO'.\text{r}}{R+r} \Rightarrow K' \equiv K$.

Vậy ba đường thẳng EF, GH và OO' đồng quy tại K.

b) Dễ dàng chứng minh được $\widehat{OMO'} = \widehat{ONO'} = \widehat{OPO'} = \widehat{OQO'} = 90^0$.

Vậy 6 điểm M, N, P, Q, O, O' cùng thuộc đường tròn tâm O'' đường kính OO'.

c) Vẽ O''S vuông góc với MN $\Rightarrow$ SM = SN.

Ta lại có OA $\perp$ AB và O'B $\perp$ AB $\Rightarrow$ OA // O'B // O''S, mà

O''O = O''O' $\Rightarrow$ SA = SB Do đó MA = NB. Vì MA = ME và MB = MF $\Rightarrow$ MN = EF.

Ta có $KO' = \dfrac{OO'.\text{r}}{R+r} = \dfrac{2(R+r)r}{R+r} = 2r \Rightarrow KF = r\sqrt{3}$.

Tương tự $KE = R\sqrt{3} \Rightarrow EF = (R+r)\sqrt{3}$. Vậy $MN = (R+r)\sqrt{3}$.

d) Gọi L là giao điểm của O'N và BH ; Gọi J là giao điểm của ON và AG.

Dễ thấy $\Delta NOA \backsim \Delta O'NB$ (g-g) có AJ và BL là các đường cao tương ứng $\Rightarrow \dfrac{NJ}{NO} = \dfrac{O'L}{O'N}$.

Ta lại có LI // NO (cùng vuông góc với O'N)

$\Rightarrow \dfrac{O'L}{O'N} = \dfrac{LI}{NO} \Rightarrow \dfrac{NJ}{NO} = \dfrac{LI}{NO} \Rightarrow NJ = LI$.

Do đó JNLI là hình chữ nhật $\Rightarrow IJ \perp NO$, mà $AG \perp NO$ tại J nên A, I, G thẳng hàng.

Bài 10. a) $\widehat{BED} = \widehat{BFD} = 90^0$; $\widehat{CGD} = \widehat{CFD} = 90^0$

$\Rightarrow$ BEDF ; CGDF là các tứ giác nội tiếp.

b) $\Delta DEF \quad \Delta DFG$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{DF}{DG} \Rightarrow DF^2 = DE.DG$.

c) Vì AB là tiếp tuyến, B là tiếp điểm

$\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0$.

ΔABO vuông tại B

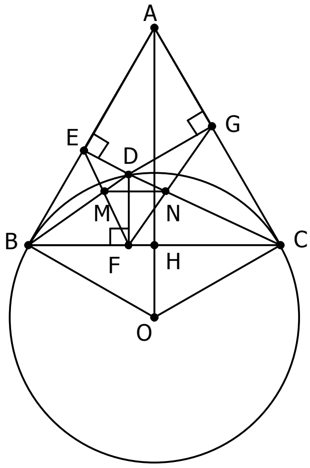
$\Rightarrow \sin\widehat{OAB} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OAB} = 30^0$.

Dễ thấy $\Rightarrow AB = AC$ và $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = 30^0$.

Vậy tam giác ABC đều có cạnh

$AB = OA.\cos\widehat{OAB} = 2R.\cos 30^0$

$= 2R.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$



Ta có $S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DCA} = S_{ABC} \Rightarrow DE + DF + DG = AH = \dfrac{3R}{2}$.

d) Ta có $\widehat{DFE} = \widehat{DBE} = \widehat{DCB}$; $\widehat{DFG} = \widehat{DCG} = \widehat{DBC}$

$\Rightarrow \widehat{EFG} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB}$.

Ta lại có $\widehat{DBC} + \widehat{DCB} + \widehat{BDC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{EFG} + \widehat{BDC} = 180^0$ hay

$\widehat{MFN} + \widehat{MDN} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác DMFN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DMN} = \widehat{DFN} = \widehat{DCG} = \widehat{DBC}$

$\Rightarrow$ MN // BC.

Vì $\widehat{DMN} = \widehat{DBC} = \widehat{DEF}$ và $\widehat{DNM} = \widehat{DCB} = \widehat{DGF}$ nên MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp của các ΔDME và ΔDNG.

e) Tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BDC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{MFN} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta BEF \quad \Delta CFG$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BF}{CG}$

$$\Rightarrow BE.CG = BF.CF \le \left(\frac{BF + CF}{2}\right)^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi BF = CF = $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$ D là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

f) Ta có

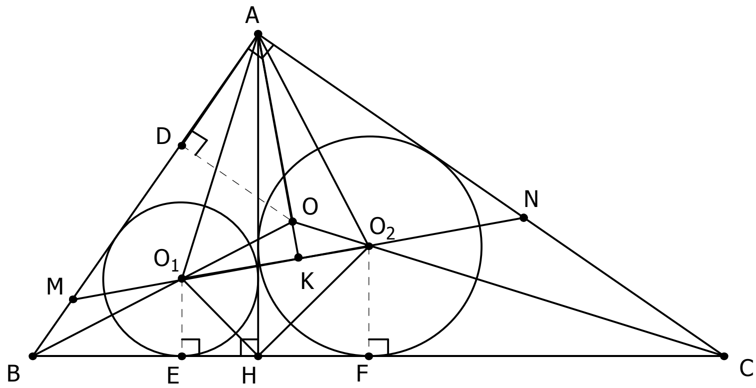
$S_{FEG} = S_{EDF} + S_{FDG} + S_{DEG} = \frac{1}{2}\left(DE.DG + DE.DF + DF.DG\right)\sin 60^0$.

Ta lại có $DE.DG + DE.DF + DF.DG$

$$= DF^2 + DF\left(DE + DG\right) \geq DF^2 + 2DF^2 = 3DF^2$$

Từ đó suy ra đpcm. Dấu "=" xảy ra khi DE = DG $\Leftrightarrow$ D là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Bài 11.



a) Áp dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau biến đổi được :

$$2AD = AB + AC - BC$$

Vì AO là phân giác của $\widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{DAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$

$\Rightarrow \Delta AOD$ vuông cân tại D

$\Rightarrow$ AD = OD = r

$\Rightarrow$ 2r = AB + AC – BC (1)

Tương tự : $2r_1 = HB + HA - AB$ (2) ; $2r_2 = HA + HC - AC$ (3). Từ đó suy ra $AH = r + r_1 + r_2$.

b) Ta có $\widehat{HAB} = \widehat{HCA}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$).

Dễ thấy $\widehat{OAC} = \widehat{O_1HA} = \widehat{O_2HC} = 45^0$.

$\Rightarrow \Delta AOC \quad \Delta HO_1A \backsim \Delta HO_2C$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AO} = \frac{HA}{HO_1} = \frac{HC}{HO_2} \Rightarrow \frac{AC^2}{AO^2} = \frac{HA^2 + HC^2}{HO_1^2 + HO_2^2} \Rightarrow r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

c) Vì $\widehat{HBA} = \widehat{HAC}$ (cùng phụ với $\widehat{HAB}$) nên $\widehat{ABO} = \widehat{HAO_2}$

$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{BAO_2} = 90^0 \Rightarrow BO \perp AO_2$ hay $O_1O \perp AO_2$ (1).

Tương tự $O_2O \perp AO_1$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ O là trực tâm của ΔAO_1O_2.

d) Vì O là trực tâm của ΔAO_1O_2 nên $AO \perp O_1O_2$ hay

$AO \perp MN \Rightarrow \Delta AMN$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = 45^0 = \widehat{O_1HB} = \widehat{O_2HC} = 45^0$

$\Rightarrow$ Các tứ giác BMO_1H và CNO_2H nội tiếp.

Dễ thấy $\widehat{BMO_1} = \widehat{O_1OO_2} = 135^0$ và $\widehat{MO_1B} = \widehat{OO_1O_2}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{MBO_1} = \widehat{OO_2O_1} \Rightarrow \widehat{O_1BC} = \widehat{OO_2O_1}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BO_1O_2C nội tiếp.

Cách khác : Chứng minh BO_1O_2C nội tiếp ta cần chứng minh

$$OA^2 = OO_1.OB = OO_2.OC.$$

e) Theo câu b) $r^2 = r_1^2 + r_2^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 50 \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ AH = r + r_1 + r_2 $= 12\sqrt{2}$.

$\Delta AO_1M = \Delta AO_1H$ (g-c-g) $\Rightarrow$ AM = AH $= 12\sqrt{2}$.

ΔAMN vuông cân tại A $\Rightarrow S_{AMN} = 144$ (cm^2).

Tam giác AMN vuông cân tại A có AM = $12\sqrt{2}$ $\Rightarrow MN = AM\sqrt{2} = 24$.

Giả sử AO cắt O_1O_2 tại K.

Tam giác AMN vuông cân tại A, suy ra $AK = \frac{1}{2}MN = 12$.

Ta lại có $AO = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.\sqrt{2} = 10 \Rightarrow OK = AK - AO = 12 - 10 = 2$.

Tam giác HO_1O_2 vuông tại H có

$$HO_1 = r_1\sqrt{2}\ ;\ HO_2 = r_2\sqrt{2}\ \Rightarrow O_1O_2 = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.\sqrt{2} = 10\,.$$

Do đó $S_{OO_1O_2} = 10\,(\text{cm}^2)$.

Tứ giác BMO_1H, CNO_2H nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HO_1O_2} = \widehat{HBM}\ ;\ \widehat{HO_2O_1} = \widehat{HCN}$.

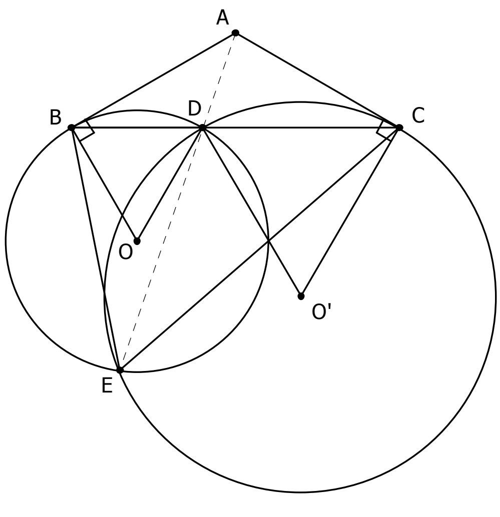
Do đó $\Delta HO_1O_2 \quad \Delta ABC$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{HO_1}{AB} = \frac{HO_2}{AC} = \frac{O_1O_2}{BC} \Rightarrow \frac{3}{AB} = \frac{4}{AC} = \frac{5}{BC}\,.$$

Đặt AB = 3k ; AC = 4k ; BC = 5k. Từ AB.AC = BC.AH ta có k = $5\sqrt{2}$.

Do đó $S_{ABC} = 300\,(\text{cm}^2)$.

Bài 12.



1) a) Dễ thấy $\widehat{ABD} = \widehat{BED}\ ;\ \widehat{ACD} = \widehat{CED}$.

Do đó : $\widehat{BEC} + \widehat{BAC} = \widehat{ABD} + \widehat{ACD} + \widehat{BAC} = 180^0$. Suy ra tứ giác ABEC nội tiếp.

b) Vì ΔABC cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, theo câu a) nên $\widehat{BED} = \widehat{CED}$ ta có ED là phân giác của $\widehat{BEC}$ (1). Tứ giác ABEC nội tiếp và AB = AC $\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CEA} \Rightarrow$ EA là phân giác của $\widehat{BEC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra DE đi qua điểm A cố định.

c) Vì ΔABC cân tại A, $\widehat{A} = 120^0$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{CED} = 30^0 .$$

Do đó $S_{BEC} = S_{BED} + S_{CED}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}EB.EC.\sin 60^0 = \frac{1}{2}EB.ED.\sin 30^0 + \frac{1}{2}EC.ED.\sin 30^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.EB.EC.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.EB.ED.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.ED.EC.\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow EB.EC.\sqrt{3} = EB.ED + ED.EC \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{ED} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EC}$$

2) Vì đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B $\widehat{OBA} = 90^0$, mà $\widehat{ABC} = 30^0$ nên $\widehat{OBD} = 60^0$.

