NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Tập san số 03
9-2021

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

- Ứng dụng một số tích chất đặc biệt của hàm số để giải phương trình, bất phương trình
- Phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nhờ kĩ thuật dựng song song giữa đường thẳng và mặt phẳng
- Vẻ đẹp lời giải hình học qua các bài toán lượng giác

Kỳ thi tốt nghiệp THPT môn Toán đợt 2

- Lời giải chi tiết các câu VD – VDC các mã đề gốc 102
- Phân tích các câu VD – VDC trong đề thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Năm học 2021 – 2022 là năm học diễn ra trong bối cảnh cả nước đang tích cực tham gia công tác phòng chống đại dịch COVID 19; năm học đại đa số học sinh phải tham gia khai giảng và học trực tuyến; năm học không những ngành giáo dục mà tất cả các ngành nghề được dự báo là một năm gặp rất nhiều khó khăn.

Một trong những trở ngại lớn nhất cho thầy cô giáo trong thời gian tới là việc dạy học trực tuyến. Để giải quyết một phần khó khăn trong dạy học, Nhóm sẽ có những hướng dẫn cơ bản cho quý thầy cô về các công cụ, phần mềm hỗ trợ cho dạy học Online, tài liệu phục vụ dạy học trong thời gian này **NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM** xin trân trọng giới thiệu, ra mắt cùng quý thầy cô và các em ấn phẩm **Tập san số 03**.

Hy vọng Tập san sẽ là sân chơi để quý thầy cô trao đổi kinh nghiệm dạy học cùng các đồng nghiệp thông qua các bài viết của mình; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng làm bài thi trắc nghiệm môn Toán.

Để hoàn thành Tập san, BQT chân thành cám ơn tất cả các thành viên của nhóm đã rất tâm huyết tham gia, xây dựng Tập san.

Tài liệu tuy đã được nhóm tổ chức làm cẩn thận, phản biện nhiều lần, nhưng không thể tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp tích cực từ quý thầy cô cùng các em học sinh. Các ý kiến đóng góp chân thành của quý thầy cô là nguồn động lực để chúng tôi tiếp tục vững bước trên con đường mới và xây dựng tập san ngày càng chất lượng hơn. Mọi ý kiến đóng góp, bài viết gửi đăng xin gửi về theo địa chỉ:

mail: nhomGVTVN@gmail.com

BQT NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM!

Các thành viên tham gia Tập san

Ban quản trị NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM
Cô giáo: Ngô Tú Hoa, Lại Nhật Hoan
Thầy giáo: Trương Quốc Toản, Nguyễn Khải, Lê Thảo, Tạ Minh Đức, Nguyễn Ngọc Chi, Ngô Nguyễn Quốc Mẫn Nam Phương, Nhân Lê.
Cùng các thầy, cô giáo tham gia viết và phản biện: Nguyễn Sỹ, Binh Hoang, Hoàng Minh Quân, Nguyễn Minh Nhiên, Tạ Minh Đức, Nguyễn Bá Nam, Lê Thảo, Lê Anh Dũng, Phong Do, Huỳnh Văn Ánh, Nguyễn Khắc Thành, Hoàng An Dinh, Trần Đức Nội, Lê Thanh Bình, Trương Đức Thịnh, Nguyễn Thanh Hải, Vũ Minh Tư, Nguyễn Ngọc Hóa, Phạm Tuấn, ĐucThanh Phạm.

Trân trọng!

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Ứng dụng một số tích chất đặc biệt của hàm số để giải phương trình, bất phương trình

Ths NGUYỄN SỸ
Giáo viên Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.

*Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình là một mảng kiến thức khá quan trọng của chương trình toán THPT, nó đóng vai trò quan trọng trong việc rèn luyện kỹ năng giải toán và phát triển tư duy cho học sinh, chính vì thế bài tập phương trình, bất phương trình, hệ phương trình xuất hiện nhiều trong các kỳ thi TN THPT và kỳ thi HSG cấp tỉnh. Các kỹ thuật giải phương trình, bất phương trình rất phong phú và đa dạng. Tuy nhiên, kỹ thuật sử dụng tính chất đặc biệt của hàm số có rất nhiều ưu thế trong việc giúp các em tìm tòi, phát hiện, tạo hứng thú trong quá trình học bộ môn Toán, và hơn nữa là góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy vì thế tôi viết chuyên đề **"Ứng dụng một số tích chất đặc biệt của hàm số để giải phương trình, bất phương trình"**.*

1. Cơ sở lý thuyết

1.1. Kiến thức cần nắm

1.1.1. Định nghĩa hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập D.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên tập D nếu $\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ f(-x)=f(x),\ \forall x\in D.\end{cases}$

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên tập D nếu $\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ f(-x)=-f(x),\ \forall x\in D.\end{cases}$

1.1.2. Một số kết quả thường dùng

Định lí 1

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'(x)>0\,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $f'(x)<0\,\forall x\in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Lưu ý: Nếu $f'(x)>0\,\forall x\in(a;b)$ và hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

Tính chất 1. Cho hàm số f liên tục và đơn điệu trên khoảng K, khi đó

PT $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$ với $\begin{cases}u\in K\\ v\in K.\end{cases}$

Tính chất 2. Cho hàm số f liên tục và đồng biến trên khoảng K, khi đó

BPT $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v$ với $\begin{cases}u\in K\\ v\in K.\end{cases}$

Tính chất 3. Cho hàm số f liên tục và nghịch biến trên khoảng K, khi đó

BPT $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u<v$ với $\begin{cases}u\in K\\ v\in K.\end{cases}$

Một số hàm số có một vài tính chất đặc biệt:

+) Với $a>1$ hàm số $f(x)=a^x-a^{-x}$ là hàm số lẻ, đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Với $a>1$, hàm số $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn $f(x)+f(1-x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

+) Với $a,b>1$, hàm số $f(x)=\log_a x+b^x-b^{\frac{1}{x}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)\ \forall x>0$.

+) Với $a>1$ hàm số $f(x)=\log_a\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

+) Với $a,b>0$, hàm số $f(x)=a\left(e^x-e^{-x}\right)+b\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm số lẻ, đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Hàm số $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f(-x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Việc chứng minh các tính chất trên khá đơn giản (xin dành cho bạn đọc).

2. Bài tập áp dụng:

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=2021^x-2021^{-x}$. Giá trị nguyên lớn nhất của m để $f(m)+f(2m+2019)<0$ là

A. -673. **B.** -674. **C.** 673. **D.** 674.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=2021^x\ln 2021+2021^{-x}\ln 2021>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

BPT:

$$\begin{aligned}f(m)+f(2m+2019)<0&\Leftrightarrow f(2m+2019)<-f(m)\\&\Leftrightarrow f(2m+2019)<f(-m)\\&\Leftrightarrow 2m+2019<-m\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 3m<-2019\Leftrightarrow m<-673$.

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của m là -674.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=2020^{x}-2020^{-x}$. Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để phương trình $f\left(\log_2 x-m\right)+f\left(\log_2^3 x\right)=0$ có nghiệm $x\in\left(1;16\right)$.

A. 65. **B.** 67. **C.** 68. **D.** 69.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=2020^{x}\ln 2020+2020^{-x}\ln 2020>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ lẻ trên $\mathbb{R}$.

Đặt $t=\log_2 x$, ĐK $t\in\left(0;4\right)$. PT trở thành

$f\left(t-m\right)+f\left(t^3\right)=0\Leftrightarrow f\left(t^3\right)=-f\left(t-m\right)\Leftrightarrow f\left(t^3\right)=f\left(m-t\right)$

$\Leftrightarrow t^3=m-t\Leftrightarrow t^3+t=m$.

Xét hàm số $g\left(t\right)=t^3+t$ với $t\in\left(0;4\right)$, ta có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0\forall t\in\left(0;4\right)$. Mà $f\left(t\right)$ liên tục trên $\left[0;4\right]$. Suy ra $g\left(0\right)<g\left(t\right)<g\left(4\right)\forall t\in\left(0;4\right)$, hay $0<g\left(t\right)<68,\forall t\in\left(0;4\right)$.

Vậy PT đã cho có nghiệm $x\in\left(1;16\right)$ khi và chỉ khi $0<m<68$. Suy ra giá trị nguyên lớn nhất của tham số m là 67.

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\ln x+e^{x}-e^{\frac{1}{x}}$. Có bao nhiêu nghiệm nguyên dương của phương trình sau $f\left(\log_{(9x+2)}10\right)+f\left(\log\left(2+x^3\right)\right)=0$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+e^{x}+\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}>0,\forall x>0$, suy ra hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Với $x>0$, ta có $f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+e^{\frac{1}{x}}-e^{x}=-\left[\ln x+e^{x}-e^{\frac{1}{x}}\right]=-f\left(x\right)$.

Với $x\in\mathbb{Z}_+^*$, phương trình

$$f\left(\log_{(9x+2)}10\right)+f\left(\log\left(2+x^3\right)\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\log\left(9x+2\right)}\right)+f\left(\log\left(2+x^3\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -f\left(\log\left(9x+2\right)\right)+f\left(\log\left(2+x^3\right)\right)=0\Leftrightarrow f\left(\log\left(2+x^3\right)\right)=f\left(\log\left(9x+2\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \log\left(2+x^3\right)=\log\left(2+9x\right)\Leftrightarrow x\left(x^2-9\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 3\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện đang xét. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{9^x}{9^x+3}$. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(3m+\frac{1}{4}\sin x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=1$ có nghiệm là

A. $-\frac{1}{192}\le m\le\frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{1}{192}<m<\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{-1}{192}\le m\le\frac{5}{12}$. **D.** $-\frac{1}{192}<m<\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{1.3-1.0}{\left(9^x+3\right)^2}.9^x.\ln 9>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{3}{9^x+3}=1\Rightarrow f(x)+f(1-x)=1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f\left(\cos^2 x\right)=f\left(1-\sin^2 x\right)=1-f\left(\sin^2 x\right)$.

Nên PT đã cho $\Leftrightarrow f\left(3m+\dfrac{1}{4}\sin x\right)=f\left(\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 3m+\dfrac{1}{4}\sin x=\sin^2 x\Leftrightarrow 3m=\sin^2 x-\dfrac{1}{4}\sin\ x$

Đặt $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$; $g(t)=t^2-\dfrac{1}{4}t\Rightarrow g'(t)=2t-\dfrac{1}{4}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow 2t-\dfrac{1}{8}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{8}$.

t	-1		$1/8$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$5/4$	$\searrow$	$-1/64$	$\nearrow$	$3/4$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{64}\le 3m\le\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow\dfrac{-1}{192}\le m\le\dfrac{5}{12}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(m-\dfrac{1}{4}\sin x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ là

A. $-\dfrac{1}{64}<m<\dfrac{3}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{64}<m\le 0$. **C.** $-\dfrac{1}{64}<m<0$. **D.** $-\dfrac{1}{64}<m\le\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$, ta có

$f'(x)=\dfrac{2.4^x.\ln 4}{\left(4^x+2\right)^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (1)

Ta lại có: $f(1-x)=\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4}{4+2.4^x}=\dfrac{2}{2+4^x}$

Suy ra $f(1-x)+f(x)=\dfrac{2}{4^x+2}+\dfrac{4^x}{4^x+2}=1\Rightarrow f(x)=1-f(1-x)$.

Từ đó, PT $f\left(m-\dfrac{1}{4}\sin x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=1\Leftrightarrow f\left(m-\dfrac{1}{4}\sin x\right)=1-f\left(1-\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow f\left(m-\dfrac{1}{4}\sin x\right)=f\left(\sin^2 x\right)$. (2)

Từ (1) và (2), ta có PT (2) $\Leftrightarrow m-\dfrac{1}{4}\sin x=\sin^2 x\Leftrightarrow m=\sin^2 x+\dfrac{1}{4}\sin x$ (*)

Phương trình $(*)$ có 8 nghiệm phân biệt thuộc $[-\pi;2\pi]$ khi và chỉ $m=t^2+\frac{1}{4}t$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-1;0]$.

Xét hàm số $y=t^2+\frac{t}{4}$

Bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{1}{8}$		0
$y=t^2+\frac{t}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{64}$	$\nearrow$	0

Vậy $(*)$ có 8 nghiệm phân biệt thuộc $[-\pi;2\pi]$ khi $-\frac{1}{64}<m\le 0$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt bằng

A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

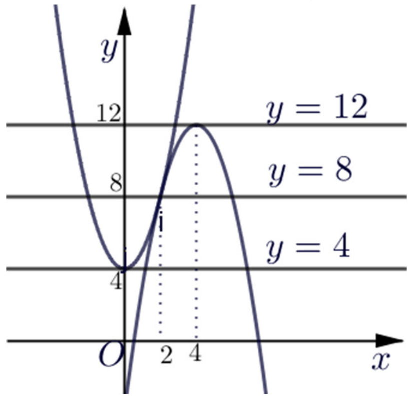
Ta có: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_3\frac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}-3^x=-\left(\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}\right)=-f(x)\,\forall x>0$

Lại có: $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+3^x.\ln 3+\frac{1}{x^2}.3^{\frac{1}{x}}.\ln 3>0\,\forall x>0\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó $f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0\Leftrightarrow f\left(4|x-m|+3\right)=f\left(x^2-4x+7\right)$

$\Leftrightarrow 4|x-m|+3=x^2-4x+7\Leftrightarrow 4|x-m|=x^2-4x+4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m=-x^2+8x-4\\4m=x^2+4\end{array}\right.$

Vẽ hai parabol $y=-x^2+8x-4$ và $y=x^2+4$ trên cùng một hệ trục



Hai parabol $y=-x^2+8x-4$ và $y=x^2+4$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(2;8)$.

Parabol $y=-x^2+8x-4$ có đỉnh $I_1(4;12)$; parabol $y=x^2+4$ có đỉnh $I_2(0;4)$.

Phương trình đã cho có đúng ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m=4\\4m=8\\4m=12\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=2\\m=3\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là $1^2+2^2+3^2=14$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\log_2\sqrt{x+\sqrt{x^2+4}}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left((x+1)^4-4x-5\right)+f\left(x^2+6m-m^2-m^4\right)\geq 1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\log_2\sqrt{x+\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{2}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{2\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\ln 2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}\ln 2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(-x)=\frac{1}{2}\log_2\left(-x+\sqrt{(-x)^2+4}\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

$=\frac{1}{2}\log_2\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=1-\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)=1-f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương

$f\left((x+1)^4-4x-5\right)+f\left(x^2+6m-m^2-m^4\right)\geq 1 \Leftrightarrow f\left((x+1)^4-4x-5\right)\geq 1-f\left(x^2+6m-m^2-m^4\right)$

$\Leftrightarrow f\left((x+1)^4-4x-5\right)\geq f\left(-x^2-6m+m^2+m^4\right)$

$\Leftrightarrow (x+1)^4-4x-5\geq -x^2-6m+m^2+m^4$

$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x+1)^2-6(x+1)\geq m^4+m^2-6m$.

Đặt $t=x+1; t\in\mathbb{R}$. Bất phương trình trở thành $t^4+t^2-6t\geq m^4+m^2-6m$.

Xét hàm số $g(t)=t^4+t^2-6t; t\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(t)=4t^3+2t-6$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow 4t^3+2t-6=0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m^4+m^2-6m\leq -4$

$\Leftrightarrow g(m)\leq -4 \Leftrightarrow g(m)=-4 \Leftrightarrow m=1$ (Suy ra từ bảng biến thiên).

Vậy có 1 giá trị thực của m thỏa mãn.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $f\left(\left|3x^2+m\right|\right)+f\left(x^3-12\right)\leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;1]$.

A. 21. **B.** 22. **C.** Vô số. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^3$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)+\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}+3x^2=\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+3x^2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}f(-x)&=\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-x^3\\&=\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)+\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-x^3\\&=\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-x^3\\&=-f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

BPT $f\left(\left|3x^2+m\right|\right)+f\left(x^3-12\right)\le 0\Leftrightarrow f\left(\left|3x^2+m\right|\right)\le f\left(12-x^3\right)$

$\Leftrightarrow\left|3x^2+m\right|\le 12-x^3\Leftrightarrow x^3+\left|3x^2+m\right|-12\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+3x^2+m-12\le 0, (1)\\x^3-3x^2-m-12\le 0, (2)\end{cases}$

+) Đặt $g(x)=x^3+3x^2+m-12\Rightarrow g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Ta có BBT:

x	-2		0		1
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$m-8$	$\searrow$		$\nearrow$	$m-8$

Do đó (1) thỏa mãn với mọi $x\in[-2;1]\Leftrightarrow m-8\le 0\Leftrightarrow m\le 8.$

+) Đặt $h(x)=x^3-3x^2-m-12\Rightarrow h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0.$

Ta có BBT:

x	-2		0		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$-m-12$	$\searrow$	

Do đó (2) thỏa mãn với mọi $x\in[-2;1]\Leftrightarrow\underset{[-2;1]}{\mathrm{Max}}\left(h(x)\right)\le 0\Leftrightarrow -m-12\le 0\Leftrightarrow m\ge -12.$

Vậy $-12\le m\le 8$. Suy ra có 21 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)+\dfrac{4^x-1}{2^x}$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)+f(m+1)\ge 0$ có nghiệm là

A. $m\le\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m\le\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $m\le\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)+\dfrac{4^x-1}{2^x}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f(-x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)+\dfrac{4^{-x}-1}{2^{-x}}=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)+\dfrac{1-4^x}{2^x}$

$=\ln\left(\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)^{-1}\right)-\dfrac{4^x-1}{2^x}=-\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)-\dfrac{4^x-1}{2^x}=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}.$

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}+2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét bất phương trình $f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)+f(m+1)\geq 0$, ĐKXĐ $x\geq 4$.

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)\geq -f(m+1)$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-4}-m(x-1)\right)\geq f(-m-1)$ (do $f(x)$ là hàm số lẻ)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-4}-m(x-1)\geq -m-1$ (do $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow m(2-x)\geq -1-\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow m\leq\dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x-2}$. (*)

Xét $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x-2}$. Ta có $g'(x)=\dfrac{6-x-2\sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4}.(x-2)^2}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 6-x-2\sqrt{x-4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 6\\ \left[\begin{array}{l}x=8+2\sqrt{3}\\ x=8-2\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=8-2\sqrt{3}.$$

Bảng biến thiên:

x	4		$8-2\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Từ BBT, bất phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Cách khác: Đặt $t=\sqrt{x-4},t\geq 0$, khi đó (*) trở thành $m\leq\dfrac{t+1}{t^2+2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t)=\dfrac{t+1}{t^2+2}$ trên khoảng $[0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{[0;+\infty)}g(t)=g\left(\sqrt{3}-1\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$, từ đó suy ra bất phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $\left(-x^2+2x-2\right)f\left(-x^2+2x-2\right)+\dfrac{\left(2|x-m|+1\right)}{f\left(2\sqrt{x^2-2mx+m^2}+1\right)}=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt là

A. $\dfrac{13}{4}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sqrt{x^2-2mx+m^2}=|x-m|$; $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>0$ và

$$f(-x)=-x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x).f(-x)=1\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{f(-x)}\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-x^2+2x-2)=\frac{1}{f(x^2-2x+2)}.$$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{2|x-m|+1}{f(2|x-m|+1)}=\dfrac{x^2-2x+2}{f(x^2-2x+2)}$ (1).

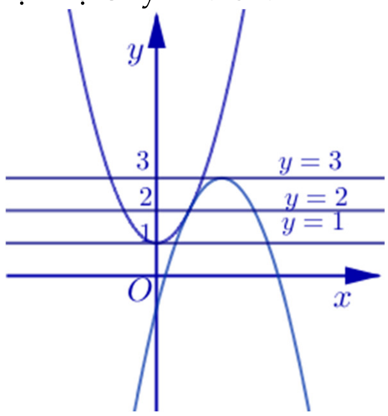
Xét hàm số

$$g(t)=\frac{t}{f(t)}(t>0)\Rightarrow g'(t)=\frac{f(t)-t.f'(t)}{f^2(t)}=\frac{t+\sqrt{t^2+1}-t-\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{f^2(t)}=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}.f^2(t)}>0$$

Vậy hàm số $g(t)$ đồng biến, khi đó phương trình (1) tương đương với pt

$$x^2-2x+2=2|x-m|+1\Leftrightarrow x^2-2x+1=2|x-m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=2(x-m)\\x^2-2x+1=-2(x-m)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m=-x^2+4x-1\\2m=x^2+1\end{array}\right..$$

Ta thấy hai parabol $y=-x^2+4x-1,\ y=x^2+1$ tiếp xúc với nhau tại điểm có tọa độ $(1;2)$ nên đồ thị của chúng trong cùng hệ tọa độ Oxy như sau.

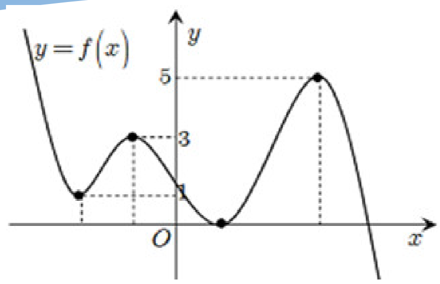


Khi đó để phương trình có 3 nghiệm thì đường thẳng $y=2m$ cắt hai parabol tại 3 điểm phân biệt, từ đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l}2m=3\\2m=2\\2m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\m=1\\m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các giá trị của m bằng $\dfrac{7}{2}$.

3. Bài tập tự luyện:

Bài 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{m^3+5m}{\sqrt{f^2(x)+1}}=f^2(x)+6$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt.



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Bài 2. Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3+2-m=\sqrt[3]{3x^2+4x+m}$ có đúng hai nghiệm thực. Tích tất cả phần tử của tập hợp S bằng.

A. $\frac{23}{27}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{27}$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$ là

A. 1746. **B.** 1750. **C.** 1747. **D.** 1748.

Bài 4. Cho phương trình $4^{-x}+x-\log_4(m-x)-2m-\frac{1}{2}=0$, $(m\in\mathbb{R})$. Số giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

Bài 5. Có tất cả bao nhiêu số nguyên dương a với $a<2021$ để phương trình $(ax+a\ln a).\ln(ax+a\ln a)=e^{e^x+x}$ có nghiệm $x\geq 2$

A. 1199. **B.** 2003. **C.** 1001. **D.** 1802.

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $(x-m)f(x-m)+\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{f\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$.

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}-1$. **D.** 1.

Bài 7. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\leq 2021$ thỏa mãn $2(3x-y)=3(1+9^y)-\log_3(2x-1)$?

A. 2020. **B.** 1010. **C.** 3. **D.** 4.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=x^3-15x^2+78x-141-m-5\sqrt[3]{2x-9+m}$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ sao cho $f(x)\leq 0$ với mọi x thuộc đoạn $[2;4]$?

A. 2020. **B.** 2024. **C.** 2021. **D.** 2022.

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=\log_{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+x^{2021}+x^{2023}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(2^{-x})+f(-x-3)\leq 0$ là

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Bài 10. Xét hàm số $f(t)=\frac{9^t}{9^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi x,y thỏa mãn $e^{x+y}\leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời kết: Trên đây là bài viết nhỏ sử dụng tính chất của hàm số để giải quyết một số bài toán về PT-BPT bài viết được tham khảo, tổng hợp từ nhiều câu hỏi được đăng trên FB **NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM** với các kỹ thuật như trên chúng ta có thể tạo ra các lớp bài toán thú vị hơn.

Do kinh nghiệm chưa nhiều và thời gian hạn chế nên chuyên đề còn nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy, cô và bạn bè đồng nghiệp để bài viết được hoàn thiện hơn. Chúc các thầy cô và các em sức khỏe, thành công!

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nhờ kĩ thuật dựng song song giữa đường thẳng và mặt phẳng

HOÀNG XUÂN BÍNH

GV Trường THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam

Trong bài toán thuộc chủ đề khoảng cách thì ta thấy thường xuất hiện bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Do đó, mình viết chuyên đề này để giúp các thầy cô và các em học sinh có một hướng tiếp cận khi giải quyết bài toán này.

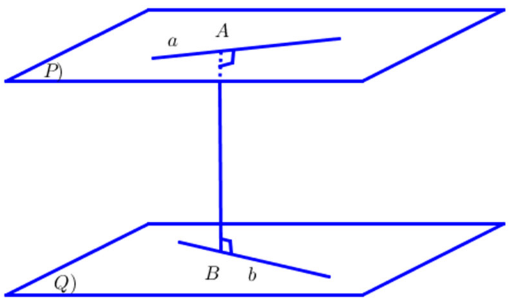
I. Kiến thức cơ bản cần nhớ:

1) Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó

2) Nhận xét:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



3) Định hướng:

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta thường sử dụng một trong hai hướng sau:

- *Hướng 1: Sử dụng định nghĩa.*

- *Hướng 2: Sử dụng nhận xét trên.*

4) Các kiến thức bổ trợ:

Chúng ta cần lưu ý một số định lý, tính chất và công thức sau:

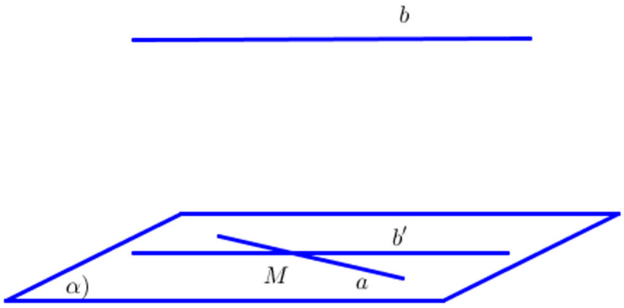
- Đường thẳng song song với mp:

Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với mặt phẳng (α).

