

MỤC LỤC

| | |
|---|-----------|
| I ĐẠI SỐ | 1 |
| §1 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN | 2 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 2 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 3 |
| Dạng 1. Nhận biết hàm số bậc nhất $y = ax + b$ | 3 |
| Dạng 2. Kiểm tra cặp số cho trước có là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn hay không | 3 |
| Dạng 3. Tìm một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn | 4 |
| Dạng 4. Viết nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm | 5 |
| Dạng 5. Tìm điều kiện của tham số để đường thẳng đi qua một điểm cho trước | 6 |
| Dạng 6. Vẽ cặp đường thẳng và tìm giao điểm của chúng | 7 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG | 10 |
| §2 – HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN | 13 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 13 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 14 |
| Dạng 1. Kiểm tra cặp số cho trước có là nghiệm của hệ phương trình đã cho hay không | 14 |
| Dạng 2. Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình | 15 |
| Dạng 3. Tìm nghiệm của hệ phương trình bằng phương pháp hình học | 17 |
| Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước | 19 |
| Dạng 5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng | 21 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG | 22 |
| §3 – GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỂ | 26 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 26 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 26 |
| Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thể | 26 |
| Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về phương trình bậc nhất hai ẩn | 28 |
| Dạng 3. Sử dụng đặt ẩn phụ giải hệ phương trình quy về phương trình bậc nhất hai ẩn | 29 |
| Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước | 31 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG | 34 |
| (D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN | 42 |

| | |
|---|------------|
| §4 – GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ | 52 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 52 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 52 |
| <i>📁</i> Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số..... | 52 |
| <i>📁</i> Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn..... | 53 |
| <i>📁</i> Dạng 3. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ..... | 54 |
| <i>📁</i> Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước..... | 56 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 60 |
| (D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 67 |
| §5 – GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH | 72 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 72 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 72 |
| <i>📁</i> Dạng 1. Bài toán về quan hệ các số..... | 72 |
| <i>📁</i> Dạng 2. Bài toán về chuyển động..... | 73 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 74 |
| (D) BÀI TẬP VỀ NHÀ..... | 76 |
| §6 – GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH (Tiếp) | 78 |
| (A) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 78 |
| <i>📁</i> Dạng 1. Bài toán về công việc làm chung và làm riêng..... | 78 |
| <i>📁</i> Dạng 2. Bài toán năng suất lao động..... | 79 |
| <i>📁</i> Dạng 3. Bài toán về tỉ lệ phần trăm..... | 79 |
| <i>📁</i> Dạng 4. Bài toán về nội dung hình học..... | 79 |
| <i>📁</i> Dạng 5. Bài toán về nội dung sắp xếp chia đều..... | 80 |
| (B) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 80 |
| (C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 83 |
| §7 – ÔN TẬP CHƯƠNG 3 | 92 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 92 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 92 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 97 |
| §8 – HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) | 100 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 100 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 100 |
| <i>📁</i> Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm cho trước..... | 100 |
| <i>📁</i> Dạng 2. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số..... | 101 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 102 |
| (D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 104 |

| | |
|---|------------|
| §9 – ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) | 106 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 106 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 106 |
| 📁 <i>Dạng 1. Vẽ đồ thị của hàm số.....</i> | 107 |
| 📁 <i>Dạng 2. Tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng.....</i> | 108 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 111 |
| (D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 114 |
| §10 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN | 118 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 118 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 118 |
| 📁 <i>Dạng 1. Nhận dạng phương trình và tìm các hệ số của phương trình bậc hai một ẩn.....</i> | 118 |
| 📁 <i>Dạng 2. Sử dụng các phép biến đổi, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước.....</i> | 119 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 121 |
| (D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 122 |
| §11 – CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI | 125 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 125 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 125 |
| 📁 <i>Dạng 1. Sử dụng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước.....</i> | 125 |
| 📁 <i>Dạng 2. Sử dụng công thức nghiệm, xác định số nghiệm của phương trình dạng bậc hai.....</i> | 126 |
| 📁 <i>Dạng 3. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai.....</i> | 127 |
| 📁 <i>Dạng 4. Một số bài toán khác về tính có nghiệm của phương trình bậc hai.....</i> | 127 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 128 |
| (D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 130 |
| §12 – CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI | 132 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 132 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 132 |
| 📁 <i>Dạng 1. Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước.....</i> | 132 |
| 📁 <i>Dạng 2. Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, xác định số nghiệm của phương trình bậc hai.....</i> | 133 |
| 📁 <i>Dạng 3. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai.....</i> | 134 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 135 |
| (D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 138 |
| §13 – HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG | 140 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 140 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 141 |

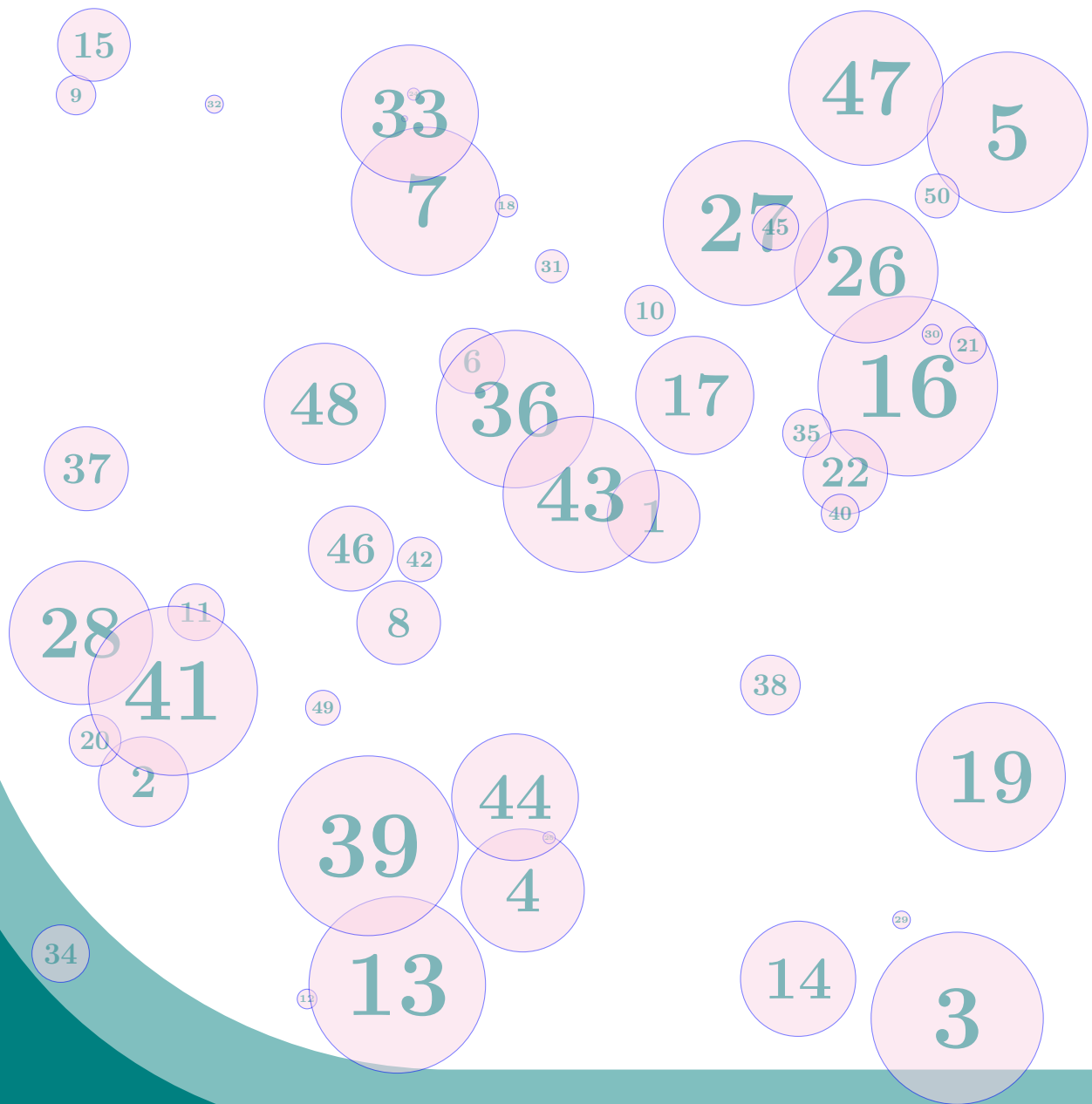
| | | |
|--------------|--|------------|
| 📁 | Dạng 1. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm | 141 |
| 📁 | Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhân nghiệm..... | 142 |
| 📁 | Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích..... | 143 |
| 📁 | Dạng 4. Phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử..... | 144 |
| 📁 | Dạng 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai..... | 144 |
| 📁 | Dạng 6. Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước..... | 146 |
| Ⓒ | BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 146 |
| Ⓓ | BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 149 |
| §14 – | PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI | 153 |
| Ⓐ | TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 153 |
| Ⓑ | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 154 |
| 📁 | Dạng 1. Giải phương trình trùng phương..... | 154 |
| 📁 | Dạng 2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức..... | 157 |
| 📁 | Dạng 3. Giải phương trình tích..... | 160 |
| 📁 | Dạng 4. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ..... | 161 |
| Ⓒ | BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 164 |
| Ⓓ | BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 172 |
| §15 – | GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH | 181 |
| Ⓐ | TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 181 |
| Ⓑ | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 181 |
| 📁 | Dạng 1. Toán có nội dung hình học..... | 181 |
| 📁 | Dạng 2. Bài toán về quan hệ các số..... | 182 |
| 📁 | Dạng 3. Bài toán về năng suất lao động..... | 183 |
| 📁 | Dạng 4. Bài toán về công việc làm chung, làm riêng..... | 183 |
| 📁 | Dạng 5. Bài toán chuyển động..... | 184 |
| 📁 | Dạng 6. Bài toán chuyển động có vận tốc cản..... | 184 |
| 📁 | Dạng 7. Các dạng bài toán khác..... | 185 |
| Ⓒ | BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 185 |
| Ⓓ | BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 187 |
| §16 – | ÔN TẬP CHƯƠNG IV | 189 |
| Ⓐ | TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 189 |
| Ⓑ | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 189 |
| Ⓒ | BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 195 |
| Ⓓ | BÀI TẬP TỰ LUYỆN..... | 198 |
| §17 – | ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV | 202 |
| Ⓐ | ĐỀ SỐ 1..... | 202 |
| Ⓑ | ĐỀ SỐ 2..... | 204 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| (C) | Đề kiểm tra HKII năm học 2018 - 2019 quận 3 | 206 |
| (D) | Đề kiểm tra HKII năm học 2018 - 2019 quận 1 | 209 |
| §18 – | GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG | 213 |
| (A) | TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 213 |
| (B) | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 214 |
| 📁 | Dạng 1. Tìm số đo góc ở tâm - Số đo cung bị chắn | 214 |
| (C) | BÀI TẬP VẬN DỤNG | 216 |
| §19 – | LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY | 219 |
| (A) | TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 219 |
| (B) | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 219 |
| 📁 | Dạng 1. Liên hệ giữa cung và dây | 219 |
| (C) | BÀI TẬP VẬN DỤNG | 222 |
| §20 – | GÓC NỘI TIẾP | 224 |
| (A) | TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 224 |
| (B) | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 225 |
| 📁 | Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh các góc bằng nhau, đoạn thẳng bằng nhau | 225 |
| 📁 | Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba điểm thẳng hàng | 226 |
| (C) | BÀI TẬP VẬN DỤNG | 227 |
| (D) | BÀI TẬP TỰ LUYỆN | 229 |
| §21 – | GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG | 230 |
| (A) | TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 230 |
| (B) | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 230 |
| 📁 | Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh các góc bằng nhau, các đẳng thức hoặc tam giác đồng dạng | 230 |
| 📁 | Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc, một tia là tiếp tuyến của đường tròn | 232 |
| (C) | BÀI TẬP VẬN DỤNG | 232 |
| (D) | BÀI TẬP TỰ LUYỆN | 234 |
| §22 – | GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG - BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN | 236 |
| (A) | TÓM TẮT LÝ THUYẾT | 236 |
| (B) | BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN | 237 |
| 📁 | Dạng 1. Chứng minh hai góc hoặc hai đoạn thẳng bằng nhau | 237 |
| 📁 | Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song hoặc vuông góc hoặc các đẳng thức cho trước | 237 |
| (C) | BÀI TẬP TỰ LUYỆN | 238 |

| | |
|--|------------|
| §23 – CUNG CHỨA GÓC | 239 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 239 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 240 |
| 📁 Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc α | 240 |
| 📁 Dạng 2. Dựng cung chứa góc..... | 241 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 241 |
| §24 – TỨ GIÁC NỘI TIẾP | 242 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 242 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 243 |
| 📁 Dạng 1. Tính số đo các góc và chứng minh tứ giác nội tiếp..... | 243 |
| 📁 Dạng 2. Khai thác tính chất của tứ giác nội tiếp..... | 244 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 246 |
| §25 – ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN | 247 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 247 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 247 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 248 |
| §26 – DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN. HÌNH QUẠT TRÒN | 250 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 250 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 250 |
| 📁 Dạng 1. | 250 |
| (C) Bài tập về nhà..... | 253 |
| §27 – ÔN TẬP CHƯƠNG 3 | 254 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 254 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 254 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 255 |
| §28 – HÌNH TRỤ - KHỐI TRỤ | 257 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 257 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 257 |
| 📁 Dạng 1. Tính chiều cao, bán kính đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích..... | 257 |
| 📁 Dạng 2. Dạng toán tổng hợp..... | 259 |
| §29 – HÌNH NÓN - KHỐI NÓN | 262 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 262 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 262 |
| 📁 Dạng 1. Tính diện tích, thể tích và các đại lượng liên quan đến hình nón và hình nón cụt..... | 262 |

| | |
|---|------------|
| <i>Dạng 2. Dạng tổng hợp</i> | 266 |
| §30 – MẶT CẦU - KHỐI CẦU | 268 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 268 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 269 |
| <i>Dạng 1. Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và các đại lượng liên quan</i> | 269 |
| <i>Dạng 2. Dạng toán tổng hợp</i> | 271 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 271 |
| §31 – ÔN TẬP CHƯƠNG 4 | 273 |
| (A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT..... | 273 |
| (B) BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN..... | 273 |
| (C) BÀI TẬP VẬN DỤNG..... | 274 |

PHẦN ĐẠI SỐ



BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm về phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số thực ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

2. Tập nghiệm và biểu diễn tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

a) Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là nghiệm của phương trình $ax + by = c$ nếu có đẳng thức $ax_0 + by_0 = c$.

Ta cũng viết: Nghiệm của phương trình $ax + by = c$ là $(x; y) = (x_0; y_0)$. Với cách viết này, cần hiểu rằng $x = x_0, y = y_0$.

! **⊗** Đối với phương trình bậc nhất hai ẩn, khái niệm tập nghiệm và khái niệm phương trình tương đương cũng tương tự như đối với phương trình một ẩn.

⊗ Các quy tắc chuyển vế và quy tắc để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

Tổng quát: Một phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c(*)$ có vô số nghiệm.

| Điều kiện | Dạng của phương trình $ax + by = c$ | Tập nghiệm |
|--|---|--|
| $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ | $by = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$ | $S = \left\{ \left(x; \frac{c}{b} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ |
| $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$ | $ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$ | $S = \left\{ \left(\frac{c}{a}; y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$ |
| $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ | $ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ | $S = \left\{ \left(x; -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ |

b) Biểu diễn tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ trục tọa độ Oxy . Tập nghiệm S của phương trình $(*)$ được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$ và kí hiệu là (d) . Biểu diễn tập nghiệm S trong hệ trục tọa độ Oxy tức là vẽ đường thẳng (d) trong hệ trục tọa độ Oxy .

| Điều kiện | Dạng của phương trình (d) | Tính chất của đường thẳng (d) |
|--|---|--|
| $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ | $by = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$ | Song song hoặc trùng với trục hoành, vuông góc với trục tung. |
| $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$ | $ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$ | Song song hoặc trùng với trục tung, vuông góc với trục hoành. |
| $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ | $ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ | Đồ thị của (d) là đồ thị hàm số bậc nhất $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. |

! Giả sử $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$. Khi đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình đã cho.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận biết hàm số bậc nhất $y = ax + b$

Hàm số bậc nhất một ẩn $y = ax + b$ là hàm số có hệ số $a \neq 0$.

❖ **Ví dụ 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào xác định một hàm số bậc nhất dạng $y = ax + b$?

- | | | | |
|--------------------|---------|----------------------|---------|
| a) $y = 2x$; | 👉 Có | b) $y - 2x = 0$; | 👉 Có |
| c) $y = x + 2$; | 👉 Có | d) $x - y + 2 = 0$; | 👉 Có |
| e) $0x + y = -1$; | 👉 Không | f) $4x - 0y = 12$. | 👉 Không |

❖ **Ví dụ 2.** Trong các phương trình sau, phương trình nào xác định một hàm số bậc nhất dạng $y = ax + b$?

- | | | | |
|-------------------|---------|-----------------------|---------|
| a) $y = 3x$; | 👉 Có | b) $y - 3x = 0$; | 👉 Có |
| c) $y = 2x + 1$; | 👉 Có | d) $x - 2y + 1 = 0$; | 👉 Có |
| e) $0x + y = 5$; | 👉 Không | f) $4x + 0y = 14$. | 👉 Không |

Dạng 2. Kiểm tra cặp số cho trước có là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn hay không

Để kiểm tra cặp số cho trước $(x_0; y_0)$ có là nghiệm của phương trình hay không, ta thay $x = x_0$, $y = y_0$ vào phương trình đã cho.

Nếu cặp $(x_0; y_0)$ thỏa mãn đẳng thức $ax_0 + by_0 = c$ là đẳng thức đúng thì $(x_0; y_0)$ là nghiệm của phương trình $ax + by = c$ và ngược lại.

❖ **Ví dụ 3.** Cho các cặp số $(0; 0)$, $(0; -1)$, $(3; -1)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:

- | | | | |
|---------------------------|-------------|----------------------------|---------------------|
| a) $y = 2x$; | 👉 $(0; 0)$ | b) $x - y + 2 = 0$; | 👉 Không có điểm nào |
| c) $0 \cdot x + y = -1$; | 👉 $(0; -1)$ | d) $4x - 0 \cdot y = 12$. | 👉 $(3; -1)$ |

🗨️ Lời giải.

- a) Thay $x = 0$, $y = 0$ vào ta được $0 = 2 \cdot 0$ (đúng), do vậy $(0; 0)$ là nghiệm của $y = 2x$.
- b) Thay $(x; y) \in \{(0; 0), (0; -1), (3; -1)\}$ ta thấy không có cặp số nào thỏa mãn $x - y + 2 = 0$.
- c) Thay $x = 0$, $y = -1$ vào ta được $0 \cdot 0 + (-1) = -1$ (đúng), do vậy $(0; -1)$ là nghiệm của $0 \cdot x + y = -1$.
- d) Thay $x = 3$, $y = -1$ vào ta được $4 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) = 12$ (đúng), do vậy $(3; -1)$ là nghiệm của $4x - 0 \cdot y = 12$.

□

❖ **Ví dụ 4.** Cho các cặp số $(0; 0)$, $(2; -1)$, $(3; -1)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:

- | | | | |
|------------------------------|---------------------|---------------------------|-------------|
| a) $y = 3x$; | 👉 $(0; 0)$ | b) $-x - 2y + 1 = 0$; | 👉 $(3; -1)$ |
| c) $0 \cdot x + y + 1 = 0$; | 👉 Không có điểm nào | d) $3x + 0 \cdot y = 9$. | 👉 $(3; -1)$ |

 **Lời giải.**





- a) Thay $x = 0, y = 0$ vào ta được $0 = 3 \cdot 0$ (đúng), do vậy $(0; 0)$ là nghiệm của $y = 3x$.
- b) Thay $x = 3, y = -1$ vào ta được $-3 - 2(-1) + 1 = 0$ (đúng), do vậy $(3; -1)$ là nghiệm của $-x - 2y + 1 = 0$.
- c) Thay $(x; y) \in \{(0; 0), (2; -1), (3; -1)\}$ ta thấy không có cặp số nào thỏa mãn $x - y + 2 = 0$.
- d) Thay $x = 3, y = -1$ vào ta được $3 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 9$ (đúng), do vậy $(3; -1)$ là nghiệm của $3x + 0 \cdot y = 9$.

□

 **Dạng 3. Tìm một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn**

Cho $x = x_0$ (hoặc $y = y_0$) từ đó tìm được y_0 (hoặc x_0), trong đó x_0, y_0 là một hằng số cụ thể.

 **Ví dụ 5.** Tìm một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn trong các trường hợp sau:





- | | | | |
|--------------------------|---|---------------------------|--|
| a) $y = 2x;$ |  $(0; 0)$ | b) $x - y + 2 = 0;$ |  $(0; 2)$ |
| c) $0 \cdot x + y = -1;$ |  $(0; -1)$ | d) $4x - 0 \cdot y = 12.$ |  $(3; 0)$ |

 **Lời giải.**

- a) Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 = 0$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(0; 0)$.
- b) Cho $x = 0 \Rightarrow 0 - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(0; 2)$.
- c) Cho $x = 0 \Rightarrow 0 \cdot 0 + y = -1 \Rightarrow y = -1$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(0; -1)$.
- d) Cho $y = 0 \Rightarrow 4 \cdot x + 0 = 12 \Rightarrow x = 3$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(3; 0)$.

□

 **Ví dụ 6.** Tìm một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn trong các trường hợp sau:

- | | | | |
|-----------------------------|---|--------------------------|--|
| a) $y = 3x;$ |  $(0; 0)$ | b) $-x - 2y + 1 = 0;$ |  $(1; 0)$ |
| c) $0 \cdot x + y + 1 = 0;$ |  $(0; -1)$ | d) $3x + 0 \cdot y = 9.$ |  $(3; 0)$ |

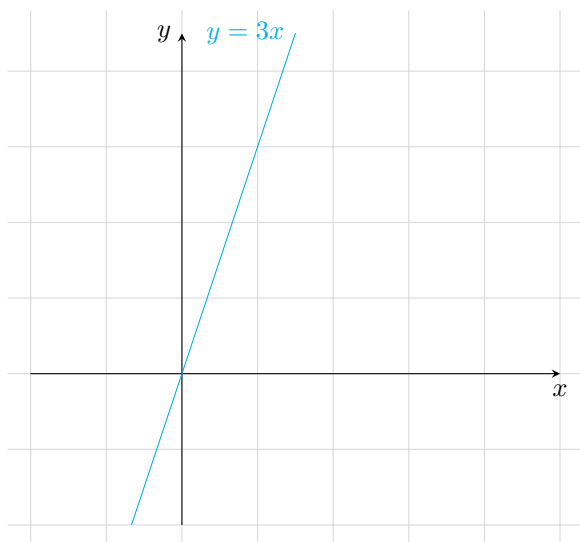
 **Lời giải.**

- a) Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot 0 = 0$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(0; 0)$.
- b) Cho $y = 0 \Rightarrow -x - 2 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(1; 0)$.
- c) Cho $x = 0 \Rightarrow 0 \cdot 0 + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(0; -1)$.
- d) Cho $y = 0 \Rightarrow 3 \cdot x + 0 = 9 \Rightarrow x = 3$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(3; 0)$.

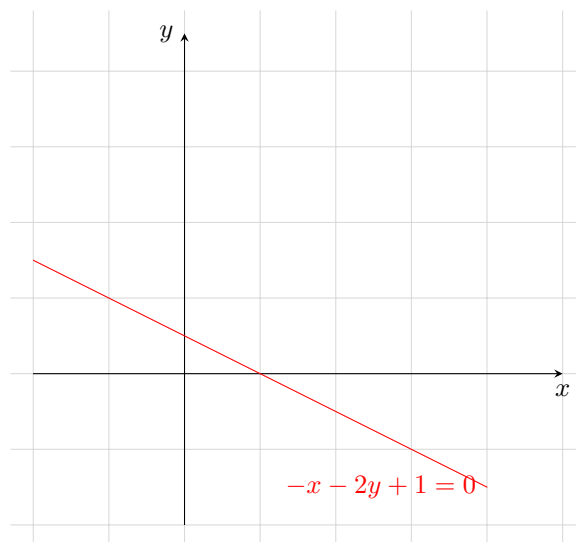
□

 **Lời giải.**

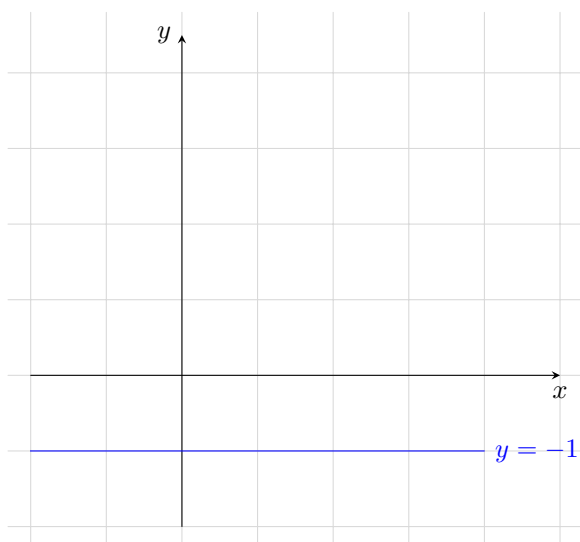
- a) Nghiệm tổng quát của phương trình $y = 3x$ là $\{(x; 3x) | x \in \mathbb{R}\}$.



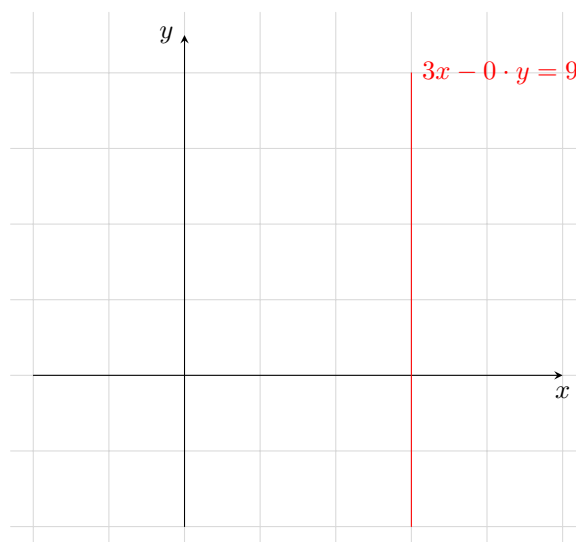
- b) Nghiệm tổng quát của phương trình $-x - 2y + 1 = 0$ là $\{(-2y + 1; y) | y \in \mathbb{R}\}$.



- c) Nghiệm tổng quát của phương trình $0 \cdot x + y + 1 = 0$ là $\{(x; -1) | x \in \mathbb{R}\}$.




- d) Nghiệm tổng quát của phương trình $3x + 0 \cdot y = 9$ là $\{(3; y) | y \in \mathbb{R}\}$.



□

 **Dạng 5. Tìm điều kiện của tham số để đường thẳng đi qua một điểm cho trước**

Thay tọa độ của điểm cho trước vào phương trình để tìm giá trị tham số thỏa mãn.

 **Ví dụ 9.** Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm giá trị của m để:

- a) Điểm $A(1; 2)$ thuộc đường thẳng $3x + my = 5$; $\text{? } m = 1$
- b) Điểm $B(-1; 3)$ thuộc đường thẳng $mx + 5y = 7$; $\text{? } m = 8$
- c) Điểm $C(5; 3)$ thuộc đường thẳng $mx + y = 1 - m$; $\text{? } m = \frac{-1}{3}$
- d) Điểm $D(-1; -1)$ thuộc đường thẳng $(m^2 + 1)x - y = 0$. $\text{? } m = 0$

 **Lời giải.**

- a) Thay $x = 1, y = 2$ ta được $3 \cdot 1 + m \cdot 2 = 5 \Rightarrow m = 1$. Vậy $m = 1$.
- b) Thay $x = -1, y = 3$ ta được $m \cdot (-1) + 5 \cdot 3 = 7 \Rightarrow m = 8$. Vậy $m = 8$.
- c) Thay $x = 5, y = 3$ ta được $m \cdot 5 + 3 = 1 - m \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$. Vậy $m = \frac{-1}{3}$.
- d) Thay $x = -1, y = -1$ ta được $(m^2 + 1) \cdot (-1) - (-1) = 0 \Rightarrow m = 0$. Vậy $m = 0$.

□

⇨ **Ví dụ 10.** Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm giá trị của m để:

- a) Điểm $A(-3; 1)$ thuộc đường thẳng $mx + y = 10$; 🔍 $m = -3$
- b) Điểm $B(2; 5)$ thuộc đường thẳng $-x + my = 5$; 🔍 $m = \frac{7}{5}$
- c) Điểm $C(1; 1)$ thuộc đường thẳng $mx + (m + 1)y = 3m + 2$; 🔍 $m = -1$
- d) Điểm $D(1; 2)$ thuộc đường thẳng $(2m^2 - 1)x + y = 1$. 🔍 $m = 0$

🗨️ Lời giải.

- a) Thay $x = -3, y = 1$ ta được $m \cdot (-3) + 1 = 10 \Rightarrow m = -3$. Vậy $m = -3$.
- b) Thay $x = 2, y = 5$ ta được $-2 + m \cdot 5 = 5 \Rightarrow m = \frac{7}{5}$. Vậy $m = \frac{7}{5}$.
- c) Thay $x = 1, y = 1$ ta được $m \cdot 1 + (m + 1) \cdot 1 = 3m + 2 \Rightarrow m = -1$. Vậy $m = -1$.
- d) Thay $x = 1, y = 2$ ta được $(2m^2 + 1) \cdot 1 + 2 = 1 \Rightarrow m = 0$. Vậy $m = 0$.

□

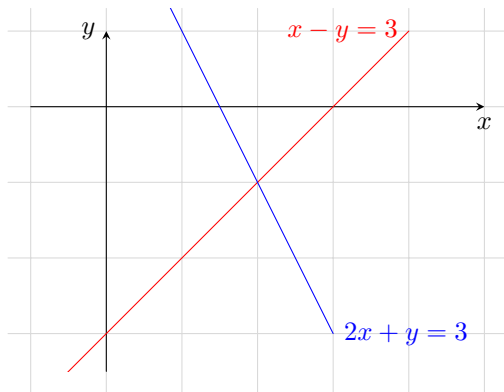
📁 Dạng 6. Vẽ cặp đường thẳng và tìm giao điểm của chúng

Vẽ đồ thị tương ứng các đường thẳng và xác định tọa độ giao điểm trong hệ trục tọa độ.

⇨ **Ví dụ 11.** Vẽ mỗi cặp đường thẳng sau trong cùng một mặt phẳng tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó:

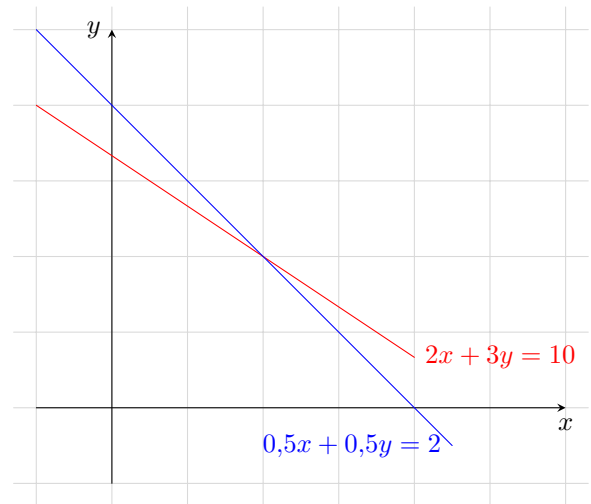
- a) $x - y = 3$ và $2x + y = 3$; 🔍 $(2; -1)$ b) $2x + 3y = 10$ và $0,5x + 0,5y = 2$; 🔍 $(2; 2)$
- c) $x - 2y = -1$ và $x = -1$; 🔍 $(-1; 0)$ d) $4x + 5y = 9$ và $y = 1$. 🔍 $(1; 1)$

🗨️ Lời giải.



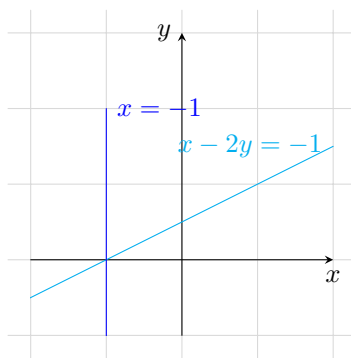
a)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(2; -1)$.



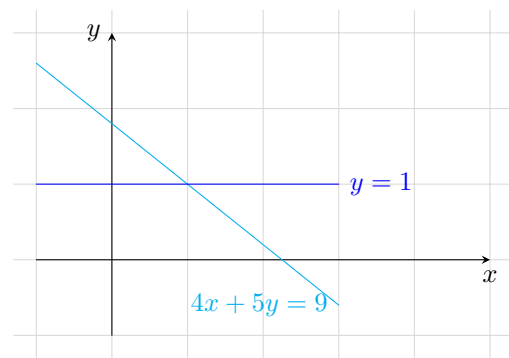
b)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(2; 2)$.



c)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(-1; 0)$.



d)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 1)$.

□

❖ **Ví dụ 12.** Vẽ mỗi cặp đường thẳng sau trong cùng một mặt phẳng tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó:

a) $x - y = 3$ và $x - 2 = 0$;

📍 $(2; -1)$

b) $4x - 3y = 13$ và $0,25x + 4y = 5$;

📍 $(4; 1)$

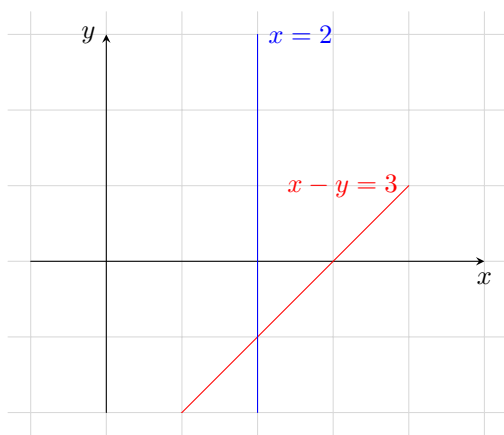
c) $2x - y = -1$ và $y = 3$;

📍 $(1; 3)$

d) $4x + 5y = 9$ và $2x + 2,5y = 0,5$.

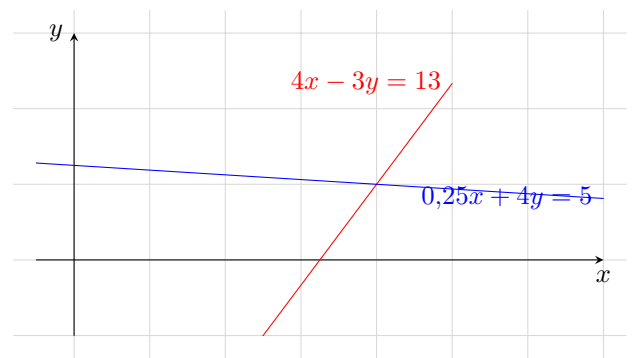
📍 Không có giao điểm

🗨️ **Lời giải.**



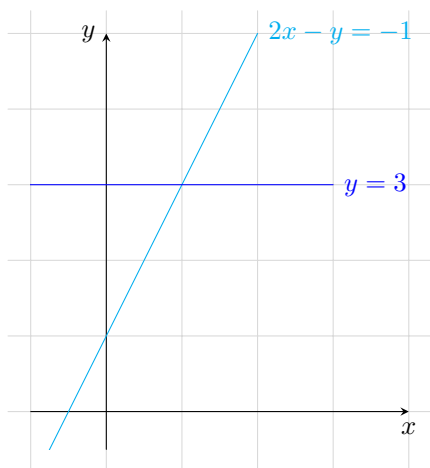
a)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(2; -1)$.



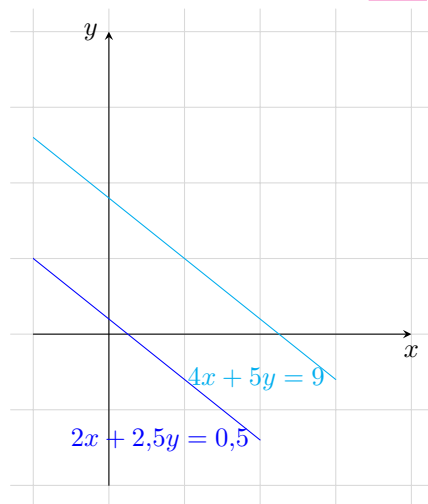
b)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(4; 1)$.



c)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 3)$.



d)

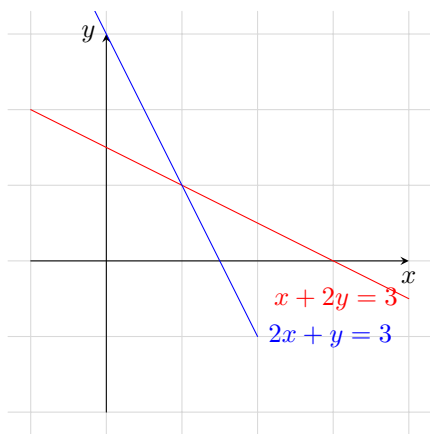
Do đó hai đường thẳng không có giao điểm.

□

⇨ **Ví dụ 13.** Cho hai phương trình $x + 2y = 3$ và $2x + y = 3$.

- Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó và cho biết tọa độ giao điểm đó là nghiệm của các phương trình nào?
- Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$. Chứng minh rằng $(x_0; y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình đó.

🗨️ **Lời giải.**



a)

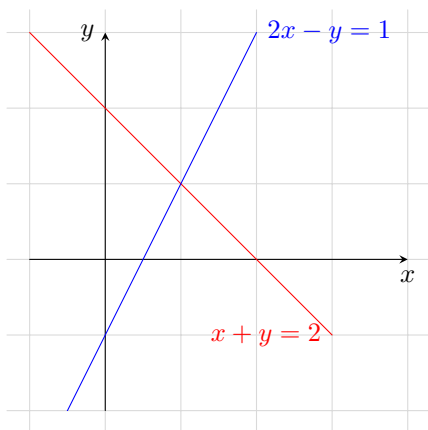
Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là điểm $(1; 1)$. Điểm $(1; 1)$ là nghiệm của hai phương trình $x + 2y = 3$ và $2x + y = 3$.

- Vì $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng nên ta có $a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$ và $a_2x_0 + b_2y_0 = c_2$. Do vậy $M(x_0; y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình.

□

⇨ **Ví dụ 14.** Cho hai phương trình $x + y = 2$ và $2x - y = 1$. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó và cho biết tọa độ giao điểm đó là nghiệm của các phương trình nào?

🗨️ **Lời giải.**



Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là điểm $(1; 1)$. Điểm $(1; 1)$ là nghiệm của hai phương trình $x + y = 2$ và $2x - y = 1$. □

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

↔ **Bài 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào xác định một hàm số dạng $y = ax + b$?

- | | | | |
|--------------------------|---------|--------------------------|---------|
| a) $y = 4x$; | ☒ Có | b) $y - 4x = 0$; | ☒ Có |
| c) $y = 2x - 1$; | ☒ Có | d) $x + 2y + 2 = 0$; | ☒ Có |
| e) $0 \cdot x + y = 7$; | ☒ Không | f) $x - 0 \cdot y = 3$. | ☒ Không |

↔ **Bài 2.** Cho các cặp số $(0; 0)$, $(0; -1)$, $(3; -1)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:

- | | | | |
|--------------------------|-----------------|--------------------------|-------------|
| a) $y = 4x$; | ☒ $(0; 0)$ | b) $x + 2y + 2 = 0$; | ☒ $(0; -1)$ |
| c) $0 \cdot x + y = 7$; | ☒ Không cặp nào | d) $x - 0 \cdot y = 3$. | ☒ $(3; -1)$ |

🗨️ Lời giải.

- a) Thay $x = 0, y = 0$ vào ta được $0 = 4 \cdot 0$ (đúng), do vậy $(0; 0)$ là nghiệm của $y = 4x$.
- b) Thay $x = 0, y = -1$ vào ta được $0 + 2(-1) + 2 = 0$ (đúng), do vậy $(0; -1)$ là nghiệm của $x - 2y + 2 = 0$.
- c) Thay $(x; y) \in \{(0; 0), (0; -1), (3; -1)\}$ ta thấy không có cặp số nào thỏa mãn $0 \cdot x + y + 7 = 0$.
- d) Thay $x = 3, y = -1$ vào ta được $3 - 0 \cdot (-1) = 3$ (đúng), do vậy $(3; -1)$ là nghiệm của $x - 0 \cdot y = 3$. □

↔ **Bài 3.** Tìm một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn trong các trường hợp sau:

- | | | | |
|--------------------------|------------|--------------------------|-------------|
| a) $y = 4x$; | ☒ $(0; 0)$ | b) $x + 2y + 2 = 0$; | ☒ $(0; -1)$ |
| c) $0 \cdot x + y = 7$; | ☒ $(0; 7)$ | d) $x - 0 \cdot y = 3$. | ☒ $(3; 0)$ |

🗨️ Lời giải.

- a) Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0 = 0$. Vậy một nghiệm của phương trình là $(0; 0)$.

✦ **Bài 5.** Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm giá trị của m để:

a) Điểm $A(-3; 1)$ thuộc đường thẳng $mx - y = 1$;

☞ $m = \frac{-2}{3}$

b) Điểm $B(2; 5)$ thuộc đường thẳng $x + my = 4$;

☞ $m = \frac{2}{5}$

c) Điểm $C(1; 1)$ thuộc đường thẳng $mx + (m + 1)y = 2$;

☞ $m = \frac{1}{2}$

d) Điểm $D(1; 2)$ thuộc đường thẳng $(2m^2 - 1)x - y = 0$.

☞ $m = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

☞ **Lời giải.**

a) Thay $x = -3, y = 1$ ta được $-3 \cdot m - 1 = 1 \Rightarrow m = \frac{-2}{3}$. Vậy $m = \frac{-2}{3}$.

b) Thay $x = 2, y = 5$ ta được $2 + m \cdot 5 = 4 \Rightarrow m = \frac{2}{5}$. Vậy $m = \frac{2}{5}$.

c) Thay $x = 1, y = 1$ ta được $m \cdot 1 + (m + 1) \cdot 1 = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$.

d) Thay $x = 1, y = 2$ ta được $(2m^2 - 1) \cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Vậy $m = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

□

✦ **Bài 6.** Vẽ mỗi cặp đường thẳng sau trong cùng một mặt phẳng tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó:

a) $2x - y = 1$ và $x + 4y = 5$;

☞ $(1; 1)$

b) $x - y = 1$ và $2x + 0, 1y = 2$;

☞ $(1; 0)$

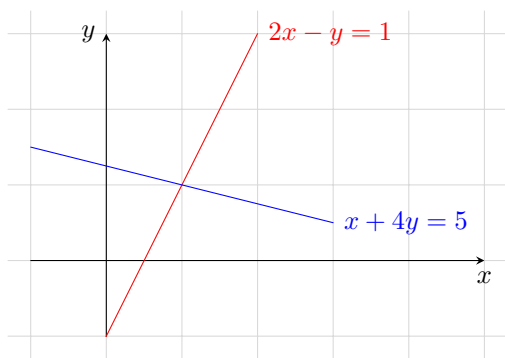
c) $x + y = 2$ và $x - y = 0$;

☞ $(1; 1)$

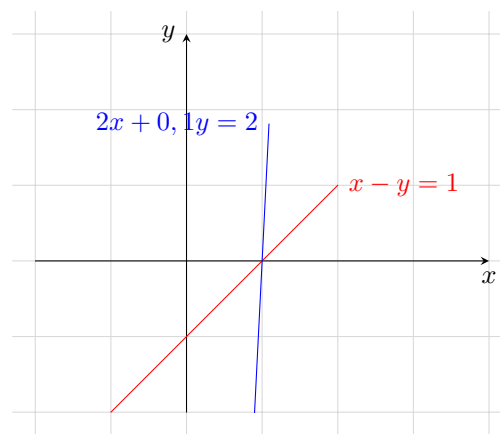
d) $x - y = 1$ và $x - 4y - 1 = 0$.

☞ $(1; 1)$

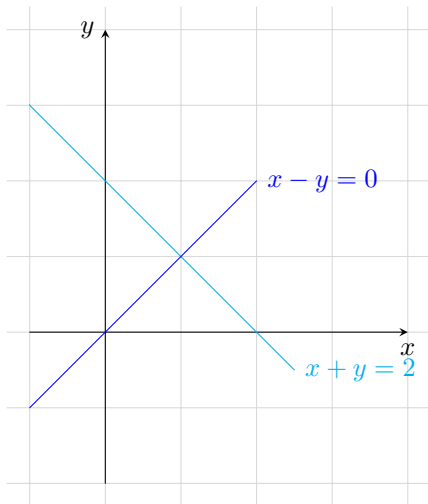
☞ **Lời giải.**



Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 1)$.

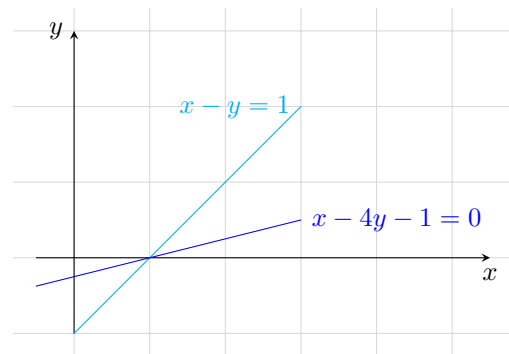


Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 0)$.



c)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 1)$.



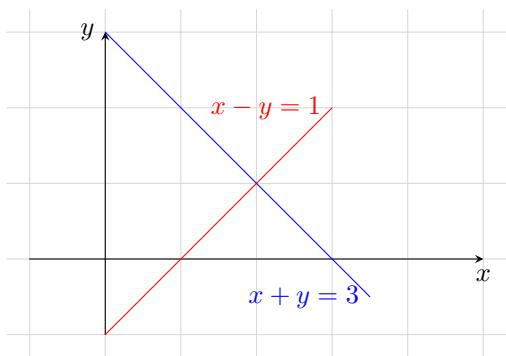
d)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 0)$.

□

✦ **Bài 7.** Cho hai phương trình $x - y = 1$ và $x + y = 3$. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó và cho biết tọa độ giao điểm đó là nghiệm của các phương trình nào?

🗨️ **Lời giải.**



Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là điểm $(2; 1)$. Điểm $(2; 1)$ là nghiệm của hai phương trình $x - y = 1$ và $x + y = 3$.

□

BÀI 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases} (I).$$

Trong đó $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$ là các phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Nếu hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình.

c) Nếu hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung thì ta nói hệ vô nghiệm.

- d) Giải hệ phương trình là tìm tất cả các cặp $(x; y)$ (tìm tập nghiệm) thỏa mãn hai phương trình (1) và (2).
- e) Hai hệ phương trình tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.
- f) Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:
Gọi $(d), (d')$ lần lượt là các đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$ thì tập nghiệm của hệ phương trình được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của (d) và (d') . Khi đó

☑ Nếu (d) cắt (d') hay $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

☑ Nếu (d) song song với (d') hay $\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hệ vô nghiệm.

☑ Nếu (d) trùng với (d') hay $\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hệ vô số nghiệm.

⚠ Số nghiệm của hệ phương trình (I) bằng số giao điểm của hai đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Kiểm tra cặp số cho trước có là nghiệm của hệ phương trình đã cho hay không

Thay cặp số $(x_0; y_0)$ vào hệ đã cho tương ứng $x = x_0; y = y_0$.
Nếu các phương trình trong hệ thỏa mãn thì kết luận $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ và ngược lại.

🔗 **Ví dụ 1.** Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, cho biết cặp số $(1; 1)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình hay không? Vì sao? 🔍 Có

💬 **Lời giải.**

Thay $x = 1, y = 1$ vào hệ phương trình ta được $\begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ 1 + 1 = 2 \end{cases}$, và cả hai phương trình đều đúng, do đó $(1; 1)$ là nghiệm của hệ. □

🔗 **Ví dụ 2.** Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$, cho biết cặp số $(1; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình hay không? Vì sao? 🔍 Không

💬 **Lời giải.**

Thay $x = 1, y = 2$ vào hệ phương trình ta được $\begin{cases} 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ 1 + 2 \cdot 2 = 2 \end{cases}$, và phương trình thứ hai sai, do đó $(1; 2)$ không là nghiệm của hệ. □

🔗 **Ví dụ 3.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$, và các cặp số $(0; 1), (0; \frac{2}{3}), (4; 5)$. Cặp nào là nghiệm của hệ phương trình hay không? Vì sao? 🔍 $(0; \frac{2}{3})$

💬 **Lời giải.**

Thay $(x; y) \in \left\{ (0; 1), \left(0; \frac{2}{3}\right), (4; 5) \right\}$ vào hệ phương trình ta thấy $\begin{cases} 0 - 3 \cdot \frac{2}{3} = -2 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$, và cả hai phương trình đều đúng, do đó $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ là nghiệm của hệ. \square

❖ **Ví dụ 4.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$, và các cặp số $(0; -1), (2; 3), (3; -5)$. Cặp nào là nghiệm của hệ phương trình hay không? Vì sao? 🔍 Không có cặp nào

🗨️ Lời giải.

Thay $(x; y) \in \{(0; -1), (2; 3), (3; -5)\}$ vào hệ phương trình ta thấy phương trình đều sai, do đó không có cặp nào là nghiệm của hệ phương trình. \square

📁 Dạng 2. Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình

Bước 1. Đưa hệ về dạng $\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}$;

Bước 2. So sánh các hệ số tương ứng các trường hợp sau:

- 🔍 Nếu $m_1 \neq m_2$ hệ có nghiệm duy nhất.
- 🔍 Nếu $m_1 = m_2; n_1 \neq n_2$ hệ vô nghiệm.
- 🔍 Nếu $m_1 = m_2; n_1 = n_2$ hệ vô số nghiệm.

❖ **Ví dụ 5.** Không vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây:

- a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$ 🔍 Vô nghiệm c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 2y = 2x + 2 \end{cases}$ 🔍 Vô số nghiệm
🔍 Nghiệm duy nhất

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $m_1 = 2 \neq 1 = m_2$, do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
 b) Ta có $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = -2 \neq 3 = n_2$, do vậy hệ vô nghiệm.
 c) Ta có $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = 1 = n_2$, do vậy hệ vô số nghiệm. \square

❖ **Ví dụ 6.** Không vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây:

- a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$ 🔍 Vô nghiệm c) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2y = 6x + 2 \end{cases}$ 🔍 Vô số nghiệm
🔍 Nghiệm duy nhất

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $m_1 = 3 \neq 1 = m_2$, do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
 b) Ta có $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = 1 \neq 4 = n_2$, do vậy hệ vô nghiệm.
 c) Ta có $m_1 = 3 = m_2$ và $n_1 = 1 = n_2$, do vậy hệ vô số nghiệm.



⇨ **Ví dụ 7.** Xác định số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

👉 Nghiệm duy nhất

$$\text{b) } \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

👉 Vô nghiệm

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

👉 Vô số nghiệm

🗨️ **Lời giải.**

a) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ do $m_1 = 2 \neq 1 = m_2$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$ do $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = -2 \neq 3 = n_2$ nên hệ vô nghiệm.

c) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ do $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = 1 = n_2$ nên hệ có vô số nghiệm.



⇨ **Ví dụ 8.** Xác định số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

👉 Nghiệm duy nhất

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

👉 Vô nghiệm

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 6x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

👉 Vô số nghiệm

🗨️ **Lời giải.**

a) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ do $m_1 = 3 \neq 1 = m_2$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$ do $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = 1 \neq 4 = n_2$ nên hệ vô nghiệm.

c) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ do $m_1 = 3 = m_2$ và $n_1 = 1 = n_2$ nên hệ có vô số nghiệm.



⇨ **Ví dụ 9.** Cho hai phương trình $2x - y = 2$ và $x + 3y = 5$.

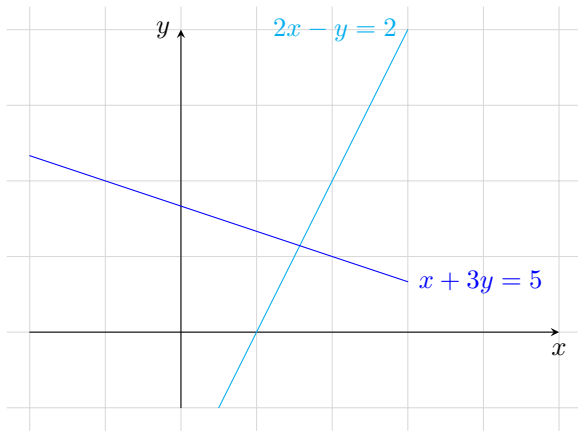
a) Cho biết nghiệm tổng quát của mỗi phương trình.

b) Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình trên cùng một hệ trục tọa độ.

c) Xác định nghiệm chung của hai phương trình.

🗨️ **Lời giải.**

a) Phương trình $2x - y = 2$ có nghiệm tổng quát là $(x; 2x - 2)$ với $x \in \mathbb{R}$. Phương trình $x + 3y = 5$ có nghiệm tổng quát là $\left(x; \frac{-1}{3}x + \frac{5}{3}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$.



b)

c) Nhìn vào hình ta thấy $(\frac{11}{7}; \frac{8}{7})$ là nghiệm chung của hai phương trình.

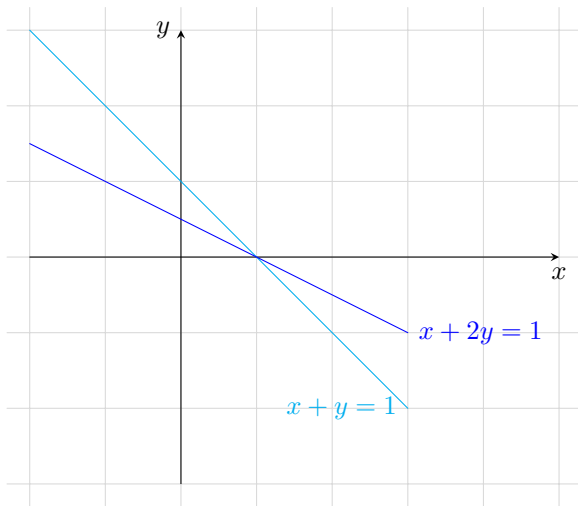
□

⇨ **Ví dụ 10.** Cho hai phương trình $x + y = 1$ và $x + 2y = 1$.

- a) Cho biết nghiệm tổng quát của mỗi phương trình.
- b) Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình trên cùng một hệ trục tọa độ, rồi xác định nghiệm chung của hai phương trình.

Lời giải.

a) Phương trình $x + y = 1$ có nghiệm tổng quát là $(x; 1 - x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Phương trình $x + 2y = 1$ có nghiệm tổng quát là $(x; \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2})$ với $x \in \mathbb{R}$.



b)

Nhìn vào hình ta thấy $(1; 0)$ là nghiệm chung của hai phương trình.

□

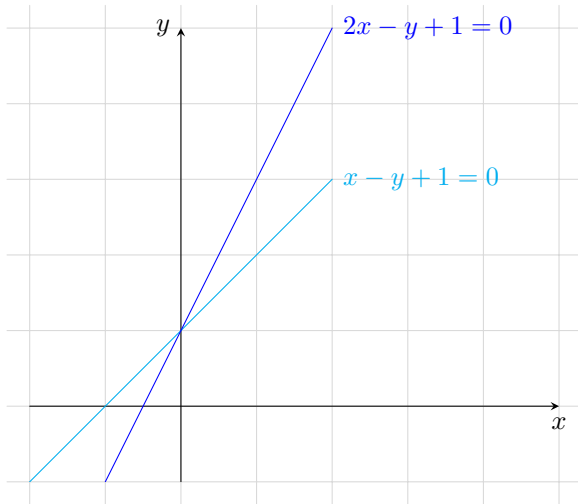
Dạng 3. Tìm nghiệm của hệ phương trình bằng phương pháp hình học

Vẽ đường thẳng tương ứng với mỗi phương trình sau đó tìm giao điểm.

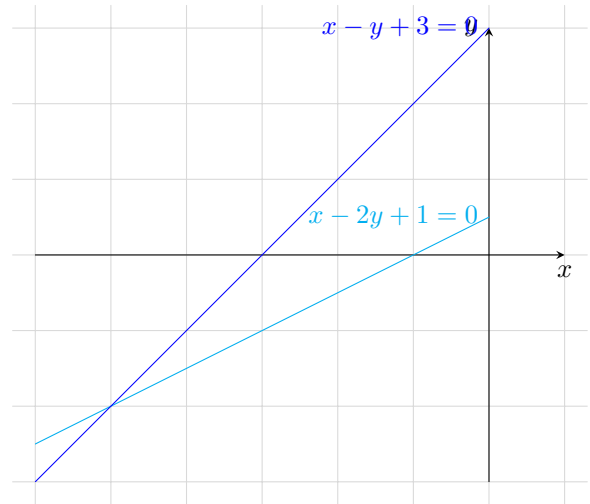
⇨ **Ví dụ 11.** Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau bằng phương pháp hình học.

- a) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$ $\color{red}{\curvearrowright} (0; 1)$
- b) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ $\color{red}{\curvearrowright} (-5; -2)$

🗨️ Lời giải.



a)

Do đó nghiệm của hệ phương trình là $(0; 1)$.

b)

Do đó nghiệm của hệ phương trình là $(-5; -2)$.

□

🔗 Ví dụ 12. Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau bằng phương pháp hình học.

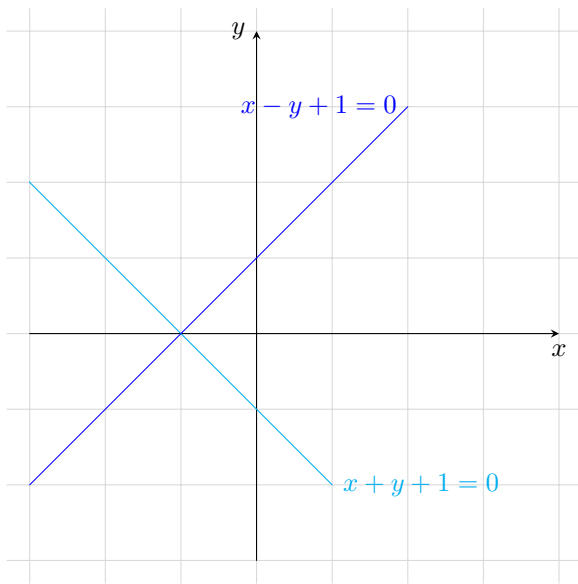
$$a) \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

🔍 $(-1; 0)$

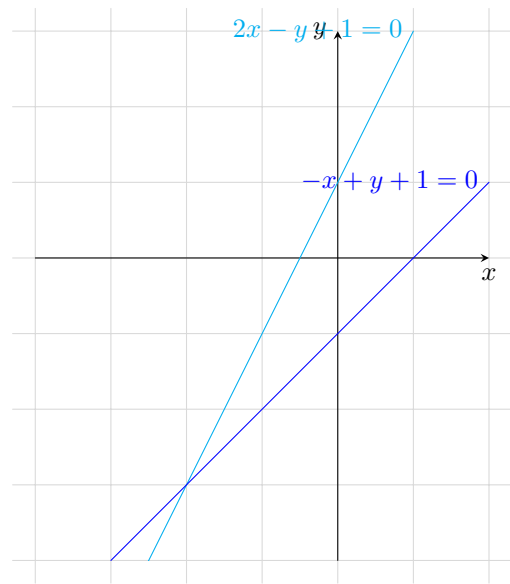
$$b) \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

🔍 $(-2; -3)$

🗨️ Lời giải.



a)

Do đó nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 0)$.

b)

Do đó nghiệm của hệ phương trình là $(-2; -3)$.

□

🔗 Ví dụ 13. Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng sau:

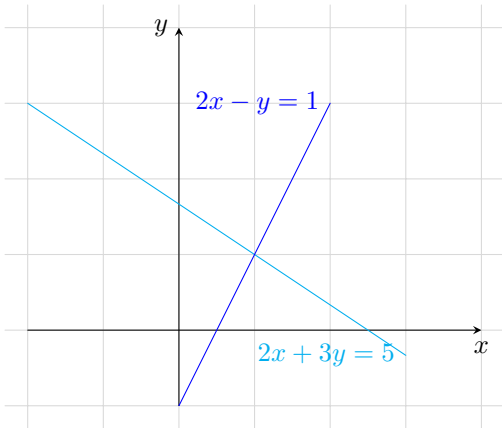
$$a) 2x + 3y = 5 \text{ và } 2x - y = 1;$$

🔍 $(1; 1)$

$$b) x + y - 2 = 0 \text{ và } x + 1 = 2y.$$

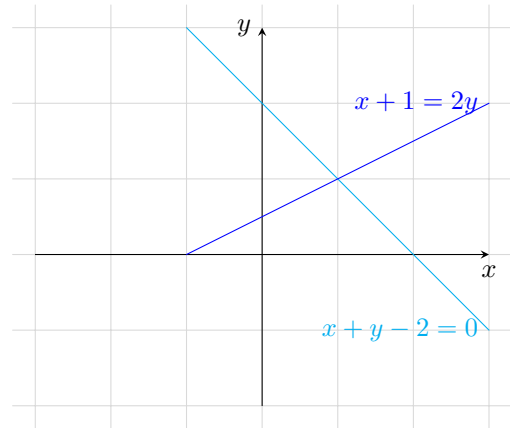
🔍 $(1; 1)$

🗨️ Lời giải.



a)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 1)$.



b)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 1)$.



🔗 **Ví dụ 14.** Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng sau:

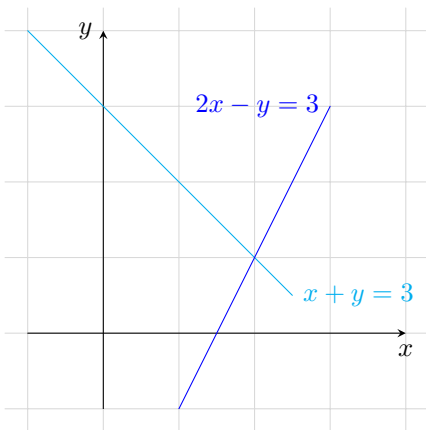
a) $x + y = 3$ và $2x - y = 3$;

☞ $(2; 1)$

b) $x + 2y - 4 = 0$ và $2x - 1 = y$.

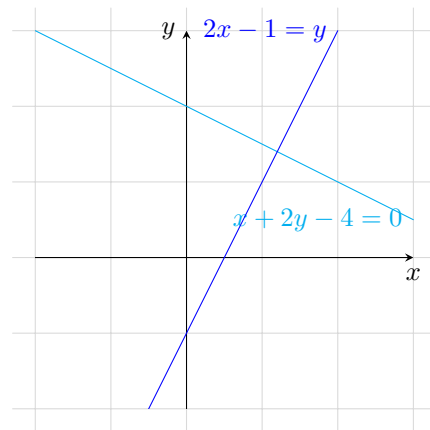
☞ $(\frac{6}{5}; \frac{7}{5})$

🗨 **Lời giải.**



a)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(2; 1)$.



b)

Do đó giao điểm của hai đường thẳng là $(\frac{6}{5}; \frac{7}{5})$.



📁 Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

Bước 1. Đưa hệ về dạng $\begin{cases} y = a_1x + b_1; \\ y = a_2x + b_2; \end{cases}$

Bước 2. Xác định các hệ số $a_1; a_2; b_1; b_2$ trong mỗi phương trình ở Bước 1 và áp dụng vị trí tương đối của hai đường thẳng.

🔗 **Ví dụ 15.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} (a + 2)x + y = 3 \\ x - y = a + 1 \end{cases}$. Tìm tham số a để hệ thỏa mãn:

a) Có nghiệm duy nhất;

b) Vô nghiệm;

☞ $a = -3$

c) Vô số nghiệm. ☞ Không có a

☞ $a \neq -3$




 **Lời giải.**

Ta có
$$\begin{cases} (a+2)x + y = 3 \\ x - y = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (-a-2)x + 3 \\ y = x - a - 1 \end{cases}. \text{ Khi đó,}$$

- a) Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $-a - 2 \neq 1 \Leftrightarrow a \neq -3$.
 b) Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $-a - 2 = 1$ và $3 \neq -a - 1$. Vậy $a = -3$.
 c) Hệ vô số nghiệm khi và chỉ khi $-a - 2 = 1$ và $3 = -a - 1$. Không có a thỏa mãn.

□

❖ **Ví dụ 16.** Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ 2x + y = a - 1 \end{cases}$$
. Tìm tham số a để hệ thỏa mãn:

- a) Có nghiệm duy nhất; b) Vô nghiệm;  $a = -2$ c) Vô số nghiệm.  Không có a
 $a \neq -2$




 **Lời giải.**

Ta có
$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ 2x + y = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax - 1 \\ y = -2x + a - 1 \end{cases}. \text{ Khi đó,}$$

- a) Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq -2$.
 b) Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $a = -2$ và $-1 \neq a - 1$. Vậy $a = -2$.
 c) Hệ vô số nghiệm khi và chỉ khi $a = -2$ và $-1 = a - 1$. Không có a thỏa mãn.

□

❖ **Ví dụ 17.** Cho hai đường thẳng $d: ax + y = 1 - a$ và $d': (2a - 1)x + y = 5$. Tìm tham số a sao cho:

- a) d cắt d' tại một điểm; b) d và d' song song;  $a = 1$ c) d trùng với d' .  Không có a
 $a \neq 1$




 **Lời giải.**

Ta có $d: ax + y = 1 - a$ hay có dạng $d: y = -ax - a + 1$ và $d': (2a - 1)x + y = 5$ hay có dạng $d': y = (-2a + 1)x + 5$. Khi đó,

- a) Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm khi và chỉ khi $-a \neq -2a + 1$, hay $a \neq 1$.
 b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $-a = -2a + 1$ và $-a + 1 \neq 5$. Vậy $a = 1$.
 c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi $-a = -2a + 1$ và $-a + 1 = 5$. Không có a thỏa mãn.

□

❖ **Ví dụ 18.** Cho hai đường thẳng $d: x + y = 1 + a$ và $d': (a + 1)x + y = 4$. Tìm tham số a sao cho:

- a) d cắt d' tại một điểm; b) d và d' song song;  $a = 0$ c) d trùng với d' .  Không có a
 $a \neq 0$

 **Lời giải.**

Ta có $d: x + y = 1 + a$ hay có dạng $d: y = -x + a + 1$ và $d': (a + 1)x + y = 4$ hay có dạng $d': y = (-a - 1)x + 4$. Khi đó,

- a) Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm khi và chỉ khi $-1 \neq -a - 1$, hay $a \neq 0$.
 b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $-1 = -a - 1$ và $a + 1 \neq 4$. Vậy $a = 0$.
 c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi $-1 = -a - 1$ và $a + 1 = 4$. Không có a thỏa mãn.

□

Dạng 5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

a) Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì d cắt d' tại một điểm.

b) Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì d song song với d' .

c) Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì d trùng với d' .

🔗 **Ví dụ 19.** Xác định vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $y = x + 1$ và $2x + y = 3$; 🔍 Cắt tại một điểm b) $x + y - 2 = 0$ và $y = 3 - x$; 🔍 Song song

c) $3x + 2y = 5$ và $\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 1$. 🔍 Trùng nhau

🗨️ Lời giải.

a) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x - y + 1 = 0$ và $2x + y - 3 = 0$, khi đó

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} \neq -1 = \frac{-1}{1} = \frac{b_1}{b_2}$$

do vậy hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm.

b) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x + y - 2 = 0$ và $x + y - 3 = 0$, khi đó

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{-2}{-3} = \frac{c_1}{c_2}$$

do vậy hai đường thẳng song song.

c) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $3x + 2y - 5 = 0$ và $3x + 2y - 5 = 0$, do vậy hai đường thẳng trùng nhau. □

🔗 **Ví dụ 20.** Xác định vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $y = x$ và $x + y = 4$; 🔍 Cắt tại một điểm b) $x + y - 1 = 0$ và $y = 1 - x$; 🔍 Trùng nhau

c) $x + 2y = 4$ và $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1$. 🔍 Trùng nhau

🗨️ Lời giải.

a) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x - y = 0$ và $x + y - 4 = 0$, khi đó

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1 \neq -1 = \frac{-1}{1} = \frac{b_1}{b_2}$$

do vậy hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm.

b) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x + y - 1 = 0$ và $-x - y + 1 = 0$, khi đó

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-1} = -1 = -1 = \frac{1}{-1} = \frac{b_1}{b_2} = -1 = \frac{-1}{1} = \frac{c_1}{c_2}$$

do vậy hai đường thẳng trùng nhau.

c) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x + 2y - 4 = 0$ và $x + 2y - 4 = 0$, do vậy hai đường thẳng trùng nhau. □

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 1.** Cho biết cặp số $(2; 1)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, hay không? Vì sao? 🔍 Không

🗨 **Lời giải.**

Thay $x = 2, y = 1$ vào hệ phương trình ta được $\begin{cases} 2 - 2 \cdot 1 = 4 \\ 2 + 2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$, và cả hai phương trình đều sai, do đó $(2; 1)$ không là nghiệm của hệ. □

✦ **Bài 2.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$, và các cặp số $(3; 4), (-4; 5), (2; -7)$. Cặp nào là nghiệm của hệ phương trình hay không? Vì sao? 🔍 Không có cặp nào

🗨 **Lời giải.**

Thay $(x; y) \in \{(3; 4), (-4; 5), (2; -7)\}$ vào hệ phương trình ta thấy không có cặp nào là nghiệm của hệ. □

✦ **Bài 3.** Không vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây:

a) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ 🔍 Vô nghiệm b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$ 🔍 Nghiệm duy nhất c) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = 2x - 6 \end{cases}$ 🔍 Vô số nghiệm

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = -2 \neq 1 = n_2$, do vậy hệ vô nghiệm.

b) Ta có $m_1 = 2 \neq -1 = m_2$, do vậy hệ có nghiệm duy nhất.

c) Ta có $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = -3 = n_2$, do vậy hệ vô số nghiệm. □

✦ **Bài 4.** Xác định số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây:

a) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$ 🔍 Nghiệm duy nhất b) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x = 4 - y \end{cases}$ 🔍 Vô nghiệm c) $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 4x = 4y + 4 \end{cases}$ 🔍 Vô số nghiệm

🗨 **Lời giải.**

- a) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = 3x + 5 \end{cases}$ do $m_1 = \frac{1}{2} \neq 3 = m_2$ nên hệ có nghiệm duy nhất.
- b) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$ do $m_1 = -1 = m_2$ và $n_1 = -1 \neq 4 = n_2$ nên hệ vô nghiệm.
- c) Hệ được viết lại như sau $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$ do $m_1 = 1 = m_2$ và $n_1 = -1 = n_2$ nên hệ có vô số nghiệm.

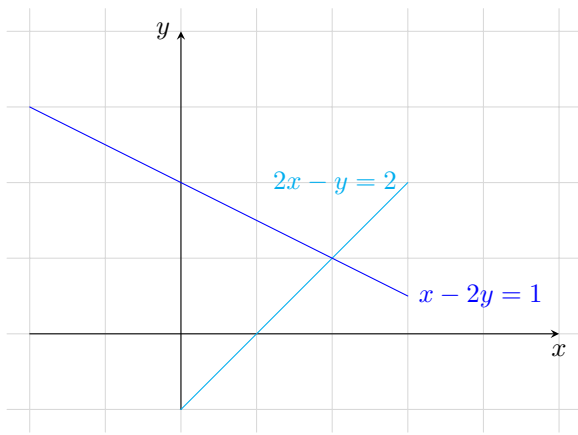
□

✦ **Bài 5.** Cho hai phương trình $x - y = 1$ và $x + 2y = 4$.

- a) Cho biết nghiệm tổng quát của mỗi phương trình.
 b) Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình trên cùng một hệ trục tọa độ.
 c) Xác định nghiệm chung của hai phương trình.

🗨 **Lời giải.**

- a) Phương trình $x - y = 1$ có nghiệm tổng quát là $(x; x - 1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Phương trình $x + 2y = 4$ có nghiệm tổng quát là $(x; \frac{-1}{2}x + 2)$ với $x \in \mathbb{R}$.



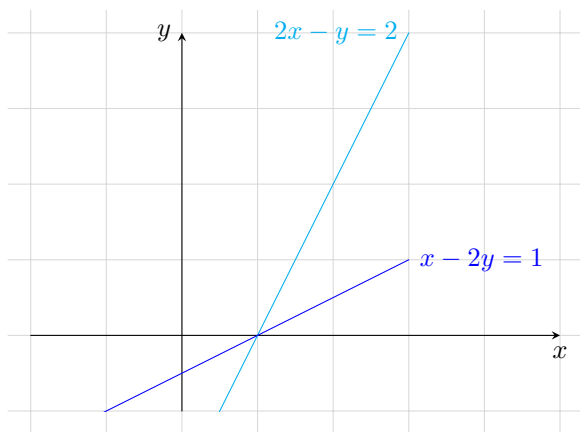
- b)
 c) Nhìn vào hình ta thấy $(2; 1)$ là nghiệm chung của hai phương trình.

□

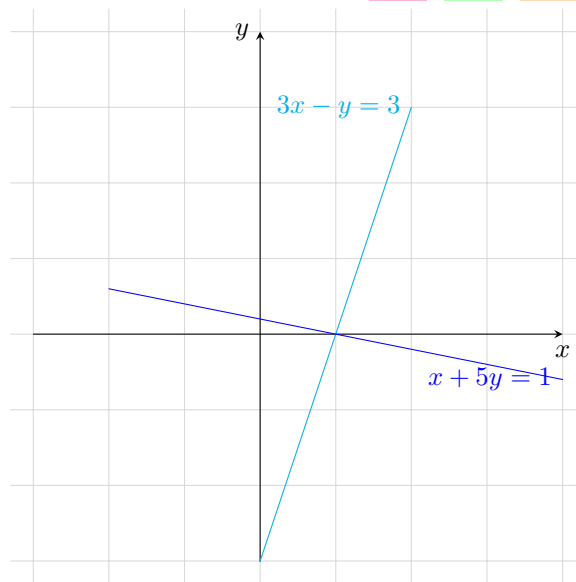
✦ **Bài 6.** Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau bằng phương pháp hình học.

- a) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ $\color{red}{\text{Q}}$ $(1; 0)$ b) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$ $\color{red}{\text{Q}}$ $(1; 0)$

🗨 **Lời giải.**



a)

Do vậy nghiệm của hệ là $(1; 0)$.

b)

Do vậy nghiệm của hệ là $(1; 0)$.

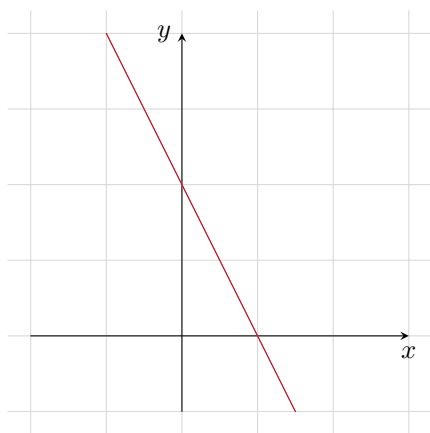
□

🔗 **Bài 7.** Tìm giao điểm của các cặp đường thẳng sau:

a) $2x + y = 2$ và $4x + 2y = 4$; 🔍 Vô số giao điểm

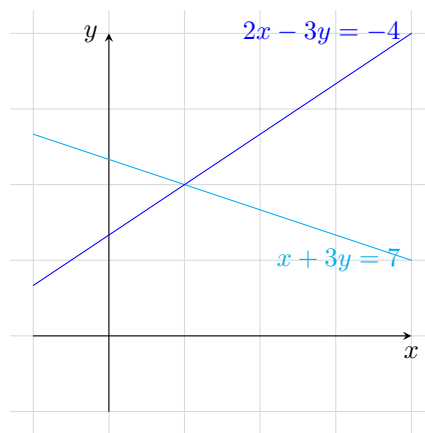
b) $x + 3y = 7$ và $2x - 3y = -4$. 🔍 $(1; 2)$

💬 **Lời giải.**



a)

Do vậy giao điểm của hai đường thẳng là vô số.



b)

Do vậy giao điểm của hai đường thẳng là $(1; 2)$.

