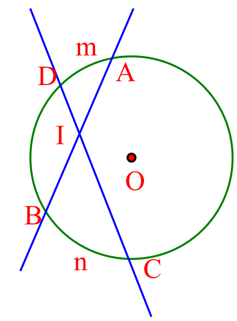
GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A. Lý thuyết



1. Góc có đỉnh bên trong đường tròn

Góc $\widehat{BIC}$ nằm bên trong đường tròn (O) được gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

*) Định lí 1: Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn, cụ thể ta có: $\widehat{BIC}=\frac{1}{2}\left(sđ\,\overset\frown{AmD}+sđ\,\overset\frown{BnC}\right)$

2. Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn

Các góc có đỉnh nằm bên ngoài đường tròn, các cạnh đều có điểm chung với đường được gọi là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

*) Định lí 2: Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn, cụ thể ta có: $\widehat{BID}=\frac{1}{2}\left(sđ\,\overset\frown{BmD}-sđ\,\overset\frown{AnC}\right)$

B. Lý thuyết

Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau

Cách giải: Sử dụng hai định lí về số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn, góc có đỉnh bên ngoài đường tròn.

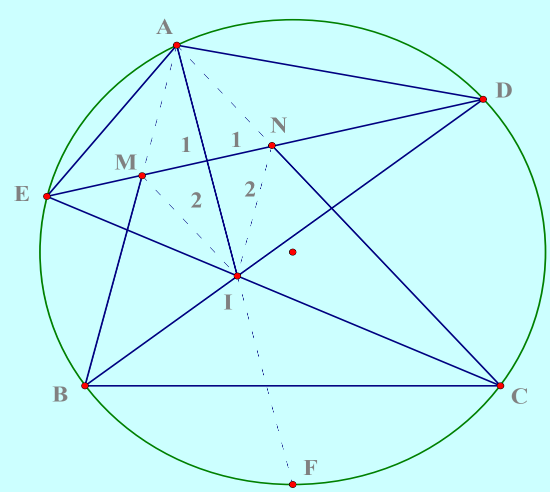
Bài 1:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I và cắt đường tròn lần lượt tại D và E. Dây CE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. CMR:

a. ΔAMN cân

b. $\Delta EAI, \Delta DAI$ cân

c. $\lozenge AMNI$ là hình thoi.



Lời giải

a) Chứng minh được AI là phân giác của $\widehat{A}$

Xét ΔAMN, có: $\widehat{M_1} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{AD} + sđ\,\overset{\frown}{EN}\right)$

$\widehat{N_1} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{EA} + sđ\,\overset{\frown}{CD}\right) \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{N_1}$

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

+) $\widehat{DAI} = \widehat{DI} = \frac{1}{2}\left(sđ\,\overset{\frown}{CD} + sđ\,\overset{\frown}{CF}\right) \Rightarrow \Delta ADI$ cân tại D

$\Rightarrow DI = DA$.

Tương tự ta có ΔEAI cân tại E $\Rightarrow EA = EI$

b) Ta có: $AE = EI, DA = DI \Rightarrow DE$ là đường trung

trực của đoạn $AI \Rightarrow NA = NI \Rightarrow \Delta ANI$ cân

mà $\widehat{N_1} = \widehat{N_2} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{N_2} \Rightarrow NI // AM$.

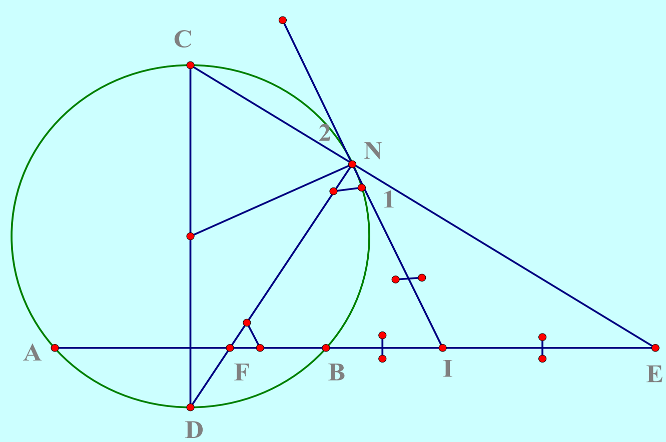
tương tự: $\widehat{N_1} = \widehat{M_2} \Rightarrow MI // AN \Rightarrow$ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau (đpcm)