Tam giác OBD cân tại O (OB = OD = R) và $\widehat{OBD} = 60^0$ $\Rightarrow \Delta OBD$ đều $\Rightarrow$ R = BD (1)

Tương tự : R’ = CD (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ R + R’ = BD + CD = BC = $2\sqrt{3}$ (cm).

3) Ta có AE = AD + DE. Do đó DE lớn nhất $\Leftrightarrow$ AE lớn nhất và AD nhỏ nhất có thể được.

Điều này đồng thời xảy ra khi AE $\perp$ BC tại D $\Rightarrow$ DB = DC = $\sqrt{3}$ cm.

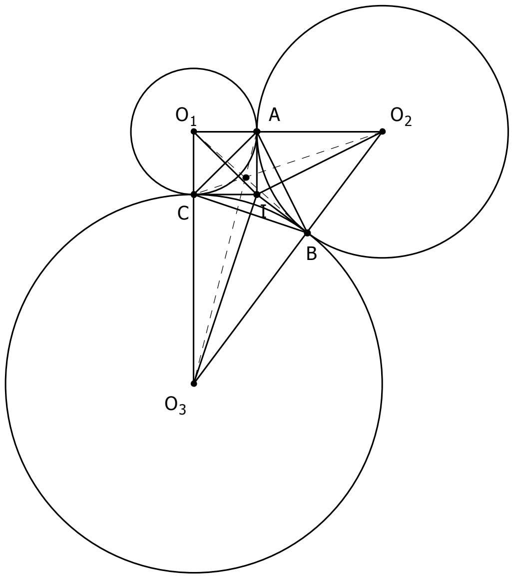
Dễ thấy tam giác ABD lúc này là nửa tam giác đều $\Rightarrow$ AD = 1cm và AB = 2cm.

Ta có ΔABE vuông tại B, đường cao BD, suy ra

$$AB^2 = AD.AE \Rightarrow AE = \frac{AB^2}{AD} = \frac{2^2}{1} = 4 \text{ (cm)}.$$

Vậy DE có độ dài lớn nhất khi D là trung điểm của BC, khi đó DE = 3cm.

Bài 13.



a) Áp dụng tính chất đoạn nối tâm của hai đường tròn tiếp xúc ngoài

$\Rightarrow$ O_1O_2 = 3cm, O_2O_3 = 5cm, O_3O_1 = 4cm $\Rightarrow$ tam giác $O_1O_2O_3$ vuông tại O_1.

b) Vì tam giác $O_1O_2O_3$ vuông tại O_1 nên

$$\sin O_2 = \frac{O_1O_3}{O_2O_3} = \frac{4}{5}\ ;\ \sin O_3 = \frac{O_1O_2}{O_2O_3} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow S_{ABO_2} = \frac{O_2A.O_2B.\sin O_2}{2} = 1,6\ (\text{cm}^2)$$

và $$S_{BCO_3} = \frac{O_3\,\text{B}.O_3\,\text{C}.\sin O_3}{2} = 2,7\ (\text{cm}^2)$$

Ta lại có $S_{O_1O_2O_3} = \dfrac{O_1O_2.O_1O_3}{2} = 6\ (\text{cm}^2)$; $S_{O_1AC} = \dfrac{O_1\,\text{A}.O_1C}{2} = 0,5\ (\text{cm}^2)$.

$\Rightarrow$ S_{ABC} = 1,2 (cm^2).

c) Gọi I là giao điểm các tia phân giác của các góc O_2 và O_3

$\Rightarrow$ O_1I là phân giác của góc O_1.

Dễ thấy $\Delta O_2IA = \Delta O_2IB$ (c-g-c) ;

$\Delta O_3IB = \Delta O_3IC$ (c-g-c) ; $\Delta O_1IA = \Delta O_1IC$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{IAO_1} = \widehat{IBO_3}$; $\widehat{ICO_1} = \widehat{IBO_2}$; $\widehat{IAO_1} = \widehat{ICO_1}$

$\Rightarrow \widehat{IBO_2} = \widehat{IBO_3} = 90^0$ hay $IB \perp O_2O_3$.

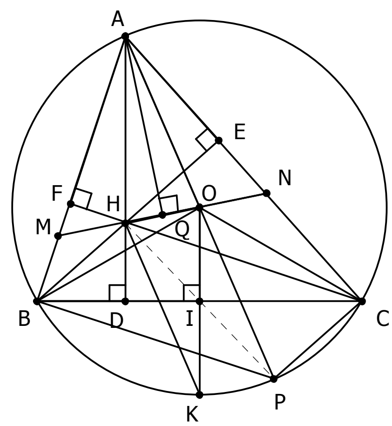
Tương tự $IA \perp O_1O_2$; $IC \perp O_1O_3$. Ta lại có IA = IB = IC $\Rightarrow$ **đpcm.**

d) Ta có $\frac{AO_1}{AO_2}.\frac{BO_2}{BO_3}.\frac{CO_3}{CO_1} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{1} = 1$.

Áp dụng định lí Cê-va đảo $\Rightarrow$ **đpcm.**

Bài 14. a) Vì I là trung điểm của BC nên

IB = IC = $\frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ và OI $\perp$ BC.



Tam giác BOI vuông tại I, ta có

$\sin\widehat{BOI} = \frac{IB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BOI} = 60^0$.

ΔBOC cân tại O

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2.\widehat{BOI} = 2.60^0 = 120^0$.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}.120^0 = 60^0$.

Tứ giác AEHF có : $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$; $\widehat{EAF} = 60^0 \Rightarrow \widehat{EHF} = 120^0$

Ta lại có $\widehat{BHC} = \widehat{EHF}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BHC} = 120^0$

Tứ giác BHOC có $\widehat{BHC} = \widehat{BOC} = 120^0 \Rightarrow$ Tứ giác BHOC nội tiếp.

b) Dễ thấy $\widehat{ABP} = \widehat{ACP} = 90^0 \Rightarrow$ CP // BH và PB // CH.

$\Rightarrow$ BHCP là hình bình hành, mà I là trung điểm đường chéo BC nên I cũng là trung điểm đường chéo HP, hay 3 điểm H, I, P thẳng hàng.

c) Vì K là điểm chính giữa cung nhỏ BC $\Rightarrow$ OK $\perp$ BC tại I.

Tam giác BOI vuông tại I, ta có $OI = OB.\cos\widehat{BOI} = R.\cos 60^0 = \frac{R}{2}$.

Dễ thấy OI là đường trung bình của tam giác AHP $\Rightarrow$ AH = 2.OI = R.

Tứ giác AOKH có OK // AH và OK = AH = R $\Rightarrow$ AOKH là hình bình bình hành.

Hình bình hành AOKH có AH = AO = R $\Rightarrow$ AOKH là hình thoi.

d) Tam giác BOC cân tại O có $\widehat{BOC} = 120^0$ $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 30^0$.

Tứ giác BHOC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHN} = \widehat{OCB}$ $\Rightarrow \widehat{EHN} = 30^0$, mà ΔEHN vuông tại E $\Rightarrow \widehat{ENH} = 60^0$

Tam giác AMN có $\widehat{MAN} = \widehat{ANM} = 60^0$ $\Rightarrow$ Tam giác AMN là tam giác đều.

e) Dễ thấy $\widehat{ABE} = 30^0 =$ $\widehat{MHB} = 30^0 \Rightarrow \Delta BMH$ cân tại M

$\Rightarrow$ BM = MH (1)

Dễ thấy $\widehat{ACF} = 30^0 =$ $\widehat{NHC} = 30^0 \Rightarrow \Delta CNH$ cân tại N $\Rightarrow$ CN = NH (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được : BM + CN = MH + NH = MN.

Kẻ đường cao AQ của tam giác đều AMN

$\Rightarrow MN = \dfrac{2AQ}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ BM + CN $= \dfrac{2.AQ}{\sqrt{3}}$.

Mà AQ $\leq$ AO = R, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Q $\equiv$ H $\equiv$ O $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung BC.

Vậy : BM + CN đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ khi A là điểm chính giữa cung lớn BC.

Phần ba. SỐ HỌC

Chủ đề 1 TÍNH CHIA HẾT - ĐỒNG DƯ THỨC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– $A(n) \vdots p$ khi $A(n) = p.A_1(n)$ hoặc $A(n) = pA_1(n) + pA_2(n) + \ldots$

– Các tính chất về phép chia hết.

– a đồng dư b theo modun m nếu a – b chia hết cho m. Kí hiệu : $a \equiv b \pmod m$.

– Các tính chất về đồng dư thức.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng mọi số nguyên n thì :

a) $n^3 - n$ chia hết cho 3 ;

b) $n^5 - n$ chia hết cho 5 ;

c) $n^7 - n$ chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ mà trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3. Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 3.

b) *Cách 1* : Có $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 +1) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4 + 5)$

$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ chia hết cho 5, vì mỗi số hạng của tổng đều chia hết cho 5.

Cách 2 : Xét số dư của n trong phép chia cho 5 (đồng dư theo mod 5).

Từ $A = n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$ ta có :

– Nếu n chia hết cho 5 thì A chia hết cho 5.

– Nếu $n = 5k \pm 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 - 1 = (25k^2 \pm 10k) \vdots 5$.

– Nếu : $n = 5k \pm 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + 1 = (25k^2 \pm 20k + 5) \vdots 5$.

Trong 5 trường hợp trên, trường hợp nào cũng có một thừa số chia hết cho 5. Vậy ta có điều phải chứng minh.

c) **** Cách 1***

Xét hiệu của $n^7 – n$ với một số chia hết cho 7 là

$$(n – 3)(n – 2)(n – 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

Ta có :

$n^7 – n – (n – 3)(n – 2)(n – 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 7n(2n^4 – n^2 + 5) \vdots 7.$

**** Cách 2***

Ta có $n^7 – n = n(n^3 + 1)(n^3 – 1)$.

Xét $n = 7k$; $n = 7k \pm 1$; $n = 7k \pm 2$; $n = 7k \pm 3 (k \in \mathbb{Z})$.

Trong các trường hợp trên, trường hợp nào cũng có một thừa số chia hết cho 7.

Bài toán trên là các trường hợp riêng của định lí Fec-ma.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{5n – 3} + 2^{5n – 2} + 2^{5n - 1} \text{ chia hết cho 31.}$$

Hướng dẫn giải

Tổng gồm 5n số hạng, ta nhóm thành n nhóm, mỗi nhóm 5 số hạng

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{5n – 3} + 2^{5n – 2} + 2^{5n – 1}$

$= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^4) + (2^5 + 2^6 + \ldots + 2^9) + \ldots + (2^{5n – 5} + 2^{5n – 4} + \ldots + 2^{5n – 1})$

$= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^4)(1 + 2^5 + 2^{5.2} + \ldots + 2^{5(n – 1)})$

$= 31(1 + 2^5 + 2^{5.2} + \ldots + 2^{5(n – 1)})$ chia hết cho 31.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nguyên của biểu thức $P = \dfrac{x^2 + x + 2}{xy - 1}$, trong đó x, y là các số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

P có nghĩa khi $xy \neq 1$. Xét các trường hợp sau

a) Với $x = 1$ và $y \geq 2$ thì P = $\dfrac{4}{y-1} \in \mathbb{Z}^+$ khi y – 1 là ước nguyên dương của 4.

Vậy P = 4 khi $x = 1$; $y = 2$;

P = 2 khi $x = 1$; $y = 3$;

P = 1 khi $x = 1$; $y = 5$.

b) Với y = 1 và $x \geq 2$ thì P = $\dfrac{x^2+x+1}{x-1} = x+2+\dfrac{4}{x-1}$. Do đó P là số nguyên khi x – 1 là ước nguyên dương của 4.

