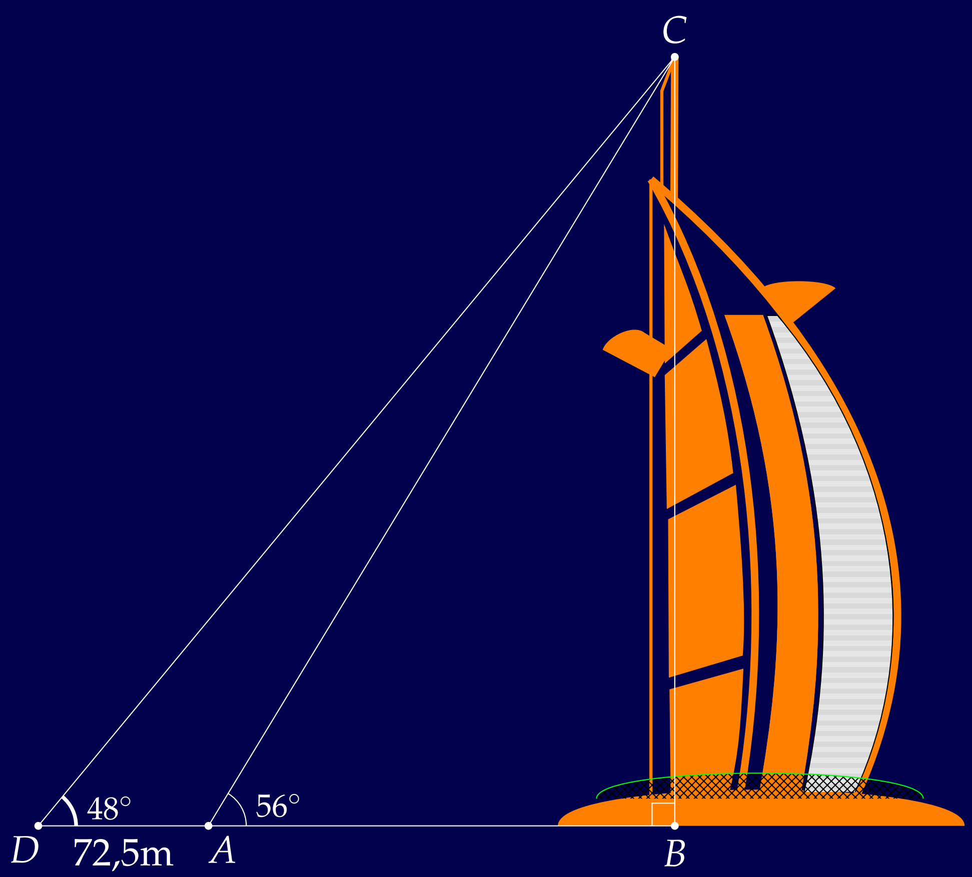
TRẦN CÔNG DŨNG

TÀI LIỆU HỌC TẬP TOÁN 9



TP HỒ CHÍ MINH - 2022

MỤC LỤC

Phần I

Đại số

Chương 1 HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình dạng $ax + by = c$. Trong đó:

- a, b, c là hằng số và a, b không đồng thời bằng không.
- x, y là hai ẩn số.

Từ đó ta có định nghĩa sau:
Định nghĩa 1. Nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn là các cặp giá trị $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2), \ldots$ của hai ẩn số x và y thỏa mãn tính chất "khi thay vào phương trình thì giá trị tương ứng của hai biểu thức ở hai vế của phương trình bằng nhau ".

2. Cách giải

Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $ax + by = c$ (mỗi điểm của đường thẳng $ax + by = c$ biểu diễn một cặp nghiệm $(x; y)$ của phương trình).

- Nếu $a \neq 0, b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị của hàm số bậc nhất $y = -\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}$.
- Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{c}{b}$. Đó là đường thẳng song song với Ox nếu $c \neq 0$, trùng với Ox nếu $c = 0$.
- Nếu $a \neq 0, b = 0$ thì đường thẳng đó có dạng $x = \dfrac{c}{a}$. Đó là đường thẳng song song với Oy nếu $c \neq 0$, trùng với Oy nếu $c = 0$.

⚠ ***Chú ý:***

1. *Đường thẳng $x = \dfrac{c}{a}$ không phải là đồ thị của hàm số.*
2. *Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện ba công việc:*
   - *Biến đổi để chỉ ra một vài nghiệm cụ thể của phương trình.*
   - *Viết được công thức nghiệm tổng quát của phương trình.*
   - *Biểu diễn nghiệm của phương trình trên mặt phẳng tọa độ.*

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Trong các cặp số $(-2;1), (0;2), (-1;0), (1;5)$ và $(4;-3)$ cặp số nào là nghiệm của phương trình

a) $5x+4y=8$.

b) $3x+5y=-3$.

VÍ DỤ 2: Giải phương trình $x-2y=6$.

Nhận xét.

1. *Vì vai trò của x, y trong phương trình như nhau nên có thể giải phương trình theo cách:*
   Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng $y=\dfrac{x-6}{2}$.
   Tới đây, cho x các giá trị tùy ý chúng ta sẽ tính được giá trị tương ứng của y, cụ thể:
   - *Với* $x=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow$ *cặp số* $(0;-3)$ *là một nghiệm của phương trình.*
   - *Với* $x=2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow$ *cặp số* $(2;-2)$ *là một nghiệm của phương trình.*

   Vì x có thể lấy giá trị tùy ý nên phương trình đã cho có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $\left(x;\dfrac{x-6}{2}\right)$.
2. *Tập nghiệm của phương trình* $x-2y=6 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-3$ *là một đường thẳng.*

VÍ DỤ 3: Giải phương trình $0x+2y=12$.

Nhận xét.

1. *Vì hệ số của x trong phương trình bằng 0 nên không thể giải phương trình theo x được.*
2. *Tập các nghiệm của phương trình:* $0x+2y=12 \Leftrightarrow y=6$ *là một đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 6.*

Tổng quát: Phương trình $y=m$ có vô số nghiệm dạng $(x;m)$, biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng m nếu $m\neq 0$, trùng với Ox nếu $m=0$.

VÍ DỤ 4: Giải phương trình $6x-0y=18$.

Nhận xét.

1. *Vì hệ số của y trong phương trình bằng 0 nên không thể giải phương trình theo y được.*
2. *Tập nghiệm của phương trình* $6x-0y=18 \Leftrightarrow x=3$ *là một đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 3.*

Tổng quát: Phương trình $x=n$ có vô số nghiệm dạng $(n;y)$, biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng n nếu $n\neq 0$, trùng với Oy nếu $n=0$.

VÍ DỤ 5: Cho hai phương trình $x+2y=4$ và $x-y=1$. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng và cho biết tọa độ của nó là nghiệm của các phương trình nào?

VÍ DỤ 6: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x-3y=4$.
b) $3x+y=6$.
c) $4x-5y=8$.

Nhận xét. *Như vậy, qua ví dụ trên chúng ta đã biết được một phương pháp tìm nghiệm nguyên của một phương trình bậc nhất hai ẩn.*

VÍ DỤ 7: Cho đường thẳng $(d)\colon mx-(m+4)y=m$.

1. Tìm m để đường thẳng (d):
   a. Cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt.
   b. Song song với Ox.
   c. Song song với Oy.
   d. Song song với đường thẳng $(\Delta)\colon x+y=6$.
2. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

VÍ DỤ 8:

1. Lập công thức tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng $ax+by+c=0$.
2. Áp dụng, tính khoảng cách từ gốc tọa đến đường thẳng $3x-4y=10$.

Nhận xét. *Công thức $(*)$ vẫn đúng trong trường hợp 1 và trường hợp 2.*

VÍ DỤ 9: Cho hai đường thẳng

$$(d_1)\colon a_1x+b_1y+c_1=0\,(a_1,b_1\neq 0)$$

$$(d_2)\colon a_2x+b_2y+c_2=0\,(a_2,b_2\neq 0).$$

Chứng minh rằng

1. (d_1) và (d_2) cắt nhau khi $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$.
2. (d_1) và (d_2) song song với nhau khi $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$.
3. (d_1) và (d_2) trùng nhau khi $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Giải các phương trình sau:

a) $4x - y = 1$

b) $x + 2y = 0$

c) $0x + 2y = 6$

d) $3x - 0y = 12$

BÀI 2: Vẽ các đường thẳng có phương trình sau:

a) $3x - 4y = 12$

b) $3x - 2y = 0$

c) $0x - y = 2$

d) $2x - 0y = -4$

BÀI 3: Kiểm tra xem các cặp số $(3;-1)$, $\left(\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$, $(81;-80)$, $(2;1)$. Cặp số nào là nghiệm của phương trình $x + y = 1$.