- Cách dựng mp mặt phẳng chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a (với a và b là hai đường thẳng chéo nhau):

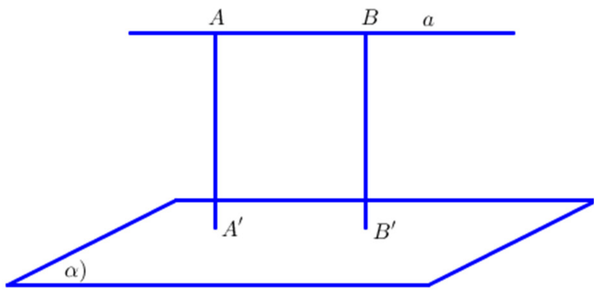
+ Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

+ Cách dựng: Lấy điểm M bất kì thuộc a. Qua M kẻ đường thẳng $b' \parallel b$. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi a và b'. Khi đó $b \parallel b', b' \subset (\alpha), b \not\subset (\alpha) \Rightarrow b \parallel (\alpha)$.



- K/c đường thẳng và mp song song: *Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α), kí hiệu là $d(a;(\alpha))$.*

+ Nhận xét: *nếu $AB \parallel (\alpha)$ thì $d(A;(\alpha)) = d(B;(\alpha))$*

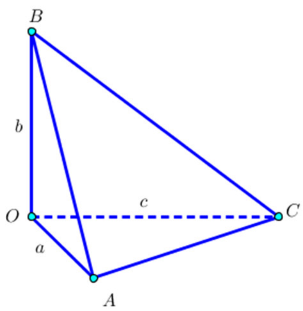


- Công thức tỉ số khoảng cách:

$$\text{Nếu } AB \cap (\alpha) = I \Rightarrow \frac{d(A;(\alpha))}{d(B;(\alpha))} = \frac{AI}{BI}.$$

- Chú ý: Cho tam diện vuông đỉnh O có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

Giả sử: $h = d(O;(ABC))$ và $OA = a, OB = b, OC = c$ thì ta luôn có $\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$



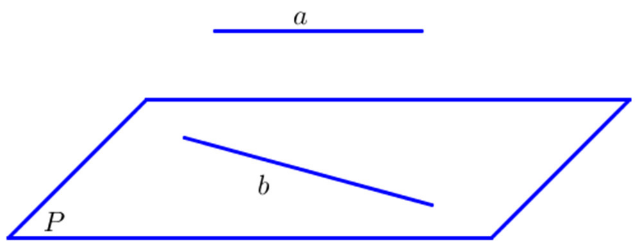
(Phần chứng minh công thức này, đề nghị bạn đọc tự tìm hiểu và chứng minh lấy)

II. Nội dung chuyên đề:

Để giúp học sinh và các thầy cô có một cách tiếp cận về loại bài tập này, tôi xin trình bày: *Phương pháp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nhờ kĩ thuật dựng song song giữa đường với mặt.*

a) Phương pháp: Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong chuyên đề này, chúng ta sử dụng phương pháp đường song song với mặt.

Cho a,b là hai đường thẳng chéo nhau thì ta luôn có: $d(a;b)=d(a;(P))$ với $b\subset(P)$ và $a\,//\,(P)$.



b) Các tính chất hình học phẳng thường được sử dụng:

- Loại 1: Khai thác tính chất hình bình hành (*hoặc trong các hình hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông*): trong một hình bình hành thì hai cặp cạnh đối diện luôn song song với nhau.

- Loại 2: Khai thác tính chất đường trung bình của tam giác.

Chú ý:

+ Để khai thác tính chất đường trung bình trong tam giác, ta chú ý tới các yếu tố trung điểm có sẵn trong đề bài từ đó xây dựng thêm một trung điểm mới để thiết lập đường trung bình từ đó xác định được yếu tố song song mà ta sẽ chuyển đổi được khoảng cách giữa đường với đường về đường với mặt.

+ Với bài toán có liên quan tới bài toán về hình hộp hoặc lăng trụ tam giác thì ta chú ý một tính chất quen thuộc của lăng trụ là: tâm của các mặt bên cũng chính là trung điểm của hai đường chéo của mặt bên đó.

III. Bài tập minh họa:

Trong chuyên đề này, tôi xin chia các bài toán áp dụng được phương pháp này thành 2 dạng:

- Dạng 1. Các bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong các bài toán về hình chóp

- Dang 2: Các bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong các bài toán về lăng trụ.

Để làm rõ hơn việc tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng kĩ thuật dựng đường song song với mặt , chúng ta sẽ đi tìm hiểu cụ thể trong các bài toán sau đây.

1) Dang 1: Các bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong các bài toán về hình chóp

Câu 1: *(Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2020-2021)* Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

Phân tích:

+ Trong bài toán này,ta thấy ngay là bài toán thuộc loại 1.

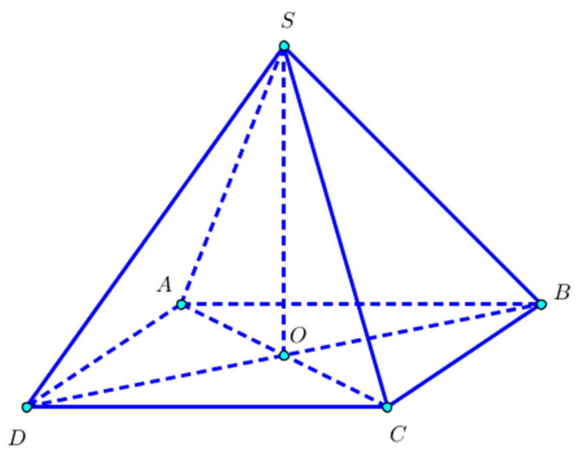
+ Theo giả thiết bài toán thì $ABCD$ là hình vuông nên $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$ do đó

$d(AB;SC)=d(AB;(SCD))$

Từ đó ta có thể tính được khoảng cách giữa hai đường thẳng AB,SC như sau:

Lời giải

Chọn B



Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$ do đó $d(AB;SC)=d(AB;(SCD))$
$=d(A;(SCD))=2d(O;(SCD))=2h$.

Khi đó $O.SCD$ là tam diện vuông đỉnh O nên ta có:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a^2}=\frac{5}{a^2}$$

Do đó: $h=\frac{a}{\sqrt{5}} \Rightarrow d(AB;SC)=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2: *(SGD&ĐT Thái Nguyên, năm học 2020-2021)* Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AD , các đường thẳng SA, AC, CD đôi một vuông góc với nhau biết $SA=AC=CD=\sqrt{2}a$ và $AD=2BC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

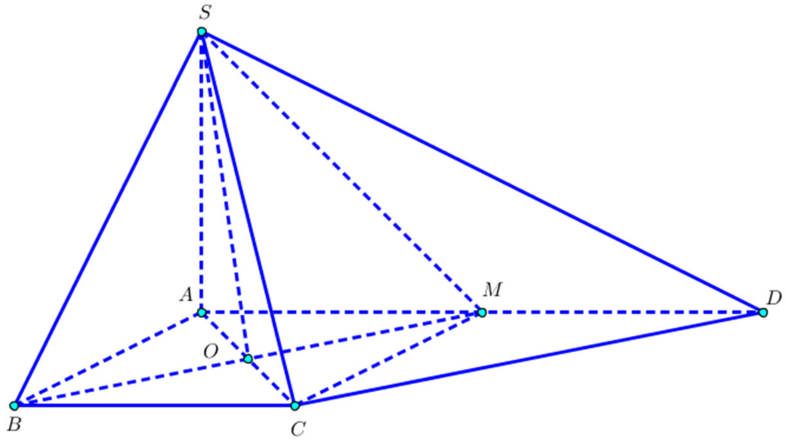
Phân tích:

- Trong bài toán này, ta thấy có dữ kiện: $ABCD$ là hình thang mà đáy lớn $AD=2BC$. Từ dữ kiện này, giúp ta nảy ra ý tưởng nếu gọi M là trung điểm AD thì $BC // DM, BC=DM$ do đó $BCDM$ là hình bình hành.

- Khoảng cách cần tính: $d(SB;CD)=d(CD;(SBM))$

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} SA \perp AC \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm AD thì $BC \parallel DM, BC = DM$ do đó $BCDM$ là hình bình hành.

Suy ra: $CD//BM \Rightarrow CD//(SBM) \Rightarrow d(CD;SB) = d(D;(SBM)) = d(A;(SBM))$

Do $SA = AC = CD = \sqrt{2}a$ nên tam giác ACD vuông cân tại C suy ra $CM \perp AD$,

$AD = \sqrt{2}AC = 2a$, $CM = AM = \frac{1}{2}AD = a$.

Mà $BC \parallel AM, BC = AM, \widehat{ABC} = 90^\circ, AM = MC = a$ nên $ABCM$ là hình vuông do đó $AB = a$.

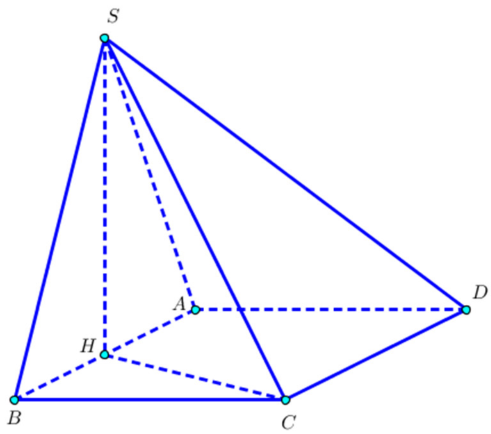
Từ đó $ABCM$ là hình vuông suy ra $AB \perp AD$.

Xét $A.SBM$ là tam diện vuông đỉnh A nên $d(A;(SBM)) = h$ thì

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2}$$

Do đó $h = \frac{a\sqrt{10}}{5} \Rightarrow d(SB;CD) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 3: *(THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội, năm học 2019 – 2020)* Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = 3a$ (tham khảo hình vẽ). Tam giác SAB cân ở S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là $45°$. Gọi H là trung điểm cạnh AB. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và CH.



A. $\frac{3\sqrt{10}a}{\sqrt{109}}$. **B.** $\frac{3\sqrt{85}a}{17}$. **C.** $\frac{3\sqrt{11}a}{11}$. **D.** $\frac{3\sqrt{14}a}{7}$.

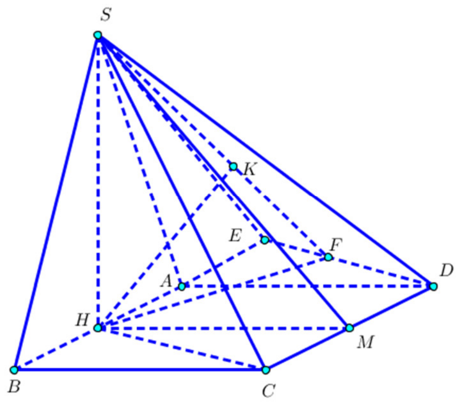
Phân tích:

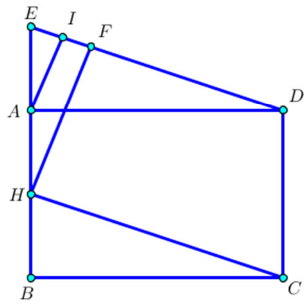
+ Trong bài toán này để chuyển đổi khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho về khoảng cách giữa đường và mặt phẳng song song, ta dựng thêm hình bình hành $CDEH$.

+ Khi đó: $CH \parallel DE \Rightarrow CH \parallel (SDE) \Rightarrow d(CH;SD) = d(CH;(SDE))$.

Lời giải

Chọn D





Dựng hình bình hành $CDEH$.

Khi đó, ta có:

$DE \parallel CH \Rightarrow CH \parallel (SED) \Rightarrow d(SD;CH) = d(CH;(SED)) = d(H;(SED))$.

Theo giả thiết: tam giác SAB cân ở S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $HM \perp CD, M \in CD$.

Khi đó: $CD \perp SH, CD \perp HM \Rightarrow CD \perp (SHM) \Rightarrow CD \perp SM$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMH} = 45°$

$\Rightarrow \tan \widehat{SMH} = \dfrac{SH}{MH} \Rightarrow SH = MH.\tan 45° = 3a$.

Kẻ $HF \perp ED$ $(F \in ED)$, $HK \perp SF$.

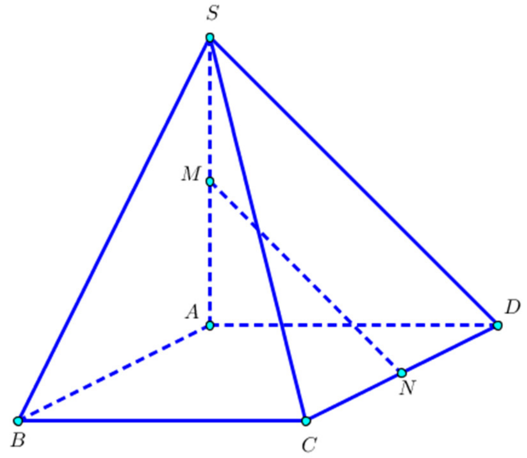
Ta có $SH \perp ED$ $\Rightarrow ED \perp (SHF)$ $\Rightarrow ED \perp HK \Rightarrow HK \perp (SDE) \Rightarrow d(H;(SDE)) = HK$

Kẻ $AI \perp ED (I \in ED) \Rightarrow AI = \dfrac{AE.AD}{ED} = \dfrac{a.3a}{a\sqrt{10}} = \dfrac{3a}{\sqrt{10}} \Rightarrow HF = 2AI = \dfrac{6a}{\sqrt{10}}$.

$$\Rightarrow HK = \frac{SH.HF}{\sqrt{SH^2 + HF^2}} = \frac{3a.\dfrac{6a}{\sqrt{10}}}{\dfrac{3a\sqrt{35}}{5}} = \frac{3a\sqrt{14}}{7}.$$

Vậy $d(SD,CH) = \dfrac{3a\sqrt{14}}{7}$.

Câu 4: ***(SGD&ĐT Hà Nam, năm học 2020-2021)*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD (*tham khảo hình vẽ*). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC bằng:



A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$.

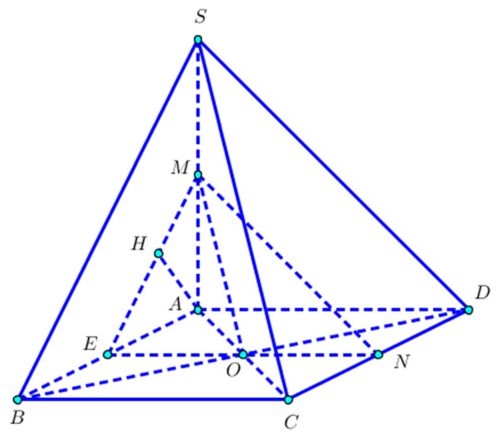
Phân tích:

- Trong bài toán này, từ điều kiện của bài toán cho ta thấy M, N là trung điểm SA, CD do đó để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC ta có thể gọi thêm O là tâm của hình vuông $ABCD$ từ đó ta khai thác được tính chất đoạn thẳng OM là đường trung bình của tam giác SAC.

Khi đó: $OM \,//\, SC \Rightarrow SC \,//\, (MNO)$ và ta chuyển đổi được $d(SC;MN) = d(SC;(MNO))$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E là trung điểm của AB ; O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có: OM là đường trung bình của tam giác SAC.

Do đó: $OM \,//\, SC \Rightarrow SC \,//\, (MNO)$.

Suy ra: $d(SC;MN) = d(SC;(MNE)) = d(C;(MNE)) = d(A;(MNE))$.

Trong (SAB): Kẻ $AH \perp EM$ tại H.

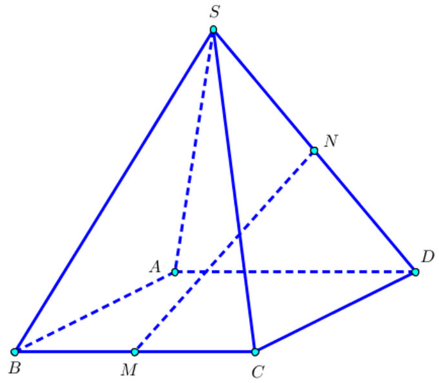
Ta có: $SA \perp EN$ và $AB \perp EN$ nên $EN \perp (SAB) \Rightarrow EN \perp AH$.

Do đó $AH \perp (MEN) \Rightarrow d(A;(MNE)) = AH$

Mà $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AE^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $d(MN;SC) = AH = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu 5: *(HSG Thái Bình, năm học 2019-2020)* Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SB là



A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

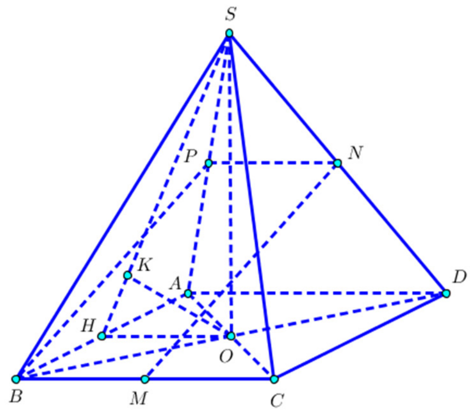
Phân tích:

- Trong bài toán này với điều kiện M,N là trung điểm của hai cạnh BC,SD ta lại thấy có một điều đặc biệt là $MN \,//\, (SAB)$.

Thật vậy, nếu ta gọi P là trung điểm của cạnh SA thì ta có NP là đường trung bình của tam giác SAD nên ta suy ra được $NP \,//\, AD, NP = \frac{1}{2}AD$ và từ đó ta có $NP \,//\, BM, NP = BM$ do đó $BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow MN \,//\, BP \Rightarrow MN \,//\, (SAB)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm SA. Khi đó NP là đường trung bình trong tam giác SAD

$\Rightarrow NP \,//\, AD,\ NP = \frac{1}{2}AD.$

Ta lại có $MB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD.$

Do đó $BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow MN \,//\, BP \Rightarrow MN \,//\, (SAB)$.

Khi đó $d(MN;SB) = d(MN;(SAB)) = d(M;(SAB)) = \frac{1}{2}d(C;(SAB)) = d(O;(SAB))$.

Từ O kẻ $OH \perp AB\,(H \in AB)$ và $OK \perp SH\,(K \in SH)$.

Khi đó $\begin{cases} AB \perp OH \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp OK$. Ta lại có $OK \perp SH$

$\Rightarrow OK\perp(SAB)\Rightarrow d(O;(SAB))=OK$.

Có $AB=a\Rightarrow OA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Mà $SA=a\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta lại có $OH=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$. Khi đó $OK=\dfrac{SO.OH}{\sqrt{SO^2+OH^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $d(MN,SB)=OK=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Dang 2: Các bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong các bài toán về lăng trụ

Câu 6: ***(THPT Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng, năm học 2019 – 20202)*** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, AA'=a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD' là

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** a. **D.** $a\sqrt{2}$.

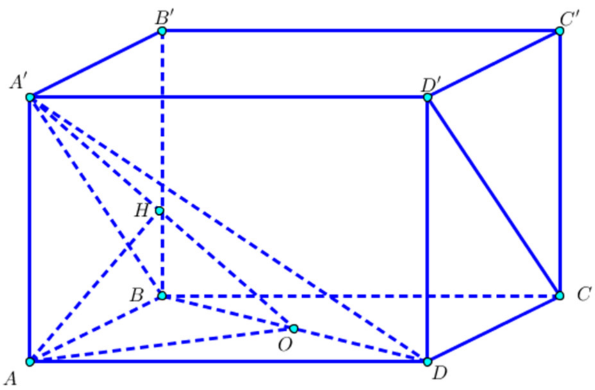
Phân tích:

- Trong bài toán về hình hộp, ta chú ý tới điều kiện là các cạnh đáy tương ứng song song với nhau, các đường chéo của các mặt đối diện song song với nhau.

- Áp dung trong bài toán này, ta thấy $CD'\parallel A'B$ vì là hai đường chéo tương ứng của hai mặt bên đối diện nhau do đó $CD'\parallel(A'BD)$ nên $d(CD';BD)=d(CD';(A'BD))$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $CD'\parallel(A'BD)$ nên $d(BD;CD')=d(CD';(A'BD))=d(C;(A'BD))=d(A;(A'BD))$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $AO\perp BD, AA'\perp BD\Rightarrow(A'AO)\perp(A'BD)$

Mà $(A'AO)\cap(A'BD)=A'O$

Kẻ $AH\perp A'O\Rightarrow AH\perp(A'BD)\Rightarrow AH=d(A;(A'BD))=h$

Ta có $A'A=a\sqrt{2};AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác vuông $A'AO$, ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{A'A^2}+\dfrac{1}{AO^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $d(BD;CD')=d(A;(A'BD))=AH=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$

Câu 7: *(Thi cụm liên trường Thanh Hóa, năm học 2019 – 2020)* Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$.

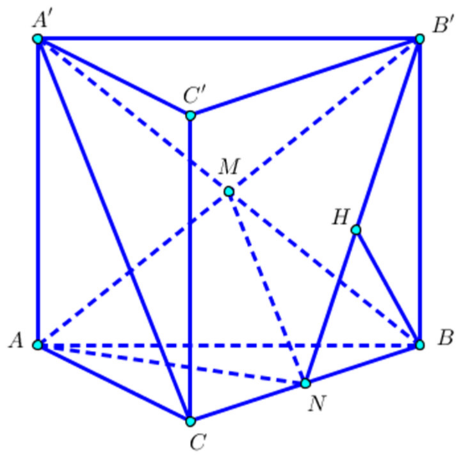
Phân tích:

- Trong bài toán này, để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$ ta sẽ khai thác tính chất: mặt bên của lăng trụ đều là các hình bình hành nên tâm của các mặt bên ấy chính là trung điểm của hai đường chéo.

- Với ý tưởng như vậy, ta gọi thêm M, N là trung điểm của AB' và BC khi đó MN là đường trung bình của tam giác $A'BC$ nên $MN \,//\, A'C$ do đó $A'C \,//\, (AB'N)$ $\Rightarrow d(A'C; AB') = d(A'C; (AB'N))$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là tâm mặt bên $ABB'A'$ và N là trung điểm BC.

Ta có: $A'C \,//\, MN \Rightarrow A'C \,//\, (ANB')$.

Khi đó: $d(AB'; A'C) = d(A'C; (ANB')) = d(C; (ANB')) = d(B; (ANB'))$.

Kẻ $BH \perp B'N$ khi đó vì $\begin{cases} AN \perp BC \\ AN \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AN \perp (BCC'B') \Rightarrow AN \perp BH$.

Do đó $BH \perp (ANB') \Rightarrow d(B; (ANB')) = BH$.

Xét $\Delta BNB'$: $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{BB'^2} \Rightarrow BH = \dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Câu 8: *(SGD&ĐT Cao Bằng, năm học 2019-2020)* Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và DC'.

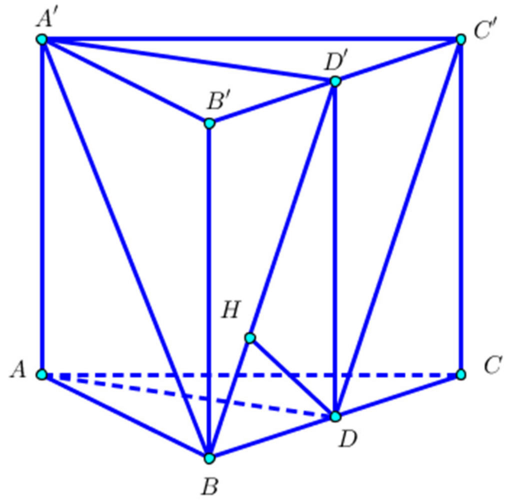
A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Phân tích:

- Trong bài toán này thì do tính chất các mặt bên của lăng trụ là hình bình hành nên ta xây dựng thêm trung điểm D' của cạnh $B'C'$. Khi đó ta có tứ giác $BDC'D'$ là hình bình hành nên $BD' // C'D \Rightarrow C'D // (A'BD')$. Do đó: $d(A'B;DC') = d(DC';(A'BD'))$

Lời giải

Chọn C



Gọi D' là trung điểm của $B'C'$ thì ta có $BDC'D'$ là hình bình hành.

