NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Tập san

số 04

10-2021

- Định lý cơ bản của Vi tích phân
- Một số bài toán Tích phân có sử dụng phương trình hàm
- Phương pháp tích phân từng phần tạo các lượng triệt tiêu
- Phân tích một số lỗi thường gặp trong biên soạn câu hỏi trắc nghiệm

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Trong quá trình trực tiếp giảng dạy Toán lớp 12 thì phần Tích phân là dạng toán không chỉ khó mà còn khá hay, lôi cuốn được các em học sinh. Nếu chúng ta biết sử dụng linh hoạt và khéo léo các tính chất, các phép biến đổi thì có thể đưa bài toán về một số bài toán dạng quen thuộc giúp các em hứng thú hơn, đam mê hơn với các bài toán Tích phân và qua đó giúp các em học sinh yêu thích môn Toán, mở ra một cách nhìn nhận, vận dụng linh hoạt và sáng tạo các kiến thức đã học, tạo nền tảng cho học sinh tự học, tự nghiên cứu. Chính vì vậy nội dung chính trong tập san số 4 là các bài viết tập trung vào các bài toán và dạng toán về Tích phân của thầy Nguyễn Văn Chánh, thầy Nguyễn Ngọc Chi, thầy Lê Tài Thắng cùng tập thể các thầy cô nhóm Giáo viên Toán Việt Nam. Bên cạnh đó là những chia sẻ kinh nghiệm cần lưu ý những sai lầm khi giáo viên biên soạn nội dung câu hỏi thi Trắc nghiệm của thầy Nguyễn Minh Nhiên. Để góp phần vào làm rõ những vấn đề đó **NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM** xin trân trọng giới thiệu, ra mắt cùng quý thầy cô và các em ấn phẩm **Tập san số 04**.

Hy vọng qua các nội dung bài viết trong Tập san sẽ cùng quý thầy cô trao đổi kinh nghiệm dạy học, tìm hiểu và nảy sinh những vấn đề hay, những kinh nghiệm mới và những góp ý thú vị. Chỉ có như vậy mới kịp thời đáp ứng những đổi mới không ngừng nghỉ về bề nổi trong giáo dục phổ thông mà Bộ đưa ra hàng năm. Hy vọng tập san cũng là sân chơi để giáo viên chủ động trong công tác dạy học chứ không phải là các thợ dạy chạy theo đổi mới của Bộ.

Để hoàn thành Tập san, BQT chân thành cám ơn tất cả các thành viên của nhóm đã rất tâm huyết tham gia, xây dựng Tập san.

Tài liệu tuy đã được nhóm tổ chức làm cẩn thận, phản biện nhiều lần, nhưng không thể tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp tích cực từ quý thầy cô. Các ý kiến đóng góp chân thành của quý thầy cô là nguồn động lực để chúng tôi tiếp tục vững bước trên con đường mới và xây dựng tập san ngày càng chất lượng hơn. Mọi ý kiến đóng góp, bài viết gửi đăng xin gửi về theo địa chỉ:

mail: nhomGVTVN@gmail.com

BQT NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM!

Các thành viên tham gia Tập san

Ban quản trị NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM
Thầy/cô giáo: Trương Quốc Toản, Nguyễn Khải, Nguyễn Ngọc Chi, Lê Tài Thắng, Nguyễn Minh Nhiên, Nguyễn Văn Chánh, Dương Hương, Ngô Nguyễn Quốc Mẫn, Nam Phương, Ducthanh Pham, Nguyễn Trang, Thuy Dao.

Trân trọng!

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA VI TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Thầy Aki Le – ĐH Pôn Pa

Trong bài viết nhỏ này, tôi sẽ trình bày định lý cơ bản của Vi tích phân và đưa ra một số ứng dụng của nó. Ở đây, tôi chỉ muốn đưa ra một góc nhìn liên quan định lý và không có định hướng đến việc hệ thống các kết quả theo một trật tự có hệ thống.

1. Định lý cơ bản của Vi tích phân

Để tránh sự phiền hà, trong bài viết này tôi không đưa ra định nghĩa tích phân xác định. Bạn đọc có thể tham khảo các cách tiếp cận khác nhau trong các giáo trình căn bản về giải tích, chẳng hạn sử dụng nguyên hàm; sử dụng tổng Riemann; sử dụng tổng Darboux. Trong bài viết này, tôi sẽ sử dụng một số ký hiệu sau:

$F(x)\big|_{x=a}$ để thay cho $F(a)$ và $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)$ để thay cho $F'(x)$ trong một số trường hợp cần thiết.

Ở đây, ngoài việc thừa nhận định nghĩa tích phân, ta còn thừa nhận một số tính chất của tích phân như: Với f và g thỏa $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ tồn tại và các số thực c, d, ta có các kết quả **bổ trợ**

1) $\int_a^b 0\mathrm{d}x = 0,$

2) $\int_a^b (cf(x)+dg(x))(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + d\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,

3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ nếu $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ tồn tại.

4) Nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Các tính chất khác của tích phân nếu được sử dụng sẽ chứng minh lại. Ở đây, ta cũng qui ước:

$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ và $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ khi $a > b.$

Trong lĩnh vực số học, định lý về sự phân tích một số tự nhiên ra thừa số nguyên tố chính là Định lý cơ bản của Số học. Trong Đại số, định lý về tồn tại nghiệm (phức) của đa thức bậc lớn hơn bằng một với hệ số phức chính là định lý cơ bản của Đại số. Tương tự như vậy, trong Giải tích/ Vi tích phân cũng có một định lý được gọi là Định lý cơ bản của Vi tích phân. Định lý là cầu nối hai vấn đề trung tâm của lĩnh vực Vi tích phân (đạo hàm và tích phân).

Định lý (Định lý cơ bản của Vi tích phân)

Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục. Khi đó

i) $G(x):=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$ là một nguyên hàm của hàm f trên $[a;b]$, nghĩa là $G'(x)=f(x)$ với mọi $x\in[a;b]$.

ii) Với bất kỳ nguyên hàm F của f trên $[a;b]$, ta đều có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b := F(b)-F(a) \quad (*).$$

Chứng minh định lý được bỏ qua vì việc chứng minh tùy thuộc vào định nghĩa của tích phân. Thậm chí SGK Giải tích 12 đã sử dụng định lý này như định nghĩa của tích phân xác định.

<u>Một số nhận xét:</u>

- Ở đây đạo hàm tại $a\,(b)$ của G có thể hiểu là đạo hàm phải (đạo hàm trái) hoặc định nghĩa dựa vào sự mở rộng hàm G trên $(c;d)\supset[a;b]$.
- Phần thứ nhất, i), của Định lý cơ bản của Vi tích phân có thể viết lại dưới dạng $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=f(x).$
- Phần thứ hai, ii), của Định lý cơ bản của Vi tích phân được biết như công thức Newton- Leibniz và có thể phát biểu lại: Nếu F có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì
$$\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a).$$
- "Định lý cơ bản của Vi tích phân" là tên gọi cho một định lý cụ thể chứ không phải là cách chung chung cho các định lý căn bản của Vi tích phân. Nó có vai trò quan trọng trong việc kết nối hai khái niệm quan trọng bật nhất của Vi tích phân, đó là đạo hàm và tích phân. Đồng thời định lý cho ta sự liên hệ giữa tích phân xác định và tích phân bất định.

- Theo phần thứ nhất của Định lý, ta có $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$ và $G(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$ Điều này có vẻ mâu thuẫn với phần thứ hai của Định lý: $G(b)-G(a)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

  Tuy nhiên điều này không có điều gì bất ổn. Ta có $G(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0.$ Do đó,

  $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b)-G(a)=G(b).$

- Đẳng thức (*) không phụ thuộc vào nguyên hàm được chọn. Thật vậy, giả sử H là một nguyên hàm khác của f trên $[a;b]$; khi đó, theo định lý giá trung bình, ta nhận được $H=F+C$ trên $[a;b]$ với C là một hàm hằng số thực (có thể xem như hàm hằng), và

$$H(b)-H(a)=(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

2. Một số hệ quả Định lý cơ bản của Vi tích phân

Hệ quả 1. Mọi hàm liên tục trên một đoạn thì có nguyên hàm trên đoạn đó.

Ví dụ 1. Tính $f'(0)$ với $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t.$

Bình luận. Phần thứ nhất của Định lý cơ bản của Vi tích phân dẫn đến $g(x)=e^{x^2}$ có nguyên hàm. Tuy nhiên, như ta đã biết hàm này không có nguyên hàm sơ cấp. Chính vì thế, ta không cố gắng bỏ công sức để tìm công thức tường minh, ở hình thức đơn giản, của $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ rồi từ đó ta tính đạo hàm của hàm f. Tuy vậy, ta có thể dễ dàng tìm được $f'(0)$ nhờ vào Định lý cơ bản của Vi tích phân.

Lời giải.

Áp dụng phần thứ nhất của Định lý cơ bản của Vi tích phân, ta nhận được $f'(x)=e^{x^2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó $f'(0)=e^0=1.$

Ví dụ 2. Cho hàm $f(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{khi } x\neq 0,\\ 0 & \text{khi } x=0.\end{cases}$

Chứng minh rằng f không liên tục tại 0 và f có nguyên hàm (trên $\mathbb{R}$) là

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{khi } x\neq 0,\\ 0 & \text{khi } x=0.\end{cases}$$

Lời giải.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2k\pi}\right)=-1,\ f\left(\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right)=1$ đồng thời các dãy $\left\{\dfrac{1}{2k\pi}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right\}$ đều hội tụ về 0. Tuy nhiên, $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(\dfrac{1}{2k\pi}\right)=-1\neq 1=\lim\limits_{k\to\infty} f\left(\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right)$. Vì thế f không liên tục tại 0.

Mặt khác, hàm $g(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ chính là đạo hàm của $h(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Do đó F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Để hoàn tất chứng minh ta cần kiểm tra $F'(0)=0=f(0)$.

Thật vậy, với $x\neq 0$, ta có $\left|\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right|=|x|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|$. Điều này dẫn đến

$$-|x|\leq\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\leq|x|,\ \forall x\neq 0.$$

Hơn nữa, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0.$

Khi đó, áp dụng định lý kẹp, ta nhận được $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=0$. Do đó, theo định nghĩa đạo hàm, $F'(0)$ tồn tại và $F'(0)=0=f(0)$. ■

Ví dụ này cho thấy điều kiện liên tục trong hệ quả 1 chỉ là điều kiện đủ và không là điều kiện cần.

Hệ quả 2. Nếu f' có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ với mọi $x\in[a;b]$.

Hệ quả 3. Cho hàm số u khả vi trên khoảng I và hàm số f liên tục trên khoảng K chứa $\{a\}\cup u(I)$. Khi đó $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=f(u(x))u'(x)$ với mọi $x\in I$.

Chứng minh. Phần thứ nhất của Định lý cơ bản của vi tích phân dẫn đến tồn tại hàm F là một nguyên hàm của hàm f trên khoảng K, nghĩa là $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$. Áp dụng phần thứ hai của Định lý cơ bản của vi tích phân dẫn đến $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$ với mọi $x\in K$. Hơn nữa, vì $\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t=F(u(x))-F(a)$ nên áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp, ta nhận được

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=F'(u(x))u'(x)=f(u(x))u'(x).$$ ■

Hệ quả 4. Cho hàm $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ thỏa $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in[a;b]$ và $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$. Khi đó $f(x)=0$ với mọi $x\in[a;b]$.

Chứng minh. Xét hàm số $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ trên $[a;b]$. Ta có $F'(x)=f(x)\geq 0$ với mọi $x\in[a;b]$. Chính vì thế F là hàm không giảm. Do đó, $0=F(a)\leq F(x)\leq F(b)=0$ với mọi $x\in[a;b]$. Từ đó, ta thấy $F(x)=0$ với mọi $x\in[a;b]$. Vì vậy $f(x)=F'(x)=0$. ■

Nhận xét. Kết quả này có thể suy ra từ kết quả bổ trợ 4) cùng phương pháp phản chứng.

Hệ quả 5. Cho hàm $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa $f(x)>0$ với mọi $x\in[a;b]$. Khi đó $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

Hệ quả 6 (Định lý giá trị trung bình cho tích phân) Cho hàm f liên tục trên $[a,b]$. Khi đó có số thực $c\in(a,b)$ sao cho

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(c).$$

Chứng minh. Điều cần chứng minh tương đương $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(c)(b-a)$.