BÀI 4: Đường thẳng $2x - y = -4$ đi qua điểm nào trong các điểm sau:

$$A(2;4), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}};4+\sqrt{2}\right), C(1;-2), D\left(\frac{1}{\sqrt{3}-2};-2\sqrt{3}\right).$$

BÀI 5: Cho đường thẳng $(d)\colon mx + 2y = 4$.

1. Vẽ đường thẳng khi $m = 2$.
2. Tìm m để đường thẳng (d)
   a. Cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt.
   b. Song song với Ox.
   c. Song song với Oy.
   d. Song song với đường thẳng $\Delta\colon x + y = 6$.
   e. Có hướng đi lên.
   f. Có hướng đi xuống.
3. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI 6: Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định.

a) $3x + m(y-1) = 2$

b) $mx + (m-2)y = m$

c) $m(x-5) - 2y = 6$

d) $mx - 2y = 6$

BÀI 7: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $2x + y = 4$

b) $x - 7y = 9$

c) $x - 2y = 3$

d) $3x - 2y = 4$

e) $3x + y = 8$

BÀI 8: Tìm khoảng cách từ gốc tọa độ đến các đường thẳng sau:

a) $4x + 3y + 20 = 0$

b) $2x - y = 4$

c) $3x = 2$

d) $-2y = 1$

B. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Định nghĩa 2. Giải hệ phương trình là tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ là nghiệm chung của hai phương trình.

2. Nghiệm và số các nghiệm của hệ - Minh họa bằng đồ thị

Với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

- Hệ số nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

3. Hệ phương trình tương đương

Định nghĩa 3. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại.

Định nghĩa 4. Phép biến đổi tương đương là phép biến đổi từ một hệ phương trình đến một hệ phương trình khác tương đương với nó.

II. CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1: Giải hệ phương trình sau bằng đồ thị $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 8x + 6y = 24 \end{cases}$.

VÍ DỤ 2: Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao?

a) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \dfrac{1}{3}y = 1. \end{cases}$

VÍ DỤ 3: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - y = -1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 4. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

VÍ DỤ 4: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} 4x + 0y = 12 \\ x - y = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 0x - y = -2. \end{cases}$

VÍ DỤ 5: Chứng tỏ rằng hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

a) Có nghiệm duy nhất với $a = 3$.

b) Vô nghiệm với $a = -\dfrac{1}{2}$.

Hãy minh họa bằng đồ thị.

VÍ DỤ 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + y = b \\ a_2x + y = b \end{cases}$.

1. Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi a_1, a_2, b bất kì.
2. Hệ có thể có vô số nghiệm được không?

VÍ DỤ 7: Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với hệ sau $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$.

VÍ DỤ 8: Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = \dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

VÍ DỤ 9: Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ 4x + 8y = 8 \end{cases}.$$

VÍ DỤ 10: Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương

a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$.

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0. \end{cases}$

BÀI 2: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x - 9y = 3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 3x - 3y = 18. \end{cases}$

BÀI 3: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} x - 0y = 2 \\ 0x + 4y = 8. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0x + 6y = 24 \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

BÀI 4: Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - ay = -3 \end{cases}$.

a) Có nghiệm duy nhất với $a = 2$. b) Vô nghiệm với $a = \dfrac{2}{3}$.

BÀI 5: Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$.

a) Có vô số nghiệm với $a = 3$. b) Vô nghiệm với $a \neq 3$.

BÀI 6: Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất

a) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x = n. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ y = m. \end{cases}$

BÀI 7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} a^2x - y = b \\ 2ax - y = b \end{cases}$.

1. Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi a, b bất kì.
2. Hệ có nghiệm duy nhất khi nào?
3. Hệ có vô số nghiệm khi nào?

BÀI 8: Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ ax - y = -3 \end{cases}$.

BÀI 9: Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với mỗi hệ sau

a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 8y = 5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 25. \end{cases}$

BÀI 10: Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ y = 1 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ và $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$.

BÀI 11: Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ x - \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. b) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 10x + 15y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ 4x + 6y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 8x + 9y = 11 \\ 16x + 18y = 3 \end{cases}$.

BÀI 12: Tìm giá trị của m để các cặp hệ phương trình sau tương đương

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = m \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3mx + (m^2 + 8)y = 4m + 2 \end{cases}$.

C. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, chúng ta bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

- $\begin{cases} 2x+y=7 & (1) \\ x+3y=11 & (2) \end{cases}$
- Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi $y = 7-2x \quad (3)$
- Thay (3) vào phương trình (2), ta được $x+3(7-2x)=11 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2$.
- Thay $x=2$ vào (3), ta được $y=7-2\cdot 2 \Leftrightarrow y=3$.
  Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2;3)$.

- Bước 1: Chọn phương trình (1) và biểu diễn ẩn y theo x.
- Bước 2: Thay biểu thức của y vào phương trình (2), rồi tìm giá trị của x.
- Bước 3: Thay giá trị của x vào biểu thức trong bước 1 để tìm y.
- Bước 4: Kết luận nghiệm.

Từ đó, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Chọn phương trình (1) và biểu diễn ẩn y theo x.
- **Bước 2:** Thay biểu thức của x vào phương trình kia rồi tìm giá trị của y.
- **Bước 3:** Thay giá trị của y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm giá trị của x.
- **Bước 4:** Kết luận nghiệm.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Giải hệ phương trình

VÍ DỤ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x+3y=1 & (1) \\ 2x+y=-1 & (2) \end{cases}$

VÍ DỤ 2: *(Bài 14/tr 15 -SGK)*
Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế

1. $\begin{cases} x+\sqrt{5}y=0 & (1) \\ \sqrt{5}x+3y=1-\sqrt{5} & (2) \end{cases}$
2. $\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)x-3y=2+5\sqrt{3} & (1) \\ 4x+y=4-2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$

VÍ DỤ 3: *(Bài 15/tr 15 -SGK)*
Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=1 \\ \left(a^2+1\right)x+6y=2a \end{cases}$
trong các trườn hợp sau

1. $a=-1$
2. $a=0$
3. $a=1$

VÍ DỤ 4: *(Bài 17/tr 16 -SGK)*
Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế

1. $\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1\\ x+\sqrt{3}y=\sqrt{2}\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x-2\sqrt{2}y=\sqrt{5}\\ \sqrt{2}x+y=1-\sqrt{10}\end{cases}$ 3. $\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=\sqrt{2}\\ x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1\end{cases}$

VÍ DỤ 5: *(Bài 18/tr 16 -SGK)*
Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+by=-4\\ bx-ay=-5\end{cases}$

1. Xác định các hệ số a và b, biết hệ phương trình trên có nghiệm là $(1;-2)$.
2. Xác định các hệ số a và b, biết hệ phương trình trên có nghiệm là $\left(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}\right)$.

VÍ DỤ 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+3y=-2\\ m^2x-6y=4\end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với $m=2$.
2. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Nhận xét. *1. Như vậy, trong lời giải trên để tận dụng phép thế trong một bài toán có hai câu hỏi chúng ta đã thực hiện theo 3 bước:*

- ☑ *Bước 1: Bằng phép thế, chuyển đổi tính chất của hệ thành tính chất của phương trình.*
- ☑ *Bước 2: Thực hiện câu a)*
- ☑ *Bước 3: Thực hiện câu b).*

Đó chính là cách thể hiện rất phổ biến khi học lên cao.

2. Chúng ta đều đã được biết rằng, có thể thực hiện yêu cầu " Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm" bằng cách dựa trên vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, cụ thể:

- ☑ *Trường hợp 1: Với $m=0$, hệ phương trình có dạng*

$$\begin{cases}0x+3y=-2\\ 0x-6y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\quad \text{tùy ý}\\ y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

- ☑ *Trường hợp 2: Với $m\neq 0$ thì điều kiện để phương trình có vô số nghiệm là*

$$\frac{m}{m^2}=-\frac{3}{6}=-\frac{2}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{m}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-2$$

Vậy với $m=0$ và $m=2$ hệ có vô số nghiệm.