□

🔗 **Bài 8.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3ay = 2 \\ 5x + 3y = 2a - 1 \end{cases}$. Tìm tham số a để hệ thỏa mãn:

a) Có nghiệm duy nhất;

b) Vô nghiệm;

🔍 $a = \frac{-2}{5}$

c) Vô số nghiệm.

🔍 $a = 0$ hoặc $a \neq \frac{-2}{5}$

🔍 Không có a thỏa mãn

💬 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x - 3ay = 2 \\ 5x + 3y = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3a}x - \frac{2}{3a} \\ y = \frac{-5}{3}x + \frac{2a-1}{3} \end{cases} \quad (a \neq 0). \text{ Khi đó,}$$

- a) Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\frac{2}{3a} \neq \frac{-5}{3} \Leftrightarrow a \neq \frac{-2}{5}$.
- b) Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\frac{2}{3a} = \frac{-5}{3}$ và $\frac{-2}{3a} \neq \frac{2a-1}{3}$. Vậy $a = \frac{-2}{5}$.
- c) Hệ vô số nghiệm khi và chỉ khi $\frac{2}{3a} = \frac{-5}{3}$ và $\frac{-2}{3a} = \frac{2a-1}{3}$. Không có a thỏa mãn.

Mặt khác với $a = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất là $\left(1; \frac{-4}{3}\right)$. □

✦ **Bài 9.** Cho hai đường thẳng $d: ax + y = a - 1$ và $d': (a + 1)x + y = 4$. Tìm tham số a sao cho:

- a) d cắt d' tại một điểm; b) d và d' song song; c) d trùng với d' .
- 🔗 $a \in \mathbb{R}$ 🔗 Không có giá trị a 🔗 Không có giá trị a

🗨️ Lời giải.

Ta có $d: ax + y = a - 1$ hay có dạng $d: y = -ax + a - 1$ và $d': (a + 1)x + y = 4$ hay có dạng $d': y = (-a - 1)x + 4$. Khi đó,

- a) Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm khi và chỉ khi $-a \neq -a - 1$, hay $0 \neq -1$ (luôn đúng).
Vậy hai đường thẳng cắt nhau khi $a \in \mathbb{R}$.
- b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $-a = -a - 1$ và $a - 1 \neq 4$. Không có a thỏa mãn.
- c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi $-a = -a - 1$ và $a - 1 = 4$. Không có a thỏa mãn. □

✦ **Bài 10.** Xác định vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

- a) $y = x - 4$ và $x + y = 4$; 🔗 Cắt tại một điểm b) $x + 2y - 3 = 0$ và $y = 1 - \frac{1}{2}x$; 🔗 Song song
- c) $x + y + 1 = 0$ và $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = -\frac{1}{4}$. 🔗 Trùng nhau

🗨️ Lời giải.

- a) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x - y - 4 = 0$ và $x + y - 4 = 0$, khi đó

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1 \neq -1 = \frac{-1}{1} = \frac{b_1}{b_2}$$

do vậy hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm.

- b) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x + 2y - 3 = 0$ và $-x - 2y + 2 = 0$, khi đó

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-1} = -1 \neq -1 = \frac{2}{-2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{-3}{2} = \frac{c_1}{c_2}$$

do vậy hai đường thẳng song song.

- c) Hai đường thẳng được viết lại dưới dạng $x + y + 1 = 0$ và $x + y + 1 = 0$, do vậy hai đường thẳng trùng nhau. □

BÀI 3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- a) *Quy tắc thế* là quy tắc dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.
- b) Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp thế:
- ☑ *Bước 1.* Từ một trong hai phương trình, biểu diễn ẩn này theo ẩn kia (*thường chọn ẩn có hệ số là 1 hoặc -1*).
 - ☑ *Bước 2.* Thế ẩn ở Bước 1 vào phương trình còn lại và giải phương trình bậc nhất vừa tìm được.
 - ☑ *Bước 3.* Kết luận nghiệm của hệ phương trình.
- ⚠ *Đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y giải bằng phương pháp thế có thể lựa chọn việc rút x hoặc rút y . Để tránh độ phức tạp trong tính toán ta thường chọn rút ẩn có hệ số là ± 1 trong hệ đã cho.*
- ☑ *Ưu điểm của phương pháp thế được thể hiện trong bài toán giải và biện luận hệ phương trình, vì sau khi thế ta được phương trình một ẩn. Số nghiệm của hệ đã cho phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn.*

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Thực hiện theo hai bước đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết*.

🔗 **Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad \text{☑} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 0,25x - 0,36y = 4 \\ 0,7x - 0,4y = 1; \end{cases} \quad \text{☑} \quad \begin{cases} x = -\frac{155}{19} \\ y = -\frac{1275}{76} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - \frac{y}{3} = 4 \\ 2x - y = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \text{☑} \quad \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ y = 23 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = 7 \\ \frac{4x}{7} + \frac{y}{5} = -1; \end{cases} \quad \text{☑} \quad \begin{cases} x = \frac{77}{47} \\ y = -\frac{455}{47} \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} (1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y = 4 \\ (1 + \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 3; \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 5 \\ x + (1 + \sqrt{2})y = 2. \end{cases} \quad \text{☑} \quad \begin{cases} x = 7 - 2\sqrt{2} \\ y = 9 - 7\sqrt{2} \end{cases}$$

☑
$$\begin{cases} x = \frac{-9 + 10\sqrt{3}}{6} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

a)
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 2(y + 2) + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 0,25x - 0,36y = 4 \\ 0,7x - 0,4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,44y + 16 \\ 0,7(1,44y + 16) - 0,4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,44y + 16 \\ 0,608y = -10,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{155}{19} \\ y = -\frac{1275}{76} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - \frac{y}{3} = 4 \\ 2x - y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{3} + 4 \\ 2\left(\frac{y}{3} + 4\right) - y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{3} + 4 \\ -\frac{y}{3} = -\frac{23}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ y = 23 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = 7 \\ \frac{4x}{7} + \frac{y}{5} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 21 \\ \frac{4(2y + 21)}{7} + \frac{y}{5} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 21 \\ \frac{47}{35}y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{77}{47} \\ y = -\frac{455}{47} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} (1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y = 4 \\ (1 + \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - (1 - \sqrt{3})y}{1 + \sqrt{3}} \\ (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{4 - (1 - \sqrt{3})y}{1 + \sqrt{3}} + (1 + \sqrt{3})y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - (1 - \sqrt{3})y}{1 + \sqrt{3}} \\ 2\sqrt{3}y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 + 10\sqrt{3}}{6} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 5 \\ x + (1 + \sqrt{2})y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - \sqrt{2}x \\ x + (1 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2}x) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - \sqrt{2}x \\ (-1 - \sqrt{2})x = -3 - 5\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - 7\sqrt{2} \\ x = 7 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

□

❖ **Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ (a^2 + 1)x + 2y = 4a \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $a = -1$; 🚫 vô nghiệm b) $a = 0$; 🚫 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ c) $a = 1$. 🚫 vô số nghiệm

💬 **Lời giải.**

a) Với $a = -1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 2(2 - y) + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 4 = -4 \text{ (vô lí)} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

b) Với $a = 0$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 2 - y + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

c) Với $a = 1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 2(2 - y) + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 4 = 4 \text{ (luôn đúng)} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

□

Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về phương trình bậc nhất hai ẩn

- 🕒 *Bước 1.* Thu gọn hệ phương trình đã cho về dạng đơn giản;
- 🕒 *Bước 2.* Sử dụng quy tắc thế giải hệ phương trình vừa nhận được;
- 🕒 *Bước 3.* Kiểm tra điều kiện (nếu có) và kết luận nghiệm.

🔗 **Ví dụ 3.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2(x - 2y) + 3(x + 2y) = 4 \\ (x - y) + 2(x + y) = 1; \end{cases} & \text{a) } \begin{cases} x + 1 - y = 2x + y \\ 3x + y = x - y + 2; \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + 2y) = -3 \\ 3(x + 2) + 2(1 - 2y) = -1; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \frac{x - y - 1}{2} + \frac{x - 2y}{4} = 1 \\ \frac{x + 2y}{3} - \frac{y - x - 3}{6} = 2. \end{cases} \end{array}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 2(x - 2y) + 3(x + 2y) = 4 \\ (x - y) + 2(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2(3x - 1) = 4 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{11} \\ y = \frac{7}{11} \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + 1 - y = 2x + y \\ 3x + y = x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 2(1 - 2y) + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + 2y) = -3 \\ 3(x + 2) + 2(1 - 2y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = -2 \\ 3x - 4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 1 \\ 3(-3y - 1) - 4y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{31}{13} \\ y = \frac{6}{13} \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} \frac{x - y - 1}{2} + \frac{x - 2y}{4} = 1 \\ \frac{x + 2y}{3} - \frac{y - x - 3}{6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} - y = \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x}{4} - \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{4} - \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{7} \\ x = \frac{18}{7} \end{cases} \end{array}$$

□

🔗 **Ví dụ 4.** Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} (x + 1)(y + 1) = (x - 3)(y + 3) \\ (x + 1)(2y - 1) = (2x - 1)(y + 1); \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} (x - 1)(y + 1) = (2x - 3)(y - 2) - xy \\ (x + 1)(2y - 1) = (x - 1)(y + 1) + xy. \end{cases} \\ & \text{a) } \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x = \frac{21}{19} \\ y = \frac{14}{19} \end{cases} \end{array}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} (x + 1)(y + 1) = (x - 3)(y + 3) \\ (x + 1)(2y - 1) = (2x - 1)(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -10 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ -3(2y + 5) + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} (x - 1)(y + 1) = (2x - 3)(y - 2) - xy \\ (x + 1)(2y - 1) = (x - 1)(y + 1) + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot \frac{3}{2}y + 2y = 7 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{19} \\ y = \frac{14}{19} \end{cases} \end{array}$$

□

Dạng 3. Sử dụng đặt ẩn phụ giải hệ phương trình quy về phương trình bậc nhất hai ẩn

- ☑ *Bước 1.* Đặt ẩn phụ và điều kiện (nếu có);
- ☑ *Bước 2.* Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mới thu được;
- ☑ *Bước 3.* Từ các giá trị ẩn phụ nhận được giải tìm các ẩn của hệ ban đầu;
- ☑ *Bước 4.* Kiểm tra điều kiện (nếu có) và kết luận nghiệm.

🔗 **Ví dụ 5.** Giải các hệ phương trình sau

| | | | |
|---|---|--|---|
| a) $\begin{cases} 2(x - y) + 4(x + 2y) = 6 \\ 3(x - y) - (x + 2y) = 2; \end{cases}$ | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3; \end{cases}$ | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} \frac{1}{x - y} + \frac{1}{2x + y} = 2 \\ \frac{3}{x - y} - \frac{2}{2x + y} = -2; \end{cases}$ | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{24} \\ y = -\frac{35}{24} \end{cases}$ | d) $\begin{cases} \frac{3x}{x - 1} - \frac{2}{y + 3} = 3 \\ \frac{4x}{x - 1} + \frac{1}{y + 3} = 5; \end{cases}$ | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$ |
| e) $\begin{cases} \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} = 2 \\ \frac{6}{x + 1} - \frac{2}{y + 1} = 1; \end{cases}$ | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} \frac{1}{x - y + 2} + \frac{1}{x + y - 1} = 8 \\ \frac{2}{x - y + 2} - \frac{1}{x + y - 1} = 6. \end{cases}$ | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{17}{70} \\ y = \frac{54}{35} \end{cases}$ |

🗨️ **Lời giải.**

a) Đặt $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + 4v = 6 \\ 3u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - 2v \\ 3(3 - 2v) - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y + 1 + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u - 2v = -1 \\ 2u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v - 1 \\ 2(2v - 1) + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa)}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

c) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq y \\ 2x \neq -y \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x-y} \\ v = \frac{1}{2x+y} \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ 3u - 2v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - v \\ 3(2 - v) - 2v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{5} \\ v = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2x+y} = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{5}{2} \\ 2x + y = \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{5}{2} \\ 2\left(y + \frac{5}{2}\right) + y = \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{24} \\ y = -\frac{35}{24} \end{cases}.$$

d) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{x}{x-1} \\ v = \frac{1}{y+3} \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3u - 2v = 3 \\ 4u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 2(5 - 4u) = 3 \\ v = 5 - 4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{13}{11} \\ v = \frac{3}{11} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{x}{x-1} = \frac{13}{11} \\ \frac{1}{y+3} = \frac{3}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

e) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x+1} \\ v = \frac{1}{y+1} \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 2 \\ 6u - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - 2u \\ 6u - 2(2 - 2u) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ u = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

f) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y + 2 \neq 0 \\ x + y - 1 \neq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x - y + 2} \\ v = \frac{1}{x + y - 1} \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 8 \\ 2u - v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2u - 6 = 8 \\ v = 2u - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{14}{3} \\ v = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x - y + 2} = \frac{14}{3} \\ \frac{1}{x + y - 1} = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2 = \frac{3}{14} \\ x + y - 1 = \frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{25}{14} \\ y - \frac{25}{14} + y - 1 = \frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{17}{70} \\ y = \frac{54}{35} \end{cases}$$

□

Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

Với dạng này cần thay tọa độ các điểm, tọa độ các giao điểm của các phương trình (hoặc giao điểm các đường thẳng) vào hệ đã cho tìm các giá trị thỏa mãn yêu cầu.

❖ **Ví dụ 6.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2ax - by = 3 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$. Xác định các hệ số a và b , biết:

a) Hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$;

$$\text{? } a = \frac{7}{2}, b = 2$$

b) Hệ có nghiệm $(x; y) = (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.

$$\text{? } a = \frac{38 + 11\sqrt{3}}{23}, b = -\frac{103 + 5\sqrt{3}}{46}$$

Lời giải.

a) Vì hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$ nên

$$\begin{cases} 2a - 2b = 3 \\ b - 2a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2(2a - 5) = 3 \\ b = 2a - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

b) Vì hệ có nghiệm $(x; y) = (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ nên

$$\begin{cases} 2(1 - \sqrt{3})a - (1 + \sqrt{3})b = 3 \\ (1 - \sqrt{3})b - (1 + \sqrt{3})a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - \sqrt{3})a - (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{(1 + \sqrt{3})a - 5}{1 - \sqrt{3}} = 3 \\ b = \frac{(1 + \sqrt{3})a - 5}{1 - \sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{38 + 11\sqrt{3}}{23} \\ b = -\frac{103 + 5\sqrt{3}}{46} \end{cases}$$



◀ Ví dụ 7. Tìm giá trị của a và b để hai đường thẳng $(d_1): ax + (b-1)y = 4$ và $(d_2): 2bx - ay = 5$ cắt nhau tại điểm $M(1; 3)$.

$$\text{☞ } a = -\frac{1}{11}, b = \frac{26}{11}$$

☞ Lời giải.

Vì $M(1; 3)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a \cdot 1 + (b-1) \cdot 3 = 4 \\ 2b \cdot 1 - a \cdot 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 7 \\ -3a + 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 - 3b \\ -3(7 - 3b) + 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{11} \\ b = \frac{26}{11} \end{cases}.$$



◀ Ví dụ 8. Tìm a và b để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua hai điểm:

a) $A(1; -2), B\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; ☞ $a = -\frac{9}{2}, b = \frac{5}{2}$ b) $C(1; 3), D(-1; 5)$. ☞ $a = -1, b = 4$

☞ Lời giải.

a) Vì (d) đi qua $A(1; -2), B\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ \frac{1}{3}a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 - b \\ \frac{1}{3}(-2 - b) + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

b) Vì (d) đi qua $C(1; 3), D(-1; 5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ -a + 3 - a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -1 \end{cases}.$$



◀ Ví dụ 9. Tìm a và b để đường thẳng $ax + by = a - 2$ đi qua điểm $M(1; 1)$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): x - 2y = -1$ và $(d_2): 2x - y = 4$.

$$\text{☞ } a = 1, b = -2$$

☞ Lời giải.

Tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2(2y - 1) - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(3; 2).$$

Vì (d) đi qua $M(1; 1), A(3; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = a - 2 \\ 3a + 2b = a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ 2a + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ 2a - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases}.$$



◀ Ví dụ 10. Cho hai đường thẳng $(d_1): 2x - y = 1$ và $(d_2): (m-1)x + y = 5$. Tìm m để hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm A thỏa mãn:

- a) A thuộc trục hoành; $\Leftrightarrow m = 11$ b) A thuộc trục tung; $\Leftrightarrow m \in \emptyset$
 c) A thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$; $\Leftrightarrow m \neq -1$ d) A thuộc góc phần tư thứ nhất. $\Leftrightarrow -1 < m < 11$

Lời giải.

- a) A là giao điểm của $(Ox): y = 0$ và $(d_1): 2x - y = 1$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

Vì $A \in (d_2)$ nên $(m - 1) \cdot \frac{1}{2} + 0 = 5 \Leftrightarrow m = 11$.

- b) A là giao điểm của $(Oy): x = 0$ và $(d_1): 2x - y = 1$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1).$$

Vì $A \in (d_2)$ nên $(m - 1) \cdot 0 - 1 = 5 \Leftrightarrow -1 = 5$ (vô lí).
 Vậy không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

- c) A là giao điểm của (d_1) và (d_2) nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - y = 1 \\ (m - 1)x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (m - 1)x + 2x - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (m + 1)x = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 2 \cdot \frac{6}{m + 1} - 1 = \frac{5 - m}{m + 1} \\ x = \frac{6}{m + 1} \quad (m \neq -1) \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6}{m + 1}; \frac{11 - m}{m + 1}\right). \end{aligned}$$

Vậy để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại A thì $m \neq -1$.

- d) A là giao điểm của (d_1) và (d_2) nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x - y = 1 \\ (m - 1)x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (m - 1)x + 2x - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (m + 1)x = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 2 \cdot \frac{6}{m + 1} - 1 = \frac{5 - m}{m + 1} \\ x = \frac{6}{m + 1} \quad (m \neq -1) \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{6}{m + 1}; \frac{11 - m}{m + 1}\right). \end{aligned}$$

Để A thuộc góc phần tư thứ nhất thì $\begin{cases} x_A > 0 \\ y_A > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{m + 1} > 0 \\ \frac{11 - m}{m + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ 11 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 11 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 11.$$

Với $m = -1$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ 2x - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow A(3; 11)$ (thỏa).

Vậy $-1 \leq m < 11$ là giá trị cần tìm.



❖ **Ví dụ 11.** Tìm giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): 4x - y = b$ và $(d_2): 2ax + 5y = 9$, biết (d_1) đi qua điểm $A(1; -2)$ và (d_2) đi qua điểm $B(-2; 4)$. $\text{đ. } M\left(\frac{26}{17}; \frac{2}{17}\right)$

Lời giải.

Vì $(d_1): 4x - y = b$ đi qua $A(1; -2)$ nên $4 \cdot 1 - (-2) = b \Leftrightarrow b = 6 \Rightarrow (d_1): 4x - y = 6$.

Vì $(d_2): 2ax + 5y = 9$ đi qua $B(-2; 4)$ nên $2a \cdot (-2) + 5 \cdot 4 = 9 \Leftrightarrow a = \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{11}{2}x + 5y = 9$.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - y = 6 \\ \frac{11}{2}x + 5y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 6 \\ \frac{11}{2}x + 5(4x - 6) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{17} \\ y = \frac{2}{17} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{26}{17}; \frac{2}{17}\right).$$



❖ **Ví dụ 12.** Tìm giá trị của m để đường thẳng $(d): (2m - 1)x + y = 5m$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): 2x + y = 3$ và $(d_2): 3x - 2y = 1$. $\text{đ. } m = 0$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3x - 2(3 - 2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1).$$

Đường thẳng $(d): (2m - 1)x + y = 5m$ đi qua M nên $(2m - 1) \cdot 1 + 1 = 5m \Leftrightarrow m = 0$. □

❖ **Ví dụ 13.** Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng $(d_1): x - 2y = 1$, $(d_2): 4x - y = 11$ và $(d_3): (m - 1)x + y = 2m$ đồng quy. $\text{đ. } m = 2$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 4x - y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 4(2y + 1) - y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì $(d_3): (m - 1)x + y = 2m$ đi qua M nên

$$(m - 1) \cdot 3 + 1 = 2m \Leftrightarrow m = 2.$$



C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 7; \end{cases}$

$\text{đ. } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,1x - 0,2y = 2 \\ 0,7x - 0,5y = 1; \end{cases}$

$\text{đ. } \begin{cases} x = -\frac{80}{9} \\ y = -\frac{130}{9} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - \frac{y}{4} = 3 \\ 2x - 3y = \frac{1}{3}; \end{cases}$

$\text{đ. } \begin{cases} x = \frac{107}{30} \\ y = \frac{34}{15} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = -1; \end{cases}$

$\text{đ. } \begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ y = -\frac{45}{16} \end{cases}$

e) $\begin{cases} (1 + \sqrt{5})x + (1 - \sqrt{5})y = 5 \\ (1 + \sqrt{5})x + (1 + \sqrt{5})y = 3; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 3 \\ x + (1 + \sqrt{3})y = 1. \end{cases}$

$\text{đ. } \begin{cases} x = 4\sqrt{3} - 5 \\ y = 5\sqrt{3} - 9 \end{cases}$

$\text{đ. } \begin{cases} x = \frac{-15 + 19\sqrt{5}}{20} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

 Lời giải.

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3(y + 1) + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$b) \begin{cases} 0,1x - 0,2y = 2 \\ 0,7x - 0,5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 20 \\ 0,7(2y + 20) - 0,5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{80}{9} \\ y = -\frac{130}{9} \end{cases}.$$

$$c) \begin{cases} x - \frac{y}{4} = 3 \\ 2x - 3y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{4} + 3 \\ 2\left(\frac{y}{4} + 3\right) - 3y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{107}{30} \\ y = \frac{34}{15} \end{cases}.$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4y}{3} + 2 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{4y}{3} + 2\right) + \frac{y}{5} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ y = -\frac{45}{16} \end{cases}.$$

$$e) \begin{cases} (1 + \sqrt{5})x + (1 - \sqrt{5})y = 5 \\ (1 + \sqrt{5})x + (1 + \sqrt{5})y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - (1 - \sqrt{5})y}{1 + \sqrt{5}} \\ (1 + \sqrt{5}) \cdot \frac{5 - (1 - \sqrt{5})y}{1 + \sqrt{5}} + (1 + \sqrt{5})y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-15 + 19\sqrt{5}}{20} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

$$f) \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 3 \\ x + (1 + \sqrt{3})y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - \sqrt{3}x \\ x + (1 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5\sqrt{3} - 9 \\ x = 4\sqrt{3} - 5 \end{cases}.$$

□

⇔ **Bài 2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ (3a^2 + 1)x - 4y = 2a \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau:

$$a) a = -1; \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad b) a = 0; \quad \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \frac{1}{14} \end{cases} \quad c) a = 1. \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

 Lời giải.

a) Với $a = -1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 4x - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x - 1}{2} \\ 4x - 4 \cdot \frac{4x - 1}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

b) Với $a = 0$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot 4y - 2y = 1 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{14} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}.$$

c) Với $a = 1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 4x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x - 1}{2} \\ 4x - 4 \cdot \frac{4x - 1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}.$$

□

❖ **Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} (2x + y) + 3(x - 2y) = -1 \\ (x - 2y) + 2(x + 2y) = 1; \end{cases} \quad \text{a) } \begin{cases} x = \frac{3}{25} \\ y = \frac{8}{25} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2(x - 1) + 3(1 + y) = -3 \\ 2(x + y) + (1 + 2y) = -1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x + y - 2}{2} + \frac{x - 2y}{4} = 2 \\ \frac{x - 2y - 1}{3} - \frac{y - 2x}{6} = 1. \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} (2x + y) + 3(x - 2y) = -1 \\ (x - 2y) + 2(x + 2y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y = -1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5 \cdot \frac{1 - 3x}{2} = -1 \\ y = \frac{1 - 3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{25} \\ y = \frac{8}{25} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2(x - 1) + 3(1 + y) = -3 \\ 2(x + y) + (1 + 2y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2y - 1) + 3y = -4 \\ x = -2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -5 \end{cases}.$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x + y - 2}{2} + \frac{x - 2y}{4} = 2 \\ \frac{x - 2y - 1}{3} - \frac{y - 2x}{6} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = 3 \\ y = \frac{4}{5}x - \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}.$$

□

❖ **Bài 4.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} (x - 1)(y + 1) = (x - 3)(y + 3) \\ (2x + 1)(y + 2) = (2x - 1)(y + 1); \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (x - 1)(2y + 1) = (x - 3)(y - 5) + xy \\ (x + 1)(y + 1) = (2x - 1)(y + 1) - xy. \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = -\frac{11}{4} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = \frac{34}{13} \\ y = \frac{4}{13} \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} (x - 1)(y + 1) = (x - 3)(y + 3) \\ (2x + 1)(y + 2) = (2x - 1)(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -8 \\ 2x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4 \\ 2(y + 4) + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = -\frac{11}{4} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x - 1)(2y + 1) = (x - 3)(y - 5) + xy \\ (x + 1)(y + 1) = (2x - 1)(y + 1) - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 16 \\ -x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(2y + 2) + y = 16 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{13} \\ x = \frac{34}{13} \end{cases}.$$

□

🔹 **Bài 5.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} (x-y) + (3x-2y) = 1 \\ 4(x-y) - (3x-2y) = 2; \end{cases} & \text{a) } \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{7}{5} \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 5; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2x+y} + \frac{1}{x-y} = 1 \\ \frac{3}{x-y} - \frac{1}{2x+y} = -2; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x = -\frac{16}{15} \\ y = \frac{44}{15} \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{2}{y+1} = 4 \\ \frac{3x}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 5; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+1} = 2 \\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y+1} = 3; \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases} \\ \text{f) } \begin{cases} \frac{1}{x-y+3} + \frac{1}{x+y} = 2 \\ \frac{2}{x-y+3} - \frac{3}{x+y} = 6. \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x = -\frac{61}{24} \\ y = \frac{1}{24} \end{cases} \end{array}$$

🗨️ **Lời giải.**

a) Đặt $\begin{cases} u = x - y \\ v = 3x - 2y \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 4u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 4u - 2 = 1 \\ v = 4u - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{5} \\ v = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x - y = \frac{3}{5} \\ 3x - 2y = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{3}{5} \\ 3\left(y + \frac{3}{5}\right) - 2y = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u - v = 1 \\ 3u + 2v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2u - 1 \\ 3u + 2(2u - 1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

c) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x \neq -y \\ x \neq y \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{2x+y} \\ v = \frac{1}{x-y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 3v - u = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - v \\ 3v - (1 - v) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{5}{4} \\ v = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{2x+y} = \frac{5}{4} \\ \frac{1}{x-y} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = \frac{4}{5} \\ x-y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+x+4 = \frac{4}{5} \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{16}{15} \\ y = \frac{44}{15} \end{cases}.$$

d) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{x}{x+1} \\ v = \frac{1}{y+1} \end{cases}$ ($v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u - 2v = 4 \\ 3u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + 4 \\ 3(2v + 4) + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{1}{y+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

e) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x-1} \\ v = \frac{1}{y+1} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 2 \\ u - v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(v+3) + v = 2 \\ u = v+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{4}{3} \\ u = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{y+1} = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{3}{5} \\ y+1 = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases}.$$

f) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y + 3 \neq 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x-y+3} \\ v = \frac{1}{x+y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ 2u - 3v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - v \\ 2(2 - v) - 3v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{12}{5} \\ v = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y+3} = \frac{12}{5} \\ \frac{1}{x+y} = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+3 = \frac{5}{12} \\ x+y = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{31}{12} \\ y - \frac{31}{12} + y = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{61}{24} \\ y = \frac{1}{24} \end{cases}.$$



❖ **Bài 6.** Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases} \quad \text{a) } \begin{cases} x = \frac{36}{25} \\ y = \frac{169}{25} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2 \\ \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{y}} = 1. \end{cases} \quad \text{a) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}$ ($u, v \geq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 3u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 2u \\ 3u - (5 - 2u) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{13}{5} \\ u = \frac{6}{5} \end{cases} \text{ (thỏa)}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{6}{5} \\ \sqrt{y} = \frac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{25} \\ y = \frac{169}{25} \end{cases}.$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ v = \frac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$ ($u, v > 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ 3u - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - v \\ 3(2 - v) - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa)}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$



❖ **Bài 7.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2ax - by = 4 \\ ax + 2by = 5 \end{cases}$. Xác định các hệ số a và b , biết:

a) Hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$;

$$\text{a) } a = \frac{13}{5}, b = \frac{6}{5}$$

b) Hệ có nghiệm $(x; y) = (\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$.

$$\text{b) } a = \frac{13\sqrt{3}}{5}, b = -\frac{3+3\sqrt{3}}{5}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Vì hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ nên

$$\begin{cases} 2a - b = 4 \\ a + 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2b - 4 \\ 2b - 4 + 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{5} \\ b = \frac{6}{5} \end{cases}.$$

b) Vì hệ có nghiệm $(x; y) = (\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$ nên

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}a - (1 - \sqrt{3})b = 4 \\ \sqrt{3}a + 2(1 - \sqrt{3})b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2\sqrt{3}a - 4}{1 - \sqrt{3}} \\ \sqrt{3}a + 2(1 - \sqrt{3}) \cdot \frac{2\sqrt{3}a - 4}{1 - \sqrt{3}} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3 + 3\sqrt{3}}{5} \\ a = \frac{13\sqrt{3}}{15} \end{cases}.$$

□

❖ **Bài 8.** Tìm giá trị của a và b để hai đường thẳng $(d_1): ax + 2by = 7$ và $(d_2): bx - ay = 7$ cắt nhau tại điểm $M(1; 2)$.

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

□

❖ **Bài 9.** Tìm a và b để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua hai điểm:

a) $A(-2; 5), B(4; 1);$

🔗 $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{11}{3}$ b) $C(1; 2), D(-1; 4).$

🔗 $a = -1, b = 3$

🗨️ **Lời giải.**

a) Vì (d) đi qua $A(-2; 5), B(4; 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -2a + b = 5 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + 5 \\ 4a + 2a + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{11}{3} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

b) Vì (d) đi qua $C(1; 2), D(-1; 4)$ nên ta có phương trình

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a + 4 = 2 \\ b = a + 4 \end{cases} \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

□

❖ **Bài 10.** Tìm a và b để đường thẳng $2bx - ay = a - 3$ đi qua điểm $M(2; 3)$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): x - 2y = 1$ và $(d_2): 7x - 4y = 17$.

$$\begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

Tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 7x - 4y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 7(2y + 1) - 4y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(3; 1).$$

Vì (d) đi qua $M(2; 3), A(3; 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2b \cdot 2 - 3a = a - 3 \\ 2b \cdot 3 - a = a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 4b = 3 \\ 2a - 6b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot \frac{6b + 3}{2} - 4b = 3 \\ a = \frac{6b + 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{8} \\ a = \frac{3}{8} \end{cases}.$$

□

❖ **Bài 11.** Cho hai đường thẳng $(d_1): 4x - y = 1$ và $(d_2): mx + y = 2$. Tìm m để hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm A thỏa mãn:

- a) A thuộc trục hoành; $\color{red}{\curvearrowright} m = 8$ b) A thuộc trục tung; $\color{red}{\curvearrowright} m \in \emptyset$
 c) A thuộc đường thẳng $y = x + 1$; $\color{red}{\curvearrowright} m = \frac{1}{2}$ d) A thuộc góc phần tư thứ nhất $\color{red}{\curvearrowright} -4 < m < 8$

Lời giải.

a) A giao điểm của $(Ox): y = 0$ và $(d_1): 4x - y = 1$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{4}; 0\right).$$

Vì $A \in (d_2)$ nên $m \cdot \frac{1}{4} + 0 = 2 \Leftrightarrow m = 8$.

b) A là giao điểm của $(Oy): x = 0$ và $(d_1): 4x - y = 1$ nên tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1).$$

Vì $A \in (d_2)$ nên $m \cdot 0 - 1 = 2 \Leftrightarrow -1 = 2$ (vô lí). Vậy không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

c) A là giao điểm của $(d): y = x + 1$ và $(d_1): 4x - y = 1$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 4x - (x + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

Vì $A \in (d_2)$ nên $m \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

d) A là giao điểm của (d_1) và (d_2) nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - y = 1 \\ mx + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ mx + 4x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 1 \\ (m + 4)x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8 - m}{m + 4} \\ x = \frac{3}{m + 4} \end{cases} \quad (m \neq -4) \Rightarrow A\left(\frac{8 - m}{m + 4}; \frac{3}{m + 4}\right)$$

Để A thuộc góc phần tư thứ nhất thì $\begin{cases} x_A > 0 \\ y_A > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8 - m}{m + 4} > 0 \\ \frac{3}{m + 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - m > 0 \\ m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 8.$$

Với $m = -4$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$ (vô lí).

□

❖ **Bài 12.** Tìm giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): 3x - 2y = a$ và $(d_2): x - 2by = 4$, biết (d_1) đi qua điểm $A(4; 3)$ và (d_2) đi qua điểm $B(1; 2)$.

$\color{red}{\curvearrowright} M\left(\frac{34}{13}; \frac{12}{13}\right)$

Lời giải.

Vì $(d_1): 3x - 2y = a$ đi qua $A(4; 3)$ nên $3\sqrt{4} - 2\sqrt{3} = a \Leftrightarrow a = 6 \Rightarrow (d_1): 3x - 2y = 6$.

Vì $(d_2): x - 2by = 4$ đi qua $B(1; 2)$ nên $1 - 2b \cdot 2 = 4 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{4} \Rightarrow (d_2): x + \frac{3}{2}y = 4$. Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(4 - \frac{3}{2}y\right) - 2y = 6 \\ x = 4 - \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{13} \\ x = \frac{34}{13} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{34}{13}; \frac{12}{13}\right).$$

□

◆ **Bài 13.** Tìm giá trị của m để đường thẳng $(d): (m+1)x - y = 3m$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): x + y = 3$ và $(d_2): 3x - 2y = -1$. ☞ $m = -\frac{1}{2}$

Lời giải.

Toạ độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ 3(3 - y) - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2).$$

Đường thẳng (d) đi qua $M(1; 2)$ nên $(m+1) \cdot 1 - 2 = 3m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$. □

◆ **Bài 14.** Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng $(d_1): 3x - 2y = 1$, $(d_2): 3x - y = 2$ và $(d_3): mx - y = 2m - 1$. ☞ $m = 0$

Lời giải.

Toạ độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2(3x - 2) = 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1; 1).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì $(d_3): mx - y = 2m - 1$ đi qua M nên

$$m - 1 = 2m - 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

□

D - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◆ **Bài 15.** Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,1x - 0,4y = 3 \\ 0,2x - 0,25y = -1; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x = -\frac{230}{11} \\ y = -\frac{140}{11} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 4 \\ x - y = \frac{1}{3}; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x = \frac{25}{9} \\ y = \frac{22}{9} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 2 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3; \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 2 \\ x + (1 - \sqrt{2})y = 1. \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x = \frac{1 + 5\sqrt{2}}{7} \\ y = \frac{4 - \sqrt{2}}{7} \end{cases}$
☞ $\begin{cases} x = \frac{-12 + 11\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

 **Lời giải.**

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 0,1x - 0,4y = 3 \\ 0,2x - 0,25y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y + 30 \\ 0,2(4y + 30) - 0,25y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{230}{11} \\ y = -\frac{140}{11}. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 4 \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{y}{2} \\ 4 - \frac{y}{2} - y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{9} \\ y = \frac{22}{9}. \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ \frac{x}{3} + \frac{2x - 4}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$


$$e) \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 2 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - (1 - \sqrt{2})y}{1 + \sqrt{2}} \\ (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{2 - (1 - \sqrt{2})y}{1 + \sqrt{2}} + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-12 + 11\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 2 \\ x + (1 - \sqrt{2})y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \sqrt{2}x \\ x + (1 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4 - \sqrt{2}}{7} \\ x = \frac{1 + 5\sqrt{2}}{7}. \end{cases}$$

□

◆ **Bài 16.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ (a^2 + 1)x - 4y = 2a \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau

a) $a = -1$;  vô nghiệm b) $a = 0$;  $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ c) $a = 1$.  vô số nghiệm

 **Lời giải.**

a) Với $a = -1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2(2y + 1) - 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2 = -2 \text{ (vô lí)} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

b) Với $a = 0$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2y + 1 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

c) Với $a = 1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2(2y + 1) - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2 = 2 \text{ (luôn đúng)} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

□

✎ **Bài 17.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} (x - y) + 2(x + y) = 3 \\ (x + 2y) + 2(x - 2y) = 1; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = \frac{7}{9} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2(x - 1) - 3(1 + y) = 3 \\ 3(x + 1) + 2(1 - y) = 2; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = -5 \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 1 = x + 2y \\ x - y = 2x + y + 1; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} \frac{x-1}{6} + \frac{2x-y}{4} = 1 \\ \frac{x+y}{2} - \frac{y-x-1}{3} = 2. \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = \frac{44}{23} \\ y = \frac{10}{23} \end{cases}$$

☞ **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} (x - y) + 2(x + y) = 3 \\ (x + 2y) + 2(x - 2y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 3x \\ 3x - 2(3 - 3x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{7}{9} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2(x - 1) - 3(1 + y) = 3 \\ 3(x + 1) + 2(1 - y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3y + 8}{2} \\ 3 \cdot \frac{3y + 8}{2} - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -6 \end{cases}.$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 1 = x + 2y \\ x - y = 2x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2y - 1 + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x-1}{6} + \frac{2x-y}{4} = 1 \\ \frac{x+y}{2} - \frac{y-x-1}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}(10 - 5x) = \frac{7}{6} \\ y = 10 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{44}{23} \\ y = \frac{10}{23} \end{cases}.$$

□

✎ **Bài 18.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} (2x - 1)(y + 1) = (x - 3)(2y - 5) \\ (3x + 1)(y - 1) = (x - 1)(3y + 1); \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (2x - 1)(2y + 1) = (x - 3)(y - 5) + 3xy \\ (3x + 1)(y - 1) = (x - 1)(y + 1) + 2xy. \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = \frac{16}{9} \\ y = \frac{32}{9} \end{cases}.$$

☞ **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} (2x - 1)(y + 1) = (x - 3)(2y - 5) \\ (3x + 1)(y - 1) = (x - 1)(3y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 5y = 16 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 5x = 16 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$b) \begin{cases} (2x-1)(2y+1) = (x-3)(y-5) + 3xy \\ (3x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) + 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=16 \\ -4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+2x=16 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{16}{9} \\ y=\frac{32}{9} \end{cases}.$$

□

❖ **Bài 19.** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} (x+y) + 2(x-2y) = 3 \\ 2(x+y) - (x-2y) = 1; \end{cases} \quad \text{a)} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 4 \\ \frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y} = 1; \end{cases} \quad \text{d)} \quad \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{2}{y+1} = 2 \\ \frac{2x}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 7; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{4}{y-1} = 1; \end{cases} \quad \text{f)} \quad \begin{cases} \frac{1}{x+y-2} + \frac{2}{x-y-1} = 4 \\ \frac{2}{x+y-2} - \frac{1}{x-y-1} = 6. \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

a) Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v = 3 \\ 2u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - 2v \\ 2(3 - 2v) - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 1 - y - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + 2v = 3 \\ 2u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - 2v \\ 2(3 - 2v) - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

c) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq y \\ x \neq -y \end{cases}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x-y} \\ v = \frac{1}{x+y} \end{cases} \quad (u, v \neq 0), \text{ hệ phương trình trở thành}$$

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ 4 - v - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \frac{1}{3} \\ x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3} + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

d) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{x}{x+1} \\ v = \frac{1}{y+1} \end{cases} \quad (v \neq 0), \text{ hệ phương trình trở thành}$$

$$\begin{cases} u - 2v = 2 \\ 2u + v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + 2 \\ 2(2v + 2) + v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{16}{5} \\ v = \frac{3}{5} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} = \frac{16}{5} \\ \frac{1}{y+1} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{16}{11} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

e) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x+1} \\ v = \frac{1}{y-1} \end{cases} \quad (u, v \neq 0), \text{ hệ phương trình trở thành}$$

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 3u - 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - v \\ 3(1 - v) - 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{5}{7} \\ v = \frac{2}{7} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} = \frac{5}{7} \\ \frac{1}{y-1} = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

f) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - 2 \neq 0 \\ x - y - 1 \neq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x + y - 2} \\ v = \frac{1}{x - y - 1} = 4 \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + 2v = 4 \\ 2u - v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - 2v \\ 2(4 - 2v) - v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{16}{5} \\ v = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x + y - 2} = \frac{16}{5} \\ \frac{1}{x - y - 1} = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = \frac{5}{16} \\ x - y - 1 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{37}{16} - y \\ \frac{37}{16} - y - y - 1 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{93}{32} \\ y = -\frac{19}{32} \end{cases}$$

□

✦ **Bài 20.** Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 5 \\ 3\sqrt{x-1} - \sqrt{y+1} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{61}{25} \\ y = \frac{194}{25} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} = 2 \\ \frac{6}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{y-1}} = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{y+1} \end{cases}$ ($u, v \geq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 3u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 2u \\ 3u - (5 - 2u) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{6}{5} \\ v = \frac{13}{5} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{6}{5} \\ \sqrt{y+1} = \frac{13}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{61}{25} \\ y = \frac{194}{25} \end{cases}$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x > -1 \\ y > 1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \\ v = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \end{cases}$ ($u, v > 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 2 \\ 6u - 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - 2u \\ 6u - 2(2 - 2u) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{y-1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

□

✧ **Bài 21.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x+1} + 2\sqrt{y-1} = 3 \\ 3\sqrt{x+1} - \sqrt{y-1} = 2; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 2 \\ \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{y}} = 1. \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

a) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y-1} \end{cases}$ ($u, v \geq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + 2v = 3 \\ 3u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - 2v \\ 3(3 - 2v) - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ v = \frac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$ ($u, v > 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ 6u - 5v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - v \\ 6(2 - v) - 5v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

□

✧ **Bài 22.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax - by = 1 \\ 2bx - ay = -4 \end{cases}$. Xác định các hệ số a và b , biết:

a) Hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$;

☞ $a = -2, b = -3$

b) Hệ có nghiệm $(x; y) = (\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

☞ $a = 4 - 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2} - 3$

Lời giải.

a) Vì hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ nên

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 2b - a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ 2b - (b + 1) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

b) Vì hệ có nghiệm $(x; y) = (\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$ nên

$$\begin{cases} \sqrt{2}a - (1 - \sqrt{2})b = 1 \\ 2\sqrt{2}b - (1 - \sqrt{2})a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{(1 - \sqrt{2})b + 1}{\sqrt{2}} \\ 2\sqrt{2}b - (1 - \sqrt{2}) \cdot \frac{(1 - \sqrt{2})b + 1}{\sqrt{2}} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 - 2\sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} - 3 \end{cases}$$

□

✦ **Bài 23.** Tìm giá trị của a và b để hai đường thẳng $(d_1): (a-1)x + (2b-1)y = 33$ và $(d_2): bx + 2ay = 11$ cắt nhau tại điểm $M(1; -2)$.

☞ $a = -\frac{76}{15}, b = -\frac{139}{15}$

Lời giải.

Vì $M(1; -2)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (a-1) \cdot 1 + (2b-1) \cdot (-2) = 33 \\ b \cdot 1 + 2a \cdot (-2) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 4b = 32 \\ -4a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b + 32 \\ -4(4b + 32) + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{76}{15} \\ b = -\frac{139}{15} \end{cases}$$

□

✦ **Bài 24.** Tìm a và b để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua hai điểm:

a) $A(-1; 2), B(-2; 1)$;

☞ $a = 1, b = 3$

b) $C(-1; 1), D(2; 4)$.

☞ $a = 1, b = 2$

Lời giải.

a) Vì (d) đi qua $A(-1; 2), B(-2; 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ -2a + a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

b) Vì (d) đi qua $C(-1; 1), D(2; 4)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ 2a + a + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

□

✦ **Bài 25.** Tìm a và b để đường thẳng $bx - ay = a - 2$ đi qua điểm $M(2; 5)$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): 3x - 2y = 1$ và $(d_2): 7x - 4y = 3$.

☞ $a = -1, b = -4$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 7x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x - 1}{2} \\ 7x - 4 \cdot \frac{3x - 1}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1).$$

Vì (d) đi qua $M(2; 5), A(1; 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2b - 5a = a - 2 \\ b - a = a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b = 2 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a - 1 \\ 2a - (3a - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = -1 \end{cases}.$$

□

◆ **Bài 26.** Cho hai đường thẳng $(d_1): x - y = 2$ và $(d_2): x + my = 4$. Tìm m để hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm A thỏa mãn

- a) A thuộc trục hoành; 🔍 $m \in \emptyset$ b) A thuộc trục tung; 🔍 $m = -2$
 c) A thuộc đường thẳng $y = x - 1$; 🔍 $m \in \emptyset$ d) A thuộc góc phần tư thứ nhất. 🔍 $m > -1$

🗨️ Lời giải.

- a) A là giao điểm của $(Ox): y = 0$ và $(d_1): x - y = 2$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2; 0).$$

Vì $A \in (d_2)$ nên $2 + m \cdot 0 = 4 \Leftrightarrow 2 = 4$ (vô lí). Vậy không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

- b) A là giao điểm của $(Oy): x = 0$ và $(d_1): x - y = 2$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(0; -2).$$

Vì $A \in (d_2)$ nên $0 - 2m = 4 \Leftrightarrow m = -2$.

- c) A là giao điểm của $(d): y = x - 1$ và $(d_1): x - y = 2$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - (x - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 1 = 2 \text{ (vô lí)} \end{cases}.$$

Không tồn tại điểm A nên không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

- d) A là giao điểm của (d_1) và (d_2) nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 2 \\ x + my = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y + 2 + my = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (m + 1)y = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{m + 1} + 2 = \frac{2m + 4}{m + 1} \\ y = \frac{2}{m + 1} \text{ (} m \neq -1 \text{)} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2m + 4}{m + 1}; \frac{2}{m + 1}\right). \end{aligned}$$

Để A thuộc góc phần tư thứ nhất thì $\begin{cases} x_A > 0 \\ y_A > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+4}{m+1} > 0 \\ \frac{2}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ 2m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Với $m = -1$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x = y + 2 \\ 0 = 2 \end{cases}$ (vô lí).

Vậy $m > -1$ là giá trị cần tìm. □

✦ **Bài 27.** Tìm giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): x - 2y = a$ và $(d_2): 2x - 5y = 8$, biết (d_1) đi qua điểm $A(4; -3)$ và (d_2) đi qua điểm $B(-1; 3)$. 🔍 $M\left(\frac{74}{11}; -\frac{18}{11}\right)$

Lời giải.

Vì $(d_1): x - 2y = a$ đi qua $A(4; -3)$ nên $4 - 2 \cdot (-3) = a \Leftrightarrow a = 10 \Rightarrow (d_1): x - 2y = 10$.

Vì $(d_2): 2x - 5y = 8$ đi qua $B(-1; 3)$ nên $2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 = 8 \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3} \Rightarrow 2x + \frac{10}{3}y = 8$.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 10 \\ 2x + \frac{10}{3}y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 10 \\ 2(2y + 10) + \frac{10}{3}y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{74}{11} \\ y = -\frac{18}{11} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{74}{11}; -\frac{18}{11}\right).$$

□

✦ **Bài 28.** Tìm giá trị của m để đường thẳng $(d): (m - 1)x + y = 2m$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): x + y = 3$ và $(d_2): 3x - 2y = 1$. 🔍 $m = \frac{1}{3}$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ 3x - 2(3 - x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5}; \frac{8}{5}\right).$$

Đường thẳng $(d): (2m - 1)x + y = 2m$ đi qua M nên $(2m - 1) \cdot \frac{7}{5} + \frac{8}{5} = 2m \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$. □

✦ **Bài 29.** Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng $(d_1): x - 2y = 1, (d_2): 3x + y = 10$ và $(d_3): (m + 1)x + y = 2m + 1$ đồng quy. 🔍 $m = -3$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 3(2y + 1) + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì $(d_3): (m + 1)x + y = 2m + 1$ đi qua M nên

$$(m + 1) \cdot 3 + 1 = 2m + 1 \Leftrightarrow m = -3.$$

□

BÀI 4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành một hệ phương trình tương đương, bao gồm hai bước như sau:

- ☑ *Bước 1.* Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới;
- ☑ *Bước 2.* Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình kia ta được một hệ mới tương đương với hệ đã cho.

b) Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số:

- ☑ *Bước 1.* Biến đổi sao cho các hệ số của một ẩn có giá trị tuyệt đối bằng nhau;
- ☑ *Bước 2.* Cộng hoặc trừ vế với vế của hai phương trình để khử đi một ẩn;
- ☑ *Bước 3.* Giải phương trình để tìm giá trị của ẩn;
- ☑ *Bước 4.* Thay giá trị vừa tìm được vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm giá trị còn lại;
- ☑ *Bước 5.* Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Thực hiện theo các bước đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết*.

🔗 **Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 8x + 3y = 5; \end{cases} & \text{☞ } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21; \end{cases} & \text{☞ } \begin{cases} x = 9 \\ y = -10 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = 3 \\ -3\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1; \end{cases} & \text{☞ } \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{21} \\ y = \frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 1,2x + 1,5y = 3 \\ 2,8x - 3,5y = -2. \end{cases} & \text{☞ } \begin{cases} x = \frac{25}{28} \\ y = \frac{9}{7} \end{cases} \end{array}$$

💬 **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 4 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-y}{2} \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x - 6y = 285 \\ 16x + 6y = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41x = 369 \\ y = \frac{8x - 42}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y = 3 \\ -3\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{3}x + 6\sqrt{2}y = 9 \\ -3\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - 2\sqrt{2}y}{\sqrt{3}} \\ 7\sqrt{2}y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{21} \\ y = \frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 1,2x + 1,5y = 3 \\ 2,8x - 3,5y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,8x + 3,5y = 7 \\ 2,8x - 3,5y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5,6x = 5 \\ y = \frac{2,8x + 2}{3,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{28} \\ y = \frac{9}{7} \end{cases}$$

□

⇨ **Ví dụ 2.** Cho hệ phương trình sau: $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6. \end{cases}$ Giải hệ phương trình với

- a) $m = 1$; $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$ b) $m = 2$; vô nghiệm c) $m = -2$. vô số nghiệm

Lời giải.

a) Với $m = 1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 4x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 3x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Với $m = 2$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

c) Với $m = -2$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x - y = 4 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ 0 = 4 \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

□

Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Ta thực hiện hai bước sau:

- a) *Bước 1.* Biến đổi hệ phương trình đã cho về phương trình bậc nhất hai ẩn;
 b) *Bước 2.* Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn vừa tìm được bằng phương pháp cộng đại số.

⇨ **Ví dụ 3.** Giải các hệ phương trình sau:

- a) $\begin{cases} (3x + 2)(2y - 3) = 6xy \\ (4x + 5)(y - 5) = 4xy; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{13}{2} \end{cases}$
- c) $\begin{cases} (2x - 3)(2y + 4) = 4x(y - 3) + 54 \\ (x + 1)(3y - 3) = 3y(x + 1) - 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{2y - 5x}{3} + 5 = \frac{y + 27}{4} - 2x \\ \frac{x + 1}{3} + y = \frac{6y - 5x}{7}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} (3x+2)(2y-3) = 6xy \\ (4x+5)(y-5) = 4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x+4y = 6 \\ -20x+5y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x+4y = 6 \\ -16x+4y = 20 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -14 \\ y = 4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ (x+y) + 2(x-y) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y = 4 \\ 3x-y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x-4 \\ 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{13}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} (2x-3)(2y+4) = 4x(y-3) + 54 \\ (x+1)(3y-3) = 3y(x+1) - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x-6y = 66 \\ -3x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10x-33}{3} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$


$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \begin{cases} \frac{2y-5x}{3} + 5 = \frac{y+27}{4} - 2x \\ \frac{x+1}{3} + y = \frac{6y-5x}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{5}{12}y = \frac{7}{4} \\ \frac{22}{21}x + \frac{1}{7}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y = 21 \\ \frac{110}{3}x + 5y = -\frac{35}{3} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{21-4x}{5} \\ \frac{98}{3}x = -\frac{98}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

 **Dạng 3. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ**

Ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1.* Đặt ẩn phụ cho các biểu thức của hệ phương trình đã cho để được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mới ở dạng cơ bản. Tìm điều kiện của ẩn phụ (nếu có);
- Bước 2.* Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số;
- Bước 3.* Từ các giá trị ẩn phụ nhận được giải tìm các ẩn của hệ ban đầu;
- Bước 4.* Kiểm tra điều kiện (nếu có) và kết luận nghiệm.

 **Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1; \end{cases} & \text{q} \quad \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{y+2x} = 3 \\ \frac{4}{x+2y} - \frac{3}{y+2x} = 1; \end{cases} & \text{q} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6}; \end{cases} & \text{q} \quad \begin{cases} x = 16 \\ y = 30 \end{cases} & \text{d)} \quad \begin{cases} 2(x^2 - 2x) + \sqrt{y+1} = 0 \\ 3(x^2 - 2x) - 2\sqrt{y+1} = -7. \end{cases} & \text{q} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

 **Lời giải.**

a) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = \frac{1}{12} \\ 8u + 15v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u + 8v = \frac{2}{3} \\ 8u + 15v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} - v \\ 7v = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{28} \\ v = \frac{1}{21} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{28} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \end{cases}.$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq -2y \\ 2x \neq -y \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x+2y} \\ v = \frac{1}{y+2x} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 3 \\ 4u - 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u + 2v = 6 \\ 4u - 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3-v}{2} \\ 5v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2y} = 1 \\ \frac{1}{y+2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 1 \\ y+2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y = 2 \\ 2x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-2y \\ 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

c) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x > 7 \\ y > -6 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x-7}} \\ v = \frac{1}{\sqrt{y+6}} \end{cases}$ ($u, v > 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 7u - 4v = \frac{5}{3} \\ 5u + 3v = \frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21u - 12v = 5 \\ 20u + 12v = \frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41u = \frac{41}{3} \\ v = \frac{1}{3} \left(\frac{13}{6} - 5u \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-7}} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{y+6}} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-7} = 3 \\ \sqrt{y+6} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 30 \end{cases}.$$

d) Điều kiện của hệ phương trình: $y \geq -1$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 2x \\ v = \sqrt{y+1} \end{cases}$ ($v \geq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 0 \\ 3u - 2v = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u + 2v = 0 \\ 3u - 2v = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -2u \\ 7u = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ u = -1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -1 \\ \sqrt{y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

□

Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước

Ta thường sử dụng các kiến thức sau:

a) Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ nhận cặp số $x_0; y_0$ làm nghiệm \Leftrightarrow

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}$$

b) Đường thẳng $(d): ax + by = c$ đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c$.

❖ Ví dụ 5. Xác định a, b để hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = b \\ bx + ay = 1 \end{cases}$ có nghiệm là $(-1; \sqrt{3})$.

$$\text{☞ } a = \sqrt{3} - 2, b = 2 - 2\sqrt{3}$$

 Lời giải.

Vì $(-1; \sqrt{3})$ là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\begin{cases} -a - \sqrt{3} = b \\ -b + \sqrt{3}a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a - \sqrt{3} \\ (1 + \sqrt{3})a = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 2\sqrt{3} \\ a = \sqrt{3} - 2 \end{cases}.$$

□

❖ Ví dụ 6. Xác định a, b để đường thẳng $(d): y = (2a + 3b)x - 3a$ và đường thẳng $(d'): x - 2(a - b)y + 2 = 0$ đi qua điểm $A(1; 3)$.

$$\text{☞ } a = \frac{5}{6}, b = \frac{1}{3}$$

 Lời giải.

Vì (d) và (d') đi qua $A(1; 3)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 3b - 3a = 3 \\ 1 - 2(a - b)3 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = 3 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 6b = 6 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b - 3 \\ 4b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}.$$

□

❖ Ví dụ 7. Xác định a, b để đường thẳng $(d): y = (a - 2b)x + b$ đi qua hai điểm $A(2; -5), B(-3; 2)$.

$$\text{☞ } a = -\frac{29}{5}, b = -\frac{11}{5}$$

 Lời giải.

Đường thẳng (d) đi qua $A(2; -5), B(-3; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(a - 2b) + b = -5 \\ -3(a - 2b) + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = -5 \\ -3a + 7b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 9b = -15 \\ -6a + 14b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3b - 5}{2} \\ 5b = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{29}{5} \\ b = -\frac{11}{5} \end{cases}.$$

□

⇨ **Ví dụ 8.** Hãy xác định hàm số bậc nhất thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

- a) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(2; 1), B(1; 2)$; 👉 $y = -x + 3$
- b) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $C(\sqrt{5} - 2; 2), D(2 + \sqrt{5}; -2)$; 👉 $y = -x + \sqrt{5}$
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $E(3; -2)$ và cắt đường thẳng (d') : $y = -3x + 2$ tại điểm có hoành độ bằng 2. 👉 $y = 2x - 8$

🗨️ Lời giải.

Hàm số bậc nhất cần tìm có dạng $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng (d) .

- a) Vì (d) đi qua $A(2; 1), B(1; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (d): y = -x + 3.$$

- b) Vì (d) đi qua $C(\sqrt{5} - 2; 2), D(2 + \sqrt{5}; -2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - 2)a + b = 2 \\ (2 + \sqrt{5})a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a = 4 \\ b = -2 - (2 + \sqrt{5}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow (d): y = -x + \sqrt{5}.$

- c) Gọi B là giao điểm của (d) và (d') . Theo giả thiết

$$x_B = 2 \Rightarrow y_B = -3x_B + 2 = -4 \Rightarrow B(2; -4).$$

Vì (d) đi qua $E(3; -2), B(2; -4)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = -2 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -8 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 2x - 8.$$

□

⇨ **Ví dụ 9.** Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(d): (m - 2)x + 4y = m - 1$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): x + 4y - 6 = 0$ và $(d_2): 4x - 3y = 5$. 👉 $m = -1$

🗨️ Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 16y = 24 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 4y \\ 19y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1).$$

Đường thẳng $(d): (m - 2)x + 4y = m - 1$ đi qua M nên $(m - 2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = m - 1 \Leftrightarrow m = -1$. □

◊ **Ví dụ 10.** Xác định m để đường thẳng $(d): y = (m+3)x - 2$ và đường thẳng $(d'): x - 2y - 1 = 0$ cắt nhau tại một điểm:

- a) Nằm trên trục hoành; $\color{red}{\text{a}} m = -1$ b) Nằm trên trục tung; $\color{red}{\text{a}} m \in \emptyset$
 c) Thuộc góc phần tư thứ nhất; $\color{red}{\text{a}} -\frac{5}{2} < m < -1$ d) Nằm trên đường thẳng $(d_1): y = x - 2$.
 $\color{red}{\text{a}} m = -2$

Lời giải.

a) A là giao điểm của $(Ox): y = 0$ và $(d'): x - 2y - 1 = 0$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 0).$$

Vì $A \in (d)$ nên $0 = (m+3) \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow m = -1$.

b) A là giao điểm của $(Oy): x = 0$ và $(d'): x - 2y - 1 = 0$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(0; -\frac{1}{2}\right).$$

Vì $A \in (d)$ nên $-\frac{1}{2} = (m+3) \cdot 0 - 2 \Leftrightarrow -2 = -\frac{1}{2}$ (vô lí). Vậy không có giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

c) A là giao điểm của (d) và (d') nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = (m+3)x - 2 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+3)x - 2y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+5)x = 3 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2m+5} \\ y = \frac{-m-1}{2m+5} \end{cases} \left(m \neq -\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{-m-1}{2m+5}; \frac{3}{m+5}\right).$$

Để A thuộc góc phần tư thứ nhất thì $\begin{cases} x_A > 0 \\ y_A > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m-1}{2m+5} > 0 \\ \frac{3}{2m+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 > 0 \\ 2m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < m < -1.$$

Với $m = -\frac{5}{2}$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 0 = 3 \\ y = \frac{x-1}{2} \end{cases}$ (vô lí).

d) A là giao điểm của (d_1) và (d') nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(3; 1).$$

Vì $A \in (d)$ nên $(m+3) \cdot 3 - 2 = 1 \Leftrightarrow m = -2$.

□

◊ **Ví dụ 11.** Xác định m để đường thẳng $(d): y = 2x - 1$ và đường thẳng $(d'): x + (2m + 3)y + 2 = 0$ cắt nhau tại một điểm

- a) Nằm trên trục hoành; $\Leftrightarrow m \in \emptyset$ b) Nằm trên trục tung; $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$
 c) Thuộc góc phần tư thứ nhất; $\Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ d) Nằm trên đường thẳng $(d_1): x - 2y + 2 = 0$.
 $\Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$

Lời giải.

a) A là giao điểm của $(Ox): y = 0$ và $(d): y = 2x - 1$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

Vì $A \in (d')$ nên $\frac{1}{2} + (2m + 3) \cdot 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} = 0$ (vô lí). Vậy không có điểm m thỏa yêu cầu bài toán.

b) A là giao điểm của $(Oy): x = 0$ và $(d): y = 2x - 1$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(0; -1).$$

Vì $A \in (d')$ nên $0 + (2m + 3)(-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

c) A là giao điểm của (d) và (d') nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + (2m + 3)y + 2 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (4m + 6)y = -4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4m + 7)y = -5 \\ x = \frac{y + 1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{4m + 7} \\ x = \frac{2m + 1}{4m + 7} \end{cases} \left(m \neq -\frac{7}{4}\right) \Rightarrow A\left(\frac{2m + 1}{4m + 7}; -\frac{5}{4m + 7}\right). \end{aligned}$$

Để A thuộc góc phần tư thứ nhất thì $\begin{cases} x_A > 0 \\ y_A > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{2m + 1}{4m + 7} > 0 \\ -\frac{5}{4m + 7} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 < 0 \\ 4m + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{7}{4}.$$

Với $m = -\frac{7}{4}$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 0 = -5 \\ x = \frac{y + 1}{2} \end{cases}$ (vô lí).

d) A là giao điểm của (d_1) và (d) nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

Vì $A \in (d')$ nên $\frac{4}{3} + (2m + 3) \cdot \frac{5}{3} + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$.



❖ **Ví dụ 12.** Tìm giao điểm của hai đường thẳng $(d): y = (2a - 5)x - b$ và đường thẳng $(d'): ax - by + 3 = 0$ biết rằng d đi qua điểm $A(1; 2)$ và (d') đi qua điểm $B(-2; 3)$. 📍 $M(-1; 0)$

🗨️ Lời giải.

Vì (d) đi qua $A(1; 2)$ nên $(2a - 5) \cdot 1 - b = 2 \Leftrightarrow 2a - b = 7$.

Vì (d') đi qua $B(-2; 3)$ nên $a \cdot (-2) - b \cdot 3 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2a + 3b = 3$.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a - b = 7 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b+7}{2} \\ 4b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d): y = x + 1 \\ (d'): 3x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm M của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 4x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 0).$$



❖ **Ví dụ 13.** Tìm giao điểm của hai đường thẳng $(d): ay = bx - 2$ và đường thẳng $(d'): x - (2b - 1)y + a + 3 = 0$ biết rằng d đi qua điểm $A(2; -1)$ và (d') đi qua điểm $B(1; -2)$. 📍 $M(11; -4)$

🗨️ Lời giải.

Vì (d) đi qua $A(2; -1)$ nên $a \cdot (-1) = b \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow a + 2b = 2$.

Vì (d') đi qua $B(1; -2)$ nên $1 - (2b - 1)(-2) + a + 3 = 0 \Leftrightarrow a + 4b = -2$.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ a + 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2b \\ 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d): 6y = -2x - 2 \\ (d'): x + 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm M của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 6y = -2x - 2 \\ x + 5y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -1 \\ x + 5y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 1 \\ 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow M(11; -4).$$



C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5; \end{cases} \quad \text{📍 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -\frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{1}{12} \\ \frac{4x}{5} + \frac{y}{2} = \frac{3}{10}; \end{cases} \quad \text{📍 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (\sqrt{5} - 3)x - \sqrt{3}y = \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{3}y = -3; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} -2,1x + 1,4y = 3,5 \\ 4,5x - 2,25y = -2,4. \end{cases} \quad \text{📍 } \begin{cases} x = \frac{43}{15} \\ y = \frac{34}{5} \end{cases}$$

$$\text{📍 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

🗨️ Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\
 \text{b)} \quad & \begin{cases} -\frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{1}{12} \\ \frac{4x}{5} + \frac{y}{2} = \frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 9y = 1 \\ 8x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9y - 1}{8} \\ -4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\
 \text{c)} \quad & \begin{cases} (\sqrt{5} - 3)x - \sqrt{3}y = \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{3}y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{5} - 6)x - 2\sqrt{3}y = 2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{3}y = -3 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (4\sqrt{5} - 6)x = 2\sqrt{5} - 3 \\ y = \frac{-3 - 2\sqrt{5}x}{2\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{15 + 3\sqrt{3}}{6} \end{cases} \\
 \text{d)} \quad & \begin{cases} -2,1x + 1,4y = 3,5 \\ 4,5x - 2,25y = -2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{2}{3}y = \frac{5}{3} \\ x - \frac{1}{2}y = -\frac{8}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}y = \frac{17}{15} \\ x = \frac{1}{2}y - \frac{8}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{34}{5} \\ x = \frac{43}{15} \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

✦ **Bài 2.** Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ Giải hệ phương trình với

a) $m = -2$; 🔍 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $m = 1$; 🔍 vô số nghiệm c) $m = -1$. 🔍 vô nghiệm

🗨️ Lời giải.

a) Với $m = -2$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x + y = -7 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -14 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ -3x = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

b) Với $m = 1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

c) $m = -1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + y = -4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 0 = -4 \end{cases} \text{ (vô lí)}.$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

□

✦ **Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 9 \\ 5(x+y) - 7(x-y) = 8; \end{cases} \quad \text{q. } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (x+y)(x-1) = (x-y)(x+1) + 2(xy+1) \\ (y-x)(y+1) = (y+x)(y-2) - 2xy. \end{cases}$$

$$\text{q. } \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 9 \\ 5(x+y) - 7(x-y) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 9 \\ -2x + 12y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 9 \\ -5x + 30y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29y = 29 \\ x = 6y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x+y)(x-1) = (x-y)(x+1) + 2(xy+1) \\ (y-x)(y+1) = (y+x)(y-2) - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

□

🔗 **Bài 4.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \\ \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2; \end{cases} \quad \text{q. } \begin{cases} x = \frac{19}{7} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y+1} = -1; \end{cases} \quad \text{q. } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{7}{x-y+2} - \frac{5}{x+y-1} = \frac{9}{2} \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{x+y-1} = 4; \end{cases} \quad \text{q. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3\sqrt{x-1} - 2\sqrt{y-1} = 4 \\ 2\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 5. \end{cases} \quad \text{q. } \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

a) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 2 \\ y \neq 1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x-2} \\ v = \frac{1}{y-1} \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u - 3v = 1 \\ u + v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - 3v = 1 \\ 2u + 2v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5v = 3 \\ u = 2 - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{3}{5} \\ u = \frac{7}{5} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} = \frac{7}{5} \\ \frac{1}{y-1} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \frac{5}{7} \\ y-1 = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{7} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{x}{x+1} \\ v = \frac{y}{y+1} \end{cases}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = 3 \\ 2u + 6v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5v = -5 \\ u = -3v - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ u = 2 \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{y}{y+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

c) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y + 2 \neq 0 \\ x + y - 1 \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x-y+2} \\ v = \frac{1}{x+y-1} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 7u - 5v = \frac{9}{2} \\ 3u + 2v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14u - 10v = 9 \\ 15u + 10v = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29u = 29 \\ v = \frac{4-3u}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa)}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y+2} = 1 \\ \frac{1}{x+y-1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2 = 1 \\ x+y-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = -1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

d) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{y-1} \end{cases}$ ($u, v \geq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3u - 2v = 4 \\ 2u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 2v = 4 \\ 4u + 2v = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u = 14 \\ v = 5 - 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \text{ (thỏa)}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}.$$

□

✦ **Bài 5.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2mx + (n-2)y = 9 \\ (m+3)x + 2ny = 5 \end{cases}$. Tìm giá trị của m, n để hệ có nghiệm là $(3; -1)$.

🔍 $m = 2, n = 5$

🗨️ **Lời giải.**

Vì hệ phương trình có nghiệm là $(3; -1)$ nên

$$\begin{cases} 2m \cdot 3 + (n - 2) \cdot (-1) = 9 \\ (m + 3) \cdot 3 + 2n \cdot (-1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m - n = 7 \\ 3m - 2n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m - n = 7 \\ 3m - 2n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m - 2n = 14 \\ 3m - 2n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m = 18 \\ n = \frac{3m + 4}{2} \end{cases}$$

□

❖ **Bài 6.** Xác định m, n để đường thẳng $(d): 3nx - my = -9$ và đường thẳng $(d'): mx + 2y = 16n$ đi qua điểm $A(2; 5)$. 🔗 $m = 3, n = 1$

🗨 **Lời giải.**

Vì (d) và (d') đi qua $A(2; 5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3n \cdot 2 - m \cdot 5 = -9 \\ m \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 16n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m + 6n = -9 \\ 2m - 16n = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m + 6n = -9 \\ 5m - 40n = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6n + 9}{5} \\ -34n = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$$

□

❖ **Bài 7.** Xác định m, n để đường thẳng $(d): mx + (m - 2n)y - 2 = 0$ đi qua hai điểm $A(1; -1), B(-2; 3)$. 🔗 $m = 8, n = 1$

🗨 **Lời giải.**

Vì (d) đi qua $A(1; -1), B(-2; 3)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} m \cdot 1 + (m - 2n) \cdot (-1) - 2 = 0 \\ m \cdot (-2) + (m - 2n) \cdot 3 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n = 2 \\ m - 6n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 2 + 6n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 8 \end{cases}$$

□

❖ **Bài 8.** Hãy xác định hàm số bậc nhất thỏa mãn mỗi điều kiện sau

- a) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(1; -3), B(2; 3)$; 🔗 $y = 6x - 9$
- b) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $C(1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$ và $D(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1)$; 🔗 $y = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}$
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $E(1; 3)$ và cắt đường thẳng $(d): y = 2x - 4$ tại điểm có hoành độ bằng 3. 🔗 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

🗨 **Lời giải.**

Hàm số bậc nhất cần tìm có dạng $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng (d) .

a) Vì (d) đi qua $A(1; -3), B(2; 3)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a - 3 \\ a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -9 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 6x - 9$$

b) Vì (d) đi qua $C(1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$ và $D(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{2})a + b = -\sqrt{2} \\ (\sqrt{2} - 1)a + b = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -1 \\ a = \frac{-\sqrt{2} - b}{1 - \sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow (d): y = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}$$

c) Gọi B là giao điểm của (d) và (d') . Theo giả thiết

$$x_B = 3 \Rightarrow y_B = 2x_B - 4 = 2 \Rightarrow B(3; 2).$$

Vì (d) đi qua $E(1; 3), B(3; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (d): y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

□

◆ **Bài 9.** Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(d): 2mx + (m - 1)y = 3$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): 2x + 3y + 2 = 0$ và $(d_2): 3x - 2y = -3$. ☞ $m = -\frac{3}{2}$

🗨 **Lời giải.**

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ 9x - 6y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = -13 \\ y = \frac{3x + 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 0).$$

Đường thẳng $(d): 2mx + (m - 1)y = 3$ đi qua M nên $2m \cdot (-1) + (m - 1) \cdot 0 = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$. □

◆ **Bài 10.** Tìm m để ba đường thẳng $(d_1): 2x - y = 5, (d_2): -3x + 4y = 5, (d_3): y = (2m - 3)x - 1$ đồng quy. ☞ $m = \frac{21}{10}$

🗨 **Lời giải.**

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -3x + 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 20 \\ -3x + 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow M(5; 5).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì (d_3) đi qua M nên

$$(2m - 3) \cdot 5 - 1 = 5 \Leftrightarrow m = \frac{21}{10}.$$

□

◆ **Bài 11.** Xác định m để đường thẳng $(d): y = 2mx + m - 1$ và đường thẳng $(d'): 3x - y + 2 = 0$ cắt nhau tại một điểm:

- a) Nằm trên trục hoành; ☞ $m = -3$ b) Nằm trên trục tung; ☞ $m = 3$
- c) Thuộc góc phần tư thứ ba; ☞ $m > \frac{3}{2}$ hoặc $m < -1$ d) Nằm trên đường thẳng $(d_1): y = -2x - 3$. ☞ $m = 0$

🗨 **Lời giải.**

a) A là giao điểm của $(Ox): y = 0$ và $(d'): 3x - y + 2 = 0$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{3}; 0\right).$$

Vì $A \in (d)$ nên $0 = 2m \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + m - 1 \Leftrightarrow m = -3$.

b) A là giao điểm của (Oy) : $x = 0$ và (d') : $3x - y + 2 = 0$ nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2).$$

Vì $A \in (d)$ nên $2 = 2m \cdot 0 + m - 1 \Leftrightarrow m = 3$.

c) A là giao điểm của (d) và (d') nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2mx + m - 1 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx - y = 1 - m \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2mx + m - 1 \\ (2m - 3)x = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3m + 3}{2m - 3} \\ x = \frac{1 - m}{2m - 3} \end{cases} \left(m \neq \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow A \left(\frac{1 - m}{2m - 3}; -\frac{3m + 3}{2m - 3} \right).$$

Để A thuộc góc phần tư thứ ba thì $\begin{cases} x_A < 0 \\ y_A < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - m}{2m - 3} < 0 \\ -\frac{3m + 3}{2m - 3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2m - 3 > 0 \\ 1 - m < 0 \\ 3m + 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2m - 3 < 0 \\ 1 - m > 0 \\ 3m + 3 < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m > 1 \\ m > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m < 1 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < -1 \end{cases}.$$

Với $m = \frac{3}{2}$ thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} y = 3x + \frac{1}{2} \\ 0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ (vô lí).

d) A là giao điểm của (d') và (d_1) nên có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ y = -2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ 5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1).$$

Vì $A \in (d)$ nên $2m \cdot (-1) + m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$.

□

◆ **Bài 12.** Tìm giao điểm của hai đường thẳng (d) : $y = ax - 2a - b$ và đường thẳng (d') : $ax - (3b - 1)y = 10$, biết rằng (d) đi qua điểm $A(-3; 5)$ và (d') đi qua điểm $B(2; -1)$. 📍 $M\left(-\frac{2}{13}; -\frac{9}{13}\right)$

🗨️ Lời giải.

Vì (d) đi qua $A(-3; 5)$ nên $-3a - 2a - b = 5 \Leftrightarrow 5a + b = -5$.