Ta xét hàm $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ trên $[a;b]$. Hiển nhiên hàm này có đạo hàm trên $[a;b]$. Vì thế, theo định lý Lagrange, tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho $F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)$. Điều này dẫn đến $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(c)(b-a)$. ■

Nhận xét. Đại lượng $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ được "gán" ý nghĩa là giá trị trung bình của hàm f trên $[a;b]$.

3. Một số ứng dụng của Định lý cơ bản của Vi tích phân

Bài toán 1. Cho hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^{x^2-x} f(t)\mathrm{d}t$.

Lời giải.

Xét $F(x)=\int_0^{x^2-x} f(t)\mathrm{d}t$. Ta có hàm F khả vi trên $\mathbb{R}$, $F(0)=0, F'(x)=f(x^2-x)(2x-1)$. Áp định nghĩa đạo hàm cùng Hệ quả 2, ta nhận được

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^{x^2-x} f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=-f(0).$$

Bài toán 2. Cho hàm số $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x)=\int_0^{x^2-x}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm f.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=(2x-1)\sqrt{1-(x^2-x)^2}$.

Trên khoảng $(0;1)$, phương trình $f'(x)=0$ chỉ có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$.

Hàm liên tục f sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$. Hơn nữa, ta có

$$\min_{[0;1} f=\min\left\{f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right\}.$$

Mặt khác $f(0)=f(1)=0<f\left(\frac{1}{2}\right)$. Do đó $\min_{[0;1]} f=f(0)=0.$

Bài toán 3. Cho các số thực a, b và c thỏa $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[0;1]$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c.$ Áp dụng Hệ quả 6, ta có ít nhất một số thực $x_0\in(0;1)$ sao cho $\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=f(x_0).$

Do đó $f(x_0)=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0.$ Từ đó, ta thu được điều cần chứng minh.

Bài toán 4. Cho $f:[0;1]\to[0;1]$ là hàm liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh rằng phương trình $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ có duy nhất nghiệm trên $[0;1]$.

Lời giải.

Xét hàm số $G(x)=2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-1$ trên $[0;1]$. Ta có hàm G khả vi trên $(0;1)$ và liên tục trên $[0;1]$.

Ta có $G(0)=-1<0, G(1)=1-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\ge 1-\int_0^1\mathrm{d}t=0$ (vì $f(x)\in[0;1]$ với mọi $x\in[0;1]$). Do đó, theo định lý giá trị trung gian, tồn tại $c\in[0;1]$ sao cho $G(c)=0$. Hơn nữa, trên $(0;1)$, ta có $G'(x)=2-f(x)>0$ với mọi $x\in(0;1)$. Do đó hàm liên tục G đơn điệu trên $[0;1]$. Từ đó, ta suy ra nghiệm c của phương trình $G(x)=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình này trên $[0;1]$.

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm số thực f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử tồn tại một hàm f thỏa đề. Vì $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên đạo hàm 2 vế ta nhận được $2-f(x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó, $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2x-\int_0^x 2\mathrm{d}t=0\neq 1$ trên $\mathbb{R}$. Do đó, không tồn tại hàm f nào thỏa đề.

Bài toán 6. Cho $a\in\mathbb{R}$ và hàm f khả vi trên $[0,+\infty)$ thoả mãn các điều kiện: $f(0)\ge 0$ và

$f'(x)+af(x)\ge 0$ với mọi $x\in[0;+\infty)$. Chứng minh rằng $f(x)\ge 0$ với mọi $x\ge 0$.

Lời giải. Ta xét $g(t)=e^{at}f(t)$ trên $[0;\infty)$. Ta có $g'(t)=e^{at}\left(f'(t)+af(t)\right)\ge 0$ với mọi $t\in[0;+\infty)$.

Ta có $g(x)-g(0)=\int_0^x g'(t)dt\ge 0$ với mọi $x\ge 0$. Do đó $e^{ax}f(x)\ge f(0)\ge 0$ với mọi $x\ge 0$. Từ đó, ta nhận được điều cần chứng minh.

Bài toán 7. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thoả mãn điều kiện

$\int_x^1 f(t)dt\ge \frac{1-x^2}{2},\forall x\in[0,1]$. Hãy chứng minh $\int\limits_0^1 [f(x)]^2\,dx\ge\int_0^1 xf(x)dx$.

Lời giải. Xét hàm số $F:[0;1]\to\mathbb{R}$ với $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$ với mọi $x\in[0;1]$. Khi đó $F(1)=0$,

$F'(x)=-f(x)$ và $F(x)\ge\frac{1-x^2}{2}$ với mọi $x\in[0,1]$. Ta cần chứng minh

$$\int\limits_0^1\left[\left(F'(x)\right)^2+xF'(x)\right]dx\ge 0.$$

Vì $\left(F'(x)\right)^2+xF'(x)=\left(F'(x)+x\right)^2-xF'(x)-x^2\ge -xF'(x)-x^2$ với mọi $x\in[0;1]$ nên

$$\int\limits_0^1\left[\left(F'(x)\right)^2+xF'(x)\right]dx\ge\int\limits_0^1\left(-xF'(x)-x^2\right)dx=-xF(x)\Big|_0^1+\int_0^1 F(x)dx-\frac{1}{3}$$
$$\ge\int_0^1 F(x)dx-\frac{1}{3}\ge\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)dx-\frac{1}{3}=0.$$

Bài toán 8. Cho hàm số liên tục $f:[0,1]\to[0;+\infty)$ thoả mãn điều kiện $[f(x)]^2\le 1+2\int_0^x f(t)dt$ với mọi $x\in[0,1]$. Chứng minh rằng $\int_0^x f(t)dt\le x+\frac{x^2}{2},\forall x\in[0,1]$.

Lời giải. Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ với $x\in[0,1]$. Ta có $F(0)=0, F'(x)=f(x)\ge 0$ với mọi $x\in[0,1]$.

Do đó $F'(x)\le\sqrt{1+2F(x)}$ với mọi $x\in[0,1]$. Từ đó, ta nhận được $\frac{F'(x)}{\sqrt{1+2F(x)}}\le 1$ với mọi $x\in[0,1]$.

Sử dụng bất đẳng thức tích phân (kết quả bổ trợ 4)), ta nhận được $\int\limits_0^x\frac{F'(t)dt}{\sqrt{1+2F(t)}}\le\int_0^x dt$ với mọi

$x \in [0,1]$. Điều này tương đương $\sqrt{1+2F(x)}-1 \le x$ với mọi $x \in [0,1]$. Chính vì thế, ta nhận được

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \le x+\dfrac{x^2}{2}, \forall x \in [0,1]$. ■

4. Một số bài toán liên quan

Bài toán 1. Chứng minh hàm số $g(x)=\int_x^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}s}{\ln s}$ là hàm tăng trên $[1;\infty)$.

Bài toán 2. Cho hàm số f liên tục và dương trên $[0;+\infty)$. Chứng minh rằng hàm số $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Bài toán 3. Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi $f(y)=\int_y^{1-y}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm f trên $[0;1]$.

Bài toán 4. Tìm các hàm số thực f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 5. Cho hàm $f:[a;b]\to[0;\infty)$ liên tục và có $x_0 \in [a;b]$ thỏa $f(x_0)>0$. Khi đó $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

Bài toán 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0,1]$ và thoả mãn điều kiện $\int\limits_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x \le \dfrac{x_2^3-x_1^3}{3}$ với mọi $x_1,x_2 \in [1,2]$ sao cho $x_1 \le x_2$. Chứng minh rằng $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \le \dfrac{3}{2}$.

Bài toán 7. Tìm các hàm số thực f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $2x-\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 8. Cho hàm f khả vi trên đoạn $[a,b]$ đồng thời thỏa $f(a)=0$ và có hằng số không âm C sao cho $\left|f'(x)\right| \le C\left|f(x)\right|$ với mọi $x \in [a,b]$. Chứng minh $f(x)=0$ với mọi $x \in [a,b]$.

Bài toán 9. Cho hàm số liên tục $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ và tồn tại số thực α sao cho

$$0 \le f(x) \le \alpha\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \forall x \ge 0.$$

Chứng minh rằng $f(x)=0$ với mọi $x \ge 0$.

Bài toán 10. Tìm tất cả các hàm số xác định và liên tục trên $(-\infty,+\infty)$ và thoả mãn điều kiện sau:

$f(x)-f(y)=\int_{x+2y}^{2x+y} f(t)\mathrm{d}t, \forall x, y \in(-\infty;+\infty)$.

Bài toán 11. Cho f là một hàm số thực xác định trên $[1;\infty)$ thỏa $f(1)=1$ và $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$ với mọi $x\geq 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại và nhỏ hơn $1+\dfrac{\pi}{4}$.

Bài toán 12. Cho $f:[0,1]\to[0,1]$ liên tục sao cho: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho: $f(c)=\int_0^c f(x)\mathrm{d}x$.

Bài toán 13. Cho hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[a,b]$ và thoả mãn điều kiện $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho $f(c)=2005\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Bài toán 14. Cho hàm số $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$. Chứng minh rằng $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geq 4\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

Bài toán 15. Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)=f(b)=0$, $\left|f'(x)\right|\leq 1, \forall x\in[a,b]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Tài liệu tham khảo.

[1] Văn Phú Quốc, Bài tập Giải tích dành cho Olympic Toán, Trường Đại Học Quảng Nam

[2] Kaczor, W. J., and M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis. 3, Integration*. American Mathematical Society.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG TÍCH PHÂN CÓ VẬN DỤNG PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Thầy Nguyễn Ngọc Chi

Trường THPT Kinh Môn – Hải Dương

Trong chương trình SGK giải tích lớp 12, các dạng tích phân được tính bằng các tính chất của tích phân và tính chất của hàm số hay tích phân thông qua giả thiết là các dạng phương trình hàm xuất hiện rất ít, chính vì vậy khả năng thực hành tính toán của học sinh còn nhiều hạn chế hay chưa nói đến là gặp rất nhiều khó khăn. Trước đây, trong các kì thi từ thi tốt nghiệp THPT đến các kỳ thi Đại học, Cao đẳng hay ngay trong quá trình dạy hầu như không xuất hiện các dạng tích phân cho dưới dạng phương trình hàm, vì vậy sự quan tâm của giáo viên và học sinh về vấn đề này là không có. Từ khi Bộ GD&ĐT chuyển hình thức thi môn Toán từ thi tự luận sang thi trắc nghiệm thì dạng tích phân này đã có trong đề thi đã xuất hiện và khi dạy học vấn đề này cũng được các thầy cô và các em học sinh quan tâm hơn. Từ những lý do trên tôi đã mạnh dạn viết bài nhỏ này để nói về một số bài toán tích phân có sử dụng phương trình hàm và cách giải của chúng với mục tiêu dẫn dắt học sinh biết vận dụng những kiến thức cơ bản, kết hợp các phương pháp được tiếp cận từ sách giáo khoa để tạo được một thói quen mới, một phương pháp mới cho dạng toán Tích phân.

Nội dung chung của các bài toán dạng này là yêu cầu tính tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nhưng chưa cho biết hàm số $f(x)$ mà chỉ biết $f(x)$ thỏa mãn một phương trình hàm cho trước.

Phương pháp chung:

Cách 1: Sử dụng các kiến thức về phương trình hàm để tìm hàm số $f(x)$.

Cách 2: Biểu diễn hàm $f(x)$ qua hàm $g(x)$ mà ta có thể tính được $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Dạng 1. Tích phân liên quan đến biểu thức $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=g(x)$

Phương pháp:

Ta có $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=g(x) \Leftrightarrow [u(x).f(x)]'=g(x)$. Suy ra $u(x).f(x)=\int g(x)\mathrm{d}x$. Từ đó tìm được $f(x)$.

