HỆ THỨC VIET VÀ ỨNG DỤNG

A. Lý thuyết

1. Hệ thức Viét

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$. Nếu x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình thì: $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ và $P=x_1.x_2=\frac{c}{a}$

2. Ứng dụng của hệ thức Viét

a) Nhẩm nghiệm

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)$

- Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1=1$, nghiệm còn lại là $x_2=\frac{c}{a}$

- Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1=-1$, nghiệm còn lại là $x_2=\frac{-c}{a}$

b) Tìm hai số biết tổng và tích của chúng:

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$.

c) Xác định dấu của nghiệm

Phương trình $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1,x_2

+ Nếu $P=x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu

+ Nếu $P=x_1x_2=\frac{c}{a}>0$ và $S=x_1+x_2>0$ thì phương trình có hai nghiệm dương

+ Nếu $P=x_1x_2=\frac{c}{a}>0$ và $S=x_1+x_2<0$ thì phương trình có hai nghiệm âm

*) Chú ý: Để áp dụng hệ thức Viét phải chú ý đến điều kiện phương trình là phương trình bậc hai có nghiệm $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}$

Dạng 1: Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Cách giải: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm là $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}$

Từ đó áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

Bước 2: Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2

Sau đó áp dụng bước 1

Chú ý: Một số biểu thức đối xứng giữa các nghiệm thường gặp là

+) $A = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = S^2 - 2P$

+) $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = S^2 - 4P$

+) $|a-b| = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{S^2 - 4P}$

+) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{S}{P}$

+) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = S^3 - 3SP$

+) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

Bài 1:

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a. $A = x_1^2 + x_2^2$

b. $B = x_1^3 + x_2^3$

c. $C = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$

d. $D = |x_1 - x_2|$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$

a) Ta có: $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2.3 = 19$

b) Ta có: $B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 80$

c) Ta có: $C = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^4} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^4} = \frac{343}{81}$

d) Ta có $D = |x_1 - x_2| \Rightarrow D^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

$= (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 \Rightarrow D = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{13}$

Bài 2:

Cho phương trình $-3x^2 - 5x - 2 = 0$. Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a. $M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2$

b. $N = \frac{1}{x_1+3} + \frac{1}{x_2+3}$

c. $P = \frac{x_1-3}{x_1^2} + \frac{x_2-3}{x_2^2}$

c. $Q = \frac{x_1}{x_2+2} + \frac{x_2}{x_1+2}$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 25 - 4.3.2 = 1 > 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng hệ thức Viet ta có $x_1 + x_2 = \frac{-5}{3}; x_1x_2 = \frac{2}{3}$

a) Ta có: $M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2 = (x_1+x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \Rightarrow M = \frac{-25}{6}$

b) Ta có: $N = \frac{1}{x_1+3} + \frac{1}{x_2+3} = \frac{x_1+x_2+6}{x_1x_2 + 3(x_1+x_2) + 9} \Rightarrow N = \frac{13}{14}$

c) Ta có: $P = \frac{x_1-3}{x_1^2} + \frac{x_2-3}{x_2^2} = \frac{x_1x_2^2 - 3x_2^2 + x_1^2x_2 - 3x_1^2}{(x_1x_2)^2} \Rightarrow P = \frac{-49}{4}$

d) Ta có: $Q = \frac{x_1}{x_2+2} + \frac{x_2}{x_1+2} = \frac{x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4} \Rightarrow Q = \frac{-17}{12}$

Bài 3:

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 5x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a. $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$

b. $B = x_1^4 + x_2^4$

c. $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

d. $D = |x_1 - x_2|$

Lời giải

a) Ta có $\Delta = 29 > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, theo định lý Viet, ta có:

$x_1 + x_2 = 5; x_1.x_2 = -1 \Rightarrow A = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1+x_2) = 5^2 - 2(-1) - 5 = 22$

b) $B = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2 = 727$

c) $C = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]}{(x_1x_2)^3} = -140$

d) $D = |x_1 - x_2| \Rightarrow D^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 29 \Rightarrow D = \sqrt{29}(D \ge 0)$

Bài 4:

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 1 = 0$. Tính giá trị của các biểu thức sau

a. $A = x_1^2 + x_2^2$

b. $B = x_1^3(x_1 - 1) + x_2^3(x_2 - x_1)$

c. $C = \left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right|$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, theo định lý Viet, ta có:

$x_1 + x_2 = 3; x_1.x_2 = -1; x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2(-1) = 11$

b) $B = x_1^3(x_1 - 1) + x_2^3(x_2 - x_1) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1^3 + x_2^3) = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 - (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$

$= 11^2 - 2 - 3(11 + 1) = 83$

c. $C = \left|\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right| = \frac{|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)|}{x_1^2x_2^2} = \frac{\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|.3}{1} = 3\sqrt{13}$

Bài 5:

Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

b) Với m vừa tìm được ở trên, tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

Lời giải

a) Ta có: $\Delta' = (m - 3)^2 \ge 0 \forall m \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m khi $m \ne 3$

b) Áp dụng hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 4 \\ x_1x_2 = 2m - 5 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$

Vậy biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m là: $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$.

Bài 6:

Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + 2m = 0$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2? Khi đó, hãy tìm biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m.

Lời giải

Ta có: $\Delta = (m+2)^2 - 8m = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0 \forall m \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m khi $m \neq 2$

Biểu thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m là $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -4$

Bài 7: Tuyển sinh vào 10 HCM, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0 \quad (1)$ (x là ẩn số)

a. Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu

b. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \dfrac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$

Lời giải

a. Ta có $ac = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu

b. Ta có x_1 là nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow x_1^2 - mx_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 1 = mx_1$

Tương tự ta có $x_2^2 - 1 = mx_2 \Rightarrow A = \dfrac{(m+1)x_1}{x_1} - \dfrac{(m+1)x_2}{x_2} = 0$

Vậy $A = 0$.

Bài 8: Tuyển sinh vào 10 Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng, năm học 2014 - 2015

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2013x + 2 = 0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2014x + 2 = 0$. Tính $A = (x_1 + x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 - x_4)$

Lời giải

Ta có $\Delta_1, \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ hai phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Theo định lý Viet ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2013 \\ x_1.x_2 = 2 \end{cases}; \begin{cases} x_3 + x_4 = -2014 \\ x_3.x_4 = 2 \end{cases}; (x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_1^2 + x_1(x_3 + x_4) + x_3x_4 = x_1^2 - 2014x_1 + 2$

Lại có: $x_1^2 + 2013x_1 + 2 = 0 \to x_1^2 + 2 = -2013x_1 \to (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -4027x_1$

+) $(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) = x_2^2 - x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = x_2^2 + 2014x_2 + 2 = x_2(do : x_2^2 + 2013x_2 + 2 = 0)$

$\Rightarrow A = -4027x_1x_2 = -8054$

Bài 9:

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 2 = 0$ (x là ẩn số) (1)

a. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

b. Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2. Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + 2(m+1)x_2 + 2m - 2$

Lời giải

a. $\Delta' = m^2 + 3 > 0 \forall m$

b. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có:

$x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 2m - 2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2m - 2 = 2(m+1)x_1$