Vì (d') đi qua $B(2; -1)$ nên $2a + (3b - 1) = 10 \Leftrightarrow 2a + 3b = 11$.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5a + b = -5 \\ 2a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15a + 3b = -15 \\ 2a + 3b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5a - 5 \\ 13a = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d): y = -2x - 1 \\ (d'): -2x - 14y = 10 \end{cases}.$$

Tọa độ giao điểm M của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ -2x - 14y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + 14y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y = -9 \\ x = -7y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{9}{13} \\ x = -\frac{2}{13} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{2}{13}; -\frac{9}{13}\right).$$

□

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔹 **Bài 13.** Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x - 3y = 1; \end{cases}$ $\text{a. } \begin{cases} x = \frac{7}{10} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y = 3 \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = -2; \end{cases}$ $\text{a. } \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})y = 1 \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{3} = 1; \end{cases}$ $\text{a. } \begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -7,5x + 3,6y = 1,2 \\ 2x - 0,9y = -3. \end{cases}$ $\text{a. } \begin{cases} x = -\frac{108}{5} \\ y = -\frac{134}{3} \end{cases}$

🗨 **Lời giải.**

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2-y}{2} \\ 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{10} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y = 3 \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{5}x - 3y = 12 \\ 9x + 3y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{53}{5}x = 0 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{3}x + (1 + \sqrt{3})y = 1 \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})y = 1 \\ \sqrt{3}x - \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}y = -\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - (1 + \sqrt{3})y}{\sqrt{3}} \\ \frac{5 + 5\sqrt{3}}{2}y = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{2\sqrt{3} - 1}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} -7,5x + 3,6y = 1,2 \\ 2x - 0,9y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7,5x + 3,6y = 1,2 \\ 8x - 3,6y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x = -10,8 \\ y = \frac{8x + 12}{3,6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{108}{5} \\ y = -\frac{134}{3} \end{cases}$

□

🔹 **Bài 14.** Cho hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1. \end{cases}$ Giải hệ phương trình với

a) $m = 2;$ $\text{a. } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $m = 1;$ a. vô nghiệm c) $m = -1.$ a. vô số nghiệm

🗨 **Lời giải.**

a) Với $m = 2$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ 3x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) Với $m = 1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 0 = 2 \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

c) Với $m = -1$ thì ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm. □

◆ **Bài 15.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)(y+3) - \frac{1}{2}xy = 50 \\ \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x-2)(y-2) = 32; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 26 \\ y = 8 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (x+20)(y-1) = xy \\ (x-10)(y+1) = xy; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 40 \\ y = 3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-y) = 5 \\ 4(x+y) + (x-y) = 3; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \frac{-3y+5x}{15} - 2 = \frac{10+3y}{10} - \frac{x}{6} \\ \frac{2x-3}{4} + \frac{y}{4} = \frac{y-2x}{20} + \frac{5}{4}. \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

☰ **Lời giải.**

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)(y+3) - \frac{1}{2}xy = 50 \\ \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x-2)(y-2) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x + y = 47 \\ x + y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 13 \\ y = 34 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 \\ y = 8 \end{cases}.$$

b)
$$\begin{cases} (x+20)(y-1) = xy \\ (x-10)(y+1) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 20y = 20 \\ x - 10y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 30 \\ x = 10y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 40 \end{cases}.$$

c)
$$\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-y) = 5 \\ 4(x+y) + (x-y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y = 5 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 25y = 25 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y - 5 \\ 28y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

d)
$$\begin{cases} \frac{-3y+5x}{15} - 2 = \frac{10+3y}{10} - \frac{x}{6} \\ \frac{2x-3}{4} + \frac{y}{4} = \frac{y-2x}{20} + \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 3 \\ \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 6 \\ 4x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$
 □

◆ **Bài 16.** Giải hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 5; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2}{3x-y} - \frac{5}{x-3y} = 3 \\ \frac{1}{3x-y} + \frac{2}{x-3y} = \frac{3}{5}; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 16 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -11; \end{cases} \quad \text{☞ } \begin{cases} x = 4 \\ y = 25 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3x^2 - 2y^2 = -6. \end{cases}$$

☞ $S = \{(-2; 3), (-2; -3), (2; -3), (2; 3)\}$

 Lời giải.

a) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ 2u + 4v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - 2v = 2 \\ 2u + 4v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ 6v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{2} \\ v = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases}.$$

b) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x \neq y \\ x \neq 3y \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{3x - y} \\ v = \frac{1}{x - 3y} \end{cases}$ ($u, v \neq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u - 5v = 3 \\ u + 2v = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - 5v = 3 \\ 2u + 4v = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9v = -\frac{9}{5} \\ u = \frac{3}{5} - 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{1}{5} \\ u = 1 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{3x - y} = 1 \\ \frac{1}{x - 3y} = -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - 9y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y + 1}{3} \\ 8y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

c) Điều kiện của hệ phương trình: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}$ ($u, v \geq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3u + 2v = 16 \\ 2u - 3v = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u + 4v = 32 \\ 6u - 9v = -33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{16 - 2v}{3} \\ 13v = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 5 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 25 \end{cases}.$$

d) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ v = y^2 \end{cases}$ ($u, v \geq 0$), hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + v = 13 \\ 3u - 2v = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 2v = 26 \\ 3u - 2v = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 13 - u \\ 5u = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 9 \\ u = 4 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \end{cases}.$$

Vậy $S = \{(-2; 3), (-2; -3), (2; -3), (2; 3)\}$.

□

✎ **Bài 17.** Xác định a, b để hệ phương trình $\begin{cases} 3ax - by = 2 \\ (a + b)x + ay = b \end{cases}$ có nghiệm là $(3; -1)$.

$$\text{☞ } a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$$

☞ **Lời giải.**

Vì $(3; -1)$ là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\begin{cases} 9a + b = 2 \\ 3(a + b) - a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + b = 2 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 2 \\ b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

□

✎ **Bài 18.** Xác định a, b để đường thẳng $(d): y = 2ax - 3b$ và đường thẳng $(d'): bx - 2ay = 3$ đi qua điểm $A(-1; 2)$.

$$\text{☞ } a = -\frac{7}{10}, b = -\frac{1}{5}$$

☞ **Lời giải.**

Vì (d) và (d') đi qua $A(-1; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -2a - 3b = 2 \\ -b - 4a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = -2 \\ 12a + 3b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = -7 \\ b = -4a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}.$$

□

✎ **Bài 19.** Xác định a, b để đường thẳng $(d): y = 2ax + 2b - 1$ đi qua hai điểm $A(1; 3), B(-2; 5)$.

$$\text{☞ } a = -\frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$$

☞ **Lời giải.**

Đường thẳng (d) đi qua $A(1; 3), B(-2; 5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a \cdot 1 + 2b - 1 = 3 \\ 2a \cdot (-2) + 2b - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 4 \\ -4a + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = -2 \\ -b = 2a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

□

✎ **Bài 20.** Hãy xác định hàm số bậc nhất thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

a) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(5; -4), B(2; -1)$;

$$\text{☞ } y = -x + 1$$

- b) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $C\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), D\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$; $\color{red}{\text{Q}} \ y = (3 - 2\sqrt{2})x + \sqrt{3} - \sqrt{6}$
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $E(3; -1)$ và cắt đường thẳng (d') : $y = 2x + 4$ tại điểm có hoành độ bằng -1 . $\color{red}{\text{Q}} \ y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

Lời giải.

Hàm số bậc nhất cần tìm có dạng $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng (d) .

- a) Vì (d) đi qua $A(5; -4), B(2; -1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5a + b = -4 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -3 \\ b = -2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow (d): y = -x + 1.$$

- b) Vì (d) đi qua $C\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), D\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a + b = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}a + b = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{1}{\sqrt{3}}a - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 - 2\sqrt{2} \\ b = \sqrt{3} - \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (d): y = (3 - 2\sqrt{2})x + \sqrt{3} - \sqrt{6}.$$

- c) Gọi B là giao điểm của (d) và (d') . Theo giả thiết

$$x_B = -1 \Rightarrow y_B = 2x_B + 4 = 2 \Rightarrow B(-1; 2).$$

Vì (d) đi qua $E(3; -1), B(-1; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -3 \\ b = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow (d): y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$

□

✦ Bài 21. Xác định giá trị của m để các đường thẳng sau đồng quy: $(d_1): y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}, (d_2): y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$ và $(d_3): mx - 3y = m - 1$. $\color{red}{\text{Q}} \ m = \frac{7}{3}$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2} \\ y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2} \\ \frac{7}{10}x - \frac{49}{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 7 \end{cases} \Rightarrow M(7; 5).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì $(d_3): mx - 3y = m - 1$ đi qua M nên

$$m \cdot 7 - 3 \cdot 5 = m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

□

✦ **Bài 22.** Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $(d_1): 3x + 2y = 4$, $(d_2): 2x - (m + 1)y = m$, $(d_3): x + 2y = 3$ đồng quy. $m = -\frac{1}{9}$

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_3) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 5 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì $(d_2): 2x - (m + 1)y = m$ đi qua M nên

$$2 \cdot \frac{1}{2} - (m + 1) \cdot \frac{5}{4} = m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{9}.$$

□

BÀI 5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bước *giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình* bao gồm:

Bước 1. Lập hệ phương trình

- ✔ Chọn các ẩn số, đặt điều kiện và đơn vị phù hợp cho ẩn số;
- ✔ Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn số;
- ✔ Thiết lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa ẩn số và các đại lượng đã biết;

Bước 2. Giải hệ phương trình vừa lập được;

Bước 3. Đối chiếu nghiệm của phương trình với điều kiện của ẩn số (nếu có) ở *Bước 1*, từ đó đưa ra kết luận cần tìm.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bài toán về quan hệ các số

Thực hiện các bước giải trong phần *Tóm tắt lý thuyết*.

Chú ý biểu diễn các số: $\overline{ab} = 10a + b$; $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Trong đó các chữ số $a, b, c \in \mathbb{N}$; $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$.

✦ **Ví dụ 1.** Cho một số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng hai chữ số của số đó bằng 13 và nếu chia chữ số hàng chục cho hàng đơn vị thì được thương là 2 dư 1. Tìm số đó. 94

Lời giải.

Gọi số cần tìm là \overline{ab} ($a, b \in \mathbb{N}^*$; $a, b \leq 9$). Theo đề bài, ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 13 \\ a = 2b + 1. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $a = 9$; $b = 4$. Vậy số tự nhiên cần tìm là 94. □

❖ **Ví dụ 2.** Tổng chữ số hàng đơn vị và 5 lần chữ số hàng chục của một số có hai chữ số là 21. Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số ban đầu là 27 đơn vị. Tìm số đó.

🔗 36

🗨️ **Lời giải.**

Gọi số cần tìm là \overline{ab} ($a, b \in \mathbb{N}^*$; $a, b \leq 9$).

Theo đề ra, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 5a + b = 21 \\ 10b + a - (10a + b) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = 21 \\ a - b = -3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $a = 3; b = 6$. Vậy số cần tìm là 36. □

📁 Dạng 2. Bài toán về chuyển động

Chú ý các công thức:

- 🕒 $S = vt$, trong đó S là quãng đường, v là vận tốc và t là thời gian.
- 🕒 Trong bài toán chuyển động tàu, thuyền trên mặt nước, ta có:
 - Vận tốc xuôi dòng = vận tốc thực + vận tốc dòng nước.
 - Vận tốc ngược dòng = vận tốc thực - vận tốc dòng nước.
 - Vận tốc thực luôn lớn hơn vận tốc dòng nước.

❖ **Ví dụ 3.** Một ô tô đi từ A đến B cách nhau 115 km gồm hai đoạn đường nhựa và đường sỏi. Thời gian xe đi trên đoạn đường nhựa và sỏi lần lượt là 1 giờ và 2 giờ. Tính vận tốc của ô tô đi trên từng đoạn đường, biết trên đoạn đường nhựa vận tốc ô tô lớn hơn trên đoạn đường sỏi là 25 km/h.

🔗 55 km/h và 30 km/h

🗨️ **Lời giải.**

Gọi vận tốc ô tô đi trên đoạn đường nhựa là x ($x > 25$, km/h).

Vận tốc của xe đi trên đoạn đường sỏi là y ($0 < y < x$, km/h).

Theo đề bài, ta có:
$$\begin{cases} x + 2y = 115 \\ x - y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = 55 \end{cases} \text{ (TMDK).}$$

Vậy vận tốc ô tô trên đoạn đường nhựa và đường sỏi lần lượt là 55 km/h và 30 km/h. □

❖ **Ví dụ 4.** Một người đi xe máy dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định, nếu người này tăng tốc thêm 15 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ, còn nếu xe chạy với vận tốc giảm đi 15 km/h thì sẽ đến B chậm hơn 2 giờ. Tính quãng đường AB.

🔗 180 km

🗨️ **Lời giải.**

Gọi vận tốc và thời gian dự định lần lượt là x (km/h); y (h). (ĐK: $x > 15; y > 1$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + 15)(y - 1) = xy \\ (x - 15)(y + 2) = xy \end{cases}$$
. Giải hệ phương trình, ta được $\begin{cases} x = 45 \\ y = 4. \end{cases}$

Vậy, vận tốc dự định là 45 km/h, thời gian dự định 4 giờ, quãng đường AB: 180 km. □

❖ **Ví dụ 5.** Một ca nô chạy trên sông trong 3 giờ xuôi dòng 38 km và ngược dòng 64 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó ca nô này chạy trong 1 giờ xuôi dòng 19 km và ngược dòng 16 km. Hãy tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước, biết rằng các vận tốc này không đổi.

🔗 35 km/h và 3 km/h

🗨️ **Lời giải.**

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là x, y (km/h; $0 < y < x$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{38}{x+y} + \frac{64}{x-y} = 3 \\ \frac{19}{x+y} + \frac{16}{x-y} = 1. \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{x+y}, b = \frac{1}{x-y}$. Ta được hệ
$$\begin{cases} 38a + 64b = 3 \\ 19a + 16b = 1 \end{cases}$$
. Giải HPT ta được $a = \frac{1}{38}, b = \frac{1}{32}$.

Từ đó tìm được: $x = 35, y = 3$ (TMDK).

Vậy vận tốc ca nô là 35 km/h, vận tốc dòng nước là 3 km/h. □

🔗 **Ví dụ 6.** Hai địa điểm A và B cách nhau 120 km. Một xe đạp và xe máy khởi hành cùng lúc đi từ A đến B, sau 3 giờ thì khoảng cách giữa hai xe là 30 km. Tìm vận tốc hai xe, biết thời gian để đi hết quãng đường AB của xe đạp nhiều hơn xe máy là 2 giờ. 🔗 30 km/h và 20 km/h

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc của xe máy và xe đạp lần lượt là x, y (km/h; $0 < x, y$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 3y = 30 \\ \frac{120}{x} = \frac{120}{y} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ 60y = 60x - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 10 \\ y^2 + 10y - 600 = 0. \end{cases}$$

Giải HPT ta được
$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 20. \end{cases}$$
 (TMDK).

Vậy vận tốc xe máy là 30 km/h, vận tốc xe đạp là 20 km/h. □

🔗 **Ví dụ 7.** Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 200 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 30 km/h nên ô tô đến sớm hơn xe máy 6 giờ. Tính vận tốc mỗi xe. 🔗 50 km/h và 20 km/h

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc của ô tô và xe máy lần lượt là x, y (km/h; $0 < y < x - 30$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 30 \\ \frac{200}{y} - \frac{200}{x} = 6. \end{cases}$$

Giải HPT ta được
$$\begin{cases} x = 50 \\ y = 20. \end{cases}$$
 (TMDK).

Vậy vận tốc ô tô là 50 km/h, vận tốc xe máy là 20 km/h. □

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

🔗 **Bài 1.** Cho hai số có tổng bằng 57. Bốn lần của số bé lớn hơn 2 lần của số lớn là 6. Tìm hai số đã cho. 🔗 20 và 37

🗨️ Lời giải.

Gọi số bé là a số lớn là b .

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 57 \\ 4a - 2b = 6. \end{cases}$$

Giải ra ta được
$$\begin{cases} a = 20 \\ b = 37. \end{cases}$$

Vậy số bé là 20, số lớn là 37. □

🔗 **Bài 2.** Tìm 2 số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 112 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 4, số dư là 2. 🔗 90 và 22

Lời giải.

Gọi số lớn là a số bé là b ($a, b \in \mathbb{N}^*; a > b$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b = 112 \\ a = 4b + 2. \end{cases}$$

Giải ra ta được
$$\begin{cases} a = 90 \\ b = 22. \end{cases}$$

Vậy số bé là 90, số lớn là 22. □

❖ Bài 3. Cho một số có hai chữ số, nếu đổi chỗ hai chữ số của nó ta được một số mới lớn hơn số đã cho là 18. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành là 132. Tìm số đã cho. 🔗 57

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab} = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}^*; a, b \leq 9$).

Đổi chỗ hai chữ số ta được số $\overline{ba} = 10b + a$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 10b + a - (10a + b) = 18 \\ 10a + b + 10b + a - 132 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2 \\ 11a + 11b - 132. \end{cases}$$

Giải ra ta được
$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 7. \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 57. □

❖ Bài 4. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu người đó tăng vận tốc thêm 25 km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu người đó giảm vận tốc 20 km/h thì đến B muộn hơn 2 giờ. Tính vận tốc, thời gian dự định và độ dài quãng đường AB. 🔗 50 km/h, 3 giờ, 150 km

Lời giải.

Gọi vận tốc và thời gian dự định lần lượt là x (km/h); y (h). (ĐK: $x > 20; y > 1$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + 25)(y - 1) = xy \\ (x - 20)(y + 2) = xy \end{cases}$$
. Giải hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} x = 50 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy, vận tốc dự định là 50 km/h, thời gian dự định 3 giờ, quãng đường AB: 150 km. □

❖ Bài 5. Hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B, cách nhau 120 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 3 giờ. Nếu xe thứ nhất khởi hành trước xe thứ hai 2 giờ 40 phút thì hai xe gặp nhau khi xe thứ hai đi được 1 giờ. Tìm vận tốc của mỗi xe. 🔗 30 km/h và 10 km/h

Lời giải.

Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là x, y (km/h; $x, y > 0$).

Đổi: 2 giờ 40 phút = $\frac{8}{3}$ giờ và vì hai xe đi ngược chiều nên gặp nhau khi tổng quãng đường chúng đi bằng AB.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 3y = 120 \\ \frac{11}{3}x + y = 120. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 30; y = 10$. (TMĐK).

Vậy vận tốc xe thứ nhất là 30 km/h, vận tốc xe thứ hai là 10 km/h. □

❖ Bài 6. Một ca nô chạy trên sông, xuôi dòng 66 km và ngược dòng 54 km hết tất cả 4 giờ. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, xuôi dòng 11 km và ngược dòng 18 km hết tất cả 1 giờ. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi. 🔗 30 km/h và 3 km/h

Lời giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là x, y (km/h; $0 < y < x$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{66}{x+y} + \frac{54}{x-y} = 4 \\ \frac{11}{x+y} + \frac{18}{x-y} = 1. \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{x+y}, b = \frac{1}{x-y}$. Giải HPT ta được $a = \frac{1}{33}, b = \frac{1}{27}$.

Từ đó tìm được: $x = 30, y = 3$ (TMDK).

Vậy vận tốc ca nô là 30 km/h, vận tốc dòng nước là 3 km/h. □

❖ **Bài 7.** Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 280 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 30 km/h nên ô tô đến sớm hơn xe máy 3 giờ. Tính vận tốc mỗi xe. 🔗 70 km/h và 40 km/h

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc của ô tô và xe máy lần lượt là x, y (km/h; $x > y > 30$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 30 \\ \frac{280}{y} - \frac{280}{x} = 3. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $\begin{cases} x = 70 \\ y = 40 \end{cases}$. (TMDK).

Vậy vận tốc xe máy là 70 km/h, vận tốc xe đạp là 40 km/h. □

D – BÀI TẬP VỀ NHÀ

❖ **Bài 8.** Cho hai số tự nhiên biết tổng của chúng là 33 và nếu lấy số lớn chia cho số bé thì được thương là 4 dư 3. Tìm hai số đã cho. 🔗 27 và 6

🗨️ Lời giải.

Gọi số lớn và số bé cần tìm lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 33$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 33 \\ x = 4y + 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 27; y = 6$.

Vậy hai số cần tìm là 27 và 6. □

❖ **Bài 9.** Cho một số tự nhiên có hai chữ số, 2 lần chữ số hàng chục lớn hơn 3 lần chữ số hàng đơn vị là 1. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đó cho nhau ta được một số mới nhỏ hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đó. 🔗 53

🗨️ Lời giải.

Gọi số cần tìm là \overline{ab} ($a, b \in \mathbb{N}^*; b < a \leq 9$).

Theo đề ra, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 10a + b - (10b + a) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ a - b = 2. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $a = 5; b = 3$. Vậy số cần tìm là 53. □

❖ **Bài 10.** Một ô tô xuất phát từ tỉnh A và đi đến tỉnh B với vận tốc là 30 km/h. Sau khi đến B người đó quay trở về A với vận tốc 40 km/h. Tính thời gian của ô tô lúc đi và lúc về, biết tổng thời gian cả đi lẫn về là 7 giờ. 🔗 4 giờ và 3 giờ

🗨️ Lời giải.

Gọi thời gian ô tô lúc đi và về lần lượt là x, y ($0 < x, y < 3$, giờ).

Theo đề bài, ta có:
$$\begin{cases} 30x = 40y \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}. \text{ (TMDK).}$$

Vậy thời gian lúc đi là 4 giờ, lúc về là 3 giờ. □

◆ **Bài 11.** Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu người đó tăng vận tốc thêm 20 km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu người đó giảm vận tốc 10 km/h thì đến B muộn hơn 1 giờ. Tính vận tốc, thời gian dự định và độ dài quãng đường AB. 🔗 40 km/h, 3 giờ, 120 km

🗨️ **Lời giải.**

Gọi vận tốc và thời gian dự định lần lượt là x (km/h); y (h). (ĐK: $x > 10$; $y > 1$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + 20)(y - 1) = xy \\ (x - 10)(y + 1) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 20y = 20 \\ x - 10y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy, vận tốc dự định là 40 km/h, thời gian dự định 3 giờ, quãng đường AB: 120 km. □

◆ **Bài 12.** Hai bến sông A, B cách nhau 200 km. Một ca nô xuôi dòng từ bên A đến bến B rồi ngược từ B trở về A hết tổng thời gian là 9 giờ. Biết thời gian ca nô xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô ngược dòng 4 km. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng và vận tốc của dòng nước. 🔗 45 km/h và 5 km/h

🗨️ **Lời giải.**

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước lần lượt là x, y (km/h; $0 < y < x$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{200}{x + y} + \frac{200}{x - y} = 9 \\ \frac{5}{x + y} = \frac{4}{x - y}. \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{1}{x + y}, b = \frac{1}{x - y}$. Giải HPT ta được $a = \frac{1}{50}, b = \frac{1}{40}$.

Từ đó tìm được: $x = 45, y = 5$ (TMDK).

Vậy vận tốc ca nô là 45 km/h, vận tốc dòng nước là 5 km/h. □

◆ **Bài 13.** Hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 100 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Nếu xe thứ nhất khởi hành trước xe thứ hai 2 giờ 30 phút thì hai xe gặp nhau khi xe thứ hai đi được 30 phút. Tìm vận tốc của mỗi xe. 🔗 30 km/h và 20 km/h

🗨️ **Lời giải.**

Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là x, y (km/h; $0 < x, y < 50$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 100. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 30; y = 20$. (TMDK).

Vậy vận tốc xe thứ nhất là 30 km/h, vận tốc xe thứ hai là 20 km/h. □

◆ **Bài 14.** Một xe khách và một xe Du lịch khởi hành cùng một lúc từ Hà Nội đi đến Hải Phòng. Xe Du lịch có vận tốc lớn hơn xe khách là 10 km/h, do đó xe đã đến Hải Phòng trước xe khách 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết khoảng cách giữa Hà Nội và Hải Phòng là 100 km. 🔗 50 km/h và 40 km/h

🗨️ **Lời giải.**

Gọi vận tốc của xe du lịch và xe khách lần lượt là x, y (km/h; $0 < y < x - 10$).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \frac{100}{y} - \frac{100}{x} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Giải HPT ta được
$$\begin{cases} x = 50 \\ y = 40. \end{cases} \text{ (TMDK).}$$

Vậy vận tốc xe Du lịch là 50 km/h, vận tốc xe khách là 40 km/h. □

BÀI 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH (TIẾP)

A – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bài toán về công việc làm chung và làm riêng

Lưu ý sử dụng các kết quả sau:

- ☑ Nếu x giờ (hoặc ngày) làm xong công việc thì mỗi giờ (hoặc ngày) làm được $\frac{1}{x}$ công việc đó.
- ☑ Nếu trong 1 giờ làm được $\frac{1}{x}$ công việc thì a giờ làm được $\frac{a}{x}$ công việc.

🔗 **Ví dụ 1.** Hai đội công nhân cùng làm 1 đoạn đường trong 30 ngày thì xong. Mỗi ngày, phần việc đội A làm được gấp hai lần đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu.

🔗 45 ngày và 90 ngày

🗨️ Lời giải.

Gọi số ngày đội A, B làm một mình xong đoạn đường lần lượt là x và y (ngày, $x, y > 30$).

Suy ra trong 1 ngày đội A, B làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ công việc.

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{30}{x} + \frac{30}{y} = 1 \\ \frac{1}{x} = \frac{2}{y}. \end{cases}$$

Giải ra ta được $x = 45$ và $y = 90$ (TMDK).

Vậy đội A làm một mình trong 45 ngày, đội B làm một mình trong 90 ngày thì xong đoạn đường.

□

🔗 **Ví dụ 2.** Hai người thợ quét sơn một tòa nhà. Nếu họ cùng làm trong 12 ngày thì xong công trình. Tuy nhiên thực tế hai người làm cùng nhau trong 4 ngày thì người thứ nhất được chuyển đi làm công việc khác, người thứ hai làm một mình trong 14 ngày nữa mới xong. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu.

🔗 28 ngày và 21 ngày

🗨️ Lời giải.

Gọi số ngày người thứ nhất, người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là x và y (ngày; $x, y > 12$).

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{18}{y} = 1. \end{cases}$$

Giải ra ta được $x = 28$ và $y = 21$ (TMDK).

Vậy nếu làm một mình người thứ nhất làm trong 28 ngày, người thứ hai làm trong 21 ngày thì xong việc.

□

🔗 **Ví dụ 3.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 4 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ vòi I chảy một mình trong 1 giờ, sau đó mở thêm vòi II cùng chảy trong 3 giờ nữa thì được $\frac{5}{6}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

🔗 12 giờ và 6 giờ

Lời giải.

Gọi thời gian vòi I, II chảy một mình đầy bể lần lượt là x và y (giờ; $x, y > 4$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 12; y = 6$ (TMDK).

Vậy thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là 12 giờ và 6 giờ. □

Dạng 2. Bài toán năng suất lao động

Khi giải bài toán về năng suất lao động cần lưu ý sử dụng công thức $S = N.t$. Trong đó:

- ☑ S : là lượng công việc làm được;
- ☑ N : là năng suất lao động (tức khối lượng công việc hoàn thành trong một đơn vị thời gian);
- ☑ t : là thời gian để hoàn thành công việc.

🔗 **Ví dụ 4.** Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 140 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 2 sản phẩm nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 8 ngày. Hỏi mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm? 🔍 5 sản phẩm

Lời giải.

Gọi x là số sản phẩm mỗi ngày phân xưởng làm và y là số ngày làm theo kế hoạch. ĐK: $x > 0, y > 8$.

Theo đề bài, ta có HPT
$$\begin{cases} xy = 140 \\ (x + 2)(y - 8) = 140. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 5; y = 28$ (TMDK).

Vậy mỗi ngày theo kế hoạch phân xưởng phải sản xuất 5 sản phẩm. □

Dạng 3. Bài toán về tỉ lệ phần trăm

Khi giải bài toán về tỉ lệ phần trăm cần lưu ý nếu một đại lượng a được tăng thêm $m\%$ thì ta được một lượng mới là $a + a.m\%$.

🔗 **Ví dụ 5.** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 800 sản phẩm trong thời gian nhất định. Do cải tiến kỹ thuật tổ I đã vượt mức 18%, tổ II vượt mức 25%. Do vậy trong thời gian quy định hai tổ vượt mức 165 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao theo kế hoạch của mỗi tổ là bao nhiêu? 🔍 500 sản phẩm và 300 sản phẩm

Lời giải.

Gọi số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là x (sản phẩm), tổ II là y (sản phẩm). (ĐK: $0 < x, y < 800$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 0,18x + 0,25y = 165. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 500 \\ y = 300. \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch tổ I được giao 500 sản phẩm, tổ II được giao 300 sản phẩm. □

Dạng 4. Bài toán về nội dung hình học

Chú ý sử dụng các công thức tính chu vi, diện tích các hình (tam giác, hình chữ nhật, hình vuông,...) hoặc vận dụng tính chất đặc biệt của các hình này để thiết lập được hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các ẩn, từ đó tìm được các đại lượng trong bài toán.

❖ **Ví dụ 6.** Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật tăng thêm 19 cm^2 . Nếu chiều rộng tăng thêm 1 cm, chiều dài giảm đi 2 cm thì diện tích hình chữ nhật giảm đi 8 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật.

🔗 10 m và 8 m

🗨️ **Lời giải.**

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật lần lượt là x, y (m) ($0 < y < x; x > 2$).

Theo đề bài, ta có HPT
$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = xy + 19 \\ (x-2)(y+1) = xy - 18. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 10; y = 8$ (TMDK).

Vậy chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật là 10 m và 8 m. □

❖ **Ví dụ 7.** Một khu đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của khu đất đó.

🔗 12 m và 5 m

🗨️ **Lời giải.**

Gọi chiều rộng, chiều dài của mảnh vườn lần lượt là x, y (m) ($y > x > 0$).

Theo đề bài, ta có HPT:
$$\begin{cases} y - x = 7 \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 5; y = 12$ (TMDK).

Vậy, chiều dài và chiều rộng mảnh vườn là 12 m và 5 m. □

📁 Dạng 5. Bài toán về nội dung sắp xếp chia đều

Sử dụng tính chất về chia hết và chia có dư.

Lưu ý: Nếu chia số a cho số b có thương là q dư r thì $a = bq + r$.

❖ **Ví dụ 8.** Trong một buổi tọa đàm, một lớp có 25 khách mời đến giao lưu. Vì lớp đã có 45 học sinh nên phải kê thêm một dãy ghế nữa và mỗi dãy ghế xếp thêm hai chỗ ngồi. Biết mỗi dãy đều có số người ngồi như nhau và ngồi không quá năm người. Hỏi lớp học lúc đầu có bao nhiêu dãy ghế?

🔗 9 dãy ghế

🗨️ **Lời giải.**

Gọi số dãy ghế trong lớp và số người ngồi ở mỗi dãy là x, y ($x, y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài, ta có HPT:
$$\begin{cases} xy = 45 \\ (x+1)(y+2) = 70. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 9; y = 5$ (TMDK).

Vậy, lớp học lúc đầu có 9 dãy ghế. □

B – BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Để hoàn thành công việc hai tổ làm chung trong 8 giờ. Tuy nhiên sau 6 giờ làm chung tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một hoàn thành nốt công việc còn lại trong 6 giờ. Hỏi hai tổ làm riêng sau bao lâu hoàn thành xong công việc.

🔗 12 giờ và 24 giờ

🗨️ **Lời giải.**

Gọi số giờ đội I, II làm một mình xong công việc lần lượt là x và y (giờ; $x, y > 8$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{8}{y} = 1 \\ \frac{12}{x} + \frac{6}{y} = 1. \end{cases}$$

Giải ra ta được $x = 12$ và $y = 24$ (TMDK).

Vậy nếu làm một mình đội I làm trong 12 giờ, đội II làm trong 24 giờ thì xong việc. □

❖ **Bài 2.** Nếu hai vòi nước cùng chảy vào bể sau 6 giờ thì đầy. Nếu mở vòi thứ nhất 2 giờ đóng lại, sau đó mở vòi thứ hai 5 giờ thì được $\frac{8}{15}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu bể đầy.

🔗 10 giờ và 15 giờ

🗨️ **Lời giải.**

Gọi số giờ vòi thứ nhất, vòi thứ hai chảy một mình đầy bể lần lượt là x và y (giờ; $x, y > 0$).

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{8}{15}. \end{cases}$$

Giải ra ta được $x = 10$ và $y = 15$ (TMĐK).

Vậy vòi thứ nhất chảy một mình 10 giờ, vòi thứ hai chảy một mình 15 giờ thì đầy bể. □

❖ **Bài 3.** Nếu hai vòi nước cùng chảy vào bể sau 4 giờ thì được $\frac{5}{6}$ bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất chảy một mình trong 3 giờ, sau đó mở thêm vòi thứ hai chảy trong 3 giờ thì đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu bể đầy.

🔗 8 giờ và 12 giờ

🗨️ **Lời giải.**

Gọi số giờ vòi thứ nhất, vòi thứ hai chảy một mình đầy bể lần lượt là x và y (giờ; $x, y > 0$).

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = 1. \end{cases}$$

Giải ra ta được $x = 8$ và $y = 12$ (TMĐK).

Vậy vòi thứ nhất chảy một mình 8 giờ, vòi thứ hai chảy một mình 12 giờ thì đầy bể. □

❖ **Bài 4.** Một đội máy cày dự định mỗi ngày cày 0,6 ha. Khi thực hiện mỗi ngày cày được 0,78 ha. Vì vậy đội không những đã cày xong trước thời hạn 2 ngày mà còn cày thêm 0,6 ha nữa. Tính diện tích đội phải cày theo dự định.

🔗 7,2 ha

🗨️ **Lời giải.**

Gọi x (ha; $x > 0$) là diện tích và y (ngày; $y > 2$) là số ngày đội dự định cày.

$$\text{Từ đề bài, ta có HPT } \begin{cases} 0,6y = x \\ 0,78(y - 2) = x + 0,6. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $y = 7,2$; $x = 4,32$ (TMĐK).

Vậy theo dự định đội phải cày 4,32 ha. □

❖ **Bài 5.** Một xưởng may theo kế hoạch cần phải sản xuất 160 cái áo trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 4 cái áo nên phân xưởng đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm theo dự định? 🔗 16

🗨️ **Lời giải.**

Gọi x là số áo sản xuất mỗi ngày và y là số ngày xưởng cần làm theo kế hoạch. ĐK: $x > 0, y > 2$.

$$\text{Từ đề bài, ta có HPT } \begin{cases} xy = 160 \\ (x + 4)(y - 2) = 160. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $y = 10$; $x = 16$ (TMĐK).

Vậy theo kế hoạch xưởng phải may 16 áo mỗi ngày. □

❖ **Bài 6.** Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 680 tấn thóc. Năm nay đơn vị thứ nhất vượt mức 18%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch vượt mức 129 tấn thóc. Hỏi năm ngoái mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc.

🔗 350 sản phẩm và 330 sản phẩm

 **Lời giải.**

Gọi x (tấn), y (tấn) lần lượt là khối lượng thóc đơn vị thứ nhất và đơn vị thứ hai thu hoạch năm ngoái. (ĐK: $0 < x, y < 680$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 680 \\ 0,18x + 0,2y = 129. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 350 \\ y = 330. \end{cases}$$

Vậy năm ngoái đơn vị thứ nhất thu hoạch được 350 tấn thóc, đơn vị thứ hai thu hoạch được 330 tấn thóc. □

◆ **Bài 7.** Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 700 sản phẩm. Sang tháng thứ hai tổ I vượt 18%, tổ II vượt 30%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 880 sản phẩm. Tính xem trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm. 🔗 250 và 450

 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm tổ I, tổ II sản xuất trong tháng thứ nhất. (ĐK: $0 < x, y < 700$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 700 \\ 1,18x + 1,3y = 880. \end{cases}$$

Giải HPT ta được
$$\begin{cases} x = 250 \\ y = 450. \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất được 250 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 450 sản phẩm. □

 **Lời giải.**

aaa □

◆ **Bài 8.** Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 60 m. Nếu tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài đi 5 m thì diện tích miếng đất giảm đi 20 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất. 🔗 20 m và 10 m

 **Lời giải.**

Gọi chiều rộng, chiều dài ban đầu của hình chữ nhật lần lượt là x, y (m) ($0 < x < y < 30; y > 5$).

Theo đề bài, ta có HPT
$$\begin{cases} 2x + 2y = 60 \\ (x + 2)(y - 5) = xy - 20. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 10; y = 20$ (TMDK).

Vậy chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất là 20 m và 10 m. □

◆ **Bài 9.** Cho một miếng đất hình chữ nhật. Nếu tăng chiều rộng thêm 1 m và tăng chiều dài thêm 2 m thì diện tích miếng đất tăng lên 37 m^2 . Nếu giảm chiều rộng thêm 1 m và tăng chiều dài thêm 1 m thì diện tích miếng đất giảm đi 6 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất. 🔗 15 m và 10 m

 **Lời giải.**

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật lần lượt là x, y (m) ($1 < y < x$).

Theo đề bài, ta có HPT
$$\begin{cases} (x + 2)(y + 1) = xy + 37 \\ (x + 1)(y - 1) = xy - 6. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 15; y = 10$ (TMDK).

Vậy chiều dài, chiều rộng ban đầu của hình chữ nhật là 15 m và 10 m. □

◆ **Bài 10.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 30 m, chiều dài lớn hơn chiều rộng là 6 m. Tính chiều dài và chiều rộng mảnh vườn đó. 🔗 24 m và 18 m

 **Lời giải.**

Gọi chiều rộng, chiều dài của mảnh vườn lần lượt là x, y (m) ($y > x > 0$).

Theo đề bài, ta có HPT:
$$\begin{cases} y - x = 6 \\ x^2 + y^2 = 900. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 18; y = 24$ (TMDK).

Vậy, chiều dài và chiều rộng mảnh vườn là 24 m và 18 m. □

❖ **Bài 11.** Một đoàn xe vận tải dự định điều một số xe cùng loại đi vận chuyển 60 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao chở thêm 25 tấn nữa, do đó phải điều thêm 1 xe cùng loại và mỗi xe phải chở thêm 2 tấn. Tính số xe phải điều theo dự định. Biết mỗi xe chở số hàng như nhau và số xe nhỏ hơn 10. 🔍 4 xe

🗨️ Lời giải.

Gọi số xe tham gia chở hàng là x (xe, $x \in \mathbb{N}^*$); số hàng mỗi xe cần vận chuyển là y (tấn, $y > 0$); .

Theo đầu bài, ta có HPT:
$$\begin{cases} xy = 60 \\ (x + 1)(y + 2) = 85. \end{cases}$$

Giải HPT được $x = 4; y = 15$ (TMDK).

Vậy, có 4 xe tham gia chở hàng. □

C – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 12.** Hai đội công nhân cùng làm một công việc. Nếu hai đội làm chung thì hoàn thành sau 12 ngày. Nếu mỗi đội làm riêng thì đội I sẽ hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 10 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đó? 🔍 30 ngày và 20 ngày

🗨️ Lời giải.

Gọi số ngày đội I, II làm một mình xong công việc lần lượt là x và y (ngày, $x > y > 12$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ x - y = 10. \end{cases}$$

Giải ra ta được $x = 30$ và $y = 20$ (TMDK).

Vậy nếu làm một mình đội I làm trong 30 ngày, đội II làm trong 20 ngày thì hoàn thành công việc. □

❖ **Bài 13.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ làm chung và dự kiến hoàn thành sau 4 giờ. Trên thực tế sau 3 giờ hai tổ làm chung thì tổ I bị điều đi làm việc khác, tổ II hoàn thành nốt công việc còn lại trong 3 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc? 🔍 6 giờ và 12 giờ

🗨️ Lời giải.

Gọi số giờ đội I, II làm một mình xong công việc lần lượt là x và y (giờ; $x, y > 4$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 1. \end{cases}$$

Giải ra ta được $x = 6$ và $y = 12$ (TMDK).

Vậy nếu làm một mình đội I làm trong 6 giờ, đội II làm trong 12 giờ thì xong việc. □

❖ **Bài 14.** Hai vòi nước cùng chảy vào bể trống trong 12 giờ thì đầy bể. Nếu vòi I chảy trong 3 giờ rồi khóa lại, vòi II chảy tiếp trong 4 giờ thì được $\frac{2}{7}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng trong bao lâu thì đầy bể? 🔍 21 giờ và 28 giờ

🗨️ Lời giải.

Gọi thời gian vòi I, II chảy một mình đầy bể lần lượt là x và y (giờ; $x, y > 12$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{7}. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 21; y = 28$ (TMDK).

Vậy thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là 21 giờ và 28 giờ. \square

❖ Bài 15. Một xưởng may lập kế hoạch may một lô hàng, theo dự định mỗi ngày may xong 60 áo. Nhưng nhờ cải tiến kỹ thuật, xưởng đã may được 120 áo mỗi ngày. Do đó xưởng không những hoàn thành trước thời hạn 8 ngày mà còn may thêm 240 áo. Hỏi theo kế hoạch phân xưởng phải may bao nhiêu áo? 🔗 1200

🗨️ Lời giải.

Gọi x là số áo và y là số ngày phân xưởng cần làm theo kế hoạch. DK: $x > 0, y > 8$.

Từ đề bài, ta có HPT
$$\begin{cases} 60y = x \\ 120(y - 8) = x + 240. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $y = 20; x = 1200$ (TMDK).

Vậy theo kế hoạch phân xưởng phải may 1200 áo. \square

❖ Bài 16. Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 300 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai tổ I sản xuất vượt mức 25%, tổ II vượt mức 20%. Do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 370 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy. 🔗 200 chi tiết máy và 100 chi tiết máy

🗨️ Lời giải.

Gọi số chi tiết máy sản xuất trong tháng đầu của tổ I là x (chi tiết máy), của tổ II là y (chi tiết máy). (DK: $0 < x, y < 300$).

Ta có HPT:
$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 1,25x + 1,2y = 370. \end{cases}$$

Giải HPT ta được
$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 100. \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất được 200 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 100 chi tiết máy. \square

❖ Bài 17. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 160 m. Nếu tăng chiều rộng thêm 10 m và giảm chiều dài đi 10 m thì diện tích miếng đất tăng thêm 100 m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất. 🔗 50 m và 30 m

🗨️ Lời giải.

Gọi chiều rộng, chiều dài ban đầu của hình chữ nhật lần lượt là x, y (m) ($0 < x < y; y > 10$).

Theo đề bài, ta có HPT
$$\begin{cases} 2x + 2y = 160 \\ (x + 10)(y - 10) = xy + 100. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 30; y = 50$ (TMDK).

Vậy chiều dài và chiều rộng ban đầu của mảnh đất là 50 m và 30 m. \square

❖ Bài 18. Một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 10 m, chiều dài lớn hơn chiều rộng là 2 m. Tính chiều dài và chiều rộng mảnh vườn đó. 🔗 8 m và 6 m

🗨️ Lời giải.

Gọi chiều rộng, chiều dài của mảnh vườn lần lượt là x, y (m) ($y > x > 0$).

Theo đề bài, ta có HPT:
$$\begin{cases} y - x = 2 \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$$

Giải HPT ta được $x = 6; y = 8$ (TMDK).

Vậy, chiều dài và chiều rộng mảnh vườn là 8 m và 6 m. \square

❖ **Bài 19.** Người ta cần chở một số lượng hàng. Nếu xếp vào mỗi xe 10 tấn thì còn thừa lại 3 tấn, nếu xếp vào mỗi xe 13 tấn thì còn có thể chở thêm 12 tấn nữa. Hỏi có bao nhiêu xe tham gia chở hàng?

🔍 5 xe

🗨️ **Lời giải.**

Gọi số hàng cần vận chuyển là x (tấn, $x > 3$); Số xe tham gia chở hàng là y (xe, $y \in \mathbb{N}^*$).

Theo đầu bài, ta có HPT:
$$\begin{cases} 10y = x - 3 \\ 13y = x + 12. \end{cases}$$

Giải HPT được $x = 53; y = 5$ (TMĐK).

Vậy, có 5 xe tham gia chở hàng. □

KIỂM TRA CHƯƠNG 3
ĐỀ SỐ 1

Phần I. Trắc nghiệm.

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

❖ **Câu 1.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $2x - y - 1 = 0$.

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

(B) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

(C) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

(D) $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

🗨️ **Lời giải.**

Thay $x = t$ vào phương trình suy ra $y = 2t - 1$. Vậy nghiệm của hệ phương trình luôn có dạng

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **(B)** □

❖ **Câu 2.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) Hệ vô nghiệm.

(B) Hệ có nghiệm duy nhất.

(C) Hệ vô số nghiệm.

(D) Không xác định được.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

Ta thấy $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$ nên hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

❖ **Câu 3.** Tìm giá trị của tham số a để đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$ song song với đường thẳng $d': y = (a^2 - 2)x + a - 1$.

(A) $a = -1$.

(B) $a = 2$.

(C) $a = -2$.

(D) không có a .

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

$$d \text{ và } d' \text{ song song} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - 2) = 2 \\ a - 1 \neq 1 \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \Leftrightarrow a = -2. \\ a \neq 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

❖ **Câu 4.** Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(l; 2)$.

(A) $a = 2, b = 1.$

(B) $a = 1, b = -1.$

(C) $a = 2, b = -1.$

(D) $a = 1, b = 1.$

🗨 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(l; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 = b \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

❖ **Câu 5.** Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng $y = 2x - 1, x + y = 2, (a - 1)x + y = 5$ đồng quy.

(A) $a = 0.$

(B) $a = 4.$

(C) $a = -3.$

(D) $a = 5.$

🗨 **Lời giải.**

Giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x - 1, x + y = 2$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Để ba đường thẳng đã cho đồng quy thì $(a - 1) \cdot 1 + 1 = 5 \Leftrightarrow a = 5.$

Chọn đáp án (D) □

❖ **Câu 6.** Hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ có nghiệm là

(A) $(1; 2).$

(B) $(2; -1).$

(C) $(2; 1).$

(D) $(-1; 2).$

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 7.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$ biết hệ đã cho nhận $(1; -2)$ làm một nghiệm.

(A) $T = 7.$

(B) $T = 25.$

(C) $T = 5.$

(D) $T = \sqrt{7}.$

🗨 **Lời giải.**

Vì hệ đã cho nhận $(1; -2)$ là nghiệm nên ta có $\begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ b + 2a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy $T = a^2 + b^2 = 25.$

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 8.** Tìm giá trị của m để nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ cũng là nghiệm của phương trình $(2m - 1)x + y = 5m + 2.$

(A) $m = -\frac{4}{3}.$

(B) $m = \frac{4}{3}.$

(C) $m = 1.$

(D) $m = -6.$

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$

Vì $(1; -1)$ là nghiệm của phương trình $(2m - 1)x + y = 5m + 2$ nên $2m - 1 - 1 = 5m + 2 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án **A** □

Phần II. Tự luận.

✦ **Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases};$ 🔍 $(x; y) = (1; -1)$

b) $\begin{cases} 2(x - 1) - 4(y + 1) = 3 \\ 3(x - 1) - (y + 1) = 1 \end{cases};$ 🔍 $(x; y) = (\frac{11}{10}; -\frac{17}{10})$

c) $\begin{cases} (x - 1)(y - 1) + 1 = xy \\ (4x + 1)(3y - 6) = (6x - 1)(2y + 3). \end{cases}$ 🔍 $(x; y) = (\frac{7}{47}; \frac{87}{47})$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 3x + 6y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = -10 \\ x = -2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2(x - 1) - 4(y + 1) = 3 \\ 3(x - 1) - (y + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 9 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - 4y = 9 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4(3x - 5) = 9 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{11}{10} \\ y = -\frac{17}{10}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\frac{11}{10}; -\frac{17}{10})$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x - 1)(y - 1) + 1 = xy \\ (4x + 1)(3y - 6) = (6x - 1)(2y + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - x - y + 2 = xy \\ 12xy - 24x + 3y - 6 = 12yx + 18x - 2y - 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = 2 \\ 42x + 3 = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{47} \\ y = \frac{87}{47}. \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (\frac{7}{47}; \frac{87}{47})$.

□

✧ **Bài 2.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ đầy bể. Người ta mở cả hai vòi trong 4 giờ rồi khóa vòi II và để vòi I chảy tiếp 14 giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì bao lâu mới đầy bể?

🔍 21 giờ và 28 giờ

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y ($x, y > 12$) lần lượt là thời gian vòi I, vòi II chảy một mình đầy bể.

Trong một giờ, vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Theo bài ra ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 14 \cdot \frac{1}{x} = 1. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 21, y = 28$ (TM).

Vậy vòi I chảy một mình trong 21 giờ thì đầy bể, vòi II chảy một mình trong 28 giờ thì đầy bể. \square

✧ **Bài 3.** Cho phương trình $mx + y = m - 2$ với m là tham số.

a) Với $m = 1$, tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình trên hệ trục tọa độ.

🔍 $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x - 1 \end{cases}$

b) Tìm m để phương trình đã cho cùng phương trình $x + y = m + 1$ có một nghiệm chung duy nhất. Tìm nghiệm đó.

🔍 $m \neq 1; (x; y) = \left(\frac{3}{1-m}; \frac{m^2+2}{m-1}\right)$

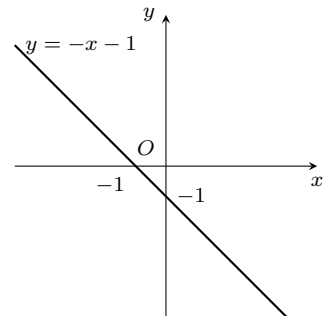
🗨 **Lời giải.**

a)

Với $m = 1$ suy ra phương trình $x + y = -1 \Leftrightarrow y = -x - 1$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x - 1. \end{cases}$

Biểu diễn tập nghiệm của phương trình trên hệ trục tọa độ là đường thẳng $y = -x - 1$ như hình bên.



b) Ta có hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m - 2 \\ x + y = m + 1. \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m \neq 1$.

Nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\frac{3}{1-m}; \frac{m^2+2}{m-1}\right)$.

\square

ĐỀ SỐ 2

Phần I. Trắc nghiệm

Khoanh vào chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

❖ **Câu 1.** Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn?

A $x + y - 1 = 0$.

B $x(y - 1) + y = 0$.

C $x^2 - 2 = 0$.

D $2x(x - 1) - 3y = 1$.

🗨️ **Lời giải.**

Phương trình $x + y - 1 = 0$ có dạng $ax + by + c = 0$, trong đó a và b không đồng thời bằng 0 nên là phương trình bậc nhất hai ẩn.

Chọn đáp án A □

❖ **Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình $4x - 3y = -1$ được biểu diễn bởi đường thẳng

A $y = 4x - 1$.

B $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

C $y = 4x + 1$.

D $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $4x - 3y = -1 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $4x - 3y = -1$ được biểu diễn bởi đường thẳng $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

❖ **Câu 3.** Tìm m sao cho điểm $M(2; 1)$ thuộc đồ thị hàm số $mx - 3y - 5 = 0$.

A $m = -3$.

B $m = -4$.

C $m = 4$.

D $m = 3$.

🗨️ **Lời giải.**

$M(2; 1)$ thuộc đồ thị hàm số $mx - 3y - 5 = 0$ khi $2m - 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn đáp án C □

❖ **Câu 4.** Cho ba đường thẳng $d_1 : 3x + y = 0$, $d_2 : x - y = -4$, $d_3 : 0,5x + y = 5,5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $(-1; 3)$.

B d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $(1; -2)$.

C d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $(3; -\frac{1}{2})$.

D d_1 và d_2 không cắt nhau.

🗨️ **Lời giải.**

Xét hệ gồm hai phương trình của d_1 và d_2 ta có $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

Như vậy d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $(-1; 3)$.

Chọn đáp án A □

❖ **Câu 5.** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(1; 3)$ là

A $y = 1 - 2x$.

B $x + y - 2 = 0$.

C $y = 2x + 1$.

D $y = 2x - 1$.

🗨️ **Lời giải.**

Đường thẳng $y = 2x + 1$ đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(1; 3)$.

Chọn đáp án C □

❖ **Câu 6.** Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ và $y = 4x - 3$

A $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

B $(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$.

C $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

D $(-1; 2)$.

🗨️ **Lời giải.**

Tạo độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y = 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

❖ **Câu 7.** Tìm giá trị của tham số a để hệ phương trình $\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ vô nghiệm.

(A) $a = 0$.

(B) $a = -2$.

(C) $a = 1$.

(D) $a = -1$.

🗨️ **Lời giải.**

Nếu một trong hai phương trình của hệ vô nghiệm thì hệ vô nghiệm nên ta thấy hệ vô nghiệm khi $a = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

❖ **Câu 8.** Tìm giá trị của tham số a để hai hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} ax - 3y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ tương đương.

(A) $a = 1$.

(B) $a = 2$.

(C) $a = -2$.

(D) $a = 4$.

🗨️ **Lời giải.**

hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ có nghiệm là $(x; y) = (1; 2)$.

Để hai hệ đã cho tương đương thì $(x; y) = (1; 2)$ cũng là nghiệm của hệ $\begin{cases} ax - 3y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Phần II. Tự luận.

❖ **Bài 1.** Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases};$ $\color{red}{\text{Q}} (x; y) = (1; 1)$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 1 \end{cases};$ $\color{red}{\text{Q}} (x; y) = \left(\frac{5}{7}; \frac{5}{4}\right)$

c) $\begin{cases} \frac{x+1}{y-1} = \frac{x-4}{y+3} \\ 2(x-1) + (y+1) = 7 \end{cases}$ $\color{red}{\text{Q}} (x; y) = \left(\frac{13}{2}; -5\right)$

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

b) Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u + 2v = 3 \\ 3u - 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{7}{5} \\ v = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{5}{7}; \frac{4}{5}\right)$.

c) Điều kiện: $y \neq -3, y \neq 1$.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y-1} = \frac{x-4}{y+3} \\ 2(x-1) + (y+1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ y = -5 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{13}{2}; -5\right)$.

□

❖ **Bài 2.** Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe. 🔗 50, 40

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc ô tô là x km/h ($x > 10$), vận tốc xe máy là y km/h ($y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 50, y = 40$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của ô tô là 50 km/h, vận tốc của xe máy là 40 km/h. □

❖ **Bài 3.** Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases}$$
 với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình đã cho với $m = 1$. 🔗 $(x; y) = (2; 1)$

b) Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của m . Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ. Chứng minh rằng $x_0^2 + y_0^2 - x_0 - 3y_0 = 0$.

🗨️ Lời giải.

a) Với $m = 1$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$.

b) Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $y = 3 - mx$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta thu được phương trình $(m^2 + 1)x = 1 + 3m \Leftrightarrow x = \frac{1 + 3m}{m^2 + 1}$.
Thay vào một trong hai phương trình tìm được $y = \frac{3 - m}{m^2 + 1}$.

Vì $m^2 + 1 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3m + 1}{m^2 + 1}; \frac{3 - m}{m^2 + 1}\right)$.

Cặp nghiệm $(x_0; y_0)$ tương ứng với một giá trị m_0 nào đó.

$$x_0^2 + y_0^2 - x_0 - 3y_0 = \left(\frac{3m_0 + 1}{m_0^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{3 - m_0}{m_0^2 + 1}\right)^2 - \frac{3m_0 + 1}{m_0^2 + 1} - 3 \cdot \frac{3 - m_0}{m_0^2 + 1} = \frac{10}{m_0^2 + 1} - \frac{10}{m_0^2 + 1} = 0.$$

□

BÀI 7. ÔN TẬP CHƯƠNG 3

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 6.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

◀▶ **Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad \text{☞ (1; 2)} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{6}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 1 \\ \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 3. \end{cases} \quad \text{☞ (2; 1)}$$

☞ **Lời giải.**

a) Sử dụng phương pháp cộng đại số, ta có

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

b) Điều kiện: $x \neq \pm y$.

Đặt $u = \frac{1}{x+y}$; $v = \frac{1}{x-y}$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 6u - v = 1 \\ 3u + 2v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12u - 2v = 2 \\ 3u + 2v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15u = 5 \\ v = 6u - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = 1. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$. □

◀▶ **Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}; \quad \text{☞ (1; 1)} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{6}{y} = 9 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 7 \end{cases}. \quad \text{☞ (1; 1)}$$

☞ **Lời giải.**

a) Sử dụng phương pháp cộng đại số, ta có

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

b) Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

Đặt $u = \frac{3}{x}; v = \frac{2}{y}$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 5u - 3v = 9 \\ u + 2v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u - 3v = 9 \\ 5u + 10v = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v = 7 \\ 13v = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x = \frac{3}{u} = 1 \\ y = \frac{2}{v} = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

□

◇◇ **Bài 3.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ mx - y = m. \end{cases}$

a) Tìm m để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó.

🔍 $m \neq -\frac{1}{2}$

b) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

🔍 $m = -\frac{1}{2}$

c) Tìm m để hệ phương trình vô số nghiệm.

🔍 không tồn tại

💬 **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ mx - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2mx - 2y = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ (2m + 1)x = 2 + 2m. & (2) \end{cases}$

Số nghiệm của hệ phương trình đã cho phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình (1) và (2).

a) Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$. Khi đó,

nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = \frac{2m + 2}{2m + 1} \\ y = \frac{m}{2m + 1}. \end{cases}$

b) Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

c) Hệ phương trình vô số nghiệm $\frac{1}{m} = \frac{2}{-1} = \frac{2}{m}$, điều này không xảy ra. Vậy không có giá trị nào của m để hệ phương trình vô số nghiệm.

□

◇◇ **Bài 4.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + my = 3. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m = 1$.

🔍 $(x; y) = (2; 1)$

b) Tìm m để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó.

🔍 $m \neq -1$

c) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

🔍 $m = -1$

💬 **Lời giải.**

a) Khi $m = 1$ thì hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$.

b) Ta có
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + my = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 & (1) \\ (m + 1)y = 2. & (2) \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ phương trình đã cho phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình (1) và (2).
Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Khi đó, nghiệm duy nhất của hệ là $(x; y) = \left(\frac{m+3}{m+1}; \frac{2}{m+1}\right)$.

c) Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

□

❖ **Bài 5.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m, chiều rộng thêm 5 m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195 m^2 . Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh đất.

📏 30 m và 10 m

🗨️ Lời giải.

Gọi chiều dài, chiều rộng mảnh đất lần lượt là x, y (m).

Điều kiện: $0 < y < x < 40$.

Chu vi và diện tích của mảnh đất ban đầu là $2(x + y)$ và xy .

Khi tăng chiều dài lên 3 m, chiều rộng lên 5 m thì diện tích mảnh đất là $(x + 3)(y + 5)$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80 \\ (x + 3)(y + 5) = xy + 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 3y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy chiều dài, chiều rộng mảnh đất đã cho lần lượt là 30 m và 10 m.

□

❖ **Bài 6.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

📏 135 m^2

🗨️ Lời giải.

Gọi chiều dài, chiều rộng mảnh đất lần lượt là x, y (m).

Điều kiện: $0 < y < x < 48$.

Chu vi của mảnh vườn ban đầu là $2(x + y)$.

Khi tăng chiều dài lên ba lần, chiều rộng lên bốn lần thì chu vi khu vườn là $2(3x + 4y)$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ 2(3x + 4y) = 162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ 3x + 4y = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy chiều dài, chiều rộng mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là 15 m và 9 m. Do đó diện tích khu vườn là $S = 9 \cdot 15 = 135 \text{ m}^2$.

□

❖ **Bài 7.** Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Thực tế, xí nghiệp I vượt mức kế hoạch 10%, xí nghiệp II vượt mức kế hoạch 15%, do đó cả hai xí nghiệp đã làm được 404 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

📏 xí nghiệp I: 200; xí nghiệp II: 160

🗨️ Lời giải.

Gọi số dụng cụ mà xí nghiệp I và xí nghiệp II phải làm theo kế hoạch lần lượt là x, y (dụng cụ).

Điều kiện: $0 < x, y < 360$.

Theo bài ra ta có phương trình: $x + y = 360$. (1)

Do xí nghiệp I vượt mức kế hoạch 10%, xí nghiệp II vượt mức kế hoạch 15% nên số dụng cụ thực tế hai xí nghiệp làm được lần lượt là $1,1x$ và $1,15y$. Theo bài ra ta có phương trình: $1,1x + 1,15y = 404$. (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 1,1x + 1,15y = 404 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 160 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy số dụng cụ mà xí nghiệp I và xí nghiệp II phải làm theo kế hoạch lần lượt là 200 và 160 dụng cụ. \square

✦ Bài 8. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

 200, 400

Lời giải.

Gọi số sản phẩm tổ I và tổ II sản xuất theo kế hoạch là x và y .

Điều kiện: $0 < x, y < 600$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ 1,18x + 1,21y = 600 + 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 400 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Số sản phẩm mà tổ I và tổ II được giao theo kế hoạch lần lượt là 200 và 400 sản phẩm. \square

✦ Bài 9. Để hoàn thành một công việc hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai bị điều chuyển đi làm việc khác, tổ một hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

 15 giờ và 10 giờ

Lời giải.

Gọi thời gian cần thiết để tổ 1 và tổ 2 hoàn thành công việc một mình là x, y (giờ).

Điều kiện: $x, y > 6$.

Mỗi giờ tổ một và tổ hai làm được lần lượt $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$; cả hai tổ làm được $\frac{1}{6}$ công việc nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$. (1)

Sau 2 giờ thì cả hai tổ làm được $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ công việc, tổ một hoàn thành trong 10 giờ được $\frac{10}{x}$ công việc nên ta có phương trình $\frac{1}{3} + \frac{10}{x} = 1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} + \frac{10}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy thời gian tổ 1 và tổ 2 hoàn thành công việc một mình lần lượt là 15 giờ và 10 giờ. \square

✦ Bài 10. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong công việc. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó thì mấy giờ xong?

 12 giờ, 18 giờ

 **Lời giải.**

Đổi đơn vị : 7 giờ 12 phút = $7\frac{1}{5} = \frac{36}{5}$ giờ.

Gọi thời gian để người thứ nhất và thứ hai làm một mình xong công việc là x giờ và y giờ ($x, y > 0$).

Mỗi giờ người thứ nhất và người thứ hai làm được lần lượt $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ công việc, cả hai người làm được

$\frac{5}{36}$ công việc nên ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36}$. (1)

Người thứ nhất làm trong 5 giờ được $\frac{5}{x}$ công việc, người thứ hai làm trong 6 giờ được $\frac{6}{y}$ công việc.

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18. \end{cases}$$

Vậy để làm một mình xong công việc thì người thứ nhất phải làm trong 12 giờ, người thứ hai làm trong 18 giờ. □

◆ Bài 11. Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B . Khi đến B , người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B . 🔗 27 km/h và 21 km/h

 **Lời giải.**

Gọi vận tốc lúc đi và về của xe máy lần lượt là x, y (km/h).

Điều kiện: $0 < x < y; y > 9$. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x = 9 \\ \frac{90}{x} + \frac{90}{y} + \frac{1}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 45 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô lần lượt là 27 km/h và 21 km/h. □

◆ Bài 12. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B dài 120 km với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường. Do vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 24 phút. Tính vận tốc mỗi xe. 🔗 60 km/h và 50 km/h

 **Lời giải.**

Gọi vận tốc của ô tô và xe máy lần lượt là x và y km/h.

Điều kiện: $0 < y < x; x \geq 10$.

Theo bài ra ta có phương trình $x - y = 10$. (1)

Thời gian ô tô và xe máy chạy trên cùng quãng đường đó lần lượt là $\frac{120}{x}$ và $\frac{120}{y}$. Theo bài ra ta có

phương trình $\frac{120}{y} - \frac{120}{x} = \frac{24}{60}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \frac{120}{y} - \frac{120}{x} = \frac{24}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 50 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc của ô tô là 60 km/h, của xe máy là 50 km/h. □

❖ **Bài 13.** Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 105 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó ca nô chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km. Tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết rằng vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô là không đổi.

📍 27 km/h và 21 km/h

🗨 **Lời giải.**

Gọi vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô lần lượt là x, y (km/h), $0 < y < x$. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{81}{x} + \frac{105}{y} = 8 \\ \frac{54}{x} + \frac{42}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ y = 21 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô lần lượt là 27 km/h và 21 km/h. □

❖ **Bài 14.** Một ca nô đi xuôi dòng 48 km rồi đi ngược dòng 22 km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lớn hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 5 km/h. Tính vận tốc ca nô lúc đi ngược dòng.

📍 11 km/h hoặc 10 km/h

🗨 **Lời giải.**

Gọi vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô lần lượt là x, y (km/h), $0 < y < x, x > 5$. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{48}{x} - \frac{22}{y} = 1 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 11 \\ x = 15 \\ y = 10. \end{cases}$$

Vậy vận tốc ngược dòng của ca nô là 11 km/h (hoặc 10 km/h). □

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 15.** Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ 📍 $(x; y) = (1; 2)$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1. \end{cases}$ 📍 $(x; y) = \left(\frac{19}{7}; \frac{8}{3}\right)$

🗨 **Lời giải.**

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) Điều kiện: $x \neq 2, y \neq 1$.
Đặt $u = \frac{1}{x-2}, v = \frac{1}{y-1}$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ 2u - 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 2v = 4 \\ 2u - 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{7}{5} \\ v = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = \frac{7}{5} \\ \frac{1}{y-1} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{7} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{19}{7}; \frac{8}{3}\right)$.



✧ **Bài 16.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình với $m = 1$.

$$\text{☞ } (x; y) = \left(\frac{36}{5}; \frac{14}{5}\right)$$

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó. ☞ $m \neq -\frac{2}{3}$; $(x; y) = \left(\frac{36}{3m+2}; \frac{28+6m}{3m+2}\right)$

c) Tìm m để hệ phương trình vô nghiệm.

$$\text{☞ } m = -\frac{2}{3}$$

🗨️ Lời giải.

a) Khi $m = 1$ thì hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 14 \\ x = 10 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{36}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3mx + 3y = 30 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+2)x = 36 & (1) \\ y = \frac{2}{3}x - 2 & (2) \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ phương trình đã cho phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình (1) và (2).

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 3m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{2}{3}$.

Khi đó, nghiệm duy nhất của hệ là $(x; y) = \left(\frac{36}{3m+2}; \frac{20-6m}{3m+2}\right)$.

c) Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 3m+2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$.



✧ **Bài 17.** Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13 cm^2 . Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho. ☞ 7 cm và 5 cm

🗨️ Lời giải.

Gọi chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật là x, y (cm).

Điều kiện: $0 < y < x, x > 2, y > 1$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = xy + 13 \\ (x-2)(y-1) = xy - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ x + 2y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là 7 cm và 5 cm. □

✧ **Bài 18.** Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ hai tổ một sản xuất vượt mức 25%, tổ hai giảm mức 8% nên trong tuần này cả hai tổ sản xuất được 1677 bộ quần áo. Hỏi tuần đầu, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu bộ? ☞ 900 và 600

🗨️ Lời giải.

Gọi số bộ quần áo tổ một và tổ hai sản xuất được trong tuần đầu lần lượt là x, y (bộ).

Điều kiện: $0 < x, y < 1500$

Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 1500 \\ 1,25x + 0,92y = 1677 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tuần đầu tổ một sản xuất được 900 bộ và tổ hai sản xuất được 600 bộ. □

❖ **Bài 19.** Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau 4 giờ 48 phút đầy bể. Nếu vòi một chảy trong 4 giờ, vòi hai chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy đầy bể.

🔗 8 giờ và 12 giờ

🗨️ Lời giải.

Đổi đơn vị : 4 giờ 48 phút = $4\frac{48}{60} = \frac{24}{5}$ giờ.

Gọi thời gian để vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy đầy bể lần lượt là x giờ và y giờ ($x, y > 0$).

Mỗi giờ vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy được lần lượt là $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ bể, cả hai vòi chảy được $\frac{5}{24}$ bể, do

đó ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$.

Vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ được $\frac{4}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy trong 3 giờ được $\frac{3}{y}$ bể nên ta có phương

trình $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{4}$.

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vòi thứ nhất chảy đầy bể trong 8 giờ, vòi thứ hai chảy đầy bể trong 12 giờ. □

❖ **Bài 20.** Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A để đi đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc xe khách là 20 km/h. Do đó xe du lịch đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100 km.

🔗 60 km/h và 40 km/h

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc của xe du lịch và xe khách lần lượt là x và y km/h.

Điều kiện: $0 < y < x; x > 20$.

Theo bài ra ta có $x - y = 20$. (1)

Thời gian xe du lịch và xe khách chạy trên cùng quãng đường đó lần lượt là $\frac{100}{x}$ và $\frac{100}{y}$. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ \frac{100}{y} - \frac{100}{x} = \frac{50}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc của xe du lịch là 60 km/h, của xe khách là 40 km/h. □

❖ **Bài 21.** Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn ngược dòng 1 giờ.

🔗 22 km/h

 **Lời giải.**

Gọi vận tốc của tàu khi nước yên lặng là x (km/h) ($x > 2$).

Vận tốc của tàu khi đi xuôi dòng là $x + 2$ km/h.

Vận tốc của tàu khi đi ngược dòng là $x - 2$ km/h.

Thời gian đi xuôi dòng 48 km là $\frac{48}{x+2}$ giờ.

Thời gian đi ngược dòng 60 km là $\frac{60}{x-2}$ giờ.

Vì thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian đi ngược dòng 1 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x-2} - 1 = \frac{48}{x+2} \Leftrightarrow \frac{(x-22)(x+10)}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 (\text{loại}) \\ x = 22 (\text{nhận}). \end{cases}$$

Vận tốc của tàu khi nước yên lặng là 22 km/h. □

BÀI 8. HÀM SỐ $Y = AX^2$ ($A \neq 0$)

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ☑ Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.
- ☑ Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm cho trước

Giá trị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) tại điểm $x = x_0$ là $y_0 = ax_0^2$.

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = f(x) = 5x^2$.

a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là 1; 0; -2 và $4 - \sqrt{12}$.

$$\color{red}{\text{☞}} f(1) = 5; f(0) = 0; f(-2) = 20; f(4 - \sqrt{12}) = 140 - 80\sqrt{3}$$

b) Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = 15 - 10\sqrt{2}$.

$$\color{red}{\text{☞}} a = \pm(\sqrt{2} - 1)$$

c) Tìm điều kiện của b , biết rằng $f(b) \geq 8b - 3$.

$$\color{red}{\text{☞}} b \geq 1 \text{ hoặc } b \leq \frac{3}{5}$$

 **Lời giải.**

a) $f(1) = 5; f(0) = 0; f(-2) = 20; f(4 - \sqrt{12}) = 140 - 80\sqrt{3}$.

b) $f(a) = 15 - 10\sqrt{2} = 5(3 - 2\sqrt{2}) = 5(\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow a = \pm(\sqrt{2} - 1)$.

c) $f(b) \geq 8b - 3 \Rightarrow 5b^2 \geq 8b - 3 \Leftrightarrow 5b^2 - 8b + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 1 \\ b \leq \frac{3}{5} \end{cases}$.

□

 **Ví dụ 2.** Viết công thức tính diện tích hình vuông cạnh a rồi thực hiện các yêu cầu sau:

a) Tính diện tích hình vuông khi a nhận các giá trị lần lượt là 2; 5; 7 và $3 + 2\sqrt{3}$. $\color{red}{\text{☞}} 4; 25; 49; 21 + 12\sqrt{3}$

- b) Nếu độ dài a tăng bốn lần thì diện tích sẽ tăng lên bao nhiêu lần? 🔍 16
- c) Tìm a , biết rằng $S = 152,4 \text{ cm}^2$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba). 🔍 12,345

🗨️ Lời giải.

a)

| | | | | |
|-----------|---|----|----|-------------------|
| a | 2 | 5 | 7 | $3 + 2\sqrt{3}$ |
| $S = a^2$ | 4 | 25 | 49 | $21 + 12\sqrt{3}$ |

b) $S_1 = (4a)^2 \Leftrightarrow 16a^2 = 16S$. Vậy S tăng 16 lần.

c) $S = 152,4 \Leftrightarrow a^2 = 152,4 \Leftrightarrow a = 12,345 \text{ cm}$.

□

🔗 **Ví dụ 3.** Quãng đường chuyển động S (đơn vị tính bằng mét) của một vật rơi từ độ cao 200 m phụ thuộc vào thời gian t (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức $S = 2t^2$.

- a) Hỏi sau các khoảng thời gian lần lượt là 2 giây và 4 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? 🔍 192; 168
- b) Sau thời gian bao nhiêu lâu thì vật tiếp đất? 🔍 10

🗨️ Lời giải.

a) $t = 2$; $S = 2 \cdot 2^2 = 8 \text{ m}$, vật này cách mặt đất 192 mét. $t = 4$; $S = 2 \cdot 4^2 = 32 \text{ m}$, vật này cách mặt đất 168 mét.

b) $S = 2t^2 \Leftrightarrow 200 = 2t^2 \Leftrightarrow t = 10 \text{ giây}$.

□

📁 Dạng 2. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số

Xét hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Ta có

- 🔍 Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.
- 🔍 Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

🔗 **Ví dụ 4.** Cho hàm số $y = (2m - 1)x^2$ với $m \neq \frac{1}{2}$. Tìm m để hàm số:

- a) Đồng biến với $x < 0$. 🔍 $m < \frac{1}{2}$ b) Nghịch biến với $x < 0$. 🔍 $m > \frac{1}{2}$
- c) Có giá trị $y = 4$ khi $x = -1$. 🔍 $m = \frac{5}{2}$ d) Có giá trị lớn nhất là 0. 🔍 $m < \frac{1}{2}$
- e) Có giá trị nhỏ nhất là 0. 🔍 $m > \frac{1}{2}$

🗨️ Lời giải.

a) Hàm số đồng biến khi $x < 0$ suy ra $y < 0 \Rightarrow 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

- b) Hàm số nghịch biến khi $x < 0$ suy ra $y > 0 \Rightarrow 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.
- c) $y = 4, x = -1 \Rightarrow 4 = 2m - 1 \cdot (-1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.
- d) Hàm số có giá trị lớn nhất là 0 $\Leftrightarrow (2m - 1) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.
- e) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 $\Leftrightarrow (2m - 1) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

□

❖ **Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = (-m^2 + 6m - 12)x^2$.