Lưu ý: *Nếu ta không xét trường hợp $m=0$ mà chỉ kiểm tra điều kiện để phương trình có vô số nghiệm $\dfrac{m}{m^2}=-\dfrac{3}{6}=-\dfrac{2}{4}$ thì không được rút gọn mẫu số. Khi đó, ta phải biến đổi như sau*

$$\frac{m}{m^2}=-\frac{3}{6}=-\frac{2}{4}\Leftrightarrow\frac{m}{m^2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2m=-m^2\Leftrightarrow m(2-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=2\end{array}\right.$$

VÍ DỤ 7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ mx + 2y = m & \end{cases}$ (2)

1. Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm.
2. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

VÍ DỤ 8: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ mx - y = -m & (2) \end{cases}$

1. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.
2. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là một điểm thuộc góc phần tư thứ nhất.

Nhận xét. *1. Trong chủ đề 9, chúng ta đã thực hiện câu a) bằng phương pháp cộng và ở đó chúng ta cần xét hai trường hợp $m = 0$ và $m \neq 0$. Còn đối với phương pháp thế thì không cần phải như vậy, đó chính là một trong những ưu điểm của phương pháp thế so với phương pháp cộng.*

2. Với câu b), chúng ta đã sử dụng một trong các kết quả sau:

- $M(x, y) \in P(I) \Leftrightarrow x > 0$ *và* $y > 0$.
- $M(x, y) \in P(II) \Leftrightarrow x < 0$ *và* $y > 0$.
- $M(x, y) \in P(III) \Leftrightarrow x < 0$ *và* $y < 0$.
- $M(x, y) \in P(IV) \Leftrightarrow x > 0$ *và* $y < 0$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các hệ phương trình được giải nhờ kiến thức của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (thường được gọi là các hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn).
Trước tiên, là các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phép biến đổi tương đương.

VÍ DỤ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} & (1) \\ 4x - 3y = -2 & (2) \end{cases}$

VÍ DỤ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y - |x| = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

VÍ DỤ 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ |x - 2y| = 3 & (2) \end{cases}$

Nhận xét. *1. Như vậy, với việc sử dụng phương pháp thế chúng ta đã chuyển được hệ phương trình về một phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.*

2. Tất nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp cộng để giải bằng việc chuyển đổi hệ ban đầu thành hai hệ $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ *và* $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3. \end{cases}$

VÍ DỤ 12: *(Bài 19/tr 16 - Sgk)*
Biết rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x-a$ khi và chỉ khi $P(a)=0$. Hãy tìm các giá trị của m và n sao cho đa thức sau đồng thời chia hết cho $x+1$ và $x-3$.

$$P(x)=mx^3+(m-2)x^2-(3n-5)x-4n.$$

VÍ DỤ 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+3y=17\\3x^2-2y=6\end{cases}$

VÍ DỤ 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}=\sqrt{3x-1}\\5x-y=9\end{cases}$

Nhận xét. *Trong lời giải trên, việc biến đổi phương trình thứ nhất ta đã sử dụng phép biến đổi tương đương đã biết là*

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\f(x)=g(x)\end{cases}$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm đến các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất bằng cách đặt ẩn phụ.

VÍ DỤ 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{5}{y-2}=7\\\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}=-1\end{cases}$

VÍ DỤ 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x-1|+|y-1|=2\\4|x-1|+3|y-1|=7\end{cases}$

VÍ DỤ 17: Giải hệ phương trình $\begin{cases}3\sqrt{x-1}+2\sqrt{y}=13\\2\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=4\end{cases}$

DẠNG 2. Sử dụng hệ phương trình giải toán

VÍ DỤ 1: Cho hai hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=6\\3x+y=9\end{cases}$ (I) và $\begin{cases}2x-y=6\\y=m\end{cases}$ (II).
Xác định m sao cho hai hệ phương trình trên tương đương.

VÍ DỤ 2: Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung $2x^2+mx-1=0$ và $mx^2-x+2=0$.

Nhận xét. *Lời giải trong ví dụ trên, chính là phương pháp hiệu quả để thực hiện yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số để hai phương trình bậc hai có nghiệm chung", dạng toán này chúng ta sẽ gặp lại trong chương sau.*

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1: Sử dụng phương pháp thế giải các hệ phương trình sau và minh họa nghiệm bằng đồ thị

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ -4x - 6y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

BÀI 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ 12x + 16y - 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ (x-2)(y+3) = 3 + xy \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 1 \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{3} = 8 \end{cases}$

BÀI 3: Xác định hàm số $y = ax + b$ biết rằng đồ thị hàm số đó đi qua điểm $A(1;2)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

BÀI 4: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

a) $A(0;3)$ và $B(1;2)$ b) $A(1;6)$ và $B(2;0)$ c) $A(-3;14)$ và $B(2;-1)$

BÀI 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 11 & (1) \\ 5x - 3y = m + 1 & (2) \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với $m = 2$.
2. Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

BÀI 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3mx + 5y = 1 & (1) \\ 2x + my = -4 & (2) \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với $m = 2$.
2. Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất.

BÀI 7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = m & (1) \\ -3x + 9y = -12 & (2) \end{cases}$

1. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.
2. Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

BÀI 8: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = 5 & (1) \\ 2x + y = m & (2) \end{cases}$

1. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.
2. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.
3. Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

BÀI 9: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases}$

1. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm.

2. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I.

BÀI 10: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$ (I).

Xác định m để hệ phương trình (I) trương đương với hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x - 2y = m \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$ $(*)$

b) $\begin{cases} 2x - my = 4 \\ (m+1)x - 2y = 9 \end{cases}$ $(**)$

BÀI 11: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ |2x - 3y| = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ |x - y| = |2y - 1| \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x - y| = 12y - 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

BÀI 12: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} |x| - y + 1 = 0 \\ 2x - |y| - 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ 7x + 5y = 2 \end{cases}$

BÀI 13: Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung

$$mx^2 + x + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + mx + 1 = 0$$

D. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, chúng ta hãy bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 1}}$ Biến đổi hệ số của ẩn x trong hệ bằng nhau, bằng cách nhân phương trình thứ hai với 2.

Lần lượt thực hiện các phép biến đổi hệ về dạng:

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + 6y = 22 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 2}}$ Trừ theo vế hai phương trình để khử ẩn x và thu được một phương trình chỉ chứa y.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -15 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 3}}$ Giải phương trình chỉ chứa ẩn y, để tìm giá trị của y.

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 4}}$ Thay gia trị của y vào phương trình còn lại, để được một phương trình chỉ chứa ẩn x.

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2x + 3 = 7 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 5}}$ Giải phương trình chỉ chứa ẩn x, rồi kết luận về nghiệm của hệ.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2; 3)$.
Từ đó, để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi để các hệ số của một ẩn (giả sử x) có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

Bước 2: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình để khử ẩn x.

Bước 3: Giải phương trình tìm giá trị của y.

Bước 4: Thay giá trị y vừa tìm được vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm giá trị của x.

Bước 5: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý

1. *Để cho gọn lời giải, thông thường các bước 3 và bước 4 được kết hợp lại với nhau.*

2. *Trong một vài trường hợp, bước 1 và bước 3 không cần thực hiện, ví dụ:*

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+3y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 4-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Giải hệ phương trình

VÍ DỤ 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1 \\ \sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=4\sqrt{6}. \end{cases}$

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải trên:*

1) *Qua ví dụ trên, các em học sinh hiểu thêm rằng việc nhân hệ số để một ẩn trong hệ có hệ số bằng nhau hoặc đối nhau, trong nhiều trường hợp cần thực hiện phép nhân ở cả hai phương trình của hệ (trong ví dụ là 3 và 4 cho mỗi phương trình).*

2) *Ở câu b), ta cần nhân hai phương trình của hệ theo thứ tự với $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ mới nhận được hệ số của x trong hệ là bằng nhau.*
Trong thực tế, chúng ta sẽ gặp dạng toán cần thực hiện theo hai bước:

Bước 1: *Thiết lập hệ phương trình;*

Bước 2: *Giải hệ nhận được trong bước 1.*

VÍ DỤ 2: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x\sqrt{2}-3y=1 \\ 2x+y\sqrt{2}=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2. \end{cases}$

VÍ DỤ 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m. \end{cases}$

1. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất;
2. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < 1$ và $y < 1$;
3. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x và y không phụ thuộc vào m.