Vậy P = 8 khi $x = 2$; $y = 1$;

P = 7 khi $x = 3$; $y = 1$;

P = 8 khi $x = 5$; $y = 1$.

c) Với $x \geq 2$; $y \geq 2$ thì y.P = $\dfrac{x^2y+xy+2y}{xy-1} = x+1+\dfrac{2y+x+1}{xy-1}$

Để P nguyên thì $\dfrac{2y+x+1}{xy-1}$ = k là số nguyên dương (do $xy - 1 \geq 3$).

* Nếu k = 1 thì $2y + x + 1 = xy - 1 \Leftrightarrow xy - 2y - (x - 2) = 4 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 1) = 4$

Vậy $x = 3$; $y = 5$ thì P = 1 ;

$x = 4$; $y = 3$ thì P = 2 ;

$x = 6$; $y = 2$ thì P = 4.

* Nếu k $\geq$ 2 thì $2y + x + 1 \geq 2xy - 2$

$\Leftrightarrow 2xy - 2y - (x - 1) \leq 4 \Leftrightarrow (x - 1)(2y - 1) \leq 4$.

Với $x \geq 2$; $y \geq 3$ thì BĐT trên không xảy ra.

Với $x = 2$; $y = 2$ thì k không nguyên nên P không nguyên.

Vậy các giá trị nguyên của P là : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8.

Ví dụ 4. Với những giá trị nào của a thì các số $a+\sqrt{15}$ và $\dfrac{1}{a}-\sqrt{15}$ đều là các số nguyên ?

Hướng dẫn giải

Đặt $a+\sqrt{15}=x$ và $\frac{1}{a}-\sqrt{15}=y$; $x, y\in Z$.

Suy ra a = $x-\sqrt{15}$ và $\frac{1}{a}=y+\sqrt{15}\,(a\neq 0)$.

Do đó $(x-\sqrt{15})(y+\sqrt{15})=1 \Leftrightarrow \sqrt{15}(x-y)=16-xy$ (1)

Nếu $x\neq y$, ta có $\sqrt{15}=\frac{16-xy}{x-y}$ vô lí vì $\sqrt{15}$ là số vô tỉ và $\frac{16-xy}{x-y}$ là số hữu tỉ.

Vậy $x = y$, thay vào (1) ta được $x = y = 4$ hoặc $x = y = -4$.

Vậy $a\in\left\{-4-\sqrt{15}\,;\,4-\sqrt{15}\right\}$.

Ví dụ 5. Tìm hai chữ số cuối cùng của số A = 2^{2014}.

Hướng dẫn giải

Ta tìm số dư của A khi chia cho 100.

Ta có 100 = 4.25 và 2^{10} = $1024\equiv -1(mod\,25)$

$$\Rightarrow A=2^4.2^{2010}=2^4.(2^{10})^{201}\equiv 9(\text{mod}\,25)$$

Hiển nhiên A chia hết cho 4 $\Rightarrow A\equiv -16\,(\text{mod}\,100)$. Vậy hai chữ số cuối cùng của A là 84.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu A có ba chữ số tận cùng là 625 thì A^n cũng có ba chữ số tận cùng là 625.

Hướng dẫn giải

Từ $A\equiv 625(\text{mod}\,1000)$ suy ra $A^n\equiv 625^n(\text{mod}\,1000)$.

Ta có $625^n-625=625(625^{n-1}-1)=625.624.(625^{n-2}+...+1)$

$$=390000(625^{n-2}+...+1)\equiv 0(\text{mod}\,1000).$$

Vậy A^n cũng có ba chữ số tân cùng là 625.

Ví dụ 7. Cho A = $1^5+2^5+3^5+\ldots+2015^5$.

Hãy tìm chữ số tận cùng của A.

Hướng dẫn giải

Chú ý rằng : Với $a \in \mathbb{N}$ thì hai số a^5 và a có chữ số tận cùng giống nhau.

Thật vậy :

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a - 1)(a + 1)(a^2 - 4 + 5)$$
$$= a(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2) + 5a(a - 1)(a + 1).$$

Vì tích hai số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 2 và tích năm số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 5 nên $a^5 - a$ chia hết cho 10 hay a^5 và a có chữ số tận cùng giống nhau.

Đặt B = 1 +2 +3 +… + 2015 thì

$$A = (1^5 - 1) + (2^5 - 2) + (3^5 - 3)+\ldots + (2015^5 - 2015) + B.$$

Nên hai số A và B có chữ số tận cùng giống nhau. Do đó ta tìm chữ số tận cùng của B.

Mà $B = 2015.\dfrac{2016}{2}$ = 2.031.120 Vậy chữ số cuối cùng của A là 0.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng : nếu các số nguyên a và b không chia hết cho 3 thì $a^6 - b^6$ chia hết cho 9.

Bài 2. Chứng minh rằng $4a^2 + 3a + 5$chỉ chia hết cho 6 nếu a là một số nguyên không chia hết cho 2 và cũng không chia hết cho 3.

Bài 3. Xét phân số $A = \dfrac{n^2 + 4}{n + 5}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2015 sao cho phân số A chưa tối giản.

Bài 4. Cho a, b $\in \mathbb{N}$. Chứng minh : $\dfrac{11a + 2b}{19} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{18a + 5b}{19} \in \mathbb{Z}$.

Bài 5. Tìm các số tự nhiên n sao cho $2^{2n} + 2^n + 1$ chia hết cho 21.

Bài 6. Tìm ba chữ số cuối cùng của $A = 2^{2015}$.

Bài 7. Chứng minh rằng nếu A có hai chữ số tận cùng là 76 thì A^n cũng có hai chữ số tận cùng là 76.

Bài 8. Chứng minh $A = 2^{2^{2n}} + 5 \vdots 7 \quad \forall n \geq 1$.

Chủ đề 2 SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ - SỐ CHÍNH PHƯƠNG

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Để chứng minh A(n) là số nguyên tố ta phân tích $A(n) = A_1(n).A_2(n)$.

Ta có A(n) là số nguyên tố khi $A_1(n) = 1$; $A_2(n)$ nguyên tố hoặc $A_2(n) = 1$; $A_1(n)$ là số nguyên tố.

– Để chứng minh A(n) là hợp số ta cần chứng minh A(n) chia hết cho m lớn hơn 1 và A(n) lớn hơn m.

– Để chứng minh A(n) là số chính phương, ta cần chứng minh A(n) là bình phương của một số nguyên, hoặc căn cứ vào một số tính chất về số chính phương.

– Một số không chính phương khi : chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ; chia cho 3 dư 2 ; chia cho 4 dư 2 hoặc 3 ; nằm giữa hai số chính phương liên tiếp ; ...

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho p là số nguyên tố dạng p = 4k + 3 ($k \in N$). Giả sử các số nguyên x, y thoả mãn $x^2 + y^2$ chia hết cho p. Chứng minh x và y đều chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Nếu một trong hai số x và y chia hết cho p, theo giả thiết $x^2 + y^2$ chia hết cho p thì ta suy ra cả hai số đều chia hết cho p.

Giả sử cả hai số đều không chia hết cho p. Ta có p = 4k + 3 ($k \in \mathbb{N}$).

Theo định lí Fer-ma thì $x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$

suy ra : $x^{4k+2} + y^{4k+2} \equiv 2 (\bmod p)$ (1)

Mặt khác : $x^{4k+2} + y^{4k+2} = (x^2)^{2k+1} + (y^2)^{2k+1} \vdots x^2 + y^2 \vdots p.$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $2 \vdots p \Rightarrow p = 2,$ vô lí vì p = 4k + 3. Vậy ta có điều chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng không có số chính phương A nào có một trong hai dạng sau :

a) $A = 4n + 2$; b) $A = 4n + 3$.

Hướng dẫn giải

Xét a là số nguyên bất kì. Nếu a chẵn, $a = 2n$, thì $a^2 = 4n^2$ chia hết cho 4.

Nếu a lẻ, $a = 2n + 1$, thì $a^2 = 4n(n + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các số có dạng $n(n + 1)$ và $n(n + 2)$ không thể là các số chính phương với mọi số n nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Ta biết giữa hai số nguyên dương liên tiếp không còn số nguyên nào nữa, cũng như giữa hai số chính phương liên tiếp a^2 và $(a + 1)^2$ không còn số chính phương nào nữa. Mà ta có $n^2 < n(n + 1) < n(n + 2) < (n + 1)^2$ với mọi số n nguyên dương nên các số $n(n+ 1)$ và $n(n + 2)$ không thể là các số chính phương với mọi số n nguyên dương.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng, tồn tại vô số số nguyên dương a sao cho $q = n^4 + a$ không là số nguyên tố với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

Xét các số a có dạng $a = 4m^4$ trong đó m là số nguyên dương.

Ta có $q = n^4 + a = n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2)^2 - 4n^2m^2$

$= (n^2 + 2m^2 - 2nm)(n^2 + 2m^2 + 2nm)$

Với $m > n$ thì $n^2 + 2m^2 - 2nm > 1$ và $n^2 + 2m^2 + 2nm > 1$, do đó q là hợp số. Vậy tồn tại vô số số nguyên dương $a = 4m^4$ sao cho q không là số nguyên tố với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 5. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $4p + 1$ là số nguyên tố.

Chứng minh rằng $2p + 1$ là hợp số.

Hướng dẫn giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p \not\vdots\, 3$. Do đó $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$

$(k \in \mathbb{N}^*)$.

Nếu p = 3k + 2 thì 4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 12k + 9 $\vdots$ 3 và lớn hơn 3 nên 4p + 1 là hợp số. Mà theo đề bài thì 4p + 1 là số nguyên tố nên p = 3k + 1.

Khi đó 2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 $\vdots$ 3 và lớn hơn 3. Vậy 2p + 1 là hợp số.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng $10^{6n+4} + 3$ là hợp số với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải

Ta có 10^6 chia cho 7 dư 1 nên 10^{6n} chia cho 7 cũng dư 1, do đó $10^{6n-1} \vdots 7$.

Suy ra $10^4(10^{6n} - 1) \vdots 7 \Rightarrow 10^{6n+4} - 10^4 \vdots 7 \Rightarrow (10^{6n+4} + 3) - (10^4 + 3) \vdots 7$.

Ta lại có $10^4 + 3 \vdots 7$ nên $10^{6n+4} + 3 \vdots 7$, mà $10^{6n+4} + 3 > 7$ nên $10^{6n+4} + 3$ là hợp số.

Ví dụ 7. Có hay không 2009 số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số ?

Hướng dẫn giải

Xét số tự nhiên a = 1.2.3…2010 = 2010!

Xét 2009 số tự nhiên liên tiếp a + 2, a + 3, a + 4, …, a + 2010.

Dễ thấy a + k > k và a + k $\vdots$ k (với mọi k = 2, 3, 4,…, 010), suy ra a + k là hợp số.

Vậy 2009 số tự nhiên liên tiếp a + 2, a + 3, a + 4, …, a + 2010 đều là hợp số.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho dãy n + 1, n + 2, n + 3, …, n + 10 có nhiều số nguyên tố nhất.

Bài 2. Cho $n \in N$; $n > 1$ và n không chia hết cho 3.

Chứng minh rằng số A = $3^{2n} + 3^n + 1$ là hợp số.

Bài 3. Tìm các số nguyên tố p sao cho 2p + 1 bằng lập phương của một số tự nhiên.

Bài 4. Tìm các số nguyên tố p sao cho 13p + 1 bằng lập phương của một số tự nhiên.

Bài 5. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thoả mãn phương trình :

$$(p + 1)(q + 2)(r +3) = 4pqr$$

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì

$$A = (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

Bài 7. Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k + 1)(k + 2)$.

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

Bài 8. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương tùy ý sao cho $ac = bd$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số $M = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

Chủ đề 3 PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Có thể sử dụng một hoặc kết hợp các tình huống sau :

– Đánh giá miền giá trị của biến *x*.

– Đưa về phương trình ước số.

– Sử dụng phương pháp kẹp giữa hai số nguyên liên tiếp không còn số nguyên nào nữa.