Do đó: $C'D // BD' \Rightarrow CD' // (A'BD')$ nên $d(A'B;DC') = d(DC';(A'BD')) = d(D;(A'BD'))$

Vẽ $DH \perp BD'$. Ta có: $A'D' \perp (BCC'B') \Rightarrow A'D' \perp DH \Rightarrow DH \perp (A'BD')$ do đó $d(D;(A'BD')) = DH$.

Ta có $DH = \dfrac{DD'.DB}{\sqrt{DD'^2 + DB^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ do đó $d(A'B;DC') = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

IV. Bài tập tự luyện:

Để có thể làm rõ thêm cách áp dụng phương pháp được đưa ra trong chuyên đề này, tôi đưa ra một số bài tập áp dụng như sau:

Câu 1: ***(Đề thi thử VTV7, lần 2, năm học 2020 - 2021)*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$. Biết tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy; góc giữa đường thẳng SD và mặt đáy bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{609}}{19}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{609}}{29}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{600}}{29}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{906}}{29}$.

Câu 2: ***(Quốc học Quy Nhơn, năm học 2019-2020)*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SD.

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3: ***(THPT Lý Thường Kiệt, Bắc Ninh, năm học 2019-2020)*** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $2a$.

Câu 4: *(THPT Lê Văn Thịnh, Bắc Ninh, năm học 2019-2020)* Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SD.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{5}$.

Câu 5: *(THPT Yên Phong 2, Bắc Ninh, năm học 2019-2020)* Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $45°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a.

A. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

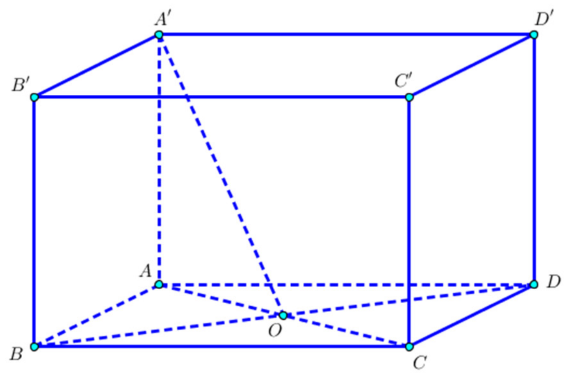
Câu 6: *(Chuyên KHTN, năm học 2020-2021)* Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $45°$. Gọi E là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

A. $\frac{2a\sqrt{19}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{19}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{19}}{5}$.

Câu 7: *(THPT Nguyễn Đức Cảnh, Thái Bình, năm học 2019 – 2020)* Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là ΔABC vuông tại B, $AB=BC=2a$, $(SAB)\perp(ABC)$ và $(SAC)\perp(ABC)$. Gọi M là trung điểm đoạn AB, mặt phẳng (α) qua SM và $(\alpha)//BC$ cắt AC tại N, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN.

A. $\frac{2a.\sqrt{156}}{13}$. **B.** $\frac{a.\sqrt{13}}{156}$. **C.** $\frac{a.\sqrt{156}}{13}$. **D.** $\frac{a.\sqrt{13}}{13}$.

Câu 8: *(SGD&ĐT Lai Châu, năm học 2020 – 2021)* Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'O$ và BC.



A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 9: *(THPT Chuyên Phú Thọ, năm học 2020 – 2021)* Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và MN bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Câu 10: *(Chuyên Vĩnh Phúc, năm học 2018-2019)* Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$ **C.** $a\sqrt{5}$ **D.** $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$

Bảng đáp án tham khảo phần bài tập tự luyện

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	A	A	A	C	B	B	D

V. Lời kết:

- Đây là một số tổng kết của tôi trong quá trình dạy học sinh, mong được sự góp ý của đồng nghiệp và các em học sinh giúp cho chuyên đề hoàn thiện hơn. Tôi xin chân thành cảm ơn!

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Vẻ đẹp lời giải hình học qua các bài toán lượng giác

Ths. HOÀNG MINH QUÂN
GV Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội

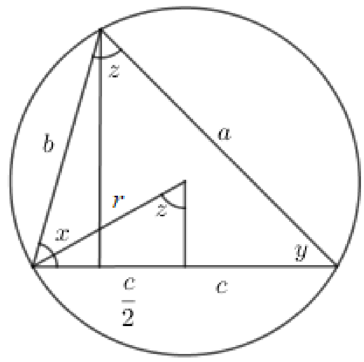
Trong chương trình toán THPT, để chứng minh ***một số hệ thức lượng giác****, ta thường sử dụng các biến đổi lượng giác. Câu hỏi đặt ra, ngoài các cách biến đổi lượng giác thì ta có cách tiếp cận nào khác để giải quyết vấn đề không? Để trả lời câu hỏi này, bài viết sau đây mời bạn đọc cùng đến với hướng tiếp cận hình học cho chứng minh một số hệ thức lượng giác.*

I. CÁC ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Chứng minh rằng với $x+y<\pi$, ta có

$$\sin\left(x+y\right)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

Chứng minh 1. Gọi z là góc thỏa mãn $x+y+z=\pi$. Ta có x, y, z là ba góc của một tam giác. Không mất tổng quát, giả sử tam giác đó nội tiếp đường tròn bán kính $r=\frac{1}{2}$.



Ta có $\sin z=\frac{c}{2}:\frac{1}{2}=c$, tương tự $\sin x=a$, $\sin y=b$.

Từ công thức $c=a\cos y+b\cos x$, ta có

$\sin z=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

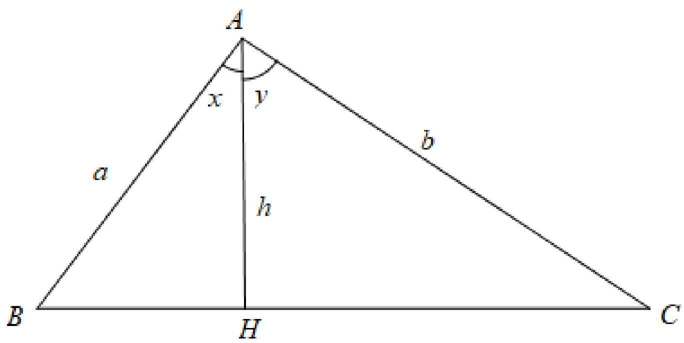
$\Leftrightarrow \sin\left(x+y\right)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$

Chứng minh 2.

Vẽ tam giác ABC với H là chân đường cao hạ từ đỉnh A lên cạnh BC. Đặt

$BAH=x; CAH=y$ và

$AB=a; AC=b; AH=h.$



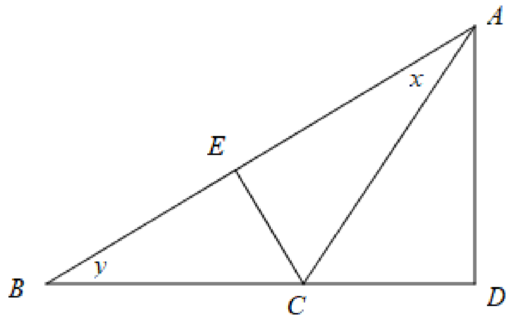
Ta có $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABH}+S_{\Delta ACH}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ab\sin\left(x+y\right)=\frac{1}{2}ah\sin x+\frac{1}{2}bh\sin y$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ab\sin\left(x+y\right)=\frac{1}{2}ab\cos y.\sin x+\frac{1}{2}ba\cos x.\sin y$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+y\right)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$

Chứng minh 3.



Vẽ tam giác ABC với D là chân đường cao hạ từ đỉnh A, E là chân đường cao hạ từ đỉnh C, $\widehat{BAC}=x, \widehat{ABC}=y$. Khi đó $\widehat{ACD}=x+y$.

Ta có $AD.BC=CE.AB \Leftrightarrow AD=\dfrac{CE.AB}{BC}=\dfrac{CE.(AE+EB)}{BC}$.

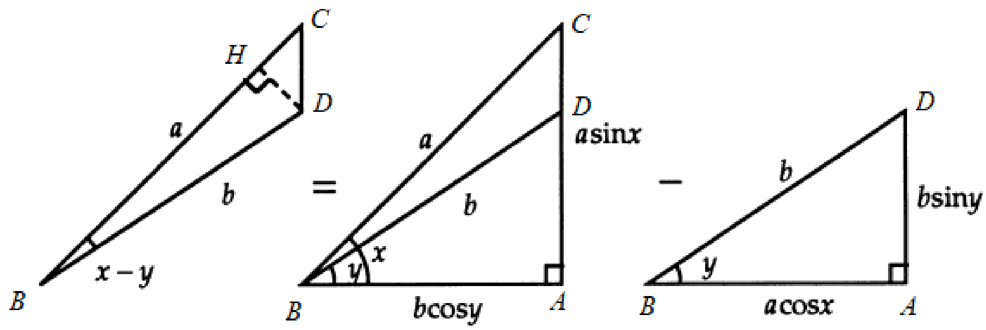
Mặt khác, lại có $\sin(x+y)=\sin\widehat{ACD}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{CE.(AE+EB)}{AC.BC}=\dfrac{AE}{AC}.\dfrac{CE}{BC}+\dfrac{CE}{AC}.\dfrac{EB}{BC}$

hay $\sin(x+y)=\cos x\sin y+\sin x\cos y$.

Bài 2. Chứng minh rằng với $x;y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $x>y$ ta có

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Chứng minh 1. Dựng tam giác ABC vuông tại A, gọi D là điểm thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{ABC}=x, \widehat{ABD}=y$.



Đặt $BC=a; BD=b$. Ta có $AB=b\cos y=a\cos x; AD=a\sin x=b\sin y$.

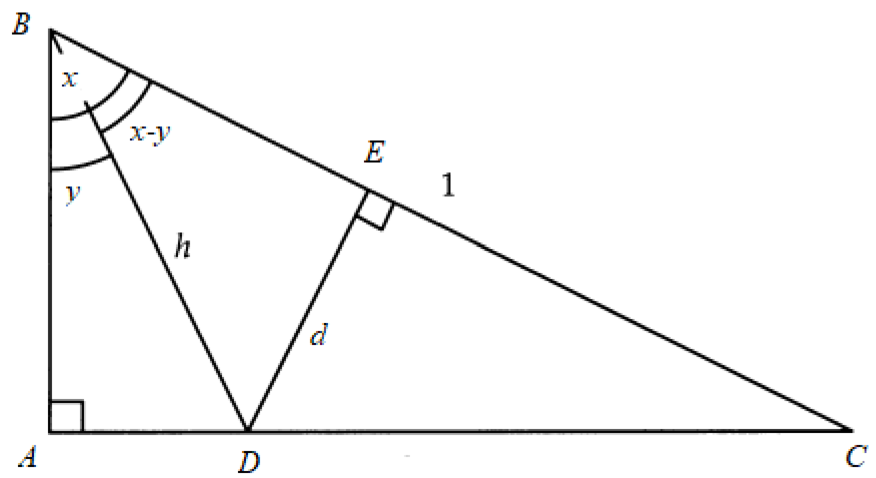
Mặt khác ta có $S_{\Delta BCD}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}AB.AC-\dfrac{1}{2}AB.AD$

$\Leftrightarrow BD.BC.\sin(x-y)=AB.AC-AB.AD$

$\Leftrightarrow b.a.\sin(x-y)=b\cos y.a\sin x-a\cos x.b\sin y$

$\Leftrightarrow \sin(x-y)=\cos y.\sin x-\cos x.\sin y$.

Chứng minh 2.



Vẽ tam giác ABC vuông tại A, độ dài $BC=1$. Trên cạnh AC lấy điểm D,

đặt $\widehat{ABC}=x;\ \widehat{ABD}=y \Rightarrow \widehat{DBC}=x-y$. Gọi E là hình chiếu của D lên cạnh BC. Đặt $BD=h;\ DE=d$.

Ta có $\cos x=\dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB=\cos x;\ \cos y=\dfrac{AB}{AD} \Leftrightarrow h=\dfrac{AB}{\cos y}=\dfrac{\cos x}{\cos y}$.

Trong tam giác vuông EBD có $d=h\sin(x-y)$.

Mặt khác, $CD=CA-AD=\sin x-h\sin y$. Do đó trong tam giác vuông EDC, ta có

$$\sin C=\frac{d}{CD} \Leftrightarrow d=CD.\sin C=CD.\cos x=(\sin x-h\sin y)\cos x.$$

Vậy ta có $d=h\sin(x-y)=(\sin x-h\sin y)\cos x$

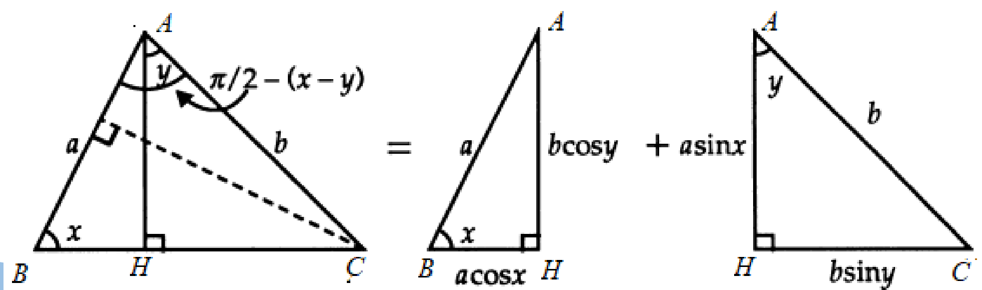
$$\Leftrightarrow h\sin(x-y)=(\sin x-h\sin y)\cos x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\cos y}\sin(x-y)=\left(\sin x-\frac{\cos x}{\cos y}\sin y\right)\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y)=\cos y.\sin x-\cos x.\sin y.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với $x;y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y. \qquad (3)$$

Chứng minh 1. Dựng tam giác ABC có đường cao AH, đặt $AB=a;\ AC=b$ và góc $\widehat{ABC}=x;\ \widehat{HAC}=y \Rightarrow \widehat{BAC}=\dfrac{\pi}{2}-x+y=\dfrac{\pi}{2}-(x-y)$.

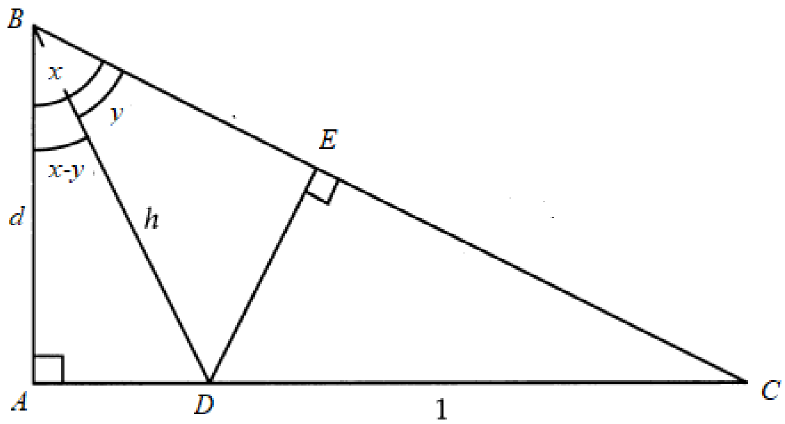


Ta có $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta HAB}+S_{\Delta HAC}\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}HA.HB+\frac{1}{2}HA.HC$

$\Leftrightarrow ab\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x-y)\right)=a\cos x.b\cos y+a\sin x.b\sin y$

$\Leftrightarrow \cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y.$

Chứng minh 2.



Vẽ tam giác ABC vuông tại A, trên cạnh AC lấy điểm D, đặt $\widehat{ABC}=x;\widehat{CBD}=y\Rightarrow\widehat{DBA}=x-y.$ Gọi E là hình chiếu của D lên cạnh BC. Đặt $CD=1;BD=h;AB=d$.

Trong tam giác BDE vuông, ta có $\cos y=\frac{EB}{BD}\Leftrightarrow BE=h\cos y$.

Trong tam giác CDE vuông, ta có

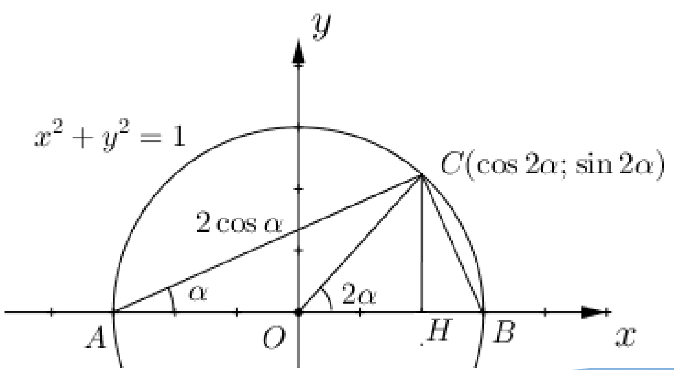
$$\sin C=\frac{ED}{CD}\Leftrightarrow DE=CD.\sin C=CD.\cos x=\cos x.$$

Trong tam giác ABD vuông, ta có $\cos(x-y)=\frac{d}{h}\Leftrightarrow d=h\cos(x-y).$

Bài 4. Chứng minh công thức nhân đôi

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$

Chứng minh.



Trên đường tròn lượng giác với điểm $A(-1;0)$; $B(1;0)$ và điểm C sao cho $\widehat{BAC}=\alpha$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh C đến cạnh AB. Ta có
$CH = OC.\sin 2\alpha = \sin 2\alpha; OH = OC.\cos 2\alpha = \cos 2\alpha$.

Khi đó $C(\cos 2\alpha;\sin 2\alpha)$. Vì $\Delta ACH \backsim \Delta ABC$ nên ta có

$$\frac{CH}{AC}=\frac{BC}{AB}\Leftrightarrow\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{2}\Leftrightarrow\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

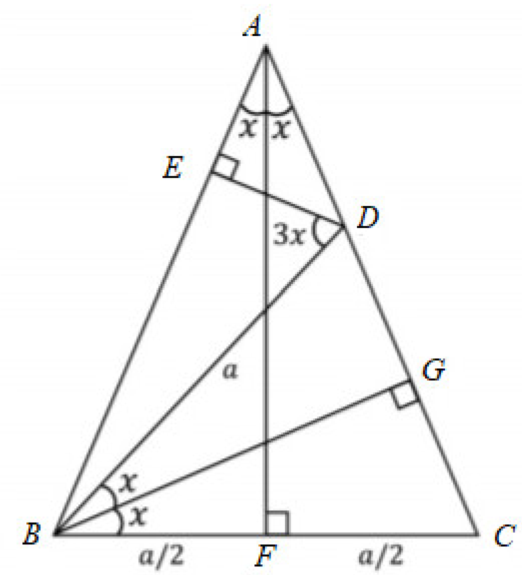
Mặt khác, từ $\Delta ACH \backsim \Delta ABC$ nên ta cũng có

$$\frac{AH}{AC}=\frac{AC}{AB}\Leftrightarrow\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{2}\Leftrightarrow\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

Bài 5. Chứng minh công thức nhân ba

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Chứng minh1



Vẽ ΔABC cân với $AB = AC = 1, BC = a, \widehat{BAC} = 2x$.

Lấy điểm D trên cạnh AC sao cho $BD = BC = a$. Gọi E là hình chiếu của D lên AB, G là hình chiếu của B lên AC và F là trung điểm cạnh BC.

Ta có $DE = a\cos 3x, BE = a\sin 3x \Rightarrow AE = 1 - a\sin 3x$ và

$$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{(1-a\sin 3x)^2+(a\cos 3x)^2}=\sqrt{1+a^2-2a\sin 3x}.$$

Trong tam giác vuông ADE, có $\sin x = \frac{BF}{AB} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2\sin x.$ (1)

Mặt khác, ta có $\sin x = \dfrac{GC}{BC} = \dfrac{AC - AD}{2BC} = \dfrac{1-\sqrt{1+a^2-2a\sin 3x}}{2a}$. (2)

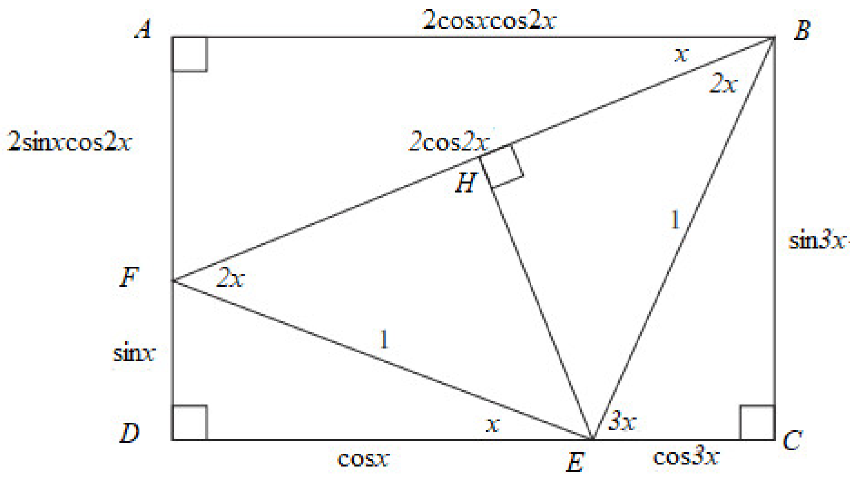
Từ (1) và (2), ta có

$$\frac{a}{2} = \frac{1-\sqrt{1+a^2-2a\sin 3x}}{2a} \Rightarrow a^2 = 1-\sqrt{1+a^2-2a\sin 3x}$$

$$\Rightarrow \left(1-a^2\right)^2 = 1+a^2-2a\sin 3x$$
$$\Rightarrow a^4 - 3a^2 + 2a\sin 3x = 0$$
$$\Rightarrow a^3 - 3a + 2\sin 3x = 0$$
$$\Rightarrow 8\sin^3 x - 6\sin x + 2\sin 3x = 0$$
$$\Rightarrow \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Chứng minh2.

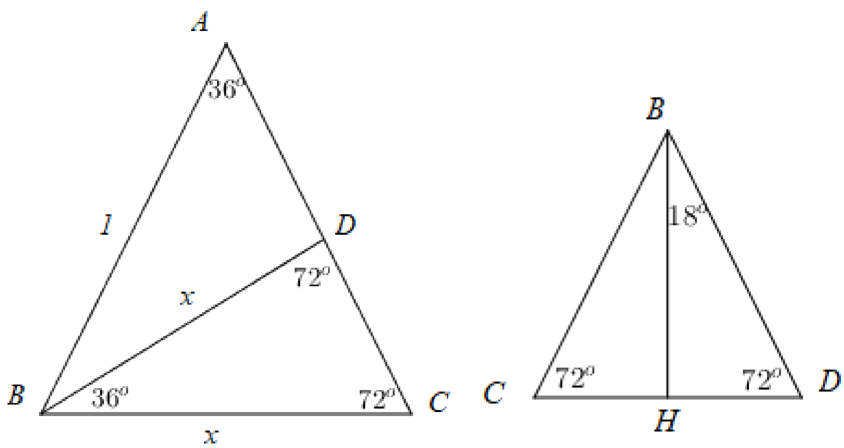
Dựng hình chữ nhật $ABCD$ với các điều kiện như hình vẽ.



Ta có $\sin 3x = 2\sin x\cos 2x + \sin x = 2\sin x\left(1-2\sin^2 x\right) + \sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$

b) $\cos 3x = 2\cos\cos 2x - \cos x = 2\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

Bài 6. Không sử dụng lượng giác, hãy chứng minh $\sin 18^{\circ} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Dựng tam giác cân ABC, với $\widehat{BAC}=36^\circ$, đặt $AB=1, BC=x$.

Ta có tam giác ABC đồng dạng tam giác BCD nên

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

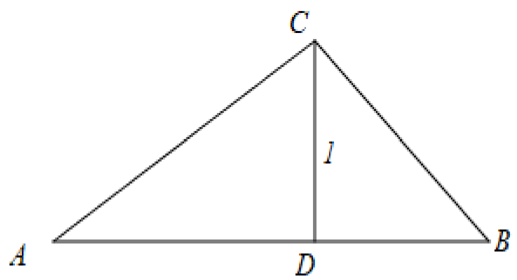
Suy ra $CD=1-x=1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow DH=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

Ta có $\sin 18^\circ=\frac{DH}{BD}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}.\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{3-\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

I. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 7. Với góc α nhọn. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}>4.$

Chứng minh



Vẽ tam giác ABC vuông ở C, có $\widehat{ABC}=\alpha, CD=1$ với D là hình chiếu của C lên cạnh AB.