Chú ý.

1) *Trong lời giải câu a), nếu chúng ta không xét riêng trường hợp $m = 0$ và $m \neq 0$ sẽ vi phạm phép biến đổi tương đương.*

2) *Trong phạm vi kiến thức THCS, khó có thể giải thích một cách đầy đủ cho các em học sinh hiểu được tại sao lại có được nhận xét về $x^2 + y^2$. Tuy nhiên, đối với các em học sinh thực sự muốn nâng cao kiến thức thì hãy tham khảo cuốn **Phương pháp giải toán đại số** của Lê Hồng Đức do NXB Hà Nội ấn hành.*

VÍ DỤ 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = m + 1. \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với $m = 1$;
2. Chứng tỏ rằng với mọi $m \neq \pm 1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất;
3. Tìm giá trị của m để nghiệm duy nhất $(x; y)$ của hệ thỏa mãn $x + y < 0$;
4. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

VÍ DỤ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$

Nhận xét. *Hẳn các em học sinh cũng thấy, ở dạng ban đầu hệ phương trình trong ví dụ trên không phải là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Tuy nhiên, chỉ cần một vài phép biến đổi đơn giản chúng ta đã chuyển được về hệ bậc nhất hai ẩn, để từ đó sử dụng phương pháp cộng để tìm nghiệm.*

VÍ DỤ 6: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + y) = -2 \\ 3(x - 2) - 2(1 + y) = -3. \end{cases}$

VÍ DỤ 7: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{y-1} = 2 \\ \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{y-1} = 1. \end{cases}$

VÍ DỤ 8: Tìm giá trị của m để các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+4y=25 \end{cases}$ và $\begin{cases} mx-y=m \\ x-y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+8y=5 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+my=2. \end{cases}$

Nhận xét. *Như vậy, với yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số để hai hệ phương trình tương đương" trong trường hợp có nghiệm duy nhất chúng ta nhất thiết phải thực hiện bước thử lại, bởi khi hệ thứ nhất có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ còn hệ thứ hai có vô số nghiệm và nhận $(x_0; y_0)$ làm một nghiệm thì hai hệ không thể được gọi là tương đương.*

DẠNG 2. Sử dụng hệ phương trình giải toán

VÍ DỤ 1: Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(2;-2)$ và $B(-1;3)$;

b) $A(-4;-2)$ và $B(2;1)$;

c) $A(3;-1)$ và $B(-3;2)$;

d) $A\left(\sqrt{3};2\right)$ và $B(0;2)$.

Chú ý. *Chúng ta đều đã biết, mọi đường thẳng trong mặt phẳng đều có phương trình dạng $ax+by=c$, với a, b không đồng thời bằng 0 và một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết hai điểm phân biệt thuộc nó. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa cách lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.*

VÍ DỤ 2: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;-6)$ và $B(4;3)$.

VÍ DỤ 3: Xác định các hệ số a, b của phương trình $ax^2 - x + b = 0$, biết nó có hai nghiệm $x_1 = -2$ và $x_2 = 3$.

VÍ DỤ 4: Ta biết rằng một đa thức bằng 0 khi và chỉ khi tất cả các hệ số của nó bằng 0. Hãy tìm các giá trị của m và n để đa thức sau (với biến số x) bằng đa thức 0:

$$P(x) = (3m-5n+1)x + (4m-n-10).$$

VÍ DỤ 5: Cho đa thức $f(x) = ax^3 - (2-a)x^2 + (5-3b)x - 4b$.

1. Xác định các hệ số a, b của đa thức, biết nó chia hết cho $x-3$ và $x+1$.
2. Với a, b tìm được ở trên, hãy phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử.

Nhận xét. *Để thực hiện được ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng tới kết quả: "Một đa thức $f(x)$ chia hết cho $x-a$ khi và chỉ khi $f(a)=0$."*

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x+7y=9\\3x-y=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2y=20\\3x-2y=12\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+7y=1\\3x+5y=-4\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x+5y=9\\2x-4y=-5.\end{cases}$

BÀI 2: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}\\x+y=10\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{y^2+2x-8}{y}=y-3\\x+y=10.\end{cases}$

BÀI 3: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=1\\\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{9}{y-2}=100\\\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{7}{y-2}=308.\end{cases}$

BÀI 4: Cho hàm số $y=ax+b$. Xác định các hệ số a, b của hàm số, biết rằng đồ thị hàm số của nó đi qua hai điểm

a) $A(1;3)$ và $B(3;2)$; b) $A(1;-1)$ và $B(3;3)$.

BÀI 5: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

a) $A(1;3)$ và $B(3;2)$; b) $A(1;-1)$ và $B(3;3)$.

BÀI 6: Cho phương trình $ax^2-x+b=0$. Xác định các hệ số a, b của phương trình, biết nó có hai nghiệm

a) $x_1=1$ và $x_2=3$; b) $x_1=-3$ và $x_2=2$.

BÀI 7: Cho đa thức $f(x)=x^3-ax^2+bx-a$. Xác định các hệ số a, b của đa thức, biết nó chia hết cho $x-1$ và $x-3$.

BÀI 8: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+my=0\\mx+y=m+1.\end{cases}$

1. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất;
2. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x<1$ và $y<1$.

BÀI 9: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x-my=0\\mx-y=m+1.\end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với $m=-1$;
2. Chứng tỏ rằng với mọi $m\neq\pm1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x-y=1$;
3. Tìm giá trị của m để nghiệm duy nhất $(x;y)$ của hệ thỏa mãn $x^2-y^2<0$;
4. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

E. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để giải bài toán bằng cách bằng cách lập hệ phương trình, ta thực hiện các bước sau:

1. Lập hệ phương trình.
   - Chọn các ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn.
   - Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
   - Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập hệ phương trình.
2. Giải hệ phương trình.
3. Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán được đưa ra thường rơi vào một trong 5 dạng sau:

1. Bài toán chuyển động.
2. Bài toán về số và chữ số.
3. Bài toán vòi nước.
4. Bài toán về tỉ số và quan hệ giữa các số.
5. Bài toán về phần trăm - năng suất.

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Bài toán chuyển động

VÍ DỤ 1: Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

Nhận xét: *Như vậy trong lời giải của ví dụ trên, ta thấy:*

1. *Chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho hai giá trị cần tìm là độ dài quãng đường AB và thời gian dự kiến.*
2. *Việc thiết lập các phương trình (1) và (2) dựa trên phép so sánh thời gian tới đích với thời gian dự kiến. Tuy nhiên, cũng có thể lập luận theo kiểu khác, cụ thể:*
   - *Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ, tức là số thời gian chạy bằng $x+2$, do đó: $35(x+2)=y$, (vận tốc $\times$ thời gian $=$ quãng đường).*
   - *Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, tức là số thời gian chạy bằng $x-1$, do đó: $50(x-1)=y$, (vận tốc $\times$ thời gian $=$ quãng đường).*
3. *Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập nhau, với mục đích minh họa để giúp các em học sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã được chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các ví dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.*

VÍ DỤ 2: Lúc 7 giờ một người đi xe máy khởi hành từ A với vận tốc 40km/h. Sau đó, lúc 8 giờ 30 phút, một người khác cũng đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 60km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

Nhận xét: *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

1. *Cho dù bài toán chỉ yêu cầu "Tìm thời điểm hai người gặp nhau "tương ứng với một ẩn xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:*
   - *Phương trình* (1) *được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ nhất.*
   - *Phương trình* (2) *được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ hai.*
2. *Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lưa chọn hướng lập phương trình.*
   Giả sử điểm họ gặp nhau là B. Gọi quãng đường AB *là x, điều kiện* $x > 0$.
   Suy ra:
   - *Thời gian người thứ nhất đi từ A đến B là* $\dfrac{x}{40}$.
   - *Thời gian người thứ hai đi từ A đến B là* $\dfrac{x}{60}$.