– Sử dụng tính chất chia hết, đồng dư thức.

– Dùng phương pháp cực hạn : sử dụng phần tử lớn nhất hay nhỏ nhất của một tập hợp số hữu hạn.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.

Gợi ý : Đánh giá miền giá trị của biến x.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho viết được dưới dạng : $(x - 3y)^2 = 4(25 - y^2)$. (1)

Từ (1) ta suy ra : $y^2 \le 25$ và $25 - y^2$ là số chính phương.

Vậy : $y^2 \in \{0, 9, 16, 25\} \Rightarrow y \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$.

Vậy phương trình có 12 nghiệm :

(10 ; 0) ; (–10 ; 0) ; (17 ; 3) ; (1 ; 3) ; (–17 ; –3) ; (–1 ; –3) ; (6 ; 4) ; (18 ; 4) ; (–18 ; –4) ; (–6, –4) ; (15 ; 5) ; (–15 ; –5).

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$(y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x = y^2 - 5y + 62.$$

Gợi ý : Đưa về phương trình ước số.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$$(y-2)x^2 + (y-2)(y-4)x = (y-2)(y-3) + 56$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-2)\left[x^2 + (y-4)x - (y-3)\right] = 56 \Leftrightarrow (y-2)(x-1)(x+y-3) = 56$$

Nhận thấy $(y - 2) + (x - 1) = (x + y - 3)$, nên ta phân tích 56 thành tích ba số nguyên sao cho tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy 56 = 1.7.8 = 7.1.8 = (–8).1.(–7) = 1.(–8).(–7)

= (–8).7.(–1) = 7.(–8).(–1).

Từ đó nghiệm của phương trình $(x ; y)$ là : (2 ; 9) ; (8 ; 3) ; (–7 ; 3) ; (2 ; –6) ; (–7 ; 9) ; (8 ; –6).

Ví dụ 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$.

Gợi ý : Sử dụng phương pháp kẹp giữa hai số nguyên liên tiếp không còn số nguyên nào nữa.

Hướng dẫn giải

Vì $1 + x + x^2 > 0$ với mọi x.

Từ phương trình suy ra : $x^3 < y^3 < (x+2)^3 \Rightarrow y^3 = (x+1)^3$.

Vậy ta có : $1 + x + x^2 + x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.

Phương trình có nghiệm : (0 ; 1) ; (–1 ; 0).

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$.

Hướng dẫn giải

(Sử dụng tính chất chia hết, đồng dư thức)

Viết lại phương trình dưới dạng : $x^6 + (x^3 - y)^2 = 320$.

Đặt $u = x^3$; $v = (x^3 - y)$ ta có $u^2 + v^2 = 320$.

Do đó u, v cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Giả sử u, v cùng lẻ thì $u^2 + v^2 \equiv 2 \pmod 4$.

Mà $320 \equiv 0 \pmod 4$ không xảy ra. Vậy u, v cùng chẵn.

Đặt $u = 2u_1$, $v = 2v_1$ ta được $u_1^2 + v_1^2 = 80$.

Lập luận tương tự có u_1, v_1 cùng chẵn đặt $u_1 = 2u_2$, $v_1 = 2v_2$ ta được $u_2^2 + v_2^2 = 20$.

Đặt $u_3 = 2u_2$; $v_3 = 2v_2$ ta có $u_3^2 + v_3^2 = 5$.

Vậy các cặp $(u_3 ; v_3)$ là (1 ; 2), (–1 ; 2), (1 ; –2) , (–1 ; –2).

Suy ra cặp nghiệm $(x ; y)$ là : (2 ; –8) ; (–2 ; –8) ; (2 ; 24) ; (–2 ; –24).

Ví dụ 5. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $x + y + z = xyz$.

Gợi ý : Dùng phương pháp cực hạn : sử dụng phần tử lớn nhất hay nhỏ nhất của một tập hợp số.

Hướng dẫn giải

Do vai trò của x, y, z là như nhau nên ta chỉ cần tìm các nghiệm x, y, z mà $x \geq y \geq z$, sau đó hoán vị các nghiệm vừa tìm được để được toàn bộ nghiệm của phương trình.

Ta có $3x \geq x + y + z = xyz \Rightarrow 3 \geq yz$.

+ Nếu $z = 0$ thì ta có $x + y = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$.

+ Nếu $z > 0$ thì $x \geq y \geq z > 0$.

Do $yz \leq 3$ nên ta có các khả năng sau :

* $y = z = 1 \Rightarrow x + 2 = x$ (vô nghiệm).

* $y = 2$; $z = 1 \Rightarrow x + 3 = 2x \Rightarrow x = 3$.

* $y = 3$, $z = 1 \Rightarrow x + 4 = 3x \Rightarrow x = 2 < y$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có 7 nghiệm là : (0, 0, 0) và (3, 2, 1) cùng với các hoán vị của nó.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả cặp số nguyên $(x\ ;\ y)$ thoả mãn : $y(x-1) = x^2 + 2$.

Bài 2. Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x\ ;\ y)$ thoả mãn :

$$(x^2 - 9y^2)^2 = 33y + 16.$$

Bài 3. Tìm các số nguyên x, y, z thoả mãn điều kiện :

$$6(y^2 - 1) + 3(x^2 + y^2z^2) + 2(z^2 - 9x) = 0.$$

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x\ ;\ y)$ thoả mãn : $x^2\,(x^2 + y^2) = y^{p+1}$.

Bài 5. Tìm các số nguyên dương x, y, t với $t \le 6$ thoả mãn phương trình sau :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7t - 2 = 0\,.$$

Chủ đề 4 TOÁN SUY LUẬN LÔ-GIC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

– Vận dụng nguyên lí Dirichlê : "Nhốt n + 1 chú thỏ vào n cái chuồng thì tồn tại ít nhất 1 cái chuồng nhốt nhiều hơn 1 chú thỏ".

– Vận dụng nguyên lí cực hạn : "Trong một tập hợp hữu hạn các số bao giờ cũng tồn tại số bé nhất và số lớn nhất".

– Vận dụng nguyên lí biên : "Trong mặt phẳng cho hữu hạn các điểm luôn tồn tại một đường thẳng đi qua 2 điểm đã cho mà các điểm còn lại đều nằm về một phía của đường thẳng đó".

– Xét các khả năng có thể xảy ra, sự sáng tạo trong việc đưa ra một mô hình cụ thể hợp lí, sự linh hoạt trong việc vận dụng các phương pháp như : phản chứng, nguyên lí Đirichlê, nguyên lí cực hạn, quy nạp toán học, đồ thị (đưa ra một mô hình hợp lí), tô màu, tính chất của dãi song song, đánh giá độ lớn của một yếu tố hình học, …

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho 100 số tự nhiên tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại 10 số sao cho hiệu hai số bất kì đều chia hết cho 11.

Gợi ý : Vận dụng nguyên lí Dirichlê.

Hướng dẫn giải

Bài toán thực chất đi chứng minh có ít nhất 10 số trong 100 số đã cho có cùng số dư khi chia cho 11.

Khi chia cho 11 ta nhận được 11 số dư : 0, 1, 2, …, 10. Ta lại có 100 = 11.9 + 1. Vậy 100 số dư *x*ếp vào 11 cái lồng theo nguyên tắc Dirichlê thì tồn tại một lồng chứa ít nhất 9 + 1 = 10 số dư giống nhau.

Vậy có ít nhất 10 số khi chia cho 11 có cùng số dư.

Ví dụ 2. Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu *x*anh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại hai điểm được tô cùng màu mà khoảng cách giữa chúng bằng 1.

Gợi ý : Vận dụng nguyên lí Dirichlê.

Hướng dẫn giải

Xét tam giác đều có cạnh bằng 1. Có ba đỉnh được tô bởi hai màu nên theo nguyên lí Dirichlê thì tồn tại hai đỉnh được tô bởi cùng một màu.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong 8 số tự nhiên, mỗi số có 3 chữ số, bao giờ cũng có thể chọn được hai số mà khi viết liền nhau ta thu được một số có 6 chữ số chia hết cho 7.

Gợi ý : Vận dụng nguyên lí Dirichlê.

Hướng dẫn giải

Trong 8 số luôn tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 7 suy ra hiệu của chúng chia hết cho 7, gọi hai số đó là $\overline{a_1a_2a_3}$, $\overline{b_1b_2b_3}$ suy ra : $\overline{a_1a_2a_3} - \overline{b_1b_2b_3} \vdots 7$.

Vậy : $\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3} = 1000\overline{a_1a_2a_3} + \overline{b_1b_2b_3} = 1001\overline{a_1a_2a_3} - \left(\overline{a_1a_2a_3} - \overline{b_1b_2b_3}\right) \vdots 7$ (vì $1001 \vdots 7$).

Ví dụ 4. Có n vận động viên thi đấu bóng bàn theo thể thức vòng tròn (mỗi đấu thủ đấu với tất cả đấu thủ còn lại). Chứng minh rằng có thể sắp xếp tất cả n vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau.

Gợi ý : Vận dụng nguyên lí cực hạn.

Hướng dẫn giải

Xét tất cả các cách xếp số vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau (các cách xếp như vậy luôn tồn tại, ví dụ xếp hai người thì người thắng đứng trước, người thua đứng sau). Vì số cách xếp là hữu hạn nên tồn tại một cách xếp P có nhiều vận động viên nhất. Ta chứng minh cách xếp P có đủ n vận động viên đã thi đấu.

Giả sử trái lại, còn một vận động viên A không được xếp trong cách xếp P. Giả sử trong cách xếp P có m người A_1, A_2, …., A_m ($2 \le m \le n-1$) sao cho A_1 thắng A_2, A_2 thắng A_3, …., A_{m-1} thắng A_m. Vì thi đấu vòng tròn nên A phải đấu với A_1. Nếu A thắng A_1 thì cách xếp P_1 theo thứ tự : A, A_1, …, A_m có nhiều vận động viên hơn cách xếp P, trái với cách chọn, vậy A thua A_1.Lập luận tương tự A thua A_2,A_3, …A_m. Khi đó cách xếp P_2 theo thứ tự A_1, A_2,…, A_m, A có nhiều vận động viên hơn cách xếp P.

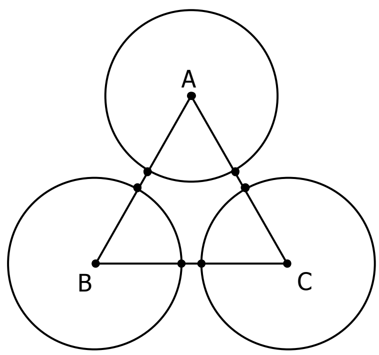
Vậy cách xếp P có đủ n vận động viên, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Về phía trong tam giác đều ABC cạnh bằng 21cm lấy hai điểm D và E tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm M nằm trên cạnh của tam giác đều ABC sao cho MD và ME đều có độ dài lớn hơn 10cm.

Gợi ý : Đồ thị (Tạo ra một mô hình hợp lí).

Hướng dẫn giải

Vẽ ba đường tròn (A), (B), (C) có bán kính bằng 10cm.



Vì AB = BC = CA = 21cm nên ba đường tròn (A), (B), (C) đôi một nằm ngoài nhau. Xét hai điểm D và E nằm trong tam giác đều ABC thì có các khả năng sau : cùng nằm trong một hình quạt, cùng nằm ngoài ba hình quạt, chỉ có một điểm nằm trong một hình quạt hoặc nằm trong hai hình quạt khác nhau. Trong tất cả các khả năng có thể xảy ra đó thì tồn tại điểm M trùng với một trong các đỉnh A, B, C thoả mãn MD > 10cm ; ME > 10cm.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp một tam giác thì nằm trong tam giác có đỉnh là trung điểm ba cạnh của tam giác đó.

Gợi ý : Vận dụng tính chất của dãi song song.