Ta có $BC=\frac{1}{\sin\alpha}$; $AC=\frac{1}{\cos\alpha}$, suy ra $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

Ta có $AB=\frac{2}{\sin 2\alpha}\geq 2$. Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

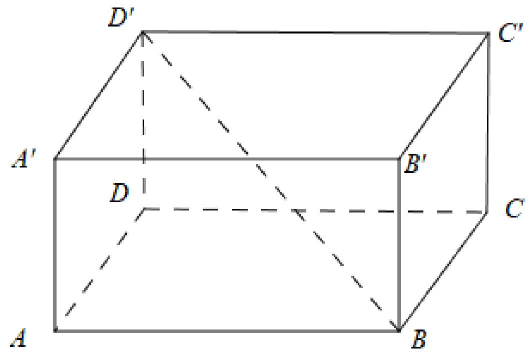
$BC+AC+AB>2AB\Leftrightarrow\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}>2AB\geq 4.$

Vậy $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}>4.$

Bài 8. Với góc $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Chứng minh rằng

$$\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\geq 2\sqrt{2}.$$

Chứng minh



Dựng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = a; AA' = b; BC = c$ và $\widehat{ABD'} = \alpha, \widehat{B'BD'} = \beta, \widehat{CBD'} = \gamma$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}, \tan\beta = \dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}, \tan\gamma = \dfrac{\sqrt{b^2+a^2}}{c}$.

Từ đó $\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}.\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}.\dfrac{\sqrt{b^2+a^2}}{c}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

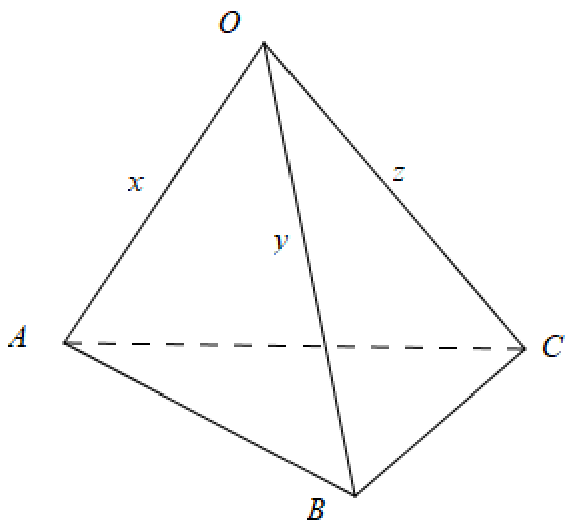
$$\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}.\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}.\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{c} \ge \frac{\sqrt{2bc}}{a}.\frac{\sqrt{2ac}}{b}.\frac{\sqrt{2ba}}{c} = 2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \arctan\sqrt{2}.$

Bài 9. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, các góc $\alpha, \beta, \gamma \in (0;\pi)$ thoả mãn $0 < \alpha+\beta+\gamma < 2\pi$ và $|\alpha-\beta| < \gamma < \alpha+\beta$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2-2xy\cos\alpha+y^2}+\sqrt{x^2-2xz\cos\beta+z^2} > \sqrt{y^2-2yz\cos\gamma+z^2}.$$

Chứng minh



Dựng hình chóp $O.ABC$ với $OA = x, OB = y, OC = z$, đặt $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta, \widehat{BOC} = \gamma$.

Khi đó ta có $AB = \sqrt{x^2-2xy\cos\alpha+y^2}; AC = \sqrt{x^2-2xz\cos\beta+z^2}; BC = \sqrt{y^2-2yz\cos\gamma+z^2}$.

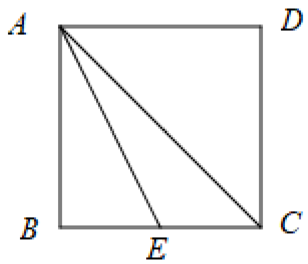
Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $AB + AC > BC$ hay

$$\sqrt{x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xz\cos\beta + z^2} > \sqrt{y^2 - 2yz\cos\gamma + z^2}.$$

Bài 10. Cho góc $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \sqrt{2}.$$

Chứng minh



Dựng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1 và lấy điểm E trên cạnh BC, góc $\widehat{AEB} = \alpha$.

Khi đó ta có $AE = \frac{1}{\sin\alpha}; BE = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Suy ra $EC = 1 - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Xét tam giác AEC, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$AE + EC \geq AC = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \sqrt{2}.$$

Suy ra $\frac{1+\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không sử dụng biến đổi lượng giác, hãy tính giá trị $S = \frac{1}{\cos 50^\circ} + \tan 10^\circ$.

Bài 2. Sử dụng hình học chứng minh rằng $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$.

Bài 3. Sử dụng hình học, chứng minh $\cot\frac{\pi}{7} + \cot\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$.

Bài 4. Cho các góc α, β, γ thoả mãn $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Chứng minh rằng

$$\cot\alpha\cot\beta\cos\gamma \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 5. Cho góc $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq \frac{2-\sin\alpha}{2-\cos\alpha} \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT môn Toán đợt 2

LỜI GIẢI CHI TIẾT CÁC CÂU VD – VDC TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 2 NĂM 2021 _ MÃ ĐỀ 102

Nhân Lê và NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

Buổi thi môn Toán kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021 diễn ra vào chiều ngày 6/8/2021. Bài thi môn Toán gồm 24 mã đề, được lấy từ 4 mã đề gốc là: Mã đề 101, 102, 103, 104. Nội dung đề thi nằm trong chương trình THPT, chủ yếu chương trình lớp 12, trong đó 38 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11, lớp 12; trong các mã đề từ câu 39 đến câu 45 kiểm tra kiến thức học sinh ở mức độ vận dụng, từ câu 46 đến câu 50 ở mức độ vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT.

***NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM** xin gửi tới quý thầy cô và các em lời giải chi tiết các câu VD – VDC trong đề thi TN THPT đợt 2 năm 2021_Mã đề 102.*

Hy vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh có tài liệu ôn tập cho kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2022.

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2021 – ĐỢT 2

Môn: Toán – MÃ ĐỀ : 102

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Cho hai số phức $z=4+3i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $5+2i$. **B.** $7-i$. **C.** $3+4i$. **D.** $-3-4i$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=5$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

A. -2. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** 2.

Câu 3. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{5x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=5$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-5$. **D.** $y=-1$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\log_3(x-4)$ là

A. $(-\infty;4]$. **B.** $[4;+\infty)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Câu 5. Cho khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h. Thể tích V của khối chóp đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V=\frac{1}{3}Bh$. **B.** $V=\frac{4}{3}Bh$. **C.** $V=Bh$. **D.** $V=3Bh$.

Câu 6. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y=x^3+x-2$?

A. Điểm $M(1;1)$. **B.** Điểm $N(1;2)$. **C.** Điểm $P(1;3)$. **D.** Điểm $Q(1;0)$.

Câu 7. Với n là số nguyên dương bất kì, $n\ge 3$, công thức nào sau đây đúng?

A. $C_n^3=\frac{(n-3)!}{n!}$. **B.** $C_n^3=\frac{3!(n-3)!}{n!}$. **C.** $C_n^3=\frac{n!}{(n-3)!}$. **D.** $C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}$.

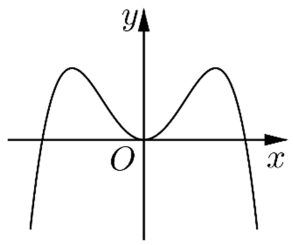
Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x)>2$ là

A. $(0;4)$. **B.** $\left(\frac{9}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{9}{2}\right)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;-3;0)$. **B.** $(1;3;0)$. **C.** $(-1;3;0)$. **D.** $(-1;-3;0)$.

Câu 10. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình bên?

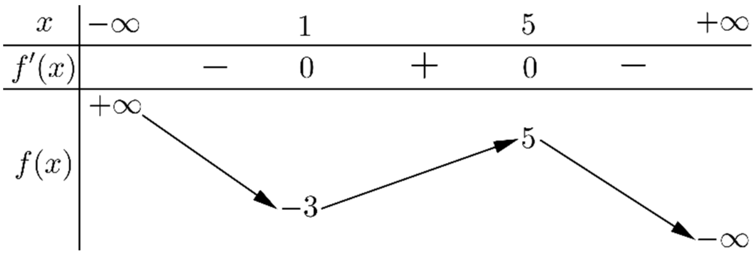


A. $y=\frac{3x-1}{x-2}$. **B.** $y=x^2-2x$. **C.** $y=2x^3+x^2$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(-1;2;0)$ và $\vec{v}=(1;-2;3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v}$ là

A. $(-2;4;-3)$. **B.** $(2;-4;3)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(0;0;-3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực trị của hàm số là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua O và nhận $\vec{n}=(2;-1;4)$ làm véc-tơ pháp tuyến của phương trình là

A. $2x+y-4z+1=0$. **B.** $2x+y-4z=0$. **C.** $2x-y+4z=0$. **D.** $2x-y+4z+1=0$.

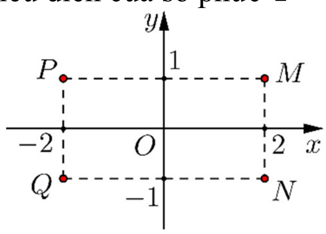
Câu 14. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=5a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{5}{3}a^3$. **B.** $5a^3$. **C.** $\frac{5}{6}a^3$. **D.** $\frac{5}{2}a^3$.

Câu 15. Phần ảo của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 4. **B.** –3. **C.** –4. **D.** 3.

Câu 16. Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-2-i$?



A. Điểm Q. **B.** Điểm P. **C.** Điểm N. **D.** Điểm M.

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y=4^x$ là

A. $y'=x.4^{x-1}$. **B.** $y'=4^x\ln 4$. **C.** $y'=\frac{4^x}{\ln 4}$. **D.** $y'=4^x$.

Câu 18. Thể tích của khối cầu bán kính $2a$ bằng

A. $\frac{4}{3}\pi a^3$. **B.** $\frac{32}{3}\pi a^2$. **C.** $32\pi a^3$. **D.** $\frac{8}{3}\pi a^3$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 20. Cho hình nón có bán kính đáy r và độ dài đường sinh ℓ. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S_{xq}=\frac{4}{3}\pi r\ell.$ **B.** $S_{xq}=\pi r\ell.$ **C.** $S_{xq}=4\pi r\ell.$ **D.** $S_{xq}=2\pi r\ell.$

Câu 21. Với mọi số thực a dương, $\log_3(3a)$ bằng

A. $3\log_3 a.$ **B.** $1-\log_3 a.$ **C.** $\log_3 a.$ **D.** $1+\log_3 a.$

Câu 22. Nghiệm của phương trình $5^x=2$ là

A. $x=\log_2 5.$ **B.** $x=\log_5 2.$ **C.** $x=\frac{2}{5}\cdot$ **D.** $x=\sqrt{5}.$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=2+\cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+\sin x+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+\cos x+C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x-\sin x+C.$

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và nhận vectơ $\vec{u}=(2;-3;4)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

A. $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{4}\cdot$ **B.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+3}{4}\cdot$

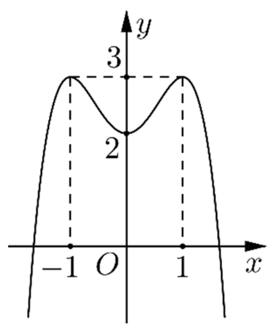
C. $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{3}\cdot$ **D.** $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{4}\cdot$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)=4x^3-2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4-2x+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3-2x+C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^4+C.$

Câu 26. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. $x=-1.$ **B.** $x=2.$ **C.** $x=1.$ **D.** $x=0.$

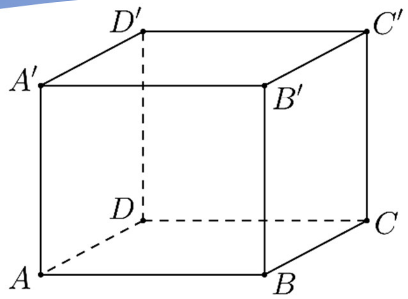
Câu 27. Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=2$ thì $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** $-3.$ **C.** 3. **D.** 7.

Câu 28. Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2]$. Biết F là nguyên hàm của hàm f trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $F(1)=-2$ và $F(2)=3$. Khi đó $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-5.$ **B.** 1. **C.** $-1.$ **D.** 5.

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (*tham khảo hình bên*). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-3z+1=0$. Mặt phẳng đi qua A và song song với (P) có phương trình là

A. $2x+y-3z-7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$. **C.** $2x+y+3z-1=0$. **D.** $2x+y+3z+1=0$.

Câu 31. Với $a>0$, đặt $\log_2(2a)=b$, khi đó $\log_2(4a^3)$ bằng

A. $3b+5$. **B.** $3b$. **C.** $3b+2$. **D.** $3b-1$.

Câu 32. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 17 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số chẵn bằng

A. $\frac{7}{34}$. **B.** $\frac{9}{34}$. **C.** $\frac{9}{17}$. **D.** $\frac{8}{17}$.

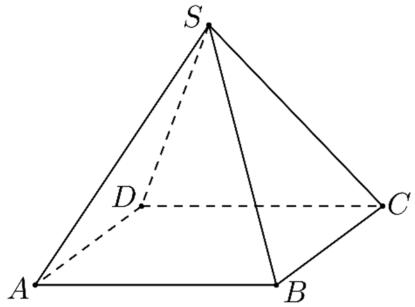
Câu 33. Cho số phức $z=4-2i$, môđun của số phức $(1+i)z$ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** 24. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 40.

Câu 34. Trên đoạn $[-4;-1]$, hàm số $y=-x^4+8x^2-19$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=-3$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=-1$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau (*tham khảo hình bên*). Góc giữa hai đường thẳng SB và CD bằng



A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;1;-1)$ và $N(3;0;2)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$.

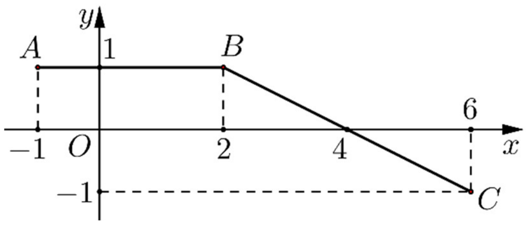
Câu 37. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+4x$. **B.** $y=x^3-4x$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=\frac{4x-1}{x+1}$.

Câu 38. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_0^2 \left[2x - f(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên.

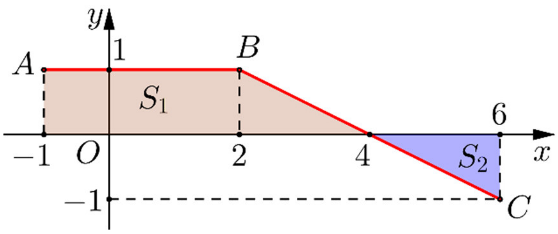


Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $S_1 = \int\limits_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow F(4) - F(-1) = 4 \Leftrightarrow F(4) = 2.$

Ta lại có: $S_2 = -\int\limits_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow -F(6) + F(4) = 1 \Rightarrow F(6) = 1.$

Suy ra: $F(4) + F(6) = 3.$

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2+1) - \log_3(x+21)\right](16 - 2^{x-1}) \ge 0$?

A. 17. **B.** 18. **C.** 16. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -21$.

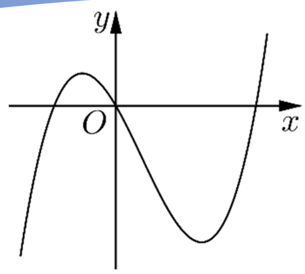
Cho: $\log_3(x^2+1) - \log_3(x+21) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 5 \end{array}\right.$ và $16 - 2^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng xét dấu:

x	-21		-2		5		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$-$	

Nghiệm của bất phương trình $S = (-21; -2] \cup \{5\}$. Suy ra có 18 giá trị nguyên thỏa ycbt.

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là



A. 1. **<u>B.</u>** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<0 \\ x=0 \\ x=b>0 \end{array}\right.$ và $f(0)=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		0		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$+\infty$

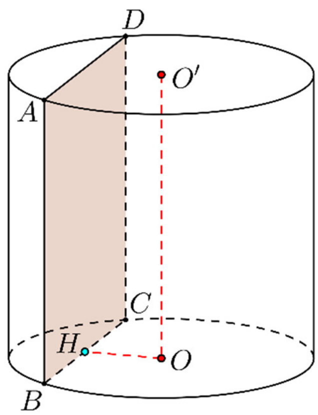
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f(x)=\dfrac{4}{3}$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 42. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. $\dfrac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{12}\pi a^2$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. **<u>D.</u>** $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Thiết diện là hình vuông $ABCD$ và $d\left(OO';(ABCD)\right)=OH$.

Ta có: $S_{ABCD}=16a^2 \Rightarrow BC=h=4a$ và $OH=3a$, suy ra: $R=\sqrt{BH^2+OH^2}=\sqrt{13}a$.

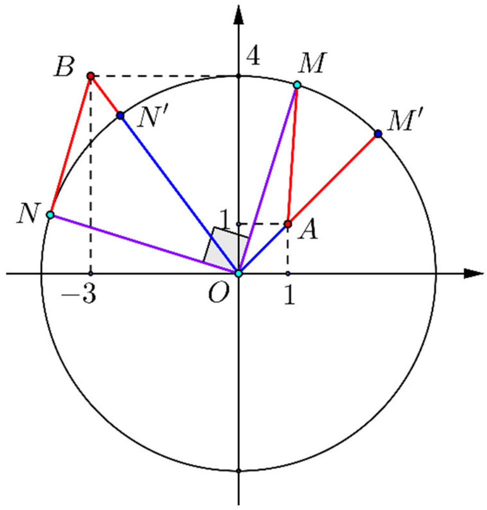
Diện tích xung quanh: $S_{xq}=2\pi Rh=8\pi\sqrt{13}a^2$.

Câu 43. Xét các số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z|=|w|=4$ và $|z-w|=4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-1-i|+|w+3-4i|$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $5-2\sqrt{2}$. **C.** $5-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $z(M)$ là điểm biểu diễn của z, và $w(N)$ là điểm biểu diễn của w.

Theo đề bài ta có: M, N thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=4$ và $M=Q_{(O;90°)}(N)$.

Khi đó: $P=MA+BN\ge M'A+BN'=5-4+4-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$.

Tới đây, ta chọn ngay đáp án C, và quên kiểm tra xem hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ có vuông góc nhau không và rõ ràng hai vectơ đó không vuông góc.

Cách 1:

Đặt: $\frac{z}{w}=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Vì $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}=1$ nên $\sqrt{x^2+y^2}=1$.

Ta lại có: $\left|\frac{z}{w}-1\right|=\left|\frac{z-w}{w}\right|=\frac{|z-w|}{|w|}=\sqrt{2}$ nên $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}$.

Khi đó: $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\ \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+y^2-2x=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=iw\\ z=-iw\end{array}\right.$.

Nếu $z=iw$ thì $P=|z-1-i|+|w+3-4i|=|iw-1-i|+|w+3-4i|$

$$=|w-1+i|+|-w-3+4i|\ge|w-1+i-w-3+4i|=\sqrt{41}\ (1).$$

Nếu $z=-iw$ thì $P=|z-1-i|+|w+3-4i|=|-iw-1-i|+|w+3-4i|$

$$=|-w-1+i|+|w+3-4i|\ge|-w-1+i+w+3-4i|=\sqrt{13}\ (2).$$

So sánh (1) và (2), suy ra: $|z-1-i|+|w+3-4i|\ge\sqrt{13}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} z=\dfrac{2-9\sqrt{23}}{13}-\dfrac{3+6\sqrt{23}}{13}i \\ w=-\dfrac{3+6\sqrt{23}}{13}+\dfrac{-2+9\sqrt{23}}{13}i \end{cases}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{13}$.

Cách 2.

Đặt $z=uw$, ta có $|u|=1$ và $2=\left|\dfrac{z-w}{w}\right|^2=|u-1|^2=(u-1)\left(\overline{u-1}\right)=|u|^2-u-\overline{u}+1$ hay $u\overline{u}=1$ và $u+\overline{u}=0$. Vậy $u^2=-1$, tức là $u\in\{-i;\, i\}$.

Khi đó: $P=|z-1-i|+|w+3-4i|=|z-1-i|+|-u||w+3-4i|$

$$=|z-1-i|+|-uw-3u+4iu|\ge|z-1-i-uw-3u+4iu|=|4iu-1-i-3u|.$$

Thay $u\in\{-i;\, i\}$, vào ta có $|z-1-i|+|w+3-4i|\ge\sqrt{13}$.

Câu 44. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$, với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 2 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+3$ và $g'(x)=3mx^2+2nx-1$.

Suy ra: $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là -1, 2 và 3.

Nên $f'(x)-g'(x)=4a(x+1)(x-2)(x-3)$ $(*)$.

Thay $x=0$ vào hai vế của $(*)$ ta được: $f'(0)-g'(0)=4\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{6}$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn: $S=\displaystyle\int_{-1}^{3}\left|\dfrac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{71}{9}$.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x\in(1;5)$ thỏa mãn $4(x-1)\mathrm{e}^x=y\left(\mathrm{e}^x+xy-2x^2-3\right)$?

A. 14. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4(x-1)\mathrm{e}^x=y\left(\mathrm{e}^x+xy-2x^2-3\right)\Leftrightarrow 4(x-1)\mathrm{e}^x-y\left(\mathrm{e}^x+xy-2x^2-3\right)=0$

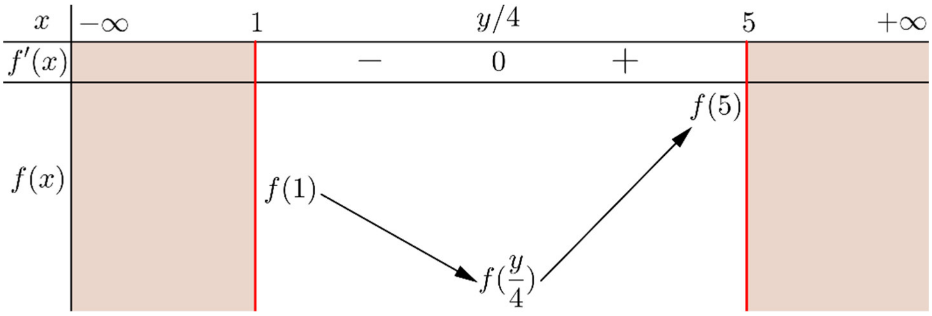
Xét hàm số: $f(x)=4(x-1)\mathrm{e}^x-y\left(\mathrm{e}^x+xy-2x^2-3\right)$ với $x\in(1;5)$.

Đạo hàm: $f'(x)=4\mathrm{e}^x+4(x-1)\mathrm{e}^x-y\left(\mathrm{e}^x+y-4x\right)=4x.\mathrm{e}^x-y\left(\mathrm{e}^x+y-4x\right)$

$$=\left(4x.\mathrm{e}^x+4xy\right)-y\left(\mathrm{e}^x+y\right)=\left(\mathrm{e}^x+y\right)(4x-y)=0\Leftrightarrow 4x-y=0\Leftrightarrow x=\frac{y}{4}.$$

TH1: $1<x<5 \Leftrightarrow 1<\dfrac{y}{4}<5 \Leftrightarrow 4<y<20 \quad (1)$.

Bảng biến thiên:

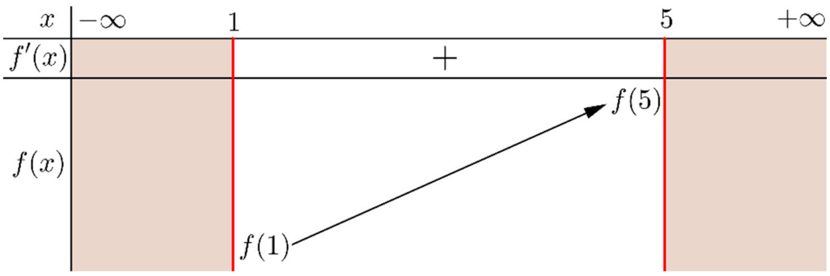


Do: $f(1)=-y(\mathrm{e}+y-5)<0,\ \forall y\in(4;20)$ nên để phương trình đã cho có nghiệm $x\in(1;5)$, suy ra: $16\mathrm{e}^5-y(\mathrm{e}^5+5y-53)\ge 0 \Leftrightarrow -5y^2-(\mathrm{e}^5-53)y+16\mathrm{e}^5\ge 0 \Leftrightarrow -33,3\le y\le 14,2$.

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $4<y\le 14,2 \Rightarrow y=\{5;6;7;...;14\}$. Có 10 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn.

TH2: $x\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{4}\le 1 \Leftrightarrow 1\le y\le 4 \quad (2)$.