Ví dụ 1. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2018}$ và $2018f(x)+x.f'(x)=2x^{2018}$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. $I=\frac{1}{2018.2019}$

B. $I=\frac{1}{2019}$

C. $I=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}$

D. $I=1$

Nhận xét : *trước hết ta đi tìm biểu thức* $u(x)$. *Ta có*

$$\Rightarrow \ln|u(x)|=\int\frac{2018}{x}dx \Rightarrow \ln|u(x)|=2018\ln|x|+c \Leftrightarrow \ln|u(x)|=\ln x^{2018}+c$$

nên ta chọn $u(x)=x^{2018}$*, khi đó ta có lời giải như sau:*

Lời giải

Ta có $\left[x^{2018}.f(x)\right]'=2018x^{2017}f(x)+x^{2018}f'(x)=x^{2017}\left[2018f(x)+xf'(x)\right]=x^{2017}.\left[2x^{2018}\right]=2x^{4035}$

Khi đó $x^{2018}f(x)=\int 2x^{4035}dx \Leftrightarrow x^{2018}f(x)=\frac{x^{4036}}{2018}+c$, do $f(1)=\frac{1}{2018}\Leftrightarrow \frac{1}{2018}=\frac{1}{2018}+c$

$$\Leftrightarrow c=0 \Rightarrow x^{2018}f(x)=\frac{x^{4036}}{2018}\Rightarrow f(x)=\frac{x^{2018}}{2018}$$

khi đó $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^{2018}}{2018}dx=\left(\frac{x^{2019}}{2019.2018}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2018.2019}$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$. Biết $(x-1).f'(x)+f(x)=3x^2-2x$ và $f(1)=-1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{4}{3}-4\ln 2.$

B. $I=\frac{3}{4}-4\ln 2.$

C. $I=\frac{4}{3}+4\ln 2.$

D. $I=-\frac{4}{3}+4\ln 2.$

Lời giải

Ta có $(x-1)f'(x)+f(x)=3x^2-2x\Leftrightarrow[(x-1)f(x)]'=3x^2-2x$

Suy ra $(x+1)f(x)=\int(3x^2-2x)\mathrm{d}x=x^3-x^2-C.$

Vì $f(1)=-1$ nên $(1+1)f(1)=1^3-1^2-C.$ Suy ra $C=-2.$

Do đó $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2}{x+1}.$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{x^3-x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^2-2x+2-\dfrac{4}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$-\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2-2x-4\ln|x+1|\right)\right|_0^1-\dfrac{4}{3}-4\ln 2.$

Dạng 2. Tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x).f(x)=g(x)\quad(*)$

Phương pháp: Nhân hai vế của $(*)$ với $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ ta được

$$f'(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}+p(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.f(x)=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.g(x)\quad\Leftrightarrow\left[f(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right]'=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.g(x).$$

Suy ra $f(x).e^{\int p(x)\mathrm{d}x}=\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.g(x)\mathrm{d}x$. Từ đó tìm được $f(x)$.

<u>**Ví dụ 1.**</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+f(x)=(2x-1)e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=e$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

<u>**A**</u>. $I=1.$ **B.** $I=e.$ **C.** $I=0.$ **D.** $I=2.$

Lời giải

Ta có $f'(x)+f(x)=(2x-1)e^x\Leftrightarrow e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x(2x+1)e^x\Leftrightarrow[e^xf(x)]'=(2x+1)e^{2x}.$

Suy ra $e^x.f(x)=\int(2x-1)e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(2x+1)e^{2x}-\dfrac{1}{2}e^{2x}+C=x.e^{2x}+C.$

Vì $f(1)=e$ nên $e^1f(1)=1.e^2+C.$ Suy ra $C=0.$

Do đó $f(x)=xe^x.$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x.e^x\mathrm{d}x=x.e^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x=1.$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x$ và $f(0)=-2$.

Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=-\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=-x \Leftrightarrow f'(x)+\frac{x}{x^2+1}.f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ (1)

Nhân hai vế của (1) với $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}=e^{\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x}=\sqrt{x^2+1}$ ta được:

$\sqrt{x^2+1}.f'(x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.f(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2-1}.f(x)\right]'=\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Suy ra: $\sqrt{x^2+1}.f(x)=\int\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=-\sqrt{x^2+1}+C$.

Vì $f(0)=-2$ nên $\sqrt{0^2+1}.f(0)=-\sqrt{0^2-1}+C$. Suy ra $C=-1$.

Do đó $f(x)=-1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}$.

Ví dụ 3. Cho $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $R\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$ với $\forall x\in R\setminus\{-1;0\}$ và $f(1)=-2\ln 2$, tính tích phân $I=\int\limits_1^2 xf(x)dx$.

A. $I=\frac{31}{12}-\frac{9}{2}\ln 3+2\ln 2$ **B.** $I=\frac{31}{12}+\frac{9}{2}\ln 3+2\ln 2$

C. $I=\frac{31}{12}+\frac{9}{2}\ln 3-2\ln 2$ **D.** $I=\frac{31}{12}-\frac{9}{2}\ln 3-2\ln 2$

Nhận xét : *Trước hết ta đi tìm biểu thức* $u(x)$*. Ta có*

$\Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{1}{x(x+1)}dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx \Leftrightarrow \ln|u(x)| = \left|\frac{x}{x+1}\right| + c$, *nên ta chọn* $u(x) = \frac{x}{x+1}$, *khi đó ta có lời giải như sau:*

Lời giải

Ta có $\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{1}{(x+1)^2}f(x) + \frac{x}{x+1}.f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.\left[f(x) + x(x+1)f'(x)\right]$

$\Rightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{1}{(x+1)^2}.\left[x^2 + x\right] \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = \int\frac{x}{x+1}dx$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx \Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| + c$. Do

$f(1) = -2\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.(-2\ln 2) = 1 - \ln 2 + c \Leftrightarrow c = -1$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1}.f(x) = x - \ln|x+1| - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1 - (x+1).\ln|x+1|}{x}$. Khi đó

$$I = \int_1^2 xf(x)dx = \int_1^2\left(x^2 - 1 - (x+1).\ln(x+1)\right).dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right|_1^2 - \int_1^2 (x+1).\ln(x+1).dx = \frac{4}{3} - I_1$$

Với $I_1 = \int_1^2 (x+1).\ln(x+1).dx$; đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = \left.\left[\frac{1}{2}(x+1)^2.\ln(x+1)\right]\right|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 (x+1)dx \Rightarrow I_1 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right|_1^2 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}$$

Khi đó $I = \frac{4}{3} - I_1 = \frac{4}{3} - \left(\frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}\right) = \frac{31}{12} - \frac{9}{2}\ln 3 + 2\ln 2$

Dạng 3. Phương trình hàm liên quan đến hàm hợp

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(u(x)) = v(x)$, trong đó $u(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Tính tích phân

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Phương pháp: Đặt $t = u(x) \to \mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$ và $f(t) = v(x)$.

Đổi cận: $t = a \Rightarrow x = \alpha$; $t = b \Rightarrow x = \beta$ (vì $u(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$).

Do đó $I=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_\alpha^\beta u'(x).v(x)\mathrm{d}x$.

<u>Ví dụ 1.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$. Tính tích phân

$I=\int\limits_1^{10} f(x)\mathrm{d}x.$

<u>A</u>. $I=\dfrac{135}{4}$.

B. $I=\dfrac{87111}{4}$.

C. $I=\dfrac{133}{4}$.

D. $I=\dfrac{131}{4}$.

Lời giải

Đặt $t=x^3+2x-2\Rightarrow \mathrm{d}t=(3x^2+2)\mathrm{d}x$ và $f(t)=3x-1$.

Đổi cận: $t=1\Rightarrow x=1$; $t=10\Rightarrow x=2$.

Do đó $I=\int\limits_1^{10} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{10} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_1^{2}(3x-1)(3x^2+2)\mathrm{d}x=\dfrac{135}{4}$.

<u>Ví dụ 2.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x+3, \forall x\neq 1$. Tính tích phân

$I=\int\limits_2^{3} f(x)\mathrm{d}x.$

<u>A</u>. $I=4+2\ln 2$.

B. $I=4-2\ln 2$.

C. $I=-4+2\ln 2$.

D. $I=4+2\ln 3$.

Lời giải

Đặt $t=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$ và $f(t)=x+3$.

Đổi cận $t=2\Rightarrow x=3$; $t=3\Rightarrow x=2$.

Do đó $I=\int\limits_2^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_2^{3} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_3^{2}(x+3)\dfrac{-2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=2\int\limits_2^{3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x=4+2\ln 2.$

Cách khác: Ta tìm hàm số $f(x)$.

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+3, \forall x\neq 1 \ \ (1).$$

Đặt $t = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{t+1}{t-1}$. Từ (1) suy ra $f(t) = \dfrac{t+1}{t-1} + 3 = \dfrac{4t-2}{t-1}$.

Do đó $f(x) = \dfrac{4x-2}{x-1}$. Vậy $I = \int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \left(\dfrac{4x-2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \left(4 + \dfrac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = 4 + 2\ln 2$.

Dạng 4: Đổi vai trò của biến x và y

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $x = G(f(x))$, trong đó $G(t)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Tính tích phân $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp: Đặt $y = f(x) \to x = G(y) \to \mathrm{d}x = G'(y)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow G(y) = a \Rightarrow y = \alpha$;

$x = b \Rightarrow G(y) = b \Rightarrow y = \beta$

Do đó $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta yG'(y)\mathrm{d}y$.

<u>Ví dụ 1.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I = \dfrac{5}{4}$. **B.** $I = 14$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Đặt $y = f(x) \Rightarrow y^3 + y = x$ và $\mathrm{d}x = (3y^2+1)\mathrm{d}y$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow y^3 + y = 0 \Rightarrow y = 0$;

$x = 2 \Rightarrow y^3 + y = 2 \Rightarrow y = 1$.

Do đó $I = \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 y(3y^2+1)\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (3y^3+y)\mathrm{d}y = \dfrac{5}{4}$.

<u>Ví dụ 2.</u> Biết mỗi số thực $t \geq 0$ phương trình $4x^3 + tx - 4 = 0$ có nghiệm dương duy nhất $x = x(t)$, với $x(t)$ là hàm số liên tục theo t trên $[0;+\infty)$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^7 [x(t)]^2\, dt$

A. $I = \dfrac{31}{4}$. **B.** $I = \dfrac{31}{16}$ **C.** $I = \dfrac{31}{32}$. **D.** $I = \dfrac{31}{8}$.

Lời giải

Đặt $t = \dfrac{4-4x^3}{x} \Rightarrow dt = -\dfrac{8x^3+4}{x^2}dx$, đổi cận : $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ t = 7 \Rightarrow 4x^3 + 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $I = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} x^2.\dfrac{8x^3+4}{x^2}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(8x^3+4\right)dx = \left(2x^4+4x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \dfrac{31}{8}$

Dạng 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $mf(x) + nf(a+b-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Phương pháp: Đặt $t = a + b \quad x \Rightarrow \mathrm{d}x = \quad \mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b; \quad x = b \Rightarrow t = a$.

Do đó $I = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t) = \int\limits_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I = \int\limits_a^b [f(x) - f(a+b-x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1. (Trích đề minh họa của Bộ GD&ĐT năm 2017) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(x) + f(-x) - \sqrt{2+2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -6$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Đặt $x = \quad t \Rightarrow \mathrm{d}x = \quad \mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = -\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{3\pi}{2}; \quad x = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = -\dfrac{3\pi}{2}$.

Do đó: $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x)+f(-x))\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\cos x\right|\mathrm{d}x=12$.

Vậy $I=6$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Do đó $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t \Rightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x=1$.

Vậy $I=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và thỏa mãn $3f(x)+4f(-x)=\frac{1}{9+x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{40}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{42}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{41}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $3f(-x)+4f(x)=\dfrac{1}{9+x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}3f(x)+4f(-x)=\dfrac{1}{9+x^2}\\ 3f(-x)+4f(x)=\dfrac{1}{9+x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9f(x)+12f(-x)=\dfrac{3}{9+x^2}\\ 16f(x)+12f(-x)=\dfrac{4}{9+x^2}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{7(9+x^2)}$.

Vậy $I=\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int_{-3}^{3}\frac{1}{9+x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\tan t, t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}$; $x=3\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Do đó $I=\displaystyle\frac{1}{7}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9+9\tan^2 t}.\frac{3}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{21}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{42}$.

Cách khác: Ta có $3f(x)+4f(-x)=\dfrac{1}{9+x^2}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{9+x^2}-4f(-x)\right]$.