- a) Chứng minh với mọi tham số m hàm số luôn nghịch biến với mọi $x > 0$ và đồng biến với mọi $x < 0$.
- b) Tìm các giá trị của tham số m để khi $x = \frac{1}{2}$ thì $y = -\frac{5}{4}$.

$$\begin{cases} m = 3 + \sqrt{2} \\ m = 3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có

$$y = (-m^2 + 6m - 12)x^2 = -(m^2 - 6m + 12)x^2 = -(m^2 - 6m + 9 + 3)x^2 = -[(m - 3)^2 + 3]x^2.$$

$-[(m - 3)^2 + 3] < 0$ với mọi m nên hàm số luôn nghịch biến với mọi $x > 0$ và đồng biến với mọi $x < 0$.

b)

$$x = \frac{1}{2}, y = -\frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} = (-m^2 + 6m - 12) \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{4} = (-m^2 + 6m - 12) \frac{1}{4} \Leftrightarrow -5 = -m^2 + 6m - 12 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 + \sqrt{2} \\ m = 3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

□

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

- a) Tìm các giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là 2; 0; -1 và $6 - 2\sqrt{5}$.
 $\text{☞ } f(2) = 1; f(0) = 0; f(-1) = \frac{1}{4}; f(6 - 2\sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5}$
- b) Tìm các giá trị của a , biết rằng $f(a) = \frac{9}{4} + \sqrt{5}$.
 $\text{☞ } \pm(\sqrt{5} - 2)$
- c) Tìm điều kiện của b , biết rằng $f(b) \geq b - 1$.
 $\text{☞ } b \neq 2$

🗨️ **Lời giải.**

a) $f(2) = 1; f(0) = 0; f(-1) = \frac{1}{4}; f(6 - 2\sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5}$.

$$b) f(a) = \frac{9}{4} + \sqrt{5} = \frac{1}{4}(9 + 4\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 2)^2 \Rightarrow a = \pm(\sqrt{5} - 2).$$

$$c) f(b) \geq b - 1 \Rightarrow \frac{1}{4}b^2 \geq b - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}b^2 - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 \geq 0 \Leftrightarrow b \neq 2.$$

□

❖ **Bài 2.** Biết rằng thể tích của một khối trụ có chiều cao h đơn vị mét, và bán kính đáy bằng r (đơn vị mét) được cho bởi công thức $V = h\pi r^2$.

a) Tính thể tích khối trụ khi r nhận các giá trị lần lượt là 3; 7; 9 và $2 + \sqrt{3}$, biết rằng $h = 2,5$ m (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, lấy $\pi = 3,14$). 🔗 70,65; 384,65; 635,85; 109,34

b) Nếu bán kính r tăng hai lần thì thể tích sẽ tăng lên bao nhiêu lần? 🔗 4

c) Tìm r , biết rằng $V = 70,66$ m³, $h = 2,5$ m (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). 🔗 2,00

🗨️ Lời giải.

| | | | | | |
|----|----------------|-------|--------|--------|----------------|
| a) | r | 3 | 7 | 9 | $2 + \sqrt{3}$ |
| | $V = h\pi r^2$ | 70,65 | 384,65 | 635,85 | 109,34 |

b) Ta có $V_1 = h\pi(2r)^2 = 4h\pi r^2 = 4V$. Vậy V tăng 4 lần.

c) $V = 70,66 \Leftrightarrow h\pi r^2 = 11,63 \Leftrightarrow 2,5\pi r^2 = 70,66 \Leftrightarrow r = 2,00$ m.

□

❖ **Bài 3.** Một bạn học sinh buộc một quả nặng vào một sợi dây không giãn và quay nó quanh một điểm cố định với vận tốc v (m/s). Khi đó lực để duy trì chuyển động tròn của vật được cho bởi công thức $F = \frac{mv^2}{r}$. Trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị kg), r là bán kính quỹ đạo tròn (khoảng cách giữa quả nặng và điểm cố định, đơn vị mét). Biết sợi dây dài 1 m.

a) Tính khối lượng của vật, biết khi vật chuyển động với vận tốc 8 m/s thì $F = 320$ N. 🔗 40

b) Biết sợi dây chỉ chịu được lực tối đa là 1000 N, hỏi sợi dây có bị đứt khi vận tốc quay bằng 15 m/s không? 🔗 Không bị đứt

🗨️ Lời giải.

a) $v = 8$ m/s và $F = 320$ N; $F = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow 320 = \frac{m \cdot 8}{1} \Leftrightarrow m = 40$ kg.

b) $F = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow F = \frac{40 \cdot 15}{1} = 600$ N < 1000 N nên sợi dây không bị đứt.

□

❖ **Bài 4.** Cho hàm số $y = (3m + 2)x^2$ với $m \neq \frac{-2}{3}$. Tìm m để hàm số:

a) Đồng biến với $x < 0$. 🔗 $m < -\frac{2}{3}$ b) Nghịch biến với $x < 0$. 🔗 $m > -\frac{2}{3}$

c) Có giá trị $y = -4$ khi $x = 1$. 🔗 $m = -2$ d) Có giá trị lớn nhất là 0. 🔗 $m < -\frac{2}{3}$

e) Có giá trị nhỏ nhất là 0. 🔗 $m > -\frac{2}{3}$

 **Lời giải.**

a) Hàm số đồng biến khi $x < 0$ suy ra $y < 0 \Rightarrow 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$.

b) Hàm số nghịch biến khi $x < 0$ suy ra $y > 0 \Rightarrow 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$.

c) $y = -4, x = 1 \Rightarrow -4 = (3m + 2) \cdot 1^2 \Leftrightarrow m = -2$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất là 0 $\Leftrightarrow 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$.


e) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 $\Leftrightarrow 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$.

□

◇ **Bài 5.** Cho hàm số $y = (m^2 - 4m + 7)x^2$.

a) Chứng minh với mọi tham số m hàm số luôn nghịch biến với mọi $x < 0$ và đồng biến với mọi $x > 0$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để khi $x = -\frac{1}{2}$ thì $y = 3$.

 $\begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases}$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$y = (m^2 - 4m + 7)x^2 = (m^2 - 4m + 4 + 3)x^2 = [(m - 2)^2 + 3]x^2.$$

$[(m - 2)^2 + 3] > 0$ với mọi m nên hàm số luôn nghịch biến với mọi $x < 0$ và đồng biến với mọi $x > 0$.

b)

$$x = -\frac{1}{2}, y = 3 \Rightarrow 3 = (m^2 - 4m + 7) \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$


$$\Leftrightarrow 3 = (m^2 - 4m + 7) \frac{1}{4} \Leftrightarrow 12 = m^2 - 4m + 7 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases}.$$

□


D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◇ **Bài 6.** Cho hàm số $y = f(x) = -x^2$.

a) Tìm giá trị của hàm số khi x nhận các giá trị lần lượt là 2; 0; -3 và $6 + 2\sqrt{5}$.

 $f(2) = -4; f(0) = 0; f(-3) = -9; f(6 + 2\sqrt{5}) = -56 - 24\sqrt{5}$

b) Tìm các giá trị của a biết rằng $f(a) = -11 + 6\sqrt{2}$.

 $a = \pm(3 - \sqrt{2})$

c) Tìm điều kiện của b , biết rằng $f(b) \leq 2b - 3$.

 $b \geq 1$ hoặc $b \leq -3$

 **Lời giải.**

- a) $f(2) = -4; f(0) = 0; f(-3) = -9; f(6 + 2\sqrt{5}) = -56 - 24\sqrt{5}$.
- b) $f(a) = -11 + 6\sqrt{2} = -(11 - 6\sqrt{2}) = -(9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2) = -(3 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow a = \pm(3 - \sqrt{2})$.
- c) $f(b) \leq 2b - 3 \Rightarrow -b^2 \leq 2b - 3 \Leftrightarrow b^2 + 2b - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 1 \\ b \leq -3 \end{cases}$.

□

✦ **Bài 7.** Biết rằng diện tích một tam giác đều cạnh a được cho bởi công thức $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

- a) Tính diện tích tam giác đều khi a nhận các giá trị lần lượt là 1; 4; 8 và $13 - 4\sqrt{3}$.
 ⚡ $\frac{\sqrt{3}}{4}; 4\sqrt{3}; 16\sqrt{3}; \frac{217\sqrt{3} - 312}{4}$
- b) Nếu chiều dài a tăng ba lần thì diện tích sẽ tăng bao nhiêu lần? ⚡ 9
- c) Tìm a , biết rằng $S = 11,63 \text{ cm}^2$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). ⚡ 5,18

🗨️ Lời giải.

| | | | | | |
|----|-----------------------------|----------------------|-------------|--------------|-------------------------------|
| a) | a | 1 | 4 | 8 | $13 - 4\sqrt{3}$ |
| | $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $4\sqrt{3}$ | $16\sqrt{3}$ | $\frac{217\sqrt{3} - 312}{4}$ |

b) Ta có $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2 = 9\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9S$. Vậy S tăng 9 lần.

c) $S = 11,63 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 11,63 \Leftrightarrow a = 5,18 \text{ cm}$.

□

✦ **Bài 8.** Một khách du lịch chơi trò Bungee từ một cây cầu cách mặt đất 120 m. Quãng đường chuyển động S (tính bằng mét) của người rơi phụ thuộc vào thời gian t (tính bằng giây) được cho bởi công thức $S = 4t^2$.

- a) Hỏi sau khoảng thời gian 3 giây du khách cách mặt đất bao nhiêu mét? ⚡ 84
- b) Sau khoảng thời gian bao lâu thì du khách cách mặt đất 56 mét? ⚡ 4

🗨️ Lời giải.

a) $t = 3; S = 4 \cdot 3^2 = 36 \text{ m}$, du khách cách mặt đất 84 mét.

b) Quãng đường du khách đi được 64 m. Suy ra $4t^2 = 64 \Leftrightarrow t = 4$ giây.

□

✦ **Bài 9.** Cho hàm số $y = (3m + 4)x^2$ với $m \neq -\frac{4}{3}$. Tìm m để hàm số:

- a) Đồng biến với $x < 0$. ⚡ $m < -\frac{4}{3}$
- b) Nghịch biến với $x < 0$. ⚡ $m > -\frac{4}{3}$
- c) Có giá trị $y = -3$ khi $x = 1$. ⚡ $m = -\frac{7}{3}$
- d) Có giá trị lớn nhất là 0. ⚡ $m < -\frac{4}{3}$
- e) Có giá trị nhỏ nhất là 0. ⚡ $m > -\frac{4}{3}$

 **Lời giải.**

a) Hàm số đồng biến khi $x < 0$ suy ra $y < 0 \Rightarrow 3m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}$.

b) Hàm số nghịch biến khi $x < 0$ suy ra $y > 0 \Rightarrow 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{3}$.

c) $y = -3, x = 1 \Rightarrow -3 = (3m + 4) \cdot 1^2 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{3}$.

d) Hàm số có giá trị lớn nhất là 0 $\Leftrightarrow 3m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}$.


e) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 $\Leftrightarrow 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{3}$.

□

◆ **Bài 10.** Cho hàm số $y = (m^2 + 4m + 6)x^2$.

a) Chứng minh với mọi tham số m hàm số luôn nghịch biến với mọi $x < 0$ và đồng biến với mọi $x > 0$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để khi $x = \frac{2}{3}$ thì $y = \frac{4}{3}$.

 $\begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$

 **Lời giải.**

a) Ta có

$$y = (m^2 + 4m + 6)x^2 = (m^2 + 4m + 4 + 2)x^2 = [(m + 2)^2 + 2]x^2.$$

$[(m + 2)^2 + 2] > 0$ với mọi m nên hàm số luôn nghịch biến với mọi $x < 0$ và đồng biến với mọi $x > 0$.

b)

$$\begin{aligned} x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{3} &\Rightarrow \frac{4}{3} = (m^2 + 4m + 6) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} &= (m^2 + 4m + 6) \frac{4}{9} \Leftrightarrow 3 = m^2 + 4m + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}. \end{aligned}$$

□

BÀI 9. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $Y = AX^2$ ($A \neq 0$)

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một *parabol* đi qua gốc tọa độ O , nhận Oy làm trục đối xứng (O là đỉnh của parabol).

☑ Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

☑ Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Vẽ đồ thị của hàm số

- 🕒 *Bước 1:* Lập bảng các giá trị đặc biệt tương ứng giữa x và y của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).
- 🕒 *Bước 2:* Biểu diễn các điểm đặc biệt trên mặt phẳng tọa độ và vẽ đồ thị dạng parabol của hàm số đi qua các điểm đặc biệt đó.

🔗 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = f(x) = (m - 2)x^2$ (m là tham số). Tìm m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. 🔗 $m = 8$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$. 🔗 $m = 7$

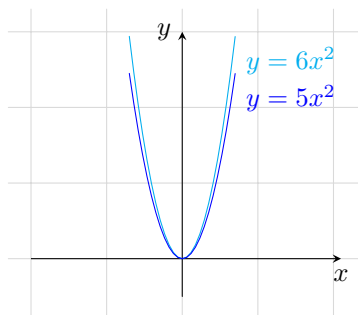
c) Vẽ đồ thị hàm số với các giá trị m tìm được trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

🗨️ Lời giải.

a) $\frac{3}{2} = (m - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m - 2 = 6 \Leftrightarrow m = 8.$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 5 = (m - 2) \cdot (-1)^2 \Rightarrow m = 7.$

c) Với $m = 8$ và $m = 7$ thì $y = f(x) = 6x^2$ và $y = g(x) = 5x^2$.



□

🔗 **Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ ($m \neq \pm\sqrt{2}$) có đồ thị là parabol (P).

a) Xác định m để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2}; 4)$. 🔗 $m = \pm 2$

b) Với giá trị m vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

ii) Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 3.

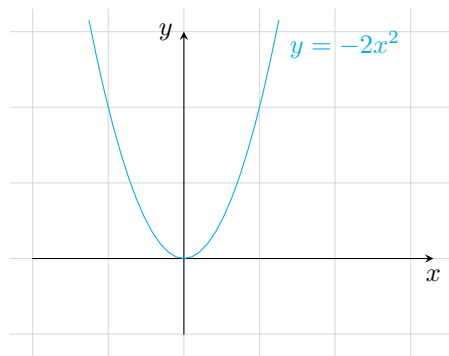
iii) Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

🔗 $B(3; 18); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

🗨️ Lời giải.

a) (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2}; 4)$ nên $4 = (m^2 - 2)(-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow m = \pm 2.$

b) i) Với $m = \pm 2$ ta có hàm số $y = 2x^2$.



ii) Ta có $y = 2 \cdot 3^2 = 18$ suy ra $B(3; 18)$.

$$\text{iii) } y = 2x^2; |x| = |y| \Rightarrow \begin{cases} x = 2x^2 \\ x = -2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}; y = \frac{1}{2}.$$

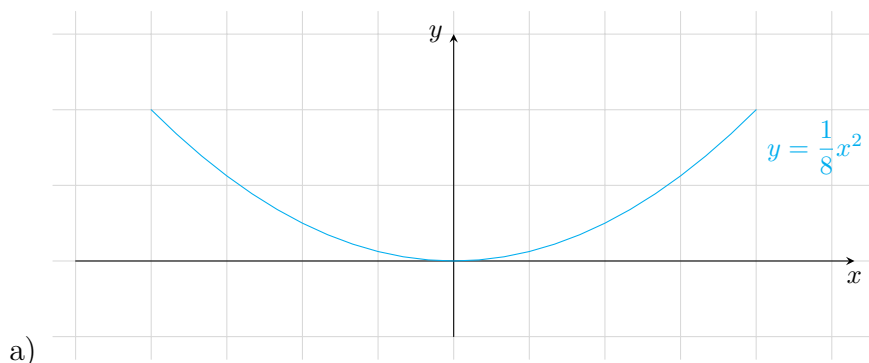
□

❖ **Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = \frac{1}{8}x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Trong các điểm $A\left(2; \frac{3}{8}\right)$; $B\left(-2; \frac{1}{2}\right)$; $C(0; -2)$, điểm nào thuộc P , điểm nào không thuộc (P)?

🗨️ **Lời giải.**



b) $B\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ thuộc (P), $A\left(2; \frac{3}{8}\right)$; $C(0; -2)$ không thuộc (P).

□

📁 Dạng 2. Tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng

Cho parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng d : $y = mx + n$. Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và d ta làm như sau:

🕒 Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d .

$$ax^2 = mx + n. \quad (*)$$

🕒 Giải phương trình (*) ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của (P) và d .

⚠ Số nghiệm của (*) bằng đúng số giao điểm của (P) và d, cụ thể:

- ☑ Nếu (*) vô nghiệm thì d không cắt (P).
- ☑ Nếu (*) có nghiệm kép thì d tiếp xúc với (P).
- ☑ Nếu (*) có hai nghiệm phân biệt thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

🔗 **Ví dụ 4.** Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng d: $y = -x + 3$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

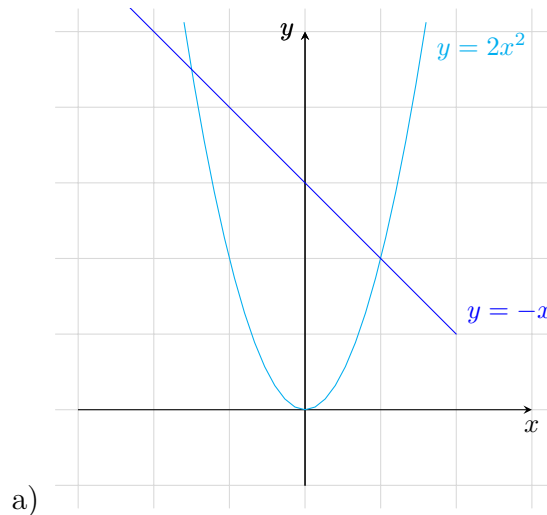
b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d.

$$A(1; 2); B\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình $2x^2 \geq -x + 3$.

$$x \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**



$$b) 2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A(1; 2); B\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right).$$

$$c) 2x^2 \geq -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

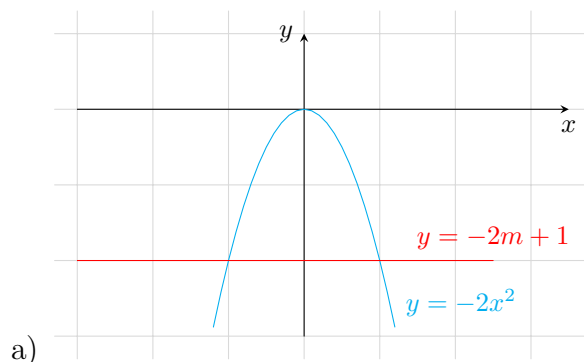
□

🔗 **Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = -2x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Dựa vào đồ thị, hãy biện luận số nghiệm của phương trình $-2x^2 + 2m - 1 = 0$ theo m.

🗨 **Lời giải.**



b) Xét đường thẳng d có phương trình $y = -2m + 1$. Số nghiệm của phương trình $-2x^2 + 2m - 1 = 0$ (1) là số giao điểm của đường thẳng d và (P) . Từ đồ thị ta thấy:

+ Với $-2m + 1 > 0$ hay $m < \frac{1}{2}$, d không cắt (P) . Do đó phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $-2m + 1 = 0$ hay $m = \frac{1}{2}$, d tiếp xúc (P) . Do đó phương trình (1) có nghiệm kép.

+ Với $-2m + 1 < 0$ hay $m > \frac{1}{2}$, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy:

+ Với $m < \frac{1}{2}$ phương trình $-2x^2 + 2m - 1 = 0$ vô nghiệm.

+ Với $m = \frac{1}{2}$ phương trình $-2x^2 + 2m - 1 = 0$ có nghiệm kép.

+ Với $m > \frac{1}{2}$ phương trình $-2x^2 + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

□

❖ **Ví dụ 6.** Cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = x + m$. Tìm m để:

a) d và (P) có điểm chung duy nhất.

🔴 $m = 1$

b) d và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

🔴 $m < 1$

c) d và (P) không có điểm chung.

🔴 $m > 1$

🗨️ Lời giải.

Cách 1: Vẽ đồ thị (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Chú ý hình dạng của d là một đường thẳng song song với đường thẳng với trục Ox . Sử dụng thước di chuyển d trên đồ thị và nhận xét.

Cách 2: Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$-\frac{1}{4}x^2 = x + m \Leftrightarrow -x^2 = 4x + 4m \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4m = 0. \quad (1)$$

a) Đường thẳng d và parabol (P) có điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4m = 0$ có dạng hằng đẳng thức $\Rightarrow m = 1$.

b) Đường thẳng d và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 4m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4 - 4m \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4 - 4m.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $4 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

c) Đường thẳng d và parabol (P) không có điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

□

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Cho hàm số $y = f(x) = (m^2 - 1)x^2$ (m là tham số). Tìm m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

🔗 $m = \pm 3$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

🔗 $m = \pm 2$

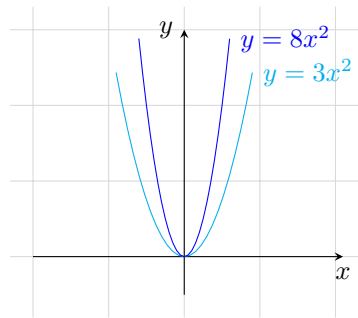
c) Vẽ đồ thị hàm số với các giá trị m tìm được trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Lời giải.

a) $2 = (m^2 - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 = (m^2 - 1) \cdot (-1)^2 \Rightarrow m = \pm 2$.

c) Với $m = \pm 2$ và $m = \pm 3$ thì $y = f(x) = 3x^2$ và $y = g(x) = 8x^2$.



□

❖ **Bài 2.** Cho hàm số $y = \frac{a}{3}x^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị là parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{5}; 5)$.

🔗 $a = 2$

b) Với giá trị vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

ii) Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 4.

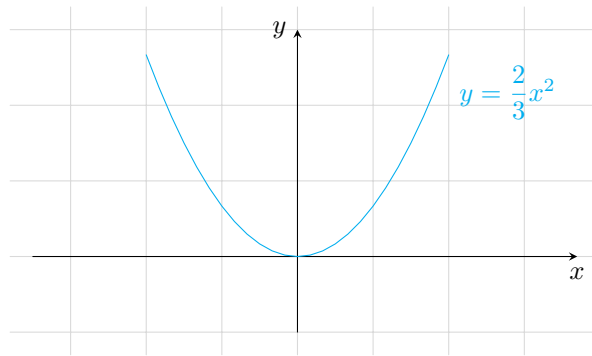
iii) Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

🔗 $B(4; 24); \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Lời giải.

a) (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{5}; 5)$ nên $5 = \frac{a}{3}(-\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow a = 2$.

b) i) Với $a = 2$ ta có đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$.



ii) Ta có $y = \frac{2}{3} \cdot 4^2 = 18$ suy ra $B(4; 24)$.

$$\text{iii) } y = \frac{2}{3}x^2; |x| = |y| \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}x^2 \\ x = -\frac{2}{3}x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}; y = \frac{3}{2}.$$

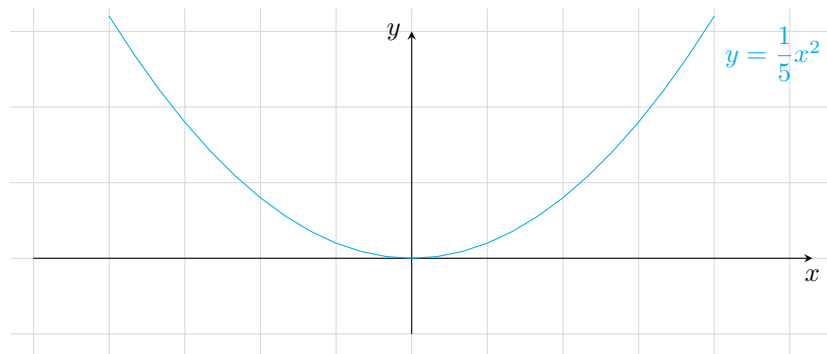
□

✦ **Bài 3.** Cho hàm số $y = \frac{1}{5}x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Trong các điểm $A\left(1; \frac{2}{5}\right)$; $B\left(-2; \frac{6}{5}\right)$; $C\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{20}\right)$, điểm nào thuộc (P), điểm nào không thuộc (P)?

🗨️ **Lời giải.**



a)

b) $C\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{20}\right)$ thuộc (P), $A\left(1; \frac{2}{5}\right)$; $B\left(-2; \frac{6}{5}\right)$ không thuộc (P).

□

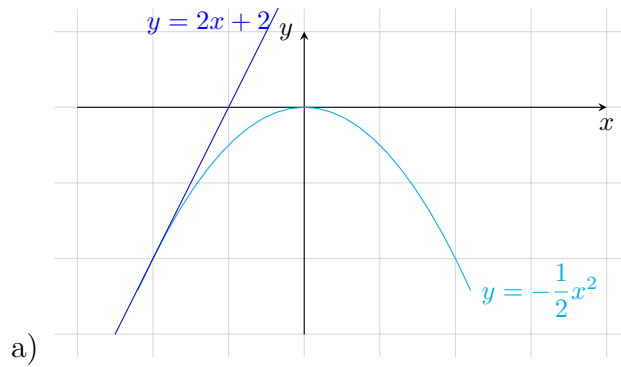
✦ **Bài 4.** Cho parabol (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d : $y = 2x + 2$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d .

📍 $(-2; -2)$

🗨️ **Lời giải.**



b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$-\frac{1}{2}x^2 = 2x + 2 \Leftrightarrow -x^2 = 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -2.$$

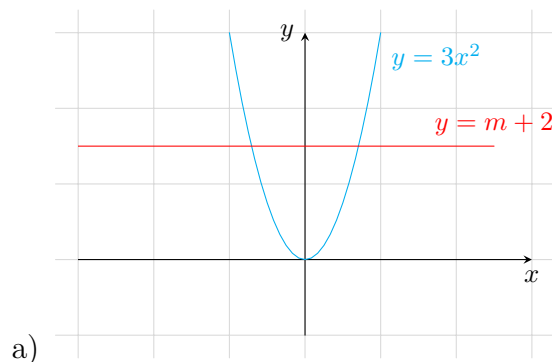
□

✧ **Bài 5.** Cho hàm số $y = 3x^2$ có đồ thị là parabol (P) .

a) Vẽ (P) lên mặt phẳng tọa độ.

b) Dựa vào đồ thị, hãy biện luận số nghiệm của phương trình $3x^2 - m - 2 = 0$ theo m .

🗨️ **Lời giải.**



b) Xét đường thẳng d có phương trình $y = m + 2$. Số nghiệm của phương trình $3x^2 - m - 2 = 0$ (1) là số giao điểm của đường thẳng d và (P) . Từ đồ thị ta thấy:

+ Với $m + 2 < 0$ hay $m < -2$, d không cắt (P) . Do đó phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $m + 2 = 0$ hay $m = -2$, d tiếp xúc (P) . Do đó phương trình (1) có nghiệm kép.

+ Với $m + 2 > 0$ hay $m > -2$, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy:

+ Với $m < -2$ phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ vô nghiệm.

+ Với $m = -2$ phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ có nghiệm kép.

+ Với $m > -2$ phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

□

✧ **Bài 6.** Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = -x + m$. Tìm m để:

a) d và (P) có điểm chung duy nhất.

$$\text{☞ } m = -\frac{1}{2}$$

b) d và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

$$\text{☞ } m > -\frac{1}{2}$$

c) d và (P) không có điểm chung.

$$\text{☞ } m < -\frac{1}{2}$$

 **Lời giải.**

Cách 1: Vẽ đồ thị (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Chú ý hình dạng của d là một đường thẳng song song với đường thẳng với trục Ox . Sử dụng thước di chuyển d trên đồ thị và nhận xét.

Cách 2: Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{2}x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 = -2x + 2m \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2m = 0. \quad (1)$$

a) Đường thẳng d và parabol (P) có điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2m = 0$ có dạng hằng đẳng thức $\Rightarrow m = -\frac{1}{2}$.

b) Đường thẳng d và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2m + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 2m + 1.$$


Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

c) Đường thẳng d và parabol (P) không có điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}.$$

□

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

 **Bài 7.** Cho hàm số $y = f(x) = (m + 1)x^2$ (m là tham số). Tìm m để:

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(2; -6)$.

$$\text{Q} \quad m = -\frac{5}{2}$$

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

$$\text{Q} \quad m = 1$$

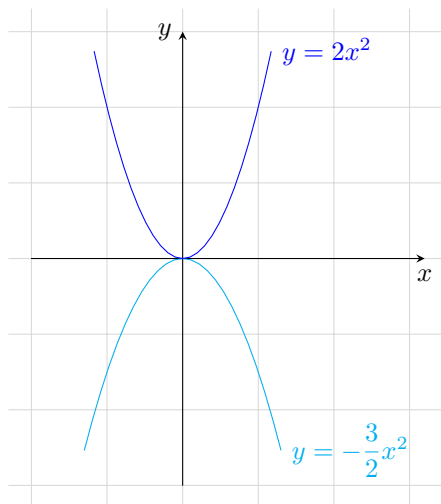
c) Vẽ đồ thị hàm số với các giá trị m tìm được trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

 **Lời giải.**

a) $-6 = (m + 1)2^2 \Leftrightarrow m + 1 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$.

b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 = (m + 1)(-1)^2 \Rightarrow m = 1$.

c) Với $m = -\frac{5}{2}$ và $m = 1$ thì $y = f(x) = -\frac{3}{2}x^2$ và $y = g(x) = 2x^2$.



□

✦ **Bài 8.** Cho hàm số $y = \frac{a}{2}x^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị là parabol (P).

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3}; 6)$.

🔍 $a = 4$

b) Với giá trị a vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

ii) Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 3.

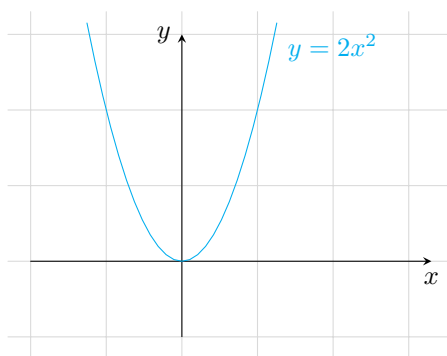
iii) Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

🔍 $B(3; 18); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

🗨️ Lời giải.

a) (P) đi qua điểm $A(\sqrt{3}; 6)$ nên $6 = \frac{a}{2}(-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow a = 4$.

b) i) Với $a = 4$ ta có hàm số $y = 2x^2$.



ii) Ta có $y = 2 \cdot 3^2 = 18$ suy ra $B(3; 18)$.

iii) $y = 2x^2; |x| = |y| \Rightarrow \begin{cases} x = 2x^2 \\ x = -2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}; y = \frac{1}{2}$.

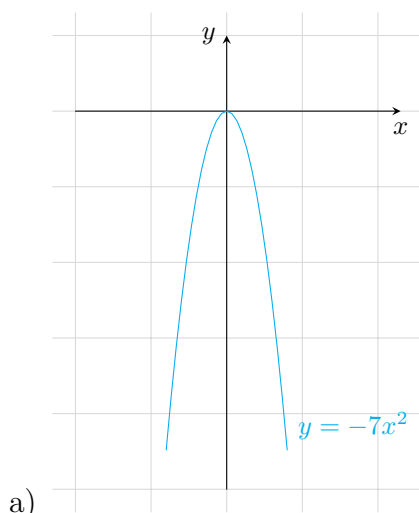
□

✦ **Bài 9.** Cho hàm số $y = -7x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Trong các điểm $A(2; -28); B(-1; 7); C(0; -2)$, điểm nào thuộc P , điểm nào không thuộc (P)?

 Lời giải.




b) $A(2; -28)$ thuộc (P) , $B(-1; 7)$; $C(0; -2)$ không thuộc (P) .

□


↔ **Bài 10.** Cho parabol $(P): y = -3x^2$ và đường thẳng $d: y = 6x + 3$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

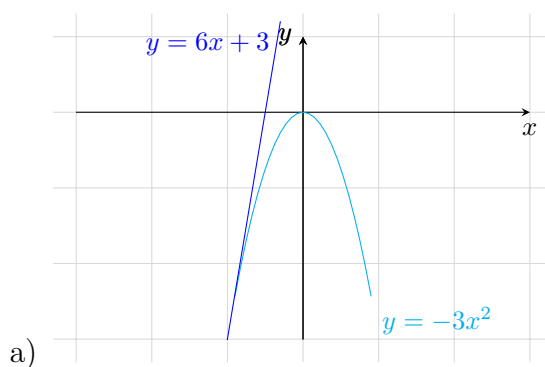
b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d .

 $(-1; -3)$

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình $3x^2 + 6x + 3 \geq 0$.

 $x \neq -1$

 Lời giải.



b) $-3x^2 = 6x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -3$.

c) $3x^2 + 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

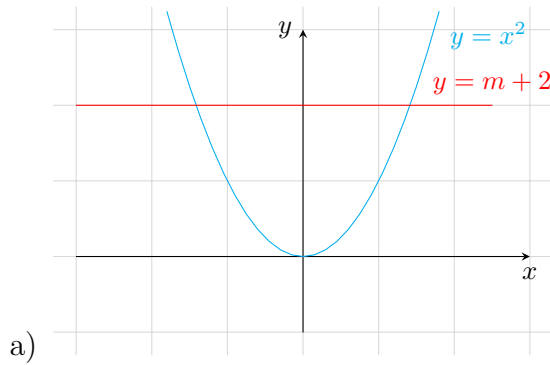
□

↔ **Bài 11.** Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P) .

a) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ.

b) Dựa vào đồ thị, hãy biện luận số nghiệm của phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ theo m .

 Lời giải.



- b) Xét đường thẳng d có phương trình $y = m + 2$. Số nghiệm của phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ (1) là số giao điểm của đường thẳng d và (P) . Từ đồ thị ta thấy:
- + Với $m + 2 < 0$ hay $m < -2$, d không cắt (P) . Do đó phương trình (1) vô nghiệm.
 - + Với $m + 2 = 0$ hay $m = -2$, d tiếp xúc (P) . Do đó phương trình (1) có nghiệm kép.
 - + Với $m + 2 > 0$ hay $m > -2$, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy:

- + Với $m < -2$ phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ vô nghiệm.
- + Với $m = -2$ phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ có nghiệm kép.
- + Với $m > -2$ phương trình $x^2 - m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

□

✦ **Bài 12.** Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = 3x + m$. Tìm m để:

- a) d và (P) có điểm chung duy nhất. ☞ $m = -\frac{9}{16}$
- b) d và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. ☞ $m > -\frac{9}{16}$
- c) d và (P) không có điểm chung. ☞ $m < -\frac{9}{16}$

🗨️ Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^2 = 3x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - m = 0. \quad (1)$$

- a) Đường thẳng d và parabol (P) có điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - m = 0$ có dạng hằng đẳng thức $\Rightarrow m = -\frac{9}{16}$.
- b) Đường thẳng d và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - m - \frac{9}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = m + \frac{9}{16} \Leftrightarrow (x - \frac{3}{4})^2 = m + \frac{9}{16}.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m + \frac{9}{16} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{9}{16}$.

- c) Đường thẳng d và parabol (P) không có điểm chung khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{4})^2 = m + \frac{9}{16} < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{9}{16}.$$

□

BÀI 10. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

☞ **Định nghĩa 10.1.** Phương trình bậc hai một ẩn (hay còn gọi là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) trong đó a, b, c là những số thực cho trước được gọi là hệ số, x là ẩn số.

⚠ **Giải phương trình bậc hai một ẩn là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.**

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận dạng phương trình và tìm các hệ số của phương trình bậc hai một ẩn

Đưa phương trình đã cho về dạng $ax^2 + bx + c = 0$, từ đó đưa ra kết luận về dạng phương trình và các hệ số cần tìm.

☺ **Lưu ý:** Phương trình bậc hai có hệ số $a \neq 0$.

☞ **Ví dụ 1.** Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c .

- a) $3 - x^2 = 0$. $\Rightarrow -x^2 + 3 = 0$, với $a = -1, b = 0, c = 3$. b) $x^2 - x = 3x + 1$.
 $\Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$, với $a = 1, b = -4, c = -1$.
- c) $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x + 2$. d) $(x - 1)^2 = 3(x + 1)$.
 $\Rightarrow 3x^2 - (4 + \sqrt{2})x - 2 = 0$, với $a = 3, b = -4 - \sqrt{2}, c = -2$. $\Rightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$, với $a = 1, b = -5, c = -2$.

Lời giải.

- a) Biến đổi PT $3 - x^2 = 0$ thành $-x^2 + 3 = 0$, với $a = -1, b = 0, c = 3$.
- b) Biến đổi PT $x^2 - x = 3x + 1$ thành $x^2 - 4x - 1 = 0$, với $a = 1, b = -4, c = -1$.
- c) Biến đổi PT $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x + 2$ thành $3x^2 - (4 + \sqrt{2})x - 2 = 0$, với $a = 3, b = -4 - \sqrt{2}, c = -2$.
- d) Biến đổi PT $(x - 1)^2 = 3(x + 1)$ thành $x^2 - 5x - 2 = 0$, với $a = 1, b = -5, c = -2$. □

☞ **Ví dụ 2.** Phương trình nào sau đây đưa được về phương trình bậc 2? Xác định hệ số a của phương trình đó (m là hằng số).

- a) $x = x^2 - m$. $\Rightarrow x^2 - x - m = 0, a = 1$. b) $m = m^2 - mx$.
 \Rightarrow Không đưa được về phương trình bậc 2.
- c) $(m^2 - 1)x^2 - mx = -3x^2$. d) $m(x - 1)^2 = x(1 + mx)$.
 $\Rightarrow (m^2 + 2)x^2 - mx = 0, a = m^2 + 2$. \Rightarrow Không đưa được về phương trình bậc 2.

Lời giải.

- a) $x = x^2 - m \Leftrightarrow x^2 - x - m = 0, a = 1.$
 b) $m = m^2 - mx$ không đưa được về phương trình bậc 2.
 c) $(m^2 - 1)x^2 - mx = -3x^2 \Leftrightarrow (m^2 + 2)x^2 - mx = 0, a = m^2 + 2.$
 d) $m(x - 1)^2 = x(1 + mx)$ không đưa được về phương trình bậc 2.

□

Dạng 2. Sử dụng các phép biến đổi, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Ta có thể sử dụng một số cách sau:

- ☉ *Cách 1.* Đưa phương trình đã cho về dạng tích.
- ☉ *Cách 2.* Đưa phương trình đã cho về phương trình mà vế trái của phương trình đó là một bình phương còn vế phải là một hằng số.

🔗 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

- a) $x^2 - 2x = 0.$ b) $\sqrt{3}x^2 = 2x.$ c) $-3x^2 + 12 = 0.$ d) $x^2 - 3x + 2 = 0.$
 🔍 $x = 0; x = 2.$ 🔍 $x = 0; x = \frac{2}{\sqrt{3}}.$ 🔍 $x = -2; x = 2.$ 🔍 $x = 1; x = 2.$

Lời giải.

- a) Biến đổi $x^2 - 2x = 0$ thành $x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x - 2 = 0$, từ đó tìm được $x = 0; x = 2.$
 b) Biến đổi $\sqrt{3}x^2 = 2x$ thành $x(\sqrt{3}x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $\sqrt{3}x - 2 = 0$, từ đó tìm được $x = 0; x = \frac{2}{\sqrt{3}}.$
 c) Biến đổi $-3x^2 + 12 = 0$ thành $-3(x + 2)(x - 2) = 0$ hoặc đưa về $x^2 = 4$, từ đó tìm được $x = -2; x = 2.$
 d) Biến đổi $x^2 - 3x + 2 = 0$ thành $(x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x - 2 = 0$, từ đó tìm được $x = 1; x = 2.$

□

🔗 **Ví dụ 4.** Giải các phương trình sau

- a) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0.$ b) $x^2 - 3x - 4 = 0.$ c) $2x^2 - 6x + 3 = 0.$ d) $x^2 - 3x + 3 = 0.$
 🔍 $x = \frac{1}{2}.$ 🔍 $x = -1; x = 2.$ 🔍 $x = \frac{\sqrt{11}+1}{2}; x = \frac{-\sqrt{11}+1}{2}.$ 🔍 PT vô nghiệm.

Lời giải.

- a) Ta có PT $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, từ đó tìm được $x = \frac{1}{2}.$
 b) Biến đổi $x^2 - 3x - 4 = 0$ thành $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, từ đó tìm được $x = -1; x = 2.$
 Cách khác: chuyển vế đưa PT về dạng tích $(x + 1)(x - 2) = 0.$

- c) Biến đổi PT đã cho $2x^2 - 6x + 3 = 0$ thành $x^2 - x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$, từ đó tìm được $x = \frac{\sqrt{11} + 1}{2}; x = \frac{-\sqrt{11} + 1}{2}$.
- d) Biến đổi PT đã cho $x^2 - 3x + 3 = 0$ thành $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

□

⇨ **Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau:

- a) $(x - 2)^2 = 9$. b) $x^2 - 4x = 5$. c) $2x^2 - 8x + 5 = 0$. d) $4x^2 - 16x - 9 = 0$.
- 👉 $x = -1; x = 5$ 👉 $x = -1; x = 5$ 👉 $x = \sqrt{\frac{3}{2}} + 2; x = -\sqrt{\frac{3}{2}} + 2$. 👉 $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{9}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có PT $(x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5. \end{cases}$

b) Biến đổi $x^2 - 4x = 5$ ta được $(x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5. \end{cases}$
 Cách khác: đưa PT về dạng tích $(x + 1)(x - 5) = 0$.

c) Biến đổi $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ta được $2x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = \frac{3}{2}$, từ đó tìm được $x = \sqrt{\frac{3}{2}} + 2; x = -\sqrt{\frac{3}{2}} + 2$.

d) Biến đổi PT $4x^2 - 16x - 9 = 0$ thành $x^2 - 4x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow (x - 2)^2 = \frac{25}{4}$, từ đó tìm được $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{9}{2}$.

□

⇨ **Ví dụ 6.** Với giá nào của m thì phương trình sau có nghiệm bằng 1

- a) $x^2 - m^2 + 4 = 0$. 👉 $m = \pm\sqrt{5}$. b) $m^2 + 4mx - 5 = 0 = 0$. 👉 $m = 1, m = -5$.

🗨️ **Lời giải.**

a) PT có nghiệm là 1 $\Leftrightarrow 1 - m^2 + 4 = 0$, từ đó tìm được $m = \pm\sqrt{5}$.

b) PT có nghiệm là 1 $\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 = 0$, biến đổi thành $(m - 1)(m + 5) = 0$ suy ra $m = 1, m = -5$.

□

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và tính tổng $T = a + b + c$

- a) $25 - 4x^2 = 0$. 👉 $T = 21$. b) $x^2 - 4x = -5x + 2$. 👉 $T = 0$.
 c) $(x - 1)^2 - 3x + 4 = 0$. 👉 $T = 1$. d) $x(x - 3) = \sqrt{2}x^2 - 2x$. 👉 $T = -\sqrt{2}$.

🗨️ Lời giải.

- a) Phương trình $25 - 4x^2 = 0$ trở thành $-4x^2 + 25 = 0 \Rightarrow a = -4; b = 0; c = 25$. Từ đó tìm được $T = 21$.
 b) Phương trình $x^2 - 4x = -5x + 2$ trở thành $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow T = 0$
 c) Phương trình $(x - 1)^2 - 3x + 4 = 0$ trở thành $x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow T = 1$.
 d) Phương trình $x(x - 3) = \sqrt{2}x^2 - 2x$ trở thành $(1 - \sqrt{2})x^2 - x = 0 \Rightarrow T = -\sqrt{2}$. □

❖ **Bài 2.** Giải các phương trình sau

- a) $4x^2 - 9 = 0$. b) $x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$. c) $x^2 - 2\sqrt{2}x = 2$. d) $x^2 - \sqrt{8}x + 5 = 0$.
👉 $x = \pm \frac{3}{2}$. 👉 $x = 0; x = 2\sqrt{2}$. 👉 $x = \sqrt{2}$. 👉 PT vô nghiệm.

🗨️ Lời giải.

- a) Biến đổi $4x^2 - 9 = 0$ thành $x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$.
 b) Biến đổi $x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$ thành $x(x - 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2\sqrt{2}$.
 c) Biến đổi $x^2 - 2\sqrt{2}x = 2$ thành $(x - \sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.
 d) Biến đổi $x^2 - \sqrt{8}x + 5 = 0$ thành $x - 2\sqrt{2}x + 2 = -3 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 = -3 \Leftrightarrow$ PT vô nghiệm. □

❖ **Bài 3.** Giải các phương trình sau

- a) $x^2 + 2x = 0$. b) $x^2 - 5 = 0$. c) $x^2 + 2x - 8 = 0$. d) $2x^2 + 4x - 5 = 0$.
👉 $x = 0, x = -2$. 👉 $x = \pm\sqrt{5}$. 👉 $x = 2, x = -4$. 👉 $x = -\sqrt{\frac{7}{2}} - 1$.

🗨️ Lời giải.

- a) Biến đổi $x^2 + 2x = 0$ thành $x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$.
 b) Biến đổi $x^2 - 5 = 0$ thành $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.
 c) Biến đổi $x^2 + 2x - 8 = 0$ thành $(x - 2)(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -4$.
 Cách khác: Biến đổi thành $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow$ kết quả.

d) Biến đổi $2x^2 + 4x - 5 = 0$ thành $2(x^2 + 2x) = 5 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{7}{2}$. Từ đó tìm được $x = \sqrt{\frac{7}{2}} - 1, x = -\sqrt{\frac{7}{2}} - 1$.

□

✧ **Bài 4.** Với giá nào của m thì phương trình sau có nghiệm là -1

a) $4x^2 - 25m^2 = 0$. $\color{red}{\text{☞}} \quad m = \pm \frac{2}{5}$. b) $x^2 - 3mx + 3m^2 = 0$. $\color{red}{\text{☞}} \quad$ Không tìm được m .

☞ Lời giải.

a) Điều kiện $\Leftrightarrow 4 - 25m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{5}$.

b) Điều kiện $\Leftrightarrow 1 + 3m + 3m^2 = 0$.

Biến đổi thành $\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{12} \Rightarrow$ PT vô nghiệm. Không tìm được m .

□

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 5.** Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c .

a) $3x - x^2 = 0$. $\color{red}{\text{☞}} \quad -x^2 + 3x = 0$, với $a = -1, b = 3, c = 0$. b) $x^2 - 3x = 2x - 3$.
 $\color{red}{\text{☞}} \quad x^2 - 5x + 3 = 0$, với $a = 1, b = -5, c = 3$.

c) $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x^2 - 2$. d) $(x + 1)^2 = 2(x - 1)$.
 $\color{red}{\text{☞}} \quad (3 - \sqrt{2})x^2 - 4x + 2 = 0$, với $a = 3 - \sqrt{2}, b = -4, c = 2$. $\color{red}{\text{☞}} \quad x^2 + 3 = 0$, với $a = 1, b = 0, c = 3$.

☞ Lời giải.

a) Biến đổi PT $3x - x^2 = 0$ thành $-x^2 + 3x = 0$, với $a = -1, b = 3, c = 0$.

b) Biến đổi PT $x^2 - 3x = 2x - 3$ thành $x^2 - 5x + 3 = 0$, với $a = 1, b = -5, c = 3$.

c) Biến đổi PT $3x^2 - 4x = \sqrt{2}x^2 - 2$ thành $(3 - \sqrt{2})x^2 - 4x + 2 = 0$, với $a = 3 - \sqrt{2}, b = -4, c = 2$.

d) Biến đổi PT $(x + 1)^2 = 2(x - 1)$ thành $x^2 + 3 = 0$, với $a = 1, b = 0, c = 3$.

□

✧ **Bài 6.** Phương trình nào sau đây đưa được về phương trình bậc 2? Xác định hệ số a của phương trình đó (m là hằng số).

a) $1 + mx = x^2$. $\color{red}{\text{☞}} \quad x^2 - mx - 1 = 0; a = 1$. b) $1 + mx = m^2$.
 $\color{red}{\text{☞}} \quad$ Không đưa được về phương trình bậc 2.

c) $m^2x^2 - 4mx = -\sqrt{2}x^2 + 1$. d) $m(x - 1)^2 = mx^2 - 1$.
 $\color{red}{\text{☞}} \quad (m^2 + \sqrt{2})x^2 - 4mx - 1 = 0, a = m^2 + \sqrt{2}$. $\color{red}{\text{☞}} \quad$ Không đưa được về phương trình bậc 2.

☞ Lời giải.

a) Biến đổi $1 + mx = x^2$ thành $x^2 - mx - 1 = 0; a = 1$.

b) $1 + mx = m^2$ không đưa được về phương trình bậc 2.

c) Biến đổi $m^2x^2 - 4mx = -\sqrt{2}x^2 + 1$ thành $(m^2 + \sqrt{2})x^2 - 4mx - 1 = 0, a = m^2 + \sqrt{2}$.

d) $m(x - 1)^2 = mx^2 - 1$ không đưa được về phương trình bậc 2.

□

🔗 **Bài 7.** Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x = 0.$

🔗 $x = 0; x = 3$

b) $x^2 = \sqrt{2}x.$

🔗 $x = 0; x = \sqrt{2}.$

c) $x^2 - 2 = 0.$

🔗 $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$

d) $x^2 + x - 2 = 0.$

🔗 $x = 1; x = -2.$

🗨️ **Lời giải.**

a) Biến đổi $x^2 - 3x = 0$ thành $x(x - 3) = 0$, từ đó tìm được $x = 0; x = 3$.

b) Biến đổi $x^2 = \sqrt{2}x$ thành $x(x - \sqrt{2}) = 0$, từ đó tìm được $x = 0; x = \sqrt{2}$.

c) Biến đổi $x^2 - 2 = 0$ thành $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$, từ đó tìm được $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$.

d) Biến đổi $x^2 + x - 2 = 0$ thành $(x - 1)(x + 2) = 0$, từ đó tìm được $x = 1; x = -2$.

□

🔗 **Bài 8.** Giải các phương trình sau:

a) $(x + 1)^2 = 4.$

🔗 $x = 1; x = -3$

b) $x^2 + 2x = 3.$

🔗 $x = 1; x = -3$

c) $2x^2 + 4x - 7 = 0.$

🔗 $x = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1; x = -\frac{3}{\sqrt{2}} - 1.$

d) $4x^2 + 8x - 5 = 0.$

🔗 $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{5}{2}.$

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có PT $(x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$

b) Biến đổi $x^2 + 2x = 3$ ta được $(x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$

Cách khác: đưa PT về dạng tích $(x - 1)(x + 3) = 0$.

c) Biến đổi $2x^2 + 4x - 7 = 0$ ta được $2x^2 + 4x - 7 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = \frac{9}{2}$, từ đó tìm được $x = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1; x = -\frac{3}{\sqrt{2}} - 1.$

d) Biến đổi PT $4x^2 + 8x - 5 = 0$ thành $x^2 + 2x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{9}{4}$, từ đó tìm được $x = \frac{1}{2}; x = -\frac{5}{2}.$

□

🔗 **Bài 9.** Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.$

🔗 $x = \frac{1}{2}.$

b) $x^2 - x = 2.$

🔗 $x = -1; x = 2.$

c) $2x^2 - 2x - 5 = 0.$

🔗 $x = \frac{\sqrt{11} + 1}{2}; x = \frac{-\sqrt{11} + 1}{2}.$

d) $x^2 - x + 1 = 0.$

🔗 PT vô nghiệm.

🗨️ **Lời giải.**

- a) Ta có PT $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, từ đó tìm được $x = \frac{1}{2}$.
- b) Biến đổi $x^2 - x = 2$ thành $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, từ đó tìm được $x = -1$; $x = 2$.
 Cách khác: chuyển về đưa PT về dạng tích $(x + 1)(x - 2) = 0$.
- c) Biến đổi PT đã cho $2x^2 - 2x - 5 = 0$ thành $x^2 - x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$, từ đó tìm được $x = \frac{\sqrt{11} + 1}{2}$; $x = \frac{-\sqrt{11} + 1}{2}$.
- d) Biến đổi PT đã cho $x^2 - x + 1 = 0$ thành $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

□

🔗 **Bài 10.** Giải các phương trình sau

- a) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$. b) $x^2 - 3x - 4 = 0$. c) $2x^2 - 6x + 3 = 0$. d) $x^2 - 3x + 3 = 0$.
- 🔗 $x = \frac{3}{2}$ 🔗 $x = -1; x = 4$ 🔗 $x = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}; x = \frac{-\sqrt{3} + 3}{2}$. 🔗 PT vô nghiệm.

🗨 **Lời giải.**

- a) Ta có PT $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$, từ đó tìm được $x = \frac{3}{2}$.
- b) Biến đổi $x^2 - 3x - 4 = 0$ thành $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, từ đó tìm được $x = -1$; $x = 4$.
 Cách khác: chuyển về đưa PT về dạng tích $(x + 1)(x - 4) = 0$.
- c) Biến đổi PT đã cho $2x^2 - 6x + 3 = 0$ thành $x^2 - 3x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, từ đó tìm được $x = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$; $x = \frac{-\sqrt{3} + 3}{2}$.
- d) Biến đổi PT đã cho $x^2 - 3x + 3 = 0$ thành $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

□

🔗 **Bài 11.** Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm bằng 1

- a) $x^2 + m^2 = 4x$. 🔗 $m = \pm\sqrt{3}$. b) $x^2 - (m + 3)x + m^2 = 0$. 🔗 $m = 2, m = -1$.

🗨 **Lời giải.**

- a) PT có nghiệm là 1 $\Leftrightarrow 1 + m^2 = 4$, từ đó tìm được $m = \pm\sqrt{3}$.
- b) PT có nghiệm là 1 $\Leftrightarrow 1 - (m + 3) + m^2 = 0$, biến đổi thành $(m - 2)(m + 1) = 0$ suy ra $m = 2, m = -1$.

□

BÀI 11. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

⇨ **Định nghĩa 11.1.** Xét phương trình bậc hai ẩn x :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Với biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có:

☑ Trường hợp 1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

☑ Trường hợp 2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

☑ Trường hợp 3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Để giải phương trình bậc hai ta cần xác định các hệ số a, b, c và sử dụng công thức nghiệm để giải phương trình.

⇨ **Ví dụ 1.** Xác định các hệ số a, b, c ; tính biệt thức Δ , từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0.$

☑ $x_1 = 1; x_2 = 2.$

b) $-2x^2 + x + 1 = 0.$

☑ $x_1 = 1; x_2 = \frac{-1}{2}.$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0.$

☑ $x_1 = x_2 = 2.$

d) $x^2 - x + 4 = 0.$

☑ PT vô nghiệm.

🗨️ Lời giải.

a) Ta có $a = 1, b = -3, c = 2; \Delta = b^2 - 4ac = 1$, từ đó tìm được $x_1 = 1; x_2 = 2$.

b) Ta có $a = -2, b = 1, c = 1; \Delta = b^2 - 4ac = 9$, từ đó tìm được $x_1 = 1; x_2 = \frac{-1}{2}$.

c) Ta có $a = 1, b = -4, c = 4; \Delta = b^2 - 4ac = 0$, từ đó tìm được $x_1 = x_2 = 2$.

d) Ta có $a = 1, b = -1, c = 4; \Delta = b^2 - 4ac = -15 < 0, \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

□

⇨ **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau :

- a) $x^2 - x + 1 = 0$. $\color{red}{\text{PT vô nghiệm.}}$ b) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$. $\color{red}{x_1 = x_2 = \sqrt{3}.}$
 c) $x^2 + \sqrt{8}x = 2$. $\color{red}{x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}.}$ d) $-x^2 - \sqrt{5}x = 1$. $\color{red}{x_1 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}; x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.}$

Lời giải.

- a) $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow$ PT vô nghiệm.
 b) Ta có $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \sqrt{3}$.
 c) Biến đổi PT thành $3x^2 + \sqrt{8}x - 2 = 0$, $\Delta = 4\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
 d) Biến đổi PT thành $-x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$, $\Delta = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}; x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

□

Dạng 2. Sử dụng công thức nghiệm, xác định số nghiệm của phương trình dạng bậc hai

Xét phương trình dạng bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$.

- a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
 b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
 c) Phương trình có đúng một nghiệm : $a = 0, b \neq 0$.
 d) Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0. \end{cases}$

Ví dụ 3. Cho phương trình $mx^2 - 3x + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt. $\color{red}{m < \frac{9}{4}, m \neq 0.}$ b) Có nghiệm kép. $\color{red}{m = \frac{9}{4}.}$
 c) Vô nghiệm. $\color{red}{m > \frac{9}{4}.}$ d) Có đúng một nghiệm. $\color{red}{m = 0.}$

Lời giải.

Xét $\Delta = 9 - 4m$.

- a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Tìm được $m < \frac{9}{4}, m \neq 0$.
 b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ Tìm được $m = \frac{9}{4}$.
 c) Xét $m = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$. Suy ra $m = 0$ loại
 Xét $m \neq 0$ phương trình vô nghiệm khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{4}$.
 d) Có đúng một nghiệm khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

□

Dạng 3. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai

a) Giải và biện luận phương trình bậc hai theo tham số m là tìm tập nghiệm của phương trình tùy theo sự thay đổi của m .

b) Ta xét phương trình dạng bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ với biệt thức } \Delta = b^2 - 4ac,$$

☑ Nếu $a = 0$, ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất.

☑ Nếu $a \neq 0$, ta biện luận phương trình bậc hai theo Δ .

🔗 **Ví dụ 4.** Giải và biện luận các phương trình sau: (m là tham số)

a) $x^2 - x + m = 0$.

b) $mx^2 - (2m + 1)x + m = 0$.

Lời giải.

a) $x^2 - x + m = 0$.

☑ Xét $\Delta = 1 - 4m$.

☑ $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm.

☑ $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

☑ $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$.

b) $mx^2 - (2m + 1)x + m = 0$.

☑ Với $m = 0 \Rightarrow$ phương trình có 1 nghiệm $x = 0$.

☑ Với $m \neq 0 \Rightarrow \Delta = 4m + 1$.

☑ $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm.

☑ $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{2m + 1}{2m}$.

☑ $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{2m + 1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2m}$.

□

Dạng 4. Một số bài toán khác về tính có nghiệm của phương trình bậc hai

Dựa vào điều kiện để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm là $\Delta \geq 0$.

🔗 **Ví dụ 5.** Chứng tỏ rằng khi một phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì phương trình đó luôn có nghiệm.

Lời giải.

Do $a \cdot c < 0 \Rightarrow -a \cdot c > 0$. Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4(-ac) > 0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt. □

🔗 **Ví dụ 6.** Không tính Δ , hãy giải thích vì sao các phương trình sau đây có nghiệm

a) $3x^2 + 2x - 5 = 0.$

b) $-x^2 + 3x + \sqrt{2} - 1 = 0.$

c) $5x^2 + 2x - m^2 - 1 = \sqrt{2}x + 2.$

d) $\sqrt{2}mx^2 + x - m = 0 (m \neq 0).$

 **Lời giải.**

a) Do $a.c = 3(-5) = -15 < 0.$

b) Do $a.c = -1(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2} < 0.$

c) Do $a.c = 5(-m^2 - 3) < 0.$

d) Do $a.c = -\sqrt{2} \cdot m^2 < 0.$

□

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 1.** Xác định các hệ số a, b, c ; tính biệt thức Δ , từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0.$

☞ $x_1 = 2; x_2 = 3.$

b) $-3x^2 - 2x + 1 = 0.$

☞ $x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{3}.$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0.$

☞ $x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}.$

d) $x^2 - 2x + 4 = 0.$

☞ PT vô nghiệm .

 **Lời giải.**

a) Ta có $a = 1, b = -5, c = 6; \Delta = 1$, từ đó tìm được $x_1 = 2; x_2 = 3.$

b) Ta có $a = -3, b = -2, c = 1; \Delta = 16$, từ đó tìm được $x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{3}.$

c) Ta có $a = 1, b = -2\sqrt{2}, c = 2; \Delta = 0$, từ đó tìm được $x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}.$

d) Ta có $a = 1, b = -2, c = 4; \Delta = -12 \Rightarrow$ PT vô nghiệm .

□

✦ **Bài 2.** Giải các phương trình sau

a) $x^2 - x = 3.$

☞ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$

b) $-x^2 - 3x = x - 1.$

☞ $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}.$

c) $x^2 = 2(x + 1).$

☞ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$

d) $x^2 - \sqrt{3}(x - 1) = 0.$

☞ PT vô nghiệm.

 **Lời giải.**

a) $\Delta = 13$, từ đó tìm được $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$

b) $\Delta = 20$, từ đó tìm được $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}.$

c) $\Delta = 12$, từ đó tìm được $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$

d) Biến đổi thành $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0, \Delta = 3 - 4\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ PT vô nghiệm.



✧ **Bài 3.** Cho phương trình $mx^2 - x + 2 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt. $\color{red}{\heartsuit} m < \frac{1}{8}, m \neq 0.$ b) Có nghiệm kép. $\color{red}{\heartsuit} m = \frac{1}{8}.$
 c) Vô nghiệm. $\color{red}{\heartsuit} m > \frac{1}{8}.$ d) Có đúng một nghiệm. $\color{red}{\heartsuit} m = 0$

🗨️ Lời giải.

Xét $\Delta = 1 - 8m$.

- a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Tìm được $m < \frac{1}{8}, m \neq 0$.
 b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ Tìm được $m = \frac{1}{8}$.
 c) Xét $m = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Suy ra $m = 0$ loại
 Xét $m \neq 0$ phương trình vô nghiệm khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{8}$.
 d) Có đúng một nghiệm khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.



✧ **Bài 4.** Giải và biện luận các phương trình sau: (m là tham số)

- a) $x^2 - x - m = 0.$ b) $mx^2 - x + 3 = 0.$

🗨️ Lời giải.

- a) $x^2 - x - m = 0$. Xét $\Delta = 1 + 4m$.
- 🟡 $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{4}$: Phương trình vô nghiệm.
 - 🟡 $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.
 - 🟡 $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{-1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2}$.
- b) $mx^2 - x + 3 = 0$.
- 🟡 Với $m = 0 \Rightarrow$ phương trình có 1 nghiệm $x = 3$.
 - 🟡 Với $m \neq 0 \Rightarrow \Delta = -12m + 1$.
 - 🟡 $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$: Phương trình vô nghiệm.
 - 🟡 $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1}{2m}$.
 - 🟡 $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{12}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12m}}{2m}$.



✧ **Bài 5.** Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì phương trình sau luôn có nghiệm.

a) $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0.$

b) $x^2 - 2mx + (m - 1) = 0.$

Lời giải.

a) $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0.$ Có $\Delta = (m - 2)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên với mọi giá trị của m thì phương trình sau luôn có nghiệm

b) $x^2 - 2mx + (m - 1) = 0.$ Có $\Delta = (2m - 1)^2 + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên với mọi giá trị của m thì phương trình sau luôn có nghiệm

□

D - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✦ **Bài 6.** Xác định các hệ số $a, b, c;$ tính biệt thức $\Delta,$ từ đó áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình sau:

a) $x^2 - x - 2 = 0.$

☞ $x_1 = -1; x_2 = 2.$

b) $-x^2 - 5x + 6 = 0.$

☞ $x_1 = 1; x_2 = -6.$

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0.$

☞ $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$

d) $x^2 - 3x + 4 = 0.$

☞ PT vô nghiệm.

Lời giải.

a) Ta có $a = 1, b = -1, c = -2; \Delta = b^2 - 4ac = 9,$ từ đó tìm được $x_1 = -1; x_2 = 2.$

b) Ta có $a = -1, b = -5, c = 6; \Delta = b^2 - 4ac = 49,$ từ đó tìm được $x_1 = 1; x_2 = -6.$

c) Ta có $a = 4, b = -4, c = 1; \Delta = b^2 - 4ac = 0,$ từ đó tìm được $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$

d) Ta có $a = 1, b = -3, c = 4; \Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0, \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

□

✦ **Bài 7.** Giải các phương trình sau :

a) $2x^2 - 2x + 0,5 = 0.$

☞ $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0.$

☞ $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}.$

c) $x^2 - \sqrt{3}x = -1.$

☞ PT vô nghiệm.

d) $\sqrt{2}(x^2 - 2) = 4x.$

☞ $x_{1,2} = \sqrt{2} \pm 2.$

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$

b) Ta có $\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\sqrt{2}.$

c) Biến đổi thành $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0, \Delta = -1 < 0 \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

d) Biến đổi thành $x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 = 0, \Delta = 16.$ Từ đó tìm được $x_{1,2} = \sqrt{2} \pm 2.$

□

✦ **Bài 8.** Cho phương trình $mx^2 - 2x + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt. 🔍 $m < 1, m \neq 0$. b) Có nghiệm kép. 🔍 $m = 1$.
- c) Vô nghiệm. 🔍 $m > 1$. d) Có đúng một nghiệm. 🔍 $m = 0$.

🗨️ Lời giải.

Xét $\Delta = 4 - 4m$.

- a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ Tìm được $m < 1, m \neq 0$.
- b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ Tìm được $m = 1$.
- c) Xét $m = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Suy ra $m = 0$ loại
Xét $m \neq 0$ phương trình vô nghiệm khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1$.
- d) Có đúng một nghiệm khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

□

🔗 **Bài 9.** Giải và biện luận các phương trình sau: (m là tham số)

- a) $x^2 - 2x + m = 0$. b) $mx^2 - x + 1 = 0$.

🗨️ Lời giải.

a) $x^2 - 2x + m = 0$.

- 🔍 Xét $\Delta = 4 - 4m$.
- 🔍 $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1$: Phương trình vô nghiệm.
- 🔍 $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$.
- 🔍 $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 1$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4m}}{2}$.

b) $mx^2 - x + 1 = 0$.

- 🔍 Với $m = 0 \Rightarrow$ phương trình có 1 nghiệm $x = 1$.
- 🔍 Với $m \neq 0 \Rightarrow \Delta = -4m + 1$.
- 🔍 $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm.
- 🔍 $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{1}{2m}$.
- 🔍 $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2m}$.

□

BÀI 12. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xét phương trình bậc hai ẩn x : $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$).

Khi $b = 2b'$, gọi biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$, ta có

☑ Trường hợp 1: Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

☑ Trường hợp 2: Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.

☑ Trường hợp 3: Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

⚠ Ta thường sử dụng biệt thức Δ' khi phương trình bậc hai đã cho với hệ số b có dạng $b = 2b'$, khi đó các phép tính toán trong bài toán đơn giản hơn.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước

Để giải phương trình bậc hai ta cần xác định các hệ số a , b' , c và sử dụng công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình.

🔍 **Ví dụ 1.** Xác định các hệ số a , b , c , tính biệt thức Δ' , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$. 🔍 $\left\{1; \frac{1}{3}\right\}$ b) $-4x^2 + 4x + 1 = 0$. 🔍 $\left\{\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$

c) $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$. 🔍 Vô nghiệm d) $x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0$. 🔍 $\{\sqrt{2}\}$

🗨️ Lời giải.

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$.

$$a = 3, b' = -2, c = 1.$$

$$\Delta' = (-2)^2 - 3 \cdot 1 = 1.$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{1}}{3} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; \frac{1}{3}\right\}.$$

b) $-4x^2 + 4x + 1 = 0$.

$$a = -4, b' = 2, c = 1.$$

$$\Delta' = (2)^2 - (-4) \cdot 1 = 8.$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{-4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{-4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right\}.$$

c) $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0.$

$a = 3, b' = -\sqrt{2}, c = 4.$

$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 3 \cdot 4 = -10 < 0.$

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) $x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2} + 2 = 0.$

$a = 1, b' = -\sqrt{2}, c = 2.$

$\Delta' = (\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 2 = 0.$

$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$

Vậy $S = \{\sqrt{2}\}.$

□

❖ **Ví dụ 2.** Đưa về dạng $ax^2 + 2b'x + c = 0$, từ đó giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn

a) $4x - x^2 = -5.$

☞ $\{-1; 5\}$

b) $x^2 = \sqrt{8}x - 3.$

☞ Vô nghiệm.

c) $x^2 - 2\sqrt{3}x = 2x^2 - 1.$

☞ $\{-\sqrt{3}-2; -\sqrt{3}+2\}$

d) $(\sqrt{5} - x)^2 = 2\sqrt{5}x - 15.$

☞ $\{2\sqrt{5}\}$

🗨️ Lời giải.

a) $4x - x^2 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2x - 5 = 0.$

$a = 1, b' = -2, c = -5.$

$\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-5) = 9.$

$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{9}}{1} = -1.$

$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{9}}{1} = 5.$

Vậy $S = \{-1; 5\}.$

b) $x^2 = \sqrt{8}x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0.$

$a = 1, b' = -\sqrt{2}, c = 3.$

$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 3 = -1 < 0.$

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) $x^2 - 2\sqrt{3}x = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0.$

$a = 1, b' = \sqrt{3}, c = -1.$

$\Delta' = (\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-1) = 4.$

$x_1 = \frac{-(\sqrt{3}) - \sqrt{4}}{1} = -\sqrt{3} - 2.$

$x_2 = \frac{-(\sqrt{3}) + \sqrt{4}}{1} = -\sqrt{3} + 2.$

Vậy $S = \{-\sqrt{3} - 2; -\sqrt{3} + 2\}.$

d) $(\sqrt{5} - x)^2 = 2\sqrt{5}x - 15$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5}x + 20 = 0.$

$a = 1, b' = -2\sqrt{5}, c = 20.$

$\Delta' = (-2\sqrt{5})^2 - 1 \cdot 20 = 0.$

$x_1 = x_2 = \frac{-(2\sqrt{5})}{1} = 2\sqrt{5}.$

Vậy $S = \{2\sqrt{5}\}.$

□

📁 Dạng 2. Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, xác định số nghiệm của phương trình bậc hai.

Xét phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0.$

1. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0. \end{cases}$

2. Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0. \end{cases}$

$$3. \text{ Phương trình có đúng một nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0. \end{cases}$$

$$4. \text{ Phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0. \end{cases}$$

❖ **Ví dụ 3.** Cho phương trình $mx^2 - 6x - 1 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình

- a) Có hai nghiệm phân biệt. $\color{red}{\text{a}}$ $-9 < m \neq 0$ b) Có nghiệm kép. $\color{red}{\text{a}}$ $m = -9$
 c) Vô nghiệm. $\color{red}{\text{a}}$ $m < -9$ d) Có đúng một nghiệm. $\color{red}{\text{a}}$ $m = 0$

🗨️ Lời giải.

a) $\Delta' = (-3)^2 - m \cdot (-1) = 9 + m.$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -9. \end{cases}$$

b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9.$

c) Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -9 \end{cases} \Leftrightarrow m < -9.$

d) Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

□

📁 Dạng 3. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai.

- 🕒 Giải và biện luận phương trình bậc hai theo tham số m là tìm tập nghiệm của phương trình này tùy theo sự thay đổi của m .
- 🕒 Ta xét phương trình dạng bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với biệt thức $\Delta' = b^2 - 4ac$.
 - Nếu $a = 0$, ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất.
 - Nếu $a \neq 0$, ta biện luận phương trình bậc hai theo Δ' .

❖ **Ví dụ 4.** Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số)

a) $mx^2 + 2x - 4 = 0.$ b) $x^2 - 4(m - 1)x + 4m^2 = 0.$

🗨️ Lời giải.

a) $mx^2 + 2x - 4 = 0.$

TH1. $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$, phương trình trở thành $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

TH2. $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

$$\Delta' = (1)^2 - m \cdot 4 = 1 - 4m.$$

⊕ $1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$, phương trình vô nghiệm.

⊕ $1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = \frac{-1}{m} = -4$.

⊕ $1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$+ x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{m} \qquad + x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$$

Kết luận

⊕ $m > \frac{1}{4}$, phương trình vô nghiệm.

⊕ $m = 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

⊕ $m = \frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -4$.

⊕ $m < \frac{1}{4}$ và $m \neq 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$+ x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{m} \qquad + x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$$

b) $x^2 - 4(m - 1)x + 4m^2 = 0$.

$$\Delta' = (-2(m - 1))^2 - 4m^2 = -8m + 4.$$

⊕ $-8m + 4 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

⊕ $-8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = \frac{-(-2(m - 1))}{1} = 2m - 2 = -1$.

⊕ $-8m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$+ x_1 = \frac{-(-2(m - 1)) - \sqrt{-8m + 4}}{1} = 2(m - 1) - \sqrt{-8m + 4}$$

$$+ x_2 = \frac{-(-2(m - 1)) + \sqrt{-8m + 4}}{1} = 2(m - 1) + \sqrt{-8m + 4}.$$

Kết luận

⊕ $m > \frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

⊕ $m = \frac{1}{2}$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -1$.

⊕ $m < \frac{1}{2}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$+ x_1 = 2(m - 1) - \sqrt{-8m + 4} \qquad + x_2 = 2(m - 1) + \sqrt{-8m + 4}.$$

□

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

⊕ **Bài 1.** Sử dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$.

🔍 {2; 8}

b) $-3x^2 - 4x + 2 = 0$.

🔍 {2; 8}

c) $x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0$.

🔍 $\frac{-2 + \sqrt{10}}{3}; \frac{-2 + \sqrt{10}}{3}$

d) $x^2 - \sqrt{40}x + 10 = 0$.

🔍 $\{\sqrt{10}\}$

 **Lời giải.**

a) $x^2 - 10x + 16 = 0.$

$$\Delta' = (-5)^2 - 1 \cdot 16 = 9.$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{1} = 8$$

Vậy $S = \{2; 8\}.$

b) $-3x^2 - 4x + 2 = 0.$

$$\Delta' = (-2)^2 - (-3) \cdot 2 = 10.$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{10}}{-3} = \frac{-2 + \sqrt{10}}{3}$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{10}}{-3} = -\frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{10}}{3}; -\frac{2 + \sqrt{10}}{3} \right\}.$

c) $x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0.$

$$\Delta' = (-3\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 2 = 16.$$

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{16}}{1} = 3\sqrt{2} - 4$$

$$x_2 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{16}}{1} = 3\sqrt{2} + 4$$

Vậy $S = \{3\sqrt{2} - 4; 3\sqrt{2} + 4\}.$

d) $x^2 - \sqrt{40}x + 10 = 0.$

$$\Delta' = (-\sqrt{10})^2 - 10 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$$

Vậy $S = \{\sqrt{10}\}.$

□

 **Bài 2.** Giải các phương trình sau

a) $x^2 - 8x = 3.$

☞ $\{4 - \sqrt{19}; 4 + \sqrt{19}\}$

b) $-x^2 - 3x = 7x - 1.$

☞ $\{-5 - \sqrt{6}; -5 + \sqrt{6}\}$

c) $(x - 2)^2 = 2(1 - x).$

☞ vô nghiệm

d) $x^2 = 6(\sqrt{2}x - 3).$

☞ $\{3\sqrt{2}\}$

 **Lời giải.**

a) $x^2 - 8x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 3 = 0.$

$$\Delta' = (-4)^2 - (-3) = 19$$

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{19}}{1} = 4 - \sqrt{19}$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{19}}{1} = 4 + \sqrt{19}$$

Vậy $S = \{4 - \sqrt{19}; 4 + \sqrt{19}\}.$

b) $-x^2 - 3x = 7x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 1 = 0.$

$$\Delta' = 5^2 + 1 = 26$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{26}}{1} = -5 - \sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{26}}{1} = -5 + \sqrt{6}$$

Vậy $S = \{-5 - \sqrt{6}; -5 + \sqrt{6}\}.$

c) $(x - 2)^2 = 2(1 - x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0.$

$$\Delta' = (-1)^2 - 2 = -1 < 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm.


d) $x^2 = 6(\sqrt{2}x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = 0.$

$$\Delta' = (-3\sqrt{2})^2 - 18 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-3\sqrt{2})}{1} = 3\sqrt{2}.$$

Vậy $S = \{3\sqrt{2}\}.$

□

 **Bài 3.** Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 + 1 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình

- a) Có hai nghiệm phân biệt. $\mathcal{Q} m < 0$ b) Có nghiệm kép. $\mathcal{Q} m = 0$
 c) Vô nghiệm. $\mathcal{Q} m > 0$ d) Có đúng một nghiệm. \mathcal{Q} không tồn tại

🗨️ Lời giải.

a) $\Delta' = -(m-1)^2 - (m^2 + 1) = -2m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow -2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

c) Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

d) Có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \text{ (Vô lý)} \\ -2(m-1) \neq 0 \end{cases}$

Vậy không tồn tại giá trị m .

□

🔗 **Bài 4.** Giải và biện luận phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m-1 = 0$, (m là tham số).

🗨️ Lời giải.

TH1. $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$, phương trình trở thành $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

TH2. $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$\Delta' = -(m-1)^2 - m \cdot (m-1) = -m + 1$.

🕒 $-m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$, phương trình vô nghiệm.

🕒 $-m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = \frac{m-1}{m} = 0$.

🕒 $-m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$+ x_1 = \frac{(m-1) - \sqrt{-m+1}}{m} \qquad + x_2 = \frac{(m-1) + \sqrt{-m+1}}{m}.$$

Kết luận

🕒 $m > 1$, phương trình vô nghiệm.