$\Rightarrow A = 2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2 = 2(m+1)(x_1 + x_2) = 4(m+1)^2$

Bài 10: Chuyên Toán Hà Tĩnh, năm học 2014 - 2015

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Không giải phương trình. chứng minh rằng $P(x_1) = P(x_2)$ với $P(x) = 3x - \sqrt{33x + 25}$

Lời giải

Dễ thấy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 1; x_1.x_2 = -1$

Ta có: $P(x_1) = P(x_2) \leftrightarrow 3x_1 - \sqrt{33x_1 + 25} = 3x_2 - \sqrt{33x_2 + 25}$

$\Leftrightarrow 3(x_1 - x_2) - (\sqrt{33x_1 + 25} - \sqrt{33x_2 + 25}) = 0$

$\Leftrightarrow 3(x_1 - x_2) - \dfrac{33(x_1 - x_2)}{\sqrt{33x_1 + 25} + \sqrt{33x_2 + 25}} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{11}{\sqrt{33x_1 + 25} + \sqrt{33x_2 + 25}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{33x_1 + 25} + \sqrt{33x_2 + 25} = 11$

$\Leftrightarrow (\sqrt{33x_1+25}+\sqrt{33x_2+25})^2 = 121 \Leftrightarrow 33(x_1+x_2)+50+2\sqrt{(33x_1+25)(33x_2+25)} = 121(*)$

$\text{VT}(*) = 33.1+50+2\sqrt{33^2x_1x_2+33.25(x_1+x_2)+25^2} = 83+2\sqrt{-33^2+2533+25^2}$

$= 83+2\sqrt{361} = 83+83 = 121 = VP$.

Bài 11: Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2-2x+2-m=0$ (1) (m là tham số)

a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2x_2^2+3(x_1^2+x_2^2)-4$

Lời giải

a. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1-(2-m) = m-1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$

b. Với $m \geq 1 \Rightarrow x_1+x_2 = 2; x_1.x_2 = 2-m$

Khi đó $A = x_1^2x_2^2+3(x_1^2+x_2^2)-4 = x_1^2x_2^2+3(x_1+x_2)^2-6x_1x_2-4 = (2-m)^2+3.2^2-6(2-m)-4$

$= (2-m)^2-6(2-m)+9-1 = (2-m-3)^2-1 = (m+1)^2-1$

Do $m \geq 1 \to (m+1)^2 \geq 2^2 = 4 \Rightarrow A \geq 4-1 = 3 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow A_{\min} = 3$

Bài 12: Chuyên Toán Lào Cai, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2-2mx+2-m=0$ (1) (m là tham số)

a. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Tìm m để biểu thức $M = \dfrac{-24}{2mx_1+x_2^2-6x_1x_2-m+2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a. Ta có: $\Delta' = m^2-(m-2) = m^2-m+2 = (m-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4} > 0, \forall m$

b. Theo Viet, ta có: $x_1+x_2 = 2m; x_1.x_2 = m-2$

Do x_2 là nghiệm của (1) nên $x_2^2-2mx_2+m-2=0 \to x_2^2 = 2mx_2-m+2$

Do đó $2mx_1+x_2^2-6x_1x_2-m+2 = 2m(x_1+x_2)-6x_1x_2-2m+4 = 2m.2m-6(m-2)-2m+4$

$= 4m^2 - 8m + 16 = 4(m-1)^2 + 12 \geq 12 \Rightarrow M \geq \frac{-24}{12} = -2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$

Dạng 2: Giải phương trình bằng phương pháp nhẩm nghiệm

Cách giải: Sử dụng ứng dụng của hệ thức Vi-ét

Bài 1:

Xét tổng $a+b+c$ hoặc $a-b+c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau

a) $15x^2 - 17x + 2 = 0$

b) $1230x^2 - 4x - 1244 = 0$

c) $\left(2-\sqrt{3}\right)x^2 + 2\sqrt{3}x - \left(2+\sqrt{3}\right) = 0$

d) $\sqrt{5}x^2 - \left(2-\sqrt{5}\right)x - 2 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a+b+c = 15 - 17 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{15}$

b) Ta có: $a-b+c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{1234}{1230}$

c) Ta có: $a+b+c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -7 - 4\sqrt{3}$

d) Ta có: $a-b+c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Bài 2:

Xét tổng $a+b+c$ hoặc $a-b+c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau

a) $7x^2 - 9x + 2 = 0$

b) $23x^2 - 9x - 32 = 0$

c) $1975x^2 + 4x - 1979 = 0$

d) $31,1x^2 - 50,9x + 19,8 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $a+b+c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{7}$

b) Ta có: $a-b+c = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{32}{23}$

c) Ta có: $a+b+c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{-1979}{1975}$

d) Ta có: $a+b+c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{198}{311}$

Bài 3:

Cho phương trình $(m-2)x^2-(2m+5)x+m+7=0$ với m là tham số

a) Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào tham số m

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m

Lời giải

a) Ta có: $a+b+c=(m-2)+(-2m-5)+m+7=0 \Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm $x=1$ không phụ thuộc vào m

b) Với $m=2$ phương trình có một nghiệm $x=1$

Với $m\neq 2$ phương trình có hai nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{m+7}{m-2}$.

Bài 4:

Cho phương trình $(2m-1)x^2-(m-3)x-6m-2=0$ với m là tham số

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm $x=-2$

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số m.

Lời giải

a) Thay $x=-2$ vào phương trình đã cho, ta có: $(2m-1)(-2)^2+(m-3)(-2)-6m-2=0$ (đúng). Vậy $x=-2$ là nghiệm của phương trình.

b) Với $m=\dfrac{1}{2}$: phương trình chỉ có một nghiệm $x=-2$

Với $m\neq\dfrac{1}{2}$: phương trình có hai nghiệm $x\in\left\{-2;\dfrac{3m+1}{2m-1}\right\}$.

Bài 5:

Cho phương trình $mx^2-3(m+1)x+m^2-13m-4=0$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm là $x=-2$. Tìm nghiệm còn lại

Lời giải

Thay $x=-2$ vào phương trình ta tìm được $m=1$ hoặc $m=2$

- Với $m=1$, ta có: $x^2-6x-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8\\x=-2\end{array}\right.$

- Với $m=2$, ta có: $2x^2-9x-26=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{13}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.$

Dạng 3: Tìm hai số khi biết tổng và tích

Cách giải: Để tìm hai số x, y khi biết tổng $S=x+y$ và tích $P=xy$, ta làm như sau

Bước 1: Giải phương trình $X^2-SX+P=0$ để tìm các nghiệm X_1, X_2

Bước 2: Khi đó các số x, y cần tìm là $x=X_1; y=X_2$ hoặc $x=X_2; y=X_1$

Bài 1:

Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u+v=15; uv=36$

b) $u^2+v^2=13; uv=6$

Lời giải

a) Ta có u, v là hai nghiệm của phương trình sau $X^2-15X+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=12 \\ X=3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow (u;v) \in \{(12;3);(3;12)\}$

b) Ta có $(u+v)^2=u^2+v^2+2uv=13+2.6=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=5 \\ u+v=-5 \end{array}\right.$

- Với $u+v=5$ ta có u, v là hai nghiệm của phương trình sau $X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=3 \end{array}\right.$

- Với $u+v=-5$ ta có u, v là hai nghiệm của phương trình sau $X^2+5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-2 \\ X=-3 \end{array}\right.$

Vậy $(u;v) \in \{(2;3);(3;2);(-2;-3);(-3;-2)\}$.