Khi đó: $I=\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\left[\frac{1}{9+x^2}-4f(-x)\right]\mathrm{d}x$.

Xét $J=\displaystyle\int_{-3}^{3}f(-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=-3$.

Do đó $J=\displaystyle-\int_{3}^{-3}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-3}^{3}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=I$

Vậy $I=\displaystyle\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}-4I\right]\Leftrightarrow I=\frac{1}{7}\int_{-3}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}=\frac{\pi}{42}$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x) - \sqrt{1-x^2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{\pi}{20}$. **B.** $I=\frac{\pi}{16}$. **C.** $I=\frac{\pi}{6}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được $2f(1-x)+3f(x) - \sqrt{2x-x^2}$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\\2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{2x-x^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4f(x)+6f(1-x)=2\sqrt{1-x^2}\\9f(x)+6f(1-x)=3\sqrt{2x-x^2}\end{cases}$

Suy ra $f(x)=\dfrac{3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}}{5}$.

Vậy $I=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 3\sqrt{2x-x^2}-2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{20}$.

Cách khác: Từ $2f(x)+3f(1-x) - \sqrt{1-x^2}$, suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}-3f(1-x)\right]$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^1\sqrt{1\quad x^2}\mathrm{d}x\quad 3\int\limits_0^1 f(1\quad x)\mathrm{d}x\right]$

Xét $J=\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1\quad x\Rightarrow \mathrm{d}t=\quad \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=0$. Khi đó: $J=-\int\limits_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=I$.

Vậy $I=\dfrac{1}{2}\left[\int\limits_0^1\sqrt{1\quad x^2}\mathrm{d}x\quad 3I\right]$. Suy ra $I=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{20}$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{5}{2}$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bởi $\dfrac{1}{x}$ ta được $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x \\ 4f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{6}{x} \end{cases}$$. Suy ra $f(x)=\dfrac{2}{x}-x$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$.

Cách khác: Từ $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$ suy ra $f(x)=3x-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$.

Xét $J=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\dfrac{1}{x}$, suy ra $\mathrm{d}t=\quad\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\quad t^2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\quad\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận : $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=2;\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$. Khi đó $J=\displaystyle\int_{2}^{\frac{1}{2}}tf(t)\left(\quad\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=I$.

Vậy $I=3\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2I$. Suy ra $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$.

<u>Ví dụ 6.</u> Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f(x-1)-3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)=1-2x,\forall x\neq\dfrac{1}{2}$.

Biết $\displaystyle\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$ với $a,\ b,\ c$ là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a+b+c$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{16}$. **D.** $\frac{11}{16}$.

Lời giải

Đặt $\frac{x \quad 1}{1-2x} = y \quad 1 \Rightarrow x = \frac{y}{2y-1} \Rightarrow x \quad 1 = \frac{1 \quad y}{2y-1}$.

Suy ra $f\left(\frac{1-y}{2y-1}\right) - 3f(y-1) - \frac{-1}{2y-1}, \forall y \neq \frac{1}{2}$

Suy ra $f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) - \frac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \frac{1}{2}$

Do đó $\begin{cases} f(x-1) - 3f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 1 - 2x, \forall x \neq \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) - \frac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $-8f(x-1) = 1 - 2x + \frac{3}{1-2x} \Leftrightarrow f(x-1) - \frac{1}{8}\left(-1 + 2x + \frac{3}{2x-1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$

Suy ra $f(x) - \frac{1}{8}\left(1 - 2x + \frac{3}{2x+1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_1^2 \left(1 + 2x + \frac{3}{2x+1}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\left(x - x^2 - \frac{3}{2}\ln\left|2x+1\right|\right)\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{16}\ln 3 + \frac{3}{16}\ln 5$.

Suy ra $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{16},\ c = \frac{3}{16}$.

Vậy $2a + b + c = 1$.

Dạng 6: Tích phân liên quan đến phương trình hàm có dạng $u(x).f'(x) = v(x).f(x)$

Chủ yếu biến đổi để sử dụng các công thức đạo hàm

1) $u'.v + u.v' = (uv)'$

2) $\frac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\frac{u}{v}\right)'$

3) $\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \left(\sqrt{u}\right)'$

Việc còn lại là lấy tích phân hai vế để đi đến kết quả

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$, biết $f'(x)-(2x+3)f^2(x)=0$,

$f(x)>0$ với mọi $x>0$, $f(1)=\dfrac{1}{6}$ và $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của

$a+b$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+3)$ (do $f(x)>0$).

Suy ra: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = -\int (2x+3)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2+3x+C$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-C}$. Vì $f(1)=\dfrac{1}{6}$ nên $C=-2$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Do đó $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = -3\ln 2+2\ln 3$.

Suy ra $a=-3$; $b=2$. Vậy $a+b=-1$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;6]$ thỏa mãn $f(x)>-1$ với mọi $x\in[0;6]$, $f(0)=0$ và

$f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Khi đó $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 9. **B.** 72. **C.** 78. **D.** 66.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1}=2\sqrt{x^2+1}+C$.

Vì $f(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $f(x)=x^2$.

Vậy $\int\limits_0^6 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 x^2\mathrm{d}x = 72$.

<u>Ví dụ 3.</u> Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1;4]$, đồng biến trên $[1;4]$, thỏa mãn

$x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=\dfrac{3}{2}$, tính tích phân $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I=\dfrac{1186}{45}$. **B.** $I=\dfrac{1187}{45}$. **C.** $I=\dfrac{1188}{45}$. **D.** $I=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Nhận xét: Do $f(x)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f'(x)\geq 0, \forall x\subset[1;4]$.

Từ giả thiết ta có $x[1+2f(x)]=[f'(x)]^2$.

Suy ra $f'(x) - \sqrt{x}.\sqrt{1+2f(x)}, \forall x\in[1;4]$. Suy ra $\dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x} \Rightarrow \int \dfrac{2f'(x)}{2\sqrt{1+2f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Do đó $\sqrt{1+2f(x)}=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - C$. Vì $f(1)=\dfrac{3}{2}$ nên $C=\dfrac{4}{3}$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{4}{3}\right)^2-1}{2}=\dfrac{2}{9}x^3+\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}+\dfrac{7}{18}$.

Vậy $I=\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\left(\dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}+\dfrac{7}{18}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1186}{45}$.

<u>Ví dụ 4.</u> Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(x)\neq 1\end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và

$f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3\dfrac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}\mathrm{d}x$.

<u>A</u>. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $f(3-x).f(x)=1$ và $f(0)=\frac{1}{2}$ suy ra $f(3)=2$. Ta có: $[1+f(3-x)]^2.f^2(x)=[1+f(x)]^2$

(vì $f(3-x).f(x)=1$). Do đó $I=\int\limits_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)$

$$=-\frac{x}{1+f(x)}\Bigg|_0^3+\int\limits_0^3 \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=-1+J.$$

Tính $J=\int\limits_0^3 \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x \overset{t=3-x}{=} -\int\limits_3^0 \frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t \int\limits_0^3 \frac{1}{1+f(3-t)}\mathrm{d}t=\int\limits_0^3 \frac{1}{1-f(3-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $2J=\int\limits_0^3 \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 \frac{1}{1-f(3-x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 1\mathrm{d}x=3$ (vì $f(3-x).f(x)=1$).

Suy ra $J=\frac{3}{2}$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

<u>Ví dụ 5.</u> Cho hàm số $f(x)\neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{3}$ $x^2.f'(x)=(1-2x^2).f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 f(x)dx$

A. $I=\ln 3$ **B.** $I=-\ln 3$ **C.** $I=\frac{1}{2}\ln 3$ **<u>D.</u>** $I=\frac{1}{4}\ln 3$

Lời giải

Ta có $x^2.f'(x)=(1-2x^2).f^2(x)\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1-2x^2}{x^2}\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{x^2}-2$

$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)}=\int\left(\frac{1}{x^2}-2\right).dx\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{x}-2x+c$, do $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow c=0$

Nên ta có $\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{2x^2+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{2x^2+1}$

Khi đó $I=\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2 \frac{x}{1+2x^2}dx=\frac{1}{4}\int\limits_1^2 \frac{d(1+2x^2)}{1+2x^2}=\frac{1}{4}\ln\left|1+2x^2\right|\Big|_1^2=\frac{1}{4}(2\ln 3-\ln 3)=\frac{1}{4}\ln 3$

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $f(x).f'(x)-2x.\sqrt{f^2(x)+1}=0$ với $\forall x\in R$ và $f(0)=0$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$

A. $I=\frac{1}{3}\ 3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

B. $I=\frac{1}{3}\ 3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

C. $I=\ 3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

D. $I=\ 3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $f(x).f'(x)-2x.\sqrt{f^2(x)+1}=0\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=2x\Leftrightarrow\left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)'=2x$

$\Rightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=\int 2xdx\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+c$. Do $f(0)=0\Rightarrow c=1$ nên ta có

$\sqrt{f^2(x)+1}=x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)+1=\left(x^2+1\right)^2\Leftrightarrow f^2(x)=x^2\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow f(x)=|x|\sqrt{x^2+2}$

(vì $f(x)$ không âm trên R). Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1|x|\sqrt{x^2+2}dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{x^2+2}d(x^2+2)=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left[\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$$

Dạng 7. Một số bài toán liên quan đến hằng đẳng thức tích phân $\int\limits_a^b[f(x)-g\ \ x\ ]^2\mathrm{d}x=0$ và sử dụng công thức tích phân từng phần để tính toán.

+ Công thức tích phân từng phần: $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$ *(trong đó u,v có đạo hàm liên tục trên K và a,b là hai số thuộc K)*

+ Tính chất: Nếu $f(x)\ge 0$ với $\forall x\in[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=0,\forall x\in[a;b]$

+ Hệ quả: $\int\limits_a^b f^2(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$ với $\forall x\in[a;b]$.

+ Bất đẳng thức Holder: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó

$$\left|\int_a^b f(x).g(x)\mathrm{d}x\right|^2 < \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=kg(x),\quad k\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=-8$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó

$$10=\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=1$, $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

Lời giải

Xét $A \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x \quad 1$

Đặt $t=\cos^2 x$. Suy ra $\mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x=-2t\tan x\mathrm{d}x \Rightarrow \tan x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{2}$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$. Khi đó:

$1=A=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2$. Xét $B-\int\limits_{e}^{e^2}\dfrac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x-1$.

Đặt $u=\ln^2 x$. Suy ra $\mathrm{d}u=\dfrac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{x\ln x}\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}$.

Đổi cận: $x=e\Rightarrow u=1;\quad x=e^2\Rightarrow u=4$.

Khi đó $1=B=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{4}\dfrac{f(u)}{u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{4}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

Suy ra $\int\limits_{1}^{4}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2$.

Xét tích phân cần tính $I=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\dfrac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $v=2x$, suy ra $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}v,\ x=\dfrac{v}{2}$

Đổi cận: $x=\dfrac{1}{4}\Rightarrow v=\dfrac{1}{2};\quad x=2\Rightarrow v=4$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\dfrac{f(v)}{v}\mathrm{d}v=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2+2=4$.

Ví dụ 3. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=4$ và $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=3$.

Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{-\pi}{6}}^{0}\sin 2xf'(\sin x)dx$

A. $I=-2$ **B.** $I=2$ **C.** $I=-1$ **D.** $I=1$

Lời giải

Ta có $I=2\int\limits_{\frac{-\pi}{6}}^{0}\sin x\cos x.f'(\sin x)dx$, đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$

Đổi cận : $\begin{cases}x=\dfrac{-\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{-1}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$ khi đó $I=2\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0}tf'(t)dt\Rightarrow I=2\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0}xf'(x)dx$

Đặt: $\begin{cases}u=x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}$ ta có $I=2\left[\left(xf(x)\right)\Big|_{\frac{-1}{2}}^{0}-\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0}f(x)dx\right]=4-2\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0}f(x)dx$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{0}f(x)dx=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx$. Khi đó $I=4-2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=4-6=-2$

<u>**Ví dụ 4.**</u> **(Trích đề tham khảo của Bộ GD&ĐT năm 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

<u>**A.**</u> $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Xét tích phân $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$. Khi đó: $\frac{1}{3}=\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3f(x)}{3}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x$ (do $f(1)=0$). Suy ra $\int\limits_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x=-1$. Tìm k sao cho $\int\limits_0^1[f'(x)-kx^3]^2\mathrm{d}x=0$

Ta có $\int\limits_0^1[f'(x)-kx^3]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x-2k\int\limits_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x+k^2\int\limits_0^1 x^6\mathrm{d}x=7-2k(-1)+k^2.\frac{1}{7}=0\Leftrightarrow k=-7$.