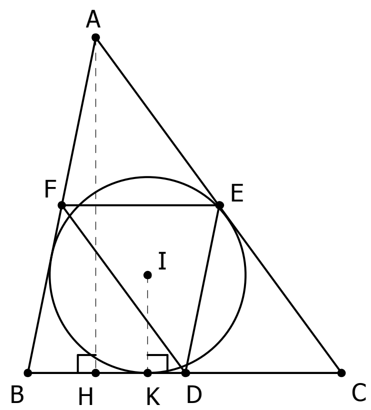
Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Gọi D, E, F thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Kẻ AH $\perp$ BC, IK $\perp$ BC.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}\left(BC + CA + AB\right).IK > \frac{1}{2}.2BC.IK$.

Do đó AH > 2IK $\Rightarrow IK < \frac{AH}{2}$.

Dễ thấy FE là đường trung bình của tam giác ABC nên FE // BC và khoảng cách giữa FE và BC bằng $\frac{AH}{2}$.



$\Rightarrow$ I nằm trong hai đường thẳng song song FE và BC (1).

Tương tự :

I nằm trong hai đường thẳng song song DF và AC (2).

I nằm trong hai đường thẳng song song DE và AB (3).

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ I nằm trong tam giác DEF.

Ví dụ 7. Tìm diện tích lớn nhất của một tam giác, biết rằng độ dài mỗi cạnh của nó không vượt quá 4.

Gợi ý : Vận dụng nguyên lí cực hạn.

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác ABC có góc A là góc nhỏ nhất $\Rightarrow \widehat{A} \le 60^0$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A \le \frac{1}{2}.4.4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, dấu "=" xảy ra khi AB = 4, AC = 4, $\widehat{A} = 60^0$ hay tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng 4.

Vậy max $S_{ABC} = 4\sqrt{3}$ đạt được khi tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng 4.

Ví dụ 8. Lấy mỗi cạnh của tứ giác ABCD làm đường kính, vẽ nửa đường tròn cùng phía với tứ giác. Chứng minh tồn tại ít nhất một điểm nằm trong hoặc nằm trên các nửa đường tròn đó.

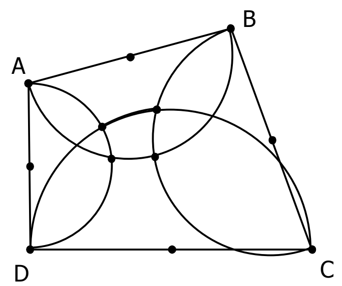
Gợi ý : Đánh giá số đo một góc đối với đường tròn và phương pháp phản chứng.

Hướng dẫn giải

Giả sử điểm M nằm trong tứ giác và nằm ngoài tất cả bốn nửa đường tròn đường kính AB, BC, CD,

DA thì $\widehat{AMB} < 90^0$; $\widehat{BMC} < 90^0$; $\widehat{CMD} < 90^0$ và $\widehat{DMA} < 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} < 360^0$, vô lí.



Vậy có ít nhất một điểm nằm trong hoặc nằm trên các nửa đường tròn đường kính AB, BC, CD, DA.

Ví dụ 9. Một n - giác ($n > 3$) có nhiều nhất bao nhiêu cạnh có độ dài bằng đường chéo lớn nhất.

Gợi ý : Phản chứng, kết hợp với bất đẳng thức tam giác.

Hướng dẫn giải

Xét n - giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ ($n > 3$) như hình vẽ sau :

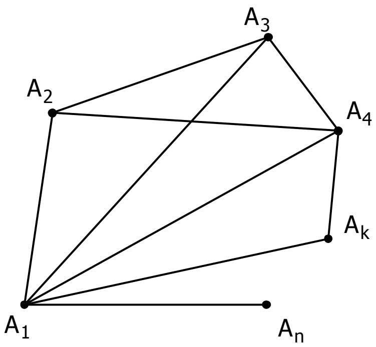
Giả sử đường chéo A_1A_k ($2 < k < n$) và giả sử có ít nhất 3 cạnh có độ dài bằng A_1A_k.

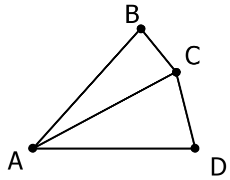
Chẳng hạn : A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4

Khi đó ta chứng minh được $A_1A_3 + A_2A_4 > A_1A_2 + A_3A_4 = 2A_1A_k$. Như vậy trong hai đường chéo A_1A_3 và A_2A_4 có ít nhất một đường chéo lớn hơn A_1A_k. Điều này vô lí, vì A_1A_k là đường chéo lớn nhất. Vậy trong các n – giác ($n > 3$) có nhiều nhất có 2 cạnh có độ dài bằng đường chéo lớn nhất.

Chẳng han : tứ giác ABCD có đường chéo AC lớn nhất và có hai cạnh AB và AD có độ dài bằng AC.

Như hình vẽ sau đây :





Ví dụ 10. Đa giác có bao nhiêu cạnh thì có mọi đường chéo đều bằng nhau.

Gợi ý : Xét các trường hợp đặc biệt, kết hợp với phương pháp phản chứng.

Hướng dẫn giải

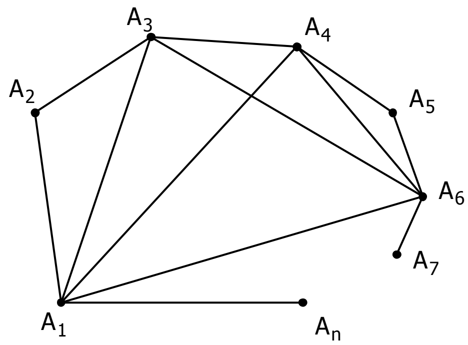
Với tứ giác thì có hình chữ nhật thoả mãn đề bài.

Với ngũ giác thì có ngũ giác đều thoả mãn đề bài.

Ta sẽ chứng minh với *n* – giác (*n* > 5) thì không thể có tất cả các đường chéo bằng nhau.

Thật vậy : Xét đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ với $n > 5$.

Ta chứng minh được $A_1A_4 + A_2A_6 > A_1A_3 + A_4A_6$.



Điều này chứng tỏ rằng trong các đường chéo A_1A_4 ; A_2A_6 ; A_1A_3 và A_4A_6 không thể tất cả đều bằng nhau.

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng cho 5 điểm phân biệt. Vẽ tất cả các đoạn thẳng nối 2 trong 5 điểm đó rồi vẽ các trung điểm của chúng. Có ít nhất bao nhiêu trung điểm ?

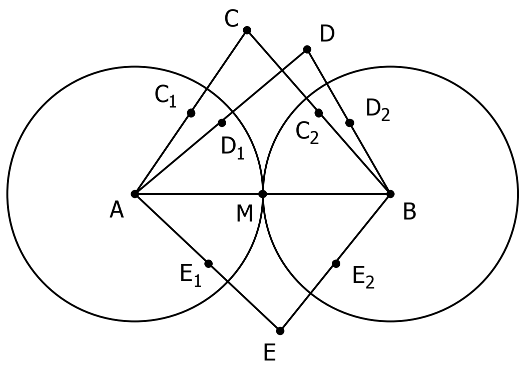
Gợi ý : Vận dụng nguyên lí cực hạn.

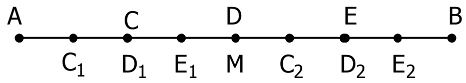
Hướng dẫn giải

Trong 5 điểm phân biệt A, B, C, D, E luôn tồn tại 2 điểm có khoảng cách lớn nhất.

Chẳng hạn : A và B. Gọi M là trung điểm của AB. Vẽ các đường tròn (A ; AM) và (B ; BM). Gọi C_1 ; C_2 ; D_1 ; D_2 ; E_1 ; E_2 thứ tự là trung điểm của CA, CB, DA, DB, EA, EB. Vì AB lớn nhất nên AC_1 ; AD_1 ; AE_1 nhỏ hơn AM và BC_2 ; BD_2 ; BE_2 nhỏ hơn BM.

Do đó C_1 ; D_1 ; E_1 nằm trong đường tròn (A ; AM) và C_2 ; D_2 ; E_2 nằm trong ường tròn (B ; BM). Mà A, B, C, D, E phân biệt nên C_1 ; D_1 ; E_1 ; C_2 ; D_2 ; E_2 không trùng nhau. Như vậy số trung điểm vẽ được không ít hơn 7.





Ta có thể chỉ ra một hình vẽ có đúng 7 trung điểm như sau :

Các điểm A, B, C, D, E thẳng hàng và AC = CD = DE = EB khi đó ta chỉ vẽ được 7 trung điểm của các đoạn thẳng vẽ được từ 5 điểm A, B, C, D, E là M, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2.

3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số gọi là $a_1, a_2, \dots, a_6$ sao cho tích : $P = (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6)$ chia hết cho 1800.

Bài 2. Trong hình tròn tâm O bán kính bằng 1 cho 8 điểm bất kì. Chứng minh rằng trong các điểm đã cho luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng luôn nhỏ hơn 1.

Bài 3. Cho 40 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots a_{19}$ và $b_1, b_2, \dots, b_{21}$ thoả mãn :

$$\begin{cases} 1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{19} \le 200 \\ 1 \le b_1 < b_2 < \dots < b_{21} \le 200 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại 4 số a_i, a_j, b_k, b_p $(1 \le i, j \le 19, 1 \le p, k \le 21)$ sao cho

$$\begin{cases} a_i < a_j \\ b_p < b_k \\ a_i - a_j = b_p - b_k \end{cases}$$

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$xyz = 4(x + y + z).$$

Bài 5. Bên trong đường tròn tâm O có bán kính 1, vẽ tam giác ABC có diện tích lớn hơn 1. Chứng minh rằng tâm O nằm trong hoặc trên cạnh của tam giác ABC.

Bài 6. Cho hai điểm A, B nằm trong đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua hai điểm A, B và nằm trong đường tròn (O).

Bài 7. Trong mặt phẳng cho 2013 điểm phân biệt sao cho bất kì ba điểm nào cũng tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng có thể tìm được một tam giác có diện tích nhỏ hơn 4 chứa tất cả 2013 điểm đã cho.

Bài 8. Trong tam giác đều có cạnh bằng 8, đặt 193 điểm phân biệt. Chứng minh tồn tại 2 điểm trong 193 điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 9. Đa giác có số đỉnh nhiều nhất là bao nhiêu thì bất kì ba đỉnh nào của đa giác đó cũng là ba đỉnh của một tam giác giác vuông.

Bài 10. Trong mặt phẳng cho 100 điểm phân biệt, không có 3 điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 điểm đã cho mà các điểm còn lại đều nằm ngoài đường tròn đó.

GỢI Ý – HƯỚNG DẪN GIẢI PHẦN SỐ HỌC

Chủ đề 1. TÍNH CHIA HẾT - ĐỒNG DƯ THỨC

Bài 1. Từ giả thiết ta có : a = 3m ± 1 ; b = 3n ± 1. Khi đó, biến đổi biểu thức, ta có :

$$a^6 - b^6 = 27(p-q)\left[(p-q)^2 + 3pq\right] \vdots 9.$$

Bài 2. Vì a không chia hết cho 2 và 3 nên a = 6m $\pm$ 1. Xét từng trường hợp để có điều phải chứng minh.

Bài 3. Gọi d = (n^2 + 4 ; n+ 5) ; d > 1. Ta có : d = 29.

Ngược lại nếu n + 5 $\vdots$ 29 thì n + 5 = 29k ($k \in \mathbb{N}^*$), suy ra

$n^2 + 4 = (29k - 5)^2 + 4 = 29(29k^2 - 5k + 1) \vdots 29 \Rightarrow$ A chưa tối giản.

Như vậy ta chỉ tìm n sao cho n + 5 = 29 k ($k \in \mathbb{N}^*$) và thoả mãn $1 \le n \le 2015$

$$1 \le 29k - 5 \le 2015 \Rightarrow 1 \le k \le 69.$$

Vậy có 69 giá trị của n để A chưa tối giản.

Bài 4. Ta có $5.\dfrac{11a+2b}{19} - 2\dfrac{18a+5b}{19} = a$, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 5. Đặt A(n) = $2^{2n} + 2^n + 1$. Ta tìm n sao cho A(n) chia hết cho 3 và 7.