Bài 2:

Tìm hai số biết:

a. Tổng bằng 4 và tích bằng 1

b. Tổng bằng 6 và tích bằng 9

Lời giải

a. Hai số ần tìm là nghiệm của phương trình: $X^2-4X+1=0 \Leftrightarrow x_1=2+\sqrt{5}; x_2=2-\sqrt{5}$

b. Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình: $X^2-6X+9=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=3$

Bài 3:

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2+\sqrt{3}$ và $2-\sqrt{3}$

Lời giải

a) Ta có: $\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4;\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$.

Do đó $2+\sqrt{3}$ và $2-\sqrt{3}$ là hai nghiệm của phương trình sau: $X^2-4X+1=0$

Bài 4:

Tìm phương trình bậc hai biết nó nhận 7 và -11 là nghiệm.

Lời giải

Ta có phương trình cần lập là $X^2+4X-77=0$.

Bài 5:

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-x-1=0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là

a. $x_1+1;x_2+1$

b. $x_1^2+x_2;x_2^2+x_1$

c. $\dfrac{x_1}{x_2};\dfrac{x_2}{x_1}$

d. $\dfrac{x_2+1}{x_1};\dfrac{x_1+1}{x_2}$

Lời giải

Ta có $ac=-1<0\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Theo Viet ta có: $x_1+x_2=1;x_1.x_2=-1$

a. Có: $(x_1+1)+(x_2+1)=x_1+x_2+1+1=3;(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=-1+1+1=1$

$\Rightarrow x_1+1;x_2+1$ là nghiệm của phương trình $x^2-3x+1=0$

b. $(x_1^2+x_2)+(x_2^2+x_1)=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_1+x_2=4$

$(x_1^2+x_2)(x_2^2+x_1)=x_1^2x_2^2+x_1^3+x_2^3+x_1x_2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=4$

$\Rightarrow x_1^2+x_2;x_2^2+x_1$ là nghiệm của phương trình $x^2-4x+4=0$

c. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+x_2+x_1}{x_1x_2}=-4$

$\dfrac{x_2+1}{x_1}.\dfrac{x_1+1}{x_2}=\dfrac{x_1x_2+x_1+x_2+1}{x_1x_2}=-1\Rightarrow\dfrac{x_1}{x_2};\dfrac{x_2}{x_1}$ là nghiệm của phương trình $x^2+4x-1=0$

Bài 6:

Cho phương trình $x^2+5x-3m=0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a), hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$

Lời giải

a) Ta có: $\Delta=25+12m\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{-25}{12}$

b) Ta có: $S=\frac{2}{x_1^2}+\frac{2}{x_2^2}=\frac{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{50+12m}{9m^2}$ và $P=\frac{2}{x_1^2}.\frac{2}{x_2^2}=\frac{4}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{4}{9m^2}$

Với điều kiện: $0\ne m\ge\frac{-25}{12}$ thì ta có $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai sau:

$X^2-\frac{50+12m}{9m^2}X+\frac{4}{9m^2}=0\Leftrightarrow 9m^2X^2-2\left(6m+25\right)X+4=0$.

Bài 7:

Cho phương trình $3x^2+5x-m=0$ (m là tham số)

a) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm là x_1 và x_2

b) Với điều kiện m tìm được ở câu a) hãy viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_1}{x_2+1}$ và $\frac{x_2}{x_1+1}$

Lời giải

a) Điều kiện của m là: $m\ge\frac{-25}{12}$

b) Phương trình cần lập là: $X^2+\frac{10+6m}{3m+6}X+\frac{m}{m+2}=0\left(-2\ne m\ge\frac{-25}{12}\right)$

Bài 8:

1. Cho $a=\sqrt{11+6\sqrt{2}},b=\sqrt{11-6\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng a,b là hai nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số nguyên

2. Cho $c=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}, d=\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}, CMR: c^2, d^2$ là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số nguyên.

Lời giải

1. Ta có $a+b=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=6; ab=\sqrt{121-72}=7$

Vậy a, b là hai nghiệm của phương trình: $x^2-6x+7=0 (dpcm)$

2. $c^2=\sqrt[3]{20+120\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3})^3}=4+2\sqrt{3}; b^2=\sqrt{(4-2\sqrt{3})^3}=4-2\sqrt{3}$

$\rightarrow c^2+d^2=8; c^2.d^2=16-12=4\rightarrow x^2-8x+4=0$

Bài 9:

Cho phương trình: $x^2-mx+9=0$ (m là tham số)

a. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm kép

b. Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm là hai số $\frac{x_1}{x_2}; \frac{x_2}{x_1}$

Lời giải

a) $\Delta=m^2-36=0\Leftrightarrow m=\pm 6$

b) Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta>0\Leftrightarrow m^2-36>0\Leftrightarrow |m|>6\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1.x_2=9 \end{cases}$

Ta có: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{m^2-18}{9}; \frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_1}=1$

Vậy hai nghiệm là nghiệm của phương trình: $x^2-\frac{m^2-18}{9}x+1=0$

Bài 10:

Cho a và b là hai số thỏa mãn đẳng thức $a^2+b^2+3ab-8a-8b-2\sqrt{3ab}+19=0(1)$

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm a và b.

Lời giải

Ta có $(1)\Leftrightarrow (a+b)^2-8(a+b)+16+ab-2\sqrt{3ab}+3=0\Leftrightarrow (a+b-4)^2+(\sqrt{ab}-\sqrt{3})^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-4=0 \\ \sqrt{ab}-\sqrt{3}=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}\Rightarrow x^2-4x+3=0.$

Bài 11:

Tìm hai số x và y, biết:

a. Tổng của chúng bằng 4 và tổng bình phương bằng 10

b. Tổng của chúng bằng 3 và tổng lập phương bằng 9

c. Tích của chúng bằng 2 và tổng lập phương bằng – 9

d. Tích của chúng bằng -2, tổng lập phương bằng -7

Lời giải

a. $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ (x+y)^2-2xy=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow a^2-4a+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=3 \end{array}\right.$

Vậy hai số cần tìm là 1 và 3.

b. $\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+y^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2 \end{array}\right.$

c. $\begin{cases} xy=2 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=2 \\ (x+y)^3-6(x+y)+9=0 \end{cases}$

Đặt $(x+y)^3-6(x+y)+9=0 \Leftrightarrow m^3-6m+9=0 \Leftrightarrow (m+3)(m^2-3m+3)=0 \Leftrightarrow m=-3 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$

$\Rightarrow A^2+3A+2=0 \Rightarrow x_1=-1; x_2=-2$

d. $\begin{cases} xy=-2 \\ x^3+y^3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^3+6(x+y)+7=0(*) \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow S^3+6S+7=0 \Leftrightarrow S=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow A^2+A-2=0 \Leftrightarrow x=1; x=-2$