🕒 $m = 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

🕒 $m = 1$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = 0$.

🕒 $m < 1$ và $m \neq 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$+ x_1 = \frac{(m-1) - \sqrt{-m+1}}{m} \qquad + x_2 = \frac{(m-1) + \sqrt{-m+1}}{m}.$$

□

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✦ **Bài 5.** Xác định các hệ số a, b, c , tính biệt thức Δ' , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$. $\mathfrak{R} \{1; 5\}$ b) $-3x^2 - 4x + 2 = 0$. $\mathfrak{R} \left\{ \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}; \frac{-4 - \sqrt{10}}{3} \right\}$
 c) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$. $\mathfrak{R} \{ \sqrt{3} - \sqrt{7}; \sqrt{3} + \sqrt{7} \}$ d) $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0$. $\mathfrak{R} \{ \sqrt{5} \}$

🗨 **Lời giải.**

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$.
 $a = 1, b' = -3, c = 5$.
 $\Delta' = (-3)^2 - 1 \cdot 5 = 4$.
 $x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{4}}{1} = 1$.
 $x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{4}}{1} = 5$.
 Vậy $S = \{1; 5\}$.

b) $-3x^2 - 4x + 2 = 0$.
 $a = -3, b' = -2, c = 2$.
 $\Delta' = (-2)^2 - (-3) \cdot 2 = 10$.
 $x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{10}}{-3} = \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}$.
 $x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{10}}{-3} = \frac{-4 - \sqrt{10}}{3}$.
 Vậy $S = \left\{ \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}; \frac{-4 - \sqrt{10}}{3} \right\}$.

c) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$.
 $a = 1, b' = -\sqrt{3}, c = -4$.
 $\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-4) = 7$.
 $x_1 = \frac{-(-\sqrt{3}) - \sqrt{7}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{7}$.
 $x_2 = \frac{-(-\sqrt{3}) + \sqrt{7}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{7}$.
 Vậy $S = \{ \sqrt{3} - \sqrt{7}; \sqrt{3} + \sqrt{7} \}$.

d) $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$.
 $a = 1, b' = -\sqrt{5}, c = 5$.
 $\Delta' = (-\sqrt{5})^2 - 1 \cdot 5 = 0$.
 $x_1 = x_2 = \frac{-(-\sqrt{5})}{1} = \sqrt{5}$.
 Vậy $S = \{ \sqrt{5} \}$.

□

✦ **Bài 6.** Đưa về dạng $ax^2 + 2b'x + c = 0$, từ đó giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn

a) $x^2 - 2 = 4x$. $\mathfrak{R} \{2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}\}$ b) $3 - x^2 = 2\sqrt{3}x - 2x^2$. $\mathfrak{R} \{ \sqrt{3} \}$.
 c) $2(x - 2)^2 = -2x + 5$. $\mathfrak{R} \left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right\}$ d) $\sqrt{8}(x - \sqrt{8}) = (x - \sqrt{2})^2$. \mathfrak{R} Vô nghiệm

🗨 **Lời giải.**

a) $x^2 - 2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2x - 2 = 0$.
 $a = 1, b' = -2, c = -2$.
 $\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-2) = 6$.
 $x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{6}}{1} = 2 - \sqrt{6}$.
 $x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{6}}{1} = 2 + \sqrt{6}$.
 Vậy $S = \{2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}\}$.

b) $3 - x^2 = 2\sqrt{3}x - 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$.
 $a = 1, b' = -\sqrt{3}, c = 3$.
 $\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 3 = 0$.
 $x_1 = x_2 = \frac{-(-\sqrt{3})}{1} = \sqrt{3}$.
 Vậy $S = \{ \sqrt{3} \}$.

c) $2(x-2)^2 = -2x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 \cdot 3x + 3 = 0.$ d) $\sqrt{8}(x-\sqrt{8}) = (x-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} + 10 = 0.$
 $a = 2, b' = -3, c = 3.$ $a = 1, b' = -2\sqrt{2}, c = 10.$
 $\Delta' = (-3)^2 - 2 \cdot 3 = 3.$ $\Delta' = (-2\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 10 = -2 < 0.$
 $x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$ $\Delta' = (-2\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 10 = -2 < 0.$
 $x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$ Vậy phương trình vô nghiệm.
 Vậy $S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right\}.$

□

✦ **Bài 7.** Cho phương trình $mx^2 - 4x - 1 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình

- a) Có hai nghiệm phân biệt. 🔍 $-4 < m \neq 0$ b) Có nghiệm kép. 🔍 $m = -4$
 c) Vô nghiệm. 🔍 $m < -9$ d) Có đúng một nghiệm. 🔍 $m = 0$

🗨️ **Lời giải.**

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = (-2)^2 - m \cdot (-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -4. \end{cases}$
 b) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$
 c) Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -9.$
 d) Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

□

✦ **Bài 8.** Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số)

- a) $mx^2 - 6x + 2 = 0.$ b) $x^2 - 2(m+2)x + m^2 = 0.$

🗨️ **Lời giải.**

a) $mx^2 - 6x + 2 = 0.$

TH1. $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$, phương trình trở thành $-6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

TH2. $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

$\Delta' = (-3)^2 - m \cdot 2 = 9 - 2m.$

🕒 $9 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{2}$, phương trình vô nghiệm.

$$\textcircled{v} 9 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}, \text{ phương trình có nghiệm kép } x_0 = \frac{3}{m} = \frac{2}{3}.$$

$$\textcircled{v} 9 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}, \text{ phương trình có hai nghiệm phân biệt}$$

$$+ x_1 = \frac{3 + \sqrt{-2m + 9}}{m} \qquad + x_2 = \frac{3 - \sqrt{-2m + 9}}{m}.$$

Kết luận

$$\textcircled{v} m > \frac{9}{2}, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\textcircled{v} m = 0, \text{ phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{v} m = \frac{9}{2}, \text{ phương trình có nghiệm kép } x_0 = \frac{2}{3}.$$

$$\textcircled{v} m < \frac{9}{2} \text{ và } m \neq 0, \text{ phương trình có hai nghiệm phân biệt}$$

$$+ x_1 = \frac{3 + \sqrt{-2m + 9}}{m} \qquad + x_2 = \frac{3 - \sqrt{-2m + 9}}{m}.$$

b) $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 = 0.$

$$\Delta' = (-(m + 2))^2 - m^2 = 4m + 4.$$

$$\textcircled{v} 4m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -1, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\textcircled{v} 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1, \text{ phương trình có nghiệm kép } x_0 = \frac{-(-(m + 2))}{1} = m + 2 = 1.$$

$$\textcircled{v} 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -1, \text{ phương trình có hai nghiệm phân biệt}$$

$$- x_1 = \frac{-(-(m + 2)) - \sqrt{4m + 4}}{1} = (m + 2) - 2\sqrt{m + 1}$$

$$- x_2 = \frac{-(-(m + 2)) + \sqrt{4m + 4}}{1} = (m + 2) + 2\sqrt{m + 1}.$$

Kết luận

$$\textcircled{v} m < -1, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\textcircled{v} m = -1, \text{ phương trình có nghiệm kép } x_0 = 1.$$

$$\textcircled{v} m > -1, \text{ phương trình có hai nghiệm phân biệt}$$

$$+ x_1 = (m + 2) - 2\sqrt{m + 1} \qquad + x_2 = (m + 2) + 2\sqrt{m + 1}.$$

□

BÀI 13. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

 **Lời giải.**

Tất cả các phương trình trình đã cho đều có tích $ac < 0$ nên luôn có nghiệm.

a) $x^2 - 2x - 5 = 0.$

$x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = -5.$

b) $-5x^2 + 3x + 7 = 0.$

$x_1 + x_2 = \frac{3}{5}, x_1x_2 = -\frac{7}{5}.$

c) $5x^2 - 7x - 3 = 0.$

$x_1 + x_2 = \frac{7}{5}, x_1x_2 = -\frac{3}{5}.$

d) $\sqrt{2}x^2 - 10x - 2 = 0.$

$x_1 + x_2 = 5\sqrt{2}, x_1x_2 = -\sqrt{2}.$

□

❖ **Ví dụ 3.** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2.$

🔗 6

b) $B = x_1^2x_2 + x_1x_2^2.$

🔗 -2

c) $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$

🔗 -2

d) $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}.$

🔗 -6

 **Lời giải.**

Phương trình có tích $ac = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$ nên có nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1, x_2 \neq 0$. Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = -1$.

a) $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2 \cdot (-1) = 6.$

b) $B = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = (-1) \cdot 2 = -2.$

c) $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{2}{-1} = -2.$

d) $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{6}{-1} = -6.$

□

 **Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm**

Sử dụng ứng dụng của định lý Vi-ét.

❖ **Ví dụ 4.** Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau

a) $x^2 - 3x + 2 = 0.$

🔗 {1; 2}

b) $3x^2 + 7x - 10 = 0.$

🔗 $\left\{1; -\frac{10}{3}\right\}$

c) $3x^2 + 4x + 1 = 0.$

🔗 $\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$

d) $\sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0.$

🔗 $\left\{1; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right\}$

 **Lời giải.**

a) $x^2 - 3x + 2 = 0.$

Ta có $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = 2.$

b) $3x^2 + 7x - 10 = 0.$

Ta có $a + b + c = 3 + 7 + (-10) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -\frac{10}{3}.$

c) $3x^2 + 4x + 1 = 0$.

Ta có $a - b + c = 3 - 4 + 1 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$.

d) $\sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0$.

Ta có $a + b + c = \sqrt{3} + (-1) + 1 - \sqrt{3} = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{\sqrt{3} - 3}{3}$. □

🔗 **Ví dụ 5.** Sử dụng định lý Vi-ét tính nhẩm nghiệm của phương trình

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

🔗 $\{-2; -3\}$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

🔗 $\{2; 3\}$

💬 **Lời giải.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -3.$$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3.$$
□

🔗 **Ví dụ 6.** Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Chứng minh phương trình đã cho luôn một nghiệm không phụ thuộc vào m . Tìm nghiệm còn lại. 🔗 $\{1; m - 1\}$

💬 **Lời giải.**

Ta có $a + b + c = 1 + (-m) + m - 1 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = m - 1$. □

📁 Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích

Để tìm hai số x, y khi biết tổng $S = x + y$ và tích $P = xy$, ta làm như saua) Bước 1. Giải phương trình $X^2 - Sx + P = 0$ để tìm các nghiệm X_1, X_2 .b) Bước 2. Suy ra các số x, y cần tìm là $x = X_1, y = X_2$ hoặc $x = X_2, y = X_1$.

🔗 **Ví dụ 7.** Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

a) $u + v = 5$ và $uv = -14$.

🔗 -2 và 7

b) $u + v = 5$ và $uv = -24$.

🔗 -3 và 8

💬 **Lời giải.**

a) $u + v = 5$ và $uv = -14$.

 u và v là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u = 7 \\ v = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -2 \\ v = 7. \end{cases}$$

b) $u + v = 5$ và $uv = -24$.

 u và v là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u = 8 \\ v = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -3 \\ v = 8. \end{cases}$$
□

🔗 **Ví dụ 8.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 5 và -7 .

🔗 $x^2 + 2x - 35 = 0$

💬 **Lời giải.**

Ta có $5 + (-7) = -2$ và $5 \cdot (-7) = -35$ nên hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 + 2x - 35 = 0.$$

□

⇨ **Ví dụ 9.** Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ và $x_1^2 + x_2^2$. 🔗 $x^2 - 10x + 21 = 0$

🗨️ Lời giải.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 3$ và $x_1x_2 = 1$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 3.$$

$$\frac{x_1^2}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7.$$

Vậy phương trình thỏa đề bài là

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

□

📁 Dạng 4. Phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử

Xét tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì tam thức $ax^2 + bx + c$ được phân tích thành

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

⇨ **Ví dụ 10.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

- a) $x^2 + 2x - 3$. 🔗 $(x-1)(x+3)$ b) $3x^2 - 2x - 1$. 🔗 $3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$
 c) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$. 🔗 $(x-1)(x-\sqrt{2})$ d) $x^2 - mx + m - 1$. 🔗 $(x-1)(x-m+1)$

🗨️ Lời giải.

a) $x^2 + 2x - 3$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Vậy $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

b) $3x^2 - 2x - 1$.

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy $3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

c) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$.

$$x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = (x - 1)(x - \sqrt{2})$.

d) $x^2 - mx + m - 1$.

$$x^2 - mx + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m - 1. \end{cases}$$

Vậy $x^2 - mx + m - 1 = (x - 1)(x - m + 1)$.

□

📁 Dạng 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$). Khi đó

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

$$2. \text{ Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

$$3. \text{ Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

$$4. \text{ Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

❖ **Ví dụ 11.** Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình

- a) Có hai nghiệm trái dấu. $\color{red}{\text{☞}} m < 1$ b) Có hai nghiệm phân biệt. $\color{red}{\text{☞}}$ mọi m
 c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu. $\color{red}{\text{☞}} m > 1$ d) Có hai nghiệm dương phân biệt. $\color{red}{\text{☞}} m > 1$
 e) Có hai nghiệm âm phân biệt. $\color{red}{\text{☞}}$ không tồn tại m

🗨️ Lời giải.

$$\Delta = (-2(m+2))^2 - 4(m-1) = 4m^2 + 12m + 20 = (2m+3)^2 + 11.$$

$$S = \frac{-b}{a} = 2(m+2). \quad P = \frac{c}{a} = m-1.$$

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 + 11 > 0$, đúng với mọi m .

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{a}{c} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$.

d) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$.

e) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = \frac{-b}{a} < 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases} \text{ (Vô lý).}$$

Vậy không tồn tại m .

□

Dạng 6. Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước

Ta thực hiện theo các bước sau

- Bước 1.* Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$.
- Bước 2.* Từ hệ thức đã cho và hệ thức Vi-ét, tìm được điều kiện của tham số.

❖ **Ví dụ 12.** Cho phương trình $x^2 - 4x + m = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$. 🔗 $m = -3$

🗨️ Lời giải.

$$\Delta = (-4)^2 - 4m = 16 - 4m$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 16 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = m$.

Ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 4^2 - 2m = 10 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy $m = 3$. □

C-BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Không giải các phương trình, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

- | | | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| a) $x^2 - 5x - 7 = 0$. | 🔗 $S = 5, P = -7$ | b) $-x^2 - 3x + 12 = 0$. | 🔗 $S = -3, P = -12$ |
| c) $\sqrt{2}x^2 - 4x - 8 = 0$. | 🔗 $S = 2\sqrt{2}, P = -4\sqrt{2}$ | d) $6x^2 - 5x = 2$. | 🔗 $S = \frac{5}{6}, P = -\frac{1}{3}$ |

🗨️ Lời giải.

Tất cả các phương trình đã cho đều có tích $ac < 0$ nên luôn có nghiệm.

- | | |
|--|--|
| a) $x^2 - 5x - 7 = 0$. | b) $-x^2 - 3x + 12 = 0$. |
| $x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = -7$. | $x_1 + x_2 = -3, x_1x_2 = -12$. |
| c) $\sqrt{2}x^2 - 4x - 8 = 0$. | d) $6x^2 - 5x = 2 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 2 = 0$. |
| $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}, x_1x_2 = -4\sqrt{2}$. | $x_1 + x_2 = \frac{5}{6}, x_1x_2 = -\frac{1}{3}$. |

□

❖ **Bài 2.** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức

- | | | | |
|----------------------------------|------|--|-------------------|
| a) $A = 3(x_1 + x_2) + x_1x_2$. | 🔗 4 | b) $B = x_1^2 + x_2^2$. | 🔗 19 |
| c) $C = (x_1 - x_2)^2$. | 🔗 29 | d) $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$. | 🔗 $-\frac{19}{5}$ |

🗨️ Lời giải.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 3$ và $x_1x_2 = -5$.

- $A = 3(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 3 \cdot 3 + (-5) = 4$.

$$b) B = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2 \cdot (-5) = 19.$$

$$c) C = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 19 - 2 \cdot (-5) = 29.$$

$$d) D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{19}{-5} = -\frac{19}{5}.$$

□

✧ **Bài 3.** Tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau

$$a) x^2 - 5x - 6 = 0.$$

☞ $\{-1; -6\}$

$$b) 2x^2 + 7x + 5 = 0.$$

☞ $\{-1; 5\}$

$$c) x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - 2 + \sqrt{5} = 0.$$

☞ $\{-1; 2 - \sqrt{5}\}$

$$d) x^2 - 2x + 15 = 0.$$

☞ vô nghiệm

☞ **Lời giải.**

$$a) x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Ta có $a - b + c = 1 - (-5) + (-6) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -6$.

$$b) 2x^2 + 7x + 5 = 0.$$

Ta có $a - b + c = 2 - 7 + 5 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 5$.

$$c) x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - 2 + \sqrt{5} = 0.$$

Ta có $a - b + c = 1 - (\sqrt{5} - 1) - 2 + \sqrt{5} = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 2 - \sqrt{5}$.

$$d) x^2 - 2x + 15 = 0.$$

Ta có $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 15 = -56 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

□

✧ **Bài 4.** Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

$$a) u + v = 5 \text{ và } uv = -14.$$

☞ -2 và 7

$$b) u + v = -4 \text{ và } uv = -21.$$

☞ 3 và -7

☞ **Lời giải.**

$$a) u + v = 5 \text{ và } uv = -14.$$

Hai số u và v là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 7. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u = -2 \\ v = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 7 \\ v = -2. \end{cases}$$

$$b) u + v = -4 \text{ và } uv = -21.$$

Hai số u và v là nghiệm của phương trình

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u = -7 \\ v = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 3 \\ v = -7. \end{cases}$$

□

✧ **Bài 5.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\sqrt{3} - 1$ và $\sqrt{3} + 1$.

☞ $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

☞ **Lời giải.**

Ta có $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3}$ và $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} - 1) = 2$ nên hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0.$$

□

✧ **Bài 6.** Cho phương trình $x^2 - 5x - 2 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

$$\text{☞ } 2x^2 + 5x - 1 = 0$$

🗨 **Lời giải.**

Phương trình có tích $ac = -2 < 0$ nên có nghiệm.

Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 5$ và $x_1x_2 = -2$.

Ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$ và $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ nên phương trình cần tìm là

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 1 = 0.$$

□

✧ **Bài 7.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $x^2 + 3x - 4$. ☞ $(x-1)(x+4)$ b) $4x^2 + 5x + 1$. ☞ $4(x+1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$
 c) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$. ☞ $(x-1)(x+\sqrt{2})$ d) $x^2 - (m+1)x + m$. ☞ $(x-1)(x-m)$

🗨 **Lời giải.**

$$\text{a) } x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4).$$

$$\text{b) } 4x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 4x^2 + 5x + 1 = 4(x+1)\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

$$\text{c) } x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = (x-1)(x + \sqrt{2}).$$

$$\text{d) } x^2 - (m+1)x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 - (m+1)x + m = (x-1)(x-m).$$

□

✧ **Bài 8.** Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình

- a) Có hai nghiệm phân biệt. ☞ mọi m b) Có hai nghiệm phân biệt trái dấu. ☞ $m < 1$
 c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu. ☞ $m > 1$ d) Có hai nghiệm dương phân biệt. ☞ $m > 1$
 e) Có hai nghiệm âm phân biệt. ☞ không tồn tại m

🗨 **Lời giải.**

$$\Delta = [-2(m+2)]^2 - 4(m-1) = 4m^2 + 12m + 20 = (2m+3)^2 + 11.$$

$$S = 2(m+2), P = m-1.$$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 + 11 > 0$, đúng với mọi m .

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$

$$d) \text{ Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

e) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases} \text{ (Vô lý.)}$$

Vậy không tồn tại m .

□

🔗 **Bài 9.** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$. Tìm m để phương trình

a) Có nghiệm.

🔗 mọi m

b) Có một nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại.

🔗 $m = 2, x_2 = 0$

c) Có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

🔗 $m = 0$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

🗨 **Lời giải.**

a) $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-2) = m^2 - 3m + 3 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

b) Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_1 = 2(m-1)$ và $x_1 x_2 = m - 2$.

Phương trình có nghiệm $x_1 = 2$ ta có

$$\begin{cases} 2 + x_2 = 2(m-1) \\ 2x_2 = m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 2m = -4 \\ 2x_2 - m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ và nghiệm còn lại là 0.

$$c) x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 2(m-2) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = \frac{5}{2}$.

□

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 10.** Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình (nếu có). Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

a) $x^2 + 3x - 4 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

c) $2x^2 - x - 5 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

d) $x^2 - 5x - 1 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

 **Lời giải.**

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\Delta = 25, x_1 + x_2 = -3, x_1x_2 = 4.$$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Delta = 0, x_1 + x_2 = 6, x_1x_2 = 9.$$

c) $2x^2 - x - 5 = 0$

$$\Delta = 11, x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, x_1x_2 = -\frac{5}{2}.$$

d) $x^2 - 5x - 1 = 0$

$$\Delta = 29, x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = -1.$$

□

✦ **Bài 11.** Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

a) $x^2 - 3x - 5 = 0.$

$$S = 3, P = -5$$

b) $5x^2 + 7x - 12 = 0.$

$$S = -\frac{7}{5}, P = -\frac{12}{5}$$

c) $4x^2 - 7x - 2 = 0.$

$$S = \frac{7}{4}, P = -\frac{1}{2}$$

d) $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0.$

$$S = 7\sqrt{3}, P = -4\sqrt{3}$$

 **Lời giải.**

Tất cả các phương trình trình đã cho đều có tích $ac < 0$ nên luôn có nghiệm.

a) $x^2 - 3x - 5 = 0.$

$$x_1 + x_2 = 3, x_1x_2 = -5.$$

b) $5x^2 + 7x - 12 = 0.$

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{5}, x_1x_2 = -\frac{12}{5}.$$

c) $4x^2 - 7x - 2 = 0.$

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{4}, x_1x_2 = -\frac{1}{2}.$$

d) $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0.$

$$x_1 + x_2 = 7\sqrt{3}, x_1x_2 = -4\sqrt{3}.$$

□

✦ **Bài 12.** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 3 = 0$. Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = x_1^2 + x_2^2.$

$$S = 7$$

b) $B = x_1^2x_2 + x_1x_2^2.$

$$S = -3$$

c) $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$

$$S = -\frac{1}{3}$$

d) $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}.$

$$S = -\frac{7}{3}$$

 **Lời giải.**

Phương trình có tích $ac = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$ nên có nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1, x_2 \neq 0$. Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1x_2 = -3$.

a) $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1^2 - 2 \cdot (-3) = 7.$

b) $B = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = -3 \cdot 1 = -3.$

c) $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$

d) $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$

□

✦ **Bài 13.** Xét tổng $a + b + c$ hoặc $a - b + c$ rồi tính nhằm các nghiệm của phương trình sau

a) $x^2 + 3x - 4 = 0.$

$$S = \{1; -4\}$$

b) $2x^2 + 7x + 5 = 0.$

$$S = \{-1; -\frac{5}{2}\}$$

c) $6x^2 - 5x - 1 = 0.$

$$S = \{1; -\frac{1}{6}\}$$

d) $x^2 + \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2} = 0.$

$$S = \{1; -1 + \sqrt{2}\}$$

🗨️ Lời giải.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$.

$a + b + c = 1 + 3 + (-4) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -4$.

b) $2x^2 + 7x + 5 = 0$.

$a - b + c = 1 - 7 + 5 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{5}{2}$.

c) $6x^2 - 5x - 1 = 0$.

$a + b + c = 6 + (-5) + (-1) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{6}$.

d) $x^2 + \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2} = 0$.

$a - b + c = 1 - \sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2}) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

□

🔗 **Bài 14.** Sử dụng định lý Vi-ét tính nhằm nghiệm của phương trình

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

🔗 {2; 5}

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

🔗 {-2; -5}

🗨️ Lời giải.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5.$$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -5.$$

□

🔗 **Bài 15.** Cho phương trình $-x^2 + mx + m + 1 = 0$. Chứng minh phương trình đã cho luôn một nghiệm không phụ thuộc vào m . Tìm nghiệm còn lại.

🔗 {-1; -m - 1}

🗨️ Lời giải.

Ta có $a - b + c = -1 - m + m + 1 = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -m - 1$.

□

🔗 **Bài 16.** Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

a) $u + v = -6$ và $uv = -16$.

🔗 2 và -8

b) $u + v = 1$ và $uv = \frac{1}{4}$.

🔗 $\frac{1}{2}$

🗨️ Lời giải.

a) $u + v = -6$ và $uv = -16$.

u và v là nghiệm của phương trình

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} u = 2 \\ v = -8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -8 \\ v = 2. \end{cases}$

b) $u + v = 1$ và $uv = \frac{1}{4}$.

u và v là nghiệm của phương trình

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy $u = v = \frac{1}{2}$.



✦ **Bài 17.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\sqrt{2} - 1$ và $\sqrt{2} + 1$.

$$\text{☞ } x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

☞ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$ và $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$ nên hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.$$



✦ **Bài 18.** Cho phương trình $x^2 - 4x + 2 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

$$\text{☞ } 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

☞ **Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1x_2 = 2$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ và } \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình thỏa đề bài là

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$



✦ **Bài 19.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $x^2 - 3x - 4$.

$$\text{☞ } (x+1)(x-4)$$

b) $4x^2 - 3x - 1$.

$$\text{☞ } 4(x-1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

c) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$.

$$\text{☞ } (x-1)(x-\sqrt{3})$$

d) $x^2 - mx - m - 1$.

$$\text{☞ } (x+1)(x-m-1)$$

☞ **Lời giải.**

a) $x^2 - 3x - 4$.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4).$$

b) $4x^2 - 3x - 1$.

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 4x^2 - 3x - 1 = 4(x-1)\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

c) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$.

$$x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = (x-1)(x-\sqrt{3}).$$

d) $x^2 - mx - m - 1$.

$$x^2 - mx - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = m + 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 - mx - m - 1 = (x+1)(x-m-1).$$



✦ **Bài 20.** Cho phương trình $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình

a) Có hai nghiệm trái dấu.

$$\text{☞ } m > -1$$

b) Có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{☞ } \text{mọi } m$$

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

$$\text{☞ } m < -1$$

d) Có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\text{☞ } \text{không tồn tại}$$

e) Có hai nghiệm âm phân biệt.

$$\text{☞ } m < -1$$

Lời giải.

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(-m - 1) = 4m^2 + 4m + 4 = (2m + 1)^2 + 3.$$

$$S = \frac{-b}{a} = 2m. \quad P = \frac{c}{a} = -m - 1.$$

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -m - 1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (2m + 1)^2 + 3 > 0$, đúng với mọi m .

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 1)^2 + 3 > 0 \\ -m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$.

d) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 1)^2 + 3 > 0 \\ 2m > 0 \\ -m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \end{cases} \text{ (Vô lý)}$$

Vậy không tồn tại m .

e) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 1)^2 + 3 > 0 \\ 2m < 0 \\ -m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

□

✦ **Bài 21.** Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 1$. $m = \frac{3}{2}$

Lời giải.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m - 1) = 4 - 4m + 4 = 8 - 4m.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 8 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = m - 1$.

Ta có

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow (m - 1)2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy $m = \frac{3}{2}$.

□

BÀI 14. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Phương pháp giải:

- ☑ *Bước 1.* Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$);
- ☑ *Bước 2.* Giải phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$ và đối chiếu với điều kiện của t .
- ☑ *Bước 3.* Với giá trị t thỏa mãn yêu cầu, trả về biến x và tìm nghiệm của phương trình.
- ☑ *Bước 4.* Kết luận nghiệm của phương trình trùng phương.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Phương trình chứa ẩn ở mẫu là phương trình có dạng

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \dots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = 0.$$

Phương pháp giải:

- ☑ *Bước 1.* Tìm điều kiện xác định của phương trình;
- ☑ *Bước 2.* Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu thức;
- ☑ *Bước 3.* Giải phương trình bậc hai vừa nhận được;
- ☑ *Bước 4.* Kiểm tra điều kiện và kết luận nghiệm của phương trình.

3. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = 0.$$

Cách giải:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

! Để giải một số phương trình trước hết cần đặt ẩn phụ, thu gọn về dạng phương trình bậc hai hoặc đưa về dạng phương trình tích.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải phương trình trùng phương

🔗 **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

- a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$; $\text{q. } S = \{\pm 1\}$ b) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$; $\text{q. } S = \left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$
 c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$; $\text{q. } S = \emptyset$ d) $(x - 1)^4 - 4(x - 1)^2 + 3 = 0$. $\text{q. } S = \{0; 2; 1 \pm \sqrt{3}\}$

🗨️ **Lời giải.**

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} t^2 - 2t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1 \text{ (thỏa điều kiện)}. \end{aligned}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $S = \{\pm 1\}$.

b) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$4t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = \frac{1}{4} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$.

Vậy $S = \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$.

c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$3t^2 + 10t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \text{ (không thỏa đk)} \\ t = -3 \text{ (không thỏa đk)}. \end{cases}$$

Vậy $S = \emptyset$.

d) $(x - 1)^4 - 4(x - 1)^2 + 3 = 0$.

Đặt $t = (x - 1)^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0. \end{cases}$$

• Với $t = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{3} \\ x - 1 = -\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 2; 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$.

□

🔗 **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 3x^2 = x^2 - 1$;

☞ $S = \emptyset$

b) $x^4 - 3x^2 = 4$;

☞ $S = \{\pm 2\}$

c) $3x^4 - 5x^2 = 5x^2 - 7$;

☞ $S = \left\{ \pm 1; \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \right\}$

d) $(x + 1)^4 = 4(x + 1)^2 - 3$. ☞ $S = \{-2; 0; -1 \pm \sqrt{3}\}$

🗨️ **Lời giải.**

a) $x^4 + 3x^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ (không thỏa đk).}$$

Vậy $S = \emptyset$.

b) $x^4 - 3x^2 = 4$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 - 3t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = 4 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy $S = \{\pm 2\}$.

c) $3x^4 - 5x^2 = 5x^2 - 7 \Leftrightarrow 3x^4 - 10x^2 + 7 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$3t^2 - 10t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = \frac{7}{3} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

• Với $t = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Vậy $S = \left\{ \pm 1; \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \right\}$.

d) $(x + 1)^4 = 4(x + 1)^2 - 3$.

Đặt $t = (x + 1)^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 \\ x + 1 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

• Với $t = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \sqrt{3} \\ x + 1 = -\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy $S = \{-2; 0; -1 \pm \sqrt{3}\}$.

□

⇨ **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

a) $0,1x^4 + 0,2x^2 + 0,1 = 0$;

☞ $S = \emptyset$

b) $x^4 - 6,3x^2 - 7,3 = 0$;

☞ $S = \{\pm\sqrt{7,3}\}$

c) $3x^4 - 4,1x^2 + 1,1 = 0$;

☞ $S = \left\{ \pm 1; \pm \sqrt{\frac{11}{30}} \right\}$

d) $x^2 + \frac{7}{x^2} = 8$.

☞ $S = \{\pm 1; \pm\sqrt{7}\}$

☞ **Lời giải.**

a) $0,1x^4 + 0,2x^2 + 0,1 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$0,1t^2 + 0,2t + 0,1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ (không thỏa đk).}$$

Vậy $S = \emptyset$.

b) $x^4 - 6,3x^2 - 7,3 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 - 6,3t - 7,3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = 7,3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = 7,3 \Leftrightarrow x^2 = 7,3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7,3}$.

Vậy $S = \{\pm\sqrt{7,3}\}$.

c) $3x^4 - 4,1x^2 + 1,1 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$3t^2 - 4,1t + 1,1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = \frac{11}{30} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

• Với $t = \frac{11}{30} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11}{30} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{11}{30}}$.

Vậy $S = \left\{ \pm 1; \pm\sqrt{\frac{11}{30}} \right\}$.

d) $x^2 + \frac{7}{x^2} = 8$.

Đặt $t = x^2$ ($t > 0$). Phương trình trở thành

$$t + \frac{7}{t} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ t^2 - 8t + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = 7 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 7 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

• Với $t = 7 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Vậy $S = \{\pm 1; \pm\sqrt{7}\}$.

□

Dạng 2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

◀ Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^2 - 2x}{x + 1} = \frac{2x}{x + 1}$; $S = \{0; 4\}$

b) $\frac{x + 3}{x - 2} + 1 = \frac{14}{x - 1}$;

$S = \left\{ 3; \frac{9}{2} \right\}$

c) $\frac{x}{x + 1} = \frac{-x^2 + 3x - 1}{(x + 1)(x + 3)}$.
 $S = \emptyset$

🗨️ Lời giải.

a) $\frac{x^2 - 2x}{x + 1} = \frac{2x}{x + 1}$ (1).

• Điều kiện $x \neq -1$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$x^2 - 2x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 4 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Vậy $S = \{0; 4\}$.

$$b) \frac{x+3}{x-2} + 1 = \frac{14}{x-1} \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq 1, x \neq 2$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{(x+3)(x-1) + (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{14(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) + (x-1)(x-2) = 14(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (thỏa đk)} \\ x = \frac{9}{2} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Vậy $S = \left\{3; \frac{9}{2}\right\}$.

$$c) \frac{x}{x+1} = \frac{-x^2+3x-1}{(x+1)(x+3)} \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq -1, x \neq -3$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{-x^2+3x-1}{(x+1)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) = -x^2+3x-1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+1=0 \text{ (vô nghiệm).}$$

• Vậy $S = \emptyset$.

□

◀ Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+1} = 1;$$

$$\text{☞ } S = \{1; 5\}$$

$$b) \frac{x}{2x-1} + \frac{1}{2-x} = 3;$$

$$\text{☞ } S = \left\{\frac{11 \pm \sqrt{21}}{10}\right\}$$

$$c) \frac{x^2-x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3};$$

$$\text{☞ } S = \{1\}$$

$$d) \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)} \text{ ☞ } S = \{-3; 1\}$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+1} = 1 \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq -1, x \neq 2$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x+1+4(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 5 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Vậy $S = \{1; 5\}$.

$$b) \frac{x}{2x-1} + \frac{1}{2-x} = 3 \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq \frac{1}{2}, x \neq 2$.

• Phương trình tương đương với

$$\frac{x(2-x) + (2x-1)}{(2-x)(2x-1)} = \frac{3(2-x)(2x-1)}{(2-x)(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11 - \sqrt{21}}{10} \text{ (thỏa đk)} \\ x = \frac{11 + \sqrt{21}}{10} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Vậy $S = \left\{ \frac{11 \pm \sqrt{21}}{10} \right\}$.

c) $\frac{x}{2x-1} + \frac{1}{2-x} = 3 \quad (1).$

- Điều kiện $x \neq 2, x \neq 3$.
- Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^2 - x - 1}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa đk)}.$$
- Vậy $S = \{1\}$.

d) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)} \quad (1).$

- Điều kiện $x \neq -2, x \neq -1$.
- Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x(x+2) + (x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = -3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$
- Vậy $S = \{-3; 1\}$.

□

❖ **Ví dụ 6.** Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^3 - 1} = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x + 1}; \quad \text{☞ } S = \{-1; 2\}$ b) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^4 - 1} = \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}. \quad \text{☞ } S = \{-3\}$

🗨️ **Lời giải.**

a) $\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^3 - 1} = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x + 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x + 1} \quad (1).$$

- Điều kiện $x \neq 1$.
- Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(2x^2 - 3x)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (thỏa đk)} \\ x = -1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 1 \text{ (không thỏa đk)}. \end{cases}$$
- Vậy $S = \{-1; 2\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2 + 3x - 4}{x^4 - 1} &= \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} &= \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \quad (1). \end{aligned}$$

• Điều kiện $x \neq \pm 1$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (không thỏa đk)} \\ x = -3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

• Vậy $S = \{-3\}$.

□

Dạng 3. Giải phương trình tích

◀ Ví dụ 7. Giải các phương trình sau:

a) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$; $\color{red}{\text{q}} S = \{1; 2; 3\}$ b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; $\color{red}{\text{q}} S = \{1; 2; 3\}$

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$; $\color{red}{\text{q}} S = \{1\}$ d) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$. $\color{red}{\text{q}} S = \{-3; \pm\sqrt{2}\}$

 Lời giải.

a) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3. \end{cases}$$

Vậy $S = \{1; 2; 3\}$.

b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6 = 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3. \end{cases}$$

Vậy $S = \{1; 2; 3\}$.

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $S = \{1\}$.

d)

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) - 2(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy $S = \{-3; \pm\sqrt{2}\}$

□

◀ Ví dụ 8. Giải các phương trình sau:

- a) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x) = 0$; $\text{q} S = \{0; 1; 4\}$ b) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = 0$; $\text{q} S = \{\pm 1\}$
 c) $(x^2 + 5x)^2 = 6(x^2 + 5x)$; $\text{q} S = \{-6; -5; 0; 1\}$ d) $(2x^2 + 3)^2 - 10x^3 - 15x = 0$; $\text{q} S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$
 e) $(x + 1)^3 - x + 1 = (x - 1)(x - 2)$. $\text{q} S = \{0\}$

🗨️ Lời giải.

a) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ x(x - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 4. \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 1; 4\}$.

b) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - (2x)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 0 \\ (x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Vậy $S = \{\pm 1\}$.

c) $(x^2 + 5x)^2 = 6(x^2 + 5x)$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x)^2 - 6(x^2 + 5x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5x)(x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 5) = 0 \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \\ x = 1 \\ x = -6. \end{cases}$$

Vậy $S = \{-6; -5; 0; 1\}$.

d) $(2x^2 + 3)^2 - 10x^3 - 15x = 0$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 3)^2 - 5x(2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + 3)(2x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

e) $(x + 1)^3 - x + 1 = (x - 1)(x - 2)$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2x + 5 = 0 \text{ (vô nghiệm)}. \end{cases}$$

Vậy $S = \{0\}$.

□

📁 Dạng 4. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

- 🕒 **Bước 1.** Tìm điều kiện xác định của phương trình (nếu cần);
- 🕒 **Bước 2.** Đặt ẩn phụ, điều kiện ẩn phụ và giải phương trình theo ẩn phụ thu được;
- 🕒 **Bước 3.** Tìm nghiệm ban đầu, đối chiếu với điều kiện (nếu có) và kết luận.

⚠️ Trong trường hợp tìm điều kiện của ẩn phụ phức tạp thì có thể chưa tìm ngay điều kiện nhưng sau khi tìm được ẩn chính thì cần thử lại.

◊ Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

- a) $(x - 1)^2 - 3(x - 1) + 2 = 0$; $\mathfrak{A} S = \{2; 3\}$ b) $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5(x^2 - 2x + 3) + 6 = 0$;
 $\mathfrak{A} S = \{0; 1; 2\}$
- c) $(2x^2 + x - 2)^2 + 10x^2 + 5x - 16 = 0$; d) $(x - 1)^4 - 4(x - 1)^2 + 3 = 0$; $\mathfrak{A} S = \{0; 2; 1 \pm \sqrt{3}\}$
 $\mathfrak{A} S = \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$
- e) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 2$; f) $\frac{x^2}{(x + 1)^2} - \frac{3x}{x + 1} + 2 = 0$; $\mathfrak{A} S = \{-2\}$
 $\mathfrak{A} S = \{-3; -2; 0; 1\}$
- g) $\frac{3x}{x + 1} + 3 \cdot \frac{x + 1}{x} + 10 = 0$. $\mathfrak{A} S = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right\}$

🗨️ Lời giải.

a) $(x - 1)^2 - 3(x - 1) + 2 = 0$ (1).

Đặt $t = x - 1$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$

☺ Với $t = 1$ thì $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

☺ Với $t = 2$ thì $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy $S = \{2; 3\}$.

b) $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5(x^2 - 2x + 3) + 6 = 0$ (1).

Đặt $t = x^2 - 2x + 3$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3. \end{cases}$

☺ Với $t = 2$ thì $x^2 - 2x + 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

☺ Với $t = 3$ thì $x^2 - 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy $S = \{0; 1; 2\}$.

c) $(2x^2 + x - 2)^2 + 10x^2 + 5x - 16 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + x - 2)^2 + 5(2x^2 + x - 2) - 6 = 0$ (1).

Đặt $t = 2x^2 + x - 2$. Phương trình (1) trở thành $t^2 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -6. \end{cases}$

☺ Với $t = 1$ thì $2x^2 + x - 2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$

☺ Với $t = -6$ thì $2x^2 + x - 2 = -6 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 4 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $S = \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$.

d) $(x - 1)^4 - 4(x - 1)^2 + 3 = 0$ (1).

Đặt $t = (x - 1)^2, (t \geq 0)$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$

☺ Với $t = 1$ thì $(x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0. \end{cases}$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 3 \text{ thì } (x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{3} \\ x-1 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 2; 1 \pm \sqrt{3}\}.$$

$$\text{e) } (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 1)[(x^2 + 2x - 1) - 1] = 2 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x - 1. \text{ Phương trình (1) trở thành } t(t-1) = 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = -1 \text{ thì } x^2 + 2x - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 2 \text{ thì } x^2 + 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-3; -2; 0; 1\}.$$

$$\text{f) } \frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{3x}{x+1} + 2 = 0 \quad (1). \text{ Điều kiện } x \neq -1.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{x+1}. \text{ Phương trình (1) trở thành } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 1 \text{ thì } \frac{x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = x+1 \Leftrightarrow 0x = 1 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 2 \text{ thì } \frac{x}{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 2(x+1) \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thỏa đk).}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2\}.$$

$$\text{g) } \frac{3x}{x+1} + 3 \cdot \frac{x+1}{x} + 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} + 3 \cdot \frac{1}{\frac{x}{x+1}} + 10 = 0 \quad (1). \text{ Điều kiện } x \neq -1, x \neq 0.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{x+1}. \text{ Phương trình (1) trở thành } 3t + \frac{1}{t} + 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t = -3. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = -\frac{1}{3} \text{ thì } \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = -(x+1) \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ (thỏa đk).}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = -3 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = -3 \Leftrightarrow x = -3(x+1) \Leftrightarrow 4x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \text{ (thỏa đk).}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right\}.$$

□

🔗 **Ví dụ 10.** Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } x + 2\sqrt{x} = \sqrt{x} + 6;$$

$$\text{🔗 } S = \{4\}$$

$$\text{b) } x - \sqrt{x-1} - 7 = 0.$$

$$\text{🔗 } S = \{10\}$$

💬 **Lời giải.**

$$\text{a) } x + 2\sqrt{x} = \sqrt{x} + 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ x = (6 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2 - 13x + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ [x = 4 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 9 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{4\}.$$

$$b) \quad x - \sqrt{x-1} - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 7 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ (x-7)^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 15x + 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ \begin{cases} x = 5 \text{ (không thỏa đk)} \\ x = 10 \text{ (thỏa đk)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{10\}.$$

□

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

🔗 **Bài 1.** Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} a) \quad x^4 - x^2 - 2 = 0; & \text{☞ } S = \{\pm\sqrt{2}\} \\ b) \quad x^4 - 3x^2 + 2 = 0; & \text{☞ } S = \{\pm 1; \pm\sqrt{2}\} \\ c) \quad 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0; & \text{☞ } S = \left\{\pm\sqrt{2}; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \\ d) \quad (x+2)^4 - 6(x+2)^2 + 5 = 0. & \text{☞ } S = \{-1; -3; -2 \pm \sqrt{5}\} \end{array}$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \quad x^4 - x^2 - 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = 2 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ thì } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm\sqrt{2}\}.$$

$$b) \quad x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 2 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\text{☺ Với } t = 1 \text{ thì } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{☺ Với } t = 2 \text{ thì } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm 1; \pm\sqrt{2}\}.$$

$$c) \quad 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (thỏa đk)} \\ t = \frac{1}{2} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\text{☺ Với } t = 2 \text{ thì } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{☺ Với } t = \frac{1}{2} \text{ thì } x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\pm\sqrt{2}; \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

$$d) \quad (x+2)^4 - 6(x+2)^2 + 5 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = (x+2)^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 5 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\text{☺ Với } t = 1 \text{ thì } (x+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ x+2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 5 \text{ thì } (x + 2)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \sqrt{5} \\ x + 2 = -\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{5} \\ x = -2 + \sqrt{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \{-1; -3; -2 \pm \sqrt{5}\}.$$

□

❖ **Bài 2.** Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3x^4 - x^2 = x^2 + 1; & \text{a. } S = \{\pm 1\} \quad \text{b) } x^4 + x^2 = 2; \quad \text{b. } S = \{\pm 1\} \\ \text{c) } x^4 - 4x^2 = x^2 - 6; & \text{c. } S = \{\pm 1; \pm\sqrt{6}\} \quad \text{d) } (x + 2)^4 = 3(x + 2)^2 - 2. \quad \text{d. } S = \{\pm 1; \pm\sqrt{2}\} \end{array}$$

🗨️ Lời giải.

$$\text{a) } 3x^4 - x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = -\frac{1}{3} \text{ (không thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 1 \text{ thì } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm 1\}.$$

$$\text{b) } x^4 + x^2 = 2.$$

$$\text{Đặt } t = x^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = -2 \text{ (không thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 1 \text{ thì } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm 1\}.$$

$$\text{c) } x^4 - 4x^2 = x^2 - 6.$$

$$\text{Đặt } t = x^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 6 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 1 \text{ thì } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 6 \text{ thì } x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm 1; \pm\sqrt{6}\}.$$

$$\text{d) } (x + 2)^4 = 3(x + 2)^2 - 2.$$

$$\text{Đặt } t = (x + 2)^2, t \geq 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 2 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 1 \text{ thì } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 2 \text{ thì } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm 1; \pm\sqrt{2}\}.$$

□

❖ **Bài 3.** Giải các phương trình sau:

- a) $0,1x^4 - 0,8x^2 + 0,7 = 0$; $S = \{\pm 1; \pm\sqrt{7}\}$ b) $3x^4 + 4,4x^2 + 1,4 = 0$; $S = \emptyset$
 c) $x^4 + 3,3x^2 - 4,3 = 0$; $S = \{\pm 1\}$ d) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$. $S = \{\pm 1\}$

🗨️ Lời giải.

a) $0,1x^4 - 0,8x^2 + 0,7 = 0$.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành $0,1t^2 - 0,8t + 0,7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 7 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$

☑ Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

☑ Với $t = 7$ thì $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Vậy $S = \{\pm 1; \pm\sqrt{7}\}$.

b) $3x^4 + 4,4x^2 + 1,4 = 0$.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành $3t^2 + 4,4t + 1,4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = -\frac{1,4}{3} \text{ (không thỏa đk)} \end{cases}$

Vậy $S = \emptyset$.

c) $x^4 + 3,3x^2 - 4,3 = 0$.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 + 3,3t - 4,3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = -4,3 \text{ (không thỏa đk)} \end{cases}$

☑ Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $S = \{\pm 1\}$.

d) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$. Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa đk).

☑ Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (thỏa đk).

Vậy $S = \{\pm 1\}$. □

🔗 **Bài 4.** Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^2 + 4x}{2x + 1} = \frac{2x}{2x + 1}$; $S = \{-2; 0\}$ b) $\frac{x + 1}{x - 2} + 2 = \frac{3}{x + 1}$; $S = \{1; \frac{5}{4}\}$ c) $\frac{x}{x - 1} = \frac{2x^2 + 3x - 4}{(x - 1)(x + 3)}$. $S = \{\pm 2\}$

🗨️ Lời giải.

a) $\frac{x^2 + 4x}{2x + 1} = \frac{2x}{2x + 1}$ (1). Điều kiện $x \neq -\frac{1}{2}$.

Phương trình (1) tương đương với

$x^2 + 4x = 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (thỏa đk)} \\ x = -2 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$

Vậy $S = \{-2; 0\}$.

b) $\frac{x+1}{x-2} + 2 = \frac{3}{x+1}$ (1). Điều kiện $x \neq -1, x \neq 2$.

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{2x(2-x) + (2x-1)}{(2x-1)(2-x)} = \frac{3(2x-1)(2-x)}{(2x-1)(2-x)} \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = \frac{5}{4} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{1; \frac{5}{4}\right\}$.

c) $\frac{x}{x-1} = \frac{2x^2 + 3x - 4}{(x-1)(x+3)}$ (1). Điều kiện $x \neq 1, x \neq -3$.

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2x^2 + 3x - 4}{(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ (thỏa đk)}.$$

Vậy $S = \{\pm 2\}$.

□

◆ **Bài 5.** Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+3} + \frac{3}{x+1} = 1;$ $S = \{\pm\sqrt{7}\}$ b) $\frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2-x} = 3;$ $S = \left\{1; \frac{5}{4}\right\}$
 c) $\frac{x^2 - x - 1}{(x+2)(x-5)} = \frac{1}{x-5};$ $S = \{-1; 3\}$ d) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x+4}{(x-1)(x-2)}.$
 $S = \left\{\frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}\right\}$

🗨 **Lời giải.**

a) $\frac{1}{x+3} + \frac{3}{x+1} = 1$ (1). Điều kiện $x \neq -3, x \neq -1$.

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{(x+1) + 3(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7} \text{ (thỏa đk)}.$$

Vậy $S = \{\pm\sqrt{7}\}$.

b) $\frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2-x} = 3$ (1). Điều kiện $x \neq \frac{1}{2}, x \neq 2$.

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{2x(2-x) + (2x-1)}{(2x-1)(2-x)} = \frac{3(2x-1)(2-x)}{(2x-1)(2-x)} \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = \frac{5}{4} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{1; \frac{5}{4}\right\}$.

c) $\frac{x^2 - x - 1}{(x+2)(x-5)} = \frac{1}{x-5}$ (1). Điều kiện $x \neq -2, x \neq 5$.

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^2 - x - 1}{(x+2)(x-5)} = \frac{x+2}{(x+2)(x-5)} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

Vậy $S = \{-1; 3\}$.

$$d) \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3x+4}{(x-1)(x-2)} \quad (1). \text{ Điều kiện } x \neq 1, x \neq 2.$$

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{(x+1)(x-2) + (x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{3x+4}{(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \text{ (thỏa đk)} \\ x = \frac{3 + \sqrt{37}}{2} \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2} \right\}.$$

□

✦ Bài 6. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 1} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}; \quad \text{☞ } S = \{-1\} \quad b) \frac{x^2 + x - 2}{x^4 - 1} = \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}; \quad \text{☞ } S = \emptyset$$

☞ Lời giải.

$$a) \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 1} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} \quad (1). \text{ Điều kiện } x \neq 1.$$

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x^2 + x)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (không thỏa đk)} \\ x = -1 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}.$$

$$b) \frac{x^2 + x - 2}{x^4 - 1} = \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2 + 1)} \quad (1). \text{ Điều kiện } x \neq \pm 1.$$

Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ (không thỏa đk)}.$$

$$\text{Vậy } S = \emptyset.$$

□

✦ Bài 7. Giải các phương trình sau:

$$a) x(x-3)(x-5) = 0; \quad \text{☞ } S = \{0; 3; 5\} \quad b) x^3 - 8x^2 + 15x = 0; \quad \text{☞ } S = \{0; 3; 5\}$$

$$c) x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0; \quad \text{☞ } S = \{2\} \quad d) x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0. \quad \text{☞ } S = \left\{ 1; \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$$

☞ Lời giải.

$$a) x(x-3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 3; 5\}.$$

$$b) x^3 - 8x^2 + 15x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 8x + 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 5. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 3; 5\}.$$

$$c) x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Vậy } S = \{2\}.$$

$$d) x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}.$$

□

◇◇ **Bài 8.** Giải các phương trình sau:

$$a) (x^2 - x)(x^2 - 3x) = 0; \quad \text{☞ } S = \{0; 1; 3\} \quad b) (x^2 - 2x)^2 - (x + 2)^2 = 0; \quad \text{☞ } S = \left\{\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$c) (x^2 - 2x)^2 = 3(x^2 - 2x); \quad \text{☞ } S = \{-1; 0; 2; 3\} \quad d) (x^2 + 1)^2 - 5x^3 - 5x = 0; \quad \text{☞ } S = \left\{\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$$

$$e) (x + 1)^3 - x + 1 = (x - 1)(2x + 1). \quad \text{☞ } S = \{-1\}$$

💬 **Lời giải.**

$$a) (x^2 - x)(x^2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 1) = 0 \\ x(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 1; 3\}.$$

$$b) (x^2 - 2x)^2 - (x + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 - 2x) - (x + 2)] [(x^2 - 2x) + (x + 2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 2)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}.$$

$$c) (x^2 - 2x)^2 = 3(x^2 - 2x) \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1; 0; 2; 3\}.$$

$$d) (x^2 + 1)^2 - 5x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 5x(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } & (x+1)^3 - x + 1 = (x-1)(2x+1) \\
 & \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x-1) - (x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x-1)(2x+2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 - 2(x-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \\
 & \text{Vậy } S = \{-1\}.
 \end{aligned}$$

□

✦ **Bài 9.** Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & (3x+1)^2 - 3(3x+1) + 2 = 0; \quad \text{☞ } S = \left\{0; \frac{1}{3}\right\} & \text{b) } & (x^2+x)^2 + 5(x^2+x) + 6 = 0; \quad \text{☞ } S = \emptyset \\
 \text{c) } & (x^2+x)^2 + 2x^2 + 2x - 3 = 0; \text{☞ } S = \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\} & \text{d) } & (x+4)^4 - 7(x+4)^2 + 6 = 0; \\
 & & & \text{☞ } S = \{-5; -3; -4 \pm \sqrt{6}\} \\
 \text{e) } & (x^2+2x+1)(x^2+2x+2) = 2; \text{☞ } S = \{-2; 0\} & \text{f) } & \frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{3x}{x+1} + 2 = 0; \quad \text{☞ } S = \{-2\} \\
 \text{g) } & \frac{2x}{x+1} + \frac{x+1}{2x} - 2 = 0; \quad \text{☞ } S = \{1\}
 \end{aligned}$$

🗨️ Lời giải.

$$\text{a) } (3x+1)^2 - 3(3x+1) + 2 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = 3x+1. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$$

$$\text{☑ Với } t = 1 \text{ thì } 3x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{☑ Với } t = 2 \text{ thì } 3x+1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}.$$

$$\text{b) } (x^2+x)^2 + 5(x^2+x) + 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x^2+x. \text{ Phương trình trở thành } t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3. \end{cases}$$

$$\text{☑ Với } t = -2 \text{ thì } x^2+x = -2 \Leftrightarrow x^2+x+2 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{☑ Với } t = -3 \text{ thì } x^2+x = -3 \Leftrightarrow x^2+x+3 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{Vậy } S = \emptyset.$$

$$\text{c) } (x^2+x)^2 + 2x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2+x)^2 + 2(x^2+x) - 3 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x^2+x. \text{ Phương trình trở thành } t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3. \end{cases}$$

$$\text{☑ Với } t = 1 \text{ thì } x^2+x = 1 \Leftrightarrow x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{☑ Với } t = -3 \text{ thì } x^2+x+3 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

d) $(x + 4)^4 - 7(x + 4)^2 + 6 = 0$ (1).

Đặt $t = (x + 4)^2$, $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 6 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$

☉ Với $t = 1$ thì $(x + 4)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 1 \\ x + 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -5. \end{cases}$

☉ Với $t = 6$ thì $(x + 4)^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = \sqrt{6} \\ x + 4 = -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + \sqrt{6} \\ x = -4 - \sqrt{6}. \end{cases}$

Vậy $S = \{-5; -3; -4 \pm \sqrt{6}\}$.

e) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 2) = 2$.

Đặt $t = x^2 + 2x + 1$. Phương trình trở thành $t(t + 1) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2. \end{cases}$

☉ Với $t = 1$ thì $x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

☉ Với $t = -2$ thì $x^2 + 2x + 1 = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $S = \{-2; 0\}$.

f) $\frac{x^2}{(x + 1)^2} - \frac{3x}{x + 1} + 2 = 0$ (1). Điều kiện $x \neq -1$.

Đặt $t = \frac{x}{x + 1}$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$

☉ Với $t = 1$ thì $\frac{x}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow x = x + 1 \Leftrightarrow 0x = 1$ (vô nghiệm).

☉ Với $t = 2$ thì $\frac{x}{x + 1} = 2 \Leftrightarrow x = 2(x + 1) \Leftrightarrow x = -2$ (thỏa đk).

Vậy $S = \{-2\}$.

g) $\frac{2x}{x + 1} + \frac{x + 1}{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x + 1} + \frac{1}{\frac{2x}{x + 1}} - 2 = 0$ (1). Điều kiện $x \neq -1, x \neq 0$.

Đặt $t = \frac{2x}{x + 1}$. Phương trình (1) tương đương với $t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ thì $\frac{2x}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa đk).

Vậy $S = \{1\}$.

□

◇◇ **Bài 10.** Giải các phương trình sau:

a) $x - 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} - 3$;

☞ $S = \{1; 9\}$ b) $x - 2\sqrt{x - 2} - 2 = 0$.

☞ $S = \{2; 6\}$

💬 **Lời giải.**

$$a) \quad x - 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} - 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 16x = (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 9 \text{ (thỏa đk)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{1; 9\}.$$

$$b) \quad x - 2\sqrt{x-2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (x - 2)^2 = 4(x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 2 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 6 \text{ (thỏa đk)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{2; 6\}.$$

□

D - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◇ Bài 11. Giải các phương trình sau:

$$a) \quad x^4 + 2x^2 + 1 = 0;$$

$$S = \emptyset$$

$$b) \quad 2x^4 - 6x^2 - 8 = 0;$$

$$S = \{\pm 2\}$$

$$c) \quad 3x^4 - 10x^2 + 7 = 0;$$

$$S = \left\{ \pm 1; \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \right\}$$

$$d) \quad (x + 1)^4 - 4(x + 1)^2 + 3 = 0.$$

$$S = \{0; -2; -1 \pm \sqrt{3}\}$$

🗨️ Lời giải.

$$a) \quad x^4 + 2x^2 + 1 = 0.$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ (không thỏa đk)}.$$

$$\text{Vậy } S = \emptyset.$$

$$b) \quad 2x^4 - 6x^2 - 8 = 0.$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$2t^2 - 6t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = 4 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Vậy } S = \{\pm 2\}.$$

$$c) \quad 3x^4 - 10x^2 + 7 = 0.$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$3t^2 - 10t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = \frac{7}{3} \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\bullet \text{ Với } t = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \pm 1; \pm \sqrt{\frac{7}{3}} \right\}.$$

$$d) \quad (x + 1)^4 - 4(x + 1)^2 + 3 = 0.$$

Đặt $t = (x + 1)^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 3 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}.$$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 \\ x + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$
- Với $t = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \sqrt{3} \\ x + 1 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} - 1 \\ x = -\sqrt{3} - 1 \end{cases}.$

$$\text{Vậy } S = \{0; -2; \sqrt{3} - 1; -\sqrt{3} - 1\}.$$

□

◇ **Bài 12.** Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 1 = 2x^2$; $\color{red}{\heartsuit} S = \{\pm 1\}$ b) $x^4 - 2x^2 = 3$; $\color{red}{\heartsuit} S = \{\pm\sqrt{3}\}$
 c) $2x^4 - 3x^2 = 4x^2 - 5$; $\color{red}{\heartsuit} S = \left\{\pm 1; \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}$ d) $(x - 1)^4 = 4(x - 1)^2 - 3$. $\color{red}{\heartsuit} S = \{0; 2; 1 + \pm\sqrt{3}\}$

🗨️ Lời giải.

a) $x^4 + 1 = 2x^2$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 + 1 = 2t \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (thỏa đk)}.$$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$\text{Vậy } S = \{\pm 1\}.$$

b) $x^4 - 2x^2 = 3$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 - 2t = 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = 3 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}.$$

- Với $t = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } S = \{\pm\sqrt{3}\}.$$

c) $2x^4 - 3x^2 = 4x^2 - 5 \Leftrightarrow 2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = \frac{5}{2} \text{ (thỏa đk)} \end{cases}.$$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Với $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

$$\text{Vậy } S = \left\{\pm 1; \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}.$$

d) $(x - 1)^4 = 4(x - 1)^2 - 3$.

Đặt $t = (x - 1)^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 = 4t - 3 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 3 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}.$$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.

- Với $t = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow x = 1 + \pm\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } S = \{0; 2; 1 + \pm\sqrt{3}\}.$$

□

✦ **Bài 13.** Giải các phương trình sau:

- a) $0,1x^4 - 0,2x^2 + 0,1 = 0$; $\color{red}{\heartsuit} S = \{\pm\sqrt{0,1}\}$ b) $x^4 + 6,9x^2 - 7,9 = 0$; $\color{red}{\heartsuit} S = \{\pm 1\}$
 c) $3,3x^4 + 4,4x^2 + 1,1 = 0$; $\color{red}{\heartsuit} S = \emptyset$ d) $x^2 + \frac{6}{x^2} = 5$. $\color{red}{\heartsuit} S = \{\pm 1; \pm\sqrt{6}\}$

Lời giải.

a) $0,1x^4 - 0,2x^2 + 0,1 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành
 $0,1t^2 - 0,2t + 0,1 = 0 \Leftrightarrow t = 0,1$ (thỏa đk).

• Với $t = 0,1 \Leftrightarrow x^2 = 0,1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{0,1}$.

Vậy $S = \{\pm\sqrt{0,1}\}$.

b) $x^4 + 6,9x^2 - 7,9 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t^2 + 6,9t - 7,9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = -7,9 \text{ (không thỏa đk)} \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $S = \{\pm 1\}$.

c) $3,3x^4 + 4,4x^2 + 1,1 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$3,3t^2 + 4,4t + 1,1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ t = -\frac{1}{3} \text{ (không thỏa đk)} \end{cases}$$

Vậy $S = \emptyset$.

d) $x^2 + \frac{6}{x^2} = 5$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình trở thành

$$t + \frac{6}{t} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ t^2 - 5t + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0 \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ t = 6 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

• Với $t = 6 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$.

Vậy $S = \{\pm 1; \pm\sqrt{6}\}$.

□

✦ **Bài 14.** Giải các phương trình sau:

- a) $\frac{x^2 + 4x}{x - 1} = \frac{3x}{x - 1}$; $\color{red}{\heartsuit} S = \{-1; 0\}$ b) $\frac{x + 4}{x - 2} + 1 = \frac{16}{x - 1}$; $\color{red}{\heartsuit} S = \{3; 5\}$ c) $\frac{3x}{x + 1} = \frac{x^2 + 9x + 14}{(x + 1)(x + 2)}$. $\color{red}{\heartsuit} S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

Lời giải.

$$a) \frac{x^2 + 4x}{x - 1} = \frac{3x}{x - 1} \quad (1).$$

- Điều kiện $x \neq 1$.
- Phương trình (1) tương đương với $x^2 + 4x = 3x \Leftrightarrow x^2 + x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (thỏa đk)} \\ x = -1 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

- Vậy $S = \{-1; 0\}$.

$$b) \frac{x + 4}{x - 2} + 1 = \frac{16}{x - 1} \quad (1).$$

- Điều kiện $x \neq 1, x \neq 2$.
- Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{(x + 4)(x - 1) + (x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{16(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)}$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) + (x - 1)(x - 2) = 16(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 5 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

- Vậy $S = \{3; 5\}$.

$$c) \frac{3x}{x + 1} = \frac{x^2 + 9x + 14}{(x + 1)(x + 2)} \quad (1).$$

- Điều kiện $x \neq -1, x \neq -2$.
- Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{3x(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{x^2 + 9x + 14}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$\Leftrightarrow 3x(x + 2) = x^2 + 9x + 14$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \text{ (thỏa đk)} \\ x = -2 \text{ (không thỏa đk)}. \end{cases}$$

- Vậy $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

□

✦ **Bài 15.** Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = 1; \quad \text{☞ } S = \{0; 3\} \quad b) \frac{2x}{x - 1} + \frac{7}{2 - x} = 4; \quad \text{☞ } S = \emptyset$$

$$c) \frac{x^2 + 2x - 8}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3}; \quad \text{☞ } S = \emptyset \quad d) \frac{2x}{x + 1} + \frac{1}{x - 3} = \frac{2x + 3}{(x + 1)(x - 3)} \quad \text{☞ } S = \{-3; 1\}$$

🗨 **Lời giải.**

$$a) \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = 1 \quad (1).$$

- Điều kiện $x \neq \pm 1$.
- Phương trình (1) tương đương với $\frac{(x + 1) + 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 3 \text{ (thỏa đk)}. \end{cases}$$

- Vậy $S = \{0; 3\}$.

$$b) \frac{2x}{x-1} + \frac{7}{2-x} = 4 \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq 1, x \neq 2$.

• Phương trình tương đương với

$$\frac{2x(2-x) + 7(x-1)}{(x-1)(2-x)} = \frac{4(x-1)(2-x)}{(x-1)(2-x)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = 0 \text{ (Vô nghiệm vì } \Delta < 0)$$

• Vậy $S = \emptyset$.

$$c) \frac{x^2 + 2x - 8}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq -3, x \neq 2$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{(x-2)(x+3)} = \frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (không thỏa đk)} \\ x = -3 \text{ (không thỏa đk)} \end{cases}$$

• Vậy $S = \emptyset$.

$$d) \frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x+3}{(x+1)(x-3)} \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq -1, x \neq 3$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{2x(x-3) + (x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(2x+3)}{(x+1)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 - \sqrt{65}}{4} \text{ (thỏa đk)} \\ x = \frac{7 + \sqrt{65}}{4} \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$$

• Vậy $S = \left\{ \frac{7 \pm \sqrt{65}}{4} \right\}$.

□

◆ **Bài 16.** Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 1} = \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}; \quad \text{a) } \frac{x^2 + x - 2}{x^4 - 1} = \frac{x^2}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

🗨️ **Lời giải.**

$$a) \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 1} = \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1} \quad (1).$$

• Điều kiện $x \neq 1$.

• Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x^2 - x)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (không thỏa đk)} \\ x = -\frac{1}{3} \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$$

• Vậy $S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

b)
$$\frac{x^2 + x - 2}{x^4 - 1} = \frac{x^2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$$

- Điều kiện $x \neq \pm 1$.
- Phương trình (1) tương đương với

$$\frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (thỏa đk)} \\ x = -1 \text{ (không thỏa đk)} \\ x = 1 \text{ (không thỏa đk)}. \end{cases}$$
- Vậy $S = \{2\}$.

□

🔗 **Bài 17.** Giải các phương trình sau:

a) $x(x-1)(x-4) = 0$; 🔍 $S = \{0; 1; 4\}$ b) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$; 🔍 $S = \{1\}$
 c) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$; 🔍 $S = \{0; 1; 4\}$ d) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$. 🔍 $S = \{3\}$

💬 **Lời giải.**

a) $x(x-1)(x-4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

 Vậy $S = \{0; 1; 4\}$.

b) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}. \end{cases}$$

 Vậy $S = \{1\}$.

c) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

 Vậy $S = \{0; 1; 4\}$.

d) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x-3) + 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}. \end{cases}$$

 Vậy $S = \{3\}$.



⇨ **Bài 18.** Giải các phương trình sau:

- a) $(x^2 + x + 4)(x^2 - 3x) = 0$; $\text{q. } S = \{0; 3\}$ b) $(x^2 - x + 2)^2 - (2x + 2)^2 = 0$; $\text{q. } S = \{0; 3\}$
 c) $(x^2 - 4x)^2 = 4(x^2 - 4x)$; $\text{q. } S = \{0; 4; 2 \pm 2\sqrt{2}\}$ d) $(x^2 - 3)^2 - 5x^3 + 15x = 0$;
 $\text{q. } S = \left\{ \pm\sqrt{3}; \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \right\}$
 e) $(x + 2)^3 - x + 1 = (x - 1)(x + 1)$. $\text{q. } S = \{-2\}$

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{a) } (x^2 + x + 4)(x^2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 4 = 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ x(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 3\}$.

$$\text{b) } (x^2 - x + 2)^2 - (2x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow [(x^2 - x + 2) - (2x + 2)] [(x^2 - x + 2) + (2x + 2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 3) = 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 3\}$.

$$\text{c) } (x^2 - 4x)^2 = 4(x^2 - 4x) \Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 4) = 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 2 - 2\sqrt{2} \\ x = 2 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 4; 2 \pm 2\sqrt{2}\}$.

$$\text{d) } (x^2 - 3)^2 - 5x^3 + 15x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 - 5x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 5x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \pm\sqrt{3}; \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \right\}$.

$$\text{e) } (x + 2)^3 - x + 1 = (x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow (x + 2)^3 - (x - 1) - (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^3 - (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2) [(x + 2)^2 - (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + 3x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy $S = \{-2\}$.



⇨ **Bài 19.** Giải các phương trình sau:

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 3 \text{ thì } (2x + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -\sqrt{3} \\ 2x + 1 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \left\{ -1; 0; \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$\text{e) } (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1) = 3 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + x - 1. \text{ Phương trình (1) trở thành } t(t + 2) = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 1 \text{ thì } x^2 + x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = -3 \text{ thì } x^2 + x - 1 = -3 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2; 1\}.$$

$$\text{f) } \frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1} - 2 = 0 \quad (1). \text{ Điều kiện } x \neq -1.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{x+1}. \text{ Phương trình (1) trở thành } t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = 1 \text{ thì } \frac{x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = x + 1 \Leftrightarrow 0x = 1 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = -2 \text{ thì } \frac{x}{x+1} = -2 \Leftrightarrow x = -2(x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ (thỏa đk).}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}.$$

$$\text{g) } \frac{2x}{x+1} + 2 \cdot \frac{x+1}{x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} + \frac{2}{\frac{x}{x+1}} + 5 = 0 \quad (1). \text{ Điều kiện } x \neq -1, x \neq 0.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{x+1}. \text{ Phương trình (1) trở thành } 2t + \frac{2}{t} + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = -2 \text{ thì } \frac{x}{x+1} = -2 \Leftrightarrow x = -2(x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ (thỏa đk).}$$

$$\textcircled{v} \text{ Với } t = -\frac{1}{2} \text{ thì } \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = -(x+1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ (thỏa đk).}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}.$$

□

◇◇ **Bài 20.** Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x} - 2;$$

$$\text{b) } 2x - \sqrt{x-3} - 7 = 0.$$

$$\text{a) } S = \{1; 4\}$$

$$\text{b) } S = \{4\}$$

💬 **Lời giải.**

$$a) \quad x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ (x + 2)^2 = 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 1 \text{ (thỏa đk)} \\ x = 4 \text{ (thỏa đk)} \end{cases}$$

Vậy $S = \{1; 4\}$.

$$b) \quad 2x - \sqrt{x - 3} - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 = \sqrt{x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ (2x - 7)^2 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ 4x^2 - 29x + 52 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ x = 4 \text{ (thỏa đk)} \\ x = \frac{13}{4} \text{ (không thỏa đk)} \end{cases}$$

Vậy $S = \{4\}$.

□

BÀI 15. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình

- ☑ *Bước 1.* Lập phương trình
 - Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số;
 - Biểu diễn các dữ kiện chưa biết qua ẩn số hoặc đại lượng đã biết;
 - Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết;
- ☑ *Bước 2.* Giải phương trình vừa nhận được;
- ☑ *Bước 3.* Đối chiếu nghiệm của phương trình với điều kiện của ẩn số (nếu có) và với đề bài để đưa ra kết luận.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Toán có nội dung hình học

- ☑ Với hình chữ nhật:

Diện tích = Chiều dài \times Chiều rộng.

Chu vi = (Chiều dài + Chiều rộng) \times 2.

- ☑ Với hình tam giác:

Diện tích = $\frac{1}{2} \times$ Cạnh đáy \times Chiều cao.

Chu vi = Tổng các cạnh.

◀ Ví dụ 1. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

🔗 33 và 44

🗨️ Lời giải.

Gọi x (dm) là chiều cao của tam giác lúc ban đầu, ($x > 0$).

Suy ra cạnh đáy của tam giác lúc ban đầu là $\frac{4}{3}x$ (dm).

Diện tích tam giác ban đầu là $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{4}{3} \cdot x = \frac{2}{3}x^2$ (dm^2).

Diện tích tam giác sau khi tăng chiều cao thêm 3 dm và giảm cạnh đáy đi 3 dm là $\frac{1}{2}(x+3) \left(\frac{4}{3}x - 3 \right)$ (dm^2).

Theo đề, diện tích tam giác tăng thêm 12 dm^2 cho nên ta có phương trình

$$\frac{2}{3}x^2 + 12 = \frac{1}{2}(x+3) \left(\frac{4}{3}x - 3 \right) \Leftrightarrow 3x = 99 \Leftrightarrow x = 33 \text{ (thỏa đk)}.$$

Vậy chiều cao và cạnh đáy của tam giác lúc ban đầu lần lượt là 33 dm và 44 dm. □

◀ Ví dụ 2. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng mảnh vườn.

🔗 30 và 24

🗨️ Lời giải.

Gọi x (m) là chiều dài của mảnh vườn ($x > 0$).

Khi đó chiều rộng của mảnh vườn là $\frac{720}{x}$ (m).

Diện tích của mảnh vườn sau khi tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m là $(x+10) \left(\frac{720}{x} - 6 \right)$ (m^2).

Vì diện tích sau khi tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m vẫn không đổi, do đó ta có phương trình

$$(x+10) \left(\frac{720}{x} - 6 \right) = 720.$$

Giải phương trình này ta được $x = 30$ (thỏa đk) và $x = -40$ (không thỏa đk).

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu lần lượt là 30 m và 24 m. □

📁 Dạng 2. Bài toán về quan hệ các số

◀ Ví dụ 3. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

🔗 28

🗨️ Lời giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , ($x \in \mathbb{N}^*, x \leq 9$).

Khi đó chữ số hàng đơn vị là $10 - x$.

Tích của hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12 nên ta có phương trình

$$x(10-x) + 12 = 10x + (10-x) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Giải phương trình này ta được $x = -1$ (không thỏa đk) và $x = 2$ (thỏa đk).

Vậy số tự nhiên cần tìm là 28. □

◀ Ví dụ 4. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

🔗 11 và 12

🗨️ Lời giải.

Gọi $x, x + 1, (x \in \mathbb{N})$ là hai số tự nhiên liên tiếp.

Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109 nên ta có phương trình

$$x(x + 1) = x + (x + 1) + 109 \Leftrightarrow x^2 - x - 110 = 0.$$

Giải phương trình này ta được $x = -10$ (không thỏa đk) và $x = 11$ (thỏa đk).

Vậy hai số cần tìm là 11 và 12. □

📁 Dạng 3. Bài toán về năng suất lao động

Khối lượng công việc = Năng suất \times Thời gian hoàn thành.

🔗 **Ví dụ 5.** Một phân xưởng theo kế hoạch cần phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm? 🔍 50

🗨️ Lời giải.

Gọi x (sản phẩm) là số sản phẩm phân xưởng dự định mỗi ngày sản xuất được ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó số ngày hoàn thành kế hoạch trên dự định sẽ là $\frac{1100}{x}$ (ngày).

Do mỗi ngày phân xưởng sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên số sản phẩm mỗi ngày trên thực tế sản xuất được là $x + 5$ (sản phẩm).

Khi đó số ngày hoàn thành kế hoạch trên thực tế sẽ là $\frac{1100}{x + 5}$ (ngày).

Vì phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 2 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{1100}{x + 5} + 2 = \frac{1100}{x} \quad (x \in \mathbb{N}^*).$$

Giải phương trình này ta được $x = -55$ (không thỏa đk) và $x = 50$ (thỏa đk).

Vậy mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất 50 sản phẩm. □

📁 Dạng 4. Bài toán về công việc làm chung, làm riêng

Ta chú ý rằng:

- 🕒 Thường coi khối lượng công việc là một đơn vị.
- 🕒 Năng suất 1 + Năng suất 2 = Tổng năng suất.

🔗 **Ví dụ 6.** Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc? 🔍 4 và 6

🗨️ Lời giải.