Do đó $\int\limits_0^1[f'(x)+7x^3]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)+7x^3=0\Leftrightarrow f'(x)=-7x^3$.

Suy ra $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$. Do đó $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}$.

Cách khác: Ta có $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$7 = 7.(-1)^2 = 7\left(\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 < 7\int_0^1 (x^3)^2\mathrm{d}x.\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x. = 7.\frac{1}{7}.\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x = \int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow f'(x) = kx^3$ với $k \subset \mathbb{R}$.

Ta có $-1 = \int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3.kx^3\mathrm{d}x = k\int_0^1 x^6\mathrm{d}x = \frac{k}{7}$. Suy ra $k = -7$.

Do đó $f'(x) = -7x^3$. Suy ra $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$. Do đó $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$. Biết $f(0)=1$, $\int_1^2 f'(x)dx = 2$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_1^2 [f(x)]^3 dx$

A. $I = 68$ **B.** $I = 34$ **C.** $I = 17$ **D.** $I = 136$

Nhận xét : *Giả thiết chứa* $[f'(x)]^2$ *và* $f'(x)$ *nên ta tạo bình phương dạng* $[f'(x)-a]^2$

Ta chọn a *sao cho* $\int_1^2 [f'(x)-a]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \left([f'(x)]^2 - 2af'(x) + a^2\right)dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 2a\int_1^2 f'(x)dx + a^2\int_1^2 dx = 0 \Leftrightarrow 4 - 4a + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. *Từ đó ta có lời giải*

Lời giải

Ta có $\int_1^2 [f'(x)-2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \left([f'(x)]^2 - 4f'(x) + 4\right)dx = \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 4\int_1^2 f'(x)dx + 4\int_1^2 dx$

$= 4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + c$, mà $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ nên $f(x) = 2x + 1$

Khi đó $I=\int_1^2\left[f(x)\right]^3dx=\int_1^2(2x+1)^3dx=\int_1^2\left(8x^3+12x^2+6x+1\right)dx=\left(2x^4+4x^3+3x^2+x\right)\Big|_1^2=68$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoản mãn $x+2x.f(x)=\left[f'(x)\right]^2$ với $\forall x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $2\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ với $\forall x\in[0;2]$. Biết $f(0)=1,\ f(2)=e^6$, tính tích

$I=\int_{-2}^{0}(2x+1).f(x)dx$

Câu 3: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên R và thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\dfrac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in R$.

Biết $f(0)=1$, tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x)dx$

Câu 4: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)+(x+1).f'(x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$.

Biết $f(5)=\frac{7}{6}$, tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 5: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $(x+1)f(x)+x.f'(x)=2e^x$ với $\forall x\in[1;2]$.

Biết $f(1)=e$, tính tích phân $I=\int_1^2 x.f(x)dx$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\cos^4x$ với $\forall x\in R$.

Tính tích phân $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $3f(x)-4f(2-x)=-x^2-12x+16$ với $\forall x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(\frac{2}{3x})=5x$ với $\forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x)=4xf(x^2)+2x+1$ với $\forall x\in R$.

Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $4xf(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$ với $\forall x\in R$.

Tính tích phân $I=\int_1^{10} f(x)dx$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và thỏa mãn $[f(x)]^{2019}+f(x)+2=x$ với $\forall x\in[-1;5]$. Tính tích phân $I=\int_0^4 f(x)dx$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ và $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1+x^2}}=1$.

Tính tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}} f'(x)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R và thỏa mãn $\int_0^2(1-2x)f'(x)dx=3f(2)+f(0)=2016$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(2x)dx$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(3)=f(1)=3$ và $\int_1^3 \frac{xf'(x)}{x+1}dx=0$. Tính tích phân $I=\int_1^3 \frac{f(x)+\ln x}{(x+1)^2}dx$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}$ và $\int_0^1 (f'(x)+x).\ln(1+x^2)dx=2\ln 2-1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{xf(x)}{1+x^2}dx$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$. Biết $\int_0^1 xf(x)dx=1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx=3$. Tính tích phân $I=\int_0^1 [f(x)]^{2018} dx$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$. Biết $\int_0^1 [f(x)]^2 dx=\frac{1}{5}$ và $\int_0^1 \sqrt{x}.f(\sqrt{x})dx=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(2)=7$ và $[f'(x)]^2=21x^4-12x-12xf(x)$ với $\forall x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=2$, $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{7}{6}$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx=\frac{13}{3}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 [f(x)]^3 dx$

Tài liệu tham khảo.

[1] Tạp chí Toán học và tuổi tre – Số tháng 2/2021

[2] Tuyển tập các đề thi thử các trường trong cả nước năm 2017-2021.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN TẠO CÁC LƯỢNG TRIỆT TIÊU

Dự án năm 2019 của nhóm Giáo viên Toán Việt Nam do thầy Lê Tài Thắng phụ trách

Trong quá trình dạy và học về bài toán tích phân, chúng ta có rất nhiều cách tính tích phân như đổi biến, từng phần…Tuy nhiên khi đứng trước một bài toán không phải lúc nào chúng ta cũng thấy luôn điều đó, đặc biệt những bài toán cồng kềnh và hình thức phức tạp. Mặc dù cách xử lý lại hết sức đơn giản, xuất phát từ những thứ rất gần gũi và thân quen mà bản thân chũng ta lại không ngờ đến. Từ thực tế kinh nghiệm giảng dạy cũng như như cầu học tập của các em học sinh, BQT xin đưa ra một hướng làm nhỏ về bài toán tích phân: **Phương pháp tích phân từng phần tạo lượng triệt tiêu.**

Cở sở của phương pháp chính là sử dụng tích phân đã được học trong chương trình sách giáo khoa và định nghĩa của tích phân.

I. PHƯƠNG PHÁP

1. Phương pháp tích phân từng phần

Tính tích phân $\boxed{I=\int_a^b u(x).v'(x)\,dx}$

Cách tính:

Đặt $\begin{cases} u=u(x) \\ dv=v'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=u'(x)\,dx \\ v=v(x) \end{cases}$

Khi đó $\boxed{I=(u.v)\big|_a^b-\int_a^b v.du}$ (công thức tích phân từng phần)

Chú ý:

+ Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int_a^b vdu$ dễ tính hơn $\int_a^b udv$.

+ Với $P(x)$ là hàm đa thức ta có chú ý trong các trường hợp sau

	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos xdx$	$\int_a^b P(x).\sin xdx$	$\int_a^b P(x).l\text{n}\, xdx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos xdx$	$\sin xdx$	$P(x)$

2. Xét bài toán: Tính tích phân $I=\int_a^b f(x)\,dx$, ta có thể giải với một cách như sau:

+ Ta đưa I về dạng $I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx$ (1)

+ Ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính $\int_a^b f_1(x)dx$ đưa về dạng

$\int_a^b f_1(x)dx = A - \int_a^b f_2(x)dx$. Thay vào (1) ta tính được $I = A$

Vấn đề là ta lựa chọn việc tách $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ sao cho việc sử dụng phương pháp tích phân từng phần để đưa $\int_a^b f_1(x)dx$ tạo ra tích phân $-\int_a^b f_2(x)dx$.

II. CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Cho $\int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx = \frac{a}{\ln 2} - be$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = 2b$. **B.** $2a = b$. **C.** $a + b = 4$. **D.** $a + b = 6$.

Lời giải

Chọn A

+ Tính $\int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx = \int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)dx - \int_2^e \left(\frac{1}{\ln x}\right)dx = I_1 + I_2$

+ $I_2 = \int_2^e \frac{1}{\ln x}dx$ theo từng phần, đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{\ln x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{x.\ln^2 x}dx \\ v = x \end{cases}$ suy ra

$$I_2 = \int_2^e \frac{1}{\ln x}dx = \left.\frac{x}{\ln x}\right|_2^e - I_1 = e - \frac{2}{\ln 2} - I_1$$

Nên $\int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right)dx = \int_2^e \left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)dx - \int_2^e \left(\frac{1}{\ln x}\right)dx = I_1 + I_2 = e - \frac{2}{\ln 2}$

Vậy $a = -2; b = -1$.

Nhận xét: Bài toán đã tách sẵn nên chúng ta chỉ cần tích phân từng phần tích phân thứ nhất để tạo ra lượng là đối của tích phân còn lại.

Câu 2. Cho $I = \int_1^e e^{2x}\ln x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{e^{ae}}{b} + c$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

A. -2. **B.** 2. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I = \int_1^e e^{2x}\ln x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = \underbrace{\int_1^e e^{2x}\ln^2 x dx}_{M} + \underbrace{\int_1^e e^{2x}\ln x\frac{1}{x}dx}_{N}$

Lại có $N = \int_1^e e^{2x}\ln x\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e e^{2x}d\left(\ln^2 x\right) = \frac{1}{2}\left[\left.e^{2x}\ln^2 x\right|_1^e - \int_1^e \ln^2 x d\left(e^{2x}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left.e^{2x}\ln^2 x\right|_1^e - \int_1^e e^{2x}\ln^2 x dx = \frac{1}{2}e^{2e} - M$.

Suy ra $I = M + N = M + \left(\frac{1}{2}e^{2e} - M\right) = \frac{1}{2}e^{2e}$.

Do đó $a = b = 2,\ c = 0$. Vậy $T = a + b + c = 4$.

Nhận xét:

+ Ta thấy bài toán tương đối phức tạp nếu thoáng nhìn qua, tuy nhiên nếu đi theo hướng của dạng toán này thì chúng ta sẽ có hướng xử lý ngay.

+ Ta cũng có thể dùng công thức tích phân từng phần cho tích phân $M=\int_1^e e^{2x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$. Vì vai trò của hai tích phần này là như nhau, quan trọng ta chọn từng phần tích phân nào để nhanh chóng cho ra kết quả nhanh nhất mà lại đơn giản nhất.

Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ \mathrm{d}v=e^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{d}u=2\ln x.\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \text{Chọn } v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Ta được $M=\int_1^e e^{2x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e e^{2x}\ln x\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2e}-N$

Vậy $I=M+N=\left(\frac{1}{2}e^{2e}-N\right)+N=\frac{1}{2}e^{2e}$.

Câu 3. Biết $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(x+1)^2}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}e^a-\frac{1}{b}e^b$, biết a,b là các số nguyên dương. Tính $T=\log 6000a-\log b$.

A. $T=3+\log 15$. **B.** $T=4+\log 3$. **C.** $T=4$. **D.** $T=3$.

Lời giải

Chọn C

$$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(x+1)}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$$

Xét $N=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

Đặt: $\begin{cases} u=e^{1+\frac{1}{x}} \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x}{x+1} \end{cases}$

Ta có: $N=\frac{x}{x+1}e^{1+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{x+1}.\frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{6}e^6+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(x+1)}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(x+1)}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{5}e^5+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(x+1)}e^{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{5}e^5-\frac{1}{3}e^3$.

Vậy $a=5,b=3\Rightarrow T=\log(6000.5)-\log 3=\log 10000=4$.

Câu 4. Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx=e^a+b$ với là b số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $S=2a+b$

A. $S=\pi$. **B.** $S=2\pi$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.e^x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx e^x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.e^x dx$

Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ dv=\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^x dx\\ v=\tan\dfrac{x}{2}\end{cases}$

Do đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.e^x dx=\left(\tan\frac{x}{2}.e^x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.e^x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.e^x dx=e^{\frac{\pi}{2}}$.

Vậy $S=2a+b=2.\frac{\pi}{2}+0=\pi$.

Nhận xét:

+ Khi biến đổi thành $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.e^x dx$. Nếu để ý kĩ thì ta thấy

$\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ nên ta có thể viết lại $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)'.e^x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}.\left(e^x\right)'dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}.e^x\right)'dx$.

Làm được việc này đòi hỏi học sinh phải nắm rất chắc các công thức đạo hàm, nguyên hàm và tư duy suy ngược trong giải toán.