Bài 13:

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-4x+1=0$. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là:

a. $3x_1-2x_2; 3x_2-2x_1$

b. $x_1^2-x_2; x_2^2-x_1$

c. $\dfrac{x_1}{x_2+1}; \dfrac{x_2}{x_1+1}$

d. $\dfrac{x_2^2+x_1}{x_1}; \dfrac{x_1^2+x_2}{x_2}$

e. $x_2^2+5x_1+1; x_1^2+5x_2+1$

f. $|2x_1-x_2|; |2x_2-x_1|$

Lời giải

Ta có: $\Delta = 3 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$

a) $3x_1 - 2x_2 + 3x_2 - 2x_1 = x_1 + x_2 = 4; (3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1) = 13x_1x_2 - 6(x_1^2 + x_2^2) = 25x_1x_2 - 6(x_1 + x_2)^2 = -71$

Vậy ta được: $x^2 - 4x - 71 = 0$

b) $x_1^2 - x_2 + x_2^2 - x_1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 10$

$(x_1^2 - x_2)(x_2^2 - x_1) = x_1^2x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3) + x_1x_2 = 2 - (x_1 + x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -50$

Vậy ta được $x^2 - 10x - 50 = 0$

c. $\dfrac{x_1}{x_2 + 1} + \dfrac{x_2}{x_1 + 1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = 3$

$\dfrac{x_1}{x_2 + 1} . \dfrac{x_2}{x_1 + 1} = \dfrac{x_1x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \dfrac{1}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \dfrac{1}{6} \rightarrow x^2 - 3x + \dfrac{1}{6} = 0$

d. $\dfrac{x_2^2 + x_1}{x_1} + \dfrac{x_1^2 + x_2}{x_2} = \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} + 2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) + 2 = 54$

$\dfrac{x_2^2 + x_1}{x_1} . \dfrac{x_1^2 + x_2}{x_2} = \dfrac{(x_2^2 + x_1)(x_1^2 + x_2)}{x_1x_2} = x_1^2x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2 = 2 + (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 54$

$\Rightarrow x^2 - 54x + 54 = 0$

e. $x_2^2 + 5x_1 + 1; x_1^2 + 5x_2 + 1$

Ta có x_1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x_1^2 = 4x_1 - 1 \Rightarrow x_1^2 + 5x_2 + 1 = 4x_1 - 1 + 5x_2 + 1 = x_2 + 16$

Tương tự: $x_2^2 + 5x_1 + 1 = x_1 + 16$

Mà $(x_1 + 16) + (x_2 + 16) = x_1 + x_2 + 32 = 36; (x_1 + 16)(x_2 + 16) = x_1x_2 + 16(x_1 + x_2) + 16^2 = 321$

$\Rightarrow x^2 - 36x + 321 = 0$

f. $|2x_1 - x_2|.|2x_2 - x_1| = |5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2)| = |9x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2| = 23$

Đặt $a = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|, a \geq 0; a^2 = (2x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - x_1)^2 + 2|2x_1 - x_2|.|2x_2 - x_1|$

$= 5(x_1^2 + x_2^2)^2 - 8x_1x_2 + 46 = 5(x_1 + x_2)^2 - 18x_1x_2 + 46 = 108 \rightarrow a = 6\sqrt{3} \rightarrow x^2 - 6\sqrt{3}x + 23 = 0$

Dạng 4: Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Cách giải: Xét phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\ne 0\right)$. Khi đó:

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P<0$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\P>0\end{cases}$

3. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}$

4. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\S<0\\P>0\end{cases}$

5. Phương trình có hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases}P<0\\S<0\end{cases}$

***) Chú ý:** Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0$;

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$

Bài 1:

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a) $x^2-2\left(m-1\right)x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

b) $x^2-8x+2m+6=0$ có hai nghiệm phân biệt

c) $x^2-2\left(m-3\right)x+8-4m=0$ có hai nghiệm phân biệt âm

d) $x^2-6x+2m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương

e) $x^2-2\left(m-1\right)x-3-m=0$ có đúng một nghiệm dương

Lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0\Leftrightarrow m<-1$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=8^2-4\left(2m+6\right)>0\Leftrightarrow m<5$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng âm $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\S<0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-8m+4>0\\2\left(m-3\right)<0\\8-4m>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<2\\m\ne 1\end{cases}$

d) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 8m > 0 \\ 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} < m < 4$

e) Vì $\Delta = 4(m-1)^2 - 4(-3-m) = (2m-1)^2 + 15 > 0, \forall m \in Z \Rightarrow$ phương trình luôn cí hai nghiệm phân biệt

Phương trình có đúng một nghiệm dương $ac = -3 - m < 0 \Leftrightarrow m > -3$

Bài 2:

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình:

a) $2x^2 - 3(m+1)x + m^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

b) $3mx^2 + 2(2m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm

c) $x^2 + mx + +m - 1 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn m

d) $mx^2 - 2(m-2)x + +3(m-2) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -1 < m < 2$

b) Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \le -2 - \sqrt{3} \end{array}\right.$

c) Phương trình có hai nghiệm lớn hơn m $\Leftrightarrow m < -1$

d) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow -1 \le m < 0$

Bài 3: Tuyển sinh vào 10 Hải Phòng, năm học 2012 - 2013

Cho phương trình: $x^2 + mx - m - 1 = 0(1)$ (m là tham số)

a. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m

b. Tìm m để phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm không dương

Lời giải

a) Ta có $\Delta = (m+2)^2 \ge 0, \forall m \Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Phương trình có ít nhất 1 nghiệm không dương nên ta có các trường hợp sau:

+) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P = -m - 1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$

+) Phương trình có một nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow -m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

+) Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} S=-m<0 \\ P=-m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m<-1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy $m \geq -1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 4: Tuyển sinh vào 10 Chuyển Toán Long An, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2-x+m=0(1)$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1<x_2<2$

Lời giải

Cách 1: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{4}(*)$

Khi đó: $x_1<x_2<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2<0 \\ x_2-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2+x_2-2<0 \\ (x_1-2)(x_2-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-4<0 \\ x_1x_2-2(x_1+x_2)+4>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4<0 \\ m-2+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2$.

Kết hợp với (*) ta được: $-2<m<\frac{1}{4}$

Cách 2: Vì $x_2>x_1 \Rightarrow x_2=\frac{1+\sqrt{\Delta'}}{2} \Rightarrow x_1<x_2<2 \Leftrightarrow x_2<2 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{\Delta'}}{2}<2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'}<3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'}<9$

$\Leftrightarrow 1-4m<9 \Leftrightarrow m>-2$

Kết hợp với (*) ta được: $-2<m<\frac{1}{4}$

Bài 5: Tuyển sinh vào 10 Chuyển Toán Phú Yên, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^3-(2m+1)x^2+(2m^2-m+2)x-(2m^2-3m+2)=0$ (m là tham số).