Gọi x (giờ) là số giờ người thứ nhất làm một mình xong công việc ($x > \frac{12}{5}$).

Khi đó trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc;

và trong $\frac{12}{5}$ giờ người thứ nhất làm được $\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{12}{5x}$ công việc.

Do mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất làm xong công việc ít hơn người thứ hai 2 giờ cho nên số giờ người thứ hai làm một mình xong công việc là $x + 2$ (giờ).

Khi đó trong một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{x + 2}$ công việc;

và trong $\frac{12}{5}$ giờ người thứ hai làm được $\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{12}{5(x+2)}$ công việc.

Như vậy ta có phương trình


$$\frac{12}{5x} + \frac{12}{5(x+2)} = 1.$$



Giải phương trình này ta được $x = -\frac{6}{5}$ (không thỏa đk) và $x = 4$ (thỏa đk).

Như vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ và người hai làm xong công việc trong 6 giờ. \square

Dạng 5. Bài toán chuyển động

Chú ý công thức:

 Quãng đường = Vận tốc \times Thời gian.

 **Ví dụ 7.** Hai ô tô cùng khởi hành cùng một lúc từ hai đỉnh A và B cách nhau 160 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô biết rằng nếu ô tô đi từ A tăng vận tốc thêm 10 km/h sẽ bằng hai lần vận tốc ô tô đi từ B .  50 và 30

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của ô tô xuất phát từ A ($x > 0$).

Vì ô tô đi từ A tăng vận tốc thêm 10 km/h bằng hai lần vận tốc ô tô đi từ B nên vận tốc của ô tô xuất phát từ B sẽ là $\frac{x+10}{2}$ (km/h).

Sau 2 giờ (lúc gặp nhau) quãng đường ô tô thứ nhất đi được là $2x$ (km) và quãng đường ô tô thứ hai đi được là $2 \cdot \frac{x+10}{2}$ (km).


Như vậy ta có phương trình


$$2x + 2 \cdot \frac{x+10}{2} = 160.$$



Giải phương trình này ta được $x = 50$ (thỏa đk).

Vậy vận tốc của ô tô xuất phát từ A là 50 km/h và ô tô xuất phát từ B là 30 km/h. \square

Dạng 6. Bài toán chuyển động có vận tốc cản

 Vận tốc xuôi = Vận tốc thực + Vận tốc cản.

 Vận tốc ngược = Vận tốc thực - Vận tốc cản.

 **Ví dụ 8.** Một ca nô xuôi từ A đến B với vận tốc xuôi dòng là 30 km/h, sau đó lại ngược từ B về A . Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược là 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi và ngược dòng là không đổi.  80

Lời giải.

Gọi x (km) là khoảng cách giữa hai bến A và B ($x > 0$).

Thời gian ca nô xuôi dòng là $\frac{x}{30}$ (h).

Vận tốc thực của ca nô là $30 - 5 = 25$ (km/h).

Suy ra vận tốc ngược dòng của ca nô là $25 - 5 = 20$ (km/h).

Thời gian ca nô ngược dòng là $\frac{x}{20}$ (km/h).

Vì thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược dòng là 1 giờ 20 phút ($\frac{4}{3}$ giờ) nên ta có phương trình

$$\frac{x}{30} + \frac{4}{3} = \frac{x}{20}.$$

Giải phương trình này ta được $x = 80$ (thỏa đk).

Vậy khoảng cách giữa hai bến A và B là 80 km. □

Dạng 7. Các dạng bài toán khác

✎ **Ví dụ 9.** Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá. 🔍 300 và 150

Lời giải.

Gọi x (cuốn) là số sách trên giá thứ nhất ($x \in \mathbb{N}, x > 50$).

Suy ra số sách trên giá thứ hai sẽ là $450 - x$ (cuốn)

Theo đề ta có phương trình sau

$$\frac{4}{5}(x - 50) = (450 - x) + 50$$

Giải phương trình này ta được $x = 300$ (thỏa đk).

Vậy số sách trên giá sách thứ nhất và thứ hai lần lượt là 300 cuốn và 150 cuốn. □

C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

✎ **Bài 1.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng sẽ tăng thêm 5 m^2 . 🔍 5 và 20

Lời giải.

Gọi x (m) là chiều rộng của thửa ruộng ($x > 0$).

Khi đó chiều dài của thửa ruộng là $\frac{100}{x}$ (m).

Diện tích của thửa ruộng sau khi tăng chiều rộng lên 2 m và giảm chiều dài đi 5 m là $(x + 2)\left(\frac{100}{x} - 5\right)$ (m^2).

Vì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2 nên ta có phương trình

$$(x + 2)\left(\frac{100}{x} - 5\right) = 105.$$

Giải phương trình này ta được $x = -8$ (không thỏa đk) và $x = 5$ (thỏa đk).

Vậy chiều rộng và chiều dài của thửa ruộng lần lượt là 5 m và 20 m. □

✎ **Bài 2.** Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 9. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 58. Tìm số đã cho. 🔍 72

Lời giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , ($x \in \mathbb{N}^*, x \leq 9$).

Khi đó chữ số hàng đơn vị là $9 - x$.

Tích của hai chữ số đó nhỏ hơn số đã cho là 58 đơn vị nên ta có phương trình

$$x(9 - x) + 58 = 10x + (9 - x).$$

Giải phương trình này ta được $x = -7$ (không thỏa đk) và $x = 7$ (thỏa đk).

Vậy số cần tìm là 72. □

✎ **Bài 3.** Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày? 🔍 7

 **Lời giải.**

Gọi x (ngày) là số ngày đội xe dự định hoàn thành công việc ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó mỗi ngày đội xe dự định chở được $\frac{140}{x}$ (tấn).

Do hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 1 ngày nên số ngày thực tế hoàn thành công việc là $x - 1$ (ngày).

Khi đó mỗi ngày trên thực tế đội xe chở được là $\frac{150}{x - 1}$ (tấn).

Vì mỗi ngày chở vượt mức 5 tấn và chở thêm được 10 tấn cho nên ta có phương trình

$$\frac{150}{x - 1} = \frac{140}{x} + 5.$$

Giải phương trình trên ta được $x = -4$ (không thỏa đk) và $x = 7$ (thỏa đk).

Vậy theo kế hoạch đội xe chở hàng hết 7 ngày. □

❖ **Bài 4.** Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày thì xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày thì được $\frac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì mất bao nhiêu ngày? 🔍 45 và 30

 **Lời giải.**

Gọi x (ngày) là số ngày đội xe thứ nhất làm một mình xong công việc ($x > 18$).

Khi đó trong 18 ngày đội xe thứ nhất làm một mình được $\frac{18}{x}$ công việc.

Vì đội thứ nhất làm một mình trong 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm một mình tiếp 8 ngày thì được $\frac{2}{5}$ công việc cho nên đội thứ hai làm một mình trong 8 ngày thì được $\frac{2}{5} - \frac{6}{x}$ công việc.

Suy ra trong 18 ngày đội thứ hai làm một mình được $\frac{9}{4} \left(\frac{2}{5} - \frac{6}{x} \right)$ công việc.

Ta có phương trình

$$\frac{18}{x} + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{6}{x} \right) = 1.$$

Giải phương trình này ta được $x = 45$ (thỏa đk).

Vậy nếu làm một mình thì đội thứ nhất làm xong công việc hết 45 ngày, đội hai làm xong công việc hết 30 ngày. □

❖ **Bài 5.** Quảng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B. 🔍 36

 **Lời giải.**

Gọi x (km/h) là vận tốc xe máy đi từ A đến B ($x > 0$).

Suy ra thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{90}{x}$ (h).

Vận tốc của xe máy đi trở về từ B đến A là $x + 9$ (km/h).

Suy ra thời gian xe máy trở về từ B đến A là $\frac{90}{x + 4}$ (h).

Ta có phương trình

$$\frac{90}{x} + \frac{90}{x + 4} + \frac{1}{2} = 5.$$

Giải phương trình này ta được $x = -5$ (không thỏa đk) và $x = 36$ (thỏa đk).

Vậy vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B là 36 km/h. □

❖ **Bài 6.** Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ. 🔍 22

🗨️ Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc thực của tàu tuần tra ($x > 0$).

Vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của tàu tuần tra là lần lượt là $x + 2$ (km/h) và $x - 2$ (km/h).

Khi đó thời gian xuôi dòng và ngược dòng của tàu tuần tra lần lượt là $\frac{48}{x+2}$ (h) và $\frac{60}{x-2}$ (h).

Thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{48}{x+2} + 1 = \frac{60}{x-2}.$$

Giải phương trình này ta được $x = -10$ (không thỏa đk) và $x = 22$ (thỏa đk).

Vậy vận tốc thực của tàu tuần tra là 22 km/h. □

🔗 **Bài 7.** Hùng và Long có tất cả 40 viên bi. Nếu Hùng cho Long 6 viên, thì số bi của Long gấp 3 số bi của Hùng. Tính số bi ban đầu của Long và Hùng. 🔗 24 và 16

🗨️ Lời giải.

Gọi x (viên bi) là số bi ban đầu của Hùng ($x \in \mathbb{N}^*$).

Suy ra số bi ban đầu của Long là $40 - x$ (viên bi).

Theo đề ta có phương trình

$$3(x - 6) = 40 - x + 6 \Leftrightarrow x = 16 \text{ (thỏa đk)}.$$

Vậy số bi ban đầu của Hùng và Long lần lượt là 16 và 24 viên. □

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 8.** Một người dự định sản xuất 120 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do tăng năng suất 4 sản phẩm mỗi giờ, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 1 giờ. Hãy tính năng suất dự kiến của người đó. 🔗 20

🗨️ Lời giải.

Gọi năng suất dự kiến của người đó là x , $x \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó thời gian hoàn thành dự kiến sẽ là $\frac{120}{x}$ (giờ).

Do tăng năng suất 4 sản phẩm mỗi giờ nên năng suất trên thực tế là $x + 4$.

Khi đó thời gian hoàn thành trên thực tế sẽ là $\frac{120}{x+4}$ (giờ).

Vì thời gian hoàn thành sớm hơn dự kiến 1 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{120}{x+4} + 1 = \frac{120}{x} \quad (x \in \mathbb{N}^*).$$

Giải phương trình này ta được $x = -24$ (không thỏa đk) và $x = 20$ (thỏa đk).

Vậy năng suất dự kiến của người đó là 20 sản phẩm mỗi giờ. □

🔗 **Bài 9.** Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 km. Do vận tốc xe ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên ô tô đến sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe. 🔗 50 và 40

🗨️ Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của ô tô ($x > 10$).

Do vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 10 km/h nên vận tốc xe máy là $x - 10$ (km/h).

Thời gian ô tô và xe máy đi hết quãng đường AB lần lượt là $\frac{120}{x}$ (giờ), $\frac{120}{x-10}$ giờ.

Vì ô tô đến sớm hơn xe máy 36 phút ($\frac{3}{5}$ giờ) cho nên ta có phương trình

$$\frac{120}{x} + \frac{3}{5} = \frac{120}{x-10}.$$

Giải phương trình này ta được $x = -40$ (không thỏa đk) và $x = 50$ (thỏa đk).

Vậy vận tốc của ô tô và xe máy lần lượt là 50 km/h và 40 km/h. □

✦ **Bài 10.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 4 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu? 🔍 8 và 12

🗨️ Lời giải.

Gọi x (giờ) là số giờ vòi thứ nhất chảy riêng thì đầy bể ($x > \frac{24}{5}$).

Khi đó trong một giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể;

và trong 4 giờ 48 phút ($\frac{24}{5}$ giờ) vòi thứ nhất chảy được $\frac{24}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{24}{5x}$ bể.

Vì nếu chảy riêng vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 4 giờ nên số giờ vòi thứ hai chảy riêng thì đầy bể là $x + 4$ giờ.

Khi đó trong một giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+4}$ bể;

và trong $\frac{24}{5}$ giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{24}{5(x+4)}$ bể.

Như vậy ta có phương trình

$$\frac{24}{5x} + \frac{24}{5(x+4)} = 1.$$

Giải phương trình này ta được $x = -\frac{12}{5}$ (không thỏa đk) và $x = 8$ (thỏa đk).

Như vậy nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất chảy trong 8 giờ và vòi thứ hai chảy trong 12 giờ thì đầy bể. □

✦ **Bài 11.** Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km, cả đi và về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h. 🔍 36

🗨️ Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng ($x > 0$).

Suy ra vận tốc xuôi dòng và vận tốc ngược dòng của tàu thủy lần lượt là $x + 4$ và $x - 4$ (km/h).

Thời gian xuôi dòng và ngược dòng của tàu thủy lần lượt là $\frac{120}{x+4}$ (h) và $\frac{120}{x-4}$ (h).

Thời gian cả đi lẫn về là 6 giờ 45 phút ($\frac{27}{4}$ giờ) nên ta có phương trình sau

$$\frac{120}{x+4} + \frac{120}{x-4} = \frac{27}{4}.$$

Giải phương trình này ta được $x = -\frac{4}{9}$ (không thỏa đk) và $x = 36$ (thỏa đk).

Vậy vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là 36 km/h. □

✦ **Bài 12.** Có hai thùng dầu chứa tất cả 160 lít dầu. Biết rằng nếu rót từ thùng thứ nhất sang thùng thứ hai 20 lít dầu thì số dầu ở hai thùng bằng nhau. Tính số dầu ban đầu ở mỗi thùng. 🔍 100 và 60

🗨️ Lời giải.

Gọi x (lít) là số lít dầu ban đầu ở thùng thứ nhất ($x > 20$).

Suy ra số lít dầu ban đầu ở thùng thứ hai là $160 - x$ lít.

Theo đề ta có phương trình

$$x - 20 = 160 - x + 20 \Leftrightarrow x = 100 \text{ (thỏa đk).}$$

Vậy số lít dầu ban đầu ở thùng thứ nhất và thùng thứ hai lần lượt là 100 lít và 60 lít. \square

BÀI 16. ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 8.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

✦ **Bài 1.** Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{6}x^2$ và $y = -\frac{1}{6}x^2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

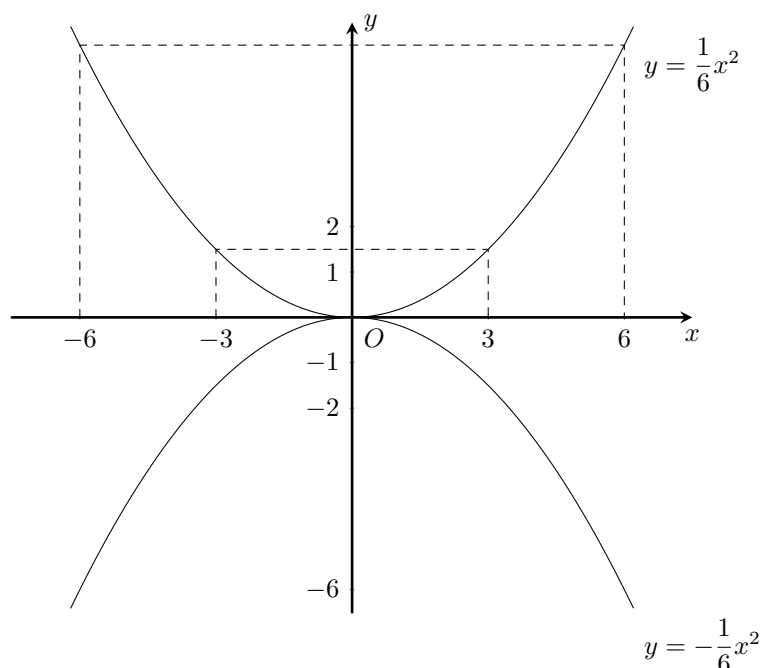
- a) Qua điểm $A(0; -6)$ kẻ đường thẳng song song với trục Ox . Nó cắt đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{6}x^2$ tại hai điểm B và C . Tìm hoành độ của B và C . $\color{red}{\text{a}} \{-6; 6\}$
- b) Tìm trên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{6}x^2$ điểm B' có cùng hoành độ với B , điểm C' có cùng hoành độ với C . Đường thẳng $B'C'$ có song song với Ox không? Vì sao? Tìm tung độ của B' và C' . $\color{red}{\text{a}} 6$

🗨️ Lời giải.

Bảng giá trị

| | | | | | |
|-----------------------|----|----------------|---|----------------|----|
| x | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 |
| $y = \frac{1}{6}x^2$ | 6 | $\frac{3}{2}$ | 0 | $\frac{3}{2}$ | 6 |
| $y = -\frac{1}{6}x^2$ | -6 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{3}{2}$ | -6 |

Đồ thị



a) Đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm $A(0; -6)$ là $y = -6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{6}x^2$ và $y = -6$ là

$$-\frac{1}{6}x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$

Vậy $x_B = 6$, $x_C = -6$ hoặc $x_B = -6$, $x_C = 6$.

b) $B'C' \parallel Ox$ vì $BC \parallel Ox$. Tung độ của B' và C' là 6.

□

❖ **Bài 2.** Cho hàm số $y = 2x - 3$ và $y = -x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trong cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị.

📍 (1; -1); (-3; -9)

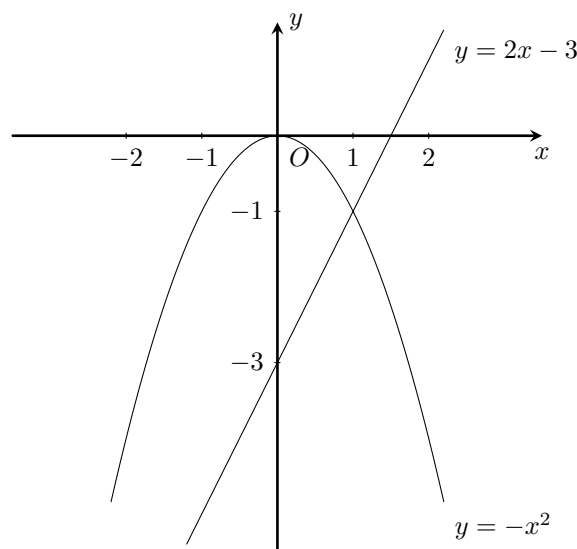
🗨️ Lời giải.

a) Bảng giá trị

| | | |
|--------------|----|---------------|
| x | 0 | $\frac{3}{2}$ |
| $y = 2x - 3$ | -3 | 0 |

| | | | | | |
|------------|----|----|---|----|----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = -x^2$ | -4 | -1 | 0 | -1 | -4 |

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = -x^2$ và $y = 2x - 3$ là

$$-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Vậy giao điểm của hai đồ thị là điểm có tọa độ (1; -1) và (-3; -9).

□

❖ **Bài 3.** Giải các phương trình sau.

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; $\text{☞ } x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{3}$ b) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$; $\text{☞ } x \in \left\{ \pm 1; \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$

c) $3x^2 + 4(x-1) = (x-1)^2 + 3$; $\text{☞ } x_1 = 1; x_2 = -4$ d) $x^2 + x + \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 6$; $\text{☞ } x_1 = 2\sqrt{3} - 1; x_2 = -\sqrt{3}$

e) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$; $\text{☞ } x \in \left\{ 5; -\frac{5}{6} \right\}$ f) $\frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x}$. $\text{☞ } x \in \{-1 + \sqrt{11}; -1 - \sqrt{11}\}$

🗨️ Lời giải.

a) Phương trình có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{3}$.

b) Đặt $t = x^2 \geq 0$. Ta có phương trình

$$3t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Phương trình có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm $t_1 = 1; t_2 = \frac{2}{3}$ (đều thỏa mãn).

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ t_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ \pm 1; \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$.

c) $3x^2 + 4(x-1) = (x-1)^2 + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$.
Phương trình có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -4$.

d) $x^2 + x + \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 6 \Leftrightarrow x^2 + (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3} - 6 = 0$.

$$\Delta = 1 - 2\sqrt{3} + 3 - 4 \cdot (\sqrt{3} - 6) = 28 - 6\sqrt{3} = (3\sqrt{3} - 1)^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{3} - 1.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2\sqrt{3} - 1; x_2 = -\sqrt{3}$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6} &\Leftrightarrow 6x^2 - 20x - 5x - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 25x - 25 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 25x + x^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x(x-5) + (x-5)(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(6x+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{5}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x \in \left\{ 5; -\frac{5}{6} \right\}$.

f) Với $x \neq 0; x \neq 2$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x} &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 10 + 2x}{x(x-2)} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 2x - 10 = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta' = 1 + 10 = 11 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{11}.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 + \sqrt{11}; x_2 = -1 - \sqrt{11}$ (thỏa điều kiện).

Vậy $x \in \{-1 + \sqrt{11}; -1 - \sqrt{11}\}$.



◊ **Bài 4.** Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$ (m là tham số).

- a) Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó. ☞ $m = 1; x = 2$
- b) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 4 và tìm nghiệm còn lại khi đó. ☞ $m = 2$
- c) Tìm m để phương trình:
- a) Có hai nghiệm trái dấu; ☞ $m = 0; x = 2$ b) Có hai nghiệm cùng dấu; ☞ $m > 0$
- c) Có hai nghiệm dương; ☞ $m > 0$ d) Có hai nghiệm âm; ☞ $m \in \emptyset$.
- e) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 - x_2 = -2$.
☞ $m = 0$ hoặc $m = 3$

🗨️ Lời giải.

- a) Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow x = 2$.
- b) $2m = 4 \Rightarrow m = 2$.
- c) Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$ (m là tham số)
- (a) Có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 4m < 0 \Leftrightarrow m < 0$.
- (b) Có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$.
- (c) Có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 4m > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \geq 0 \\ m > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$.
- (d) Có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 4m > 0 \\ 2(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \geq 0 \\ m > 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.
- (e) Vì $x_1 = m+1 - (m-1) = 2; x_2 = m+1 + m-1 = 2m$ nên

$$2x_1 - x_2 = -2 \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 - 2m = -2 \\ 2 \cdot 2m - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 0. \end{cases}$$



◊ **Bài 5.** Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng d : $y = x + 1$.

- a) Vẽ đồ thị của (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Bằng phép tính, xác định tọa độ giao điểm A, B của d và (P). Tính độ dài đoạn thẳng AB .
☞ $A(1; 2); B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); AB = \frac{\sqrt{10}}{2}$

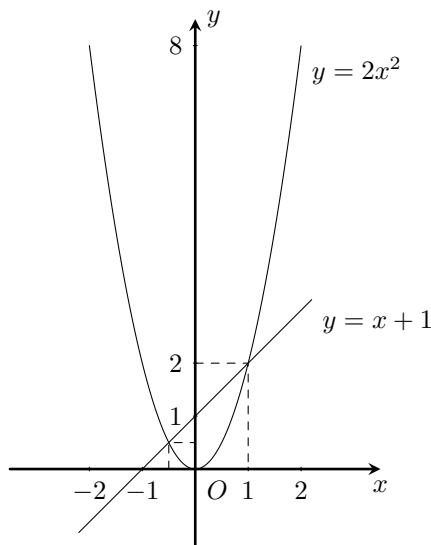
🗨️ Lời giải.

- a) Bảng giá trị

| | | |
|-------------|---|----|
| x | 0 | -1 |
| $y = x + 1$ | 1 | 0 |

| | | | | | |
|------------|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = 2x^2$ | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2x^2$ và $y = x + 1$ là

$$2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + -x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

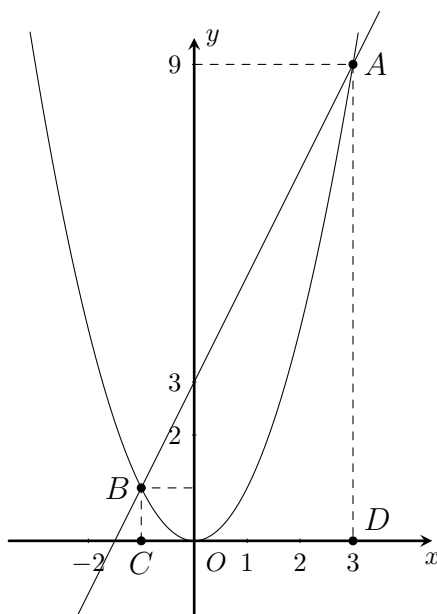
Suy ra điểm $A(1; 2)$ và $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

□

❖ **Bài 6.** Tìm tọa độ giao điểm A và B của đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và $y = x^2$. Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên trục hoành. Tính diện tích tứ giác $ABCD$. 📐 $S = 20$

🗨️ **Lời giải.**



Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2$ và $y = 2x + 3$ là

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

$A(3; 9)$ và $B(-1; 1)$. Suy ra $C(-1; 0)$; $D(3; 9)$. Do đó $AD = 9$; $BC = 1$; $CD = 4$.

Diện tích hình thang vuông $ABCD$ là

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{9 + 1}{2} \cdot 4 = 20 \text{ (đvdt)}.$$

□

✦ **Bài 7.** Một đội thợ mỏ phải khai thác 216 tấn than trong một thời gian nhất định. Ba ngày đầu, mỗi ngày đội khai thác theo đúng định mức. Sau đó, mỗi ngày họ đều khai thác vượt định mức 8 tấn. Do đó họ khai thác được 232 tấn và xong trước thời hạn 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đội thợ phải khai thác bao nhiêu tấn than? 🔗 24 tấn

🗨️ Lời giải.

Gọi lượng than mà đội phải khai thác trong 1 ngày theo kế hoạch là x (tấn), $x > 0$.

Thời hạn quy định để khai thác 216 tấn là $\frac{216}{x}$ (ngày).

Lượng than khai thác được trong 3 ngày đầu là $3x$ (tấn).

Do đó lượng than khai thác được trong những ngày còn lại là $232 - 3x$ (tấn).

Thời gian để khai thác $232 - 3x$ tấn là $\frac{232 - 3x}{x + 8}$ (ngày).

Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{216}{x} - 1 = \frac{232 - 3x}{x + 8} + 3.$$

Giải phương trình ta được $x = 24$; $x = -72$ (loại).

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày đội thợ phải khai thác 24 tấn than. □

✦ **Bài 8.** Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một ca-nô đi từ A đến B , nghỉ 40 phút ở B , rồi lại trở về bến A . Thời gian kể từ lúc đi đến lúc trở về đến A là 6 giờ. Tính vận tốc của ca-nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 3 km/h. 🔗 12 km/h

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc của ca-nô khi nước yên lặng là x (km/h), $x > 3$.

Vận tốc khi ca-nô đi xuôi dòng là $x + 3$ (km/h).

Vận tốc khi ca-nô đi ngược dòng là $x - 3$ (km/h).

Thời gian ca-nô đi xuôi dòng là $\frac{30}{x + 3}$ (giờ).

Thời gian ca-nô đi ngược dòng là $\frac{30}{x - 3}$ (giờ).

Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{30}{x + 3} + \frac{30}{x - 3} + \frac{2}{3} = 6.$$

Giải phương trình ta được $x = 12$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của ca-nô khi nước yên lặng là 12 (km/h). □

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 9.** Cho phương trình $mx^2 + 2x + m = 0$ với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

$$\text{☞ } -1 \leq m < 0$$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm.

$$\text{☞ } 0 < m \leq 1$$

🗨 **Lời giải.**

a) Phương trình có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m^2 \geq 0 \\ 1 > 0 \\ -\frac{2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 \leq m < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0.$$

b) Phương trình có hai nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m^2 \geq 0 \\ 1 > 0 \\ -\frac{2}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < m \leq 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1.$$

□

✦ **Bài 10.** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

$$\text{☞ } x = 1; x = 3$$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

$$\text{☞ } m = 0$$

🗨 **Lời giải.**

a) Khi $m = 3$, phương trình trở thành

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

b) $\Delta' = (m-1)^2 - m^2 + 6 = -2m + 7$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 7 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{7}{2}$.

Với $m < \frac{7}{2}$, theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 6. \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 16 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 2m^2 + 12 - 16 \Leftrightarrow m(m-8) = 0$.

Giải phương trình ta tìm được $m = 0$; $m = 8$ (loại).

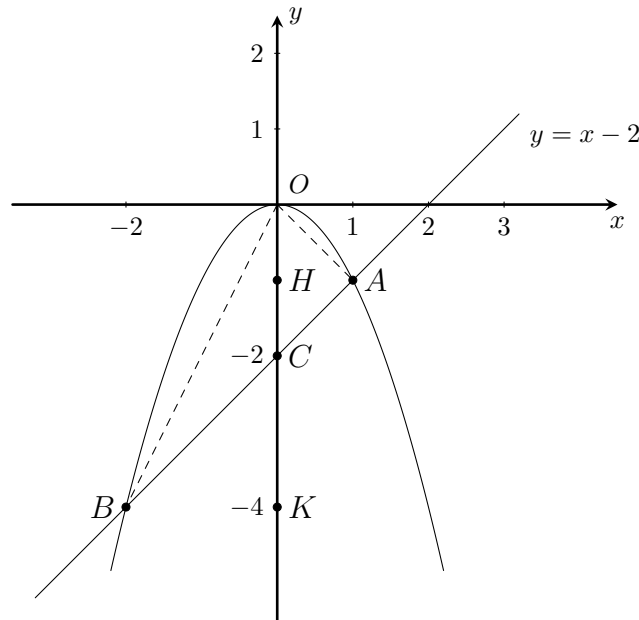
Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.



❖ **Bài 11.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $d: y = x - 2$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích $\triangle OAB$ (trong đó O là gốc tọa độ, hoành độ giao điểm A lớn hơn hoành độ giao điểm B).

🔗 $S = 3$

🗨 **Lời giải.**



Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

Giải phương trình ta nhận được $x = 1; x = 2$. Suy ra $A(1; -1); B(-2; -4)$.

Diện tích tam giác AOB là

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} \\ &= \frac{1}{2}AH \cdot OC + \frac{1}{2}BK \cdot OC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 + 2) = 3 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$



❖ **Bài 12.** Cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 1$.

- Chứng minh với mọi giá trị của m đường thẳng d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Gọi A, B là giao điểm của d và (P) . Tính diện tích tam giác OAB theo m (O là gốc tọa độ).

🔗 $S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{m^2 + 1}$

🗨 **Lời giải.**

a) Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{1}{4}x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4mx - 4 = 0. \quad (*)$$

Ta có $\Delta' = 4m^2 + 4 > 0$ với mọi m .

Do đó phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Vậy d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Giải phương trình (*) ta được $x = 2m \pm \sqrt{m^2 + 1}$.

$$\text{Suy ra } A \left(2m - \sqrt{m^2 + 1}; \frac{(2m - \sqrt{m^2 + 1})^2}{4} \right); B \left(2m + \sqrt{m^2 + 1}; \frac{(2m + \sqrt{m^2 + 1})^2}{4} \right).$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{m^2 + 1} \text{ (đvdt).}$$

□

◆ **Bài 13.** Một xe lửa đi từ Hà Nội vào Bình Sơn (Quảng Ngãi). Sau đó 1 giờ, một xe lửa khác đi từ Bình Sơn ra Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường từ Hà Nội - Bình Sơn dài 900 km.

🔍 45; 50 km/h

🗨️ Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe thứ nhất. Điều kiện $x > 0$.

Khi đó vận tốc của xe lửa thứ hai là $x + 5$ (km/h).

Thời gian xe lửa thứ nhất đi từ Hà Nội đến chỗ gặp nhau là

$$\frac{450}{x} \text{ (giờ).}$$

Thời gian xe lửa thứ hai đi từ Bình Sơn đến chỗ gặp nhau là

$$\frac{450}{x + 5} \text{ (giờ).}$$

Theo đề, ta có phương trình

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x + 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x = 45$ (nhận); $x = -50$ (loại).

Vậy vận tốc xe lửa thứ nhất là 45 km/h, xe thứ hai là 50 km/h.

□

◆ **Bài 14.** Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày đội đó vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn hàng. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hết hàng trong bao nhiêu ngày?

🔍 7 ngày

🗨️ Lời giải.

Gọi khối lượng hàng chở theo định mức trong 1 ngày là x (tấn). Điều kiện $x > 0$.

Khi đó, số ngày quy định là $\frac{140}{x}$ (ngày).

Do chở vượt mức nên số ngày đội đã chở là $\frac{140}{x} - 1$ (ngày).

Khối lượng hàng đội đã chở được là $140 + 10 = 150$ (tấn).

Theo đề, ta có phương trình

$$\left(\frac{140}{x} - 1 \right) \cdot (x + 5) = 140 + 10 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 700 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x = 20$ (nhận); $x = -35$ (loại).

Vậy số ngày đội phải chở theo kế hoạch là $140 : 20 = 7$ (ngày).

□

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 15.** Giải các phương trình sau.

a) $9x^2 + 8x - 1 = 0$; $\text{☞ } x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{9}$ b) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$; $\text{☞ } x = \pm \frac{1}{3}$
 c) $5x^2 - 3x + 1 = 2x + 11$; $\text{☞ } x_1 = -1; x_2 = 2$ d) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; $\text{☞ } x \in \left\{ \frac{2}{5} \right\}$
 e) $\frac{x+2}{1-x} = \frac{4x^2 - 11x - 2}{(x+2)(x-1)}$; $\text{☞ } x \in \left\{ \frac{2}{5} \right\}$ f) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$. $\text{☞ } x \in \{-3; -2; 1\}$

🗨 **Lời giải.**

a) Phương trình có $a - b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{9}$.

b) Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta có phương trình

$$9t^2 + 8t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \text{ (loại)} \\ t_2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}. \end{cases}$$

c) Ta có $5x^2 - 3x + 1 = 2x + 11 \Leftrightarrow 5x^2 - 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.
 Phương trình có $a - b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

d) Ta có $\Delta' = 2 - 2 = 0$.

Phương trình có nghiệm $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Với $x \neq 1$; $x \neq -2$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{1-x} = \frac{4x^2 - 11x - 2}{(x+2)(x-1)} &\Leftrightarrow \frac{-(x+2)(x+2) - 4x^2 + 11x + 2}{(x+2)(x-1)} = 0 \\ &\Rightarrow -5x^2 + 7x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Phương trình có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm $x_1 = 1$ (không thỏa điều kiện); $x_2 = \frac{2}{5}$.

Vậy $x \in \left\{ \frac{2}{5} \right\}$.

f) Ta có

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x+3) + x(x+3) - 2(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 + x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = -2; x = 1. \end{aligned}$$

Vậy $x \in \{-3; -2; 1\}$. □

❖ **Bài 16.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

a) $3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0$; b) $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$; $\text{☞ } x = 4; x = 0$
 $\text{☞ } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 c) $x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7$; $\text{☞ } x = 49$ d) $\frac{x}{x+1} - 10 \cdot \frac{x+1}{x} = 3$. $\text{☞ } x = -\frac{5}{4}; x = -\frac{2}{3}$

Lời giải.

a) Đặt $t = x^2 + x \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$3t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Phương trình có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm $t_1 = 1; t_2 = -\frac{1}{3}$ (loại).

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$.

$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}.$$

Phương trình có nghiệm $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

b) Đặt $t = x^2 - 4x + 2 \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

c) Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} t^2 - t = 5t + 7 = 0 &\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 7t - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t + 1)(t - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 7 \Rightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 49$.

d) Điều kiện: $x = -1$. Đặt $t = \frac{x}{x+1}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} t - \frac{10}{t} = 3 &\Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 5t - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t + 2)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 5 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 5 \Rightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$.

Với $t = -2 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = -2 \Rightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

□

✦ **Bài 17.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

a) $2(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) + 1 = 0;$

$$\text{☞ } S = \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}; 1 \right\}$$

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0;$

$$\text{☞ } S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

c) $(x^2 - 2x)^2 - 2x^2 + 4x - 3 = 0; \text{ ☞ } S = \{\pm 1; 3\}$

d) $3\sqrt{x^2 + x + 1} - x = x^2 + 3.$

$$\text{☞ } S = \left\{ -1; 0; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \right\}$$

 **Lời giải.**

a) Đặt $t = x^2 - 2x$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2t^2 + 3t + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2t^2 + 2t + t + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t(t + 1) + t + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t + 1)(2t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}; 1 \right\}$.

b) Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = \left(x + \frac{1}{x}\right)$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} t^2 - 4t + 3 = 0 &\Leftrightarrow t^2 - t - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t(t - 1) - 3(t - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 1)(t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (vô nghiệm).

Với $t = 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

c) Đặt $t = x^2 - 2x$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} t^2 - 2t - 3 = 0 &\Leftrightarrow t^2 + t - 3t - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm 1; 3\}$.

d) Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 3t = t^2 + 2 &\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2t + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 1)(t - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = 2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -1; 0; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \right\}$.

□

🔹 **Bài 18.** Cho phương trình $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình:

- a) Có một nghiệm bằng 5. Tìm nghiệm còn lại; 🔹 $x = -1$
- b) Có hai nghiệm phân biệt cùng dương; 🔹 $m \in \emptyset$
- c) Có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương; 🔹 $-1 < m < 0$
- d) Có hai nghiệm cùng dấu; 🔹 $m \neq -2; m < -1$
- e) Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = -1$. 🔹 $m = -1$

🗨️ Lời giải.

a) Thay $x = 5$ vào phương trình, ta tìm được $m = 4$. Do đó ta có phương trình

$$x^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5. \end{cases}$$

b) $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số).

$$\Delta = m^2 + 4(m + 1) = (m + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = m + 1.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4(m + 1) > 0 \\ -m - 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 2)^2 > 0, \forall m \neq -2 \\ m < -1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -1 \\ m > 0. \end{cases}$$

Không có m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Phương trình có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4(m + 1) > 0 \\ m < 0 \\ |-1| > \frac{m + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

d) Phương trình có hai nghiệm cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4(m + 1) > 0 \\ -m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 2)^2 > 0, \forall m \neq -2 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -1. \end{cases}$$

e) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = -1$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

□

BÀI 17. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

A – ĐỀ SỐ 1

I. TRẮC NGHIỆM

❖ **Câu 1.** Phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có tập nghiệm là

- A $\{-1; -3\}$.
 B $\{1; 3\}$.
 C $\left\{1; \frac{1}{3}\right\}$.
 D $\left\{1; -\frac{1}{3}\right\}$.

🗨️ **Lời giải.**

Phương có $a + b + c = 0$ nên có nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 3$.

Chọn đáp án B □

❖ **Câu 2.** Phương trình nào sau đây có hai nghiệm phân biệt?

- A $x^2 + 1 = 0$.
 B $x^2 - 6x - 2 = 0$.
 C $4x^2 - 4x + 1 = 0$.
 D $2x^2 - 2x + 1 = 0$.

🗨️ **Lời giải.**

Ta thấy phương trình $x^2 - 6x - 2 = 0$ có hệ số a và c trái dấu nên có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

❖ **Câu 3.** Cho đường thẳng $d: y = 2x - 1$ và parabol $(P): y = x^2$. Khi đó đường thẳng d cắt (P) tại số giao điểm là

- A 1.
 B 2.
 C 3.
 D 0.

🗨️ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy số giao điểm là 1.

Chọn đáp án A □

❖ **Câu 4.** Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A Phương trình có vô nghiệm.
 B Có hai nghiệm cùng dấu.
- C Phương trình có một nghiệm là $x = 0$.
 D Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\Delta = m^2 + 1 > 0$ với mọi m và $x_1 x_2 = -1 < 0$ nên phương trình có 2 nghiệm trái dấu. □

II. TỰ LUẬN

❖ **Bài 1.** Giải các phương trình sau.

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
 🔍 $x_1 = 1; x_2 = 5$
 b) $x^2 - 4x = 2$.
 🔍 $x = 2 \pm \sqrt{6}$

🗨️ **Lời giải.**

a) Phương trình có $a + b + c = 0$ nên có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 5$.

b) $x^2 - 4x = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$.

Ta có $\Delta' = 4 + 2 = 6 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x = 2 \pm \sqrt{6}$.



✦ **Bài 2.** Cho đường thẳng $d: y = 2x + m$ và parabol $(P): y = x^2$.

- a) Vẽ (P) và d trên cùng một trục tọa độ khi $m = 1$.
 b) Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

$$\text{a) } -1 < m < 0$$

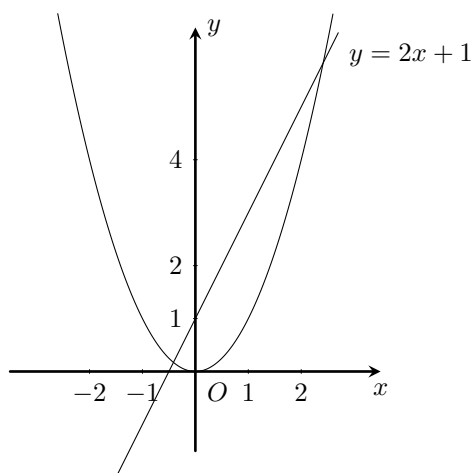
🗨️ Lời giải.

- a) Khi $m = 1$ thì $d: y = 2x + 1$ và $(P): y = x^2$.
 Bảng giá trị

| | | |
|--------------|---|----------------|
| x | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| $y = 2x + 1$ | 1 | 0 |

| | | | | | |
|-----------|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = x^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

Đồ thị



- b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$x^2 - 2x - m = 0.$$

Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ cùng dương khi

$$\begin{cases} \Delta' = 1 + m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$



✦ **Bài 3.** Cho phương trình $x^2 - 4x + m = 0$. Tìm m để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt.
 b) Có hai nghiệm trái dấu.
 c) Có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$.

$$\text{a) } m < 4$$

$$\text{b) } m < 0$$

$$\text{c) } m = 3$$

🗨️ Lời giải.

Ta có $\Delta' = 4 - m$.

- a) PT có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4$.
- b) PT có hai nghiệm trái dấu $ac < 0 \Leftrightarrow m < 0$.
- c) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 4$.
Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m. \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = x_1 x_2 + 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7$.
Từ đó tìm được $m = 3$ (thỏa mãn).

□

B – ĐỀ SỐ 2

I. TRẮC NGHIỆM

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ kết luận nào sau đây đúng?

- A** Hàm số luôn nghịch biến.
B Hàm số luôn đồng biến.
C Giá trị của hàm số luôn âm.
D Hàm số nghịch biến khi $x > 0$, đồng biến khi $x < 0$.

🗨️ **Lời giải.**

Hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có hệ số $a < 0$ nên nghịch biến khi $x > 0$, đồng biến khi $x < 0$.

Chọn đáp án **D**

□

❖ **Câu 2.** Điểm $A(-2; -1)$ thuộc đồ thị hàm số nào?

- A** $y = -\frac{x^2}{4}$. **B** $y = \frac{x^2}{2}$. **C** $y = -\frac{x^2}{2}$. **D** $y = \frac{x^2}{4}$.

🗨️ **Lời giải.**

Xét ta thay $x = -2$; $y = -1$ vào hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$ được kết quả đúng.

Chọn đáp án **A**

□

❖ **Câu 3.** Phương trình $x^2 - x - 2 = 0$ có nghiệm là

- A** $x = 1$ và $x = 2$. **B** $x = -1$ và $x = 2$. **C** $x = 1$ và $x = -2$. **D** Vô nghiệm.

🗨️ **Lời giải.**

Phương trình có dạng $a - b + c = 0$ nên có nghiệm $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

Chọn đáp án **B**

□

❖ **Câu 4.** Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Kết quả đúng là

- A** $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$; $x_1 x_2 = -\frac{5}{2}$. **B** $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 x_2 = -\frac{5}{2}$.
C $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{5}{2}$. **D** $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$; $x_1 x_2 = \frac{5}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

II. TỰ LUẬN

✦ **Bài 1.** Giải các phương trình sau.

a) $x^2 - x - 11 = 0$; $\color{red}{\text{☞}} x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ b) $x^2 + 5x + 6 = 0$. $\color{red}{\text{☞}} x = -2; x = -3$

🗨️ Lời giải.

a) $\Delta = 1 + 4 \cdot 11 = 45 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

b) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3. \end{cases}$

□

✦ **Bài 2.** Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc dòng nước là 2 km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn ngược dòng 1 giờ. $\color{red}{\text{☞}} 22 \text{ km/h}$

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc của tàu khi nước yên lặng là x (km/h). Điều kiện $x > 2$.
Theo đề, ta có phương trình

$$\frac{60}{x - 2} = \frac{48}{x + 2} + 1.$$

Giải phương trình, ta được $x = 22$ (thỏa mãn).
Vậy vận tốc của tàu khi nước yên lặng là 22 (km/h).

□

✦ **Bài 3.** Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 4$.

- a) Cho $m = 1$ vẽ (P) , d trên cùng hệ trục tọa độ.
- b) Chứng minh rằng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .
- c) Gọi $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của (P) , d . Tìm giá trị của m sao cho $y_1^2 + y_2^2 = 7^2$. $\color{red}{\text{☞}} m = 1; m = -17$

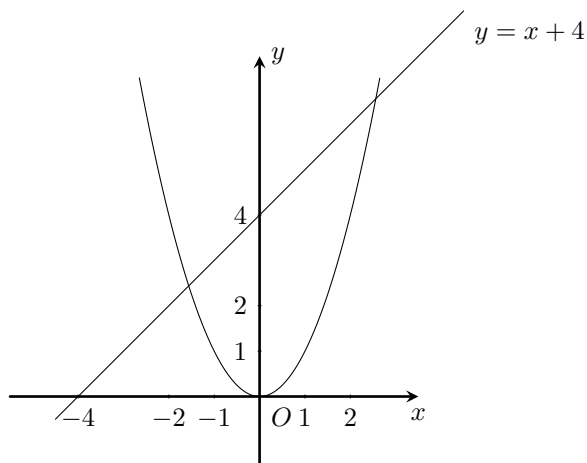
🗨️ Lời giải.

a) Cho $m = 1$ thì $d: y = x + 4$.
Bảng giá trị

| | | |
|-------------|---|----|
| x | 0 | -4 |
| $y = x + 4$ | 4 | 0 |

| | | | | | |
|-----------|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = x^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$x^2 - mx - 4 = 0.$$

Vì $\Delta = m^2 + 16 > 0$ với mọi m nên ta có đpcm.

c) Từ giả thiết và theo hệ thức Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4. \end{cases}$$

Ta có $A, B \in (P) \Rightarrow y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$.

Nên $y_1^2 + y_2^2 = 7^2 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = 49 \Rightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 49$.

Ta tìm được $m = 1; m = -17$.

□

C - ĐỀ KIỂM TRA HKII NĂM HỌC 2018 - 2019 QUẬN 3

⇨ **Bài 1.** Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^2 - 3x - 3 = 0;$

☞ $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x - 8y = 3. \end{cases}$

☞ $x = 3; y = \frac{3}{2}$

☞ **Lời giải.**

a) Ta có $\Delta = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 33 > 0$. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x - 8y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8y = 24 \\ 5x - 8y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ 2y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{2}. \end{cases}$

□

⇨ **Bài 2.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (P) .

a) Vẽ (P) .

b) Tìm các điểm thuộc đồ thị (P) sao cho tung độ gấp 3 lần hoành độ.

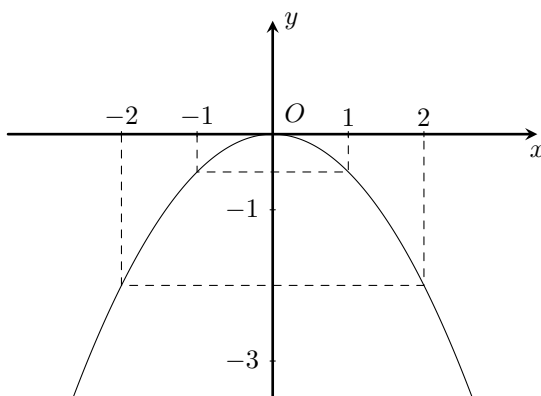
☞ $(0; 0)$ và $(-6; -18)$

 **Lời giải.**

a) Bảng giá trị

| | | | | | |
|-----------------------|----|----------------|---|----------------|----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = -\frac{1}{2}x^2$ | -2 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | -2 |

Đồ thị




b) Điểm thuộc đồ thị (P) có dạng $(x; -\frac{1}{2}x^2)$. Theo đề tung độ gấp 3 lần hoành độ nên ta có

$$-\frac{1}{2}x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -6 \Rightarrow y = 18. \end{cases}$$

Vậy các điểm cần tìm là $(0; 0)$ và $(-6; 18)$.

□

✦ Bài 3. Cho phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có 2 nghiệm là x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức sau: $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.  $A = 2$


 **Lời giải.**

Theo đề, phương trình $3x^2 - 6x + 2 = 0$ có 2 nghiệm là x_1 và x_2 . Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 2^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

□

✦ Bài 4. Ông Ba có chín trăm triệu đồng. Ông dùng một phần số tiền này để gửi ngân hàng với lãi suất 7,5% một năm. Phần còn lại, ông góp vốn với một người bạn để kinh doanh. Sau một năm, ông thu về số tiền cả vốn và lãi từ hai nguồn trên là một tỉ hai mươi triệu đồng. Biết rằng tiền lãi khi kinh doanh bằng 25% số tiền vốn ban đầu. Hỏi ông Ba đã gửi ngân hàng bao nhiêu tiền và góp bao nhiêu tiền với người bạn để kinh doanh?  600; 300 (triệu đồng)

 **Lời giải.**

Gọi x (triệu đồng) là số tiền ông Ba gửi ngân hàng. Điều kiện $x > 0$.
Số tiền ông Ba góp với người bạn để kinh doanh là $900 - x$ (triệu đồng).
Theo đề ta có phương trình

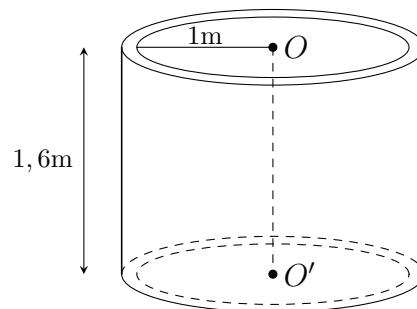
$$x + x \cdot 7,5\% + 900 - x + (900 - x) \cdot 25\% = 1020.$$

Giải phương trình, ta được $x = 600$ (thỏa mãn).

Vậy số tiền ông Ba gửi ngân hàng là 600 (triệu đồng). Số tiền ông Ba góp với người bạn để kinh doanh là 300 (triệu đồng). \square

🔗 Bài 5.

Cô Năm muốn xây một bể nước bê tông hình trụ có chiều cao là 1,6 m, bán kính lòng bể (tính từ tâm bể đến mép trong của bể) là $r = 1$ m, bề dày của thành bể là 10 cm và bề dày của đáy bể là 5 cm. Hỏi:



- Bể có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước (biết thể tích hình trụ bằng $\pi r^2 h$ với r là bán kính đáy; h là chiều cao hình trụ; $\pi \approx 3,14$). 🔗 4,87 (m³)
- Nếu cô Năm có 1,3 triệu đồng thì có đủ tiền mua bê tông tươi để xây bể nước trên không? Biết giá 1 m³ bê tông tươi là một triệu đồng.

🗨️ Lời giải.

- Phần chứa nước của bể có bán kính là $r = 1$ (m), chiều cao $h = 1,6 - 0,05 = 1,55$ (m) nên có thể tích

$$V_1 = \pi \cdot r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1,55 \approx 4,87 \text{ (m}^3\text{)}.$$

- Bán kính của bể hình trụ là $R = 1 + 0,1 = 1,1$ (m), chiều cao $h' = 1$ (m).
Thể tích của bể hình trụ là

$$V_2 = \pi \cdot R^2 h' = \pi \cdot 1,1^2 \cdot 1,6 \approx 6,08 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Thể tích của bể nước cần xây là

$$V = V_2 - V_1 = 6,08 - 4,87 = 1,21 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Số tiền cần dùng là 1,21 triệu đồng.

Vậy với 1,3 triệu đồng thì cô Năm đủ tiền mua bê tông tươi để xây bể nước trên. \square

🔗 Bài 6. Cuối học kì I, số học sinh giỏi của lớp 9A bằng 20% số học sinh cả lớp. Đến cuối học kì II, lớp có thêm 2 bạn đạt học sinh giỏi nên số học sinh giỏi ở học kì II bằng 25% số học sinh cả lớp. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh? 🔗 40 học sinh

🗨️ Lời giải.

Gọi x số học sinh của lớp 9A, điều kiện $x > 0$.

Số học sinh giỏi học kì I là $20\%x$ (học sinh).

Số học sinh giỏi học kì II là $25\%x$ (học sinh).

Theo đề, ta có phương trình

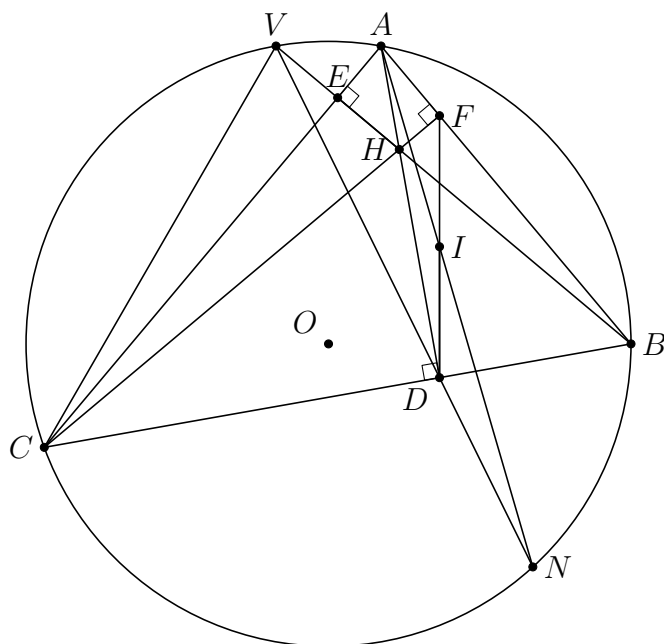
$$20\%x + 2 = 25\%x \Leftrightarrow x = 40.$$

Vậy số học sinh của lớp 9A là 40 học sinh. \square

✧ **Bài 7.** Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có 3 đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh $AEHF$ và $ACDF$ là các tứ giác nội tiếp.
- BE cắt (O) tại V . Chứng minh $\triangle HVC$ cân và $BH \cdot HV = 2FH \cdot CV$.
- VD cắt (O) tại N (N khác V). Gọi I là giao điểm của AN và DF . Chứng minh $ID = IF$.

🗨️ **Lời giải.**



- Chứng minh $AEHF$ và $ACDF$ là các tứ giác nội tiếp.
Ta có $\widehat{AEH} = 90^\circ$ ($BE \perp AC$); $\widehat{AFH} = 90^\circ$ ($CF \perp AB$).
Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$ nên nội tiếp đường tròn.
Xét tứ giác $ACDF$ có đỉnh D và F cùng nhìn AC dưới một góc 90° ($\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90^\circ$) nên nội tiếp đường tròn đường kính AC .
- Xét $\triangle ACF$ và $\triangle ABE$ có \widehat{A} chung và $\widehat{AFC} = \widehat{BEA} = 90^\circ$ nên $\triangle ACF \sim \triangle ABE$ (g.g)
 $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$. Mặt khác $\widehat{ABV} = \widehat{VCA}$ (cùng chắn cung VA). Do đó $\widehat{VCE} = \widehat{ECH}$.
Suy ra CE vừa là đường cao, vừa là đường phân giác của $\triangle HVC \Rightarrow \triangle HVC$ cân tại C .
Ta có $\triangle BFH \sim \triangle CVE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BH}{FH} = \frac{CE}{VE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CV}{HV} \Rightarrow BH \cdot HV = 2FH \cdot CV$.
- Ta có $\triangle AFI \sim \triangle VHD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IF}{FA} = \frac{HD}{HV}$ và $\triangle AFD \sim \triangle EHD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DF}{FA} = \frac{HD}{EH}$.
Mà $EH = EV = \frac{VH}{2}$. Do đó $\frac{IF}{FA} = \frac{DF}{2FA} \Rightarrow IF = \frac{DF}{2}$.
Vậy $IF = ID$.

□

D – ĐỀ KIỂM TRA HKII NĂM HỌC 2018 - 2019 QUẬN 1

✧ **Bài 1.** Giải các phương trình sau đây:

a) $5(x^2 + 1) - 3x(x + 3) = 10$.

🔍 $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 5$

$$x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) $4x^4 + 11x^2 - 20 = 0.$

Lời giải.

a) $5(x^2 + 1) - 3x(x + 3) = 10 \Leftrightarrow 5x^2 + 5 - 3x^2 - 9x - 10 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 = 0.$

$$\Delta = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 121 > 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = \frac{9 - 11}{4} = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{9 + 11}{4} = 5.$

b) Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta nhận được

$$4t^2 + 11t - 20 = 0.$$

Ta có $\Delta = 11^2 + 4 \cdot 4 \cdot 20 = 441 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 21$. Phương trình có nghiệm $t_1 = \frac{5}{4}$; $t_2 = -4$ (loại).

Với $t = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$

□

❖ Bài 2.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ trên mặt phẳng tọa độ.

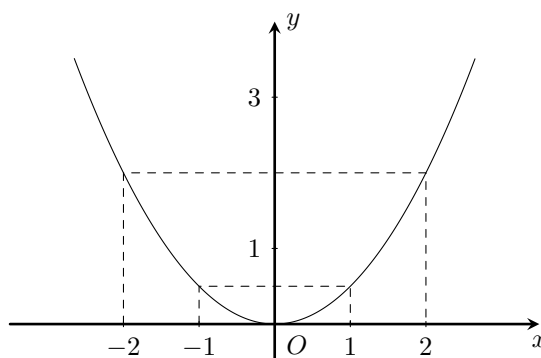
b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $(d): y = 2x + 6$ bằng phép toán. $\color{red}{\bullet} (-2; 2); (6; 18)$

Lời giải.

a) Bảng giá trị

| | | | | | |
|----------------------|----|---------------|---|---------------|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = \frac{1}{2}x^2$ | 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 |

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{1}{2}x^2 = 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $x = -2$; $x = 6$. Suy ra tọa độ các giao điểm là $(-2; 2)$; $(6; 18)$.



✦ **Bài 3.** Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (x là ẩn số).

a) Tìm điều kiện của m để phương trình trên có nghiệm.

🔗 $m \geq 2$

b) Tính tổng và tích hai nghiệm x_1, x_2 theo m .

🔗 $x_1 + x_2 = 2m; x_1x_2 = m^2 - 2m + 4$

c) Tìm các giá trị của m để hai nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình thỏa hệ thức:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 15.$$

🔗 $m = 9$

🗨 **Lời giải.**

$$x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0. \quad (1)$$

Ta có $\Delta' = m^2 - (m^2 - 2m + 4) = 2m - 4$.

a) Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

b) Với $m \geq 2$ phương trình (1) có nghiệm $x_1; x_2$. Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 2m + 4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 15 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 15 \\ &\Leftrightarrow (2m)^2 - 3(m^2 - 2m + 4) = 15 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 6m - 27 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình ta được $m = 9; m = -3$ (loại).

Vậy $m = 9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.



✦ **Bài 4.** Để tổ chức đi tham quan hướng nghiệp cho 435 người gồm học sinh khối 9 và giáo viên phụ trách, nhà trường đã thuê 11 chiếc xe gồm hai loại: loại 30 chỗ ngồi và loại 45 chỗ ngồi (không kể tài xế). Hỏi nhà trường cần thuê bao nhiêu xe mỗi loại? Biết rằng không có xe nào còn chỗ trống chỗ.

🔗 4 xe loại 30, 7 xe loại 40

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số xe loại 30 chỗ và loại 40 chỗ ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Số người đi loại xe 30 chỗ là $30x$ (người).

Số người đi loại xe 40 chỗ là $45y$ (người).

Theo đề, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 30x + 45y = 435 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 2x + 2y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 11 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7. \end{cases}$$

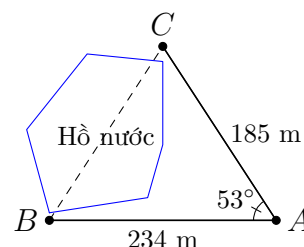
Vậy nhà trường cần thuê 4 xe loại 30 chỗ và 7 xe loại 40 chỗ.



✦ **Bài 5.**

Tính khoảng cách giữa hai địa điểm B và C , biết rằng từ vị trí A ta đo được $AB = 234$ m, $AC = 185$ m và $\widehat{BAC} = 53^\circ$ (kết quả tính bằng mét và làm tròn đến hàng đơn vị).

🔗 192 m



 **Lời giải.**

Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$).

Tam giác AHC vuông tại H có

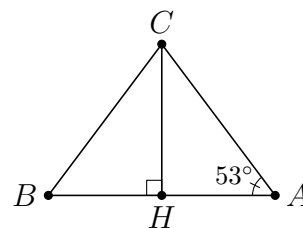
$$\sin A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin A = 185 \cdot \sin 53^\circ \approx 148 \text{ (m)}.$$

$$\cos A = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cdot \cos 53^\circ = 185 \cdot \cos 53^\circ \approx 111 \text{ (m)}.$$

Ta có $BH = AB - AH = 234 - 111 = 123$ (m).

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle CHB$ vuông tại H , ta có

$$BC^2 = CH^2 + BH^2 \Rightarrow BC = \sqrt{148^2 + 123^2} \approx 192 \text{ (m)}.$$

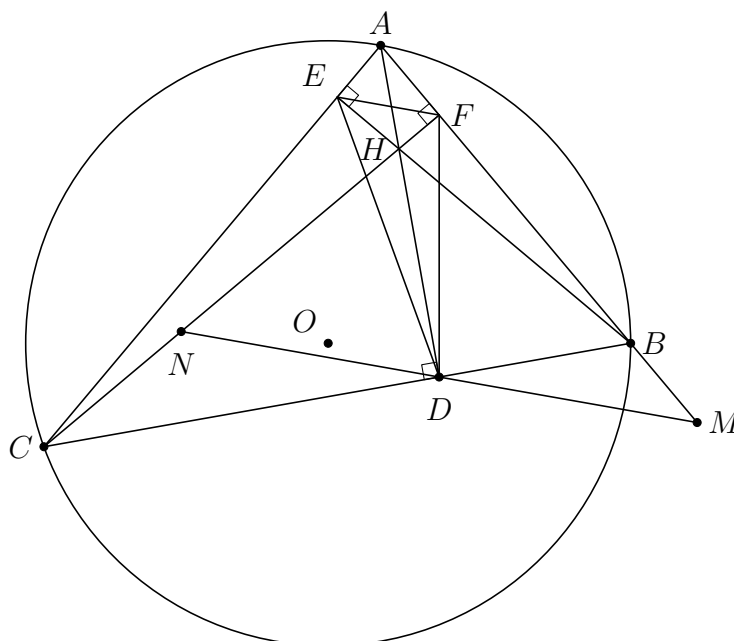


□

❖ Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD , BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

- Chứng minh các tứ giác $BCEF$ và $CDHE$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh EH là tia phân giác của góc DEF và $EB \cdot EH = ED \cdot EF$.
- Từ D kẻ một đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB và CF lần lượt tại M và N . Chứng minh D là trung điểm của MN .

 **Lời giải.**



- Tứ giác $BCEF$ có đỉnh E, F cùng nhìn cạnh BC dưới một góc 90° ($CF \perp AB$, $BE \perp AC$) nên nội tiếp đường tròn đường kính BC .
Xét tứ giác $CDHE$ có $\widehat{CDH} + \widehat{CEH} = 180^\circ$ ($AD \perp BC$, $BE \perp AC$) nên nội tiếp đường tròn.

b) Ta có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{HAF} = \widehat{HEF}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung HF).

Xét $\triangle EFB$ và $\triangle AHB$ có \widehat{B} chung và $\widehat{BAH} = \widehat{BEF}$ nên $\triangle EFB \sim \triangle AHB$ (g.g)

$$\Rightarrow \widehat{EFB} = \widehat{AHB}. \text{ Mà } \widehat{EHB} = \widehat{AHB} \Rightarrow \widehat{EHD} = \widehat{EFB}. \quad (1)$$

Mặt khác $\widehat{EDH} = \widehat{ECH}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung EH) và $\widehat{ECH} = \widehat{EBF}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung EF) nên $\widehat{EBF} = \widehat{EDH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EHD \sim \triangle EFB$. Do đó EH là tia phân giác của góc DEF và

$$\frac{EB}{EF} = \frac{ED}{EH} \Rightarrow EB \cdot EH = ED \cdot EF.$$

c) Ta có $\widehat{NFD} = \widehat{EFN}$ (vì FN là phân giác \widehat{EFD}) và $\widehat{EFN} = \widehat{DNF}$ (so le trong) nên $\widehat{NFD} = \widehat{DNF} \Rightarrow \triangle NFD$ cân tại $D \Rightarrow ND = DF$. (3)

Chứng minh tương tự, ta được $\widehat{DFM} = \widehat{FMD} \Rightarrow \triangle FDM$ cân tại $D \Rightarrow MD = DF$. (4)

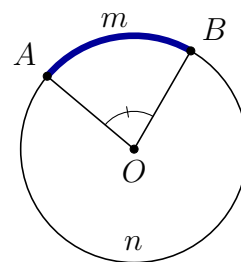
Từ (3) và (4) suy ra $ND = MD$. Vậy D là trung điểm của MN . □

BÀI 18. GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc ở tâm

- ☑ Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.
- ☑ Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn.
 \widehat{AOB} là góc ở tâm, \widehat{AmB} là cung bị chắn bởi \widehat{AOB} .



2. Số đo cung

- ☑ Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.
$$\text{sđ}\widehat{AmB} = \text{sđ}\widehat{AOB}.$$
- ☑ Số đo cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
$$\text{sđ}\widehat{AnB} = 360^\circ - \text{sđ}\widehat{AmB}.$$
- ☑ Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

3. Số đo cung

- ☑ Số đo cung nhỏ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó.
$$\text{sđ}\widehat{AmB} = \text{sđ}\widehat{AOB}.$$
- ☑ Số đo cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
$$\text{sđ}\widehat{AnB} = 360^\circ - \text{sđ}\widehat{AmB}.$$
- ☑ Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

4. So sánh hai cung

Ta chỉ so sánh hai cung trong một đường tròn hay trong hai đường trong bằng nhau. Khi đó:

- ☑ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

$$sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}.$$

- ☑ Trong hai cung, cung có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

$$sđ\widehat{AB} > sđ\widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}.$$

5. Khi nào thì $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$?

Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì

$$sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}.$$

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm số đo góc ở tâm - Số đo cung bị chắn

Để tính số đo của góc ở tâm, số đo của cung bị chắn, ta sử dụng các kiến thức sau:

- ☑ Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- ☑ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
- ☑ Số đo của nửa đường tròn bằng 180° . Cung cả đường tròn có số đo 360° .
- ☑ Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính góc.
- ☑ Sử dụng quan hệ đường kính và dây cung.

🔗 **Bài 1.** Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau

- a) 3 giờ. $\color{red}{\text{Q}}$ 90° b) 5 giờ. $\color{red}{\text{Q}}$ 150° c) 6 giờ. $\color{red}{\text{Q}}$ 180° d) 22 giờ. $\color{red}{\text{Q}}$ 300°

💬 Lời giải.

Ta sẽ xem mặt đồng hồ như hình tròn nên cung cả đường tròn có số đo là 360° .

- a) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 3 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ \div 12 \times 3 = 90^\circ$.
- b) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 5 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ \div 12 \times 5 = 150^\circ$.
- c) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 6 giờ thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ \div 12 \times 6 = 180^\circ$.
- d) Khi kim phút và kim giờ ở thời điểm 22 giờ hay 10 giờ đêm thì góc ở tâm có số đo là $360^\circ \div 12 \times 10 = 300^\circ$.

□

🔗 Bài 2.

- a) Từ 2 giờ đến 5 giờ thì kim giờ quay được một góc ở tâm bằng nhiều độ?

$\color{red}{\text{Q}}$ 900°

b) Cũng hỏi như thế từ 7 giờ đến 9 giờ?

🔍 60°

🗨️ Lời giải.

a) Khi kim đồng hồ đến mốc 2 giờ thì góc ở tâm có số đo là 60° , nếu đến mốc 5 giờ thì góc ở tâm có số đo là 150° . Do đó, từ 2 giờ đến 5 giờ thì kim giờ quay được một góc ở tâm bằng $150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

b) Khi kim đồng hồ đến mốc 7 giờ thì góc ở tâm có số đo là 210° , nếu đến mốc 9 giờ thì góc ở tâm có số đo là 270° . Do đó, từ 7 giờ đến 9 giờ thì kim giờ quay được một góc ở tâm bằng $270^\circ - 210^\circ = 60^\circ$.

□

🔗 **Bài 3.** Một đồng hồ chạy chậm 20 phút. Hỏi để chỉnh lại đúng giờ thì phải quay kim phút một góc ở tâm là bao nhiêu độ?

🔍 10°

🗨️ Lời giải.

Đổi: 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ.

Để chỉnh lại cho đúng giờ ta cần quay một góc ở tâm bằng $30^\circ \times \frac{1}{3} = 10^\circ$.

□

🔗 **Bài 4.** Chênh lệch múi giờ giữa Việt Nam và Nhật Bản là 2 giờ. Hỏi để chỉnh một đồng hồ ở Việt Nam theo đúng giờ Nhật Bản thì kim giờ phải quay một góc ở tâm là bao nhiêu độ?

🔍 60°

🗨️ Lời giải.

Vì chênh lệch múi giờ giữa Việt Nam và Nhật Bản là 2 giờ nên để chỉnh một đồng hồ ở Việt Nam theo đúng giờ Nhật Bản thì kim giờ phải quay một góc ở tâm bằng $60^\circ \times 2 = 120^\circ$.

□

🔗 **Bài 5.** Cho tam giác đều ABC . Gọi O là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C . Tính số đo góc ở tâm \widehat{AOB} .

🔍 120°

🗨️ Lời giải.

Tâm O là giao điểm của ba đường trung trực trong $\triangle ABC$ đều.

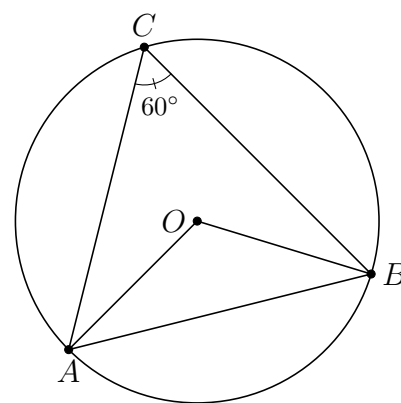
Ta có: $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} = \widehat{BAC} \div 2 = 30^\circ$ và

$\widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{CBA} \div 2 = 30^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ cân tại O , ta thấy

$\widehat{AOB} = 180^\circ - (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$.

Vậy số đo góc ở tâm \widehat{AOB} là 120° .



□

🔗 **Bài 6.** Trên đường tròn tâm O lần lượt lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AOB} = 130^\circ$, $s\widehat{AC} = 60^\circ$. Tính số đo mỗi cung BC (cung lớn và cung nhỏ) trong các trường hợp

a) C nằm trên cung nhỏ AB ;

🔍 290°

b) C nằm trên cung lớn AB .

🔍 170°, 190°

🗨️ Lời giải.

a)

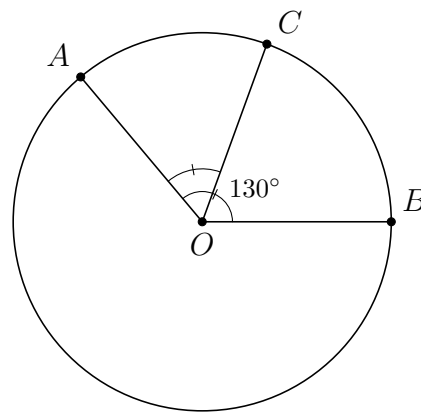
Vì $\widehat{sdAC} = \widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOC} = 60^\circ$.

Mà $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{BOC}$ (vì C nằm trên cung nhỏ AB)

do đó $\widehat{BOC} = \widehat{AOB} - \widehat{AOC}$.

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 130^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

Vậy cung nhỏ BC là 70° và cung lớn BC là $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$.



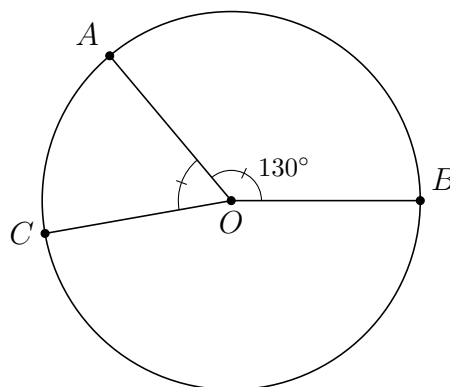
b)

Vì $\widehat{sdAC} = \widehat{AOC}$ nên $\widehat{AOC} = 60^\circ$.

Mà $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} + \widehat{BOA}$ (vì C nằm trên cung lớn AB)

do đó $\widehat{BOC} = 60^\circ + 130^\circ = 190^\circ$.

Vậy cung nhỏ BC là $360^\circ - 190^\circ = 170^\circ$, cung lớn BC là 190° .



□

✦ **Bài 7.** Trên đường tròn (O) , lấy hai điểm A và B sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Gọi C là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Tính số đo cung nhỏ BC và cung lớn BC .

🔗 300°

💬 **Lời giải.**

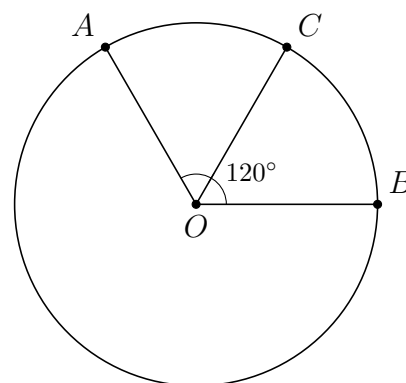
Vì C là điểm chính giữa cung nhỏ AB nên

$\widehat{sdAB} = \widehat{sdAC} + \widehat{sdCB} = 2 \cdot \widehat{sdCB}$.

Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 2 \cdot \widehat{COB}$

$\Rightarrow \widehat{COB} = \widehat{AOB} \div 2 = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$.

Vậy số đo cung nhỏ BC là 60° và số đo cung lớn BC là $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.



□

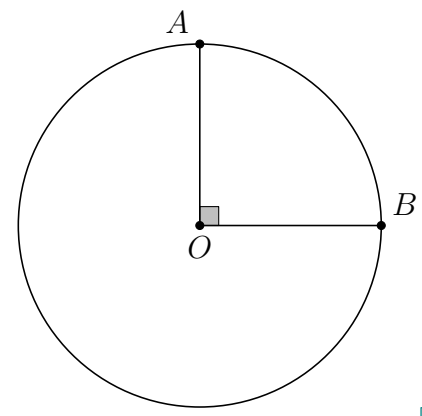
C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 8.** Trên đường tròn (O) , lấy hai điểm A và B sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính số đo mỗi cung AB .

🔗 270°

💬 **Lời giải.**

Vì $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên số đo cung nhỏ AB là 90° và số đo cung lớn AB là $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.



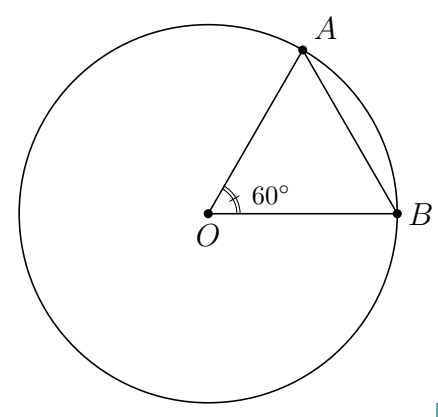
□

↔ **Bài 9.** Cho đường tròn $(O; R)$ có dây $AB = R$. Tính số đo

- a) Góc ở tâm \widehat{AOB} ; 🔗 60° b) Cung lớn AB . 🔗 300°

🗨 **Lời giải.**

- a) Vì $AB = R$ nên $\triangle OAB$ đều hay $\widehat{AOB} = \widehat{OAB} = \widehat{ABO} = 60^\circ$.
- b) Do $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên số đo cung lớn AB là $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.