   Vì người thứ nhất đi sau người thứ hai 1 giờ 30 phút nên ta có:
   $$\frac{x}{40} = \frac{x}{60} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x = 2x + 180 \Leftrightarrow x = 180.$$
   Vậy điểm gặp nhau của hai người cách A là 180km.
   Để đi được quãng đường này:
   - *Người thứ nhất phải đi mất* $\dfrac{180}{40} = 4\dfrac{1}{2}$ *(giờ).*
   - *Người thứ hai phải đi mất* $\dfrac{180}{60} = 3$ *(giờ).*

   Vậy họ gặp nhau lúc 11 giờ 30 phút.

VÍ DỤ 3: Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3.6km, khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trong trường hợp trên, nhưng người đi chậm xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

VÍ DỤ 4: Hai cano cùng khởi hành từ bến A và B cách nhau 85km, đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi cano. Biết rằng cano đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của cano đi ngược 9km/h và vận tốc nước là 3km/h.

Chú ý: *Nếu thay giả thiết "Vận tốc riêng của cano đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của cano đi ngược 9km/h "bằng "Vận tốc cano đi xuôi lớn hơn vận tốc cano đi ngược 9km/h "thì phương trình được minh họa bằng*
$$(x+3) - (y-3) = 9 \Leftrightarrow x - y = 15.$$
Khi đó, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x - y = 15 \\ x + y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 18 \end{cases}$.
Vậy vận tốc riêng của cano đi xuôi bằng 33km/h, vận tốc riêng của cano đi ngược bằng 18km/h.

VÍ DỤ 5: Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi vật.

VÍ DỤ 6: Tìm số có hai chữ số, biết rằng tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10. Ngoài ra, nếu đổi chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Nhận xét: *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy*

1. *Cho dù bài toán chỉ yêu cầu chúng ta đi tìm một số có hai chữ số (điều này có thể khiến học sinh hiểu nhầm rằng chỉ có một ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số cần tìm được xây dựng từ hai thành phần. Do đó, chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị. Và vì chúng là các chữ số đại diện nên phải thuộc tập* $0, 1, 2, \ldots, 9$ *xong ở đây không thể là chữ số 0 bởi các số* $\overline{0x}$, $\overline{0y}$ *không phải là số có hai chữ số.*
2. *Việc thiết lập phương trình (1) là đơn giản, còn đối với phương trình (2) chúng ta cần tới kiến thức về biểu diễn số, cụ thể:*

$$\overline{xy} = 10x + y$$
$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z, \ldots$$

VÍ DỤ 7: Tìm một số có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị. Nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị.

DẠNG 2. Bài toán vòi nước

VÍ DỤ 1: Một máy bơm muốn bơm nước đầy bể trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm 10m^3. Sau khi bơm được $\dfrac{1}{3}$ bể, người công nhân vận hành máy cho hoạt động với công suất $15\text{m}^3/\text{h}$. Do vậy, so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút. Tính thể tích của bể.

Nhận xét: *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

1. *Cho dù bài toán chỉ yêu cầu tính "Tính thể tích của bể", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:*
   - ☑ *Phương trình (1) được thiết lập dựa trên quy định chung.*
   - ☑ *Phương trình (2) được thiết lập dựa trên việc thực hiện bơm trong thực tế.*
2. *Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:*
   Gọi thể tích của bể là x (m^3)*, điều kiện* $x > 0$*. Suy ra*
   - ☑ *Thời gian dự định để bơm đầy bể là* $\dfrac{x}{10}$.
   - ☑ *Với* $\dfrac{1}{3}$ *bể (bằng* $\dfrac{x}{3}$*) bơm theo quy định mỗi giờ phải bơm* $10m^3$ *nên mất* $\dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{x}{30}$ *(giờ.)*
   - ☑ *Với* $\dfrac{2}{3}$ *bể còn lại (bằng* $\dfrac{2x}{3}$*), công suất của máy là* $15m^3/h$ *nên mất* $\dfrac{2x}{3} \cdot \dfrac{1}{15} = \dfrac{2x}{45}$ *(giờ).*

Vậy thời gian thực tế để bơm đầy bể là $\dfrac{x}{30} + \dfrac{2x}{45}$.

Vì so với quy định bể được bơm đầy trước 48 *phút nên ta có phương trình:*

$$\frac{x}{10} - \left(\frac{x}{30} + \frac{2x}{45}\right) = \frac{12}{15} \Leftrightarrow 2x = 72 \Leftrightarrow x = 36,\ \textit{thỏa mãn}.$$

Vậy thể tích của bể nước là $36m^3$.

VÍ DỤ 2: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đàu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu sẽ đầy bể.

VÍ DỤ 3: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\dfrac{2}{15}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể?

Nhận xét: *Như vậy, thông qua hai cách giải của ví dụ trên ta thấy:*

1. *Với cách* 1, *việc lựa chọn ẩn thông qua các giá trị cần tìm giúp cho cách đặt vấn đề khá tường mình. Tuy nhiên, chúng ta lại phải đối mặt với một hệ phức tạp (ở đó cần sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải).*
2. *Với cách* 2, *việc lựa chọn ẩn thông qua giá trị trung gian cần có được những kiến thức đánh giá đúng đắn, xong sẽ giúp chúng ta thu được* 1 *hệ đơn giản.*

Chương 2 HÀM SỐ $Y = AX^2$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

A. HÀM SỐ $Y = AX^2$, $(A \neq 0)$

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$,

1. Tập xác định của hàm số là $\mathbf{R}$.
2. Tính chất biến thiên của hàm số:
   - Nếu $a > 0$, hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$, đồng biến trong $\mathbf{R}_+$ và bằng 0 khi $x = 0$.
   - Nếu $a < 0$, hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$, nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$và bằng 0 khi $x = 0$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = 8x^2$.

b) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

1. Hãy lập bảng tính các giá trị $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ và rút ra nhận xét.
2. Tìm x biết $f(x) = 1$, $f(x) = 2 - \sqrt{3}$.

VÍ DỤ 3: Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100 m. Quãng đường vật chuyển động s (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức $S = 4t^2$.

1. Sau 1 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự sau 2 giây?
2. Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y = (2m - 4)x^2$ với $a = 2m - 4 \neq 0$. Tìm giá trị của m để

1. Hàm số nghịch biến.
2. Có giá trị $y = 9$ khi $x = 3$.
3. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.
4. Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

Chú ý: Trong lời giải câu c) và d), chúng ta đã sử dụng tính chất $x^2 \leq 0$.

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$, với $a \neq 0$.

1. Chứng minh rằng $f(kx) = k^2 f(x)$.
2. Tìm k để hệ thức trong câu a) còn đúng với hàm số $y = g(x) = ax^2 + b$, với $b \neq 0$.

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1: Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau

a) $y = 3x^2$.

b) $y = -\dfrac{9}{2}x^2$.

c) $y = \left(4 - 2\sqrt{3}\right)x^2$.

d) $y = \left(m^2 + 1\right)x^2$.

e) $y = (m-1)x^2$.

BÀI 2: Cho hàm số $y = 2x^2$

1. Hãy lập bảng tính các giá trị $f(-5), f(-3), f(0), f(3), f(5)$ và rút ra nhận xét.
2. Tìm x biết $f(x) = 8$, $f(x) = 6 - 4\sqrt{2}$.

BÀI 3: Cho hàm số $y = \left(m^2 - 3m + 2\right)x^2$. Tìm giá trị m để

1. Hàm số đồng biến với $x > 0$.
2. Có giá trị $y = 8$ khi $x = 2$.
3. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.
4. Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

BÀI 4: Lực F của gió khi thổi vuông góc với cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương của vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi vận tốc gió bằng 2 m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N.

1. Tính hằng số a.
2. Hỏi khi $v = 10$ m/s thì lực F bằng bao nhiêu? Cùng câu hỏi khi $v = 20$ m/s?
3. Biết rằng cánh buồm đó chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000 N, hỏi con thuyền có thể đi trong gió bão với vận tốc gió 90 km/h hay không?

B. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $Y = AX^2$, $A \neq 0$

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đồ thị hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$ là một đường Parabol:

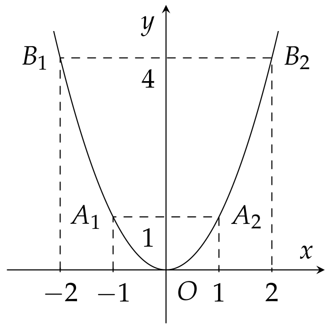
- Có đỉnh là gốc tọa độ $O(0;0)$.
- Có trục đối xứng là Oy.
- Nếu $a > 0$, đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành và nhận điểm O là điểm "thấp nhất ".
- Nếu $a < 0$, đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành và nhận điểm O là điểm "cao nhất ".