Bài 2:

Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cng nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn tại N cắt đường thẳng AB tại I. CMR:

a. $\Delta INE, \Delta INF$ là các tam giác cân

b. $AI = \frac{AE + FA}{2}$



Lời giải

a. Ta có: $CD \perp AB \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}; \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB}$

Xét ΔINE có: $\widehat{N_1} = \widehat{N_2} = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{CN} (1)$

$\widehat{E} = \frac{sđ\overset{\frown}{CA} - sđ\overset{\frown}{BN}}{2} = \left(sđ\overset{\frown}{CB} - sđ\overset{\frown}{BN}\right) : 2 = sđ\overset{\frown}{CN} : 2 (2)$

Từ $(1)(2) \Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{E} \Rightarrow \Delta INE$ cân tại I. Tương tự ta có ΔINF cân tại I.

b. Ta có: $IE = IN = IF$

$\left.\begin{array}{l} AI = AE - IE \\ AI = AF + FI \end{array}\right\} \Rightarrow 2AI = AE + AF \Rightarrow AI = \frac{AE + AF}{2}$

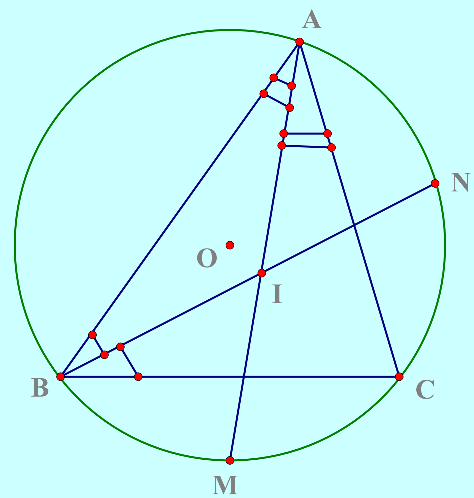
Bài 3:

Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có: $\widehat{B} = 46^0, \widehat{C} = 72^0$

a. Tính $\widehat{A}$ của ΔABC

b. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt đường tròn ở M, tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt đường tròn ở N. Gọi I là giao điểm của AM và BN. Tính các góc $\widehat{BIM}; \widehat{BMI}$

c. Chứng minh: $MB = MC = MI$



Lời giải

a. Xét ΔABC, có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow \widehat{A} = 62^0$

b. $\widehat{B} = 46^0 \Rightarrow sđ\overset{\frown}{AC} = 92^0; \widehat{A} = 62^0 \Rightarrow sđ\overset{\frown}{BC} = 124^0$

+) $\widehat{MIB} = \frac{1}{2} sđ(\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{AN}) = \frac{1}{2}(\frac{124^0 + 92^0}{2}) = 54^0$

c. ΔMBI cân tại M do $\left.\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{I} = 54^0 \Rightarrow MB = MI \\ \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC} \Rightarrow MB = MC \end{array}\right\} \Rightarrow dpcm$

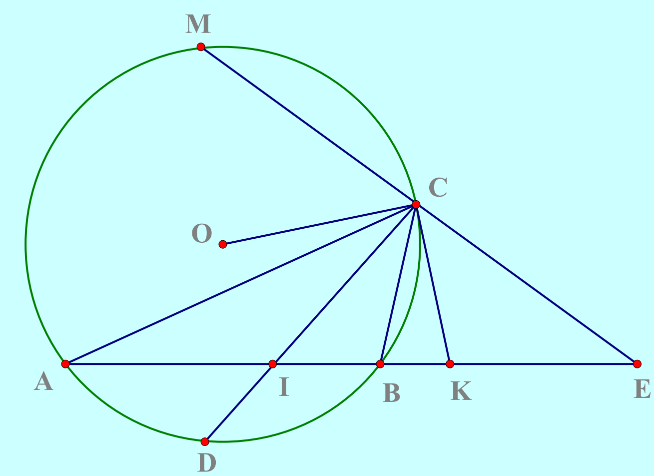
Bài 4:

Cho AB là dây cung của đường tròn (O). Lấy I nằm giữa A và B sao cho $IA > IB$. Gọi D là điểm chính giữa cung AB nhỏ. Vẽ dây CD qua I, tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AD ở K

a. Chứng minh rằng: $IK = CK$

b. Gọi E là điểm đối xứng của I qua K, EC giao với (O) tại M, Chứng minh rằng ba điểm M, O, D thẳng hàng

c. $CA.CB = CI.CD$



Lời giải

a) $\widehat{CIB} = \frac{1}{2}(sd\overset{\frown}{CB} + sd\overset{\frown}{AD}) = \frac{1}{2}(sd\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BD})$

$= \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{CD}$

Mà $\widehat{KIC} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{CD} \Rightarrow \Delta CIK$ cân tại K.

b) $\left.\begin{matrix} KE = KI \\ KC = KI \end{matrix}\right\} \Rightarrow KE = KI = KC \Rightarrow \Delta ICE$ vuông tại K $\Rightarrow \Delta ICE$ nội tiếp đường tròn (K) đường kính IK $\Rightarrow \widehat{ICM} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{DCM} = 90^0 \Rightarrow MD$ là đường kính cả (O) nên M, O, D thẳng hàng.

c) Xét $\Delta CAI, \Delta CDB$, có: $\left.\begin{matrix} \widehat{CAI} = \widehat{CDB}(chan.\overset{\frown}{BC}) \\ \widehat{ACI} = \widehat{DCB}(chan.hai.cung.bang.nhau) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \Delta CAI \sim \Delta CDB(gg) \Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CI}{CB} \Leftrightarrow CA.CB = CI.CD$ (đpcm).

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song hoặc vuông góc. Chứng minh đẳng thức cho trước

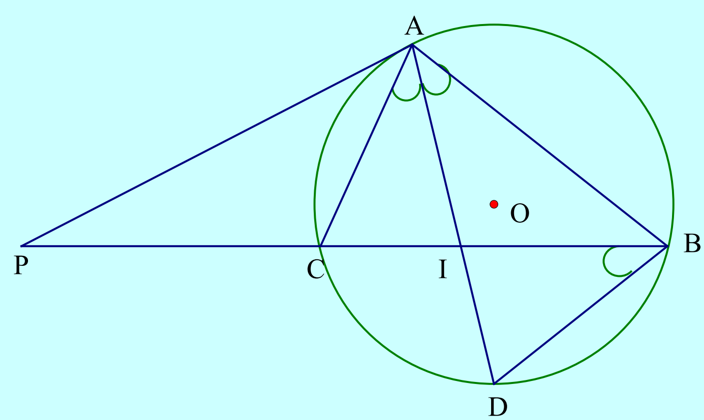
Cách giải: Áp dụng hai định lí về số đo góc có đỉnh bên trong đường tròn, góc có đỉnh bên ngoài đường tròn để có được các góc bằng nhau, cạnh bằng nhau. Từ đó suy ra điều cần chứng minh

Bài 1:

Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến PA với đường tròn và cát tuyến PBC với $P,B,C \in (O)$.

a) Biết $PC = 25cm, PB = 49cm.$ Đường kính của đường tròn là $50cm.$ Tính PO

b) Đường phân giác trong của góc A cắt PB ở I và cắt (O) ở D. Chứng minh DB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAIB.