* A(n) chia hết cho 3 khi và chỉ khi n chẵn.

* Xét số dư của n khi chia cho 7 ta được :

$$A(n) \vdots 7 \Leftrightarrow n \equiv 1 (\text{mod } 3) \text{ ; } n \equiv 2 (\text{mod } 3).$$

Vậy n = 6k + 2, hoặc n = 6k + 4.

Bài 6. Ta có 1000 = 8.125. Xét số dư của A khi chia cho 125.

Bài 7. $A \equiv 76 (\text{mod } 100) \Rightarrow A^n \equiv 76^n (\text{mod } 100)$. Xét $76^n - 76$ (mod100).

Bài 8. Có $2^3 = 8 \equiv 1 (\text{mod } 7)$ và $2^{2n} = 4^n \equiv 1 (\text{mod } 3)$.

Vậy $2^{2n} = 3k+1 (k \in N) \Rightarrow A = 2^{3k+1} + 5 = 2.8^k + 5 \equiv 2 + 5 \equiv 0 (\bmod 7)$.

Chủ đề 2. SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ - SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1. Gọi S(n) là số số nguyên tố trong dãy đã cho ứng với n, ta có : S(0) = 4 ; S(1) = 5 ; S(2) = 4.

Xét $n \geq 3$. Trong dãy n + 1, n +2 , …, n + 10 có 5 số chẵn lớn hơn 3 nên các số này không phải là số nguyên tố. Trong 5 số lẻ liên tiếp còn lại có ít nhất một số chia hết cho 3, số này lớn hơn 3 nên không phải là số nguyên tố. Vậy S(n) ≤ 4.

Đáp số : n = 1.

Bài 2. Chứng minh A chia hết cho 13.

Bài 3. Giả sử $2p + 1 = n^3 \Rightarrow$ n lẻ $\Rightarrow$ n = 2k + 1 $\Rightarrow$ $p = m(4m^2 + 6m + 3)$.

Do p là số nguyên tố nên m = 1. Vậy p = 13.

Bài 4. p = 2 ; p = 221.

Bài 5. Giả sử có các số nguyên tố p, q, r thoả mãn phương trình :

$$(p + 1)(q + 2)(r + 3)= 4pqr.$$

Ta xét các giá trị của r (lí do cực biên) trong ba trường hợp sau :

a) Nếu r = 2 thì phương trình trở thành : 5(p + 1)(q + 2) =8pq (1).

Vì (5, 8) = 1 nên 5 phải là ước nguyên tố của p hoặc của q, do đó p = 5 hoặc q = 5.

* Với p = 5, phương trình (1) trở thành : 30(q + 2) = 40q $\Leftrightarrow$ q = 6 (không thoả mãn).

* Với q = 5, phương trình (1) trở thành : 35(p + 1) = 40p $\Leftrightarrow$ p = 7 (thoả mãn).

b) Nếu r = 3, thì phương trình trở thành : (p + 1)(q + 2) = 2pq,

suy ra : pq – 2p – q = 2 hay (p – 1)(q – 2) = 4 = 1.4 = 2.2.

Do p, q đều là số nguyên tố nên (q – 2) khác 2 và khác 4.

Vậy q – 2 = 1 ta được q = 3, p = 5.

c) Nếu r > 3 ta có 4pqr = (p + 1)(q + 2)(r + 3) < 2r(p + 1)(q + 2), suy ra : 2pq < (p + 1)(q + 2) hay (p – 1)(q – 2) < 4, suy ra p < 5 nên p = 2 hoặc p = 3.

* p = 2, ta được 3(q + 2)(r + 3) = 8qr suy ra q là ước của 3 (vì r > 3) vậy q = 3 và r = 5.

* p = 3, ta được (q + 2)(r + 3) = 3qr suy ra 2pq – 3q – 2r = 6 hay

(q – 1)(2r – 3) = 9 = 1.9 = 3.3, mà 2r – 3 > 3 nên 2r – 3 = 9 suy ra r = 6 (không thoả).

Vậy phương trình có nghiệm (p ; q ; r) là (7 ; 5 ; 2), (5 ; 3 ; 3), và (2 ; 3 ; 5).

Bài 6. Viết A về dạng bình phương đúng của một số nguyên.

Bài 7. Cần chứng minh rằng $S = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$, rồi áp dụng kết quả bài 6.

Bài 8. Gọi k = ƯCLN(a,d) $\Rightarrow$ $a = ka_1$ và $d = kd_1$ (với a_1 và d_1 nguyên tố cùng nhau).

Từ ac = bd ta có $ka_1c = bkd_1 \Rightarrow a_1c = bd_1 \Rightarrow a_1c \vdots d_1$, mà a_1 và d_1 nguyên tố cùng nhau nên $c \vdots d_1 \Rightarrow c = td_1 \Rightarrow a_1td_1 = bd_1 \Rightarrow b = ta_1$.

Do đó $M = a^n + b^n + c^n + d^n = k^na_1{}^n + t^na_1{}^n + t^nd_1{}^n + k^nd_1{}^n = (k^n + t^n).(a_1{}^n + d_1{}^n)$.

Vì k, t, a_1, d_1 là các số nguyên dương và $n \in \mathbb{N}$

nên $k^n + t^n > 1$ và $a_1{}^n + d_1{}^n > 1$.

Vậy $M = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

Chủ đề 3. PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Bài 1. Ta có $y = x + 1 + \frac{3}{x-1}$. Vậy x – 1 là ước của 3.

Đáp số : (–2 ; –2), (0 ; –2), (4 ; 6), (2 ; 6).

Bài 2. Do y nguyên dương nên vế phải dương.

Phương trình tương đương với :

$$(3y)^2 < (3y)^2 + \sqrt{33y+16} < (3y+1)^2 \; x^2 = (3y)^2 \pm \sqrt{33y+16} \qquad (*)$$

– Xét y = 1, ta có : $\left[\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 4 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$, kết hợp điều kiện suy ra x = 4.

– Xét $y \geq 2$ Rõ ràng : $(3y)^2 - \sqrt{33y+16} < (3y)^2 < (3y)^2 + \sqrt{33y+16}$.

Mà $(3y)^2 - \sqrt{33y+16} > (3y-1)^2 \Leftrightarrow 6y - 1 > \sqrt{33y+16}$

$\Leftrightarrow 36y^2 - 12y + 1 > 33y + 16 \Leftrightarrow 36y^2 - 45y - 15 > 0$

$\Leftrightarrow 36(y-2)^2 + 99(y-2) + 39 > 0$ đúng với $y \geq 2$.

Và tương tự : $(3y)^2 + \sqrt{33y+16} < (3y+1)^2$.

Do đó $(3y)^2 < (3y)^2 + \sqrt{33y+16} < (3y+1)^2$. Số bị kẹp giữa bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp không thể là số chính phương. Suy ra khi $y \geq 2$ không có nghiệm x nguyên. Vậy có một cặp số thoả mãn là (4 ; 1).

Bài 3. Phương trình tương đương với :

$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 3y^2z^2 + 2z^2 = 33 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 2z^2 \leq 33 \\ z^2 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 \leq 16 \\ z^2 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow z^2 \in \{0 ; 9\}.$$

Nếu $z^2 = 0$, từ (1) suy ra : $(x-3)^2 + 2y^2 = 11$.

Vì $2y^2 \leq 11 \Rightarrow y^2 \leq 5 \Rightarrow y^2 \in \{0 ; 1 ; 4\}$.

* Với $y^2 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 11$ (loại).

* Với $y^2 = 1 \Rightarrow (x-3)^2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 0. \end{array}\right.$

* Với $y^2 = 4 \Rightarrow (x-3)^2 = 3$ (loại).

Nếu $z^2 = 9$, từ (1) suy ra : $(x-3)^2 + 11y^2 = 5$.

Vì $11y^2 \leq 5 \Rightarrow y^2 = 0$ suy ra $(x-3)^2 = 5$ (loại).

Vậy có các bộ số nguyên thoả mãn bài toán là : (6 ; –1 ; 0) và (0 ; –1 ; 0).

Bài 4. Đặt $x^2 = t$, ($t \geq 0$).

Khi đó (*) có dạng $t^2 + y^2t - y^{p+1} = 0 \Rightarrow \Delta_t = y^4 + 4y^{p+1}$.

Nếu p = 2 thì $\Delta_t = y^4 + 4y^3 = y^2.y(y+4)$. Do x nguyên nên t nguyên, vậy Δ_t phải là số chính phương. Suy ra

$$y(y+4) = a^2 (a \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (y+2-a)(y+2+a) = 4$$

Do (y + 2 –a) – (y + 2 + a) = –2a $\vdots$ 2 nên y + 2 – a và y + 2 + a cùng tính chẵn lẻ. Do đó ta có :

$$\left[\begin{array}{l} y+2-a = y+2+a = 2 \\ y+2-a = y+2+a = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = a = 0 \\ y = -4\,;\, a = 0. \end{array}\right.$$

* Với y = 0, thì t = 0 suy ra x = 0.

* Với y = –4 thì t = –8 (không thoả mãn điều kiện).

Nếu $p \geq 3$, đặt $p = 2n+1, (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

Khi đó $\Delta_t = y^4 + 4y^{2n+2} = y^4(1 + 4y^{2n-2})$.

Để Δ_t là số chính phương thì

$$1 + 4y^{2n-2} = \mathrm{m}^2 \ (\mathrm{m} \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (m - 2y^{n-1})(m + 2y^{n+1}) = 1.$$

Vì m – $2y^{n-1}$ và m + $2y^{n-1}$ cùng tính chẵn lẻ nên :

$$\left[\begin{array}{l} m - 2y^{n-1} = m + 2y^{n-1} = 1 \\ m - 2y^{n-1} = m + 2y^{n-1} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0\,;\, m = 1 \\ y = 0\,;\, m = -1. \end{array}\right.$$

Với y = 0 ta tìm được x = 0. Vây cặp số thoả mãn là (0 ; 0)

Bài 5. Phương trình (1) tương đương với : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 7(t + 1)$. (2)

Nhận xét : Một số chính phương khi chia cho 7 có số dư là : 0, 1, 2 hoặc 4. Do đó tổng hai số chính phương chia hết cho 7 thì cả hai số đó đều chia hết cho 7.

Từ (2) ta suy ra : $(x-2)^2 \vdots 7, (y-1)^2 \vdots 7 \Rightarrow (x-2) \vdots 7, (y-2) \vdots 7$

Do 7 là số nguyên tố nên $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 7(t+1) \vdots 49$, suy ra $(t+1) \vdots 7$ mà $1 \leq t \leq 7$ nên t = 6.

Vậy $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 49 = 0^2 + 7^2 = 7^2 + 0^2$.

Nếu $\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (y-1)^2 = 7^2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$ do $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.

Nếu $\begin{cases}(x-2)^2=7^2\\(y-1)^2=0^2\end{cases}$ thì $\begin{cases}x=9\\y=1\end{cases}$ do $(x, y\in \mathbb{N}^*)$.

Vậy có các số thoả mãn đề bài : (2 ; 8 ; 6) và (9 ; 1 ; 6).

Chủ đề 4. TOÁN SUY LUẬN LÔ-GIC

Bài 1. * Trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5, giả sử 9 số này là b_1, b_2, …,b_9. Mỗi số trong 9 số này khi chia cho 3 thì chỉ có số dư là 1 hoặc 2. Theo nguyên tắc Dirichlê thì tồn tại 5 số có cùng số dư khi chia cho 5, gọi các số này là b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

* Mỗi trong 5 số b_1,b_2, b_3,b_4, b_5 khi chia cho 5 chỉ có số dư là 1, 2, 3, 4. Theo nguyên tắc Diriclê thì tồn tại hai số có cùng số dư khia chia cho 5, giả sử hai số này là b_1, b_2.

Bây giờ xét các số b_3, b_4, b_5, b_6.