Bảng biến thiên:



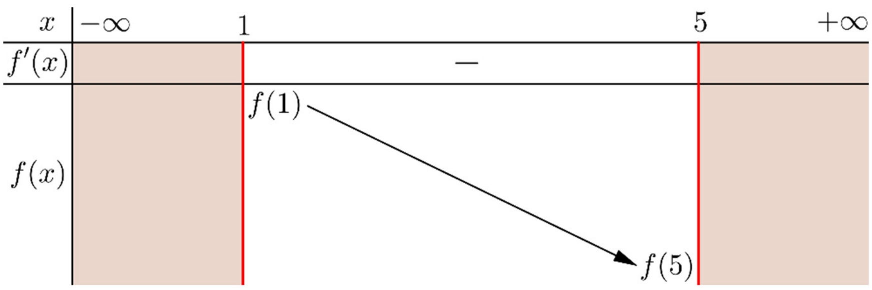
Để phương trình đã cho có nghiệm $x\in(1;5)$ thì $\begin{cases}16\mathrm{e}^5-y(\mathrm{e}^5+5y-53)\ge 0\\ -y(\mathrm{e}+y-5)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-5y^2-(\mathrm{e}^5-53)y+16\mathrm{e}^5\ge 0\\ \mathrm{e}+y-5>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-33,3\le y\le 14,2\\ y>5-\mathrm{e}\end{cases} \Leftrightarrow 5-\mathrm{e}<y\le 14,2.$

Kết hợp điều kiện (2), suy ra $5-\mathrm{e}<y\le 4$. Mà y nguyên dương nên $y=\{3;4\}$. Có 2 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn.

TH3: $x\ge 5 \Leftrightarrow \dfrac{y}{4}\ge 5 \Leftrightarrow y\ge 20$.

Bảng biến thiên:



Do $-y(e+y-5)<0,\ \forall y\geq 20$ nên phương trình đã cho vô nghiệm $x\in(1;5)$.

Vậy kết hợp 3 trường hợp trên ta có 12 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn ycbt.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Đường thẳng đi qua A, cắt trục Oy và vuông góc với d có phương trình là

A. $\begin{cases}x=3+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$.　**B.** $\begin{cases}x=-1+t\\y=4-2t\\z=-3+3t\end{cases}$.　**C.** $\begin{cases}x=3+3t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$.　**D.** $\begin{cases}x=-3+3t\\y=5-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Gọi $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B(0;b;0)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-3;b-1;-1)\\\vec{u}_d=(1;2;1)\end{cases}$.

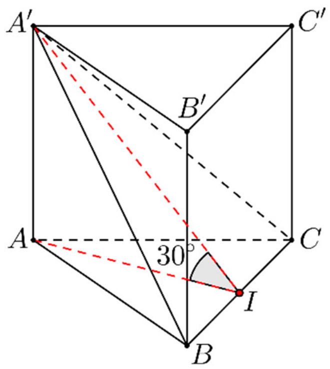
Ta có: $\Delta\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}_d\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0\Rightarrow b=3\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-3;2;-1)\Rightarrow\vec{u}_\Delta=(3;-2;1)$.

Câu 47. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $64\sqrt{3}a^3$.　**B.** $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}a^3$.　**C.** $\dfrac{64\sqrt{3}}{27}a^3$.　**D.** $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow BC\perp AI$ (vì ΔABC đều).

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AI)\Rightarrow BC\perp A'I$.

Suy ra $\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right)=\left(\widehat{A'I,AI}\right)=\widehat{A'IA}=30°$.

Tam giác $A'AI$ vuông tại A có $\tan\widehat{A'AI}=\dfrac{AA'}{AI}\Rightarrow AI=\dfrac{4a}{\tan 30°}=\dfrac{4a}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=4\sqrt{3}a$.

Vì ΔABC đều nên $AI=\dfrac{BC\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BC=\dfrac{2AI}{\sqrt{3}}=\dfrac{2.4a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=8a$.

Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{64a^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}a^2$.

Thể tích khối lăng trụ $V = AA'.S_{\Delta ABC} = 4a.16a^2\sqrt{3} = 64\sqrt{3}a^3$.

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 4az + b^2 + 2 = 0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -4a \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán, phương trình đã cho có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn

$z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow z_1 + 2iz_2 - 3 - 3i = 0 \Leftrightarrow (z_1 + 2iz_2 - 3 - 3i)(z_2 + 2iz_1 - 3 - 3i) = 0$

$\Leftrightarrow -3z_1z_2 - (1+2i)(3+3i)(z_1 + z_2) + 18i + 2i(z_1^2 + z_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow -3(b^2+2) + (3-9i)(-4a) + 18i + 2i\left[(z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2\right] = 0$

$\Leftrightarrow -3(b^2+2) + (3-9i)(-4a) + 18i + 2i\left[16a^2 - 2(b^2+2)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(b^2+2) - 12a = 0 \\ 36a + 18 + 32a^2 - 4(b^2+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2 = -4a \\ 36a + 18 + 32a^2 + 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2 = -4a \\ 32a^2 + 52a + 18 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 2 = -4a \\ \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{9}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2}; b = 0 \\ a = -\frac{9}{8}; b^2 = \frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2}; b = 0 \\ a = -\frac{9}{8}; b = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. **B.** 27. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m$.

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương phân biệt, hay phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

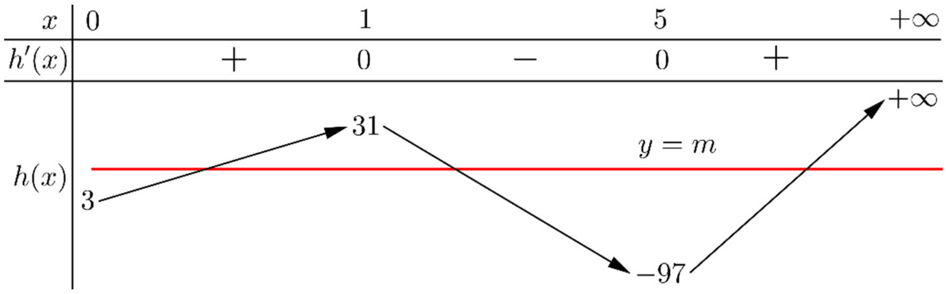
Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 = m$ (1).

Yêu cầu bài toán là phương trình (1) có ba nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

Đạo hàm: $h'(x)=12x^2-72x+60$, cho $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



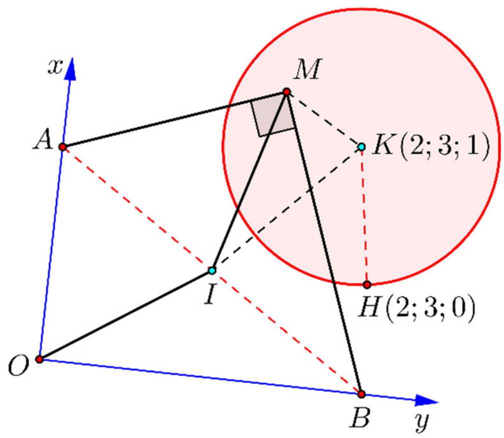
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình (1) có ba nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $3<m<31$. Vậy có 27 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của mặt cầu (S) tại điểm M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90°$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Gọi K là tâm mặt cầu và I là trung điểm AB

Ta có tam giác AMB vuông tại M và I là trung điểm AB suy ra $MI=\frac{1}{2}AB=OI$.

Ta có: $OI^2=MI^2 \Leftrightarrow OI^2=KI^2-MK^2 \Leftrightarrow KI^2-OI^2=MK^2$

$\Leftrightarrow (x_I-2)^2+(y_I-3)^2+(z-1)^2-(x_I^2+y_I^2+z_I^2)=1 \Leftrightarrow 6x_I+4y_I+2z_I=13$

$\Leftrightarrow 6x_I+4y_I=13 \Leftrightarrow 3x_A+2y_B=13 \Leftrightarrow 3a+2b=13$ (do $z_I=0$)

Mà a, b nguyên dương suy ra chỉ có hai cặp thỏa $(1;5)$, $(3;2)$.

Gọi H là hình chiếu của K lên mp$(Oxy) \Rightarrow H(2;3;0)$.

Suy ra: $KH=1=R$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mp(Oxy).

Với $A(1;0;0)$ và $B(0;5;0)$ ta có 2 mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) trong đó có mp(Oxy),

Mà $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}\neq 0$ nên có 1 mặt phẳng thỏa đề bài.

Tương tự với hai điểm $A(3;0;0)$ và $B(0;2;0)$ có 1 mặt phẳng thỏa đề bài.

Kỳ thi tốt nghiệp THPT môn Toán đợt 2

PHÂN TÍCH MỘT SỐ CÂU TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT ĐỢT 2 NĂM 2021

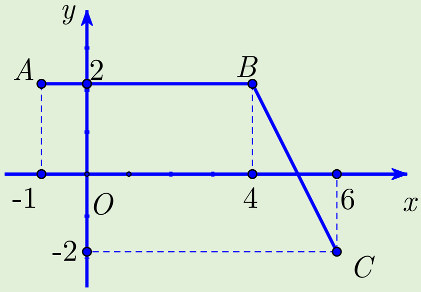
Ths NGUYỄN MINH NHIÊN

Phó trưởng phòng GDTrH – GDTX, Sở GD&ĐT Bắc Ninh

*Buổi thi môn Toán kỳ thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021 diễn ra vào chiều ngày 06/8/2021. Bài thi môn Toán gồm 24 mã đề. Nội dung đề thi nằm trong chương trình THPT, chủ yếu chương trình lớp 12, trong đó 38 câu đầu ở mức độ nhận biết, thông hiểu được ra trong các mã đề nhằm kiểm tra kiến thức cơ bản của lớp 11, lớp 12; trong các mã đề từ câu 39 đến câu 50 kiểm tra kiến thức học sinh ở mức độ vận dụng, vận dụng cao đã thể hiện rõ tính phân hoá bằng cách sử dụng tổng hợp các kiến thức trong chương trình THPT. So với đề thi đợt 1, đề thi đợt 2 có nhiều câu quen thuộc, một số câu, dạng bài đã xuất hiện trong đề thi đợt 1. Để tạo điều kiện cho quý thầy cô cùng các em có tài liệu ôn tập trong năm học 2021-2022, chúng tôi xin gửi tới quý thầy cô và các em bài viết "**Phân tích một số câu trong đề thi tốt nghiệp THPT đợt 2 năm 2021**".*

Hy vọng bài viết sẽ giúp quý thầy cô có thêm tài liệu tham khảo; các em học sinh nắm chắc các kiến thức trong chương trình THPT; tiếp cận được với các bài toán mới, hay và lạ. Đặc biệt, rèn luyện tốt kỹ năng thi trắc nghiệm môn Toán.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng

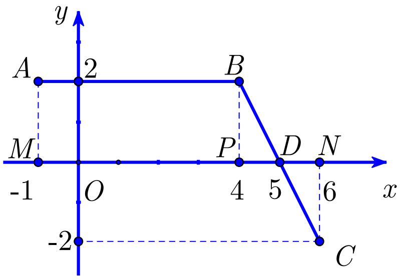


A. 19. **B.** 17. **C.** 22. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Cách 1



Ta có $F(6) + F(5) - 2F(-1) = \int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= S_{ABDM} + S_{ABDM} - S_{CDN} = 2S_{ABPM} + S_{BDP} = 21$$

$\Rightarrow F(6) + F(5) = 17$.

Cách 2

Từ đồ thị ta có hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2 \text{ nếu } x \in [-1;4] \\ -2x + 10 \text{ nếu } x \in [4;6] \end{cases}$

$$\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{4} 2\mathrm{d}x + \int\limits_{4}^{5} (10 - 2x)\,\mathrm{d}x = 11$$

$$\int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{4}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{4} 2\mathrm{d}x + \int\limits_{4}^{6} (10 - 2x)\,\mathrm{d}x = 10$$

Do đó $21 = \int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = F(6) + F(5) - 2F(-1)$.

$\Rightarrow F(6) + F(5) = 17$

NHẬN XÉT:

Đây là bài toán ở mức vận dụng, học sinh nắm vững định nghĩa tích phân và việc ứng dụng nó trong việc xác định diện tích hình phẳng. Cụ thể

+ Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Giả sử $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm $f\left(x\right)$ trên $\left[a;b\right]$. Khi đó $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

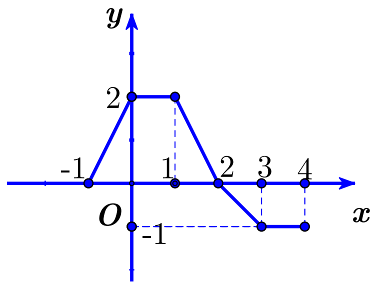
+ Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi: Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$; Trục hoành; Hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx$.

Việc xuất hiện các yếu tố $F\left(-1\right),F\left(5\right),F\left(6\right)$ ta nghĩ đến $\int\limits_{-1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x;\int\limits_{-1}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ và $\int\limits_{5}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x$ đi đến $\int\limits_{-1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(6\right)+F\left(5\right)-2F\left(-1\right)$

Hoặc $\int\limits_{5}^{6} f\left(x\right)\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{5} f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(6\right)+F\left(5\right)-2F\left(-1\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;4\right]$ như hình vẽ bên.Tích phân $\int\limits_{-1}^{4} f(x)dx$ bằng



A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

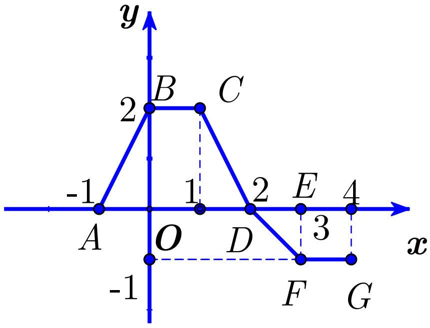
Chọn A

Cách 1: Xác định hàm số $f(x)$ trên từng đoạn, rồi tính tích phân ta có:

$$\int\limits_{-1}^{4} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(2x+2\right)dx+\int\limits_{0}^{1}2dx+\int\limits_{1}^{2}\left(-2x+4\right)dx+\int\limits_{2}^{3}\left(-x+2\right)dx+\int\limits_{3}^{4}(-1)dx$$

$$\int\limits_{-1}^{4} f\left(x\right)dx=\frac{5}{2}.$$

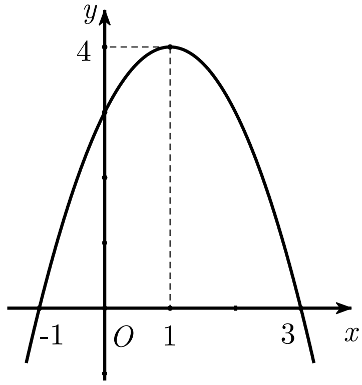
Cách 2: Ứng dụng diện tích hình phẳng



Gọi các điểm $A(-1;0), B(0;2), C(1;2), D(2;0), E(3;0), F(3;-1), G(4;0)$.

Vậy $\int_{-1}^{4} f(x)dx = S_{OAB} + S_{OBCD} - S_{DEFG} = \frac{1}{2}.1.2 + \frac{(1+2)2}{2} - \frac{(2+1)1}{2} = \frac{5}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \left(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Giá trị $f(4) - f(2)$ là



A. -2. **B.** 2.

C. $\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

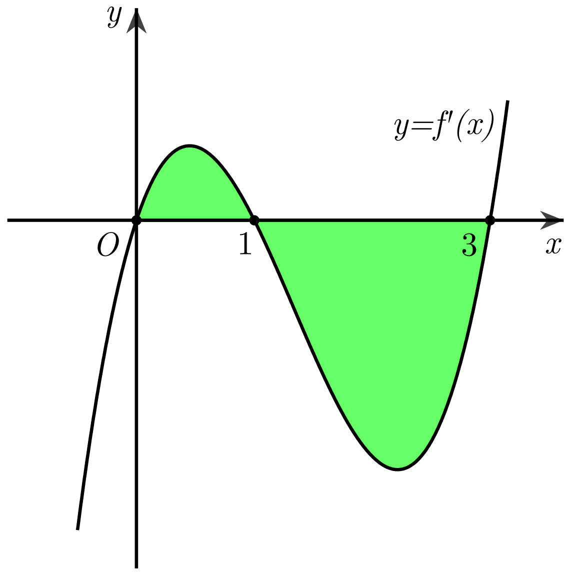
Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ suy ra $f'\left(x\right) = -\left(x-1\right)^2 + 4$.

Vậy $f\left(4\right) - f\left(2\right) = \int_2^4 f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_2^4 \left[-\left(x-1\right)^2 + 4\right]\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên tập số thực. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S = a$. Biết rằng $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x+1\right)f'\left(2x\right)dx = \frac{b}{2}$ và $f\left(3\right) = c$. Tính $\int_0^1 f\left(x\right)dx$.



A. $a - b + c$. **B.** $a + b - c$.

C. $-a + b - c$. **D.** $-a - b + c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x+1\right)f'\left(2x\right)dx = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t+1\right)f'\left(t\right)dt$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (t+1)f'(t)\,dt = b \Leftrightarrow \int_0^1 (x+1)f'(x)\,dx = b$$

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\int_0^1 (x+1)f'(x)\,dx = b = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 2f(1) - f(0) - b$$

Ta lại có

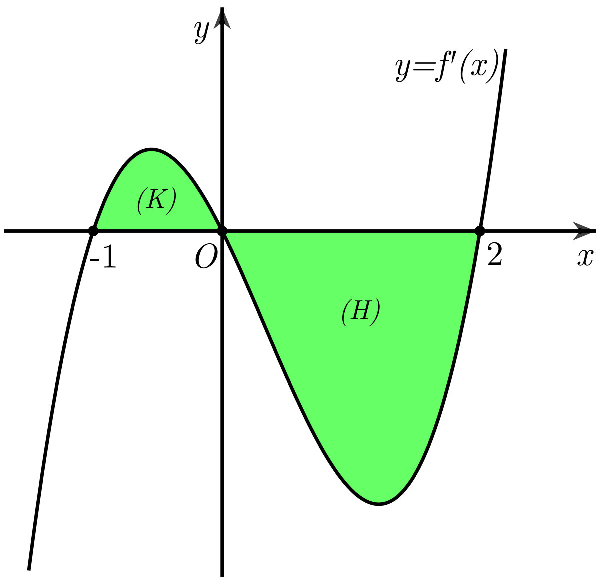
$$a = \int_0^1 f'(x)dx - \int_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow a = f(1) - f(0) + f(1) - f(3) \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = a + c$$

Do đó $\int_0^1 f(x)\,dx = 2f(1) - f(0) - b = a - b + c.$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Biết diện tích hình phẳng (H) bằng $\dfrac{8}{3}$ và $f(-1) = \dfrac{19}{12}; f(2) = -\dfrac{2}{3}$. Tính $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f'(2x)dx$

.

A. $I = \dfrac{5}{24}$. **B.** $I = \dfrac{8}{13}$. **C.** $I = \dfrac{4}{13}$. **D.** $I = \dfrac{4}{26}$.



Lời giải

Chọn A

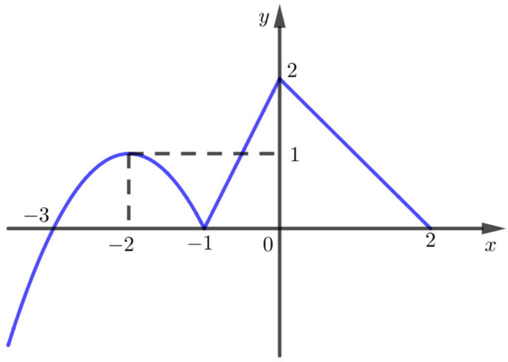
$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f'(2x)dx \xrightarrow[dt=2dx]{t=2x} I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f'(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f'(x)dx$$

Ta có $\int_{-1}^{2} f'(x)dx = \int_{-1}^{0} f'(x)dx + \int_{0}^{2} f'(x)dx \Leftrightarrow f(2) - f(-1) = \int_{-1}^{0} f'(x)dx - \dfrac{8}{3}$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}-\frac{19}{12}=\int_{-1}^{0} f'(x)dx-\frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^{0} f'(x)dx=\frac{5}{12}.$$

Do đó $I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f'(x)dx=\frac{5}{24}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ.



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

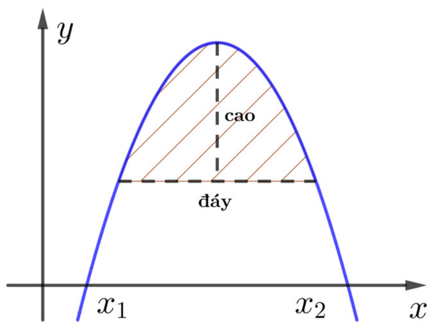
A. $\frac{23}{6}$. **B.** $\frac{31}{6}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

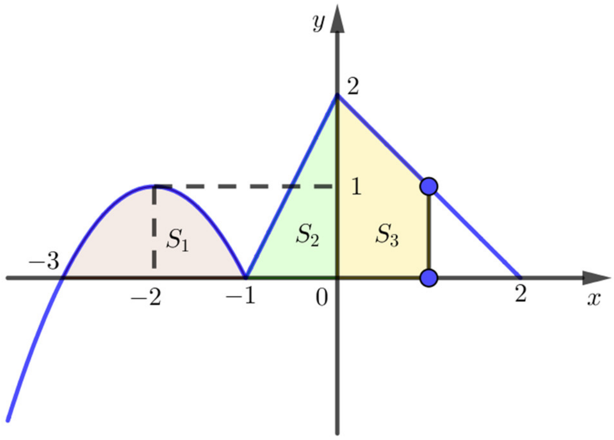
Chọn B

Cách 1:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một parabol và một đường thẳng có phương song song với trục Ox được cho bởi công thức: $S=\frac{2}{3}\text{day.cao}$



Áp dụng công thức này ta giải nhanh bài toán này như sau:



Nhánh parabol $y=ax^2+bx+c$ qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$ nên ta tính ra được hệ số $a=1$.

Ta có $f(-1)+f(1)=\left[f(-1)-f(-3)\right]+\left[f(1)-f(-3)\right]=S_1+(S_1+S_2+S_3)$.

Với $S_1=\frac{2}{3}2.1=\frac{4}{3}$, $S_2=\frac{1}{2}1.2=1$, $S_3=\frac{1}{2}(1+2).1=\frac{3}{2}$.

Suy ra $f(-1)+f(1)=\frac{31}{6}$.

Cách 2:

Ta xác định biểu thức của hàm số $y=f'(x)$. Từ hình vẽ ta thấy trên $[-3,2]$ đồ thị gồm 3 nhánh:

◎ Nhánh parabol $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ xác định trên $[-3,-1]$ đi qua 3 điểm $(-3,0)$, $(-2,1)$ và $(-1,0)$.

◎ Nhánh đường thẳng $y=a_2x+b_2$ xác định trên $[-1,0]$ đi qua 2 điểm $(-1,0)$ và $(0,2)$.

◎ Nhánh đường thẳng $y=a_3x+b_3$ xác định trên $[0,2]$ đi qua 2 điểm $(0,2)$ và $(2,0)$.

Từ đây, giải các hệ phương trình tương ứng ta suy ra biểu thức của $f'(x)$ là:

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ 2x+2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -x+2 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

$f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$, do đó biểu thức của $f(x)$ có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x^3}{3}-2x^2-3x+C_1 & \text{khi } -3\le x\le -1\\ x^2+2x+C_2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ -\frac{x^2}{2}+2x+C_3 & \text{khi } 0\le x\le 2\end{cases}.$$

Vì $f(-3)=0$ nên ta có: $-\frac{(-3)^3}{3}-2(-3)^2-3(-3)+C_1=0\Leftrightarrow C_1=0$.

Do f liên tục tại $x=-1$ nên ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$, suy ra:

$$-\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2-3(-1)=(-1)^2+2(-1)+C_2\Leftrightarrow C_2=\frac{7}{3}.$$

Tương tự, f liên tục tại $x=0$ nên ta có:

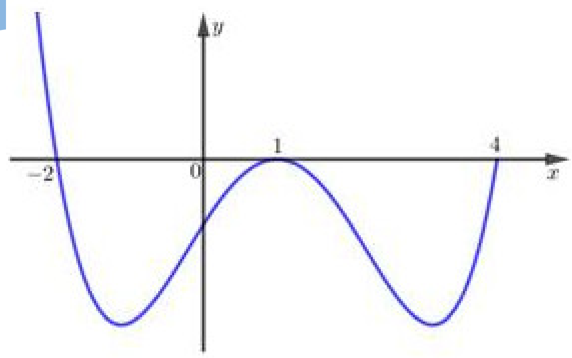
$$0^2+2.0+\frac{7}{3}=-\frac{0^2}{2}+2.0+C_3\Leftrightarrow C_3=\frac{7}{3}.$$

Vậy $f(-1)+f(1)=\left[(-1)^2+2(-1)+\frac{7}{3}\right]+\left[-\frac{1^2}{2}+2.1+\frac{7}{3}\right]=\frac{31}{6}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng

A. 21. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 3.



Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) \le 0$ trên mỗi đoạn $[-2\,;1]$ và $[1\,;4]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2\,;1]$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} |f'(x)|dx = -\int_{-2}^{1} f'(x)dx = f(-2) - f(1) = 12 \Rightarrow f(-2) = 9 + f(1) = 12.$$

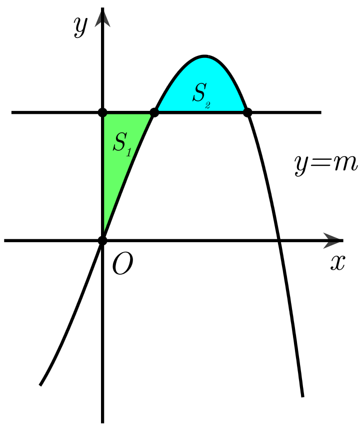
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox đồ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[1\,;4]$ là

$$S_2 = \int_{1}^{4} |f'(x)|dx = -\int_{1}^{4} f'(x)dx = f(1) - f(4) = -9 \Rightarrow f(4) = f(1) - 12 = -9.$$

Vậy $f(-2) + f(4) = 12 - 9 = 3$.