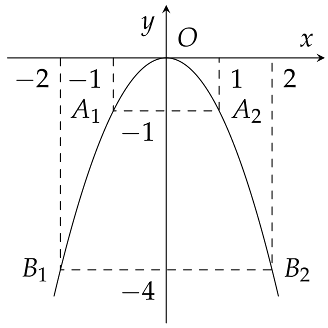
2. Cách vẽ đồ thị

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ ta đi lấy 5 điểm:

- Điểm $O(0;0)$.
- Cặp điểm A_1, A_2 có hoành độ đối xứng qua O.
- Cặp điểm B_1, B_2 có hoành độ đối xứng qua O.

Nối các điểm B_1, B_2, O, A_1, A_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số





II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^2$.

1. Vẽ đồ thị hàm số.
2. Các điểm $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{16}\right)$, $D(3;4)$ có thuộc đồ thị hàm số không?

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$

1. Vẽ đồ thị của hàm số đó.
2. Tính các giá trị $f(-8)$, $f(-1{,}3)$, $f(-0{,}75)$, $f(1{,}5)$.
3. Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị $(0{,}5)^2$, $(-1{,}5)^2$, $(2{,}5)^2$.
4. Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y = -0{,}75x^2$. Qua đồ thị của hàm số đó, hãy cho biết x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu?

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y = (m-1)x^2$

1. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;-1)$. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
2. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 5.
3. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -4.
4. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ gấp đôi hoành độ.

VÍ DỤ 5: Cho parabol $(P): y = 2x^2$

1. Trên cùng một hệ trục tọa độ vẽ (P) và các đường thẳng $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 8$.
2. (P) cắt mỗi đường thẳng trên tại mấy điểm? Xác định các tọa độ giao điểm đó.
3. Đường thẳng $x = m$ có thể không cắt (P) hoặc cắt (P) tại hai điểm phân biệt không? Vì sao?
4. Biện luận theo n vị trí tương đối của đường thẳng $y = n$ với (P).

VÍ DỤ 6: Cho hai hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$

1. Vẽ đồ thị các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
2. Tìm tọa độ giao điểm hai đồ thị đó.

VÍ DỤ 7: Cho phương trình $x^2 - x - 2 = 0$

1. Giải phương trình.
2. Vẽ hai đồ thị $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng một trục tọa độ.
3. Chứng tỏ rằng hai nghiệm tìm được trong câu a) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị đó.

VÍ DỤ 8: Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

1. Qua điểm $B(0; 4)$ kẻ đường thẳng song song với trục Ox. Nó cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ tại hai điểm M và M'. Tìm hoành độ của M và M'.
2. Tìm trên đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ điểm N có cùng hoành độ với M, điểm N' có cùng hoành độ với M'. Đường thẳng NN' có song song với Ox không? Vì sao? Tìm tung độ của N và N' bằng hai cách:
   - Ước lượng trên hình vẽ.
   - Tính toán theo công thức.

VÍ DỤ 9: Cho ba hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$

1. Vẽ đồ thị của ba hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
2. Tìm ba điểm A_1, B_1, B_1 có cùng hoành độ $x = -1{,}5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.
3. Tìm ba điểm A_2, B_2, B_2 có cùng hoành độ $x = 1{,}5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của A_1 và A_2; B_1 và B_2; C_1 và C_2.
4. Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị của x để hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.

VÍ DỤ 10: Cho các hàm số $y = f(x) = x^2$, $y = g(x) = x^2 - 6$, $y = h(x) = x^2 + 5$

1. Tìm tập xác định của ba hàm số trên.
2. Với $x = -2; 0; 1; 2; 3$ hãy tính các giá trị tương ứng của $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$.
3. Có nhận xét gì về giá trị của các hàm số $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ ứng với cùng một giá trị của biến số x, từ đó đưa ra kết luận về đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = h(x)$.
4. Với giá trị nào của x thì các hàm số nhận giá trị nhỏ nhất.

Nhận xét. *Như vậy, để vẽ được đồ thị hàm số $y = ax^2 + b$, ta thực hiện:*

- *Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$.*
- *Tịnh tiến đồ thị này theo trục Oy b đơn vị (lên trên nếu $b > 0$, xuống dưới nếu $b < 0$) ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + b$.*

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$

1. Tính $f(1), f\left(\frac{1}{3}\right)$.
2. Vẽ đồ thị hàm số.
3. Tìm tập hợp các điểm thuộc đồ thị có hoành độ bằng 4.
4. Chứng minh rằng hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

BÀI 2: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$

1. Vẽ đồ thị hàm số.
2. Các điểm $A(0;0)$, $B(3;6)$, $C\left(1;\frac{3}{2}\right)$, $D(3;1)$ có thuộc đồ thị hàm số không?

BÀI 3: Cho hàm số $y = -125x^2$

1. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số.
2. Tìm giá trị của m, n để các điểm $A(1;m)$ và $B(n;125)$ thuộc đồ thị hàm số trên.

1. Xét hàm số $y = -125x^2$ có $a = -125 < 0$, do đó:
   - Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.
   - Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
2. Do $A(1;m)$ thuộc đồ thị hàm số nên $m = -125 \cdot 1^2 = -125$.
   Do $B(n;125)$ thuộc đồ thị hàm số nên $125 = -125 \cdot n^2 = -125 \Leftrightarrow n^2 = -1$ (vô lí).
   Vậy không có giá trị n thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI 4: Cho hàm số $y = (m+1)x^2$

1. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;2)$.

2. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
3. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng -2.
4. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -8.
5. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ gấp ba lần hoành độ.

BÀI 5: Cho hàm số $y = (2m-1)x^2$

1. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;2)$.
2. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.
3. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 5.
4. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -7.

C. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Phương trình bậc hai một ẩn số là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ với } a \neq 0$$

trong đó x là ẩn số và a, b, c là các hệ số đã cho.
Trường hợp đặc biệt:

- Nếu $b = 0$, ta có $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ gọi là phương trình bậc hai khuyết b.
- Nếu $c = 0$, ta có $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0)$ gọi là phương trình bậc hai khuyết c.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Viết lại các phương trình sau dưới dạng $ax^2 + bx + c$, rồi xác định các hệ số a, b, c của chúng:

a. $5x^2 + 2x = 4 - x$.

b. $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2}$.

c. $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1$.

d. $2x^2 + m^2 = 2(m-1)x$, m là hằng số.

VÍ DỤ 2: Giải các phương trình:

a. $0,4x^2 + 1 = 0$.

b. $x^2 - 8 = 0$.

VÍ DỤ 3: Giải các phương trình:

a. $2x^2 + \sqrt{2}x = 0$. b. $-0{,}4x^2 + 1{,}2x = 0$.

VÍ DỤ 4: Giải các phương trình:

a. $x^2 + 8x = -2$. b. $x^2 + 2x = \frac{1}{3}$.

Hãy cộng vào hai vế của mỗi phương trình cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái thành một bình phương.

VÍ DỤ 5: Giải các phương trình:

a. $x^2 - 2x - 3 = 0$. b. $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Nhận xét. *Như vậy, với phương trình không khuyết: $ax^2 + bx + c = 0$ ta lựa chọn một trong hai phương pháp:*
Phương pháp 1: Biến đổi thành tích: $a(x+m)(x+n) = 0$.
Phương pháp 2: Biến đổi thành phương trình dạng: $a(x+m)^2 = n$.
Và phương pháp 2 luôn được ưu tiên, bởi phương pháp 1 chỉ có thể được thực hiện trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm (mà như chúng ta đã biết một phương trình bậc hai có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm hoặc 2 nghiệm).
Trong các cách 4 và cách 5 của câu b) đã chỉ ra cho chúng ta hai cách biến đổi phương trình về dạng $A^2 = m$, trong trường hợp hệ số a không phải là số chính phương.