Tìm m để phương trình có ba nghiệm dương phân biệt

Lời giải

Ta có $a+b+c=0$ nên phương trình có 1 nghiệm bằng 1

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2mx+2m^2-3m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-2mx+2m^2-3m+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow (2)$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ a+b+c \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-(2m^2-3m+2)>0 \\ 1-2m+2m^2-3m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2-5m+3\neq 0 \\ -m^2+3m-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1; m\neq \dfrac{3}{2} \\ 1<m<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \dfrac{3}{2} \\ 1<m<2 \end{cases}$ (*)

Hai nghiệm của pt(2) dương $\Leftrightarrow \begin{cases} S=2m>0 \\ P=2m^2-3m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0$ (**)

Vậy $m\neq \dfrac{3}{2}; 1<m<2$ là các giá trị cần tìm

Bài 6:

Tìm m để phương trình $(m^2+1)x^2+(2m^2+1)x+m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 (x_1<x_2)$ sao cho $x_2=x_1^2-\dfrac{3}{2}$

Lời giải

Có: $a+b+c=0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $x=-1; x=\dfrac{-m^2}{m^2+1}; \dfrac{-m^2}{m^2+1}>-1 \Rightarrow x_1=-1; x_2=\dfrac{-m^2}{m^2+1}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{m^2+1}=(-1)^2-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2m^2=m^2+1 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy $m=\pm 1$ là các giá trị cần tìm.

Bài 7:

Cho phương trình $mx^2-(2m+1)x+m-3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng âm

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow a\neq 0, \Delta>0, S<0, P>0$

+) $a\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$

+) $\Delta=16m+1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{-1}{16}$

+) $S=\dfrac{2m+1}{m}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m+1>0 \\ m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2m+1<0 \\ m>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>\dfrac{-1}{2} \\ m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<\dfrac{-1}{2} \; (vo.nghiem) \\ m>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2}<m<0$

+) $P>0 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<0 \end{array}\right.$

Vậy $\frac{-1}{16}<m<0$ là các giá trị cần tìm.

Dạng 5: Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước

Cách giải: Ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$

Bước 2: Từ hệ thức đã cho và hệ thức Viét, tìm được điều kiện của tham số

Bước 3: Kiểm tra điều kiện của tham số có thỏa mãn điều kiện ở bước 1 hay không rồi kết luận

Bài 1:

Cho phương trình $x^2-5x+m+4=0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

a) $|x_1|+|x_2|=4$

b) $3x_1+4x_2=6$

c) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-3$

d) $x_1(1-3x_2)+x_2(1-3x_1)=m^2-23$

Lời giải

Ta có: $\Delta=5^2-4(m+4)=9-4m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m<\frac{9}{4}$.

Theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=m+4 \end{cases}$

a) Ta có: $|x_1|+|x_2|=4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=16 \Rightarrow 2|m+4|=2m-1 \Leftrightarrow m \in \varnothing$

b) Ta có: $3x_1+4x_2=6 \Leftrightarrow 3(x_1+x_2)+x_2=6 \Rightarrow x_2=-9$

Vì $x_2=-9$ là nghiệm của phương trình nên ta có: $(-9)^2-5.(-9)+m+4=0 \Leftrightarrow m=-130$

c) Ta có: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=-3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2+x_1x_2=0 \Leftrightarrow m=-29$

d) Ta có: $x_1(1-3x_2)+x_2(1-3x_1)=m^2-23 \Leftrightarrow x_1+x_2-6x_1x_2=m^2-23 \Leftrightarrow m=-3 \pm \sqrt{13}$

Bài 2:

Cho phương trình $mx^2-2(m+1)x+2m+1=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn:

a. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2)$

b. $x_1^3+x_2^3=28$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=-m^2+m+1>0 \end{cases}$

Áp dụng hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(m+1)}{m} \\ x_1.x_2=\dfrac{2m+1}{m} \end{cases}$

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2)\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2)\Leftrightarrow(x_1+x_2)(x_1x_2-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1x_2=3 \end{array}\right.$

+) $x_1+x_2=0\Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn)

+) $x_1x_2=3\Leftrightarrow\frac{2m+1}{m}=3\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn)

b) $x_1^3+x_2^3=28\Leftrightarrow(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=28\Leftrightarrow 16m^3-3m^2-9m-4=0$

$\Leftrightarrow(m-1)(16m^2+13m+4)=0\Leftrightarrow m=1$

Vậy $m=1$

Bài 3: Tuyển sinh vào 10 Tây Ninh, năm học 2014 - 2015

Chứng minh rằng phương trình: $x^2-2(m+1)x+m-4=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và biể thức $M=x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào m

Lời giải

Ta có $\Delta'=m^2+m+5>0,\ \forall m$

Áp dụng hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1.x_2=m-4 \end{cases}$

Có $M=x_1-x_1x_2+x_2-x_1x_2=2m+2-2(m-4)=2m+2-2m+8=10\Rightarrow$ đpcm.

Bài 4: Tuyển sinh vào 10 Đà Nẵng, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2+2(m-2)x-m^2=0$ (m là tham số)

a. Giải phương trình khi $m=0$

b. Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với $x_1<x_2$, tìm tất cả các giá trị của m sao cho $|x_1|-|x_2|=6$

Lời giải

a) Khi $m=0$ ta tìm được $x=0$ hoặc $x=4$

b) Ta có $\Delta'=2(m-1)^2+2>0,\ \forall m$

Áp dụng hệ thức Viét ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=2(2-m) \\ P=x_1.x_2=-m^2\le 0 \end{cases}$

Vì $P\le 0 \Rightarrow x_1\le 0\le x_2 \Rightarrow |x_1|-|x_2|=6 \Leftrightarrow -x_1-x_2=6 \Leftrightarrow x_1+x_2=-6 \Leftrightarrow m=5$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Bài 5: Tuyển sinh vào 10 Long An, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2-2x+m=0$ (x là ẩn và m là tham số)

Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{-10}{3}$

Lời giải

Ta có $\Delta'>0 \Leftrightarrow m<1 \quad (*)$

Áp dụng hệ thức Viét ta có $S=x_1+x_2=2; P=x_1.x_2=m$

$A=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{-10}{3} \Leftrightarrow \frac{4-2m}{m}=\frac{-10}{3} \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm.

Bài 6: Tuyển sinh vào 10 Quảng Ninh, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2+x+m-5=0$ (x là ẩn và m là tham số)

a. Giải phương trình với $m=4$

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ne 0$ thỏa mãn:

$\frac{6-m-x_1}{x_2}+\frac{6-m-x_2}{x_1}=\frac{10}{3}$

Lời giải

b) Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1-4(m-5) > 0 \\ m-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{21}{4} \\ m \neq 5 \end{cases}$

Áp dụng hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1.x_2 = m-5 \end{cases}$

Ta có $\dfrac{6-m-x_1}{x_2} + \dfrac{6-m-x_2}{x_1} = \dfrac{10}{3} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow \dfrac{(6-m)x_1 + (6-m)x_2 - x_1^2 - x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{10}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(6-m)(x_1+x_2) - (x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = \dfrac{10}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(6-m)(x_1+x_2) - (x_1+x_2)^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3m-17}{m-5} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow m = -1$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài 7: Chuyên Toán Hải Dương, năm học 2013 - 2014

Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số).