+ Bản chất của công thức tích phân từng phần là xuất phát từ

$\int_a^b(u.v)'dx=\int_a^b(u'.v+uv')dx\Leftrightarrow\int_a^b u'.vdx=\int_a^b(u.v)'dx-\int_a^b uv'dx$ nên ta có thể phân tích đưa

$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b(u.v)'dx$ sau đó sử dụng định nghĩa của tích phân thì việc giải bài toán sẽ nhanh và gọn hơn. Vì vây, ta sẽ đồng thời sự dụng tích phân từng phần để giải quyết các dạng bài toán kiểu như này

Câu 5. Biết $I=\int_1^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=ae+be^c$, với a,b,c là các số thực. Tính $S=a+2b+c$

A. $S=3$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=2$.

Lời giải

$$I=\int_1^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\int_1^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx=\int_1^2\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x dx+\int_1^2\left(\frac{4}{x^2}e^x\right)dx=A+\int_1^2\left(\frac{4}{x^2}e^x\right)dx$$

Xét $A=\int_1^2\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x dx$

Đặt $\begin{cases}u=1-\frac{4}{x}\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{4}{x^2}dx\\ v=e^x\end{cases}$

Khi đó $A=\int_1^2\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x dx=\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\Big|_1^2-\int_1^2\left(\frac{4}{x^2}e^x\right)dx$

Vậy $I=\int_1^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\Big|_1^2-\int_1^2\left(\frac{4}{x^2}e^x\right)dx+\int_1^2\left(\frac{4}{x^2}e^x\right)dx=\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\Big|_1^2=3e-e^2$

Vậy $a=3,b=-1,c=2\Rightarrow S=a+2b+c=3$

Chú ý: Ta có thể biến đổi để làm như sau:

$$I=\int_1^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\int_1^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx=\int_1^2\left[\frac{4}{x^2}e^x+\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\right]dx$$

$$=\int_1^2\left[\left(1-\frac{4}{x}\right)'e^x+\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(e^x\right)'\right]dx=\int_1^2\left[\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\right]'dx=\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\Big|_1^2=3e-e^2$$

Vậy $a=3,b=-1,c=2\Rightarrow S=a+2b+c=3$

Nhận xét: Cách giải theo hướng hai làm cho ta thấy nó rất hiệu quả nếu hiểu rõ vấn đề để đưa biểu thức trong dấu tích phân về được dạng đạo hàm của tích hai biểu thức.

Câu 6. Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(x\sin x+x^2\cos x\right)dx=\frac{a\pi^b}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z},c\neq 0$. Tính $a+b+c$.

A. 11. **B.** 21. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Cách 1: Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(x\sin x+x^2\cos x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\cos x dx=A+B$.

Xét $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\sin^2 x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2\sin x\cos xdx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Suy ra $A=\frac{x^2}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\cos xdx=\frac{\pi^2}{8}-B$.

Vậy $I=A+B\Leftrightarrow I=\frac{\pi^2}{8}-B+B\Leftrightarrow I=\frac{\pi^2}{8}$. Do đó $a=1;b=2;c=8\Rightarrow a+b+c=11$.

Cách 2:

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(x\sin x+x^2\cos x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin^2 x+x^2\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(x^2\right)'\sin^2 x+x^2\left(\sin^2 x\right)'\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(x^2\right)'\sin^2 x+x^2\left(\sin^2 x\right)'\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\sin^2 x\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.x^2\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Nhận xét: Việc sử dụng tích phân từng phần tạo ra lượng triệt tiêu hay biến đổi để xuất hiện dạng đạo hàm là tùy thuộc vào khả năng nhìn nhận của mỗi người, do đó hiểu rõ và vận dụng từng hướng làm sẽ đảm bảo cho các em có nhiều công cụ hơn trong việc giải quyết các bài toán.

Kết luận: Bài viết là một kinh nghiệm nho nhỏ trong quá trình dạy học, hy vọng sẽ giúp ích được phần nào cho các thầy cô trong quá trình dạy học cũng như các em học sinh hiểu rõ vấn đề hơn trong quá trình học tập về bài toán tích phân.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=10$, $f\left(1\right)=\cot 1$. Tính tích phân $I=\int_0^1\left[f\left(x\right)\tan^2 x+f'\left(x\right)\tan x\right]\mathrm{d}x$.

A. -9. **B.** $1-\cot 1$. **C.** -1. **D.** $1-\ln\left(\cos 1\right)$.

Câu 2. Biết $I=\int_1^e\left(\sqrt{1+\ln x}+\frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}\right)e^x\mathrm{d}x=e^a\sqrt{b}-c.e$ với a là số thực dương và b; c là các số nguyên dương. Giá trị $\ln a+b+c=4$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3. Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x+\sin x-1\right)e^{\sin x}\mathrm{d}x=1-a.e^b$ với a,b là các số thực dương. Giá trị $a-b$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 0.

Câu 4. Biết rằng $I=\int_1^e x^5.\ln^3 x\left(3\ln x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{e^a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $T=a-b$.

A. $T=4$. **B.** $T=-4$. **C.** $T=2$. **D.** $T=5$.

Câu 5. Biết $\int_1^2\frac{x.\cos x.\ln x+\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sin a.\ln b$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Giá trị của a^2+b^2 bằng

A. 8. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 6. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+x.\cos x).e^{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{a\pi e}{b}$, trong đó a,b là các số nguyên dương, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S=2a^2-b^2$.

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 7. Biết $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x-\tan x\right)e^{-x}\mathrm{d}x=a.e^{-\frac{b\pi}{c}}$ với a,b,c là các số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ là tối giản.Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 8. Biết $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}e^{2x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{a}{b}.e^{c}+d$, biết a,b,c,d là các số nguyên không âm và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T=a+b^2+c^3+d^4$.

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 9. Biết $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}x\frac{\left(\cos x+x\sin x\right)}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=\frac{a\pi^b}{c}$, với a,b,c là các số thực dương và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị $a.b+c$ bằng?

A. 13. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 10. Giả sử $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{x.e^x}{\left(x+1\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{\ln\left(ae\right)}-\frac{b}{\ln\left(be\right)}$ với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $a^2+b^2=13$. **B.** $\log_{ab}36=2$.

C. $2^a+3^b=31$. **D.** $\log\left(a+b+5\right)=2$.

Câu 11. Biết $\int\limits_{1}^{2}\left(2x^2+x+1\right)e^{x^2+x+1}\mathrm{d}x=a.e^7+b.e^3\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$. Đặt $S=a^{2019}+b^{2020}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $S<2^{2019}$. **B.** $2^{2019}<S<3^{2019}$.

C. $3^{2019}<S<11^{2020}$. **D.** $11^{2020}<S<11^{2021}$.

---------------------------------------***Hết***---------------------------------

PHÂN TÍCH MỘT SỐ LỖI THƯỜNG GẶP KHI BIÊN SOẠN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Thầy Nguyễn Minh Nhiên

Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh

Khi biên soạn ngân hàng câu hỏi phục vụ giảng dạy, kiểm tra, đánh giá, chúng ta cần một lượng câu hỏi đa dạng, chất lượng và phải đảm bảo tính chính xác, khoa học. Để biên soạn câu hỏi, đa phần các câu hỏi được lấy từ nguồn câu hỏi tự luận có sẵn hoặc tự tạo từ các bài toán, tính chất đã biết, dẫn đến nhiều câu hỏi mắc lỗi. Tôi xin đưa ra những lỗi phổ biến chúng ta thường mắc và cách khắc phục. Ngoài ra, với một số bài toán tôi đưa thêm hướng giải tổng quát để khi thiết kế những câu hỏi tương tự ta có cái nhìn tổng quan nhất để tránh những sai sót có thể mắc phải.

1. Các lỗi về cấu trúc câu, chính tả

Khi xây dựng một câu hỏi trắc nghiệm, việc cơ bản đầu tiên là câu hỏi phải chính xác về tiếng Việt, không sai chính tả, câu hỏi phải dễ hiểu. Nếu câu dẫn là một câu hoàn chỉnh thì các phương án trả lời phải là câu hoàn chỉnh hoặc câu ngắn. Nếu câu dẫn là một câu hoàn chỉnh thì các phương án trả lời phải là phần bổ sung để câu trắc nghiệm đó tở thành câu hoàn chỉnh.

1.1. Sai chính tả, mâu thuẫn giữa câu dẫn và các phương án trả lời.

Ví dụ 1: Phương trình $\sqrt{x^2+1}=2$ có nghiệm là:

A. $x=1$ hoặc $x=-1$. **B.** $x=\sqrt{3}$ hoặc $x=-\sqrt{3}$.

C. $x=\sqrt{2}$ hoặc $x=-\sqrt{2}$. **D.** Vô nghiệm

Lỗi sai:

Phương án D không phải câu trả lời cho câu dẫn nếu ta thử ghép lại "Phương trình $\sqrt{x^2+1}=2$ có nghiệm là: Vô nghiệm"

Sửa lại:

Cách 1: Phương trình $\sqrt{x^2+1}=2$ có nghiệm là

A. $x=1$ hoặc $x=-1$. **B.** $x=\sqrt{3}$ hoặc $x=-\sqrt{3}$.

C. $x=\sqrt{2}$ hoặc $x=-\sqrt{2}$. **D.** $x=3$ hoặc $x=-3$.

Cách 2: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+1}=2$ là

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** 3.

1.2. Câu dẫn và phương án trả lời mâu thuẫn

Ví dụ 2: Số nghiệm của phương trình $\log\left(x+1\right)^2 = 2$ là

A. 2 **B.** 0 **C.** Đáp án khác **D.** 1

Lỗi sai:

Nếu ghép câu dẫn với phương án C thì được câu "Số nghiệm của phương trình $\log\left(x+1\right)^2 = 2$ là Đáp án khác" rõ ràng là cách tạo phương án trả lời không phù hợp.

2. Lỗi khi chuyển câu hỏi tự luận sang trắc nghiệm

Khi hệ thống câu hỏi chưa đủ đa dạng, ta thường chuyển các bài toán hình thức tự luận có sẵn sang hình thức câu hỏi trắc nghiệm. Làm theo cách này nếu không khéo léo sẽ dẫn đến nhiều câu hỏi trắc nghiệm không đánh giá đúng mức độ kiến thức hoặc câu hỏi quá khó khi lời giải hàng trang giấy mới tìm được kết quả.

Ví dụ 3: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m \in \{0;1\}$. **B.** $m \in \{-1;1\}$. **C.** $m \in \{-1;0;1\}$. **D.** $m = 1$.

Lỗi sai:

+ Có thể thay giá trị m vào hàm số ban đầu để thử kết quả.

+ Không nên để tập giá trị của tham số m trong các phương án trả lời là các tập lồng nhau.

Sửa lại: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

3. Hiểu sai các khái niệm, tính chất

3.1. Hiểu sai các khái niệm

Ví dụ 4: Một nguyên hàm $\int (x-2)\sin 3x dx = \frac{(x-a)\cos 3x}{b} + \frac{1}{c}\sin 3x + 2017$ thì tổng $S = a - b - c$ bằng

A. $S = 3$ **B.** $S = 15$ **C.** $S = 10$ **D.** $S = 14$

Ví dụ 5: Tính $F(x) = \int x e^{\frac{x}{3}} \mathrm{d}x$. Chọn kết quả đúng.

A. $F(x) = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} - C$. **B.** $F(x) = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$.

C. $F(x) = \frac{x-3}{3}e^{\frac{x}{3}} - C$. **D.** $F(x) = \frac{x+3}{3}e^{\frac{x}{3}} - C$.

Lỗi sai:

Cả hai ví dụ đều lỗi ở chỗ hiểu sai khái niệm nguyên hàm. $\int (x-2)\sin 3x\mathrm{d}x$ và $\int xe^{\frac{x}{3}}\mathrm{d}x$ là các họ nguyên hàm còn $\frac{(x-a)\cos 3x}{b}+\frac{1}{c}\sin 3x+2017; F(x)$ là một hàm nên không thể viết $\int (x-2)\sin 3xdx = \frac{(x-a)\cos 3x}{b}+\frac{1}{c}\sin 3x+2017$ hay $F(x)=\int xe^{\frac{x}{3}}\mathrm{d}x$ được.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để bất phương trình $m+2\sin x\le f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$.