Nếu có hai số nào đó có cùng số dư khi chia cho 5, chẳng hạn b_3 và b_4 thì chọn $a_1= b_1$, $a_2=b_2$, $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$, $a_5 = b_5$ và $a_6 = b_6$.

Khi đó : $a_1-a_2\,\vdots\,3, a_3-a_4\,\vdots\,3 \Rightarrow P\,\vdots\,9$;

$a_1-a_2\,\vdots\,5, a_3-a_4\,\vdots\,5 \Rightarrow P\,\vdots\,25$;

$a_1-a_2\,\vdots\,2, a_3-a_4\,\vdots\,2, a_5+a_6\,\vdots\,2 \Rightarrow P\,\vdots\,8$.

Vậy P chia hết cho 9.25.8 = 1800.

Nếu không có hai số nào trong 4 số b_3, b_4, b_5, b_6 có cùng số dư khi chia cho 5 thì tồn tại một số chia 5 dư 1 và một số chia 5 dư 4. Gọi hai số đó là $b_5\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$ và $b_6\equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$. Khi đó ta chọn $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$, $a_5 = b_5$ và $a_6 = b_6$.

Ta có : $a_1-a_2\,\vdots\,3, a_3-a_4\,\vdots\,3 \Rightarrow P\,\vdots\,9$;

$a_1-a_2\,\vdots\,5, a_5+a_6\,\vdots\,5 \Rightarrow P\,\vdots\,25$;

$a_1-a_2\,\vdots\,2, a_3-a_4\,\vdots\,5, a_5+a_6\,\vdots\,2 \Rightarrow P\,\vdots\,8$.

Vậy trong trường hợp này thì P cũng chia hết cho 1800.

Bài 2. Nếu có một trong 8 điểm đã cho trùng với tâm O thì rõ ràng khoảng cách từ điểm đó đến 7 điểm còn lại đều nhỏ hơn 1.

Xét trường hợp không có điểm nào trùng với tâm O, ta chia hình tròn thành 7 hình quạt bằng nhau có góc ở tâm bằng $\frac{360^0}{7} < 60^0$. Trong 8 điểm đã cho có ít nhất hai điểm ta gọi là A, B thuộc một trong 7 hình quạt đã chia. Dễ dàng tìm được hình quạt cung 60^0 chứa trọn hình quạt cung $\frac{360^0}{7}$ mà có hai điểm A, B. Trong hình quạt cung 60^0 bán kính bằng 1 rõ ràng khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kì không lớn hơn 1, nên khoảng cách AB < 1. Ta suy ra điều phải chưng minh.

Bài 3. Xét các tổng có dạng $a_i + b_j$. Vì có tất cả 19.21 = 399 tổng như thế. Các tổng này nhận các giá trị từ 2 đến 400.

Nếu các tổng trên nhận đủ 399 giá trị từ 2 đến 399 thì $a_1 = b_1 = 1$,

$a_{19} = b_{21} = 200$ suy ra điều phải chứng minh.

Nếu các tổng trên không nhận đủ 399 giá trị từ 2 đến 399 thì tồn tại hai tổng bằng nhau từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4. Sử dụng phương pháp cực hạn, vì vai trò *x, y, z* như nhau nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Ta có $xyz = 4(x+y+z) \leq 12x \Rightarrow yz \leq 12 \Rightarrow z^2 \leq 12 \Rightarrow z \in \{1, 2, 3\}$.

Trường hợp z = 1, ta được xy = 4(x + y + 1) $\Leftrightarrow$ (x – 4)(y – 4) = 20, thay x – 4, y – 4 là các ước của 20 với $x - 4 \geq y - 4 \geq -3$ ta được cặp (x ; y) là (24 ; 5), (14 ; 6), (9 ; 8).

Các trường hợp còn lại cũng được giải tương tự, ta có kết quả phương trình có nghiệm là : (24 ; 5 ; 1), (14 ; 6 ; 1), (9 ; 8 ; 1), (10 ; 3 ; 2), (6 ; 4 ; 2) cùng với các hoán vị của các bộ số này.

Bài 5. Phương pháp phản chứng, đánh giá diện tích của một hình.

Giả sử tâm O nằm ngoài tam giác ABC. Không mất tính tổng quát, giả sử O và A nằm khác phía đối với BC. Vẽ đường kính DE // BC. Kẻ AH $\perp$ BC và kéo dài cắt DE tại K $\Rightarrow$ AK $\perp$ MN.

Khi đó BC < MN = 2 ; AH < AK $\leq$ AO = 1

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH < \frac{1}{2}.2.1 = 1$, vô lí.

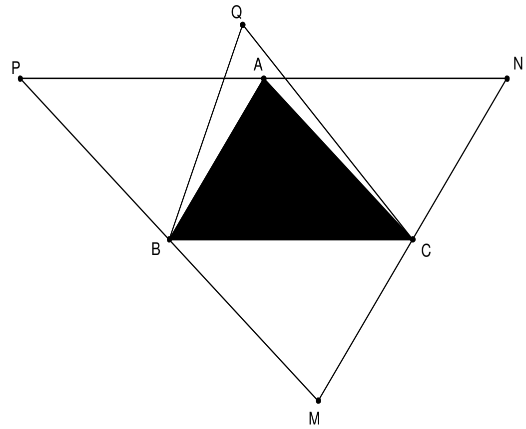
Bài 6. Xét các trường hợp, tạo ra một hình hợp lí.

* Trường hợp : 3 điểm A, O, B thẳng hàng thì dễ thấy đường tròn đường kính AB thoả mãn đề bài.

* Trường hợp : 3 điểm A, O, B không thẳng hàng. Không mất tính tổng quát, giả sử $OA \geq OB$. Dựng đường trung trực d của AB cắt OA ở C khi đó C nằm giữa O và A. Dễ thấy C có thể trùng với O nhưng không thể trùng với A. Hãy chứng minh đoạn nối tâm OC nhỏ hơn hiệu hai bán kính.

Bài 7. Tạo ra một hình hợp lí. Áp dụng nguyên lí Đirichlê.

Trong các điểm đã cho luôn tồn tại tam giác có diện tích lớn nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là tam giác ABC. Qua các đỉnh A, B, C lần lượt vẽ các đường thẳng song song với các cạnh BC, CA, AB chúng cắt nhau đôi một ở M, N, P. Vì ba điểm bất kì trong 2013 điểm đã cho luôn tạo thành tam giác có diện tích nhỏ hơn 1 nên $S_{ABC} < 1$. Dễ dàng suy ra $S_{MNP} < 4$.

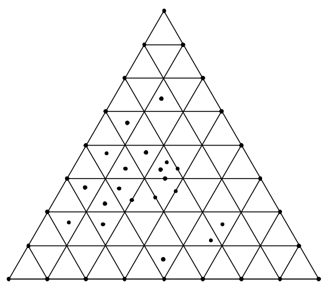


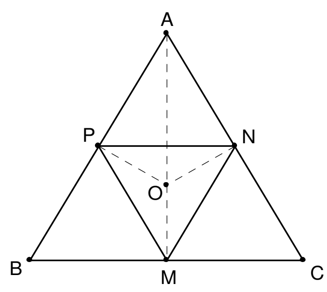
Ta cần chứng minh tất cả 2013 điểm đã cho không nằm ngoài tam giác MNP. Thật vậy : Không mất tính tổng quát giả sử có điểm Q nằm trên nửa mặt phẳng bờ NP không chứa tam giác ABC và $Q \notin$ đường thẳng NP.

Khi đó dễ thấy $S_{QBC} > S_{ABC}$ vô lí, vì S_{ABC} là lớn nhất.

Vậy tam giác MNP chứa tất cả 2013 điểm đã cho.

Bài 8. Tạo ra một hình hợp lí. Áp dụng nguyên lí Đirichlê.





* Chia tam giác đều cạnh bằng 8cm thành 64 tam giác đều cạnh bằng 1cm như hình vẽ trên.

* Ta có 193 chia cho 64 được thương là 3 và dư 1. Do đó, tồn tại ít nhất 4 điểm trong các điểm đã cho nằm trong tam giác đều cạnh bằng 1cm.

* Giả sử đó là tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của tam giác ABC, khi đó trong ba đường tròn đường kính OA, OB, OC chưa ít nhất 2 trong 4 điểm nói trên. Do đó khoảng cách giữa 2 điểm này không vượt quá

$AO = BO = CO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy tồn tại 2 trong 193 điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 9. Xét các trường hợp đặc biệt, nguyên lí cực hạn, phương pháp phản chứng, nguyên lí Đirichlê ?

Dễ thấy tam giác vuông, hình chữ nhật là các đa giác thoả mãn đề bài.

Ta chứng minh một đa giác có từ 5 đỉnh trở lên không thoả mãn đề bài.

Thật vậy : Xét đa giác ABCDE, không mất tính tổng quát giả sử AB có độ dài lớn nhất. Vẽ đường tròn đường kính AB, suy ta các đỉnh C, D, E đều thuộc đường tròn đường kính AB. Theo nguyên lí Đirichlê thì có 2 điểm cùng thuộc một nửa đường tròn. Chẳng hạn : C và D. Khi đó dễ thấy ΔACD hoặc ΔADC là tam giác tù, vô lí.

Bài 10. Áp dụng tính chất : "*Trong hữu hạn điểm đã cho tồn tại một đường thẳng đi qua 2 điểm đã cho mà các điểm còn lại đều nằm về một phía của đường thẳng đó*".

Trong 100 điểm đã cho tồn tại một đường thẳng đi qua 2 điểm sao cho các điểm còn lại đều nằm về một phía của đường thẳng đó. Chẳng hạn : đó là 2 điểm A và B. Xét tất cả các góc nhìn đoạn thẳng AB và có đỉnh là một trong các điểm còn lại, tồn tại góc có số đo lớn nhất. Chẳng hạn : đó là điểm C. Dựng đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn và tất cả các góc còn lại đều nhỏ hơn góc ACB nên tất cả các điểm còn lại đều nằm ngoài đường tròn (O). Vậy đường tròn (O) là đường tròn thoả mãn đề bài.

Phần bốn. MỘT SỐ ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT VÀ THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2009 - 2010
Môn thi : TOÁN
Thời gian làm bài : 120 phút

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Thực hiện phép tính : $A = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{9.2}$.

2) Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}+1\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-1\right)$ với $a \ge 0\,; a \ne 1$.

a) Chứng minh $P = a - 1$.

b) Tính giá trị của P khi $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

2) Tìm m để phương trình $x^2 - 5x - m + 7 = 0$ có hai nghiệm thoả mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

3) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Bằng phép tính hãy tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d).

Bài 3. (1,5 điểm)

Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ hai chảy trong 4 giờ thì được $\dfrac{2}{3}$ bể nước.

Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể ?

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O ; R) và một điểm S nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (với A, B là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua S (không đi qua tâm O) cắt đường trong (O : R) tại hai điểm M và N, với M nằm giữa S và N. Gọi H là giao điểm của SO và AB ; I là trung điểm của MN. Hai đường thẳng OI và AB cắt nhau tại E.

a) Chứng minh IHSE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $OI.OE = R^2$.

c) Cho $SO = 2R$ và $MN = R\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác ESM theo R.

Bài 5. (1,0 điểm)

Giải phương trình $\sqrt{2010 - x} + \sqrt{x - 2008} = x^2 - 4018x + 4036083$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2010 - 2011
Môn thi : TOÁN
Thời gian làm bài : 120 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính : $\sqrt{9} + \sqrt{25}$.

2) Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

b) $\begin{cases} 2x + y = 88 \\ x + 2y = 89. \end{cases}$

Bài 2. (1,5 điểm)

1) Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (P).

a) Vẽ (P).

b) Với giá trị nào của a thì điểm M(2 ; 4a) thuộc (P).