VÍ DỤ 6: Cho phương trình: $2x^2 - mx - m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2 và giải phương trình đó.
Nhận xét. *Trong lời giải trên, sở dĩ biến đổi được ngay:*

$$2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1)$$

do chúng ta tận dụng kết quả trước đó là "Phương trình có nghiệm $x = 2$", suy ra đa thức $2x^2 - 3x - 2$ chia hết cho $x - 2$.

VÍ DỤ 7: Cho phương trình: $x^2 - (m+1)x + m = 0$.

a. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình.

b. Giải phương trình với $m = -1$.

c. Giải phương trình với $m = 0$.

d. Giải phương trình với $m = 3$.

Nhận xét. *1. Việc nêu ra ví dụ trên giúp các em học sinh ôn tập được lại các kiến thức cơ bản trong chủ đề này, bao gồm:*

- *Xác định các hệ số của phương trình bậc hai trong câu a).*
- *Giải phương trình bậc hai khuyết b trong câu b).*
- *Giải phương trình bậc hai khuyết c trong câu c).*
- *Giải phương trình bậc hai đầy đủ trong câu d) bằng việc biến đổi về dạng bình phương.*

2. *Qua lời giải của các câu b), c), d) chúng ta thấy ngay rằng trong ba trường hợp này phương trình đều có nghiệm $x = 1$, nhận định này sẽ giúp chúng ta có thể trình bày lời giải gọn hơn, cụ thể:*

$$x^2-(m+1)x+m=0 \Leftrightarrow x^2-x-mx+m=0 \Leftrightarrow x(x-1)-m(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right. .$$

Khi đó:

- *Với $m=-1$, phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=-1$.*
- *Với $m=0$, phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=0$.*
- *Với $m=3$, phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=3$.*

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Viết lại các phương trình sau dưới dạng $ax^2+bx+c=0$, rồi xác định các hệ số a, b, c của chúng:

a. $x^2-3x-2=x+2$.

b. $4x^2-8x=3x^2-5$.

c. $\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+3-x=0$.

d. $mx^2+2mx-3m=x^2-mx$.

BÀI 2: Cho phương trình: $x^2-(4m+1)x+4m=0$.

a. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình.

b. Giải phương trình với $m=-\dfrac{1}{4}$, $m=0$, $m=1$.

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1+x_2=9$.

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1=x_2^2$.

BÀI 3: Giải các phương trình sau:

a. $4x^2-1=0$.

b. $(m^2+2)x^2+1=0$.

c. $\sqrt{3}x^2+6x=0$.

d. $m^2x^2-2x=x-x^2$.

BÀI 4: Giải các phương trình sau bằng 5 cách:

a. $x^2+2x-3=0$.

b. $4x^2+3x-7=0$.

c. $-3x^2+2x+1=0$.

d. $x^2+5x+4=0$.

e. $2x^2+5x+3=0$.

f. $-7x^2+5x+12=0$.

BÀI 5: Giải các phương trình sau:

a. $x^2-2x-4=0$.

b. $2x^2+4x+1=0$.

c. $x^2+x-3=0$.

d. $3x^2-5x+1=0$.

BÀI 6: Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + 4 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm là $\dfrac{4}{3}$ và giải phương trình đó.

BÀI 7: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

a. Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{c}{a}$.

b. Chứng minh rằng nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = -\dfrac{c}{a}$.

BÀI 8: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Bằng việc biến đổi phương trình về dạng $A^2 = m$ hãy chứng minh rằng:

a. Nếu $b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Nếu $b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{b}{2a}$.

c. Nếu $b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

D. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Công thức nghiệm

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$. Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Công thức nghiệm thu gọn

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$ và $b = 2b'$. Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{a}$.
- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ và } x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Giải phương trình bậc hai

Ta có thể sử dụng một trong bốn phương pháp sau:

- *Phương pháp 1. Biến đổi thành phương trình dạng:* $a(x+m)^2 = n\ (a \neq 0)$.
- *Phương pháp 2. Biến đổi thành phương trình tích:* $a(x+m)(x+n) = 0$.
- *Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai.*
  Ta xét các trường hợp:
  + Nếu $\Delta > 0$*, phương trình có hai nghiệm phân biệt:*
  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
  + Nếu $\Delta = 0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
  + Nếu $\Delta < 0$ *thì phương trình vô nghiệm.*
  Lưu ý: *Nếu* $b = 2b'$ *ta sử dụng tới* $\Delta' = b'^2 - ac$.
  + Nếu $\Delta' > 0$ *thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:*
  $$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} \text{ và } x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}.$$
  + Nếu $\Delta' = 0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.
  + Nếu $\Delta' < 0$ *thì phương trình vô nghiệm.*
- *Phương pháp 4. Trong các trường hợp đặc biệt:*
  Nếu $a+b+c = 0$*, phương trình có nghiệm:* $x = 1$ *và* $x = \dfrac{c}{a}$.
  Nếu $a-b+c = 0$*, phương trình có nghiệm:* $x = -1$ *và* $x = -\dfrac{c}{a}$.

VÍ DỤ 1: Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c, tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

1. $7x^2 - 2x + 3 = 0$.
2. $5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0$.
3. $\dfrac{1}{2}x^2 + 7x + \dfrac{2}{3} = 0$.
4. $1{,}7x^2 - 1{,}2x - 2{,}1 = 0$.

VÍ DỤ 2: Giải phương trình: $-6x^2 + 7x - 2 = 0$.

VÍ DỤ 3: Giải phương trình: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

VÍ DỤ 4: Giải các phương trình:

1. $\dfrac{4}{3}x^2 - 5x + 3 = 0$.

2. $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{2} = 0$.

VÍ DỤ 5: Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}x^2 + (\sqrt{2}-1)x - 2 = 0$.

VÍ DỤ 6: Xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:

1. $x^2 - mx - 1 = 0$.
2. $x^2 + (m+4)x + 4m = 0$.
3. $4x^2 + 12mx + 9m^2$.
4. $x^2 + 2x + m^2 + 2 = 0$.

VÍ DỤ 7: Giải và biện luận phương trình: $x^2 - 2mx + 3m^2 = 0$.

DẠNG 2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Với phương trình $ax^2 + +bx + c = 0$, với $a \neq 0$. Tìm điều kiện của tham số, sao cho:

- *Dạng 1: Phương trình vô nghiệm, điều kiện là: $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$).*
- *Dạng 2: Phương trình có nghiệm, điều kiện là: $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$).*
- *Dạng 3: Phương trình có nghiệm kép, điều kiện là: $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$).*
- *Dạng 4: Phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là: $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).*

Chú ý: Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số, chúng ta cần xét hai trường hợp (với $a = 0$ và với $a \neq 0$) và khi đó:
1. Điều kiện để phương trình có hai nghiệm bao gồm:

- *Điều kiện để phương trình là một phương trình bậc hai, tương ứng với $a \neq 0$.*
- *Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt, tương ứng với $\Delta > 0$.*

Tóm lại ta có hệ điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
2. Điều kiện để phương trình có nghiệm kép bao gồm:

- *Điều kiện để phương trình là một phương trình bậc hai, tương ứng với $a \neq 0$.*
- *Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt, tương ứng với $\Delta = 0$.*

Tóm lại ta có hệ điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

VÍ DỤ 1: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1) - m^2 - m - 1 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 1$.

2. Tìm m để phương trình có nghiệm.

VÍ DỤ 2: Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 1$.
2. Chứng mình rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

VÍ DỤ 3: Cho phương trình: $x^2 + 2mx + 4m - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm kép và chỉ ra nghiệm kép đó.

VÍ DỤ 4: Cho ba số dương a, b, c và phương trình:

$$x^2 - 2x - \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b} + \frac{5}{2} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b, c để phương trình có nghiệm kép.

VÍ DỤ 5: Cho phương trình: $(m^2 - 1)x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 2$.
2. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
3. Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm.

VÍ DỤ 6: Cho hai phương trình:

$$\begin{aligned} x^2 - mx - 2 &= 0 \quad (1) \\ x^2 - x + 6m &= 0 \quad (2). \end{aligned}$$

Tìm giá trị của m để phương trình (1) và phương trình (2) có ít nhất một nghiệm chung biết m là một số nguyên.

VÍ DỤ 7: Chứng minh rằng:

1. Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $-ax^2 - bx - c = 0$.
2. Hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và phương trình $ax^2 - bx + c = 0$ cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.