Câu 7: Cho đường cong $(C): y = 8x - 27x^3$ và đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy và chia thành 2 miền phẳng có diện tích S_1, S_2 bằng nhau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0 < m < \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2} < m < 1$. **C.** $1 < m < \dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2} < m < 2$.



Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $8x-27x^3=m$. Giả sử như hình vẽ, hoành độ các giao điểm là $0<a<b$. Ta có hệ $\begin{cases}8a-27a^3=m\\8b-27b^3=m\end{cases}(1)$.

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=8x-27x^3-m$.

Khi đó các diện tích

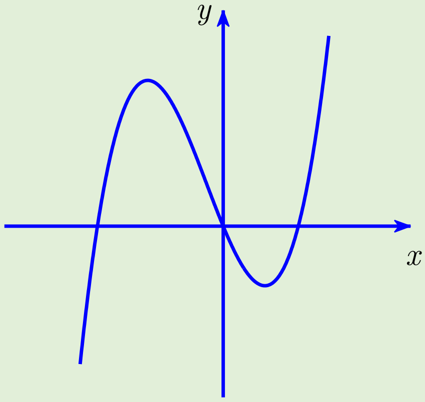
$$S_1=\int_0^a|f(x)|dx=-\int_0^a f(x)dx=F(0)-F(a);$$

$$S_2=\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Theo giả thiết thì $S_1=S_2\Leftrightarrow F(b)-F(0)\Leftrightarrow 4b^2-\dfrac{27b^4}{4}-mb=0$.

Suy ra $b=\dfrac{4}{9}\Rightarrow m=\dfrac{32}{27}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2 (a,b,c\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x)-3=0$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Gọi hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ với trục hoành là $m, 0, n$ với $m<0<n$. Khi đó ta có BBT

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(m\right)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f\left(n\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại hai điểm phân biệt.

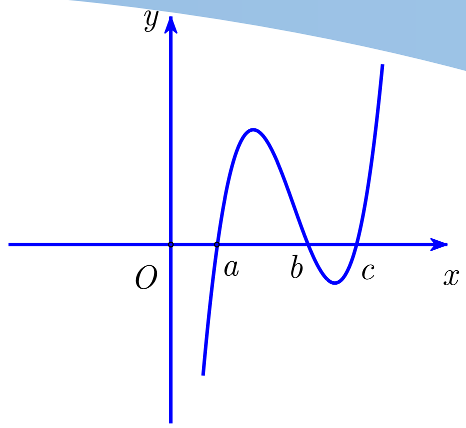
Do đó, phương trình $2f(x)-3=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét

Đây là bài toán sử dụng sự biến thiên của hàm số để giải bài toán về tương giao giữa hai đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(m\right)$ (m là tham số). Với dạng toán này ta cần xác định được tính chất và sự biến thiên của $f\left(x\right)$ thì có thể giải quyết bài toán. Điểm quan trọng nhất chính là tìm các điểm cực trị.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như trong hình vẽ. Hỏi phương trình $f\left(x\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm biết $f\left(a\right)>0>f\left(c\right)$?



A. 3. **B.** 1.
C. 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có BBT

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(a\right)$	$\nearrow$		$\searrow$	$f\left(c\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mà $f\left(a\right)>0>f\left(c\right)$ nên phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$ có các điểm cực trị $x=1;x=3$. Tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f\left(x\right)=f\left(m\right)$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. $\left(f\left(1\right);f\left(3\right)\right)$. **B.** $\left(0;4\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(0;4\right)\setminus\left\{1;3\right\}$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $f'\left(x\right)=3a\left(x-1\right)\left(x-3\right)=a\left(3x^2-12x+9\right)$

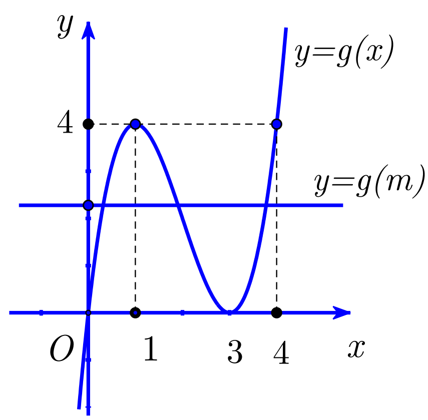
$\Rightarrow f\left(x\right)=a\left(x^3-6x^2+9x\right)+d=ag\left(x\right)+d$ với $g\left(x\right)=x^3-6x^2+9x$.

Hàm số $y=g\left(x\right)$ có các điểm cực trị là $x=1;x=3$ nên đồ thị có điểm uốn $I\left(2;0\right)$ và $g\left(0\right)=g\left(3\right),g\left(1\right)=g\left(4\right)$

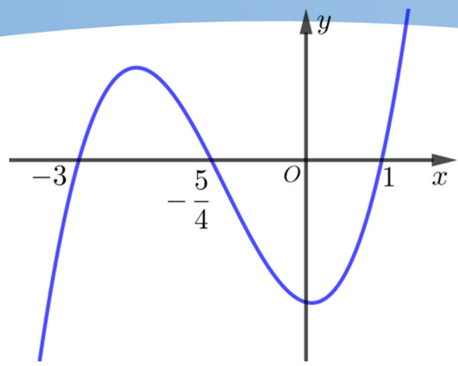
Ta có $f\left(x\right)=f\left(m\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)=g\left(m\right)$.

Nên phương trình $f\left(x\right)=f\left(m\right)$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$g\left(0\right)=g\left(3\right)<g\left(m\right)<g\left(1\right)=g\left(4\right)\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\ m\neq 1;3\end{cases}$$



Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$,. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=48ax+m$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ (1).

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x-1)(4x+5)(x+3)=4ax^3+13ax^2-2ax-15a$ (2) và $a\neq 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $b=\dfrac{13}{3}a$, $c=-a$ và $d=-15a$.

Khi đó:

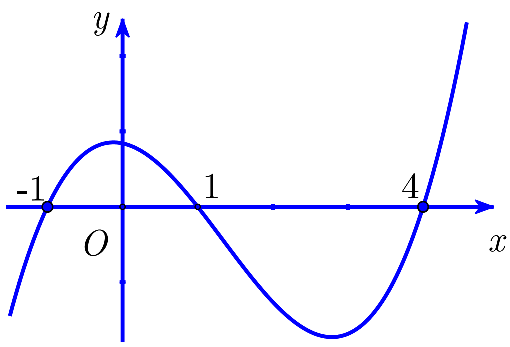
$f(x)=48ax+m \Leftrightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx=48ax$

$\Leftrightarrow a\left(x^4+\dfrac{13}{3}x^3-x^2-63x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4+13x^3-3x^2-189x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=48ax+m$ là $S=\{0;3\}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m, n, p, q, r\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

* Dựa vào đồ thị ta có $m>0$ và

$f'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-4).$

$= 4mx^3 - 16mx^2 - 4mx + 16m.$

* Mà $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Suy ra $\begin{cases} n = -\dfrac{16}{3}m \\ p = -2m \\ q = 16m \end{cases}$

* Phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$

$\Leftrightarrow mx^4 - \dfrac{16}{3}mx^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m - \dfrac{128}{3}m - 8m + 32m + r$

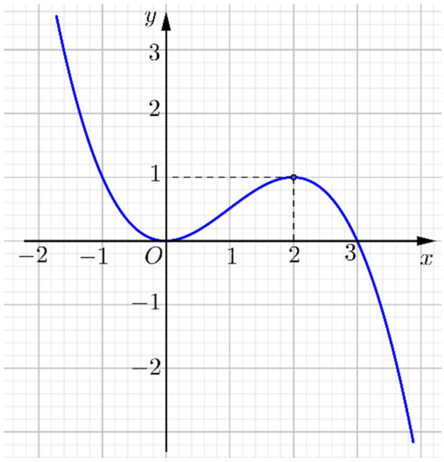
$\Leftrightarrow m\left(x^4 - \dfrac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \dfrac{8}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^3 - \dfrac{10}{3}x^2 - \dfrac{26}{3}x - \dfrac{4}{3} = 0 \end{array}\right.$.

Phương trình $x^3 - \dfrac{10}{3}x^2 - \dfrac{26}{3}x - \dfrac{4}{3} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2.

Vậy phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có 4 nghiệm.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$ với $(a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = k$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f'(x)$ không thể có bậc nhỏ hơn bằng 2, do đó $a \neq 0$.

Ta suy ra $f'(x) = \alpha x^2(x-3)$, đồ thị của nó đi qua $A(2;1)$ nên

$1 = a.2^2.(2-3) = - \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $f'\left(x\right)=-\dfrac{x^2}{4}\left(x-3\right)$, do đó $f\left(x\right)=-\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^3}{4}+k$.

Ta có $f\left(x\right)=k \Leftrightarrow -\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^3}{4}+k=k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Suy ra $f\left(-x^2+2x+m\right)=k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x+m=0 \\ -x^2+2x+m=4 \end{array}\right.$.

Phương trình $-x^2+2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khi
$\Delta_1'=1+m>0 \Leftrightarrow m>-1$.

Phương trình $-x^2+2x+m=4$ có hai nghiệm phân biệt khi
$\Delta_2'=1+m-4>0 \Leftrightarrow m>3$.

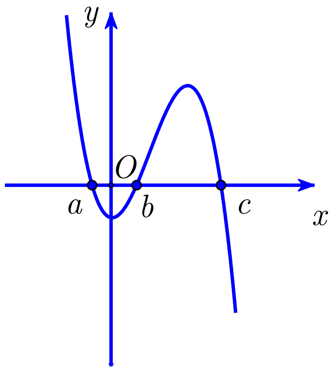
Hai phương trình nếu như có nghiệm chung x_0 thì $\begin{cases} -x_0{}^2+2x_0+m=0 \\ -x_0{}^2+2x_0+m=4 \end{cases} \Rightarrow 4=0$.

Do vậy để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=k$ có 4 nghiệm phân biệt thì

$\begin{cases} m>-1 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m>3$.

Do m nguyên và $m\in\left[-5;5\right]$ nên $m\in\left\{4;5\right\}$. Vậy có 2 giá trị của m .

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x-a\right)=f\left(c\right)$ là



A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

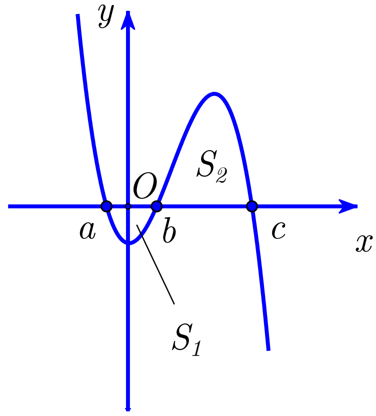
Chọn D

+) Từ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của $y=f\left(x\right)$

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			$f\left(a\right)$				$f\left(c\right)$		

$-\infty$ $-\infty$

+) Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có:

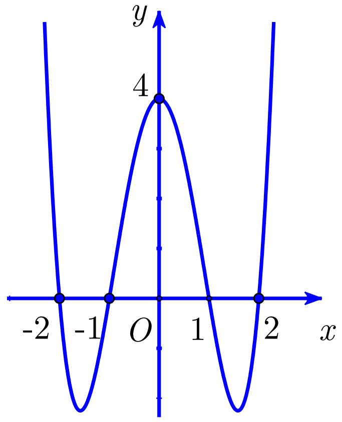


$$S_1 < S_2 \Leftrightarrow \int_a^b -f'(x)dx < \int_b^c f'(x)dx \Leftrightarrow f(a) - f(b) < f(c) - f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$$

+) Số nghiệm của phương trình $f(x-a) = f(c)$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(x-a)$ và đường thẳng $y = f(c)$ trong đó đường thẳng $y = f(c)$ là đường song song hoặc trùng với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $f(c)$, còn đồ thị hàm số $y = f(x-a)$ có được là do tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái theo phương của trục hoành $(-a)$ đơn vị.

Từ ba điều trên suy ra phương trình $f(x-a) = f(c)$ có đúng một nghiệm.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + r$ $(a,b,c,d,e,r \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x) = r$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f'(x)$ là hàm số bậc 4.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt Ox tại bốn điểm $A(-2;0)$, $B(-1;0)$, $C(1;0)$, $D(2;0)$ suy ra $f'(x) = k(x^2 - 1)(x^2 - 4)$, $k > 0$.

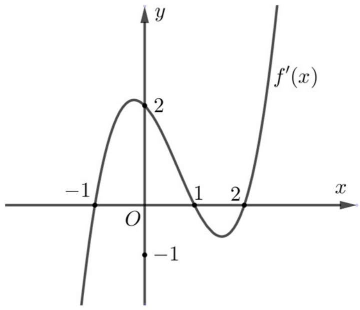
Lại có điểm $E(0;4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow k = 1$.

Vậy $f'(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Mặt khác $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int (x^4 - 5x^2 + 4)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + r$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + r$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m,$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

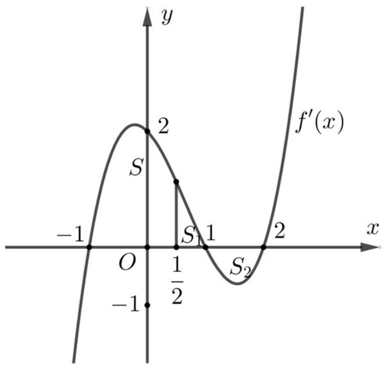


Tập nghiệm của phương trình $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ có số phần tử là

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x = -1$; $x = 1$.

S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x = \frac{1}{2}$; $x = 1$.

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x = 1$; $x = 2$.

Dựa vào đồ thị ta có:

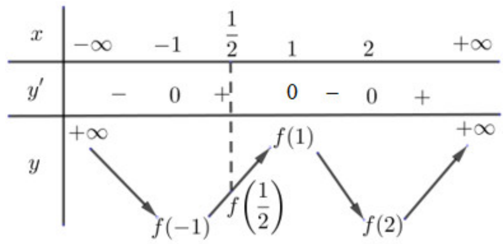
$$S > S_2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x > \int_{1}^{2} \left(-f'(x)\right)\mathrm{d}x \Rightarrow f(1) - f(-1) > f(1) - f(2)$$

$$\Rightarrow f(-1) < f(2).$$

$$S_1 < S_2 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x < \int_{1}^{2} \left(-f'(x)\right)\mathrm{d}x \Rightarrow f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) - f(2) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f(2)$$

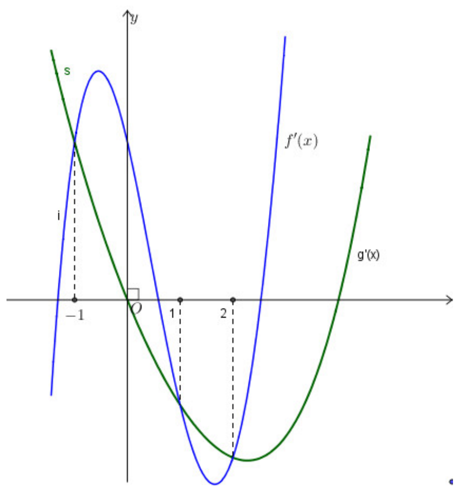
Trên khoảng $(-1;1)$, hàm số $f(x)$ đồng biến nên $f(-1) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$.

Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Vậy phương trình $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ có tất cả 4 nghiệm thực.

Câu 9: Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$; $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(m, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. **B.** $S \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. **C.** $S \in (0;1)$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $m \neq 0$ và xét $f(0) = g(0) \Rightarrow r = d = 0$.

Từ đồ thị có

$f'(x)-g'(x)=4m(x+1)(x-1)(x-2)$

$\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=4mx^3-8mx^2-4mx+8m \quad (1)$.

Mặt khác $f'(x)-g'(x)=mx^3+3(n-a)x^2+2(p-b)x+q-c \quad (2)$.

Từ (1) và (2) cho ta $\begin{cases}3(n-a)=-8m\\2(p-b)=-4m\\q-c=8m\end{cases}$.

Xét phương trình $f(x)=g(x)\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=ax^3+bx^2+cx$

$\Leftrightarrow x\left[mx^3+(n-a)x^2+(p-b)x+q-c\right]=0$

$\Leftrightarrow x.\left[mx^3-\dfrac{8m}{3}x^2-2mx+8m\right]=0$

$\Leftrightarrow mx\left(x^3-\dfrac{8}{3}x^2-2x+8\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^3-\dfrac{8}{3}x^2-2x+8=0\end{array}\right.$.

Phương trình $x^3-\dfrac{8}{3}x^2-2x+8=0$ có đúng 1 nghiệm thực là $x_0\in\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(x)=g(x)$ có tổng các nghiệm $S=0+x_0\Rightarrow S\in\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 42: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1;5)$ thỏa mãn $4(x-1)\mathrm{e}^x = y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right)$?

A. 14. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4(x-1)\mathrm{e}^x = y\left(\mathrm{e}^x + xy - 2x^2 - 3\right) \Leftrightarrow (4x-4-y)e^x - y\left(xy - 2x^2 - 3\right) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = (4x-y-4)e^x - y\left(xy - 2x^2 - 3\right)$ ta có

$f'(x) = 4e^x + (4x-y-4)e^x - y\left(y-4x\right) = e^x\left(4x-y\right) + y\left(y-4x\right) = \left(e^x + y\right)(4x-y)$.

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y}{4}$ (do $e^x + y > 0, \forall x \in \left(1;5\right), y \in \mathbb{N}^*$).

$f\left(1\right) = -y\left(y+e-5\right)$; $f\left(5\right) = -5y^2 - y\left(e^5 - 53\right) + 16e^5$.

+ TH1: $\frac{y}{4} \geq 5 > x \Leftrightarrow y \geq 20 \Rightarrow f'\left(x\right) < 0, \forall x \in \left(1;5\right)$

Suy ra $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(1;5\right)$ hay $f\left(x\right) < f\left(1\right) = -y\left(y+e-5\right) < 0, \forall x \in \left(1;5\right)$.

Do đó, phương trình $f\left(x\right) = 0$ vô nghiệm.

+ TH2: $0 < \frac{y}{4} \leq 1 < x \Leftrightarrow 0 < y \leq 4 \Rightarrow f'\left(x\right) > 0$.

Suy ra $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(1;5\right)$ hay $f\left(1\right) < f\left(x\right) < f\left(5\right)$.

Ta lại có $f(5) = e^5(16-y) + y(53-y) > 0, \forall y \leq 4$.

Do đó, phương trình $f\left(x\right) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

$f(1) < 0 \Leftrightarrow -y(e+y-5) < 0 \Leftrightarrow e+y-5 > 0 \Leftrightarrow y > 5-e$.

Do $y \in \mathbb{N}^*$ và $y \leq 4$ nên $y \in \{3;4\}$.

+ TH3: $\frac{y}{4} \in \left(1;5\right) \Leftrightarrow 4 < y < 20$, ta có bảng biến thiên

x	1		$\frac{y}{4}$		5
y'		$-$	0	$+$	
y	$f\left(1\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{y}{4}\right)$	$\nearrow$	$f\left(5\right)$

Ta thấy $f(1) = -y(e+y-5) < 0, \forall y \in (4;20)$.

Do đó, phương trình $f\left(x\right) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

$f(5) > 0 \Leftrightarrow -5y^2 - y\left(e^5 - 53\right) + 16e^5 > 0$

$$\Leftrightarrow \left(-33,3 \approx\right)\frac{53 - e^5 - \sqrt{\left(e^5 - 53\right)^2 + 320e^5}}{10} < y < \frac{53 - e^5 + \sqrt{\left(e^5 - 53\right)^2 + 320e^5}}{10}\left(\approx 14,2\right).$$

Do $y \in \mathbb{N}^*$ và $4 < y < 20$ nên $y \in \{5;6;\ldots;14\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên của y thỏa mãn bài toán.

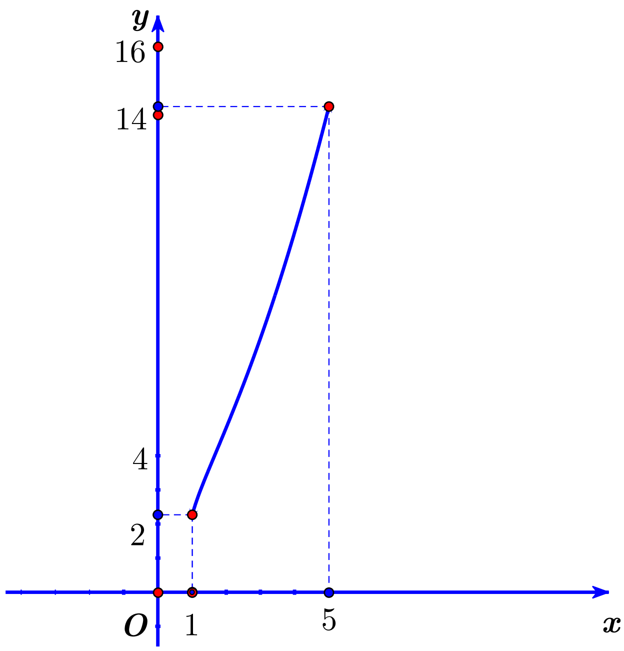
Nhận xét:

Đây là dạng toán đã được đề cập tới trong đề thi Tốt nghiệp THPT năm 2021 đợt 1. Ý tưởng vẫn là hướng đến khảo sát hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left(1;5\right)$. Nhưng việc giải nó phải mất rất nhiều công tính toán (phải dùng đến máy tính cầm tay) vì các biểu thức cồng kềnh. Một điểm không hay nữa trong bài này chính là việc ta có thể biến đổi giả thiết về phương trình bậc hai ẩn y là $xy^2 + y\left(\mathrm{e}^x - 2x^2 - 3\right) - 4(x-1)\mathrm{e}^x = 0$.

Phương trình này luôn có hai nghiệm trái dấu nên tìm được

$$y = \frac{-e^x + 2x^2 + 3 + \sqrt{\left(e^x - 2x^2 - 3\right)^2 + 16\left(x^2 - x\right)e^x}}{4x} = g\left(x\right)$$

Hàm này đơn điệu trên $\left(1;5\right)$



Nên $g\left(1\right) < y < g\left(5\right)$ từ đó tìm được $y \in \left\{3;4;\ldots;14\right\}$.

Như vậy, nếu ban đầu chỉ cần thử

$$x = 1 \Rightarrow y = 5 - e \approx 2,2; x = 5 \Rightarrow y = \frac{53 - e^5 + \sqrt{\left(e^5 - 53\right)^2 + 320e^5}}{10}\left(\approx 14,2\right)$$

Vô tình ta đã có $3 \le y \le 14$.

Câu 44: Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 4$ và $|z - w| = 4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 1 + i| + |w - 3 + 4i|$ bằng

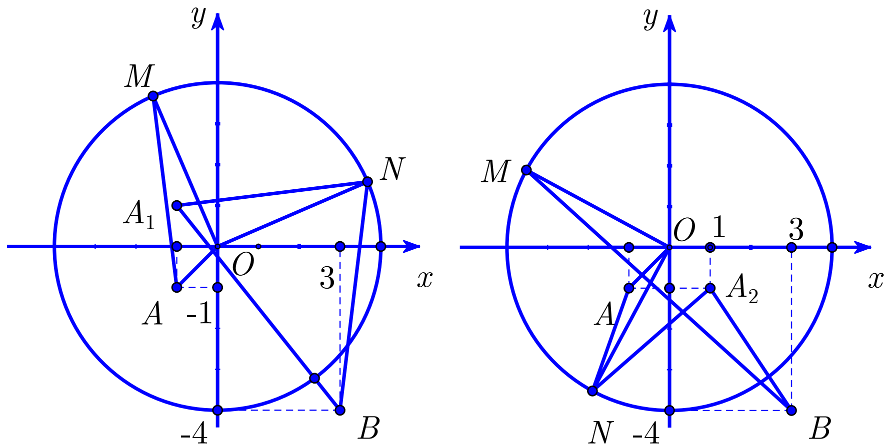
A. $5 - 2\sqrt{2}$. **B.** $5 - \sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Gọi $M, N, A(-1;-1), B(3;-4)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z, w, -1 - i, 3 - 4i$. Từ giả thiết ta có $M, N \in (O;4), MN = 4\sqrt{2}, P = MA + NB$.