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall m$

b. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0$

Lời giải

a. $\Delta' = (m-2)^2 + 2 > 0, \forall m$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của m

b. Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 2m-5 \end{cases}$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = -2x_1 + 4$

Tương tự: $x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1 = -2x_2 + 4 \Leftrightarrow (x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0$

$\Leftrightarrow (-2x_1 + 4)(-2x_2 + 4) < 0 \Leftrightarrow 4\left[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4\right] < 0 \Leftrightarrow 2m - 5 - 2.2(m-1) + 4 < 0$

$\Leftrightarrow -2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{2}$

Bài 8:

Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m=0$ (m là tham số)

a. Giải phương trình với $m=1$

b. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

c. Gọi hai nghiệm của (1) là x_1,x_2. Tìm giá trị của m để x_1,x_2 là độ dài hai cạnh của 1 tam giác vuông có cạnh huyền $=\sqrt{2}$

Lời giải

c) Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1.x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+1)>0 \\ 2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0$ (*)

Vì x_1,x_2 là độ dài hai cạnh của 1 tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$ nên ta có

$$x_1^2+x_2^2=12 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\ (TM) \\ m=-2\ (KTM) \end{array}\right.$$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 9: Chuyên Toán Hà Tĩnh, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $mx^2-2(m-2)x+m^2-2m+2=0$ (m là tham số)

a. Giải phương trình với $m=-1$

b. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn:

$|2(x_1+x_2)+x_1x_2|=3$

Lời giải

a) Với $m=-1$ tìm được $x_1=-1; x_2=-5$

b) Ta có $\Delta'=(m-2)^2-m(m^2-2m+2)$

Để phương trình có hai nghiệm nghiệm phân biệt thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow m<1$ (*)

Áp dụng hệ thức Viét ta có $x_1+x_2=2(m-2);\ x_1x_2=\dfrac{m^2-2m+2}{m}$

Ta có $|2(x_1+x_2)+x_1x_2|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1; m=-3 \\ m=-1\pm\sqrt{10} \end{array}\right.$

Kết hợp với (*), ta được: $m=-3; m=-1-\sqrt{10}$

Bài 10: Chuyên Hùng Vương Bình Dương, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $mx^2+x+m-1=0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|>1$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm $x_1,x_2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta>0 \\ m-1\neq 0 (x_1.x_2\neq 0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -4m^2+4m+1>0 \\ m\neq 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -4m^2+4m+1>0 \\ m\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0; m\neq 1 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{2}}{2} (*)\end{cases}$$

Theo định lý Viet ta có $x_1+x_2=-1; x_1x_2=\frac{m-1}{m}$

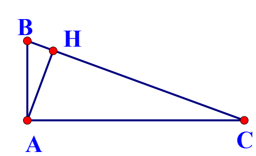
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|>1 \Leftrightarrow |x_1+x_2|>|x_1.x_2| \Leftrightarrow \frac{1}{|m|}>\left|\frac{m-1}{m}\right| \Leftrightarrow |m-1|<1 \Leftrightarrow 0<m<2$$

Kết hợp với (*) ta được: $0<m<\frac{1+\sqrt{2}}{2}; m\neq 1$

Bài 11: Chuyên KonTum, năm học 2014 - 2015

Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH (H thuộc BC), biết độ dài hai cạnh góc vuông là các nghiệm của phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+1$. Tìm giá trị của tham số m để độ dài đoạn $AH=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải



Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1=1; x_2=2m+1$

Ta có x_1,x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông khi: $2m+1>0 \Leftrightarrow m>\frac{-1}{2}$

Có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} \Rightarrow 2x_1^2x_2^2=x_1^2+x_2^2 \Leftrightarrow 2(2m+1)^2=1+(2m+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \quad (TM) \\ m=-1 \ (KTM)\end{array}\right.$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 12: Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $2013x^2-(m-2014)x-2015=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $\sqrt{x_1^2+2014}-x_1=\sqrt{x_2^2+2014}+x_2$

Lời giải

Ta có: $ac=-2015.2013<0\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Ta có: $\sqrt{x_1^2+2014}-x_1=\sqrt{x_2^2+2014}+x_2\Leftrightarrow\sqrt{...}-\sqrt{...}+x_1+x_2=0\Leftrightarrow\dfrac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{x_2^2+...}+\sqrt{x_1^2+..}}+x_2+x_1=0$

$$\Leftrightarrow(x_2+x_1)\left(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2^2+2014}+\sqrt{x_1^2+2014}}+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\x_2-x_1+\sqrt{x_2^2+2014}+\sqrt{x_1^2+2014}=0(*)\end{array}\right.$$

+) $x_1+x_2=0\Leftrightarrow\dfrac{m-2014}{2013}=0\Leftrightarrow m=2014$

+) $\sqrt{x_2^2+2014}+\sqrt{x_1^2+2014}>\sqrt{x_2^2}+\sqrt{x_1^2}=|x_2|+|x_1|\geq-x_2+x_1\Rightarrow\sqrt{x_2^2+...}+\sqrt{x_1^2+...}+x_2-x_1>0$

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy $m=2014$ là giá trị cần tìm.

Bài 13: Chuyên Toán Bình Phước, năm học 2013 - 2014

Cho phương trình: $x^2-4x+2m-3$ (1) (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\sqrt{3}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})=\sqrt{x_1x_2+17}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-2m+3>0\\4>0\\2m-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\leq m<\dfrac{7}{2}\Rightarrow Viet:\begin{cases}x_1+x_2=4\\x_1.x_2=2m-3\end{cases}$

$$\sqrt{3}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})=\sqrt{x_1x_2+17}\Leftrightarrow3(x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2})=x_1x_2+17\Leftrightarrow3(4+2\sqrt{2m-3})=2m-3+17$$

$$\Leftrightarrow6\sqrt{2m-3}=2m+2\Leftrightarrow3\sqrt{2m-3}=m+1\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq-1\\9(2m-3)=m^2+2m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq-1\\\left[\begin{array}{l}m=2\\m=14\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy m = 2 là giá trị cần tìm.