Lời giải

a) Ta có $\Delta PAC \sim \Delta PBA(gg) \Rightarrow PA^2 = PB.PC$

Xét tam giác vuông PAO $(\widehat{PAO} = 90^0) \Rightarrow PA^2 = PO^2 - OA^2 \Rightarrow PO^2 = PA^2 + OA^2 \Rightarrow PO$

b) Chứng minh được $\widehat{DBC} = \widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} \Rightarrow$ DB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAIB

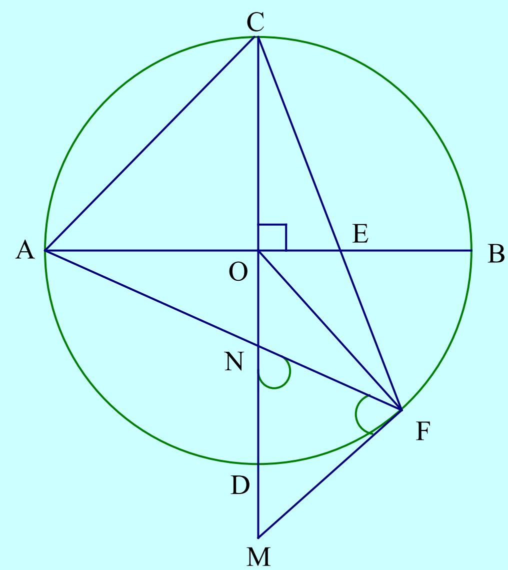
Bài 2:

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AE = R\sqrt{2}$ Vẽ dây CF đi qua E. Tiếp tuyến của đường tròn tại F cắt CD tại M, Vẽ dây AF cắt CD tại N. Chứng minh

a) Tia CF là tia phân giác của $\widehat{BCD}$

b) $MF // AC$

c) MN, OD, OM là độ dài ba cạnh của của một tam giác vuông.



Lời giải

b) Chứng minh được $\widehat{AFM} = \widehat{CAF} \left(= \widehat{ACF} \right) \Rightarrow MF // AC$

c) Chứng minh $\widehat{MFN} = \widehat{MNF} \Rightarrow \Delta MNF$ cân tại M

$\Rightarrow MN = MF$.

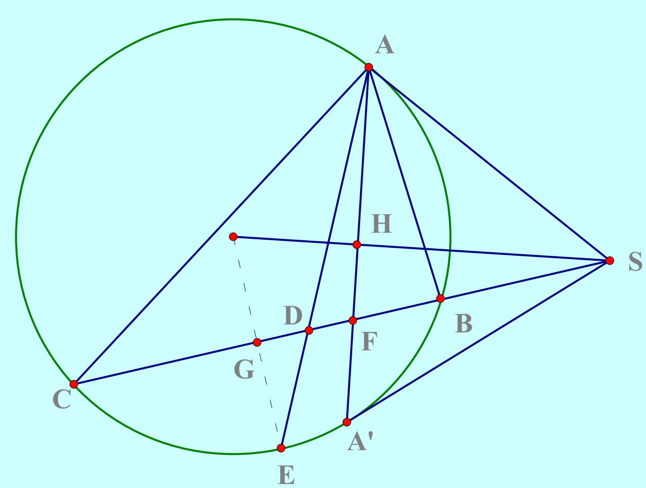
Mặt khác: $OD = OF = R$

Ta có MF là tiếp tuyến nê ΔOFM vuông $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 3:

Cho đường tròn (O) và S nằm bên trong đường tròn. Từ S kẻ hai tiếp tuyến SA và SA' (A và A' là tiếp điểm) và cát tuyến ABC tới đường tròn. Phân giác của góc BAC cắt BC ở D, cắt đường tròn ở E. Gọi H là giao điểm của OS và AA', G là giao điểm của OE và BS còn F là giao điểm của AA' với BC. CMR:

a. ΔSAD cân



b. $SF.SG = SO.SH$

c. $SA^2 = SF.SG$

Lời giải

a. $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EB} \Rightarrow \Delta SAD$ cân tại S

b. $OB = OC = R \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực BC

$\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow EB = EC \Rightarrow E$ nằm trên đường trung trực $BC \Rightarrow OE$ là đường trung trực của BC $\Rightarrow OE \perp BC$