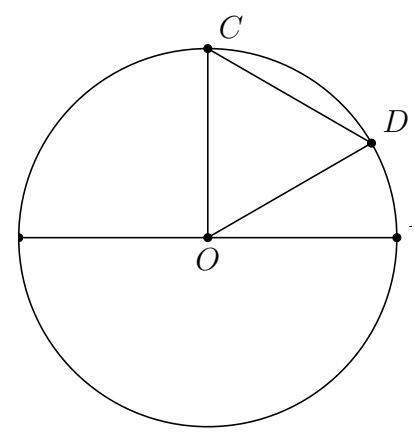
□

↔ **Bài 10.** Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa cung AB . Vẽ dây CD có độ dài bằng R . Tính số đo của góc ở tâm BOD trong các trường hợp

- a) D nằm trên cung CB ; 🔗 30° b) D nằm trên cung CA . 🔗 150°

🗨 **Lời giải.**

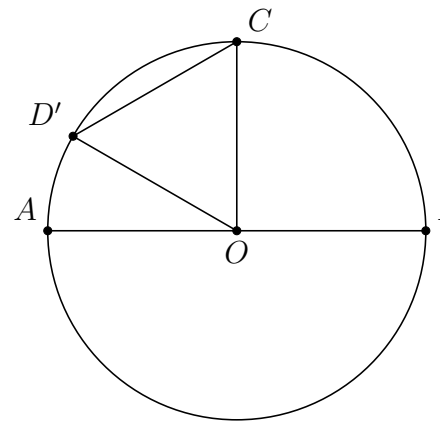
- a) Vì AB là đường kính của $(O; R)$ và C nằm chính giữa cung AB nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \widehat{AOB} \div 2 = 90^\circ$.
 Mặt khác, vì $OC = OD = CR = R$ nên $\triangle OCD$ là tam giác đều hay $\widehat{COD} = 60^\circ$.
 Ta có $\widehat{BOC} = \widehat{COD} + \widehat{BOD} \Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{BOC} - \widehat{COD} = 30^\circ$.



b)

Trường hợp D' nằm trên cung CA ta thực hiện tương tự như câu a).

Ta có $\widehat{BOD'} = \widehat{BOC} + \widehat{COD'} = 150^\circ$.



□

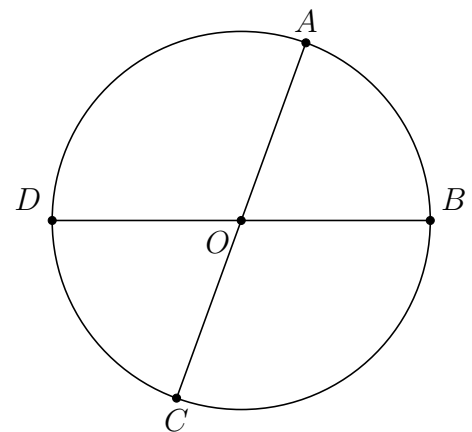
✦ **Bài 11.** Trên đường tròn (O) , lấy hai điểm A và B phân biệt. Kẻ các đường kính AOC và BOD . Chứng minh $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.

🗨 **Lời giải.**

Vì AC, BD cắt nhau tại O nên $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (hai góc đối đỉnh).

Mà $sđ\widehat{AD} = \widehat{AOD}$ và $sđ\widehat{BC} = \widehat{BOC}$ do đó $sđ\widehat{AD} = sđ\widehat{BC}$.

Vậy $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ (đpcm).



□

✦ **Bài 12.** Trên một đường tròn, có cung AB bằng 150° , cung AD nhận B làm điểm chính giữa, cung CB nhận A làm điểm chính giữa. Tính số đo mỗi cung CD .

🔗 $90^\circ, 270^\circ$

🗨 **Lời giải.**

Vì $sđ\widehat{AB} = 150^\circ$ nên $\widehat{AOB} = 150^\circ$.

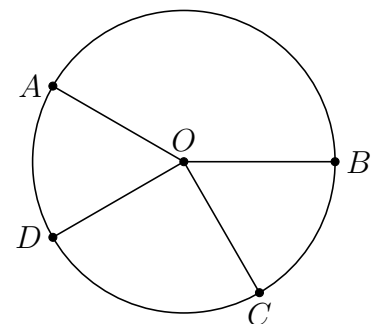
Mà B, A lần lượt là điểm chính giữa trên cung AD và CB nên $\widehat{BOD} = \widehat{COA} = \widehat{AOB} = 150^\circ$.

Số đo cung lớn AB là $360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$.

Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{AOD} + \widehat{BOD} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{AOB} - \widehat{BOD} = 60^\circ$.

Và $\widehat{AOC} = \widehat{AOD} + \widehat{DOC} \Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOD} = 90^\circ$.

Vậy số đo cung nhỏ AB là 90° và số đo cung lớn AB là $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.



□

BÀI 19. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

⇨ **Định lí 19.1.** Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

⇨ **Định lí 19.2.** Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau

- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

1. Lý thuyết bổ trợ

- Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây thì đi qua chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Liên hệ giữa cung và dây

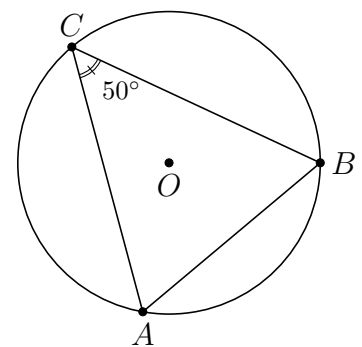
Sử dụng định nghĩa góc ở tâm, kết hợp với sự liên hệ giữa cung và dây.

⇨ **Bài 1.** Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O) . Cho biết $\widehat{BAC} = 50^\circ$. So sánh các cung nhỏ AB , AC và BC .

🗨️ **Lời giải.**

Vì $\triangle ABC$ cân tại A và $\widehat{BAC} = 50^\circ$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$.

Ta thấy $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} > \widehat{BAC}$ nên $sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{AC} > sđ\widehat{AB}$.
 Vậy $\widehat{BC} = \widehat{AC} > \widehat{AB}$.



□

⇨ **Bài 2.** Chứng minh hai cung bị chắn bởi hai dây song song thì bằng nhau.

 **Lời giải.**

Đặt \widehat{BD} và \widehat{AC} là hai cung bị chắn bởi hai dây song song AB, CD .

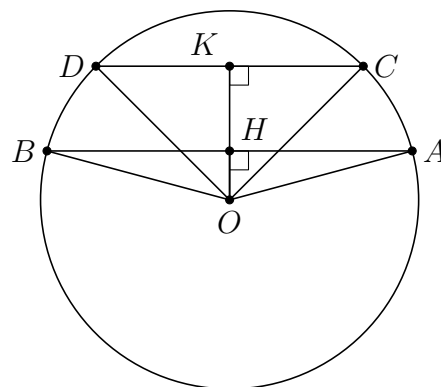
Vì $\triangle OAB$ cân tại O và OH là đường cao của $\triangle OAB$ nên $\widehat{HOB} = \widehat{HOA}$ (1).

Vì $\triangle OCD$ cân tại O và OK là đường cao của $\triangle OCD$ nên $\widehat{KOD} = \widehat{KOC}$ (2).

Ta thấy $\widehat{BOD} = \widehat{HOB} - \widehat{KOD} = \widehat{HOA} - \widehat{KOC} = \widehat{AOC}$ (3).

Từ (1), (2) và (3), suy ra $sđ\widehat{BD} = sđ\widehat{AC}$.

Vậy $\widehat{BD} = \widehat{AC}$ (đpcm).



□

❖ Bài 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB , kẻ hai dây CD và EF cùng song song với AB . Chứng minh

- Hai cặp cung nhỏ AC, BD và AE, BF bằng nhau;
- Hai cung nhỏ CE và DF bằng nhau.

 **Lời giải.**

a) Vì $\triangle OAB$ cân tại O và OH là đường cao của $\triangle OAB$ nên $\widehat{HOB} = \widehat{HOA}$ (1).

Vì $\triangle OCD$ cân tại O và OK là đường cao của $\triangle OCD$ nên $\widehat{KOD} = \widehat{KOC}$ (2).

Ta thấy $\widehat{BOD} = \widehat{HOB} - \widehat{KOD} = \widehat{HOA} - \widehat{KOC} = \widehat{AOC}$ (3).

Từ (1), (2) và (3), suy ra $sđ\widehat{BD} = sđ\widehat{AC}$ hay $\widehat{BD} = \widehat{AC}$.

Mặt khác $\widehat{BOF} = \widehat{KOB} - \widehat{KOF} = \widehat{KOA} - \widehat{KOE} = \widehat{AOE}$ (4).

Từ (1), (2) và (4), suy ra $sđ\widehat{BF} = sđ\widehat{AE}$ hay $\widehat{BF} = \widehat{AE}$.

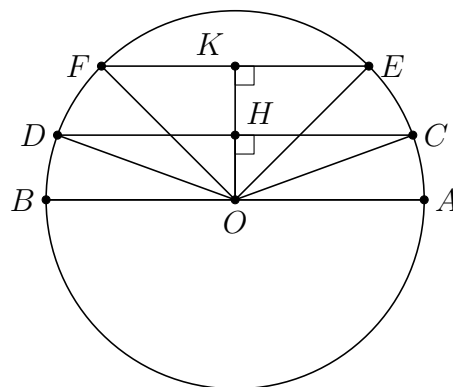
b) Ta có $sđ\widehat{AE} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CE}$

$$\Rightarrow sđ\widehat{CE} = sđ\widehat{AE} - sđ\widehat{AC}$$

$$= sđ\widehat{BF} - sđ\widehat{BD}$$

$$= sđ\widehat{DF}$$

$$\text{Vậy } \widehat{CE} = \widehat{DF}.$$



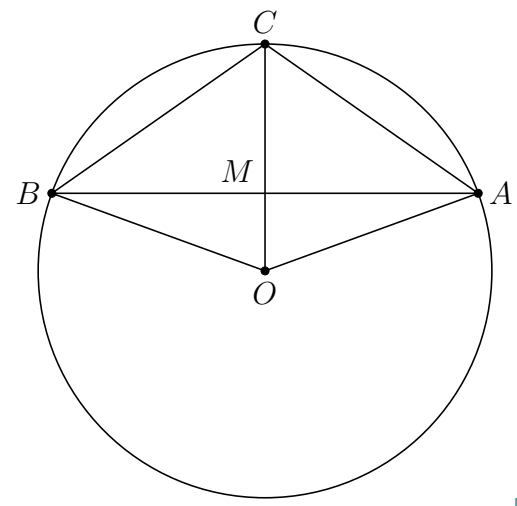
□

❖ Bài 4.

- Chứng minh đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
- Chứng minh đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại

 **Lời giải.**

- a) Ta có $\widehat{CB} = \widehat{CA} \Rightarrow CB = CA$
 $\Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{CAB}$ (do ΔCBA cân tại C).
 Mà $\Delta OBC = \Delta OAC$ (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OCA}$.
 Do đó $\Delta MBC = \Delta MAC$ (g-c-g) $\Rightarrow MB = MA$ (đpcm).
- b) *Chiều thuận* Vì ΔCBA cân tại C và CM là trung tuyến (cmt) nên $CM \perp AB$.
Chiều ngược Vì $CM \perp AB$ và ΔOAB cân tại O nên $\widehat{BOM} = \widehat{AOM} \Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AOC} \Rightarrow sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AC}$.



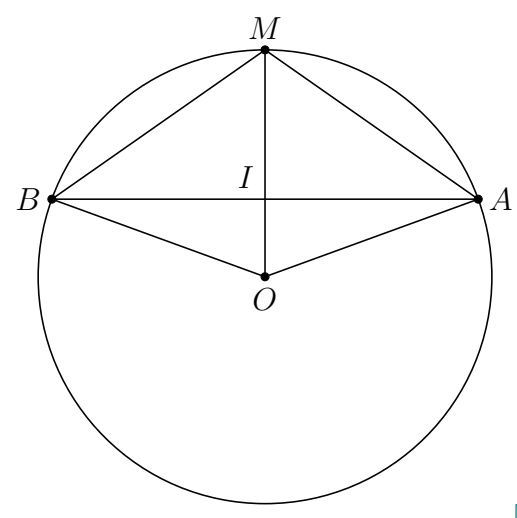
□

✦ **Bài 5.** Cho đường tròn (O) , kẻ dây AB bất kì. M là điểm chính giữa cung AB , OM cắt dây AB tại I . Chứng minh

- a) I là trung điểm của dây AB ;
- b) OM vuông góc AB .

🗨️ **Lời giải.**

- a) Ta có $\widehat{BM} = \widehat{AM} \Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{AOM}$ hay $\widehat{BOI} = \widehat{AOI}$.
 Do đó $\Delta OBI = \Delta OAI$ (c-g-c) $\Rightarrow IB = IA$.
 Vậy I là trung điểm của dây AB (đpcm).
- b) Vì ΔOAB cân tại O và OI là trung tuyến của ΔOAB (cmt) nên $OI \perp AB$.
 Vậy $OM \perp AB$ (đpcm).



□

✦ **Bài 6.** Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BCD . Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC, K \in BD$).

- a) Chứng minh $OH > OK$;
- b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC .

🗨️ **Lời giải.**

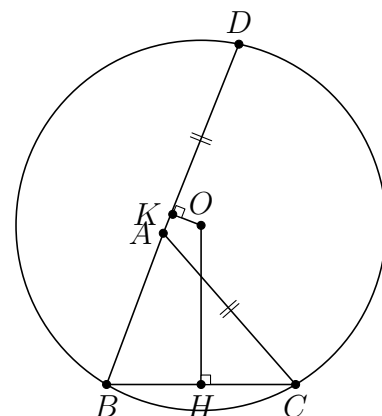
a) Xét $\triangle ABC$, có $BC < AB + AC$ (bđt tam giác) (1).

Mà $BD = AB + AD$ (1).

Từ (1), (2) suy ra $BC < BD$

Vậy $OH > OK$

b) Vì $BC < BD$ (cmt) nên $\widehat{BC} < \widehat{BD}$ (liên hệ giữa cung và dây căng cung).



□

✦ **Bài 7.** Trên dây cung AB của một đường tròn (O) , lấy hai điểm C và D chia dây này thành ba đoạn bằng nhau $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E, F . Chứng minh

a) $\widehat{AE} = \widehat{FB}$;

b) $\widehat{AE} < \widehat{EF}$.

☕ **Lời giải.**

a) Vì $\triangle OAB$ cân tại O nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Xét $\triangle OAC$ và $\triangle OBD$, ta có

$$OA = OB \text{ (gt).}$$

$$\widehat{OAC} = \widehat{OBD} \text{ (cmt).}$$

$$AC = BD \text{ (gt).}$$

$$\Rightarrow \triangle OAC = \triangle OBD \text{ (c-g-c).}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} \text{ (hai góc tương ứng) hay } \widehat{AOE} = \widehat{FOB}.$$

Vậy $\widehat{AE} = \widehat{FB}$ (đpcm).

b) Vì $\triangle OAC = \triangle OBD$ nên $OC = OD$. Do đó $\triangle OCD$ cân tại O .

$\Rightarrow \widehat{OCD} < 90^\circ$ hay $\widehat{ECD} > 90^\circ$ (do \widehat{OCD} và \widehat{ECD} kề bù).

Xét $\triangle CDE$, ta có

$$\widehat{ECD} > \widehat{CED} \Rightarrow ED > CD \Rightarrow ED > AC.$$

Xét $\triangle AOC$ và $\triangle EOD$, ta có

$$OA = OE$$

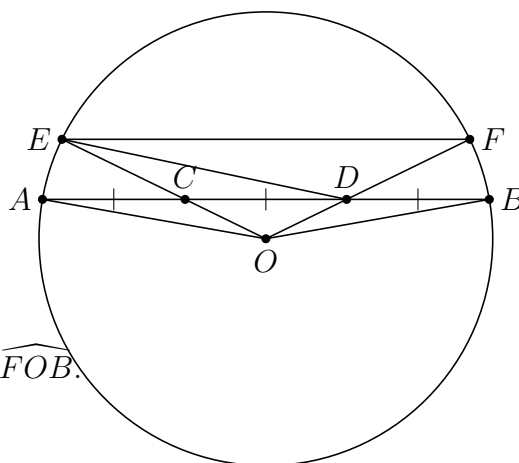
$$OC = OD$$

$$AC < ED$$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} < \widehat{EOD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AE} < \widehat{EF}.$$

□



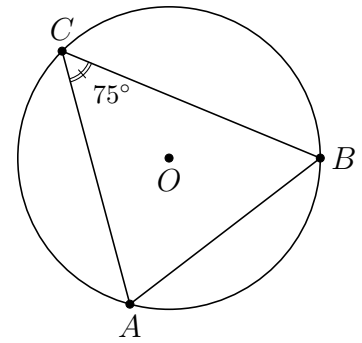
C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 8.** Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O) . Cho biết $\widehat{BAC} = 75^\circ$. So sánh các cung nhỏ AB , AC và BC .

Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A và $\widehat{BAC} = 75^\circ$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ - 75^\circ}{2} = 52,5^\circ$.

Ta thấy $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} < \widehat{BAC}$ nên $sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{AC} < sđ\widehat{AB}$.
 Vậy $\widehat{BC} = \widehat{AC} < \widehat{AB}$.



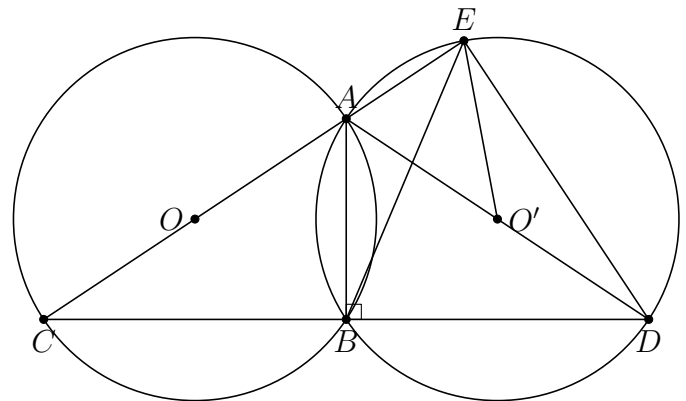
□

✦ Bài 9. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Kẻ các đường kính AOC , $AO'D$. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O') .

- So sánh các cung nhỏ BC và BD .
- Chứng minh B là điểm chính giữa của cung EBD ($\widehat{BE} = \widehat{BD}$).

Lời giải.

- Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$, ta có
 $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$
 AB (cạnh chung)
 $AC = AD$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD$ (ch-cgv)
 $\Rightarrow BC = BD$ (hai cạnh tương ứng)
 $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BD}$ (đpcm).



- Vì $\triangle AED$ có $\widehat{AED} = 90^\circ$ nên $\triangle AED$ vuông tại E .
 Mà $BC = BD = BE = \frac{1}{2}CD$
 $\Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{BD}$
 $\Rightarrow B$ là điểm chính giữa của cung EBD .

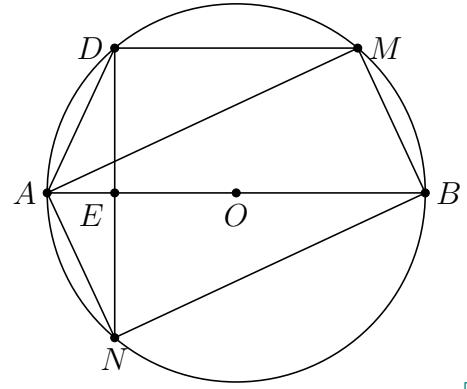
□

✦ Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho số đo cung nhỏ $\widehat{BN} < 90^\circ$. Vẽ dây MD song song với AB . Dây DN cắt AB tại E . Chứng minh

- $\widehat{BM} = \widehat{AD}$;
- $DN \perp AB$;
- $DE = EN$.

Lời giải.

- a) Ta có $MD \parallel AB \Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{AD}$.
- b) $AM \parallel BN \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{AN}$.
 $\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{AN} \Rightarrow AD = AN$.
 $\Rightarrow AO$ là trung trực $DN \Rightarrow AO \perp DN$.
- c) Vì $DN \perp AB = \{E\}$ và AE là trung trực DN
 $\Rightarrow DE = EN$ (đpcm).



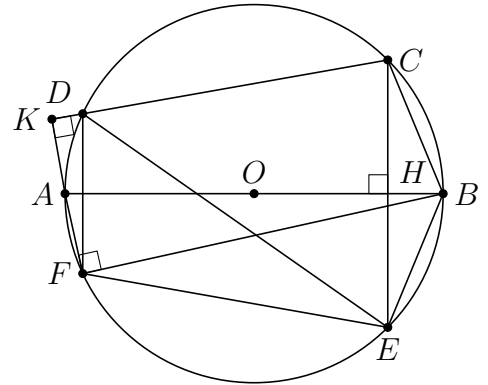
□

✧ **Bài 11.** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên cùng nửa đường tròn lấy hai điểm C, D . Kẻ CH vuông góc với AB tại H , CH cắt (O) tại điểm thứ hai E . Kẻ AK vuông góc với CD tại K , AK cắt (O) tại điểm thứ hai F . Chứng minh

- a) Hai cung nhỏ $\widehat{CF}, \widehat{DB}$ bằng nhau.
- b) Hai cung nhỏ $\widehat{BF}, \widehat{DE}$ bằng nhau.
- c) $DE = BF$

🗨️ Lời giải.

- a) $BF \parallel CD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DF}$
 $\Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{CD} = \widehat{DF} + \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{CF}$
- b) AB là đường trung trực của CE
 $\Rightarrow BC = BE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{DF} = \widehat{BE}$.
 $\Rightarrow \widehat{BE} + \widehat{EF} = \widehat{DF} + \widehat{EF} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{DE}$
- c) $\widehat{BF} = \widehat{DE} \Rightarrow BF = DE$.



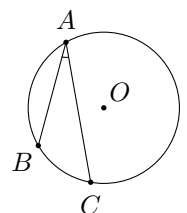
□

BÀI 20. GÓC NỘI TIẾP

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

✧ Định nghĩa 20.1.

- ☉ Góc có **đỉnh** nằm trên đường tròn và **hai cạnh** chứa hai cung của đường tròn gọi là góc nội tiếp.
- ☉ Cung nằm bên trong góc được gọi là bị cung chắn.



✧ **Định lý 20.1.** Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn.

Hệ quả. Trong một đường tròn

- ☑ Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- ☑ Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- ☑ Các góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.
- ☑ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

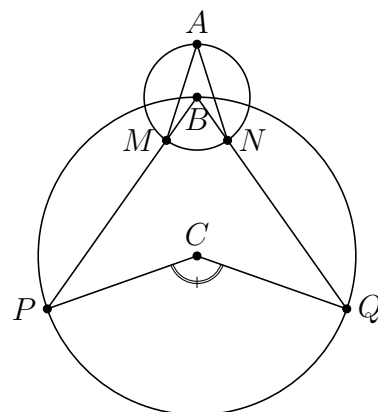
Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh các góc bằng nhau, đoạn thẳng bằng nhau

Dùng Hệ quả phần Tóm tắt lý thuyết và Liên hệ giữa cung và dây cung để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau.

🔗 Bài 1.

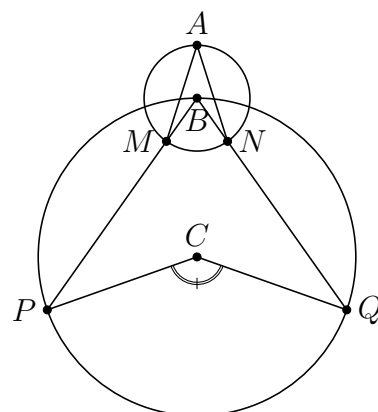
Hai đường tròn có tâm B, C và điểm B nằm trên đường tròn tâm C (như hình vẽ bên).

- a) Biết $\widehat{MAN} = 30^\circ$, tính \widehat{PCQ} . 👉 120°
- b) Nếu $\widehat{PCQ} = 136^\circ$ thì \widehat{MAN} có số đo bằng bao nhiêu? 👉 34°



🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $\widehat{PCQ} = 2\widehat{MBN} = 4\widehat{MAN} = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.
- b) Theo câu trên ta có $136^\circ = \widehat{PCQ} = 4\widehat{MAN} \Rightarrow \widehat{MAN} = 34^\circ$.



□

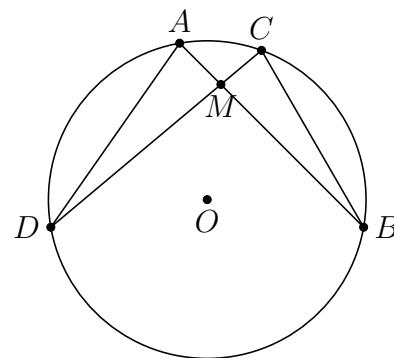
🔗 **Bài 2.** Cho (O) và điểm M cố định. Qua M kẻ hai đường thẳng, đường thẳng thứ nhất cắt đường tròn (O) tại A và B , đường thẳng thứ hai cắt đường tròn tại C và D . Chứng minh $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

🗨️ Lời giải.

Trường hợp 1: M nằm trong đường tròn.

$$\triangle AMC \sim \triangle DMB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

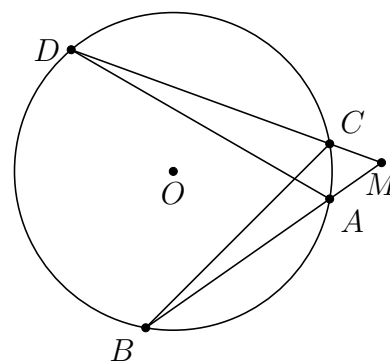
$$\Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$



Trường hợp 2: M nằm ngoài đường tròn.

$$\triangle BMC \sim \triangle DMA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$$

$$\Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba điểm thẳng hàng

Dùng Hệ quả phần Tóm tắt lý thuyết và Liên hệ giữa cung và dây cung để chứng minh hai đường thẳng bằng nhau, ba điểm thẳng hàng.

❖ **Bài 3.** Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. Đường thẳng CA cắt nửa đường tròn ở M , CB cắt nửa đường tròn ở N . Gọi H là giao điểm của AN và BM .

- Chứng minh CH vuông góc với AB .
- Gọi I là trung điểm của CH . Chứng minh MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

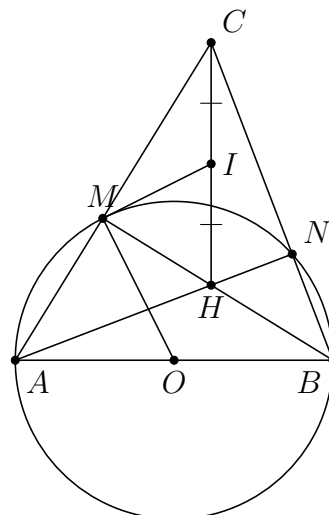
🗨️ **Lời giải.**

a) Dễ dàng chứng minh được AN, BM là đường cao của tam giác ABC . Mà $AN \cap BM = \{H\} \Rightarrow CH \perp AB$.

b) $\widehat{MCI} = \widehat{CMI}$ (tam giác MCI cân tại I)

$\widehat{MAO} = \widehat{OMA}$ (tam giác MAO cân tại O)

Mà $\widehat{MCI} + \widehat{MAO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CMI} + \widehat{OMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OMI} = 90^\circ$. Vậy MI là tiếp tuyến của (O) .



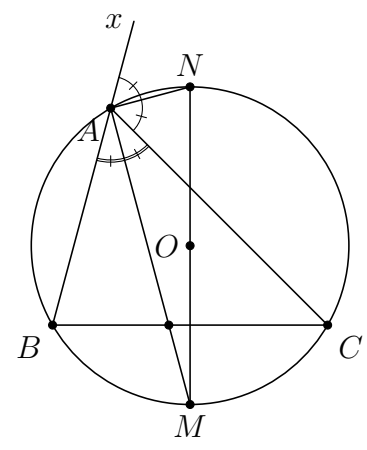


⚡ **Bài 4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại M . Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường tròn tại N . Chứng minh

- a) Tam giác MBC cân.
- b) Ba điểm M, O, N thẳng hàng.

💬 **Lời giải.**

- a) AM là phân giác \widehat{BAC} nên $\widehat{BM} = \widehat{CM} \Rightarrow BM = CM.$
 \Rightarrow tam giác BMC cân tại M .
- b) AM, AN lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài góc A . Do đó $\widehat{AMN} = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính, suy ra M, O, N thẳng hàng.

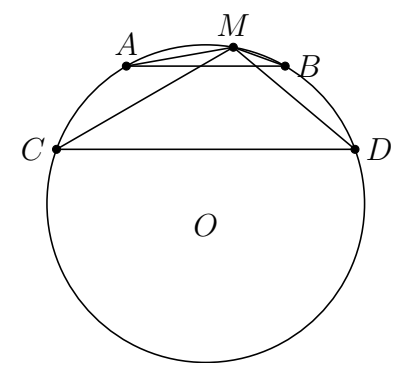


C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

⚡ **Bài 5.** Cho đường tròn (O) và hai dây song song AB, CD . Trên cung nhỏ AB , lấy điểm M tùy ý. Chứng minh $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

💬 **Lời giải.**

$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{BMD}.$

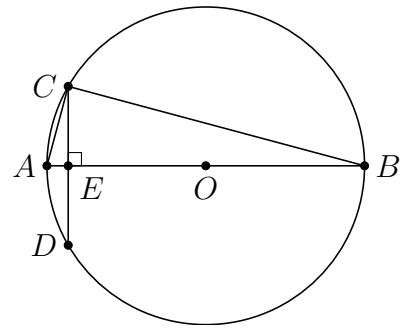


⚡ **Bài 6.** Cho đường tròn (O) đường kính AB vuông góc dây cung CD tại E . Chứng minh $CD^2 = 4AE \cdot BE$.

💬 **Lời giải.**

Tam giác ACB vuông tại C và $CE \perp AB$ tại E .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có $CE^2 = AE \cdot BE$ hay $CD^2 = 4 \cdot AE \cdot BE$.



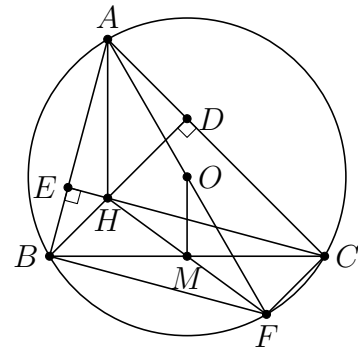
□

✦ **Bài 7.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

- Tứ giác $BFCH$ là hình gì?
- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh ba điểm H, M, E thẳng hàng.
- Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

🗨️ Lời giải.

- Ta có $\widehat{FCA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow FC \perp AC$, theo giả thiết ta cũng có $BD \perp AC$. Suy ra $BD \parallel FC$. Chứng minh tương tự ta có $CE \parallel FB$. Do đó tứ giác $BFCH$ là hình bình hành.
- Do tứ giác $BFCH$ là hình bình hành nên $BM = CM$. Suy ra M là trung điểm HF .
- OM là đường trung bình của tam giác AHF . Do đó $OM = \frac{1}{2}AH$.



□

✦ **Bài 8.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ đường thẳng MH vuông góc với AB ($H \in AB$). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm I đường kính AH và tâm K đường kính BH . MA và MB cắt hai nửa đường tròn (I) và (K) lần lượt tại P và Q . Chứng minh

- $MH = PQ$.
- Hai tam giác MPQ và tam giác MBA đồng dạng.
- PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K) .

🗨️ Lời giải.

a) Ta có

$\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{BQH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MQH} = 90^\circ$.

$\widehat{APH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MPH} = 90^\circ$.

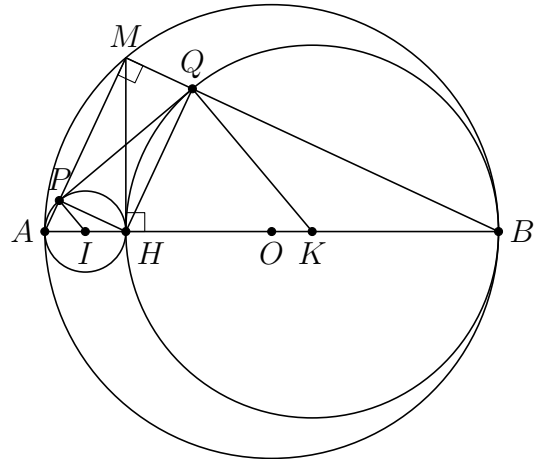
Do đó tứ giác $MPHQ$ có ba góc vuông, nên $MPHQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MH = PQ$.

b) Do tứ giác $MPHQ$ là hình chữ nhật nên $\widehat{MPQ} = \widehat{MHQ}$.

Mặt khác

$\widehat{MHQ} + \widehat{QHB} = 90^\circ$ và $\widehat{MBA} + \widehat{QHB} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{MHQ} = \widehat{MBA}$. Do đó $\triangle MPQ \sim \triangle MBA$ (g.g).



3. Do tứ giác $MPHQ$ là hình chữ nhật nên $\widehat{PQH} = \widehat{MHQ}$. Theo câu trên, ta có $\widehat{MHQ} = \widehat{MBA}$, $\Rightarrow \widehat{PQH} = \widehat{MBA}$ (1).

Ta có tam giác QKB cân tại K . Do đó $\widehat{MBA} = \widehat{BQK}$. Kết hợp với (1) ta được $\widehat{MBA} = \widehat{PQH} = \widehat{BQK}$ (2)

Ta có tam giác QKH cân tại K . Do đó $\widehat{QHB} = \widehat{HQB}$ (3).

Ngoài ra $\widehat{QHB} + \widehat{MBA} = 90^\circ$ (4).

Từ (1), (2), (3), (4) ta nhận được $\widehat{PQH} + \widehat{HQB} = 90^\circ$ hay PQ là tiếp tuyến của (K) . Chứng minh tương tự ta cũng nhận được PQ là tiếp tuyến của (I) . □

D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 9.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , lấy M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A . Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C . Chứng minh $MA^2 = MC \cdot MD$.

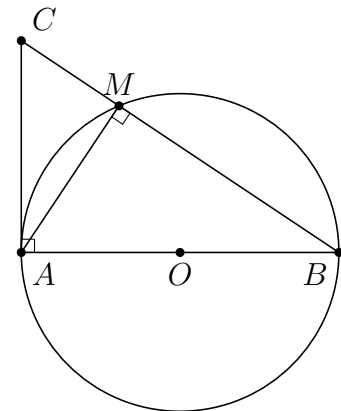
🗨️ **Lời giải.**

\widehat{AMB} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Do đó $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$.

Áp dụng Hệ thức lượng vào tam giác ABC vuông tại A ta có AM là đường cao tương ứng với cạnh huyền BC .

$\Rightarrow AM^2 = MB \cdot MC$.

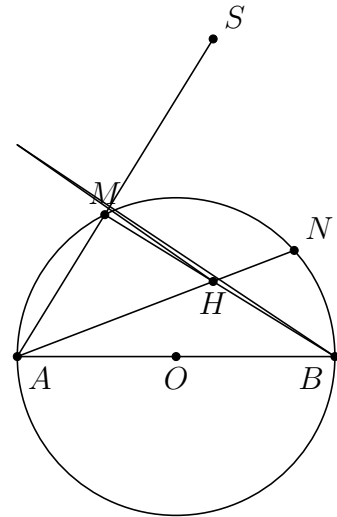


□

✧ **Bài 10.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M và N . Gọi H là giao điểm của BM và AN . Chứng minh SH vuông góc với AB .

Lời giải.

Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow BM \perp AC$ hay BM là đường cao của tam giác ABC .
 Chứng minh tương tự ta có AN là đường cao của tam giác ABC .
 Do đó H là trực tâm của tam giác ABC . Vậy $SH \perp AB$.



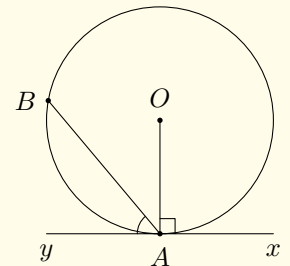
□

BÀI 21. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 21.1.

Cho đường tròn (O) có xy là tiếp tuyến tại điểm A và dây cung AB . Khi đó, \widehat{BAy} được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.



Định lý 21.1. Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Hệ quả. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh các góc bằng nhau, các đẳng thức hoặc tam giác đồng dạng

Nội dung phương pháp
 Dùng Hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và Hệ quả của góc nội tiếp.

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = \sqrt{3}R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại A . Tính $\widehat{ABC}, \widehat{BAC}$.

60°, 60°

Lời giải.

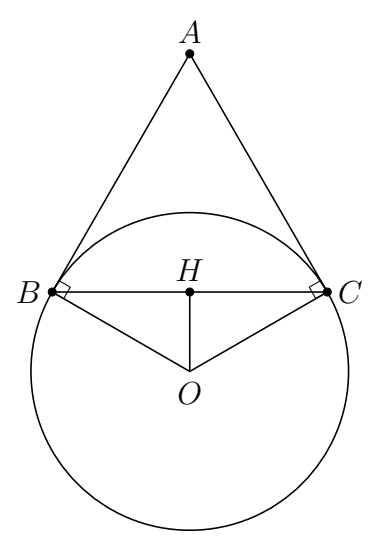
Gọi H là trung điểm BC , khi đó $OH \perp BC$ (đường kính đi qua trung điểm của dây cung).

Xét tam giác OHB , ta có

$$\cos \widehat{CBO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{CBO} = 30^\circ.$$

Do tam giác BOC cân tại O nên $\widehat{BCO} = 30^\circ$

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ và $\widehat{BAC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



□

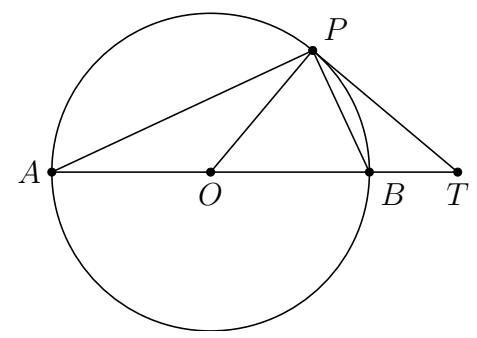
❖ **Bài 2.** Cho nửa đường tròn tâm (O) , đường kính AB . Lấy điểm P khác A và B trên nửa đường tròn. Gọi T là giao điểm của AB và tiếp tuyến tại P của nửa đường tròn. Chứng minh $\widehat{APO} = \widehat{BPT}$.

🗨️ **Lời giải.**

Tam giác AOP cân tại O nên $\widehat{APO} = \widehat{PAB}$.

$\widehat{PAB} = \widehat{BPT}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung).

Vậy $\widehat{APO} = \widehat{BPT}$.



□

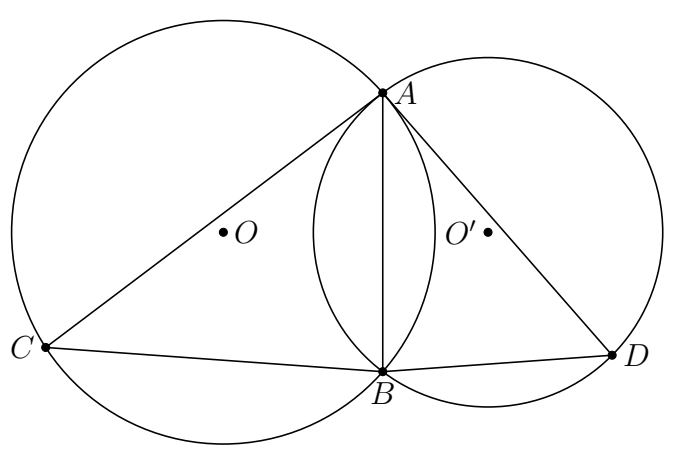
❖ **Bài 3.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Tiếp tuyến tại A của (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C và đối với đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại D . Chứng minh $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$.

🗨️ **Lời giải.**

Xét tam giác ABC và tam giác DBA có

$$\widehat{BAC} = \widehat{ADB}, \widehat{ACB} = \widehat{BAD}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DBA \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{DBA}.$$



□

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc, một tia là tiếp tuyến của đường tròn

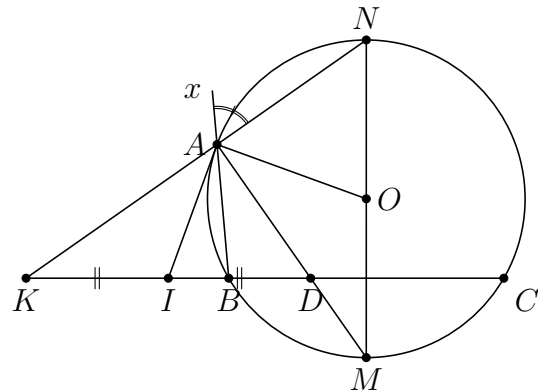
Dùng Hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và Hệ quả của góc nội tiếp.

✦ **Bài 4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , tia phân giác của góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn ở M .

- Chứng minh OM vuông góc với BC .
- Phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC cắt (O) ở N . Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.
- Gọi K là giao điểm của AN và BC , I là trung điểm của KD . Chứng minh IA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

🗨️ Lời giải.

- AM là phân giác góc BAC nên M là điểm chính giữa cung BC . Do đó $OM \perp BC$.
- AN là phân giác của $\widehat{xAC} \Rightarrow \widehat{xAN} = \widehat{NAC}$ (1).
 AM là phân giác của $\widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{MAB}$ (2).
 Từ (1), (2) suy ra $\widehat{NAM} = \widehat{NAC} + \widehat{CAM} = 90^\circ$.
 Suy ra MN là đường kính, do đó M, O, N thẳng hàng.



- $\widehat{ANO} = \widehat{NAO}$ do tam giác ANO cân tại O .

$\widehat{IAD} = \widehat{ADI}$ do tam giác AID cân tại I .

Mà $\widehat{ANO} = \widehat{ADI} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AM}$. Suy ra $\widehat{IAD} = \widehat{NAO}$.

Mà $\widehat{NAO} + \widehat{OAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAO} = \widehat{IAD} + \widehat{OAD} = 90^\circ \Rightarrow IA$ là tiếp tuyến của (O) . □

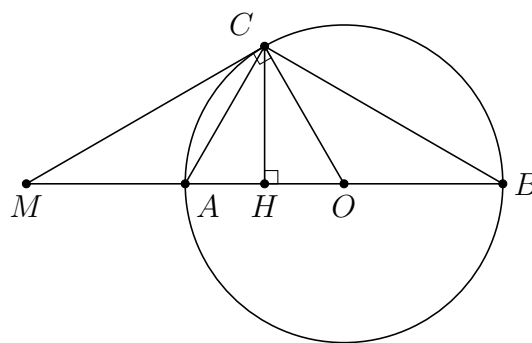
C-BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 5.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M . Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của C trên AB . Chứng minh

- Tia CA là tia phân giác của góc \widehat{MCH} .
- Tam giác MAC và tam giác MCB đồng dạng.

🗨️ Lời giải.

- a) $\widehat{MCA} = \widehat{CBA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AC}$.
 $\widehat{ACH} = \widehat{CBA}$ (cùng phụ \widehat{CAB}).
 $\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{ACH}$. Do đó, tia CA là tia phân
giác của góc \widehat{MCH}
- b) Theo câu trên ta có tam giác MAC và tam
giác MCB đồng dạng theo trường hợp góc-
góc



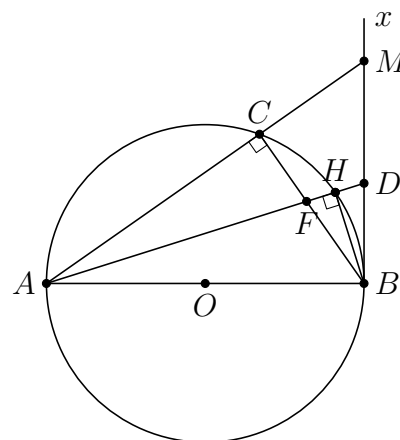
□

❖ **Bài 6.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , dây AC và tiếp tuyến Bx nằm trên cùng nửa
mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn. Tia phân giác của góc \widehat{CAB} cắt dây BC tại F , cắt nửa
đường tròn tại H , cắt Bx tại D .

- a) Chứng minh $FB = DB$ và $HF = HD$.
- b) Gọi M là giao điểm của AC và Bx . Chứng minh $AC \cdot AM = AH \cdot AD$.

🗨️ Lời giải.

- a) $\widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow BH \perp CF$
 $\widehat{DBH} = \widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \widehat{FBH}$
 $\Rightarrow BH$ là phân giác của góc \widehat{DBF} .
Tam giác \widehat{DBF} có BH là phân giác vừa là
đường cao. $\Rightarrow \triangle BDF$ cân tại $B \Rightarrow BD =$
 BF .
 BH là đường trung tuyến của $\triangle BDF \Rightarrow$
 $HD = HF$.
- b) $\begin{cases} AC \cdot AM = AB^2 \\ AH \cdot AD = AB^2 \end{cases} \Rightarrow AC \cdot AM = AH \cdot AD$.



□

❖ **Bài 7.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , tia phân giác của góc A cắt đường tròn ở M .
Tiếp tuyến kẻ từ M với đường tròn cắt các tia AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh

- a) BC song song với DE .
- b) Các cặp $\triangle AMB$, $\triangle MCE$ và $\triangle AMC$, $\triangle MDB$ đồng dạng.
- c) Nếu $AC = CE$ thì $MA^2 = MD \cdot ME$.

🗨️ Lời giải.

$$a) \widehat{BCM} = \widehat{BAM} = \widehat{MAC} = \widehat{CME} \Rightarrow BC \parallel DE.$$

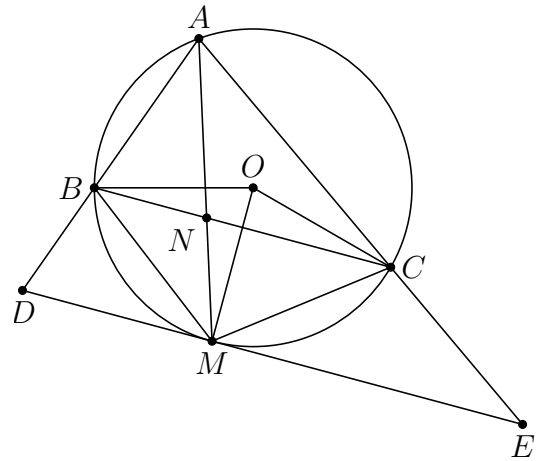
b) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle MEC$ ta có

$$\begin{cases} \widehat{MAB} = \widehat{EMC} \\ \widehat{AMB} = \widehat{MEC} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle MEC \text{ (g.g.)}$$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle MDB$ ta có

$$\begin{cases} \widehat{MAC} = \widehat{DMB} \\ \widehat{AMC} = \widehat{MDB} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle MDB \text{ (g.g.)}$$

$$\begin{aligned} c) \triangle AMB \sim \triangle MEC &\Rightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MB}{CE} \\ \triangle AMC \sim \triangle MDB &\Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{MB}{AC} \\ &\Rightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MD}{MA} \Rightarrow MA^2 = MD \cdot ME. \end{aligned}$$



✧ **Bài 8.** Cho đường tròn (O) tiếp xúc với cạnh Ax, By của góc \widehat{xAy} lần lượt tại B và C . Đường thẳng kẻ qua C song song với Ax cắt đường tròn (O) tại D , AD cắt đường tròn (O) ở M , CN cắt AB ở N . Chứng minh

$$a) \triangle ANC \sim \triangle MNA.$$

$$b) AN = BN.$$

🗨️ **Lời giải.**

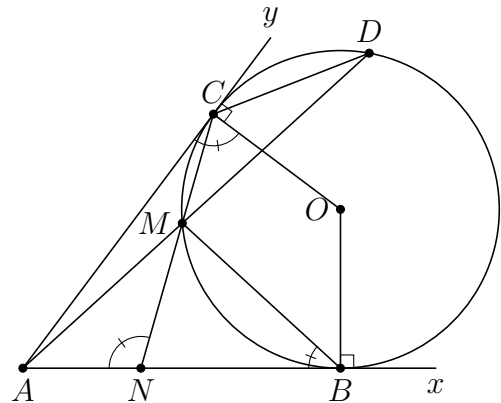
$$a) \widehat{ACN} = \widehat{CDM} = \widehat{MAN} \Rightarrow \triangle ANC \sim \triangle MNA \text{ (g.g.)}$$

$$b) \triangle ANC \sim \triangle MNA \Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{NC}{AN} \Rightarrow AN^2 = MN \cdot NC \text{ (1)}$$

Ta có $\triangle BCN \sim \triangle MBN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{NC}{BN} \Rightarrow BN^2 = MN \cdot NC \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), ta có $AN^2 = BN^2 \Rightarrow AN = BN$.



D – BÀI TẬP TỰ LUYỆN

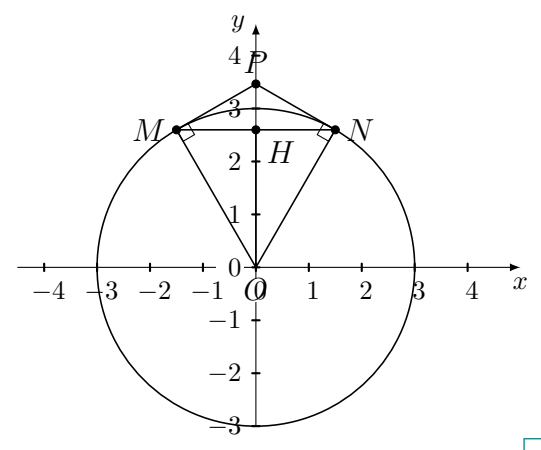
✧ **Bài 9.** Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $MN = R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N cắt nhau tại P . Tính $\widehat{PMN}, \widehat{PNM}$.

🔍 $30^\circ, 30^\circ$

🗨️ **Lời giải.**

Gọi H là trung điểm MN , khi đó $OH \perp MN$ (đường kính đi qua trung điểm của dây cung).

Tam giác OMN đều nên $\widehat{OMN} = 60^\circ$ và $\widehat{ONM} = 60^\circ$ Suy ra $\widehat{PMN} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ và $\widehat{PNM} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



□

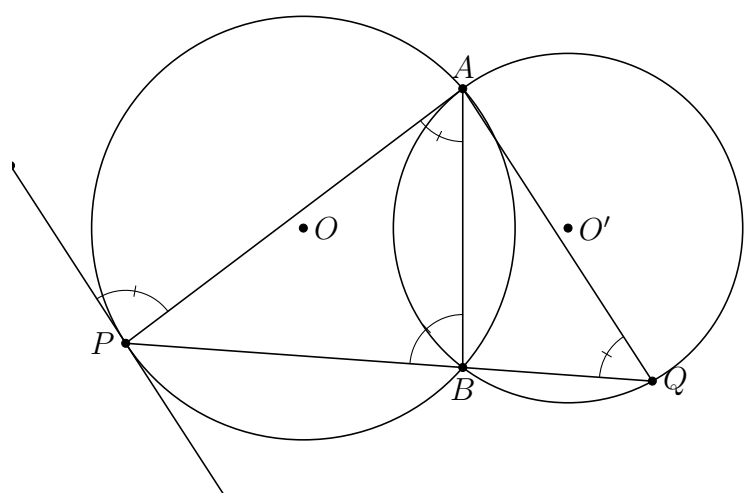
✦ **Bài 10.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Tiếp tuyến tại A của (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P . Tia BP cắt đường tròn (O') tại Q . Chứng minh AQ song song với tiếp tuyến tại P của đường tròn (O) .

🗨️ **Lời giải.**

Px là tiếp tuyến tại (P) của $(O) \Rightarrow \widehat{APx} = \widehat{ABP}$. \widehat{ABP} là góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABQ . $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{AQB} + \widehat{BAQ} = \frac{1}{2}sd\widehat{AQ}$.

$\widehat{PAQ} = \frac{1}{2}sd\widehat{AQ} \Rightarrow \widehat{PAQ} = \widehat{ABP}$

$\Rightarrow \widehat{APx} = \widehat{PAQ} \Rightarrow Px \parallel AQ$.



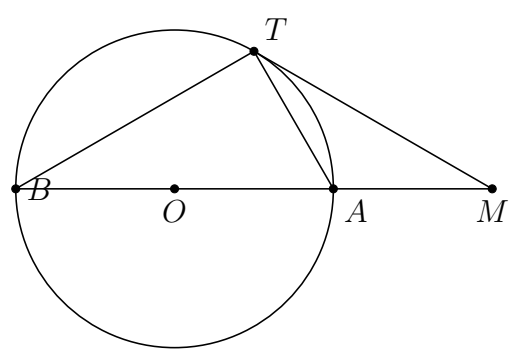
□

✦ **Bài 11.** Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua M kẻ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB . Chứng minh $MT^2 = MA \cdot MB$.

🗨️ **Lời giải.**

Tam giác MBT và tam giác MTA đồng dạng theo trường hợp g-g.

$\Rightarrow \frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT} \Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB$.





✦ **Bài 12.** Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm C trên nửa đường tròn. Gọi D là một điểm trên đường kính AB , qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BC ở F , cắt AC ở E . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại C cắt EF tại I . Chứng minh

- a) I là trung điểm của EF .
- b) Đường thẳng OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF .

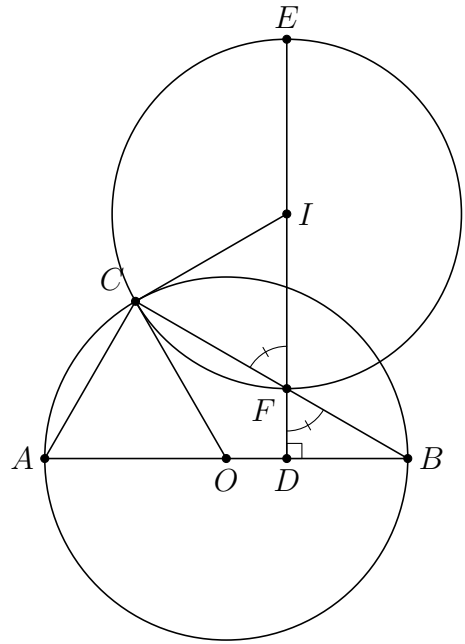
🗨 **Lời giải.**

a) $\widehat{ICF} = \widehat{BAC} = \widehat{IFC} \Rightarrow \triangle ICF$ cân tại $C \Rightarrow IC = IF$. (1). Ta lại có

$$\begin{cases} \widehat{ICE} + \widehat{ICF} = 90^\circ \\ \widehat{ICF} = \widehat{IFC} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{IEC} \\ \widehat{IEC} + \widehat{IFC} = 90^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ICE$ cân tại $I \Rightarrow IC = IE$. (2)
 Từ (1) và (2) ta có $IE = IF$.

b) Đường tròn (I) đường kính EF ngoại tiếp tam giác CEF .
 Ta có $\widehat{ICE} + \widehat{OCA} = \widehat{IEC} + \widehat{OCA} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp IC$ tại C .
 Vậy đường thẳng OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF .



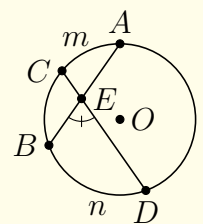
BÀI 22. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG - BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

✦ **Định nghĩa 22.1 (Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn).**

Là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn, mỗi góc có đỉnh bên trong đường tròn, một cung nằm bên trong góc và cung kia nằm bên trong góc đối đỉnh của nó. Góc \widehat{BED} là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn (O) chắn cung \widehat{AmC} và \widehat{BnD} .



✦ **Định lý 22.1.** Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

⇨ **Định lí 22.2.** Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

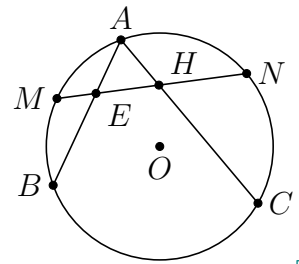
Dạng 1. Chứng minh hai góc hoặc hai đoạn thẳng bằng nhau

Sử dụng hai định lý về số đo góc có đỉnh ở bên trong đường tròn và góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

⇨ **Bài 1.** Cho đường tròn (O) hai dây AB, AC . Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của cung AB, AC . Đường thẳng MN cắt dây AB tại E và cắt dây AC tại H . Chứng minh $\triangle AEH$ là tam giác cân.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} \widehat{AHE} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AM} + \text{sđ}\widehat{CN}) \\ \widehat{AEH} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{BM} + \text{sđ}\widehat{AN}) \\ \text{sđ}\widehat{AM} = \text{sđ}\widehat{BM} \\ \text{sđ}\widehat{AN} = \text{sđ}\widehat{CN}. \end{cases} \\ \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AEH}. \\ \Rightarrow \triangle AEH \text{ cân tại } A. \end{aligned}$$



□

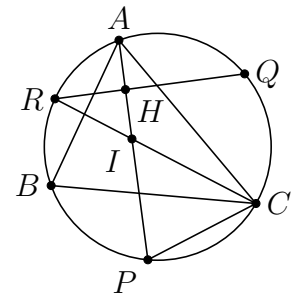
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song hoặc vuông góc hoặc các đẳng thức cho trước

Sử dụng hai định lý về số đo góc có đỉnh ở bên trong đường tròn và góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

⇨ **Bài 2.** Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn. Gọi P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C .

- a) Chứng minh $AP \perp QR$.
- b) Gọi I là giao điểm của AP, CR . Chứng minh $\triangle CPI$ cân.

Lời giải.



a) Chứng minh $AP \perp QR$.

Gọi H là giao điểm của AP và QR .

Ta có \widehat{AHQ} là góc có đỉnh bên trong (ABC) .

$$\text{Suy ra } \widehat{AHQ} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AQ} + \text{sđ}\widehat{RP}) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Vậy $AP \perp QR$ tại H .

b) Chứng minh $\triangle CPI$ cân.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{PIC} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AR} + \text{sđ}\widehat{CP}) \\ \widehat{PCI} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{BR} + \text{sđ}\widehat{BP}) \\ \text{sđ}\widehat{AR} = \text{sđ}\widehat{BR} \\ \text{sđ}\widehat{CP} = \text{sđ}\widehat{BP}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{PIC} = \widehat{PCI}.$$

$\Rightarrow \triangle CPI$ cân tại P .

□

C - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

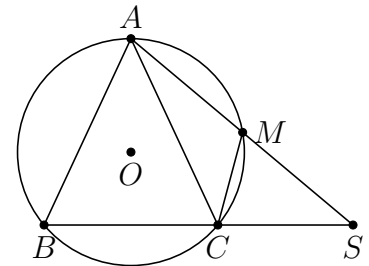
✧ **Bài 3.** Cho đường tròn (O) hai dây AB và AC bằng nhau. Trên cung nhỏ AC lấy một điểm M . Gọi S là giao điểm của AM và BC . Chứng minh $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{ASC} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{CM}) \\ \text{sđ}\widehat{AB} = \text{sđ}\widehat{AC}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ASC} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AM}.$$

Mặt khác $\widehat{MCA} = \frac{1}{2} \text{sđ}\widehat{AM}$ nên $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.



□

✧ **Bài 4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các tia phân giác của góc A và góc B cắt nhau ở I và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E .

a) Chứng minh $\triangle BDI$ cân.

b) Chứng minh DE là đường trung trực của IC .

c) Gọi F là giao điểm của AC và DE . Chứng minh $IF \parallel BC$.

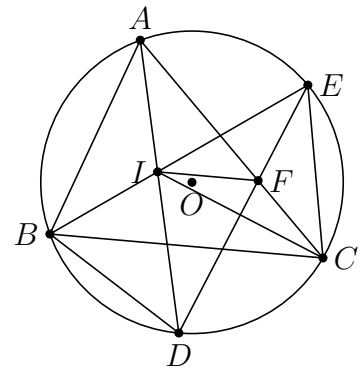
🗨️ **Lời giải.**

a) Chứng minh $\triangle BDI$ cân.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{BID} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{AE} + \text{sđ}\widehat{BD}) \\ \widehat{IBD} = \frac{1}{2} (\text{sđ}\widehat{CE} + \text{sđ}\widehat{CD}) \\ \text{sđ}\widehat{AE} = \text{sđ}\widehat{CE} \\ \text{sđ}\widehat{BD} = \text{sđ}\widehat{CD}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{IBD}.$$

$$\Rightarrow \triangle BDI \text{ cân tại } D.$$



b) Chứng minh DE là đường trung trực của IC .

Ta có $DB = DI$ và $DB = DC$.

Suy ra $DI = DC$ và $\triangle DIC$ cân tại D .

Mặt khác DE là phân giác (vì $\text{sđ}\widehat{AE} = \text{sđ}\widehat{CE}$) nên DE là đường trung trực của IC .

c) Chứng minh $IF \parallel BC$.

$\triangle ABC$ có AI và BI là phân giác.

$\Rightarrow CI$ là phân giác.

Suy ra $\widehat{ICB} = \widehat{ICA}$.

Mặt khác $\widehat{ICA} = \widehat{FIC}$ (F thuộc trung trực của IC) nên $\widehat{ICB} = \widehat{FIC}$.

Suy ra $IF \parallel BC$.

□

BÀI 23. CUNG CHỨA GÓC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quỹ tích cung chứa góc

↔ **Định nghĩa 23.1 (Quỹ tích cung chứa góc).** Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

⚠️ **☑️** Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB . Hai điểm A và B được coi là thuộc quỹ tích.

☑️ Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

2. Cách vẽ cung chứa góc α

☑️ Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .

☑️ Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α .

☑️ Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .

☑️ Vẽ cung \widehat{AmB} , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

Cung \widehat{AmB} được vẽ như trên là một cung chứa góc α .

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần

- ✔ *Phần thuận.* Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H .
- ✔ *Phần đảo.* Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T .
- ✔ *Kết luận.* Quỹ tích (tập hợp) các điểm M có tính chất T là hình H .

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc α

Thực hiện theo 3 bước sau

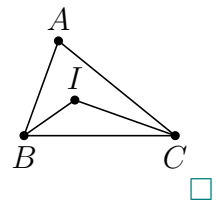
- ✔ *Bước 1.* Tìm đoạn thẳng cố định trong hình vẽ.
- ✔ *Bước 2.* Nối điểm phải tìm quỹ tích với hai đầu đoạn thẳng cố định đó, xác định góc α không đổi.
- ✔ *Bước 3.* Khẳng định quỹ tích điểm phải tìm là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng cố định.

✦ **Bài 1.** Cho tam giác ABC có BC cố định, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong tam giác. Tìm quỹ tích điểm I .

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 120^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 60^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{BIC} = 120^\circ$.

Do đó quỹ tích điểm I là hai cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC .



✦ **Bài 2.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $AC \perp BD$ nên $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

Vậy quỹ tích điểm O là đường tròn đường kính AB . □

✦ **Bài 3.** Cho điểm A cố định nằm trên đường tròn (O) , điểm B di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn thẳng AB .

🗨 **Lời giải.**

Ta có $OM \perp AB \Rightarrow \widehat{OMA} = 90^\circ$.

Do đó quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính OA . □

Dạng 2. Dựng cung chứa góc

Thực hiện theo 4 bước sau

- ☑ *Bước 1.* Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .
- ☑ *Bước 2.* Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α .
- ☑ *Bước 3.* Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- ☑ *Bước 4.* Vẽ cung \widehat{AmB} , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

Cung \widehat{AmB} được vẽ như trên là *một cung chứa góc α* .

🔗 **Bài 4.** Dựng cung chứa góc 100° trên đoạn thẳng $AB = 4$ cm.

Lời giải.

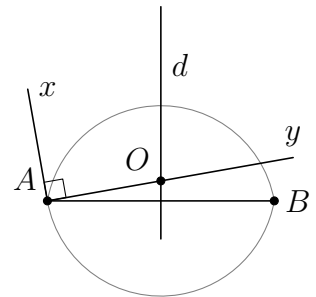
Bước 1. Vẽ đoạn thẳng $AB = 4$ cm, dựng đường trung trực d của AB .

Bước 2. Vẽ tia Ax tạo với AB một góc 100° .

Bước 3. Vẽ $Ay \perp Ax$ cắt d tại O .

Bước 4. Vẽ cung \widehat{AmB} , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

Cung \widehat{AmB} và cung đối xứng với \widehat{AmB} qua AB là cung cần vẽ.



□

🔗 **Bài 5.** Dựng cung chứa góc 50° trên đoạn thẳng $CD = 5$ cm.

Lời giải.

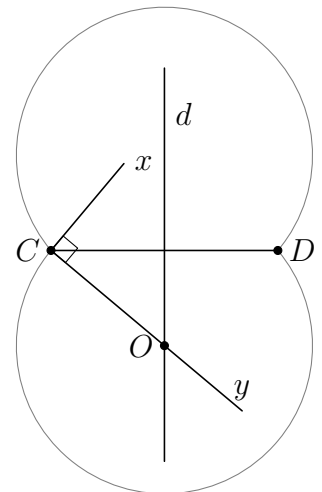
Bước 1. Vẽ đoạn thẳng $CD = 5$ cm, dựng đường trung trực d của CD .

Bước 2. Vẽ tia Cx tạo với CD một góc 50° .

Bước 3. Vẽ $Cy \perp Cx$ cắt d tại O .

Bước 4. Vẽ cung \widehat{CmD} , tâm O , bán kính OC sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ CD không chứa tia Cx .

Cung \widehat{CmD} và cung đối xứng với \widehat{CmD} qua CD là cung cần vẽ.



□

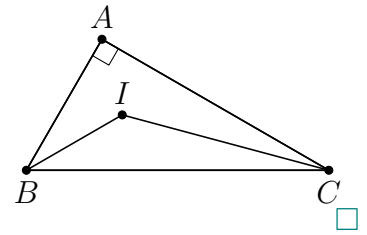
C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

🔗 **Bài 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A , cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác trong. Tìm quỹ tích của điểm I .

Lời giải.

Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 45^\circ$.
 $\Rightarrow \widehat{BIC} = 135^\circ$.

Do đó quỹ tích điểm I là hai cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC .



✦ **Bài 7.** Cho tam giác ABC cân tại A , cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích trung điểm O của BC .

🗨 **Lời giải.**

Ta có $AO \perp BC \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$.

Vậy quỹ tích điểm O là đường tròn đường kính AB .

✦ **Bài 8.** Dựng cung chứa góc 45° trên đoạn thẳng $MN = 6$ cm.

🗨 **Lời giải.**

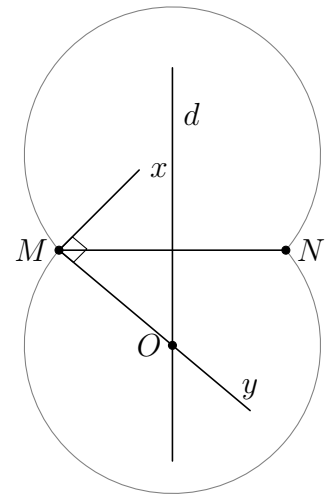
Bước 1. Vẽ đoạn thẳng $MN = 6$ cm, dựng đường trung trực d của MN .

Bước 2. Vẽ tia Mx tạo với MN một góc 45° .

Bước 3. Vẽ $My \perp Mx$ cắt d tại O .

Bước 4. Vẽ cung \widehat{MmN} , tâm O , bán kính OM sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ MN không chứa tia Mx .

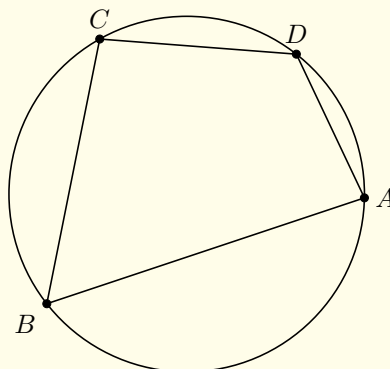
Cung \widehat{MmN} và cung đối xứng với \widehat{MmN} qua MN là cung cần vẽ.



BÀI 24. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

✦ **Định nghĩa 24.1.** Tứ giác nội tiếp là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó. Trong hình 1, tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và đường tròn (O) gọi là ngoại tiếp tứ giác.



Hình 1.

🔗 **Định lí 24.1.** Tứ giác nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi tổng số đo của hai góc đối bằng 180° .

Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.

- ✔ Tổng của hai góc đối bằng 180° .
- ✔ Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh không kề với nó.
- ✔ Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm O cố định.
- ✔ Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh nối hai đỉnh còn lại với góc bằng nhau.

⚠ Trong các hình tứ giác đã học thì hình vuông, hình chữ nhật, hình thang cân là các tứ giác nội tiếp được trong đường tròn.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Tính số đo các góc và chứng minh tứ giác nội tiếp

Sử dụng định lý về điều kiện của tứ giác nội tiếp.

🔗 **Bài 1.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm M . Biết $\widehat{DAB} = 80^\circ$, $\widehat{DAM} = 30^\circ$ và $\widehat{BMC} = 70^\circ$. Tính số đo các góc \widehat{MAB} , \widehat{BCM} và \widehat{BCD} .

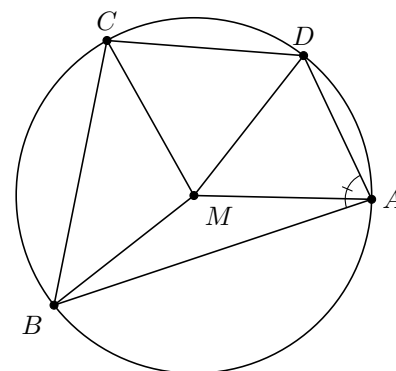
💬 Lời giải.

Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{DAM} + \widehat{MAB}$

$$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{DAB} - \widehat{DAM} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ.$$

Do tam giác CBM cân tại M nên $\widehat{BCM} = \frac{180^\circ - \widehat{BMC}}{2} = 55^\circ$.

Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DAB} = 100^\circ$.



□

🔗 **Bài 2.** Trên đường tròn (O) có một cung AB , S là điểm chính giữa của cung đó. Trên dây AB lấy hai điểm E, H . Các đường thẳng SE, SH cắt đường tròn theo thứ tự tại C, D . Chứng minh rằng:

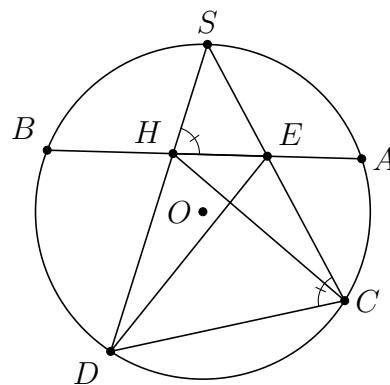
a) $\widehat{SHA} = \widehat{SCD}$.

b) Tứ giác $EHCD$ nội tiếp.

💬 Lời giải.

a) Ta có $\widehat{SCD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{SD}$ và $\widehat{SHA} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{SA} + \text{sđ}\widehat{BD}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{SB} + \text{sđ}\widehat{BD}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{SD}$ do $SA = SB$.
Do đó $\widehat{SHA} = \widehat{SCD}$.

b) Theo câu trên ta có $\widehat{SHA} = \widehat{SCD}$ mà $\widehat{SHA} + \widehat{DHE} = 180^\circ$ nên $\widehat{ECD} + \widehat{DHE} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $EHCD$ nội tiếp.

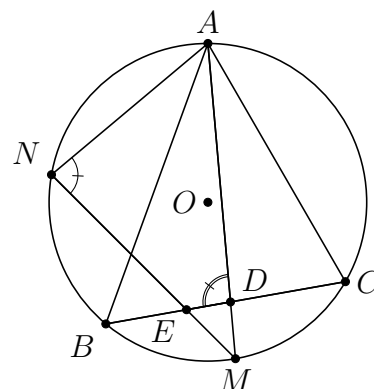


□

✦ **Bài 3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC và N là một điểm thuộc cung nhỏ AB . AM , MN cắt BC lần lượt tại D , E . Chứng minh rằng tứ giác $ADEN$ nội tiếp.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\widehat{ANE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM}$ và $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{CM}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{BM}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AM}$ do $MB = MC$.
Do đó $\widehat{ANM} + \widehat{ADE} = 180^\circ$, suy ra tứ giác $ADEN$ nội tiếp.



□

📁 Dạng 2. Khai thác tính chất của tứ giác nội tiếp

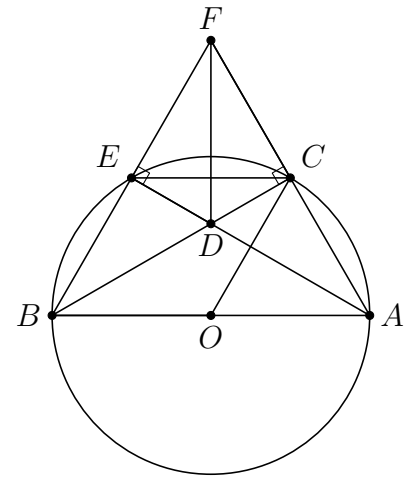
Sử dụng các tính chất về tổng hai góc đối trong tứ giác nội tiếp, hay các góc cùng chắn một cung...

✦ **Bài 4.** Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E , tia AC cắt BE tại F . Chứng minh

- $FCDE$ nội tiếp.
- $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$.
- $DA \cdot DE = DB \cdot DC$.

🗨️ **Lời giải.**

- a) Ta có $\widehat{BCF} = \widehat{AEF} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $FCDE$ nội tiếp.
- b) Do tứ giác $FCDE$ nội tiếp nên $\widehat{CFD} = \widehat{CED}$.
Mà $\widehat{CED} = \widehat{CBA} = \widehat{OCB}$, do đó $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$.
- c) Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{EDB}$ và $\widehat{DAC} = \widehat{DBE}$ (cùng chắn cung EC).
Suy ra, hai tam giác CDA và EDB đồng dạng (g-g), nên $DA \cdot DE = DB \cdot DC$.



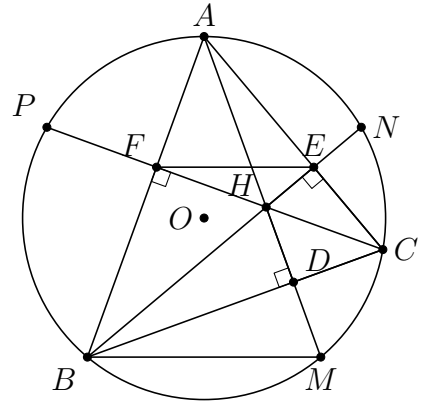
□

✦ **Bài 5.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P . Chứng minh rằng

- a) Tứ giác $CEHD$ nội tiếp.
- b) Bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.
- c) $AE \cdot AC = AH \cdot AD$ và $AD \cdot BC = BE \cdot AC$.
- d) H, M đối xứng nhau qua BC .

🗨️ **Lời giải.**

- a) Ta có $\widehat{CEH} = \widehat{HDC} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $CEHD$ có tổng hai góc đối bằng 180° nên nội tiếp.
- b) Ta có $\widehat{CEB} = \widehat{CFB} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- c) Do hai tam giác vuông AEB và AFC đồng dạng (g-g) nên $AE \cdot AC = AH \cdot AD$.
Ta có $AD \cdot BC = BE \cdot AC = \frac{1}{2} S_{ABC}$.
- d) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp.
Do đó $\widehat{CAM} = \widehat{NBC}$ (cùng chắn cung ED) nên $\widehat{CBM} = \widehat{CAM} = \widehat{NBC}$. Suy ra tam giác HBM cân tại B hay H, M đối xứng nhau qua BC .