Ta có $Q_{(O,-90^\circ)}(A) = A_1(-1;1)$, $Q_{(O,90^\circ)}(A) = A_2(-1;1)$

+ TH1: $Q_{(O,-90^\circ)}(M) = N$

Khi đó, $P = MA + NB = NA_1 + NB \geq A_1B = \sqrt{41}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $N = (O,4) \cap A_1B$.

+ TH2: $Q_{(O,90^\circ)}(M) = N$

Khi đó, $P = MA + NB = NA_2 + NB \geq A_2B = \sqrt{13}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $N = (O,4) \cap A_2B$.

Như vậy, $P_{\min} = \sqrt{13}$.

Cách 2.

Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, w.

Từ giả thiết ta có $OM = ON = 4, MN = 4\sqrt{2} \Rightarrow \Delta OMN$ vuông cân.

Do đó $Q_{(O,-90^\circ)}(M) = N$ hoặc $Q_{(O,90^\circ)}(M) = N$ hay $w = iz$ hoặc $w = -iz$

+ TH1: $w = iz$

$P = |z + 1 + i| + |iz - 3 + 4i| = |z + 1 + i| + |z + 4 + 3i| = |z + 1 + i| + |-z - 4 - 3i|$

$\geq |1 + i - 4 - 3i| = \sqrt{13}$.

+ TH2: $w=-iz$

$P=|z+1+i|+|-iz-3+4i|=|z+1+i|+|-z+4+3i|\geq|1+i+4+3i|=\sqrt{41}$.

Như vậy, $P_{\min}=\sqrt{13}$.

Cách 3.

Đặt $w=uz\,(u\neq 0)$ ta có $|uz|=4\Leftrightarrow|u|=1;|z-uz|=4\sqrt{2}\Leftrightarrow|u-1|=\sqrt{2}$.

Khi đó

$$P=|z+1+i|+|uz-3+4i|=|z+1+i|+|u|\left|z-\frac{3-4i}{u}\right|=|z+1+i|+\left|-z+\frac{3-4i}{u}\right|$$

$$\geq\left|1+i+\frac{3-4i}{u}\right|.$$

Đặt $u=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ ta được $\begin{cases}|u|=1\\|u-1|=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=1\\(a-1)^2+b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm1\end{cases}$

Với $u=i$ thì $\left|1+i+\dfrac{3-4i}{i}\right|=|3-2i|=\sqrt{13}$.

Với $u=-i$ thì $\left|1+i+\dfrac{3-4i}{-i}\right|=|5+i|=\sqrt{41}$.

Như vậy $P_{\min}=\sqrt{13}$.

NHẬN XÉT:

Từ giả thiết ta có thể chỉ ra $M,N\in(O;4), MN=4\sqrt{2}, P=MA+NB$ nhưng việc sử dụng phép quay để đưa về NA_1+NB và NA_2+NB sẽ gây khó khăn với nhiều thí sinh, đồng thời có thể mắc lỗi khi chọn phương án giá trị nhỏ nhất là $A_1B=\sqrt{41}$. Một tính chất khác đã được sử dụng là

Nếu $Q_{(O,\alpha)}(M)=M'$ với M, M' lần lượt biểu diễn các số phức z, z' thì $z'=z(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

Với bài toán này, $\alpha=90^\circ\vee\alpha=-90^\circ$ nên dẫn đến $w=iz$ hoặc $w=-iz$.

Khi đó, bài toán trở về dạng quen thuộc: "Tìm điểm M thay đổi trên đường l sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất, với A, B cho trước, AB cắt l tại một điểm thuộc đoạn AB".

Với cách làm như vậy ta đi tới lời giải thứ 3 và bài toán tổng quát như sau:

Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z|=m;|w|=n;|nz-mw|=mn\sqrt{k}, k\in(0;4]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|nz-a-bi|+|mw-c-di|$, với $a^2+b^2<m^2n^2<c^2+d^2$.

Lời giải

Đặt $z=mu, w=nv\,(uv\neq 0)$ bài toán trở thành $|u|=1,|v|=1,|u-v|=\sqrt{k}, k\in(0;4]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=|mnu-a-bi|+|mnv-c-di|=mn\left(\left|u-\dfrac{a+bi}{mn}\right|+\left|v-\dfrac{c+di}{mn}\right|\right)$.

Đến đây có thể sử dụng ý tưởng của cách 3.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = a+bi\ (a,\ b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|\bar{z}| = |z+2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b+2)^2} \Leftrightarrow 4b+4=0 \Leftrightarrow b=-1$

$\Rightarrow z = a-i$. Ta lại có

$|z-1+2i|+|z+1+3i| = |a-1+i|+|a+1+2i| = \sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}$.

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2} \geq \sqrt{(1-a+1+a)^2+(1+2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Suy ra $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1-a) = 1+a \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$.

Câu 2: Trong các số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1-3-4i| = |z_2-3-4i| = 2$ và $|z_1-z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng

A. -10. **B.** $-4-3\sqrt{5}$. **C.** -5. **D.** $-6-2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} z_1 = a+bi \\ z_2 = c+di \end{cases} (a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Theo đề ta có: $\begin{cases} (a-3)^2+(b-4)^2 = 4\ (1) \\ (c-3)^2+(d-4)^2 = 4\ (2) \\ (a-c)^2+(b-d)^2 = 1\ \ (3) \end{cases}$

Khi đó $a^2+b^2-c^2-d^{\ 2} = 6(a-c)+8(b-d)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và sử dụng ta có:

$|z_1|^2-|z_2|^2 = a^2+b^2-c^2-d^2 = 6(a-c)+8(b-d)$

$\geq -\sqrt{(6^2+8^2)\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]} = -10.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1\right|^2-\left|z_2\right|^2$ là -10 khi $\begin{cases}(a-3)^2+(b-4)^2=4\\(c-3)^2+(d-4)^2=4\\(a-c)^2+(b-d)^2=1\\\dfrac{a-c}{6}=\dfrac{b-d}{8}=k<0\end{cases}$.

Tồn tại 2 cặp số phức thỏa mãn là: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z_1=\dfrac{27-4\sqrt{15}}{10}+\dfrac{144+12\sqrt{15}}{40}i\\z_2=\dfrac{33-4\sqrt{15}}{10}+\dfrac{176+12\sqrt{15}}{40}i\end{cases}\\\begin{cases}z_1=\dfrac{27+4\sqrt{15}}{10}+\dfrac{144-12\sqrt{15}}{40}i\\z_2=\dfrac{33+4\sqrt{15}}{10}+\dfrac{176-12\sqrt{15}}{40}i\end{cases}\end{array}\right.$.

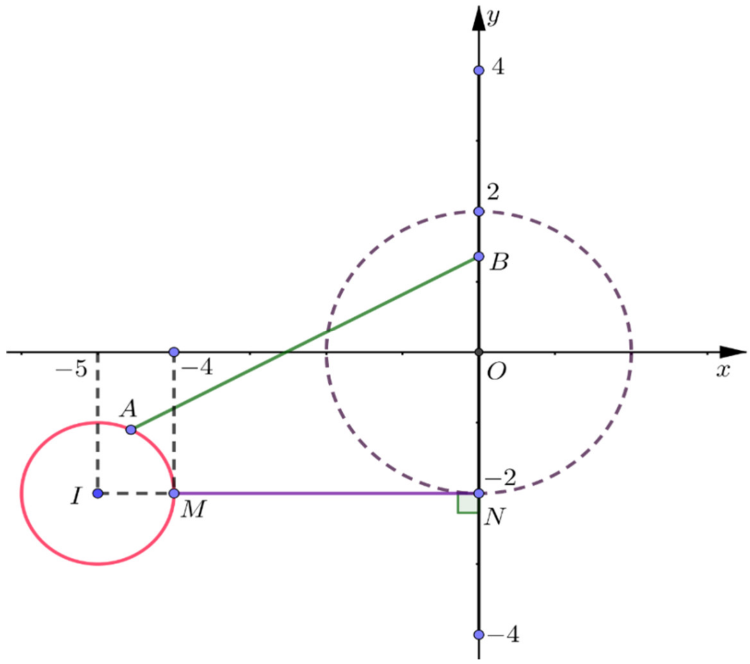
Câu 3: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $|iw-2+5i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2-wz-4\right|$ bằng

A. 4. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** 8. **D.** $2\left(\sqrt{29}-5\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Ta có: $|iw-2+5i|=1\Leftrightarrow|i|\cdot\left|w+\dfrac{-2+5i}{i}\right|=1\Leftrightarrow|w+5+2i|=1$.

Ta có:

$T=\left|z^2-wz-4\right|=\left|z^2-wz-\left|z\right|^2\right|=\left|z^2-wz-z\cdot\overline{z}\right|=\left|z\right|\cdot\left|z-\overline{z}-w\right|=2\left|z-\overline{z}-w\right|$ $(*)$

Đặt $z=a+bi$. Suy ra: $z-\overline{z}=2bi$. Vì $\left|z\right|=2$ nên $-4\le 2b\le 4$.

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của w và $2bi$. Suy ra:

+ A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-5;-2)$, bán kính $R=1$.

+ B thuộc trục Oy và $-4\le x_B\le 4$.

Từ $(*)$ suy ra: $T=2AB\ge 2MN=2\cdot 4=8$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $A\equiv M(-4;-2)\Rightarrow w=-4-2i$ và

$B\equiv N(0;-2)\Rightarrow 2bi=-2i\Rightarrow b=-1\Rightarrow z=a-i\Rightarrow a^2+1=4\Rightarrow a=\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow z=\pm\sqrt{3}-i$.

Vậy $\left|z^2-wz-4\right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Cách 2:

Đặt $z=a+bi$, $w=c+di$ (a, b, c, $d\in\mathbb{R}$). Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases}a^2+b^2=4\\(c+5)^2+(d+2)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a,b\in[-2;2]\\c\in[-6;-4],d\in[-3;-1]\end{cases}.$$

Ta có:

$T=\left|z^2-wz-4\right|=\left|z^2-wz-\left|z\right|^2\right|=\left|z^2-wz-z\cdot\overline{z}\right|=\left|z\right|\cdot\left|z-\overline{z}-w\right|=2\left|z-\overline{z}-w\right|$

$\Rightarrow T=2\left|2bi-(c+di)\right|=2\sqrt{(2b-d)^2+c^2}\ge 2\sqrt{c^2}=2\left|c\right|\ge 2\cdot 4=8$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}c=-4\\2b-d=0\\(c+5)^2+(d+2)^2=1\end{cases}$.

Suy ra một nghiệm thỏa mãn là $\begin{cases}c=-4\\d=-2.\\b=-1\end{cases}$

Vậy $\left|z^2-wz-4\right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 4: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1-3i+5\right|=2$ và $\left|iz_2-1+2i\right|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left|2iz_1+3z_2\right|$

A. $\sqrt{313}$. **B.** $\sqrt{313}+8$. **C.** $\sqrt{313}+16$. **D.** $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Lời giải

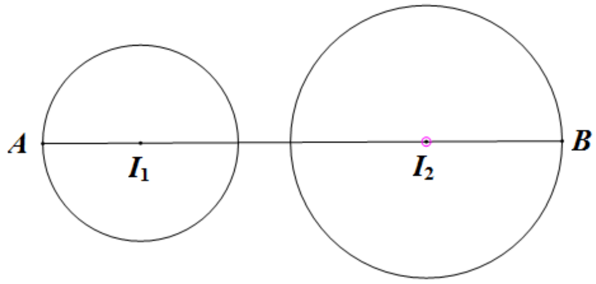
Chọn C

Ta có $\left|z_1-3i+5\right|=2\Leftrightarrow\left|2iz_1+6+10i\right|=4\,(1)$

$\left|iz_2 - 1 + 2i\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\left(-3z_2\right) - 6 - 3i\right| = 12 \; (2)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$

Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6;-10)$, bán kính $R_1 = 4$, điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6;3)$, bán kính $R_2 = 12$



Ta có $T = \left|2iz_1 + 3z_z\right| = AB \le I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

Câu 5: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\left|z - 3\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$, $\left|w - 4\sqrt{2}i\right| = 2\sqrt{2}$. Biết rằng $\left|z - w\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z = z_0$, $w = w_0$. Tính $\left|3z_0 - w_0\right|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải

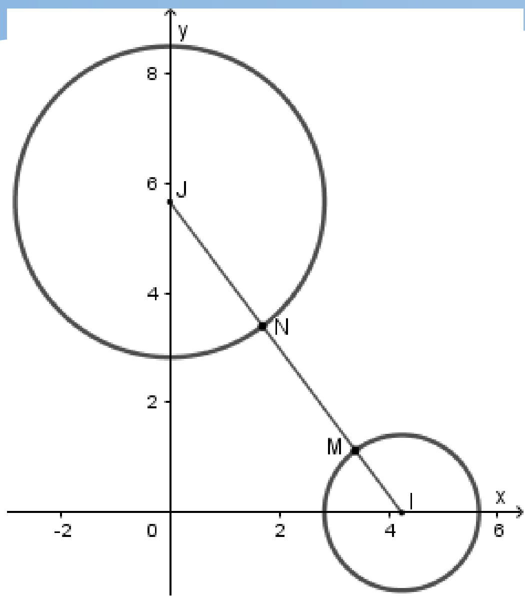
Chọn D

Ta có: + $\left|z - 3\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I\left(3\sqrt{2}\,;0\right)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

+ $\left|w - 4\sqrt{2}i\right| = 2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J\left(0\,;4\sqrt{2}\right)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có $\min\left|z - w\right| = \min MN$.

+ $IJ = 5\sqrt{2}; IM = r = \sqrt{2}; NJ = R = 2\sqrt{2}$.



Mặt khác

$IM + MN + NJ \geq IJ \Rightarrow MN \geq IJ - IM - NJ \Rightarrow \ MN \geq 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN = 2\sqrt{2}$ khi I, M, N, J thẳng hàng và M, N nằm giữa I, J.

Ta có $\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow 3\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

Do đó

$$\left|3z_0 - w_0\right| = \left|3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right| = \left|3\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}\right) - \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN}\right)\right| = \left|2\overrightarrow{OI}\right| = 2.OI = 2.3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Câu 6: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1 - 1 + i\right| = 1$ và $z_2 = 2iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \left|2z_1 - z_2\right|$.

A. $P_{\min} = 2 - \sqrt{2}$. **B.** $P_{\min} = 8 - \sqrt{2}$. **C.** $P_{\min} = 2 - 2\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min} = 4 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

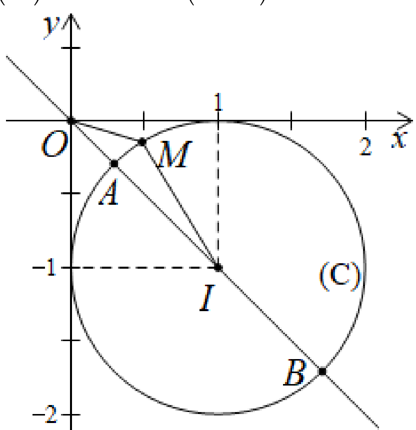
Chọn D

Từ $z_2 = 2iz_1$ ta được $P = \left|2z_1 - z_2\right| = \left|2z_1 - 2iz_1\right| = \left|\left(2 - 2i\right)z_1\right| = \left|2 - 2i\right|.\left|z_1\right| = 2\sqrt{2}.\left|z_1\right|$

Gọi $M\left(a; b\right)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z_1.

Từ giả thiết $\left|z_1 - 1 + i\right| = 1$ ta được $\left|\left(a - 1\right) + \left(b + 1\right)i\right| = 1 \Leftrightarrow \left(a - 1\right)^2 + \left(b + 1\right)^2 = 1$.

Suy ra M thuộc đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(1; -1\right)$ bán kính $R = 1$.



Ta có $P = 2\sqrt{2}\left|z_1\right| = 2\sqrt{2}.OM$ nên P đạt giá trị nhỏ nhất khi OM là nhỏ nhất

Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B với A nằm giữa O và I.

Ta có $OM + MI \geq OI \Leftrightarrow OM + MI \geq OA + AI \Leftrightarrow OM \geq OA$

Nên OM nhỏ nhất bằng OA khi $M \equiv A$ và $OM = OI - R = \sqrt{2} - 1$.

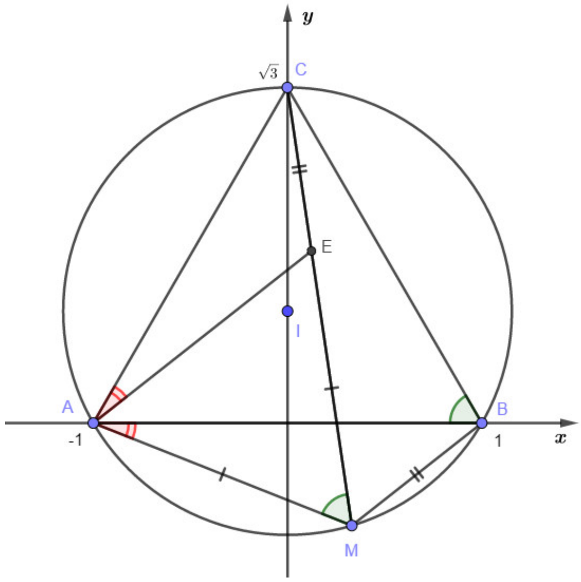
Khi đó $P_{\min} = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 4 - 2\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|z+1\right| + \left|z-1\right| + \left|z - \sqrt{3}i\right|$ bằng

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{32}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là điểm biểu diễn của z, $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Khi đó $M \in (C): x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$ có tâm $I\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$ và A, B, $C \in (C)$, ΔABC là tam giác đều.

Ta có:

$P = \left|z+1\right| + \left|z-1\right| + \left|z - \sqrt{3}i\right| = MA + MB + MC$.

Giả sử M thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. Lấy $E \in MC$ sao cho $ME = MA$.

Vì $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ΔAME là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = AE$ và $\widehat{MAE} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{BAM} \Rightarrow \Delta CAE = \Delta BAM\,(c.g.c) \Rightarrow EC = MB$.

Do đó: $P = \left|z+1\right| + \left|z-1\right| + \left|z - \sqrt{3}i\right| =$

$MA + MB + MC = ME + EC + MC = 2MC$.

$P_{Max} \Leftrightarrow MC$ có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow MC$ là đường kính của đường tròn (C).

$\Rightarrow P_{Max} = 2MC = 2.2R = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Tương tự M thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ thì $P_{Max} = \frac{8}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow M$ lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$.

Vậy $P_{Max} = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Câu 45: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

TH1: $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, ta có $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 2a = \dfrac{9}{2} \\ z_1 z_2 = b^2 + 2 = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{9}{4} \\ b = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

TH2: $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$, đặt $z_1 = x + yi \left(x, y \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow z_2 = x - yi$

Ta có $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow x + yi + 2i(x - yi) = 3 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy có 3 cặp số (a, b) thỏa mãn.

NHẬN XÉT

Đây là dạng toán tương tự đã được gặp trong đề Tốt nghiệp THPT năm 2020, lỗi phổ biến khi giải bài toán là xét thiếu trường hợp dẫn đến kết quả là 1 và 2 cặp.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $\left|z_1 - 3 + 3i\right| = \sqrt{2}$ và $\left(z_1 + 2i\right)\left(z_2 - 2\right)$ là số thuần ảo. Khi đó $b + c$ bằng:

A. -1. **B.** 12. **C.** 4. **D.** -12.

Lời giải

Chọn C

TH 1: $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, khi đó $\left|z_1 - 3 + 3i\right| = \sqrt{\left(z_1 - 3\right)^2 + 9} > \sqrt{2}$ mâu thuẫn với giả thiết.

TH 2: $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$, đặt $z_1 = x + yi \Rightarrow z_2 = \overline{z_1} = x - yi$.

Ta có $\left|z_1 - 3 + 3i\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x - 3\right)^2 + \left(y + 3\right)^2 = 2 \quad (1)$

$\left(z_1 + 2i\right)\left(z_2 - 2\right) = \left[x + \left(y + 2\right)i\right]\left[\left(x - 2\right) - yi\right] = x^2 + y^2 - 2x + 2y + \left[\left(x - 2\right)\left(y + 2\right) - xy\right]i$

là một số thuần ảo khi và chỉ khi $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} \left(x - 3\right)^2 + \left(y + 3\right)^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow z_1 = 2 - 2i$; $z_2 = 2 + 2i$.

Vì vậy theo Vi-et ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -b = 4 \\ z_1 . z_2 = c = 8 \end{cases} \Rightarrow b + c = -4 + 8 = 4$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0| = \sqrt{3}$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ (*) có $\Delta = -4a^2 + 8a + 3$.

Xét 2 trường hợp:

TH1: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{7}}{2}$ (1).

Khi đó, phương trình (*) có nghiệm z_0 thì $z_0 \in \mathbb{R}$.

Theo đề bài: $|z_0| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = \sqrt{3} \\ z_0 = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

* $z_0 = -\sqrt{3}$, thay vào phương trình (*) ta được $a^2 - 2a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$.

* $z_0 = \sqrt{3}$, thay vào phương trình (*) ta được $a^2 - 2a + 6 = 0$ (vô nghiệm).

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện (1) suy ra $a = 2$.

TH2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \frac{2 - \sqrt{7}}{2} \\ a > \frac{2 + \sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$ (2).

Khi đó, phương trình (*) có nghiệm phức z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của phương trình (*).

Ta có $z_0 . \overline{z_0} = a^2 - 2a \Leftrightarrow |z_0|^2 = a^2 - 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $a > 0$ và điều kiện (2) suy ra $a = 3$.

Vậy có 2 giá trị a dương thỏa mãn là $a = 2$; $a = 3$.

Câu 3: Trên tập số phức, xét phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ (m là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thỏa mãn $|z| = 1$ là

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

$9z^2 + 6z + 1 - m = 0 \ (*)$. $\Delta' = 9 - 9(1 - m) = 9m$

TH 1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó $|z| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$.

* $z = 1 \Rightarrow m = 16$.

* $z=-1 \Rightarrow m=4$.

TH 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m<0$. Đặt $z=a+bi\left(b\neq 0\right)$

Khi đó, z, $\overline{z}$ là các nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $\left|z\right|=1 \Leftrightarrow \left|z\right|^2=1 \Leftrightarrow z.\overline{z}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{9}=1 \Leftrightarrow m=-8$.

Vậy tổng cần tìm bằng 12.

Câu 46: Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+2x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-2x$; với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g\left(x\right)$ có ba điểm cực trị $-1;2;3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{71}{9}$. **C.** $\dfrac{64}{9}$. **D.** $\dfrac{71}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết hàm số $h\left(x\right)=f(x)-g\left(x\right)$ có bậc 4 có ba điểm cực trị là $-1;2;3$. Do đó

$h'\left(x\right)=f'(x)-g'\left(x\right)=4ax^3+3\left(b-m\right)x^2+2\left(c-n\right)x+4=4a\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$

$\Rightarrow h'\left(0\right)=24a=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{6}\Rightarrow h'\left(x\right)=\dfrac{2}{3}\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

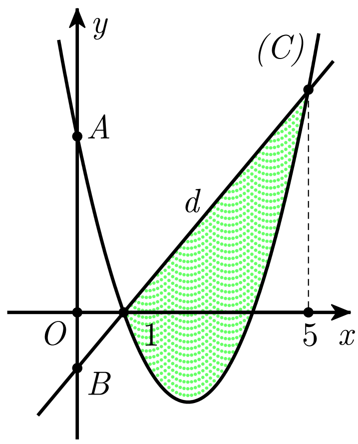
$$S=\int_{-1}^{3}\left[f'(x)-g'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_{-1}^{3}\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\mathrm{d}x=\frac{71}{9}.$$

NHẬN XÉT

Đây là dạng toán tương tự đã được gặp trong đề THPT quốc gia năm 2018, điểm mấu chốt của bài toán là phân tích $f'(x)-g'\left(x\right)=4a\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$ để tìm a qua $h'\left(0\right)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho các hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ và $g\left(x\right)=mx+n$ có đồ thị lần lượt là đường cong $\left(C\right)$ và đường thẳng d (như hình vẽ). Biết $AB=5$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$ và đường thẳng d (phần tô màu) là $S=\dfrac{p}{q}$ (trong đó $p,q\in N^*$; $(p;q)=1$). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $p-q=20$. **B.** $p>11q$. **C.** $pq=69$. **D.** $p+q=35$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $A(0;c)\in(C)$, $B(0;n)\in d$ và $AB=5\Leftrightarrow c-n=5$ $(c>n)$

Phương trình hoành độ giao điểm của $\left(C\right)$ và d

$ax^2 + bx + c = mx + n \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + c - n = 0 \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + 5 = 0\,(*)$

Lại có hoành độ giao điểm của (C) và d là $x=1$ và $x=5$

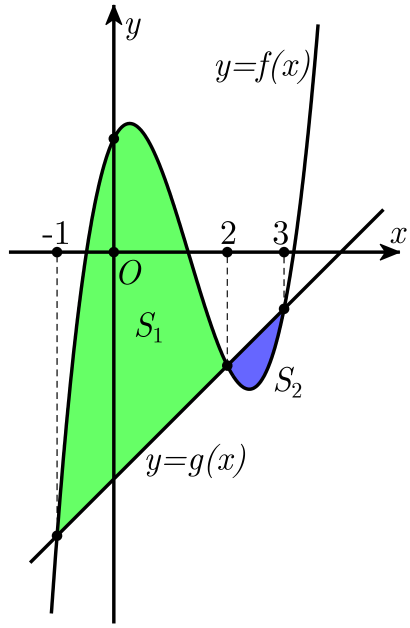
nên $(*)$ có dạng $a(x-1)(x-5)=0$

Đồng nhất hệ số ta được $a=1$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và d là

$$S = \int_1^5 \left|(x-1)(x-5)\right| dx = \int_1^5 \left|x^2 - 6x + 5\right| dx = \frac{32}{3}$$

Suy ra $p=32,\ q=3 \Rightarrow p+q=35$.