A. $m\ge f(0)$.
B. $m\le f(1)-2\sin 1$.
C. $m\le f(0)$.
D. $m\ge f(1)-2\sin 1$.

Lỗi sai:

+ Từ giả thiết hàm số không xác định tại $x=0$ nên không có $f(0)$.

+ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$, tức là $f'(x)\le 0$ trên $(1;+\infty)$ mà yêu cầu bài toán buộc phải có $f'(x)\ge 2,\forall x\in(0;+\infty)$ thì vô lí. Do đó, không có giá trị m nào thỏa mãn.

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}, f(x)=1-\sqrt{\frac{-f'(x)}{2x+1}}$ với mọi giá trị nguyên của x. Tính tổng $f(1)+f(2)+\ldots+f(2020)$.

A. $\frac{2020}{2021}$.
B. 2020.
C. $\frac{2020^2}{2021}$.
D. $\frac{2019^2}{2020}$.

Lỗi sai:

Hàm số cho $f(x)=1-\sqrt{\frac{-f'(x)}{2x+1}}$ với mọi x nguyên, với x không nguyên thì chưa chắc hàm số có đạo hàm tại x, nếu có đạo hàm thì chưa chắc có hệ thức thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 8: Cho $y=f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$ và $f'\left(x\right)=\frac{2}{\sin^2 x}+1,\forall x\in\left(0;\pi\right)$. Giá trị của $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $\frac{\pi^2}{2}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi}{2}$. **C.** $\frac{8\pi-\pi^2}{2}$. **D.** $\frac{\pi^2+2\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{\sin^2 x}+1\right)\mathrm{d}x=-2\cot x+x+C$.

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\Rightarrow\frac{\pi}{2}+C=4\Rightarrow C=4-\frac{\pi}{2}$.

Do đó, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(-2\cot x+x+4-\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{\pi^2+8\pi}{2}$.

Lỗi sai:

Hàm số $y=f\left(x\right)$ không liên tục trên $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ nên $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$ không xác định.

3.2. Hiểu sai các tính chất

Ví dụ 9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x^2+3x+1\right)=x+2$. Tính $\int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

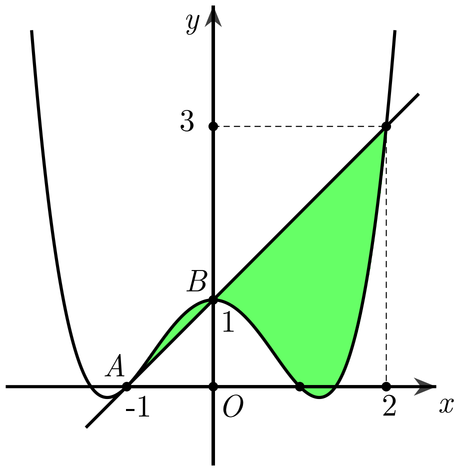
.

A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{527}{3}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{464}{3}$.

Lỗi sai:

Đồ thị hàm số $y=x^2+3x+1$ có trục đối xứng là $x=-\frac{3}{2}$, tức là thay các giá trị $x_0-\frac{3}{2}$ và $-x_0-\frac{3}{2}$ thì giá trị của $f\left(x^2+3x+1\right)$ bằng nhau, nhưng hàm $y=x+2$ không có tính chất như vậy. Do đó, không có hàm $f\left(x\right)$ thỏa mãn tính chất của bài toán.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$. Tiếp tuyến Δ tại A của đồ thị (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\dfrac{56}{5}$ (đồ thị như hình vẽ).



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Δ, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$.

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{20}$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lỗi sai:

Đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ không thể có dạng như hình đã cho.

Ví dụ 11: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=8\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là một Elip. Phương trình Elip đó là

A. $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{14}=1$. **B.** $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{22}=1$.

C. $\dfrac{x^2}{124}+\dfrac{y^2}{56}=1$. **D.** $\dfrac{x^2}{14}+\dfrac{y^2}{32}=1$.

Lỗi sai:

Không có phương án đúng, tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là một Elip có tiêu điểm $F_1(-2;1)$, $F_2(4;7)$ độ dài trục lớn là $4\sqrt{2}$.

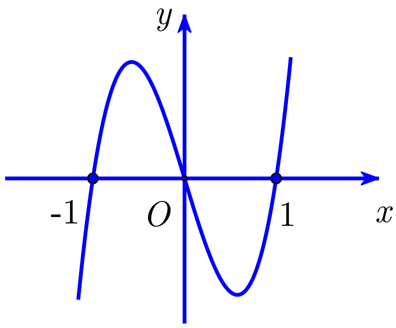
Tổng quát:

Cho số phức z thỏa mãn $|z-x_1-y_1i|+|z-x_2-y_2i|=2a$ với $a>0$.

+ Nếu $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4a^2$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đoạn thẳng F_1F_2, ở đó $F_1(x_1;y_1)$, $F_2(x_2;y_2)$.

+ Nếu $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2<4a^2$ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là Elip có các tiêu điểm F_1,F_2, độ dài trục lớn $2a$, ở đó $F_1(x_1;y_1)$, $F_2(x_2;y_2)$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d$ là các số thực). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x).f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4a(x^3-x)\Rightarrow f(x)=a(x^4-2x^2)+e$ là hàm chẵn.

Từ đồ thị suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số $g(x)=f(2x-1)$ có $g'(x)=2f'(2x-1)$.

$$g'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<2x-1<0\\1<2x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\frac{1}{2}\\x>1\end{array}\right.$$. Do đó, $g(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Hàm số $h(x)=f(2-x)$ có $h'(x)=-f'(2-x)$.

$$h'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<2-x<1\\2-x<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\1<x<2\end{array}\right.$$. Do đó, $h(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Do đó, hàm số $y=g(x).h(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Lỗi sai:

Tính chất được sử dụng: “Nếu $g(x)$ và $h(x)$ cùng đồng biến trên khoảng D thì $g(x).h(x)$ đồng biến trên D” không đúng.

Ta có $\left[g(x).h(x)\right]' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.

Do dàng $g(x)$ và $h(x)$ cùng đồng biến trên khoảng D thì mới khẳng định được $g'(x) \geq 0, h'(x) \geq 0, \forall x \in D$ chưa thể khẳng định được $g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \geq 0$.

Nhận xét: Trong quá trình tạo ra các bài toán dạng này cần lưu ý các tính chất

+ Nếu $g(x)$ và $h(x)$ cùng đồng biến trên khoảng D thì hàm $g(x) + h(x)$ đồng biến trên D.

+ Nếu $g(x)$ đồng biến trên khoảng D, $h(x)$ nghịch biến trên D thì hàm $g(x) - h(x)$ đồng biến trên D.

+ Nếu $g(x)$ và $h(x)$ cùng đồng biến trên khoảng D, đồng thời $g(x) \geq 0, h(x) \geq 0, \forall x \in D$ thì hàm $g(x).h(x)$ đồng biến trên D.

+ Nếu $g(x)$ và $h(x)$ cùng đồng biến trên khoảng D, đồng thời $g(x) \leq 0, h(x) \leq 0, \forall x \in D$ thì hàm $g(x).h(x)$ nghịch biến trên D.

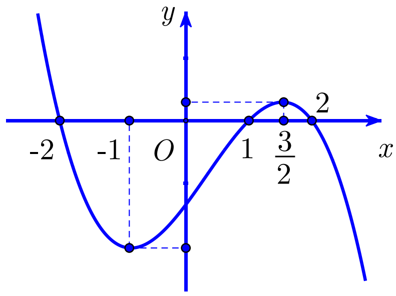
Ví dụ 13: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 có ba điểm cực trị $x = -1, x = 0, x = 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f\left(|x+m|\right)$ có 7 điểm cực trị.

A. $m < -1$. **B.** $m < 0$. **C.** $-1 < m < 2$. **D.** $m > 2$.

Lỗi sai:

Đồ thị hàm số $y = f\left(|x+m|\right)$ chỉ có 3 điểm cực trị và không phụ thuộc vào m. Do đó, giả thiết đã cho của bài toán là mâu thuẫn.

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(|x+m|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lỗi sai:

+ Câu dẫn "Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(|x+m|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị là" là câu hỏi nên phải sửa thành "Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(|x+m|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?"

+ Từ tính chất của hàm $f = f'(x)$ chưa đủ cơ sở để khẳng định khi nào hàm $y = f\left(|x+m|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị.

Sửa lại: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành $-2;;1;2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f\left(|x+m|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Tổng quát

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$$f'(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)f_1(x)$$

với $f_1(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (hoặc $f_1(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$) và $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

a) Số cực trị của $y = g(x) = f\left(|x \pm m|\right)$ phụ thuộc vào số giá trị $x_k\ \left(k = \overline{1;n}\right)$ không âm mà không phục thuộc vào m.

b) Hàm số $y = h(x) = f\left(|x| + m\right)$ có

✓ $2n+1$ điểm cực trị thì $m < x_1$.

✓ $2l+1\ (0 < l < n)$ điểm cực trị thì $x_k \le m < x_{k+1}$ với $l = n-k$ hay $k = n-l$.

✓ Đúng 1 điểm cực trị thì $m > x_n$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đạo hàm

$$f'(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)f_1(x)$$

với $f_1(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (hoặc $f_1(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) và $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

a) Số cực trị của hàm số $y = g(x) = f(|x - m|)$ phụ thuộc vào số giá trị $x_k\ (k = \overline{1;n})$ không âm mà không phục thuộc vào m.

b) Hàm số $y = h(x) = f(|x|) + m$ có

- ✓ $2n+1$ điểm cực trị thì $0 \ne m < x_1$.
- ✓ $2n$ điểm cực trị thì $0 = m < x_1$.
- ✓ $2l\ (0 < l < n)$ điểm cực trị thì $x_k \le m = 0 < x_{k+1}$ với $l = n - k$ hay $k = n - l$.
- ✓ $2l + 1\ (0 < l < n)$ điểm cực trị thì $\begin{cases} x_k \le m < x_{k+1} \\ m \ne 0 \end{cases}$ với $l = n - k$ hay $k = n - l$.
- ✓ 1 điểm cực trị thì $0 \ne m > x_n$.
- ✓ Không có điểm cực trị thì $0 = m > x_n$.

3.3. Tạo kết quả không duy nhất

Ví dụ 15: Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả $\int_1^e x^3 \ln x \mathrm{d}x = \dfrac{3e^a + 1}{b}$?

A. $a.b = 64$. **B.** $a.b = 46$. **C.** $a - b = 12$. **D.** $a - b = 4$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x^3 \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$. Áp dụng tích phân từng phần ta tính được:

$$\int_1^e x^3 \ln x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^3 \mathrm{d}x = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases} \Rightarrow a.b = 64.$$

Lỗi sai:

Ta có thể viết lại kết quả như sau

$$\frac{3e^4 + 1}{16} = \frac{\dfrac{3}{2}e^4 + \dfrac{1}{2}}{8} = \frac{\dfrac{3}{2}e^4 - \dfrac{1}{2} + 1}{8} = \frac{3\left(e^4 - \dfrac{1}{6}\right) + 1}{8} = \frac{3e^{\ln\left(e^4 - \frac{1}{6}\right)} + 1}{8}$$

Như vậy $\begin{cases} a = \ln\left(e^4 - \dfrac{1}{6}\right) \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow ab = 8\ln\left(e^4 - \dfrac{1}{6}\right)$.

Nhận xét: Đây là cách thường dùng khi tạo những bài toán tính tích phân xác định làm sao để tránh việc học sinh sử dụng máy tính cầm tay. Khi biểu diễn kết quả phải thực sự cẩn thận với tính duy nhất của các hệ số $a, b, c, \ldots$

4. Tạo ra đối tượng không tồn tại

Khi biên soạn câu hỏi trắc nghiệm để xây dựng một đề thi hay ngân hàng đề, chúng ta luôn cố gắng tạo mới các bài toán mình có về các nội dung: Cách diễn đạt mới, giả thiết mới, tạo theo những biến đổi phức tạp để làm ẩn đi bài toán cũ, sử dụng câu dẫn làm sao để tránh học sinh sử dụng máy tính cầm tay,… Nhưng đôi khi việc thay đổi đó dẫn đến mất bản chất bài toán hoặc dẫn đến những đối tượng không tồn tại tạo ra một câu hỏi sai. Bài viết này nhằm mục đích phân tích những Lỗi sai: thường mắc phải để giáo viên cũng như học sinh tìm ra ý tưởng gốc của các bài toán cũng như khắc phục những lỗi mà ta không để ý.