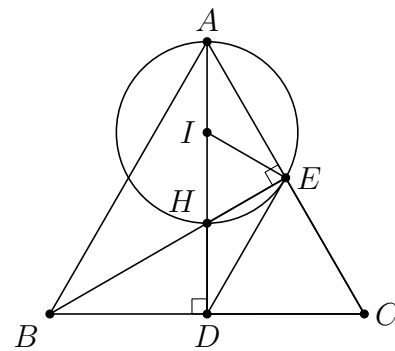
□

✦ **Bài 6.** Cho tam giác ABC cân tại A các đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE . Chứng minh rằng

- a) Tứ giác $CEHD$ nội tiếp.
 b) Bốn điểm A, E, B, D cùng thuộc một đường tròn.
 c) $ED = \frac{1}{2}BC$.
 d) DE là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có $\widehat{CEH} = \widehat{HDC} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $CEHD$ có $\widehat{CEH} + \widehat{HDC} = 180^\circ$ nên nội tiếp.
 b) Ta có $\widehat{BEA} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $AEDB$ nội tiếp.
 c) Ta có tam giác BEC vuông tại E và D là trung điểm BC suy ra $ED = \frac{1}{2}BC$.
 d) Ta có $\widehat{EIH} = 2\widehat{EIH} = \widehat{CAB}$. Do tứ giác $ABDE$ nội tiếp suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$.
 Mà $\widehat{CAB} + \widehat{ABE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EIH} + \widehat{ADE} = 90^\circ$.
 Suy ra $IE \perp DE$ hay DE là tiếp tuyến của đường tròn (I) .



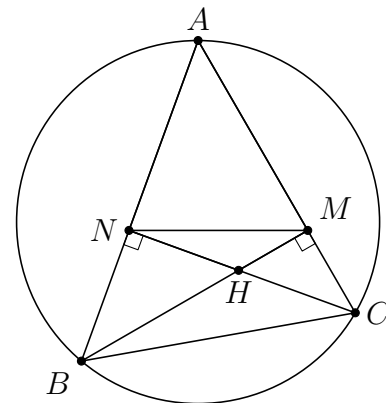
□

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

🔗 **Bài 7.** Cho tam giác ABC nhọn các đường cao BM, CN cắt nhau tại H . Chứng minh rằng $AMHN$ và $BNMC$ là các tứ giác nội tiếp.

🗨️ Lời giải.

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 180^\circ$ hay tứ giác $AMHN$ nội tiếp.
 Và $BNMC$ có $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ nên nội tiếp.



□

BÀI 25. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tính độ dài đường tròn

Cho đường tròn có bán kính R , khi đó chu vi đường tròn là $l = 2\pi R$.

2. Công thức tính độ dài cung tròn

Cho đường tròn có bán kính R một cung tròn có số đo n° thì độ dài là $l = \frac{\pi R n}{180}$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

✦ **Bài 1.** Lấy số π gần đúng là 3,14 hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn đến số thập phân thứ hai).

| | | | |
|-------------------------------|---|---|-------|
| Bán kính R của đường tròn | 2 | ? | ? |
| Đường kính d của đường tròn | ? | 8 | ? |
| Độ dài l của đường tròn | ? | ? | 43,96 |

🗨️ Lời giải.

Theo công thức tính độ dài đường tròn $l = 2\pi R$ ta có bảng kết quả sau

| | | | |
|-------------------------------|-------|-------|-------|
| Bán kính R của đường tròn | 2 | 4 | 7 |
| Đường kính d của đường tròn | 4 | 8 | 14 |
| Độ dài l của đường tròn | 12,56 | 25,12 | 43,96 |

□

✦ **Bài 2.** Lấy số π gần đúng là 3,14 hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn đến số thập phân thứ hai).

| | | | |
|-------------------------------|------|------------|-------------|
| Bán kính R của đường tròn | 2 | 4 | ? |
| Số đo n° của cung tròn | ? | 31° | 125° |
| Độ dài l của cung tròn | 3,14 | ? | 15,26 |

🗨️ Lời giải.

Theo công thức tính độ dài cung tròn $l = \frac{\pi R n}{180}$ ta có bảng kết quả sau

| | | | |
|-------------------------------|------------|------------|-------------|
| Bán kính R của đường tròn | 2 | 4 | 7 |
| Số đo n° của cung tròn | 90° | 31° | 125° |
| Độ dài l của cung tròn | 3,14 | 2,16 | 15,26 |

□

⇨ Bài 3.

- a) Tính độ dài cung tròn có số đo 70° của đường tròn có bán kính $R = 3$ cm.
 b) Tính chu vi vành xe biết đường kính 650 mm.

🔍 3,66 cm, 2041

💬 Lời giải.

- a) Theo công thức tính độ dài cung tròn $l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 70}{180} = 3,66$ cm.
 b) Ta có $l = 2\pi R = \pi \cdot 650 = 2041$ mm.

□

⇨ **Bài 4.** Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn bánh hai trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là 1,672 m và bánh trước có đường kính là 88 cm. Hỏi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng?

🔍 19 vòng

💬 Lời giải.

Ta có độ dài bánh xe sau là $l_s = d\pi = 167,2 \cdot \pi = 525,01$ khi đó bánh sau quay 10 thì đi được đoạn đường 5250,1 cm.

Độ dài bánh trước là $l_t = d\pi = 88 \cdot \pi = 276,32$ cm. Do đó để đi được đoạn đường 5250,1 cm bánh trước cần quay $\frac{5250,1}{276,32} = 19$ vòng.

□

⇨ **Bài 5.** Đường xích đạo của trái đất có độ dài 40000 km. Hỏi bán kính của trái đất dài bao nhiêu?

🔍 6.370 km

💬 Lời giải.

Độ dài đường xích đạo là độ dài đường tròn lớn nhất của quả địa cầu, do đó $R = \frac{l}{2\pi} = 6.370$ km.

□

C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

⇨ **Bài 6.** Lấy số π gần đúng là 3,14 hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn đến số thập phân thứ hai).

| | | | | |
|-------------------------------|------------|------------|------|------------|
| Bán kính R của đường tròn | 6 | ? | 11 | 5 |
| Số đo n° của cung tròn | 90° | 60° | ? | 30° |
| Độ dài l của cung tròn | ? | 20,3 | 15,4 | ? |

Lời giải.

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có

| | | | | |
|-------------------------------|------------|------------|----------------|------------|
| Bán kính R của đường tròn | 6 | 19,39 | 11 | 5 |
| Số đo n° của cung tròn | 90° | 60° | $80,256^\circ$ | 30° |
| Độ dài l của cung tròn | 9,24 | 20,3 | 15,4 | 2,62 |

□

✦ **Bài 7.** Cho đường tròn (O, R) , dây $AB = R$.

a) Tính số đo của góc \widehat{AOB} .

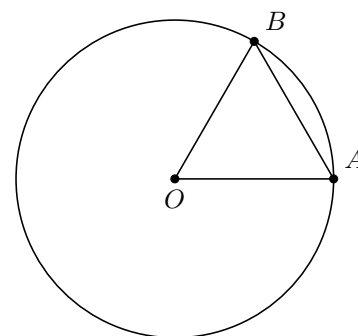
b) Tính độ dài cung nhỏ AB .

$$\text{☞ } 60^\circ, \frac{R\pi}{3}$$

Lời giải.

a) Ta có $OA = OB = AB = R$ nên tam giác OAB đều suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

b) Ta có $l = \frac{Rn\pi}{180} = \frac{R \cdot 60 \cdot \pi}{180} = \frac{R\pi}{3}$.



□

✦ **Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{☞ } 10\pi$$

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm BC .

Do đó, bán kính $R = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Hay $l = 2\pi R = 10\pi$

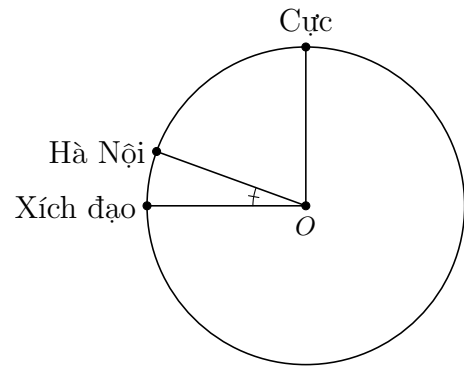
□

✦ **Bài 9.** Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$ mỗi vòng kinh tuyến dài khoảng 40000 km. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo.

$$\text{☞ } 2222,61 \text{ km}$$

Lời giải.

Ta có độ dài cung tròn từ Hà Nội đến xích đạo được tính bởi công thức $l = \frac{Rn\pi}{180} = \frac{R \cdot 20,00167 \cdot \pi}{180} = 2222,61$ km.



□

BÀI 26. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: $S = \pi R^2$.

2. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức

$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} \text{ hay } S = \frac{l \cdot R}{2}.$$

(l là độ dài cung n° của hình quạt tròn).

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1.

Vận dụng công thức đã nêu trong phần *Tóm tắt lý thuyết*.

✦ **Bài 1.** Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

| Bán kính đường tròn (R) | Độ dài đường tròn (C) | Diện tích hình tròn (S) | Số đo của cung tròn (n°) | Diện tích hình quạt tròn cung n° |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|---|
| 3 | | | 60° | |
| | 15,70 | | 80° | |
| | | 50,24 | | 6,28 |

Lời giải.

| Bán kính đường tròn (R) | Độ dài đường tròn (C) | Diện tích hình tròn (S) | Số đo của cung tròn (n°) | Diện tích hình quạt tròn cung n° |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|---|
| 3 | 18,84 | 28,26 | 60° | 4,71 |
| 2,5 | 15,70 | 19,63 | 80° | 4,36 |
| 4 | 25,12 | 50,24 | 45° | 6,28 |



↔ **Bài 2.** Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

| Bán kính đường tròn (R) | Độ dài đường tròn (C) | Diện tích hình tròn (S) | Số đo của cung tròn (n°) | Diện tích hình quạt tròn cung n° |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|---|
| 3,5 | | | 70° | |
| | 12,56 | | 130° | |
| | | 78,50 | | 15,70 |

Lời giải.

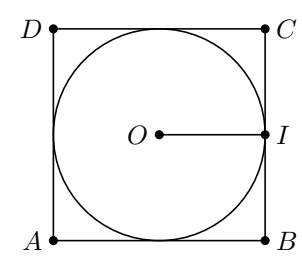
| Bán kính đường tròn (R) | Độ dài đường tròn (C) | Diện tích hình tròn (S) | Số đo của cung tròn (n°) | Diện tích hình quạt tròn cung n° |
|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|---|
| 3,5 | 21,98 | 38,47 | 70° | 7,48 |
| 2 | 12,56 | 12,56 | 130° | 4,54 |
| 5 | 31,4 | 78,50 | 72° | 15,70 |



↔ **Bài 3.** Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh bằng 8 cm. $16\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Lời giải.

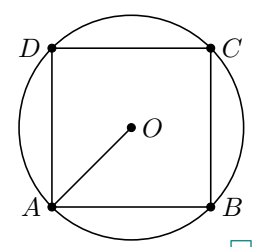
Do hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 8 cm nên bán kính đường tròn là $R = OI = 4$ cm.
Vậy diện tích hình tròn cần tìm là $S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.



↔ **Bài 4.** Hình vuông có cạnh 4 cm nội tiếp đường tròn (O). Tính diện tích hình tròn (O). $8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Lời giải.

Do hình vuông $ABCD$ có cạnh 4 cm nội tiếp đường tròn (O) nên đường tròn (O) có bán kính $R = OA = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}$.
Vậy diện tích hình tròn (O) là $S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.



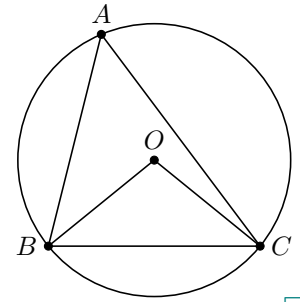
↔ **Bài 5.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính $R = 3$ (cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OB, OC và cung nhỏ BC khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$. $3\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Lời giải.

Theo giả thiết $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Vậy diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OB , OC và cung nhỏ BC là

$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 120}{360} = 3\pi \text{ (cm)}^2.$$



□

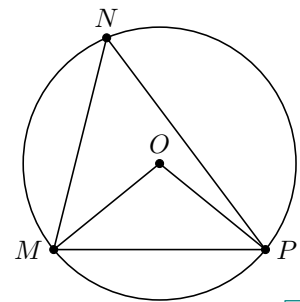
✦ **Bài 6.** Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính $R = 3$ (cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OM , OP và cung nhỏ MP khi $\widehat{MNP} = 45^\circ$. 🔗 $\frac{9\pi}{4}$ (cm²)

🗨️ **Lời giải.**

Theo giả thiết $\widehat{MOP} = 2\widehat{MNP} = 90^\circ$.

Vậy diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OM , OP và cung nhỏ MP là

$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 90}{360} = \frac{9\pi}{4} \text{ (cm)}^2.$$



□

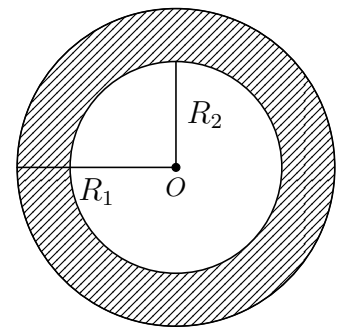
✦ **Bài 7.**

Hình vành khăn là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm (phân tô đậm).

a) Chứng minh diện tích S của hình vành khăn được tính theo công thức: $S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$.

b) Tính diện tích hình vành khăn khi $R_1 = 4$ (cm), $R_2 = 3$ (cm).

🔗 7π (cm²)



🗨️ **Lời giải.**

a) Diện tích hình tròn tâm O , bán kính R_1 là $S_1 = \pi \cdot R_1^2$.

Diện tích hình tròn tâm O , bán kính R_2 là $S_2 = \pi \cdot R_2^2$.

Vậy diện tích hình vành khăn là $S = S_1 - S_2 = \pi \cdot R_1^2 - \pi \cdot R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2)$.

b) Theo chứng minh trên thì $S = \pi(R_1^2 - R_2^2) = \pi(4^2 - 3^2) = 7\pi$ (cm²).

□

✦ **Bài 8.** Tính diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là 7 cm và 12 cm. 🔗 95π (cm²)

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $S = \pi(12^2 - 7^2) = 95\pi$ (cm²).

□

C – BÀI TẬP VỀ NHÀ

✧ **Bài 9.** Diện tích hình tròn sẽ thay đổi thế nào nếu

- a) Bán kính tăng gấp đôi.
b) Bán kính tăng gấp ba.
c) Bán kính tăng k lần.

🔍 4 lần

🔍 9 lần

🔍 k^2 lần

🗨 **Lời giải.**

Diện tích hình tròn bán kính R là $S = \pi \cdot R^2$.

- a) Diện tích hình tròn sau khi bán kính tăng gấp đôi là

$$S_1 = \pi \cdot (2R)^2 = 4\pi \cdot R^2 = 4S.$$

Vậy diện tích hình tròn tăng lên 4 lần.

- b) Diện tích hình tròn sau khi bán kính tăng gấp ba là

$$S_2 = \pi \cdot (3R)^2 = 9\pi \cdot R^2 = 9S.$$

Vậy diện tích hình tròn tăng lên 9 lần.

- c) Diện tích hình tròn sau khi bán kính tăng gấp k là

$$S_3 = \pi \cdot (kR)^2 = k^2\pi \cdot R^2 = k^2S.$$

Vậy diện tích hình tròn tăng lên k^2 lần. □

✧ **Bài 10.** Tính diện tích một hình quạt tròn có bán kính 6 cm, số đo cung là 100° . 🔍 10π (cm²)

🗨 **Lời giải.**

Diện tích hình quạt tròn có bán kính $R = 6$ cm, số đo cung là $n = 100^\circ$ là

$$S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 100}{360} = 10\pi \text{ (cm)}^2. \quad \square$$

✧ **Bài 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm nội tiếp đường tròn (O) . Tính diện tích hình tròn (O) . 🔍 25π (cm²)

🗨 **Lời giải.**

Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10 \text{ (cm)}.$$

Do $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) nên đường tròn (O) có bán kính $R = \frac{BC}{2} = 5$ (cm).

Vậy diện tích hình tròn cần tính là $S = \pi \cdot R^2 = 25\pi$ (cm²). □

✧ **Bài 12.** Cho hình vuông có cạnh 2 cm, vẽ đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó. Tính diện tích hình tròn đó. 🔍 2π (cm²)

🗨 **Lời giải.**

Do hình vuông cạnh 2 cm nội tiếp đường tròn (O) nên đường tròn (O) có bán kính $R = \sqrt{2}$.

Vậy diện tích của hình tròn là $S = \pi \cdot R^2 = 2\pi$ (cm²). □

BÀI 27. ÔN TẬP CHƯƠNG 3

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài 9.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

✧ **Bài 1.** Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm của đoạn OB . Dây CD vuông góc với AB tại M . Điểm E chuyển động trên cung lớn CD (E khác A). Nối AE cắt CD tại K . Nối BE cắt CD tại H .

- Chứng minh bốn điểm B, M, E, K thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $AE \cdot AK$ không đổi.
- Tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC .

🗨️ **Lời giải.**

- Ta có $\widehat{BMK} = \widehat{BEK} = 90^\circ$.
Do đó $BMEK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BK .
- Xét tam giác ABE và tam giác AKM có

$$\begin{cases} \widehat{EAB} \text{ chung} \\ \widehat{AMK} = \widehat{AEB} = 90^\circ. \end{cases}$$
 Khi đó $\triangle ABE \sim \triangle AKM$ (g - g)
 $\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AE \cdot AK = AB \cdot AM = 3R^2$.
- Ta có $MO = MB$ và $CM \perp OB$ tại M nên $\triangle OBC$ cân tại C .
 Mặt khác $OB = OC = R$ nên $\triangle OBC$ là tam giác đều, suy ra $\widehat{COB} = 60^\circ$.
 Vậy diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB, OC và cung nhỏ BC là

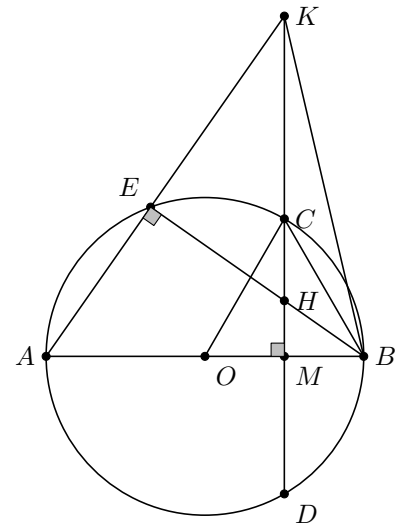
$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6} \text{ (đvdt).}$$

□

✧ **Bài 2.** Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $BC = 2R$ và một điểm A trên nửa đường tròn sao cho $AB = R$. M là một điểm trên cung nhỏ AC , BM cắt AC tại I . Tia AB cắt tia CM tại D .

- Chứng minh tam giác AOB đều.
- Chứng minh tứ giác $AIMD$ nội tiếp được đường tròn.
- Tính góc \widehat{ADI} .
- Tính diện tích hình quạt OAC biết $R = 3$ cm.

🗨️ **Lời giải.**



a) Ta có $OA = OB = AB = R$, suy ra $\triangle AOB$ là tam giác đều.

b) Do A nằm trên nửa đường tròn đường kính BC nên $\widehat{CAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAD} = 90^\circ$.

Do M nằm trên nửa đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMD} = 90^\circ$.

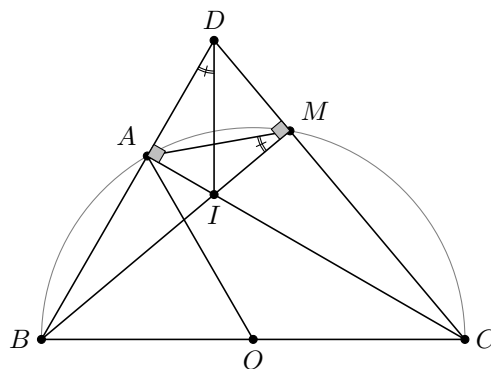
Khi đó $\widehat{IAD} + \widehat{IMD} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $IADM$ nội tiếp.

c) Do tứ giác $IADM$ nội tiếp nên $\widehat{ADI} = \widehat{AMI} = \widehat{AMB}$. Mặt khác $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{ADI} = 30^\circ$.

d) Do $\widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Vậy diện tích hình quạt OAC là $S_{\text{quạt}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 3\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.



C – BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 3.** Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây AB , trên tia BA lấy điểm C sao cho C nằm ngoài đường tròn. Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn cắt dây AB tại D . Tia CP cắt đường tròn tại I . Các dây AB và QI cắt nhau tại K .

a) Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp.

b) Chứng minh IQ là phân giác của góc AIB .

c) Biết $R = 5 \text{ cm}$, góc $\widehat{AOQ} = 45^\circ$. Tính độ dài của cung AQB .

d) Chứng minh $CK \cdot CD = CA \cdot CB$.

🗨️ **Lời giải.**

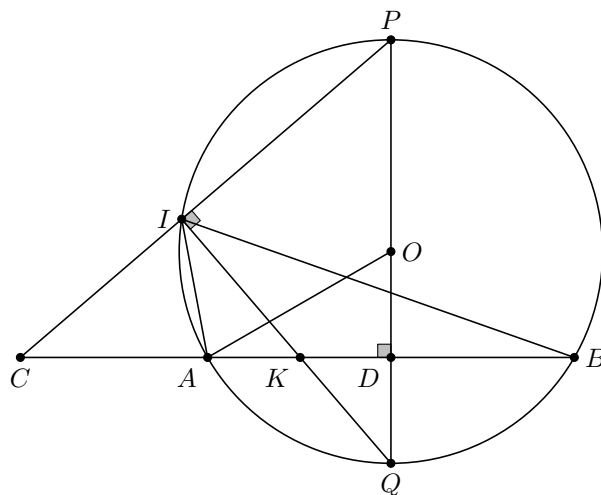
a) Vì P là điểm chính giữa của cung lớn AB mà PQ là đường kính nên Q là điểm chính giữa của cung nhỏ AB , do đó $PQ \perp AB$ tại D . Khi đó $\widehat{PDK} = 90^\circ$.

Mặt khác I thuộc nửa đường tròn đường kính PQ nên $\widehat{PIK} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{PDK} + \widehat{PIK} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $PDKI$ nội tiếp.

b) Ta có Q là điểm chính giữa của cung nhỏ AB . Khi đó $\widehat{AIQ} = \widehat{BIQ}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Suy ra IQ là tia phân giác của góc \widehat{AIB} .



c) Ta có $\widehat{AOQ} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$.
 Vậy độ dài cung AQB là $l = \frac{\pi \cdot R \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2}$ (cm).

d) Xét $\triangle CIB$ và $\triangle CAP$ có $\begin{cases} \widehat{ICA} \text{ chung} \\ \widehat{IPA} = \widehat{IBA} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)} \end{cases}$.

Suy ra $\triangle CIB \sim \triangle CAP$ (g - g) $\Rightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{CB}{CP} \Rightarrow CI \cdot CP = CA \cdot CB$ (1).

Xét $\triangle CIK$ và $\triangle CDP$ có $\begin{cases} \widehat{ICK} \text{ chung} \\ \widehat{CIK} = \widehat{CDP} = 90^\circ \end{cases}$.

Suy ra $\triangle CIK \sim \triangle CDP$ (g - g) $\Rightarrow \frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP} \Rightarrow CI \cdot CP = CD \cdot CK$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $CA \cdot CB = CD \cdot CK$.

□

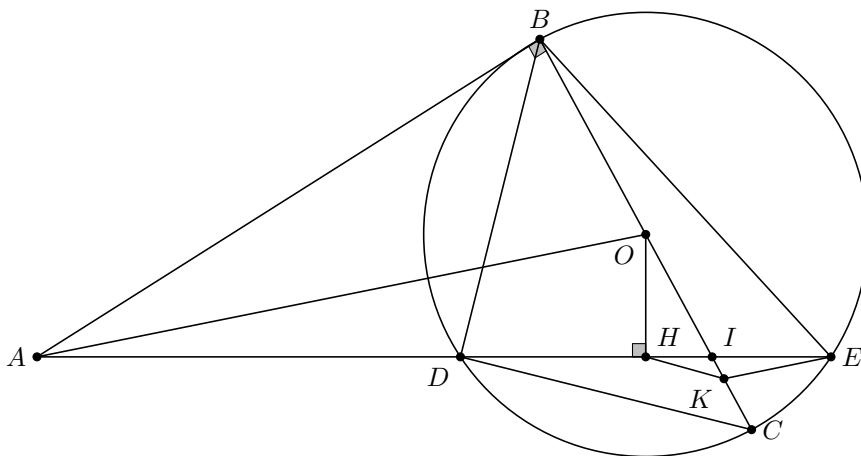
✦ **Bài 4.** Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB của đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC . Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I ($I \neq C, O$). Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại hai điểm D, E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE .

a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO , cắt BC tại K . Chứng minh $HK \parallel DC$.

🗨️ **Lời giải.**



a) Ta có $\widehat{OBA} = 90^\circ$ (do AB là tiếp tuyến, B là tiếp điểm), nên B thuộc nửa đường tròn đường kính OA . (1)

Mặt khác $\widehat{OHA} = 90^\circ$ (do H là trung điểm của dây cung DE), nên H thuộc nửa đường tròn đường kính OA . (2)

Từ (1) và (2), suy ra bốn điểm A, B, O, H cùng thuộc nửa đường tròn đường kính OA .

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có

- \widehat{BAD} chung.

- $\widehat{ABD} = \widehat{BED}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BD).

$$\text{Suy ra } \triangle ABD \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EB}.$$

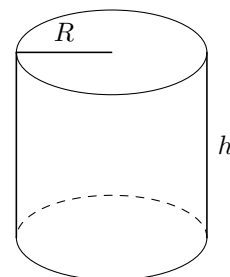
- c) Ta có $EK \parallel OA$ nên $\widehat{HEK} = \widehat{OAH}$ mà $\widehat{OAH} = \widehat{OBH} = \widehat{HBK} \Rightarrow \widehat{HEK} = \widehat{HBK}$.
Do đó tứ giác $BHKE$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BKH} = \widehat{BED} = \widehat{BCD} \Rightarrow HK \parallel CD$ (cặp góc đồng vị).

□

BÀI 28. HÌNH TRỤ - KHỐI TRỤ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- a) Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi Rh$.
b) Diện tích đáy $S = \pi R^2$.
c) Diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.
d) Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h$.



B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính chiều cao, bán kính đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích

Áp dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích đáy, diện tích toàn phần, thể tích để làm.

⇔ Bài 1.

- a) Điền đầy đủ các kết quả vào bảng sau

| Hình | Bán kính đáy (cm) | Chiều cao (cm) | Chu vi đáy (cm) | Diện tích đáy (cm ²) | Diện tích xung quanh (cm ²) | Thể tích (cm ³) |
|------|-------------------|----------------|-----------------|----------------------------------|---|-----------------------------|
| | 2 | 20 | | | | |
| | 10 | 8 | | | | |
| | | 16 | 8π | | | |

- b) Một hình trụ có bán kính đáy là 13 cm, diện tích xung quanh bằng 527 cm². Khi đó, chiều cao của hình trụ là

A 27,958 cm.

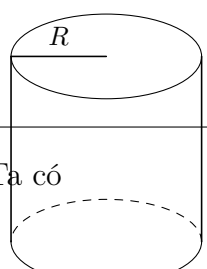
B 17,958 cm.

C 6,451 cm.

D 28,958 cm.

🗨️ Lời giải.

a) Ta có bảng sau

| Hình | Bán kính đáy (cm) | Chiều cao (cm) | Chu vi đáy (cm) | Diện tích đáy (cm ²) | Diện tích xung quanh (cm ²) | Thể tích (cm ³) |
|---|-------------------|----------------|-----------------|----------------------------------|---|-----------------------------|
|  | 2 | 20 | 4π | 4π | 80π | 80π |
| | 10 | 8 | 20π | 100π | 160π | 800π |
| | 4 | 16 | 8π | 16π | 128π | 256 |

b) Ta có

$$S_{xq} = 2\pi R h \Rightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi R} = \frac{527}{2\pi \cdot 13} \approx 6,451 \text{ cm.}$$

Chọn đáp án **C**

□

🔗 Bài 2.

a) Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính của đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là 314 cm². Tính

(a) Bán kính của đường tròn đáy.

👉 7,07 cm

(b) Thể tích của khối trụ.

👉 1110,22 cm³

(Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

b) Một hình trụ có bán kính đáy đường tròn đáy là 16 cm, chiều cao là 9 cm. Tính

(a) Diện tích xung quanh của hình trụ.

👉 983 cm²

(b) Thể tích của hình trụ.

👉 7239 cm³

(Lấy $\pi = 3,142$ làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

💬 Lời giải.

a)

(a) Theo giả thiết $R = h$.

Ta có

$$S_{xq} = 2\pi R h = 2\pi h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{S_{xq}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{314}{2\pi}} = 7,07 \text{ cm.}$$

(b) Ta có

$$V = \pi R^2 h = \pi h^3 = \pi \cdot 7,07^3 \approx 1110,22 \text{ cm}^3.$$

b)

(a) Ta có

$$S_{xq} = 2\pi R l = 2 \cdot 3,142 \cdot 16 \cdot 9 = 983 \text{ cm}^2.$$

(b) Ta có

$$V = \pi R^2 h = 3,142 \cdot 16^2 \cdot 9 = 7239 \text{ cm}^3.$$

□

❖ Bài 3.

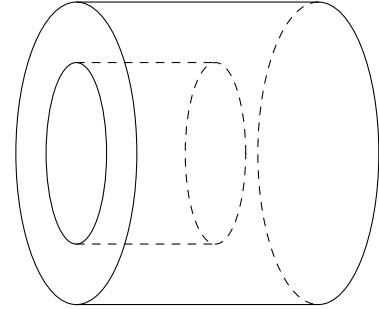
a) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4, BC = 2$. Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1 ; quay quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2 . Trong các đẳng thức dưới đây đẳng thức nào đúng?

- Ⓐ $V_1 = V_2$. Ⓑ $V_1 = 2V_2$. Ⓒ $V_2 = 2V_1$. Ⓓ $V_2 = 3V_1$.

b)

Một vật thể có thể dáng hình trụ, bán kính đường tròn đáy và độ dài của nó đều bằng $2r$ (cm). Người ta khoan một lỗ cũng có dạng hình trụ như hình vẽ có bán kính đáy và độ sâu đều bằng r (cm). Thể tích phần vật thể còn lại tính theo cm^3 là

- Ⓐ $4\pi r^3$. Ⓑ $7\pi r^3$.
 Ⓒ $8\pi r^3$. Ⓓ $9\pi r^3$.



🗨️ Lời giải.

a) Ta thấy rằng,

Khi quay hình chữ nhật quanh AB thì $h = AB = 4, R = BC = 2$ và $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$.
 Khi quay hình chữ nhật quanh BC thì $h = BC = 2, R = AB = 4$ và $V_2 = \pi R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi$. Suy ra

$$V_2 = 2V_1.$$

b)

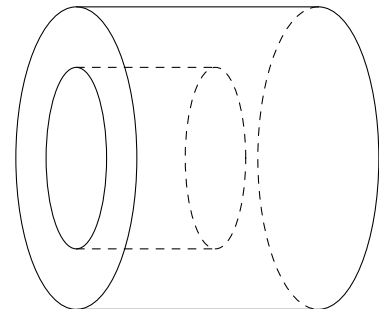
Gọi V là thể tích khối trụ bán kính đáy $2r$ và V_1 là thể tích khối trụ bán kính đáy r .

$$\text{Khi đó } V = \pi(2r)^2 \cdot 2r = 8\pi r^3.$$

$$V_1 = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3.$$

Thể tích phần vật thể còn lại là

$$V - V_1 = 8\pi r^3 - \pi r^3 = 7\pi r^3.$$



Chọn đáp án Ⓑ



📁 Dạng 2. Dạng toán tổng hợp

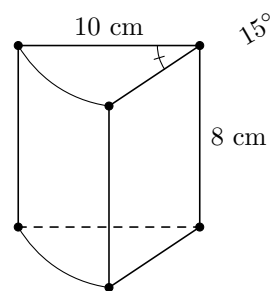
Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã được học và kết hợp với công thức lý thuyết về hình trụ để giải bài tập

❖ Bài 4.

a)

Cho hình vẽ là một mẫu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ (có các kích thước như hình sau). Khối lượng của mẫu pho mát là (khối lượng riêng của pho mát là 3 g/cm^3).

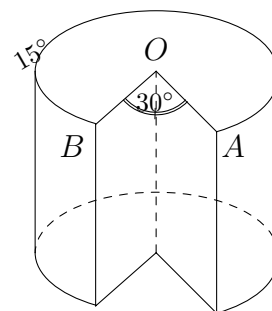
- (A) 100 g. (B) 100π g. (C) 800 g. (D) 800π g.



b)

Một hình trụ có bán kính đáy là 3 cm, chiều cao 4 cm được đặt đứng trên mặt bàn. Một phần của hình trụ bị cắt rời theo các bán kính OA, OB và theo chiều dài thẳng đứng từ trên xuống dưới với $\widehat{AOB} = 30^\circ$.

- (a) Tính thể tích của phần bị cắt. 🔍 $100\pi \text{ cm}^3$
 (b) Tính thể tích của phần còn lại. 🔍 $3\pi \text{ cm}^3$
 (c) Diện tích toàn phần của hình trụ sau khi đã bị cắt. 🔍 $100\pi \text{ cm}^3$

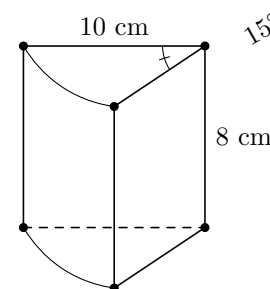


🗨️ Lời giải.

a)

Ta có

$$V = S_{\text{quat}} \cdot h = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 15}{360} \cdot 8 = \frac{100}{3} \pi \Rightarrow m = V \cdot D = \frac{100\pi}{3} \cdot 3 = 100\pi.$$



b)

(a) Ta có

$$V_1 = S_{\text{Quat}} \cdot h = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 30}{360} \cdot 4 = 3\pi \text{ cm}^3.$$

(b) Ta thấy

$$V_2 = V - V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 - 3\pi = 33\pi \text{ cm}^3.$$

(c) Diện tích phần còn lại của hai đáy là

$$2 \left(\pi \cdot 9 - \frac{\pi \cdot 9 \cdot 30}{360} \right) = \frac{33}{2} \pi \text{ cm}^2.$$

Diện tích xung quanh là

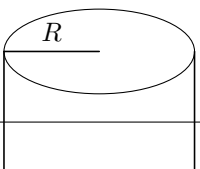
$$2\pi R h \cdot \frac{\pi R \cdot 30}{180} + 2Rh = 22\pi + 24 \text{ cm}^2.$$

Diện tích toàn phần là

$$\frac{33}{2} \pi + 22\pi + 24 = 38\frac{1}{2} \pi + 24 \text{ cm}^2.$$

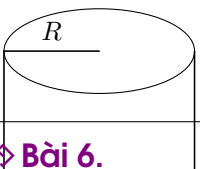
Chọn đáp án **(B)**

❖ **Bài 5.** Điền đầy đủ các kết quả vào ô trống của bảng sau

| Hình | Bán kính đáy (cm) | Đường kính đáy (cm) | Chiều cao (cm) | Chu vi đáy (cm) | Diện tích đáy (cm ²) | Diện tích xung quanh (cm ²) | Thể tích (cm ³) |
|---|-------------------|---------------------|----------------|-----------------|----------------------------------|---|-----------------------------|
|  | 20 | | 8 | | | | |
| | | 12 | 2 | | | | |
| | 10 | | | | | | 1000 |

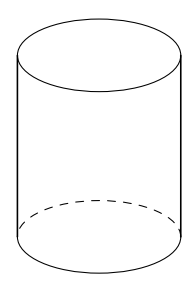
🗨 **Lời giải.**

Ta có

| Hình | Bán kính đáy (cm) | Đường kính đáy (cm) | Chiều cao (cm) | Chu vi đáy (cm) | Diện tích đáy (cm ²) | Diện tích xung quanh (cm ²) | Thể tích (cm ³) |
|--|-------------------|---------------------|----------------|-----------------|----------------------------------|---|-----------------------------|
|  | 20 | 40 | 8 | 40π | 400π | 320π | 3200π |
| | 6 | 12 | 2 | 12π | 100π | 24π | 72π |
| | 10 | 20 | 3,183 | 20π | 100π | 199,994π | 1000 |

❖ **Bài 6.**

Một cái trụ lăn có dạng hình trụ như hình bên. Đường kính của đường tròn đáy là 42 cm, chiều dài trục lăn là 2 m. Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trụ lăn tạo trên mặt sân một phẳng một diện tích là (lấy $\pi = \frac{22}{7}$).



- (A)** 24600 cm².
- (B)** 58200 cm².
- (C)** 528 m².
- (D)** 264000 cm².

🗨 **Lời giải.**

Bán kính của đáy là $R = \frac{42}{2} = 21$ cm và chiều cao $h = 200$ cm. Do đó diện tích xung quanh của cái trụ lăn một vòng là

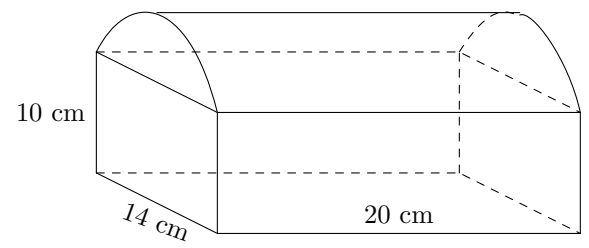
$$S_{xq} = 2\pi R \cdot l = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 21 \cdot 200 = 26400 \text{ cm}^2.$$

Sau khi trụ lăn được 10 vòng thì diện tích là 264000 cm².

Chọn đáp án **(D)**

❖ **Bài 7.**

Một vật thể hình học có hình vẽ như hình bên. Phần trên là một nửa hình trụ, phần dưới là một hình hộp chữ nhật. Với các kích thước cho như hình vẽ. Thể tích của vật thể hình học này là



- (A)** 4340 cm³.
- (B)** 4760 cm³.
- (C)** 5880 cm³.
- (D)** 8 cm³.

🗨 **Lời giải.**

Thể tích của hình hộp chữ nhật là

$$V_1 = 14 \cdot 20 \cdot 10 = 2800 \text{ cm}^3.$$

Thể tích nửa hình trụ là

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 20 = 1540 \text{ cm}^3.$$

Thể tích của vật thể là

$$V = V_1 + V_2 = 4340 \text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án **A**

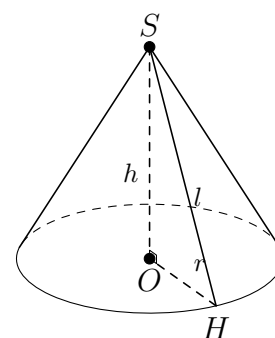


BÀI 29. HÌNH NÓN - KHỐI NÓN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

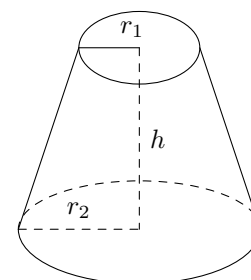
a) Hình nón

- ✔ Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi r l$.
- ✔ Diện tích toàn phần $S = \pi r l + \pi r^2$.
- ✔ Thể tích $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.



b) Hình nón cụt

- ✔ Diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l$.
- ✔ Thể tích $V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$.



B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính diện tích, thể tích và các đại lượng liên quan đến hình nón và hình nón cụt

Áp dụng các công thức tính diện tích, thể tích của hình nón và hình nón cụt.

◇ Bài 1.

- a) Cho hình nón có bán kính r , đường kính đáy là d , chiều cao h , đường sinh l , thể tích V , diện tích xung quanh S_{xq} , diện tích toàn phần S_{tp} . Hoàn thành bảng sau

| | | | | |
|-----------------------------|---|---------|---------|----|
| r (cm) | 3 | | | |
| d (cm) | | | 10 | |
| h (cm) | | 8 | | 20 |
| l (cm) | 5 | | | |
| S_{xq} (cm ²) | | | 65π | |
| S_{tp} (cm ²) | | | | |
| V (cm ³) | | 96π | | |

- b) Cho hình nón có bán kính r , đường kính đáy là d , chiều cao h , đường sinh l , thể tích V . Hoàn thành bảng sau

| | | | | | |
|------------------------|----|----|------|------|------|
| r (cm) | 10 | | | 10 | |
| d (cm) | | 10 | | | 10 |
| h (cm) | 10 | 10 | 10 | | |
| l (cm) | | | | | |
| V (cm ³) | | | 1000 | 1000 | 1000 |

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có bảng sau

| | | | | |
|-----------------------------|---------|---------|----------|-----------|
| r (cm) | 3 | 6 | 5 | 15 |
| d (cm) | 6 | 12 | 10 | 30 |
| h (cm) | 4 | 8 | 12 | 20 |
| l (cm) | 5 | 10 | 13 | 25 |
| S_{xq} (cm ²) | 15π | 60π | 65π | 375π |
| S_{tp} (cm ²) | 24π | 96π | 90π | 600π |
| V (cm ³) | 12π | 96π | 100π | 1500π |

- b) Ta có bảng sau

| | | | | | |
|------------------------|---------------------|--------------------|-------|-------|-------|
| r (cm) | 10 | 5 | 9,77 | 10 | 5 |
| d (cm) | 20 | 10 | 19,54 | 20 | 10 |
| h (cm) | 10 | 10 | 10 | 9,55 | 38,2 |
| l (cm) | $10\sqrt{2}$ | $5\sqrt{5}$ | 13,98 | 13,83 | 38,52 |
| V (cm ³) | $\frac{1000\pi}{3}$ | $\frac{250\pi}{3}$ | 1000 | 1000 | 1000 |

□

🔗 Bài 2.

- a) Cho tam giác MNP vuông tại M , $\widehat{N} = 60^\circ$ và $NP = 2a$ (đơn vị độ dài). Quay tam giác đó quanh một vòng quanh cạnh huyền NP . Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón tạo thành.

$$\color{red}{\text{Q}} S_{xq} = \frac{\pi a^2(3 + \sqrt{3})}{2}, V = \frac{3\pi a^3}{2}$$

- b) Một dụng cụ hình nón có đường sinh dài 13 cm và diện tích xung quanh là 65π (cm²). Tính

(a) Chiều cao của hình nón.

$$\color{red}{\text{Q}} 12 \text{ cm}$$

(b) Diện tích toàn phần và thể tích của hình nón.

$$\color{red}{\text{Q}} S_{tp} = 90\pi \text{ cm}^2, V = 100\pi \text{ cm}^3$$

🗨️ Lời giải.

a)

Ta có

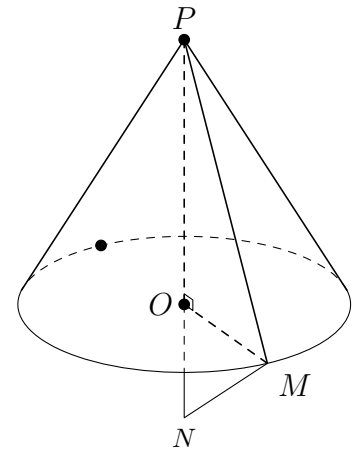
$$MN = a, MP = a\sqrt{3}, MO = a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra

$$S_{xq} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} (a + a\sqrt{3}) = \frac{\pi a^2(3 + \sqrt{3})}{2}.$$

Vậy thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot MO^2 \cdot NP = \frac{3\pi a^3}{2}.$$



b)

(a) Ta có

$$S_{xq} = \pi Rl \Rightarrow R = \frac{65\pi}{13\pi} = 5 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}.$$

(b) Diện tích toàn phần là

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi 5^2 = 90\pi \text{ cm}^2.$$

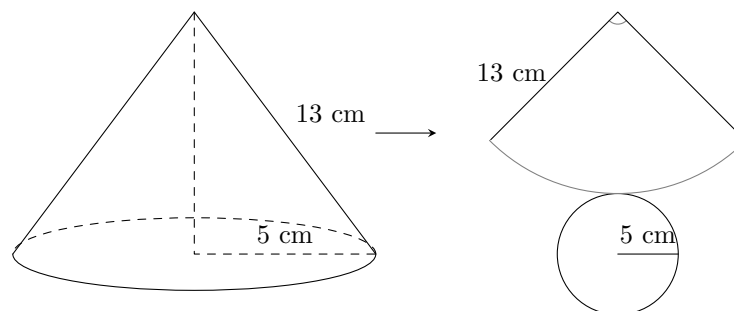
Thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ cm}^3.$$

□

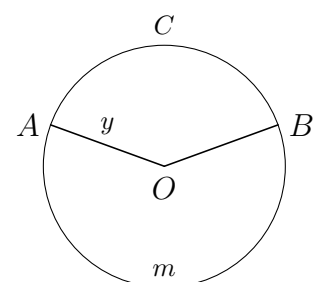
✦ Bài 3.

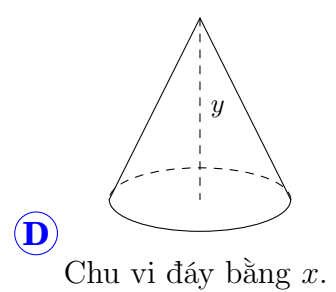
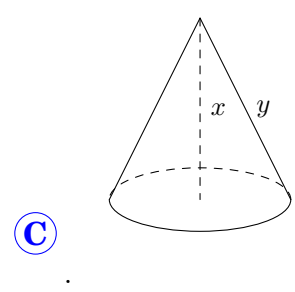
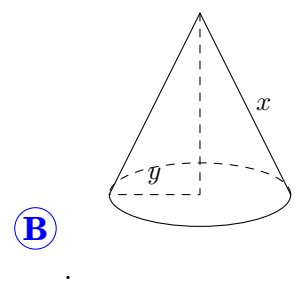
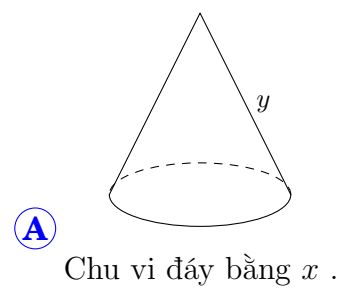
a) Cắt mặt xung quanh của hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra tạo thành một hình quạt. Biết bán kính của hình quạt tròn bằng độ dài đường sinh và độ dài cung bằng chu vi đáy. Quan sát hình vẽ dưới đây và tính số đo cung của hình quạt tròn. 🔗 $\alpha = 138^\circ 27'$



b)

Cắt bỏ hình quạt $OACB$ như hình bên. Biết độ dài cung $AmB = x$ thì phần còn lại có thể ghép hình nón nào dưới đây?



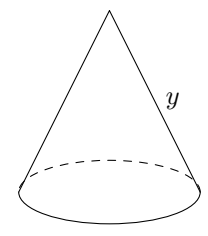


Lời giải.

a) Chu vi đường tròn đáy là $c = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$.
Số đo cung hình quạt là

$$\alpha = \frac{c}{R} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{10\pi \cdot 180^\circ}{13 \cdot \pi} \approx 138^\circ 27'.$$

b)
Chu vi đáy bằng x và đường sinh bằng y nên chọn hình.



Chọn đáp án **A**



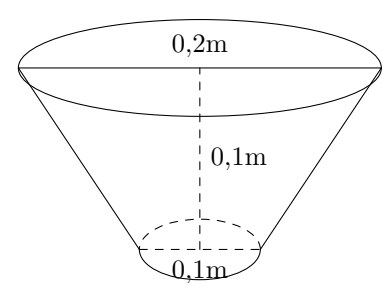
Bài 4.

a) Hình triển khai mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt. Nếu bán kính của hình quạt là 20 cm, số đo cung là 120° thì độ dài đường sinh của hình nón là

- A** 20cm.
- B** 16cm.
- C** 15cm.
- D** 10cm.

b)
Một cái xô đựng nước như hình vẽ dưới đây. Thể tích nước chứa đầy xô sẽ là (tính theo cm^3)

- A** $\frac{1000\pi}{3}$.
- B** $\frac{1750\pi}{3}$.
- C** $\frac{2000\pi}{3}$.
- D** $\frac{2750\pi}{3}$.



Lời giải.

- a) Độ dài đường sinh của hình nón bằng với bán kính của hình quạt là 20 cm.
- b) Cái xô đường làm từ hình nón có thể tích V bị cắt bởi mặt phẳng song song với đáy, phân bổ khối nón bỏ đi có thể tích V_1 và cái xô có thể tích V_2 .
Do bán kính của đường tròn đáy lớn của xô gấp 2 lần bán kính của đường tròn nhỏ của xô nên chiều cao của khối nón V là $h = 20$ cm.
Do đó thể tích của khối nón $V = \frac{1}{3}\pi 10^2 \cdot 20 = \frac{2000\pi}{3}$ cm³.
Thể tích khối nón $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 10 = \frac{\pi \cdot 250}{3}$ cm³.
Vậy thể tích của xô là $V_2 = V - V_1 = \frac{1750\pi}{3}$ cm³.

Chọn đáp án **(B)**



Dạng 2. Dạng tổng hợp

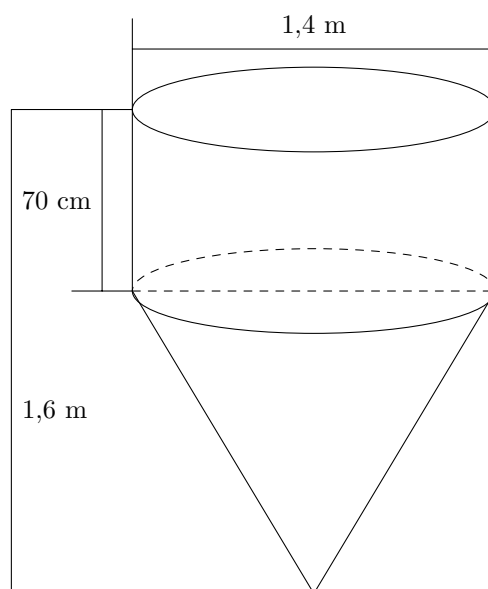
Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã được học và kết hợp với các công thức và lý thuyết về hình nón và hình nón cụt để giải bài tập.

Bài 5.

- a) Cho hình bình hành $ABCD$ với $AB = 1$, $AD = x$ ($x > 0$) và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
- (a) Tính diện tích toàn phần S của hình tạo thành khi quay hình bình hành $ABCD$ đúng một vòng quanh cạnh AB và diện tích toàn phần S_1 của hình tạo thành khi quay quanh cạnh AD .
- (b) Xác định giá trị x khi $S = S_1$ và $S = 2S_1$.
- b)

Một vật thể gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình vẽ dưới đây. Hãy tính

- (a) Thể tích của dụng cụ ấy.
- (b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ không tính nắp đáy.



Lời giải.

a)

(a)

Khi hình bình hành $ABCD$ quay một vòng quanh AB thì diện tích toàn phần sẽ bằng diện tích hình trụ do $CDHK$ tạo ra cộng với hai lần diện tích xung quang của hình nón do ADH tạo ra

$$HD = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

$$S = S_{tp1} = 2\pi \cdot HD \cdot CD + 2\pi \cdot HD(CD + AD) = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}(x+1) = \sqrt{3}\pi x(x+1).$$

Tương tự khi quay quanh CD thì $S_1 = S_{tp2} = \sqrt{3}\pi(x+1)$.

(b) Khi

$$S = S_1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\pi x(x+1) = \sqrt{3}\pi(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Khi

$$S = 2S_1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\pi x(x+1) = 2\sqrt{3}\pi(x+1) \Leftrightarrow x = 2.$$

b)

(a) Thể tích của dụng cụ là

$$V = \pi \cdot 70^2 \cdot 70 + \frac{1}{3} \cdot 70^2 \cdot 90 = 490000\pi \text{ cm}^3.$$

(b) Tính diện tích mặt ngoài của dụng cụ không đậy nắp. Ta có

$$l_{\text{nón}} = \sqrt{90^2 - 70^2} = 10\sqrt{130} \text{ cm}.$$

Diện tích cần tìm là

$$S = 2\pi \cdot 70 \cdot 70 + \pi \cdot 70 \cdot 10\sqrt{130} = 9800\pi + 700\sqrt{130}\pi = 700\pi(14 + \sqrt{130}) \text{ cm}^2.$$

□

✦ **Bài 6.** Diện tích toàn phần của hình nón có bán kính đáy 7 cm và đường sinh 10 cm là (lấy $\pi = \frac{22}{7}$.)

Ⓐ 220.

Ⓑ 264.

Ⓒ 308.

Ⓓ 374.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$S_{tp} = \pi \cdot 7 \cdot 10 + \pi \cdot 7^2 = \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot 10 + \frac{22}{7} \cdot 7^2 = 374.$$

Chọn đáp án Ⓓ

□

✦ **Bài 7.** Một cái xô đựng nước có bán kính đáy là 14 cm và 9 cm, chiều cao bằng 23 cm.

a) Tính dung tích của xô.

$$\text{🔍 } \frac{9269\pi}{3} \text{ cm}^3$$

b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích chỗ ghép).

$$\text{🔍 } 1955,19 \text{ cm}^2$$

🗨️ **Lời giải.**

a) Dung tích của xô là

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 23 \cdot (14^2 + 9^2 + 14 \cdot 9) = \frac{9269\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

b) Ta có

$$l = \sqrt{23^2 - 5^2} = \sqrt{544} \text{ cm}.$$

Diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích chỗ ghép) là

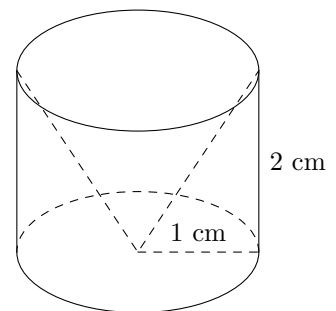
$$S = \pi(14 + 9) \cdot \sqrt{544} + \pi \cdot 9^2 = 1955,19 \text{ cm}^2.$$

□

❖ Bài 8.

Một hình trụ có bán kính đáy 1 cm và chiều cao 2 cm, người ta khoan đi một phần có dạng hình nón như hình vẽ bên, thì phần thể tích còn lại là

- Ⓐ $\frac{2\pi}{3} \text{ cm}^3$. Ⓑ $2\pi \text{ cm}^3$. Ⓒ $\frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$. Ⓓ $\frac{8\pi}{3} \text{ cm}^3$.



🗨️ Lời giải.

Ta có thể tích khối trụ là $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi \text{ cm}^3$.

Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Thể tích phần còn lại là

$$V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Chọn đáp án Ⓒ

□

❖ Bài 9. Cho hình nón có chiều cao h (cm), bán kính đường tròn đáy là r (cm) và độ dài đường sinh x cm thì thể tích của hình nón này là

- Ⓐ $\pi r^2 h \text{ cm}^3$. Ⓑ $\frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ cm}^3$. Ⓒ $\pi r x \text{ cm}^3$. Ⓓ $\pi r(r+x) \text{ cm}^3$.

🗨️ Lời giải.

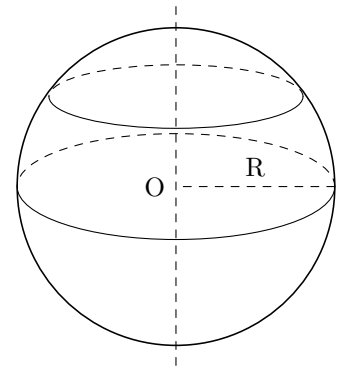
Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án Ⓑ

□

BÀI 30. MẶT CẦU - KHỐI CẦU

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT



- ⚠️ Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$
 Với R là bán kính và d là đường kính của mặt cầu.
- ⚠️ Thể tích của hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và các đại lượng liên quan

Áp dụng các công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu để giải bài toán.

Ví dụ 1. Hãy điền vào các ô trống trong bảng sau:

| | | | | | |
|-------------------|--------|------|---------|-----|-------|
| Bán kính mặt cầu | 0,5 mm | 2 cm | 0,75 dm | 3 m | 50 km |
| Diện tích mặt cầu | | | | | |
| Thể tích hình cầu | | | | | |

Lời giải.

| | | | | | |
|-------------------|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------|------------------------------------|
| Bán kính mặt cầu | 0,5 mm | 2 cm | 0,75 dm | 3 m | 50 km |
| Diện tích mặt cầu | $\pi \text{ mm}^2$ | $16\pi \text{ cm}^2$ | $\frac{9}{4}\pi \text{ dm}^2$ | $36\pi \text{ m}^2$ | $10000\pi \text{ km}^2$ |
| Thể tích hình cầu | $\frac{\pi}{6} \text{ mm}^3$ | $\frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$ | $\frac{9\pi}{16} \text{ dm}^3$ | $36\pi \text{ m}^3$ | $\frac{500000\pi}{3} \text{ km}^3$ |

□

Ví dụ 2. Các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, đơn vị: mm):

| | | | | | |
|-------------------|------|--------------|---------|----------|------|
| Loại bóng | Gôn | Khúc côn cầu | Ten-nít | Bóng bàn | Bi-a |
| Đường kính | 42,7 | | 65 | 40 | 61 |
| Độ dài đường tròn | | 230 | | | |
| Diện tích | | | | | |
| Thể tích | | | | | |

Lời giải.

| | | | | | |
|-------------------|----------|--------------|---------|----------|-----------|
| Loại bóng | Gôn | Khúc côn cầu | Ten-nít | Bóng bàn | Bi-a |
| Đường kính | 42,7 | 73,2 | 65 | 40 | 61 |
| Độ dài đường tròn | 134,15 | 230 | 204,2 | 125,66 | 191,64 |
| Diện tích | 1432 | 4210 | 3318 | 1256,64 | 2922,47 |
| Thể tích | 40764,51 | 205460 | 143790 | 33510,32 | 118846,97 |

□

⇨ **Ví dụ 3.** Thể tích của một hình cầu là $\frac{4312}{3} \text{ cm}^3$. Thì bán kính của hình cầu là bao nhiêu? (Lấy $\pi = \frac{22}{7}$).

- (A) 7 cm. (B) 8 cm. (C) 9 cm. (D) 10 cm.

🗨️ **Lời giải.**

Áp dụng công thức tính thể tích hình cầu và biến đổi ta được $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4312}{3}$.

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{4312 \cdot 3}{3 \cdot 4\pi}} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{4312}{4 \cdot \frac{22}{7}}} = 7 \text{ cm.}$$

Chọn đáp án (A) □

⇨ **Ví dụ 4.** Diện tích của một mặt cầu là 2464 m^2 thì đường kính của mặt cầu là bao nhiêu? (Lấy $\pi = \frac{22}{7}$).

- (A) 28 cm. (B) 28 mét. (C) 38 mét. (D) 30 mét.

🗨️ **Lời giải.**

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu và biến đổi ta được $S = \pi d^2 = 2464$.

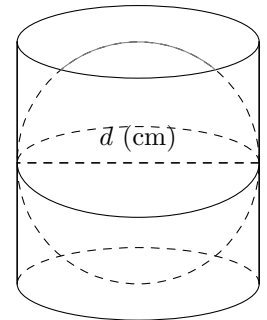
$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{2464}{\pi}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2464}{\frac{22}{7}}} = 28 \text{ mét (Đơn vị của diện tích mặt cầu là m}^2\text{)}.$$

Chọn đáp án (B) □

⇨ **Ví dụ 5.**

Một hình cầu đặt vừa khít vào bên trong một hình trụ như hình vẽ (chiều cao của hình trụ bằng độ dài đường kính của hình cầu) thì thể tích của nó bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ. Nếu đường kính của hình cầu là d thì thể tích của hình trụ là

- (A) $\frac{1}{4}\pi d^3$. (B) $\frac{1}{3}\pi d^3$. (C) $\frac{2}{3}\pi d^3$. (D) $\frac{3}{4}\pi d^3$.



🗨️ **Lời giải.**

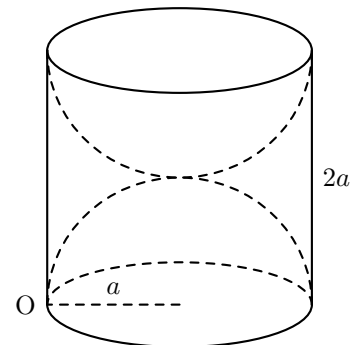
Ta có $V_{\text{hình cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$. Mà $V_{\text{hình cầu}} = \frac{2}{3}V_{\text{hình trụ}} \Rightarrow V_{\text{hình trụ}} = \frac{1}{4}\pi d^3$.

Chọn đáp án (A) □

⇨ **Ví dụ 6.**

Một khối gỗ dạng hình trụ đứng, bán kính đường tròn đáy là a (cm), chiều cao là $2a$ (cm). Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình vẽ. Diện tích toàn bộ của khối gỗ là

- (A) $4\pi a^2 \text{ cm}^2$. (B) $6\pi a^2 \text{ cm}^2$. (C) $8\pi a^2 \text{ cm}^2$. (D) $10\pi a^2 \text{ cm}^2$.



🗨️ **Lời giải.**

Nhận thấy:

$$S_{tb} = S_{xqt} + S_c.$$

Với $S_{xqt} = 2\pi R \cdot h = 2\pi a \cdot 2a = 4\pi a^2$ và $S_c = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 2. Dạng toán tổng hợp

Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã được học kết hợp với các công thức và lý thuyết về hình cầu để giải bài tập.

✦ **Ví dụ 7.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$, Ax và By là hai tiếp tuyến với nửa mặt đường tròn tại A và B . Lấy trên Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP cắt By tại N .

- Chứng minh $\triangle MON \sim \triangle APB$.
- Chứng minh $AM \cdot BN = R^2$.
- Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \frac{R}{2}$.
- Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh AB sinh ra.

🗨️ Lời giải.

a) Ta có:

- Góc $\widehat{APB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

- Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

OM là tia phân giác của \widehat{AOP} và ON là tia phân giác của góc \widehat{BOP} .

Mà \widehat{AOP} và \widehat{BOP} là 2 góc kề bù $\Rightarrow OM \perp ON \Rightarrow \widehat{MON} = 90^\circ$.

- Xét tứ giác $AMPO$ có $\widehat{MPO} = \widehat{MAO} = 90^\circ$.

\widehat{OMP} và \widehat{PAO} cùng chắn cung $OP \Rightarrow \widehat{OMP} = \widehat{PAO}$.

$$\begin{cases} \widehat{MON} = \widehat{APB} = 90^\circ \\ \widehat{BAP} = \widehat{OMN} \end{cases}$$

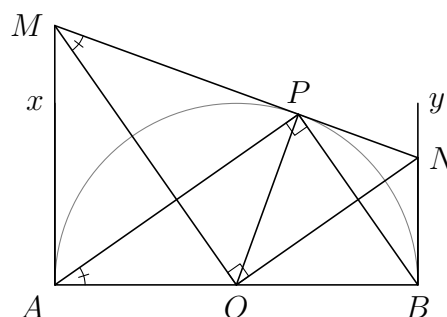
$$\Rightarrow \triangle MON \sim \triangle APB \text{ (g.g.)}$$

b) $AM \cdot BN = MP \cdot NP = OP^2 = R^2$.

c) $AM \cdot BN = R^2 \Rightarrow BN = 2R$.

$$\Rightarrow MN = \frac{5R}{2} \Rightarrow \frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

d) Nửa hình tròn APB quay quanh AB là hình cầu đường kính $AB \Rightarrow AO = R \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3$.



C - BÀI TẬP VẬN DỤNG

✦ **Bài 1.** Một hình nón có bán kính đáy bằng 3 cm và có diện tích xung quanh bằng diện tích của mặt cầu có bán kính 3 cm. Tính chiều cao của hình nón.

🗨️ Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi r l = 3\pi l$.

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu $S_c = 4\pi R^2 = 36\pi$.

Từ giả thuyết $S_{xq} = S_c$ ta được $3\pi l = 36\pi \Rightarrow l = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{15}$ cm.

❖ Bài 2.

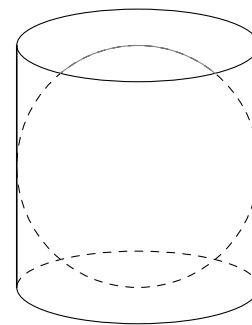
Một cái hộp hình trụ được làm ra sao cho một quả bóng hình cầu đặt vừa khít vào hộp đó như hình vẽ. Tỷ số thể tích của hình cầu và hình trụ là

- Ⓐ $\frac{3}{4}$. Ⓑ $\frac{4}{3}$. Ⓒ $\frac{3}{2}$. Ⓓ $\frac{2}{3}$.

🗨️ **Lời giải.**

Nhận thấy $R_c = R_t = r$ và $h = 2r$. Nên $V_c = \frac{4}{3}\pi r^3$ và $V_t = \pi r^2 h = 2\pi r^3 \Rightarrow \frac{V_c}{V_t} = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án Ⓓ



❖ Bài 3. Chiều cao của một hình trụ gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Tỷ số của thể tích hình trụ này và thể tích của hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của hình trụ là

- Ⓐ $\frac{4}{3}$. Ⓑ $\frac{9}{4}$. Ⓒ $\frac{3}{1}$. Ⓓ $\frac{4}{9}$.

🗨️ **Lời giải.**

Áp dụng công thức tính thể tích cho hình trụ $V = \pi r^2 h$ và thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

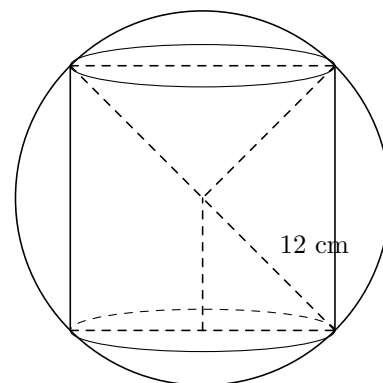
$$\frac{V_t}{V_c} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\pi r^2 \cdot 3r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án Ⓑ

❖ Bài 4.

Một hình trụ được “đặt khít” vào bên trong một hình cầu bán kính $r = 12$ cm như hình vẽ. Tính:

- Diện tích xung quanh của hình trụ, biết chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy của nó.
- Thể tích của hình cầu.
- Diện tích mặt cầu.



🗨️ **Lời giải.**

a) Nhận thấy: $r_t = \frac{r}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ cm, với $h = 2r_t = 12\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow S_{xq} = 2\pi r h = 288\pi$ cm².

b) Áp dụng công thức tính thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 2304\pi$ cm³.

c) Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 \Rightarrow S = 4\pi \cdot 12^2 = 576\pi$ cm².

❖ Bài 5. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = 8$ cm, đường cao AH . Khi đó diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ một vòng quanh AH .

🗨️ **Lời giải.**

Nhận thấy: $r_{nt} = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S = 4\pi \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \approx 67,02$. cm²

BÀI 31. ÔN TẬP CHƯƠNG 4

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

! **☑** Xem phần Tóm tắt lý thuyết từ Bài 1 đến Bài 3

B – BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

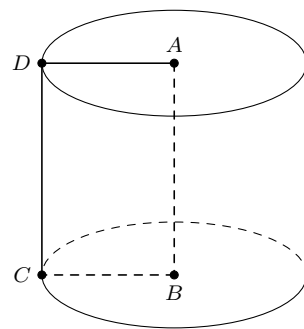
☞ Bài 1.

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ này.

☞ Lời giải.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh hình trụ ta được $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 = 96\pi$ cm².

Áp dụng công thức tính thể tích hình trụ ta được $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi$ cm³. □



☞ Bài 2. Hãy tính diện tích toàn phần của hình nón có các kích thước như sau:

- Bán kính đáy bằng 2,5 mét và đường sinh bằng 5,6 mét;
- Bán kính đáy bằng 3,6 mét và đường sinh bằng 4,8 mét.

☞ Lời giải.

$$\text{a) } S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \frac{81\pi}{4} \text{ m}^2.$$

$$\text{b) } S_{tp} = \pi rl + \pi r^2 = \frac{756\pi}{25} \text{ m}^2.$$

□

☞ Bài 3.

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm.

- Tính chiều cao AH của $\triangle ABC$.
- Cho $\triangle ABC$ quay một vòng quanh cạnh BC . Tính tỉ số diện tích giữa các phần do các dây cung AB và AC tạo ra.

☞ Lời giải.

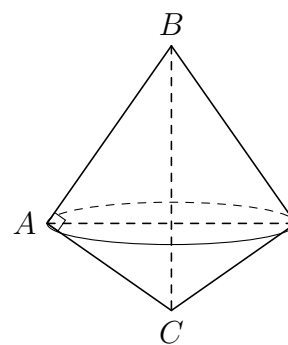
$$\text{a) } BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm} \Rightarrow AH = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ cm.}$$

b) Diện tích hình nón do phần dây cung AB tạo ra nhận AB là đường sinh, AH là bán kính đáy: $S_1 = \pi \cdot AH \cdot AB$.

Diện tích hình nón do phần dây cung AC tạo ra nhận AC là đường sinh, AH là bán kính đáy: $S_2 = \pi \cdot AH \cdot AC$.

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}.$$

□



✧ **Bài 4.** Cho hình nón cụt có hai bán kính 9 cm, 14 cm. Chiều cao của hình nón là 12 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt.

🗨 **Lời giải.**

Từ giả thuyết ta tính được $l = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ cm.

Áp dụng công thức tính diện tích xung quanh hình nón cụt:

$$S_{xq} = \pi(14 + 9) \cdot 13 = 299\pi \text{ cm}^2.$$

Áp dụng công thức tính thể tích hình nón cụt:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 12(9^2 + 14^2 + 9 \cdot 14) = 1612\pi \text{ cm}^3.$$

□

✧ **Bài 5.** Cho bán kính của Trái Đất và Mặt Trăng tương ứng là 6371 và 1738 ki-lô-mét. Tỷ số thể tích giữa Trái Đất và Mặt Trăng là

Ⓐ 3,67.

Ⓑ 4,93.

Ⓒ 15,63.

Ⓓ 49,26.

🗨 **Lời giải.**

Áp dụng công thức tính thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

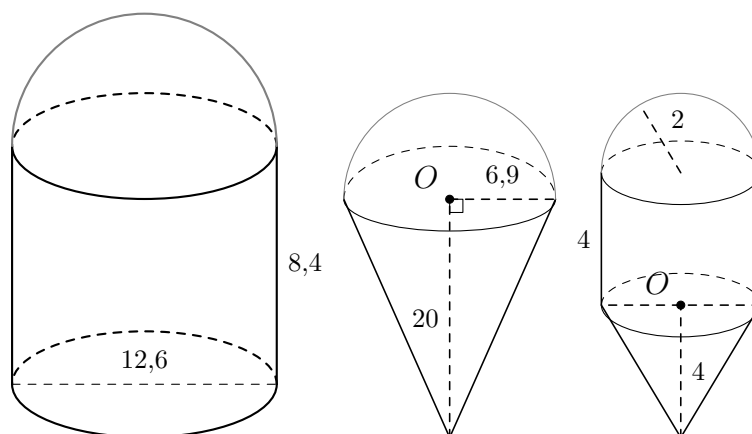
$$\Rightarrow \frac{V_{TD}}{V_{MT}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 6371^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot 1738^3} = 49,26.$$

Chọn đáp án Ⓓ

□

C-BÀI TẬP VẬN DỤNG

✧ **Bài 6.** Tính thể tích của các hình bên dưới theo các kích thước đã cho.



🗨 **Lời giải.**

a) Kết hợp công thức tính thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ và thể tích hình trụ $V = \pi r^2 h$ ta được:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{12,6}{2}\right)^2 \cdot 8,4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{12,6}{2}\right)^3 = 500,094\pi.$$

b) Kết hợp công thức tính thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ và thể tích hình chóp nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ta được:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6,9^2 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 6,9^3 = 536,406\pi.$$

c) Kết hợp công thức tính thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, thể tích hình trụ $V = \pi r^2 h$ và thể tích hình chóp nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ta được:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{80\pi}{3}.$$

□

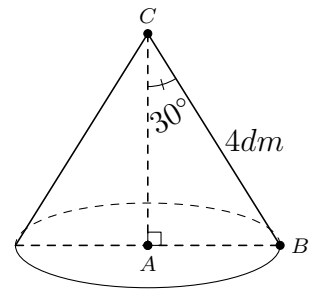
◆ Bài 7.

Khi quay tam giác ABC vuông ở A một vòng quanh cạnh góc vuông AC cố định, ta được một hình nón. Cho biết $BC = 4$ dm, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

💬 Lời giải.

$AB = 4 \sin 30^\circ = 2$ dm, $AC = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ dm $\Rightarrow S_{xq} = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi$ dm².

Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp nón $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ dm³. □



◆ Bài 8. Một hình cầu có số đo diện tích (đơn vị: m²) bằng số đo thể tích (đơn vị: m³). Tính bán kính hình cầu, diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu.

💬 Lời giải.

Từ giả thuyết ta có: $4\pi \cdot R^2 = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \Leftrightarrow R^2 = \frac{R^3}{3} \Rightarrow R = 3$ m.

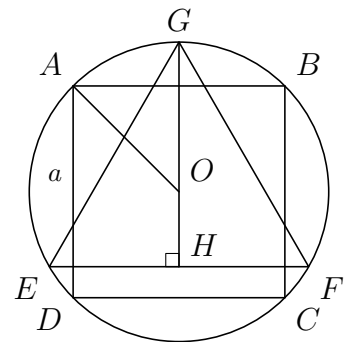
Từ đó ta tính được $S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$ m² và $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ m³. □

◆ Bài 9.

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R và GEF là tam giác đều nội tiếp đường tròn đó, EF là dây song song với AB . Cho hình đó quay quanh trục GO . Chứng minh:

- Bình phương của thể tích hình trụ sinh ra bởi hình vuông bằng thể tích của thể tích hình cầu sinh ra bởi hình tròn và thể tích hình nón do tam giác đều sinh ra.
- Bình phương diện tích toàn phần của hình trụ bằng tích của diện tích hình cầu và diện tích toàn phần của hình nón.

💬 Lời giải.



a) Gọi cạnh của hình vuông là a .

$$V_{\text{trụ}} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{4} \Rightarrow V_{\text{trụ}}^2 = \frac{\pi^2 a^6}{16}.$$

$$OA = \frac{a}{\sqrt{2}}, V_{\text{hình cầu}} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

$$\text{Ta có: } GH = \frac{3a}{2\sqrt{2}}, EH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi a^3}{16\sqrt{2}}.$$

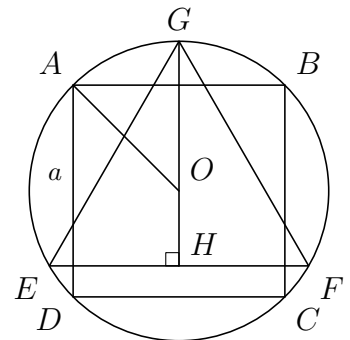
$$\Rightarrow V_{\text{hình cầu}} \cdot V_{\text{nón}} = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3} \cdot \frac{3\pi \cdot a^3}{16\sqrt{2}} = \frac{\pi^2 \cdot a^6}{16} = V_{\text{trụ}}^2.$$

b) $S_{tp} = 2\pi \cdot \frac{a^2}{4} + 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2 = \frac{3\pi a^2}{2} \Rightarrow S_{tp}^2 = \frac{9\pi^2 a^4}{4}.$

$$S_{\text{cầu}} = 4\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2\pi a^2.$$

$$S_{tp \text{ nón}} = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi a^2}{8} + \frac{3a^2\pi}{4} = \frac{9\pi a^2}{8}.$$

$$\Rightarrow S_{\text{cầu}} \cdot S_{tp \text{ nón}} = 2\pi a^2 \cdot \frac{9\pi a^2}{8} = \frac{9\pi^2 a^4}{4} = S_{tp}^2.$$



□