Câu 2: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx + n$ $(a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ $-1;2;3$ (tham khảo hình vẽ phía bên dưới); đồng thời diện tích $S_1 = 45$ (phần hình phẳng tô màu xanh). Tính diện tích S_2 (phần hình phẳng tô màu đỏ).

A. $S_2 = \frac{7}{3}$.
B. $S_2 = \frac{7}{12}$.
C. $S_2 = \frac{128}{3}$.
D. $S_2 = \frac{7}{6}$.

Lời giải

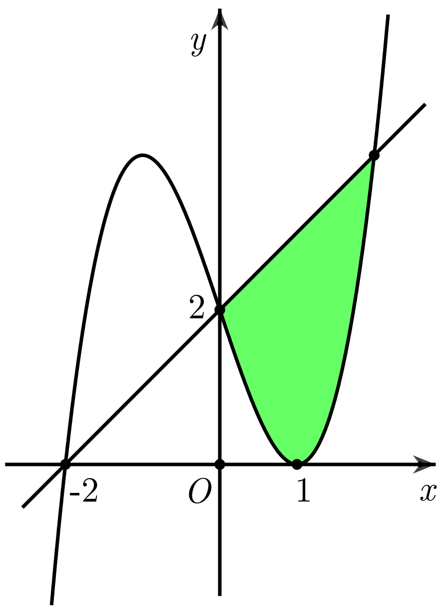
Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a(x+1)(x-2)(x-3) = 0$

Có $S_1 = \int_{-1}^{2} a(x+1)(x-2)(x-3)\,dx = 45 \Leftrightarrow \frac{45}{4}a = 45 \Leftrightarrow a = 4.$

Vậy $S_2 = -\int_2^3 4(x+1)(x-2)(x-3)\,dx = \frac{7}{3}$.

Câu 3: Hình phẳng được tô màu ở trong hình vẽ bên được giới hạn bởi một đồ thị hàm số bậc 3 với một đường thẳng Δ cùng với trục hoành và trục tung. Diện tích hình phẳng đó bằng



A. 4.
B. $\frac{4}{3}$.
C. $\frac{1}{3}$.
D. 2

Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có:

+ Giao với Oy tại điểm có tung độ bằng $2 \Rightarrow d = 2$

+ Đi qua điểm $(1;0) \Rightarrow a+b+c=-2$

+ Đi qua điểm $(-2;0) \Rightarrow -8a+4b-2c=-2 \Rightarrow -4a+2b-c=-1$

+ Có $x=1$ là điểm cực trị của hàm số nên là nghiệm của phương trình $y'=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$

Từ đó $a=1; \mathrm{b}=0; \mathrm{c}=-3$

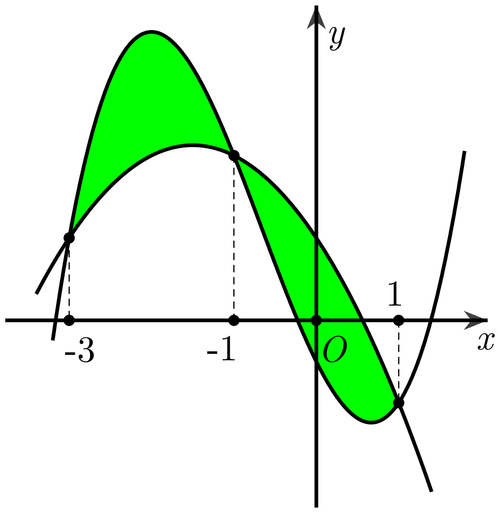
Vậy hàm số bậc ba là: $y=x^3-3x+2$

Ta có đường thẳng đi qua hai điểm $(-2;0);(0;2)$ là $y=x+2$

Giao điểm của hai đồ thị là $x=-2; x=0; x=2$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn với hai đồ thị trên là: $S=\int\limits_0^2\left(4x-x^3\right)dx=4$

Câu 4: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Từ giao điểm hai đồ thị ta có $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

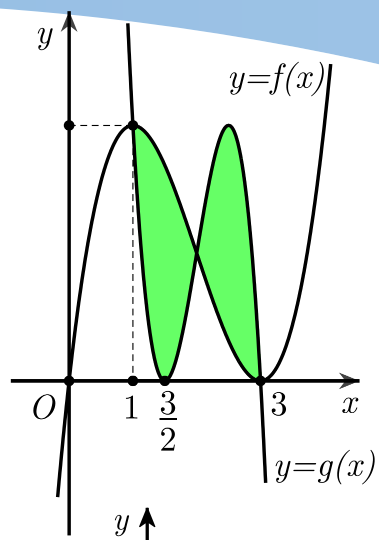
Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Do đó $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng $S=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=4$.

Câu 5: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g\left(x\right)=f\left(dx+e\right)$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. $4{,}5$. **B.** $4,25$.
C. $3,63$. **D.** $3,67$.

Lời giải

Chọn A

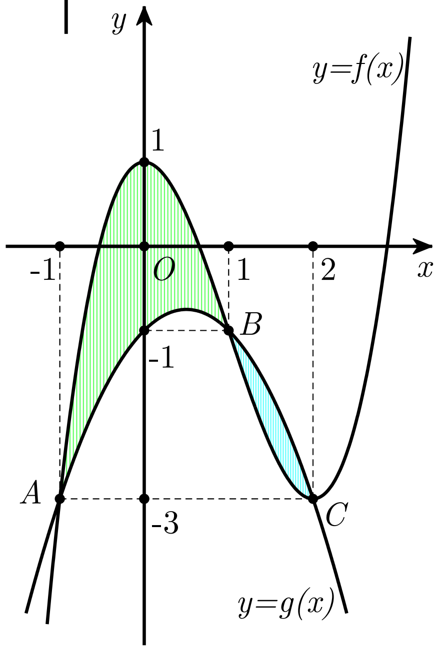
Từ đồ thị suy ra $f(x)=a(x-3)^2.x$ và $f(1)=4\Rightarrow a=1$
$\Rightarrow f(x)=(x-3)^2x$

$g(x)$ là hàm số bậc ba nên $g(x)=m(x-\frac{3}{2})^2(x-3)$ và

$g(1)=4\Rightarrow m=-8\Rightarrow g(x)=-8(x-\frac{3}{2})^2(x-3)$

Vậy $S=\int_1^3\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|.dx=\frac{9}{2}=4,5$

Câu 6: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+1$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex-1$ với $a;b;c;d;e$ là các số thực. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm A,B,C có hoành độ lần lượt là $-1;1;2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{27}{12}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$f\left(x\right)-g\left(x\right)=\left(ax^3+bx^2+cx+1\right)-\left(dx^2+ex-1\right)=ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x+2$

Vì đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm A,B,C có hoành độ lần lượt là $-1;1;2$ nên phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ có ba nghiệm là $-1;1;2$.

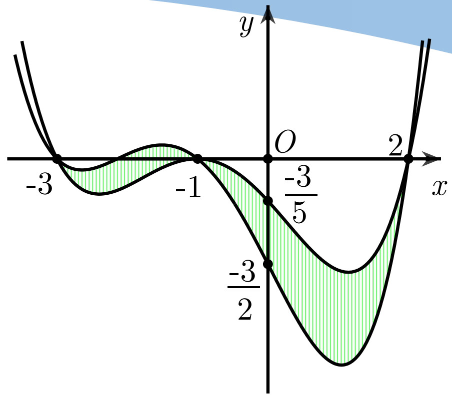
Kết hợp với điều kiện giả thiết suy ra $f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.

Đồng nhất hệ số tự do hai dạng biểu thức $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ ta được $2a=2\Rightarrow a=1$.

Vậy $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)=x^3-2x^2-x+2$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-2x^2-x+2\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$.

Câu 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là –3;–1;2. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $3{,}11$. **B.** $2{,}45$.
C. $3{,}21$. **D.** $2{,}95$

Lời giải

Chọn A

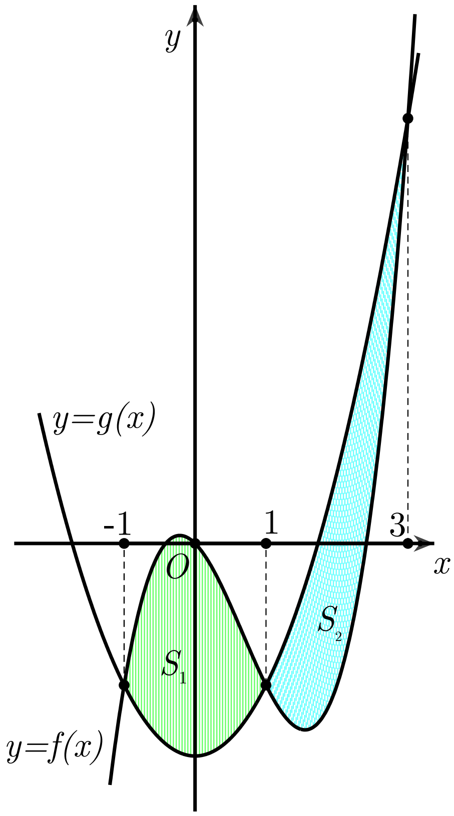
Tại điểm có hoành độ $x=-3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc với nhau.

Có $f(x)-g(x)=a(x+3)^2(x+1)(x-2)$.

Mà $f(0)-g(0)=\frac{-3}{5}-\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{9}{10}\Rightarrow a.9.1.(-2)=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-1}{20}$.

Vì vậy $S_{(H)}=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|=\int_{-3}^{2}\left|-\frac{1}{20}(x+3)^2(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{3733}{1200}\approx 3{,}11$.

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ và hàm số bậc hai $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng phần diện tích S_1 giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số bằng 4. Tính phần diện tích S_2 giới hạn bởi hai đồ thị hàm số.



A. $S_2=4$. **B.** $S_2=2$.

C. $S_2=1$. **D.** $S_2=\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hai hàm số ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-1,\ 1,\ 3$ nên $f(x)-g(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)$ và $a>0$.

Mặt khác diện tích

$S_1=4\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}a(x+1)(x-1)(x-3)dx=4\Leftrightarrow a=4$

Từ đó suy ra

$S_2=\int_{1}^{3}\left(g(x)-f(x)\right)dx=-\int_{1}^{3}4(x+1)(x-1)(x-3)dx=4$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1,S_2,S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p. Tích phân $\int\limits_{-5}^{3} f(x)dx$ bằng

A. $m-n+p+\dfrac{211}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$. **C.** $m-n+p+\dfrac{24}{5}$. **D.** $m-n+p+\dfrac{26}{5}$.

Lời giải

Chọn B

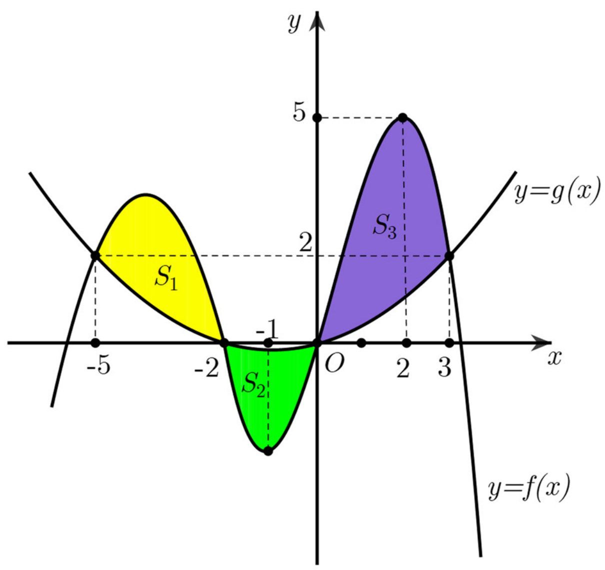
Đồ thị hàm $y=g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(-2;0), B(3;2)$ nên

$$\begin{cases} c=0 \\ 4a-2b=0 \\ 9a+3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{15} \\ b=\dfrac{4}{15} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x.$$

$$m-n+p=\int\limits_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]dx-\int\limits_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]dx+\int\limits_{0}^{3}\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

$$=\int\limits_{-5}^{3} f(x)dx-\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx.$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-5}^{3} f(x)dx=m-n+p+\int\limits_{-5}^{3} g(x)dx=m-n+p+\frac{208}{45}$$



Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90^\circ$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

S có tâm $I(3;2;-1)$ bán kính $R=1$.

Vì $IM\perp(MAB)\Rightarrow IM\perp MA, IM\perp MB$ nên

$MA^2=IA^2-IM^2=(a-3)^2+4; MB^2=IB^2-IM^2=(b-2)^2+9$.

Ta lại có $\widehat{AMB}=90^\circ$ nên

$MA^2+MB^2=AB^2\Leftrightarrow(a-3)^2+4+(b-2)^2+9=a^2+b^2\Leftrightarrow 3a+2b=13$.

Mà $a,b\in\mathbb{N}^*$ nên có hai cặp số $(a;b)$ thỏa mãn là $(1;5),(3;2)$.

Nhận xét:

Ta có thể dựa theo tính chất (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) để xây dựng các bài toán tương tự và bài toán tổng quát (*Nếu (S) cắt (Oxy) hoặc (S) không cắt (Oxy) thì sao nhỉ?*).

Bài toán tổng quát:

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z+c)^2=c^2\left(a,b\in\mathbb{N}^*\right)$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(m;0;0), B(0;n;0)$ mà m,n là các số nguyên dương và $\widehat{AMB}=90^\circ$?

Từ cách giải như trên ta đi đến phương trình $am+bn=a^2+b^2$ (1).

Gọi $d=(a;b), a=a_1d; b=b_1d$ thì $(a_1;b_1)=1$. Khi đó

$(1)\Leftrightarrow a(x-a)=b(b-y)\Leftrightarrow a_1d(x-a)=b_1d(b-y)\Leftrightarrow a_1(x-a)=b_1(b-y)$ (2).

Khi đó $(x-a)\,\vdots\, b_1$. Đặt $x-a=b_1t\Rightarrow x=a+b_1t\Rightarrow t>\dfrac{-a}{b_1}$

Từ (2) ta lại có $a_1b_1t=b_1(b-y)\Leftrightarrow a_1t=b-y\Rightarrow y=b-a_1t>0\Rightarrow t<\dfrac{b}{a_1}$.

Như vậy chỉ cần xác định số giá trị nguyên của $t\in\left(-\dfrac{a}{b_1};\dfrac{b}{a_1}\right)$ là xong.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=x^4-10x^3+24x^2+(3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 22. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow 4x^3-30x^2+48x+3=m$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Xét hàm số $h(x)=4x^3-30x^2+48x+3$

Ta có $h'(x)=12x^2-60x+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$. Ta có BBT

x	0		1		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	25	$\searrow$	-29	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $3<m<25 \Rightarrow m\in\{4;5;\ldots;24\} \Rightarrow$ Có 21 giá trị m thỏa mãn.

NHẬN XÉT:

Đây là dạng toán quen thuộc có xuất hiện trong nhiều đề thi. Ta có thể xét bài toán tổng quát như sau: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm

$$f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)f_1(x)$$

với $f_1(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ (hoặc $f_1(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$) và $x_1<x_2<\ldots<x_n$.

Hỏi hàm số $y=g(x)=f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta có

$$g'(x)=\frac{x+m}{|x+m|}\left(|x+m|-x_1\right)\left(|x+m|-x_2\right)\ldots\left(|x+m|-x_n\right)f_1\left(|x+m|\right).$$

+) Nếu $x_n<0$ thì $|x+m|-x_i>0,\forall x\in\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$. Do đó, hàm $y=g(x)$ chỉ có 1 điểm cực trị là $x=-m$.

+) Nếu có $k\in\{1;2;..;n\}$ sao cho $x_k=0$ thì

$g'(x)=(x+m)\left(|x+m|-x_1\right)\ldots\left(|x+m|-x_{k-1}\right)\left(|x+m|-x_{k+1}\right)\ldots\left(|x+m|-x_n\right)f_1\left(|x+m|\right)$

$|x+m|-x_i>0,\forall x\in\mathbb{R}, i<k$.

$|x+m|-x_j=0 \Leftrightarrow x=\pm x_j-m$, với $k+1<j\le n$.

Khi đó, hàm $g(x)$ có $2(n-k)+1$ điểm cực trị là $-m;\pm x_{k+1}-m;\ldots;\pm x_n-m$.

+) Nếu có $k \in \{1;2;..;n-1\}$ sao cho $x_k < 0 < x_{k+1}$ thì làm tương tự trên ta được hàm $g(x)$ có $2(n-k)+1$ điểm cực trị là $-m;\pm x_{k+1}-m;...;\pm x_n - m$.

+ Nếu $x_1 > 0$ làm tương tự trên ta được hàm $g(x)$ có $2n+1$ điểm cực trị.

Kết luận: Số cực trị của $g(x)$ phụ thuộc vào số giá trị $x_k\left(k=\overline{1;n}\right)$ không âm mà không phụ thuộc vào m .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4} < m < 2$. **B.** $\frac{5}{4} \le m \le 2$. **C.** $-\frac{5}{4} < m < 2$. **D.** $-2 < m < \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$

Ycbt $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ 2m-1 > 0 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-5;5]$ để số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ là 3?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

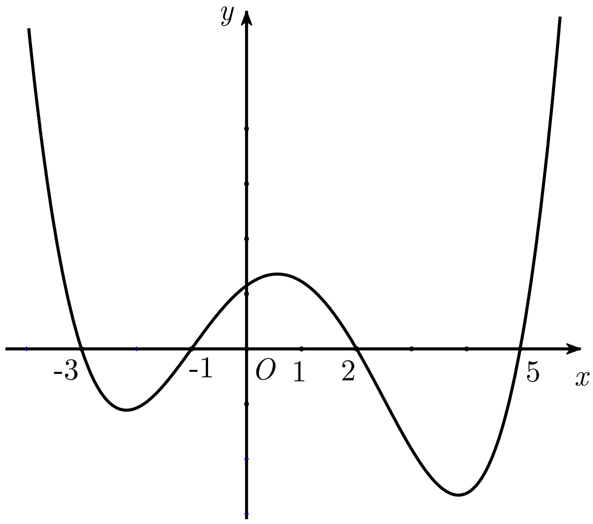
Lời giải

Chọn A

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow m > 0$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-5;5]$ nên m nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, 5.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(|x| + m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3.
C. 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = f(|x| + m) = \begin{cases} f(x+m) &, khi\ x \ge 0 \\ f(-x+m), & khi\ x < 0 \end{cases}$

Do hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Và ta lại có $g(-x) = f(|x| + m) = g(x)$ ⇒Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn⇒Đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị ⇔Hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta được $g(x) = f(x+m)$

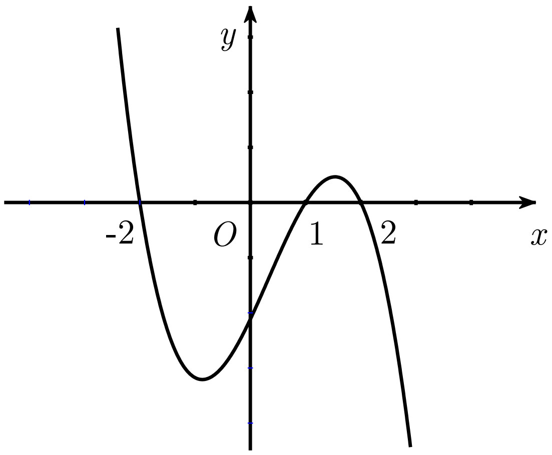
+ Ta có $g'(x) = f'(x+m)$

+ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m = -3 \\ x+m = -1 \\ x+m = 2 \\ x+m = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m-3 \\ x = -m-1 \\ x = -m+2 \\ x = -m+5 \end{array}\right.$

+ Nhận thấy $-m-3 < -m-1 < -m+2 < -m+5$

Theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 > 0 \\ -m-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in \{-3;-2\} \end{cases}$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị.



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị có hoành độ là $x = -2$, $x=1$, $x=2$ trong đó hai điểm nằm bên phải và một điểm nằm bên trái trục tung, mà hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn ⇒ $y = f(|x|)$ có năm điểm cực trị $x = -2$, $x = -1$, $x=0$, $x=1$ và $x=2$.

Đồ thị hàm số $y = f(|x+m|)$ là ảnh của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (-m\,;0)$ suy ra số điểm cực trị của chúng bằng nhau với mọi giá trị của tham số m.

Vậy hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 5 điểm cực trị với mọi giá trị của tham số m .

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^3\left(x^2+\left(4m-5\right)x+m^2-7m+6\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét:

+) $x=1$ là nghiệm bội ba của phương trình $\left(x-1\right)^3=0$.

+) Hàm $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm chẵn nên đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Do đó hàm $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị ⇔ Hàm số $y=f\left(x\right)$ chỉ có hai điểm cực trị dương ⇔ Phương trình $x^2+\left(4m-5\right)x+m^2-7m+6=0$ có nghiệm kép dương khác 1 $\left(*\right)$ hoặc phương trình $x^2+\left(4m-5\right)x+m^2-7m+6=0$ có hai nghiệm trái dấu khác 1 $\left(**\right)$.

Giải $\left(*\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left(4m-5\right)^2-4\left(m^2-7m+6\right)=0\\0<\dfrac{-\left(4m-5\right)}{2}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{6}\notin\mathbb{Z}$.

Giải $\left(**\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-7m+6<0\\1+\left(4m-5\right)+m^2-7m+6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(1;6\right)\\m\neq 1\\m\neq 2\end{cases}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{3;4;5\right\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^3-5x^2+\left(m+3\right)x+3$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$f'\left(x\right)=3\left(m-1\right)x^2-10x+\left(m+3\right)$.

+) Trường hợp 1: $m=1$

Khi đó hàm số trở thành $f\left(x\right)=-5x^2+4x+3$. Hàm số có một điểm cực đại là $x=\dfrac{2}{5}$ khi đó hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị: $x=-\dfrac{2}{5};x=0;x=\dfrac{2}{5}$ nên nhận $m=1$.

+) Trường hợp 2: $m\neq 1$. Hàm số $y=f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^3-5x^2+\left(m+3\right)x+3$ có 2 cực trị thỏa $0=x_1<x_2$.

Khi đó $x=0$ là nghiệm của phương trình: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow m=-3$ khi $m=-3$ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có 2 cực trị: $x=0;x=-\dfrac{5}{6}$.

Khi đó hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ có 1 điểm cực trị: $x = 0$, loại $m = -3$.

+) Trường hợp 3: $m \neq 1$ Hàm số $y = f\left(x\right) = \left(m-1\right)x^3 - 5x^2 + \left(m+3\right)x + 3$ có 2 cực trị thỏa $x_1 < 0 < x_2$. Khi đó phương trình $f'\left(x\right) = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $\left(m-1\right)\left(m+3\right) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 7: Xét các số thực $c > b > a > 0$. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

A. 3. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $h\left(x\right) = f\left(x^3\right)$.

Ta có $h'\left(x\right) = 3x^2.f'\left(x^3\right)$.

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có: $h'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 = a \\ x^3 = b \\ x^3 = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{a} \\ x = \sqrt[3]{b} \\ x = \sqrt[3]{c} \end{array}\right.$.

Ta thấy, dấu của hàm số $h'\left(x\right)$ chính là dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$.

Mặt khác hàm số $y = x^3$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên dấu của hàm số $f'\left(x^3\right)$ trên mỗi khoảng $\left(m;n\right)$ chính là dấu của hàm số $f'\left(x\right)$ trên mỗi khoảng $\left(m^3;n^3\right)$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $h\left(x\right)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↘		↗	

Chú ý rằng $g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ h(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Do đó từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ ta suy ra được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{c}$		$-\sqrt[3]{b}$		$-\sqrt[3]{a}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↗		↘		↗		↘		↘		↗	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là 5.