+) SO là tia phân giác của tam giác cân ASA' $\Rightarrow SH \perp AA'$

+) $\Delta OGS \sim \Delta FHS(gg) \Rightarrow \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{OS}{SF} \Rightarrow SO.SH = SF.SG$

c. ΔOAS vuông tại A, $AH \perp OS \Rightarrow SA^2 = SH.SO \Rightarrow SA^2 = SF.SG$

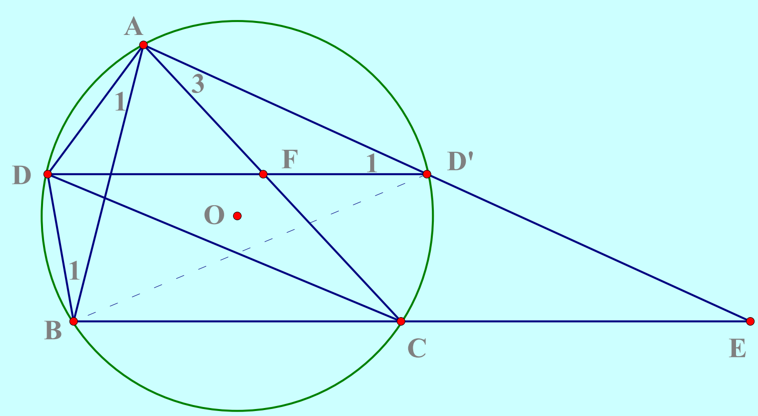
Bài 4:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là một điểm thuộc cung AB, qua D kẻ dây DD' // BC cắt AC ở F. Đường thẳng AD' cắt BC ở E

a. So sánh $\Delta ABD, \Delta AEC$ và ΔABE, ΔADC

b. $AD.AE = AB.AC$

c. $\Delta AFD \# \Delta ADB$



Lời giải

a. $DD'//BC \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD'} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

Lại có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{D_1}' = \widehat{E} \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1}' \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{E} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta AEC$$

+) $\widehat{E} = \dfrac{1}{2} sd(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}') = \dfrac{1}{2} sd(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BD})$

$= \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AD} = \widehat{ACD}; \widehat{ABE} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \Delta ABE \# \Delta ADC(gg)$

b. Ta có $\Delta AEC \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Leftarrow AD.AE = AB.AC$

Hoặc $\Delta ABE \sim \Delta ADC \Rightarrow .....$

c. $\widehat{AFD} = \frac{1}{2} sd(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD}') = \frac{1}{2} sd(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{ADB} = \widehat{AD'B}$

+) $\widehat{BAD'} = \widehat{DAF} \Rightarrow \Delta ADF \# \Delta ABD'(gg)$.

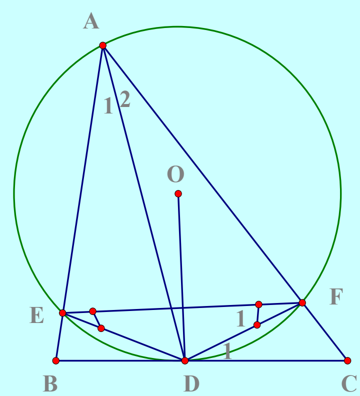
Bài 5:

Cho ΔABC, phân giác AD. Vẽ đường tròn (O) đi qua A, D và tiếp xúc với BC ở D, đường tròn này cắt AB, AC lần lượt ở E và F. CMR:

a. $EF // BC$

b. $AD^2 = AE.AC$

c. $AE.AC = AB.AF$



Lời giải

a) $\left.\begin{array}{l} \widehat{CDF} = \widehat{DAF} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{FD} \\ \widehat{DFE} = \widehat{DAE} = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{DAE}; \widehat{D_1} = \widehat{F_1} \Rightarrow FE // BC$

b) $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{FD}; \widehat{ACD} = \frac{1}{2} sd(\overset{\frown}{AED} - \overset{\frown}{DF})$