2) Cho hai đường thẳng (d_1) : $y = m^2x + 2m - 1$ và (d_2) : $y = 4x + m + 1$. Tìm giá trị của tham số m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Bài 3. (2,0 điểm)

Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc với vận tốc không đổi tại địa điểm A để đi đến địa điểm B cách nhau 300 km. Biết rằng mỗi giờ ô tô thứ hai đi nhanh hơn ô tô thứ nhất 10 km nên ô tô thứ nhất đến B chậm hơn ô tô thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn sao cho $\overset{\frown}{CA} < \overset{\frown}{CB}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Một đường tròn đi qua A và C (khác với đường tròn đường kính AB) cắt đường kính AB tại D và cắt tia Ax tại E. Đường thẳng EC cắt tia By tại F.

a) Chứng minh BDCF là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh CD^2= CE.CF

c) Gọi I là giao điểm của AC và DE ; J là giao điểm của BC và DF. Chứng minh IJ song song với AB.

d) Khi EF là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính AB thì D nằm ở vị trí nào trên AB ?

Bài 5. (1,0 điểm)

Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 1005x + 1 = 0$.

Gọi y_1 và y_2 là hai nghiệm của phương trình $y^2 + 1006y + 1 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức : $M = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 + y_2)(x_2 + y_2)$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2011 - 2012
Môn thi : TOÁN
Thời gian làm bài : 120 phút

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Thực hiện phép tính : $2\sqrt{9}+3\sqrt{16}$.

2) Giải phương trình và hệ phương trình sau :

a) $x^2-20x+96=0$.

b) $\begin{cases} x+y=4023 \\ x-y=-1. \end{cases}$

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là (P) và đường thẳng (d) : $y=x+2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy.

b) Bằng phép tính hãy tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d).

2) Trong cùng một hệ trục toạ độ Oxy cho 3 điểm : A(2 ; 4) ; B(–3 ; –1) và C(–2 ; 1). Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

3) Rút gọn biểu thức $M=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$ với $x>0$ và $x \neq 1$.

Bài 3. (1,5 điểm)

Hai bến sông A và B cách nhau 15 km. Thời gian một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B, tại bến B ca nô nghỉ 20 phút rồi ngược dòng từ bến B trở về đến bến A tổng cộng là 3 giờ.

Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 3 km/h.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua điểm C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Trên cung BD lấy điểm M (với M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E. Gọi F là giao điểm của AM và CD.

a) Chứng minh BCFM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh EM = EF.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM. Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng ; từ đó suy ra góc $\widehat{ABI}$ có số đo không đổi khi M thay đổi trên cung BD.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho phương trình (ẩn x) : $x^2 - (2m+3)x + m = 0$. Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của m để biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2012 - 2013
Môn thi : TOÁN
Thời gian làm bài : 120 phút

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Thực hiện phép tính : $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$.

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$.

3) Giải phương trình : $9x^2 + 8x - 1 = 0$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2x + m^2 + 1$ (m là tham số).

1) Xác định tất cả các giá trị của m để (d) song song với đường thẳng (d') : $y = 2m^2x + m^2 + m$.

2) Chứng minh rằng với mọi m, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

3) Kí hiệu x_A ; x_B là hoành độ của điểm A và điểm B. Tìm m sao cho $x_A^2 + x_B^2 = 14$.

Bài 3. (2,0 điểm)

Hai xe ô tô cùng đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh, xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ. Lúc trở về xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km mỗi giờ, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất. Tìm vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết chiều dài quảng đường từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là 120 km và khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB = 2R và C là một điểm nằm trên đường tròn sao cho CA > CB. Gọi I là trung điểm của OA. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại I, cắt tia BC tại M và cắt đoạn thẳng AC tại P ; AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K.

1) Chứng minh tứ giác BCPI nội tiếp được trong một đường tròn.

2) Chứng minh ba điểm B, P, K thẳng hàng.

3) Các tiếp tuyến tại A và C của đường tròn (O) cắt nhau tại Q. Tính diện tích của tứ giác QAIM theo R khi BC = R.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho x > 0, y > 0 thoả mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{-2xy}{1 + xy}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2013 - 2014
Môn thi : TOÁN
Thời gian làm bài : 120 phút

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Tính : $3\sqrt{16}+5\sqrt{36}$.

2) Chứng minh rằng với x > 0 và $x \neq 1$ thì $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

3) Cho hàm số bậc nhất : y = (2m + 1)x − 6.

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho nghịch biến trên R ?

b) Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm A(1 ; 2).

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình : $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

2) Tìm giá trị của tham số m để phương trình : $x^2 + mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn hệ thức $|x_1 - x_2| = 2$.

3) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y=xy-1 \\ x+2y=xy+1 \end{cases}$.

Bài 3. (2,0 điểm)

Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó, tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm ?

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (với M ; N là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây BC.

1) Chứng minh rằng : AMON là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng : AK.AI = AB.AC

3) Khi cát tuyến ABC thay đổi thì điểm I chuyển động trên cung tròn nào ? Vì sao ?

4) Xác định vị trí của cát tuyến ABC để IM = 2IN.

Bài 5. (1,0 điểm)

Với $x \neq 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = \dfrac{x^2 - 2x + 2014}{x^2}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NGÃI	**KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 NĂM HỌC 2013 - 2014 Môn thi : TOÁN (Hệ Chuyên) Thời gian làm bài : 120 phút**

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + x^2 + 1}$ với $x \geq 0$.

2) Chứng minh khi giá trị của m thay đổi thì các đường thẳng (m − 1)x + (2m + 1)y = 4m +5 luôn đi qua một điểm cố định. Tìm toạ độ cố định đó.

Bài 2. (1,5 điểm)

1) Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng khi giảm mỗi chữ số một đơn vị thì số mới được tạo thành cũng là một số chính phương có 4 chữ số.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + xy + y^2 = 3x + y - 1$.

Bài 3. (2,5 điểm)

1) Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 + (m+2)x - m + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn hệ thức $\left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right| = \dfrac{3}{10}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)\sqrt{x} = 2\sqrt{y} \\ (y+1)\sqrt{y} = 2\sqrt{x} \end{cases}$.

3) Giải phương trình $3\left(x^2-6\right)=8\left(\sqrt{x^3-1}-3\right)$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, AB < AC và đường tròn (O ; R) ngoại tiếp tam giác đó. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O ; R) cắt đường thẳng BC tại điểm M. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC.

1) Chứng minh rằng : $BC = 2R\sin\widehat{BAC}$.

2) Điểm N chuyển động trên cạnh BC (N khác B và C). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm N lên AB, AC. Xác định vị trí của điểm N để độ dài đoạn EF ngắn nhất.

3) Đặt BC = a ; CA = b ; AB = c. Tính độ dài đoạn thẳng MA theo a, b, c.

4) Các tiếp tuyến tại B của đường tròn (O ; R) cắt đường thẳng MA lần lượt ở P và Q. Chứng minh rằng HA là tia phân giác của góc PHQ.

Bài 5. (1,0 điểm)

Trong tam giác đều có cạnh bằng 8, đặt 193 điểm phân biệt. Chứng minh tồn tại 2 điểm trong 193 điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NGÃI	**KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT NĂM HỌC 2014 - 2015 Môn thi : TOÁN CHUYÊN Thời gian làm bài : 150 phút**

Bài 1. (1,5 điểm)

a) Cho biểu thức $P=\frac{3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1}$. Tìm tất cả các giá trị của x sao cho P > 2.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx - 1$ (m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Bài 2. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (a ; b) sao cho $\frac{a^2 - 2}{ab + 2}$ là số nguyên.

b) Cho 3 số nguyên dương a, b, c thoả điều kiện $2^a = b^c + 1$ và $a > 1$. Tìm tất cả các giá trị của c thoả mãn đẳng thức đã cho.

Bài 3. (2,5 điểm)

a) Cho x, y là các số thực thoả mãn $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y + 3$.

b) Giải phương trình : $(x + 4)^2 - 6\sqrt{x^3 + 3x} = 13$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên cạnh BC lấy điểm E ; đường thẳng qua B vuông góc với đường thẳng DE cắt DE tại H và cắt DC tại K. Gọi M là giao điểm của DB và AH.

a) Chứng minh ba điểm M, E, K thẳng hàng.

b) Chứng minh E là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác CHM.

c) Khi E di chuyển trên cạnh BC thì điểm H di chuyển trên đường nào ?

d) Khi $\widehat{MCH} = 30^0$, tính độ dài của đoạn HK theo a.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho 2014 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2014 hoặc có một số số mà tổng của các số đó chia hết cho 2014.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NGÃI	**KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT NĂM HỌC 2014 - 2015 Môn thi : TOÁN (không chuyên) Thời gian làm bài : 120 phút**

Bài 1. (1,5 điểm)

a) Thực hiện phép tính : $2\sqrt{25}+3\sqrt{4}$.

b) Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(1\ ;-2)$ và điểm $B(3\ ;4)$.

c) Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^4+5x^2-36=0$.

2) Cho phương trình $x^2-(3m+1)x+2m^2+m.1=0$ (1) với m là tham số.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Tìm m để biểu thức $B=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. (2,0 điểm)

Để chuẩn bị cho một chuyến đi đánh bắt cá ở Hoàng Sa, hai ngư dân đảo Lý Sơn cần chuyển một số lương thực, thực phẩm lên tàu. Nếu người thứ nhất chuyển xong một nửa số lương thực, thực phẩm ; sau đó người thứ hai chuyển hết số còn lại lên tàu thì thời gian người thứ hai hoàn thành lâu hơn người thứ nhất là 3 giờ. Nếu cả hai người cùng làm chung thì thời gian chuyển hết số lương thực, thực phẩm lên tàu là $\dfrac{20}{7}$ giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi người chuyển hết số lương thực, thực phẩm đó lên tàu trong thời gian bao lâu ?

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB ; P là một điểm thuộc cung MB (P khác M và P khác B). Đường thẳng AP cắt đường thẳng OM tại C ; đường thẳng OM cắt đường thẳng BP tại D. Tiếp tuyến của nửa đường tròn ở P cắt CD tại I.

a) Chứng minh OADP là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh OB.AC = OC.BD.

c) Tìm vị trí của điểm P trên cung MB để tam giác PIC là tam giác đều. Khi đó, hãy tính diện tích của tam giác PIC theo R.

Bài 5 : (1,0 điểm)

Cho biểu thức $A = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2)^{2014} + 2015$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2014 - 2015
Môn thi : TOÁN
Thời gian làm bài : 120 phút

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Thực hiện phép tính : $4\sqrt{9} + 9\sqrt{4}$.

2) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

3) Cho đường thẳng (d) : y = 2014x + m. Xác định m để (d) đi qua điểm A(1 ; −1).

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$.

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 4m - 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1 ; x_2 là nghiệm của phương trình (1), tìm một hệ thức liên hệ giữa x_1 ; x_2 không phụ thuộc vào m.

Bài 3. (2,0 điểm)

Một công ti dự định điều động một số xe chuyển 180 tấn hàng từ cảng Dung Quất vào thành phố Hồ Chí Minh, mỗi xe chở khối lượng hàng như nhau. Nhưng do nhu cầu thực tế cần chuyển thêm 28 tấn hàng nên công ti đó phải điều động thêm 1 xe cùng loại và mỗi xe bây giờ phải chở thêm 1 tấn hàng mới đáp ứng được nhu cầu đặt ra. Hỏi theo dự định công ti đó cần điều động bao nhiêu xe ? Biết rằng mỗi xe không được chở quá 15 tấn hàng.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R, điểm C thuộc nửa đường tròn (CA < CB). Gọi D là hình chiếu của C trên AB. Điểm E chuyển động trên đoạn thẳng CD (E khác C và D). Tia AE cắt đường tròn tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh rằng :

a) Tứ giác BDEF nội tiếp được đường tròn.

b) $AC^2 = AE.AF$.

2) Tính AE.AF + BD.BA theo R.

3) Khi điểm E chuyển động trên đoạn thẳng CD thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF chuyển động trên đường nào ? Vì sao ?

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho a, b $\neq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{7(a+b)^2 - 9(a-b)^2}{2014\left(a^2 + b^2\right)}.$$

MỤC LỤC