Bài 14: Phổ thông Năng Khiếu HCM, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $\dfrac{mx^2+(m-3)x+2m-1}{x+3}=0 \quad (1)$

a. Giải phương trình khi $m=-1$

b. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $21x_1+7m(2+x_2+x_2^2)=58$

Lời giải

b) Với $x\neq -3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow mx^2+(m-3)x+2m-1=0 \quad (2)$

(1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 khi (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta>0 \\ f(-3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -7m^2-2m+9>0 \\ 8m+8\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1 \\ \dfrac{-9}{7}<m<1(*) \end{cases}$$

Vì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình nên ta có: $mx_2^2+(m-3)x_2+2m-1=0 \Rightarrow m(x_2^2+x_2+3)=3x_2+1$

Do đó: $21x_1+7m(2+x_2+x_2^2)=58 \Leftrightarrow 21x_1+7(3x_2+1)=58 \Leftrightarrow 21(x_1+x_2)=51$

$$\Leftrightarrow m=\frac{7}{8}(tm*) \Rightarrow m=\frac{7}{8}.$$

Bài 15:

Cho phương trình $x^2+(m-1)x+5m-6=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện:

a) $x_1-x_2=2$ b) $4x_1+3x_2=1$

c) $x_1<1; x_2<1$

Lời giải

Ta có $\Delta=(m-1)^2-4(5m-6)=m^2-22m+25$

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow m^2-22m+25\geq 0$

$$\Leftrightarrow (m-11)^2-96\geq 0 \Leftrightarrow |m-11|\geq 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 4\sqrt{6}+11 \\ m\leq -4\sqrt{6}+11 \end{array}\right. \quad (1)$$

Theo định lí Viét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=5m-6 \end{cases}$

a) Ta có $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(1-m)^2-4(5m-6)=m^2-22m+25=2^2$

$\Rightarrow m^2-22m+21=0 \Leftrightarrow (m-1)(m-21)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=21 \end{array}\right.$ (thỏa mãn 1)

b) Ta có $4x_1+3x_2=1=x_1+3(x_1+x_2)=x_1+3(1-m)=1 \Rightarrow x_1=3m-2$

$\Rightarrow x_2=1-m-3m+2=-4m+3$

Mà $x_1x_2=5m-6 \Leftrightarrow (3m-2)(-4m+3)=5m-6$

$\Leftrightarrow -12m^2+9m+8m-6=5m-6 \Leftrightarrow -12m^2+12m=0 \Leftrightarrow 12m(m-1)=0 \Leftrightarrow m\in\{0;1\}$

Vậy $m\in\{0;1\}$.

Bài 16:

Cho phương trình $x^2-mx-m-1=0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình

a) Có một nghiệm bằng 5. Tìm nghiệm còn lại

b) Có hai nghiệm phân biệt

c) Có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương

d) Có hai nghiệm cùng dấu

e) Có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=-1$

g) Có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\ge 3$

Lời giải

Ta có: $\Delta=m^2+4m+4=(m+2)^2$

a) Ta tìm được $m=4; x_2=-1$

b) Tìm được $\begin{cases} m<-1 \\ m\ne -2 \end{cases}$

c) Tìm được $-1<m<0$

d) Tìm được $\begin{cases} m<-1 \\ m\ne -2 \end{cases}$

e) Tìm được $m=-1$

f) Tìm được $\begin{cases} m\ge -1 \\ m\le -5 \end{cases}$

Dạng 6: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

Bài 1: Chuyên Toán Quảng Bình, năm học 2012 - 2013

Cho phương trình $x^2-2x+4a$ (x là ẩn số). Giả sử hai nghiệm x_1,x_2 của phương trình là số đo hai cạnh góc vuông của 1 tam giác vuông

a. Tìm các giá trị của a để diện tích của tam giác vuông bằng $\frac{1}{3}$

b. Tìm GTNN của $A=x_1x_2+\frac{4}{x_1x_2}$

Lời giải

a. Điều kiện: $\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ x_1x_2>0\\ x_1+x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-4a\ge 0\\ 4a>0\\ 2>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a\le\frac{1}{4}$

x_1,x_2 của phương trình là số đo hai cạnh góc vuông của 1 tam giác vuông $\Rightarrow\frac{1}{2}x_1x_2=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}.4a=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=\frac{1}{6}(tm)$

b. $A=x_1x_2+\frac{4}{x_1x_2}=4a+\frac{1}{a}=4a+\frac{1}{4a}+\frac{3}{4a}$

Ta có: $4a+\frac{1}{a}\ge 2;\frac{3}{4a}\ge 3\Rightarrow A\ge 5; A=5\Leftrightarrow\begin{cases}4a=\frac{1}{4a}\\ a=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}(tm)$

Bài 2: Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2-2x+2-m=0$ (1) (m là tham số).

a. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b. Giả sử x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm GTNN của $A=x_1^2+x_2^2+3(x_1^2+x_2^2)-4$

Lời giải

a. $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$

b. Với $m\ge 1\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm x_1,x_2

Theo định lý Viet, ta có: $x_1+x_2=2; x_1.x_2=2-m$

$A=x_1^2x_2^2+3(x_1+x_2)^2-6x_1x_2-4=(2-m)^2+3.2^2-6(2-m)-4$

$=(2-m)^2-6(2-m)+9-1=(2-m-3)^2-1=(m+1)^2-1$

Do $m\ge 1\Rightarrow (m+1)^2\ge 2^2\Rightarrow A\ge 3\Leftrightarrow m=1\Rightarrow \min A=3\leftrightarrow m=1$

Bài 3: Chuyên Toán Lào Cai, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình: $x^2-2mx+m-2=0$ (1) (x là ẩn số)

a. Chứng minh rằng (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b. Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm m để biểu thức $A=\dfrac{-24}{2mx_1+x_2^2-6x_1x_2-m+2}$ đạt GTNN

Lời giải

a. $\Delta'=m^2-m+2=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0\forall m$

b. Theo định lý Viet, ta có: $x_1+x_2=2m; x_1.x_2=m-2$

Do x2 là nghiệm của phương trình (1) nên: $x_2^2-2mx_2+m-2=0(1)\Rightarrow x_2^2=2mx_2-m+2$

Do đó: $2mx_1+x_2^2-6x_1x_2-m+2=2m(x_1+x_2)-6x_1x_2-2m+4=4m^2-8m+16=4(m-1)^2+12\ge 12$

$\Rightarrow \dfrac{24}{4(m-1)^2+12}\le\dfrac{24}{12}\Rightarrow\dfrac{-24}{4(m-1)^2+12}\ge\dfrac{-24}{12}=-2\leftrightarrow m=1$

Bài 4: Tuyển sinh vào 10 TPHCM, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2-5mx+4m=0(1)$ (x là ẩn số)

a. Tìm m để phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

b. Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Tìm m để biểu thức $A=\dfrac{m^2}{x_1^2+5mx_2-12m}+\dfrac{x_2^2+5mx_1-12m}{m^2}$ đạt GTNN

Lời giải

a. $\Delta=25m^2-16m>0\Leftrightarrow m(25m-16)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0\\ m>16/25(*)\end{array}\right.$

b. Vì x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có: $x_1^2-5mx_1+4m=0\Rightarrow x_1^2=5mx_1-4m$

Do đó: $x_1^2+5mx_2-12m=5m(x_1+x_2)-16m=25m^2-16m$

Tương tự: $x_2^2+5mx_1-12m=25m^2-16m \Rightarrow A=\dfrac{m^2}{25m^2-16m}+\dfrac{25m^2-16m}{m^2}$

Do $25m^2-16m>0,$ áp dụng bất đẳng thức côsi, ta được: $A\ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{m}{25-16m}=\dfrac{25-16m}{m}$

$\Leftrightarrow m^2=(25m-16)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=25m-16 \\ m=-25m+16\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2/3 \\ m=8/13(loai)\end{array}\right.$. Vậy $m=\dfrac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 5:

Tìm m để phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+1=0$ có nghiệm x_1,x_2 sao cho biểu thức

$A=x_1(x_1-x_2)+x_2^2$ đạt GTNN

Lời giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=2m\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 0$

Khi đó theo Viet, ta có: $x_1+x_2=2(m+1); x_1.x_2=m^2+1$

$\Rightarrow A=x_1^2+x_2^2-x_1x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=4(m+1)^2-3(m^2+1)=m^2+8m+1\ge 1(m\ge 0)$

Vậy $m=0$.