$= \frac{1}{2} sd(\overset{\frown}{AED} - \overset{\frown}{DE}) = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AE} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ADC(gg) \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AE.AC$

c. $\widehat{ABD} = \frac{1}{2} sd(\overset{\frown}{AFD} - \overset{\frown}{ED}) = \frac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{FA} = \widehat{ADF} \Rightarrow \Delta ADF \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AD^2 = AF.AB \Rightarrow AE.AC = AF.AB$

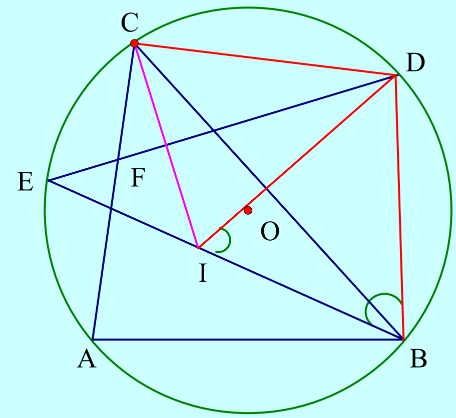
Bài 6:

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm (O). Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau ở I và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E. Chứng minh:

a) ΔBDI là tam giác cân

b) DE là đường trung trực của IC

c) $IF//BC$, trong đó F là giao điểm của DE và AC.



Lời giải

a) Ta có $\widehat{BID}=\frac{1}{2}sd\,\widehat{DE}=\widehat{DBE}\Rightarrow \Delta BID$ cân tại D

b) Chứng minh tương tự ta có ΔIEC cân tại E, ΔDIC cân tại $D\Rightarrow EI=EC;DI=DC\Rightarrow DE$ là trung trực của CI

c) $F\in DE\Rightarrow FI=FC\Rightarrow \widehat{FIC}=\widehat{FCI}=\widehat{ICB}\Rightarrow IF//BC$

Bài 7:

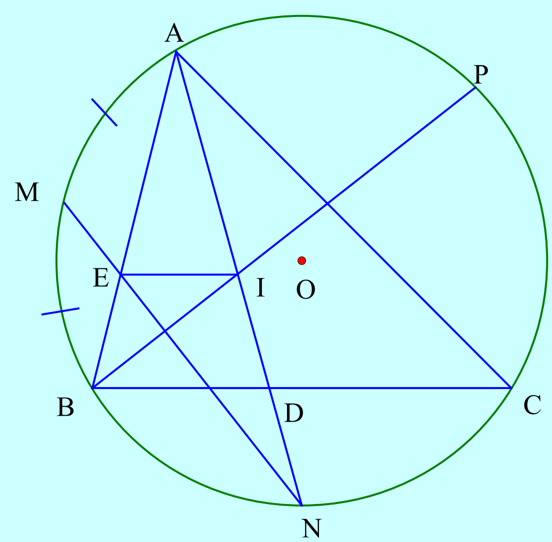
Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A,B và C. Gọi M,N,P theo thứ tự là điểm chính giữa của các cung AB,BC,CA. BP cắt AN tại I, NM cắt AB tại E. Gọi D là giao điểm của AN và BC. Chứng minh:

a) ΔBNI là tam giác cân

b) $AE.BN=EB.AN$

c) $EI//BC$

d) $\frac{AN}{BN}=\frac{AB}{BD}$



Lời giải

b) Ta có M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow NE$ là phân giác $\widehat{BNA} \Rightarrow \dfrac{BN}{AN} = \dfrac{EB}{EA}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow BN.AE = NA.BE$

d) Ta có $\Delta ABN \sim \Delta BDN \Rightarrow \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{AB}{BD} \Rightarrow$ đpcm.