4.1. Tạo giả thiết mâu thuẫn

Ví dụ 16: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = f'(1) = 1$ và $f(1-x) - x^2 f''(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^1 x f'(x)\,dx$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lỗi sai:

Hai giả thiết $f(1) = f'(1) = 1$ và $f(1-x) - x^2 f''(x) = 2x$ mâu thuẫn nhau.

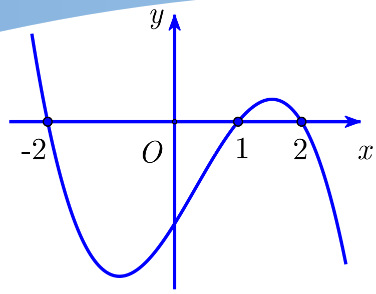
Thay $x = 0$ vào $f(1-x) - x^2 f''(x) = 2x$ ta được $f(1) = 0$.

$f(1-x) + x^2 f''(x) = 2x \Rightarrow -f'(1-x) + 2x f''(x) + x^2 f'''(x) = 2 \Rightarrow f'(1) = -2$.

Khi đó $f'(1) = -1$.

Như vậy, khi cho hàm số thỏa mãn đồng thời nhiều điều kiện thì các giả thiết đó phải cùng xác định cho ta hàm số thỏa mãn các giả thiết đó.

Ví dụ 17: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên và $f(-2) = f(2) = 0$. Hàm số $g(x) = f^2(3-x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(2;+\infty)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lỗi sai:

Xét hai phần hình phẳng sau:

* Phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2, x=1$ có diện tích $S_1 = -\int_{-2}^{1} f'(x)dx = -f(x)\Big|_{-2}^{1} = -f(1)+f(-2)$

* Phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ có diện tích $S_2 = \int_{1}^{2} f'(x)dx = f(x)\Big|_{1}^{2} = f(2)-f(1)$

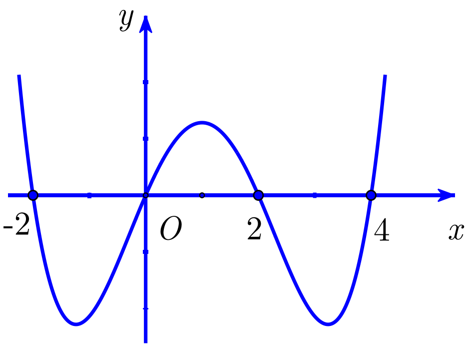
Dựa vào đồ thị ta dễ dàng so sánh được $S_1 > S_2$. Điều này tương đương với

$-f(1)+f(-2) > f(2)-f(1) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$

Kết quả thu được mâu thuẫn với giả thiết $f(-2)=f(2)=0$

Như vậy không tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Ví dụ 18: Cho hàm số $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(3+4x-x^2)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x\right|^3-3\left|x\right|+m+2020\right)-2022$ có 5 điểm cực trị là

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lỗi sai:

+ Các phương án nhiễu chỉ được tịnh tiến từ phương án đúng mà không dựa trên những hướng giải dẫn tới phương án sai.

+ Ta có nhận xét rằng $f'(3+4x-x^2) = f'\left(7-(x-2)^2\right)$ như thế đồ thị hàm này phải có trục đối xứng là đường thẳng $x=2$, như vậy đồ thị đã cho không đúng với tính chất ban đầu của hàm $y = f'(3+4x-x^2)$.

Nhận xét: Khi xây dựng các câu hỏi về hàm ẩn liên quan đến đồ thị cần:

+ Dựa vào tính chất hàm số, tính chất đồ thị để kiểm tra xem có hàm số thỏa mãn điều kiện đề ra hay không?

+ Nên xuất phát từ một hàm cụ thể để đảm bảo có hàm số thỏa mãn.

4.2. Tạo đối tượng không tồn tại.

Ví dụ 5: Cho $y=f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giá trị của $\int\limits_0^2 f(x)dx$ là

A. $\dfrac{e^4-1}{4}$. **B.** $\dfrac{2e-1}{2}$. **C.** e^4-2. **D.** e^4-1.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=2-t \Rightarrow dx=-dt$.

$$\Rightarrow I=\int\limits_2^0 f(2-t)(-dt)=\int\limits_0^2 f(2-t)\,dt=\int\limits_0^2 f(2-x)\,dx.$$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_0^2\left[f(x)+f(2-x)\right]dx=\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2=\frac{e^4-1}{2}.$$

Vậy $I=\dfrac{e^4-1}{4}$.

Lỗi sai:

Đây là **câu hỏi lỗi** ở chỗ không tồn tại hàm $y=f(x)$ như vậy.

Cụ thể, với $\forall x \in [0;2], g(x) = f(x) + f(2-x) = f(2-x) + f(x) = g(2-x)$.

Hàm số $g(x)$ này có tính chất tương tự như hàm chẵn, đồ thị trên $[0;2]$ nhận đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng. Trong khi hàm $y = x.e^{x^2}$ không có tính chất như vậy.

Do đó, phải chọn hàm số bên phải là biểu thức đối xứng của x và $2-x$, ví dụ $x(2-x)$; $x^3 + (2-x)^3$;…

Sửa lại: Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(2-x) = 6x - 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } \int_0^2 f(x)dx.$$

Tổng quát:

Bài toán 1: Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x) + f(2a-x) = u(x-a), \forall x \in \mathbb{R} \text{ (} u \text{ là hàm chẵn)}$$

Khi đó $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^{a} u(x-a)\,\mathrm{d}x$.

Bài toán 2: Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

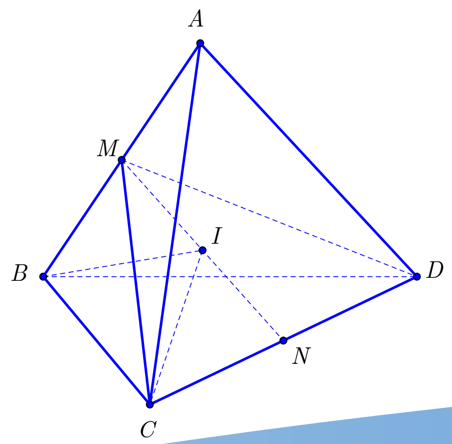
$$bf(x) + cf(2a-x) = u(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ với } b \neq \pm c.$$

Tính $\int_0^{2a} f(x)dx$.

Với bài toán này ta hướng đến việc tìm hàm $f(x)$ thông qua hệ

$$\begin{cases} bf(x) + cf(2a-x) = u(x) \\ cf(x) + bf(2a-x) = u(2a-x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{bu(x) - cu(2a-x)}{b^2 - c^2}.$$

Ví dụ 19: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 5$, $AC = BD = 6$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng:



A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{154}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{106}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{106}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. Gọi I là trung điểm CD.

Ta dễ dàng thấy được: $\Delta ABC = \Delta BAD\ c-c-c\ \Rightarrow CM = MD \Rightarrow \Delta MCD$ cân tại M

$\Rightarrow MN \perp CD$. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $MN \perp AB$. Từ đó suy ra $\Delta IMB = \Delta IND\ cgv-cgv$

$\Rightarrow IB = ID = IC = IA$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Xét tam giác AMN có trung tuyến AN nên $AN^2 = \frac{AC^2+AD^2}{2} \quad \frac{CD^2}{4} = \frac{53}{2}$.

Xét tam giác vuông AMN có $IN = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}\sqrt{AN^2 - AM^2} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$.

Xét tam giác vuông INC có $R = IC = \sqrt{IN^2 + NC^2} = \frac{\sqrt{154}}{4}$.

Lỗi sai:

Không tồn tại tứ diện có tính chất như vậy.

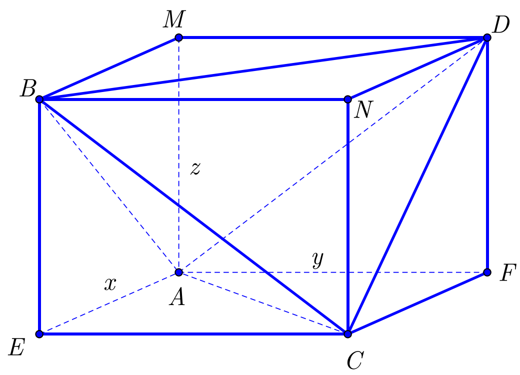
Sửa lại: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 4$, $AC = BD = 2\sqrt{3}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{38}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{74}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{26}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{37}}{2}$

Tổng quát:

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $AC = BD = c$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Dựng hình hộp chữ nhật $AECF.MBND$ có ba kích thước là $x,y,z\ \ x,y,z > 0$ (hình vẽ)



Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật cũng là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, do đó bán kính mặt cầu là:

$R=\frac{AN}{2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$.

Mặt khác $\begin{cases}x^2+y^2=c^2\\y^2+z^2=b^2\\z^2+x^2=a^2\end{cases}$. Suy ra $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Vậy $R=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2\sqrt{2}}$.

Ví dụ 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$; $\vec{u}(1;a;b)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d' qua A, cắt d, tạo với trục Oz góc nhỏ nhất. Tổng $a+b$ bằng

A. $-\frac{71}{3}$. **B.** 71. **C.** $\frac{71}{3}$. **D.** -71.

Lỗi sai:

Không tồn tại đường thẳng d' thỏa mãn tính chất bài ra.

Thật vậy, gọi $\vec{v}=(1;1;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Ta có d' đi qua $M(t;t+1;2t)\in d$ và $A(1;2;3)$ nên $\overrightarrow{AM}=(t-1;t-1;2t-3)$ cũng là vectơ chỉ phương của d' hay $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}\Leftrightarrow(t-1):(t-1):(2t-3)=1:a:b\Rightarrow a=1\Rightarrow\vec{u}=(1;1;b)$.

Do đó, $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{b}{\sqrt{b^2+2}}$ không tồn tạo giá trị lớn nhất.

Vì vậy, không tồn tại góc nhỏ nhất cảu d và d'.

Ví dụ 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):mx+(m+1)y-z-2m-1=0$, với m là tham số. Gọi (T) là tập hợp các điểm H_m là hình chiếu vuông góc của điểm $H(3;3;0)$ trên (P). Gọi a,b lần lượt là khoảng cách lớn nhất, khoảng cách nhỏ nhất từ O đến một điểm thuộc (T). Khi đó, $a+b$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(P):mx+(m+1)y-z-2m-1=0\Leftrightarrow m(x+y-2)+(y-z-1)=0$.

Suy ra P luôn chứa đường thẳng $d : \begin{cases} x+y-2=0 \\ y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của $H(3;3;0)$ lên đường thẳng d, ta tìm được $K(1;1;0)$.

Tam giác HH_mK là tam giác vuông tại H_m và $HH_m \perp d$ nên T là đường tròn có tâm I $2;2;0$ là trung điểm của HK, bán kính $R = \dfrac{HK}{2} = \sqrt{2}$ và nằm trong mặt phẳng Q đi qua H, vuông góc với d.

Phương trình mặt phẳng Q $: x-y-z=0$ và $OI = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $O \in Q$ và O ở ngoài T.

Gọi A, B là giao điểm của OI và T (với A là điểm nằm giữa O và I).

Ta có $OA \le OH_m \le OB$, suy ra $a = OA = OI - R = \sqrt{2}$, $b = OB = OI + R = 3\sqrt{2}$.

Vậy $a+b = 4\sqrt{2}$.

Lỗi sai:

Kết quả $a+b=4\sqrt{2}$ không tồn tại do khi đó không có giá trị của m thỏa mãn, tức là không tồn tại mặt phẳng P.

Nhận xét: Khi xây dựng các bài toán hình học liên quan đến quỹ tích cần lưu ý đến có trường hợp điểm nào thuộc quỹ tích không thỏa mãn điều kiện bài toán không. Tương tự với các bài toán cực trị, cần kiểm tra xem dấu bằng có xảy ra hay không.