Bài 6:

Cho phương trình $x^2-5mx+4m=0(1)$ (m là tham số)

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệ với mọi m

b. Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1). Tìm m để biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$ đạt GTLN

Lời giải

Ta có $A=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(m+1)^2+4\ge 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$

Bài 7: Chuyên Toán Vĩnh Phúc, năm học 2014 - 2015

Cho phương trình $x^2-3mx-2m=0 \quad (1)$ (m là tham số)

a. Giải phương trình khi $m=1$

b. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho biểu thức

$A=\frac{x_1^2+3mx_2+6m}{m^2}+\frac{m^2}{x_2^2+3mx_1+6m}$ đạt GTNN

Lời giải

b) Ta có $\Delta=9m^2+8m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\\ m<\frac{-8}{9}\end{array}\right.$; $A=\frac{3m(x_1+x_2)+8m}{m^2}+\frac{m^2}{3m(x_1+x_2)+8m}=\frac{9m^2+8m}{m^2}+\frac{m^2}{9m^2+8m}$

$\geq 2\sqrt{...}=2\Leftrightarrow(9m+8)^2=m^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1(tm)\\ m=\frac{-4}{5}(loai)\end{array}\right.\Rightarrow m=-1$

Bài 8: Chuyên Toán Tiền Giang, năm học 2014 - 2015

Cho a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $a\neq 0, 2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tìm GTNN của $A=|x_1-x_2|$

Lời giải

$$\Delta=b^2-4ac=\frac{(2a+6c)^2}{9}-4ac=\frac{2(2a^2-6ac+18c^2)}{9}=\frac{2}{9}\left[a^2+9c^2+(a-3c)^2\right]>0(do:a\neq 0)$$

Ta có: $A\geq 0; A=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\sqrt{\frac{\Delta^2}{a^2}}=\sqrt{\left[\frac{2}{9}(a^2+9c^2+(a-3c)^2\right]^2:a^2}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{1-3(\frac{c}{a})+9(\frac{c}{a})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{(\frac{3c}{a}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\geq\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{3c}{a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=6c; b=-6c\Rightarrow \min A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Dạng 7: Tìm hệ thức giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào tham số

Cách giải:

- Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm $x_1,x_2(a\neq 0,\Delta\geq 0)$

- Từ định lý Viet, tìm S và P theo tham số m

- Khử tham số m từ S,P để có hệ thức giữa S và P (tức là hệ thức giữa x_1,x_2) không phụ thuộc vào tham số m

Bài 1:

Cho phương trình $mx^2-(2m+3)x+m-4=0(1)$

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Lời giải

a. Điều kiện: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{-9}{28} \\ m \neq 0 \end{cases}$

b. Theo Viet: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{2m+3}{m} = 2 + \dfrac{3}{m} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m-4}{m} = 1 - \dfrac{4}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4S = 8 + \dfrac{12}{m} \\ 3P = 3 - \dfrac{12}{m} \end{cases} \Rightarrow 4S + 3P = 11$

Bài 2:

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$. Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào tham số m

Lời giải

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow m \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} S = 2(m-1)(1) \Rightarrow m = \dfrac{S+2}{2} \\ P = m^2 - 1(2) \end{cases} \Rightarrow (2) : P = (\dfrac{S+2}{2})^2 - 1 \Leftrightarrow 4P = S^2 + 4S$

Vậy hệ thức là: $(x_1 + x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) = 4x_1x_2$

Bài 3:

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 3m - 3 = 0$. có hai nghiệm x_1, x_2 và tìm hệ thức giữa 2 nghiệm không phụ thuộc vào m

Lời giải

$\Delta' = m^2 - m + 4 \geq 0 \forall m \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 3m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = 6m + 6 \\ 2x_1x_2 = 6m - 6 \end{cases} \Rightarrow 3(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 12.$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1:

Cho phương trình $-3x^2+x+1=0$ với x_1,x_2 là nghiệm của phương trình, không giải phương trình hãy tính

a) $A=x_1^2+\frac{2}{x_1}+x_2^2+\frac{2}{x_2}$

b) $B=\frac{x_2}{x_1+3}+\frac{x_1}{x_2+3}$

c) $C=\frac{2x_1-5}{x_1}+\frac{2x_2-5}{x_2}$

d) $D=\frac{x_1-1}{x_1^4}+\frac{x_2-1}{x_2^4}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $-3x^2+x+1=0\Delta=1+12=13>0\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

a) Ta có $A=x_1^2+\frac{2}{x_1}+x_2^2+\frac{2}{x_2}=\frac{-11}{9}$

b) Ta có $B=\frac{x_2}{x_1+3}+\frac{x_1}{x_2+3}=\frac{16}{87}$

c) Ta có $C=\frac{2x_1-5}{x_1}+\frac{2x_2-5}{x_2}=9$

d) Ta có $D=\frac{x_1-1}{x_1^4}+\frac{x_2-1}{x_2^4}=-41$

Bài 2:

Tìm hai số u và v biết rằng

a) $u+v=-8$ và $uv=-105$

b) $u+v=9$ và $uv=-90$

Hướng dẫn giải

a) Tìm được $(u;v)\in\{(7;-15);(-15;7)\}$

b) Tìm được $(u;v)\in\{(15;-6);(-6;15)\}$

Bài 3:

Cho phương trình $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 và:

a) Thỏa mãn điều kiện $x_2-x_1=17$

b) Biểu thức $A=(x_1-x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Hướng dẫn giải

a) Tìm được $m=\pm4$

b) Ta có $A_{min}=33\Leftrightarrow m=0$

c) Ta có hệ thức: $x_1+x_2+2x_1x_2=-17$

Bài 4:

Cho phương trình $(m+2)x^2-2(m+1)x+m-4=0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình:

a) Có hai nghiệm trái dấu

b) Có hai nghiệm dương phân biệt

c) Có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm

d) Có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $3(x_1+x_2)=5x_1x_2$

Hướng dẫn giải

a) Tìm được: $-2<m<4$

b) Tìm được: $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ \dfrac{-9}{4}<m<-2 \end{array}\right.$

c) Tìm được: $-2<m<-1$

d) Tìm được: $m\in\varnothing$

Bài 5:

Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+m-6=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

c) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm gái trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2$

d) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1^3+x_2^3\right|=19$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta=25>0,\forall m\in Z\Rightarrow$ đpcm

b) Tìm được $m<-3$

c) Ta có $A_{min}=\dfrac{25}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{2}$

d) Tìm được: $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$

Bài 6:

Cho phương trình $x^2-2(m-2)x+2m-5=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để x_1,x_2 thỏa mãn $x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)<4$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta = 4(m-3)^2 \geq 0, \forall m \in R$

b) Tìm được $m > 1$.