VÍ DỤ 8: Cho hai phương trình:

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= 0, \\ x^2 + cx + d &= 0. \end{aligned}$$

Biết rằng $ac \geq 2(b+d)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

VÍ DỤ 9: Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

$$x^2 + mx + 1 = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + 4x + m = 0 \quad (2).$$

VÍ DỤ 10: Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau vô nghiệm.

$$x^2 + 2x - 6m = 0 \qquad (1)$$
$$x^2 + 4x + m^2 + 15 = 0 \quad (2).$$

DẠNG 3. Nghiệm nguyên và nghiệm hữu tỉ của phương trình bậc hai

Với a, b, c là các số nguyên, xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) với yêu cầu tìm điều kiện để phương trình (1) có nghiệm nguyên hay nghiệm hữu tỉ, ta sử dụng hai kết quả sau:

- *Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ là biệt số Δ là một số chính phương.*
- *Nếu $x_0 = \dfrac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ là nghiệm hữu tỉ của phương trình (1) thì q là ước của a và p là ước của c.*

VÍ DỤ 1: Tìm các số nguyên a để phương trình $x^2 - (3 + 2a)x + 40 - a = 0$ có nghiệm nguyên.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 - 6x + 7 = 0$.

b) $9x^2 - 6x + 26 = 0$.

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$.

d) $x^2 + 8x - 10 = 0$.

BÀI 2: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$.

b) $\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 = 0$.

c) $5x^2 - x + \dfrac{5}{49} = 0$.

d) $\dfrac{2}{5}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{15} = 0$.

BÀI 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$.

b) $x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}x + \sqrt{6} = 0$.

c) $\sqrt{2}x^2 - 5x + 3\sqrt{2} = 0$.

d) $\sqrt{6}x^2 + 2(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + 24 = 0$.

BÀI 4: Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $x^2 + 4x - 3m = 0$.

b) $x^2 - 4x + 4 - m^2 = 0$.

c) $x^2 + 2mx - 4 = 0$.

d) $x^2 - (m - 2)x + m^2 = 0$.

BÀI 5: Cho phương trình $x^2 - 3mx - 6m^2 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 1$.
2. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

BÀI 6: Cho phương trình $5x^2 + 2mx - 3m = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 1$.
2. Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

BÀI 7: Cho phương trình $x^2 + 3x - (m^2 - 2m + 1) = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 1$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

BÀI 8: Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 1 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 3$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

BÀI 9: Cho phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$.

1. Tìm m để phương trình có nghiệm.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

BÀI 10: Cho phương trình $mx^2 + (m+1)x - 2m = 0$.

1. Giải phương trình với $m = -\dfrac{1}{2}$.
2. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm.

BÀI 11: Tìm giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm kép:

1. $mx^2 - 2x + 6m = 0$.
2. $m^2x^2 + 10x + 1 = 0$.

BÀI 12: Tìm giá trụ của m để các phương trình sau vô nghiệm:

1. $mx^2 + 2(m-3)x + m = 0$.
2. $(m-2)x^2 - 2(m-2)x - m = 0$.

BÀI 13: Cho phương trình $mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 2$.
2. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

BÀI 14: Cho phương trình $mx^2 - (3m+1)x + 3 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = 2$.
2. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

BÀI 15: Cho phương trình $mx^2 + 2(m-1)x - 2 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$.
2. Tìm m để phương trình có một nghiệm.

BÀI 16: Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm

$$mx^2 - (3m+1)x + 2m + 2 = 0.$$

BÀI 17: Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm

$$m(m-1)x^2 - (2m-1)x + 1 = 0.$$

BÀI 18: Cho hai số dương a, b và phương trình $x^2 - 2x - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 3 = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b để phương trình có nghiệm kép.

BÀI 19: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm:

$$x^2 - 2x - ab(a+b-2c) - bc(b+c-2a) - ca(c+a-2b) + 1 = 0.$$

Khi đó, tìm điều kiện của a, b, c để phương trình có nghiệm kép.

BÀI 20: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình sau vô nghiệm

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0.$$

BÀI 21: Cho hai phương trình: $x^2 - mx + 2 = 0$ và $x^2 - 4x + m = 0$. Tìm m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

BÀI 22: Cho hai phương trình: $x^2 + x + a = 0$ và $x^2 + ax + 1 = 0$.

1. Với giá trị nào của a thì hai phương trình có nghiệm chung?
2. Với giá trị nào của a thì hai phương trình tương đương?

E. CHỦ ĐỀ 5: HỆ THỨC VI-ÉT VÀ CÁC ỨNG DỤNG

I. A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai

Để thực hiện việc nhẩm nghiệm (nếu có thể) cho phương trình:

$$x^2 + bx + c = 0$$

ta thực hiện theo các bước:

***Bước 1**. Thiết lập hệ thức Vi-ét cho các nghiệm x_1 và x_2:* $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 . x_2 = c. \end{cases}$

***Bước 2**. Thực hiện phép phân tích c thành tích của hai thừa số, $c = m . n$.*
Với mỗi cặp thừa số phân tích được, ta tính ngay $m + n$, khi đó:

- *Nếu $m + n = -b$, chuyển sang bước 3.*
- *Nếu $m + n \neq -b$, thực hiện lại bước 2.*

***Bước 3**. Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = m$ và $x_2 = n$.*

Chú ý

1. *Thuật toán trên có tính dừng và hiểu như sau:*
   - *Nếu tìm được một cặp (m, n) thỏa mãn điều kiện $m + n = -b$ thì dừng lại phép thử và đưa ra lời kết luận.*
   - *Nếu các cặp (m, n) đều không thỏa mãn thì dừng và trong trường hợp này được hiểu là không nhẩm được nghiệm.*
2. *Chúng ta đã biết hai trường hợp đặc biệt của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là*
   - *Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a}$.*
   - *Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.*

VÍ DỤ 1: *Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:*

a. $35x^2 - 37x + 2 = 0$.

b. $7x^2 + 500x - 507 = 0$.

c. $x^2 - 49x - 50 = 0$.

d. $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$.

a. Ta có $35 - 37 + 2 = 0$.
Theo hệ thức Vi-ét, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{2}{35}$.

b. Ta có $7 + 500 - 507 = 0$.
Theo hệ thức Vi-ét, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{507}{7}$.

c. Ta có $1 - (-49) - 50 = 0$.
Theo hệ thức Vi-ét, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = -\dfrac{-50}{1} = 50$.

d. Ta có $4321 - 21 + (-4300) = 0$.
Theo hệ thức Vi-ét, phương trình có nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{-4300}{4321} = \dfrac{4300}{4321}$.

VÍ DỤ 2: Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau

a. $1{,}5x^2 - 1{,}6x + 0{,}1 = 0$.

b. $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$.

c. $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$.

d. $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0$, với $m \neq 1$.

a. Ta có $1{,}5 + (-1{,}6) + 0{,}1 = 0$.
Do đó, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{0{,}1}{1{,}5} = \dfrac{1}{15}$.

b. Ta có $\sqrt{3} - [-(1 - \sqrt{3})] + (-1) = 0$.
Do đó, phương trình có nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c. Ta có $(2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} + [-(2 + \sqrt{3})] = 0$.
Do đó, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = -\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = -7 - 4\sqrt{3}$.

d. Ta có $(m - 1) - (2m + 3) + m + 4 = 0$.
Theo hệ thức Vi-ét, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{m + 4}{m - 1}$.

VÍ DỤ 3: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ta thấy $\Delta = 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0$.
Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 6 = 2.3 \end{cases}$, mà $2 + 3 = 5$.
Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$.

VÍ DỤ 4: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau

a. $-x^2 - 13x + 48 = 0$.

b. $\dfrac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$.

a. Viết lại phương trình dưới dạng $x^2 + 13x - 48 = 0$.
Khi đó, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -13 \\ x_1.x_2 = -48 = 3.(-16) \end{cases}$, mà $3 + (-16) = -13$.
Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 3$ và $x_2 = -16$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng $x^2 - 8x + 12 = 0$.
Khi đó, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1.x_2 = 12 = 2.6 \end{cases}$, mà $2 + 6 = 8$.
Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = 6$.

Nhận xét. *Ví dụ trên được nêu ra với mục đích khuyên các em học sinh hãy thực hiện việc chuyển đổi phương trình ban đầu về dạng đơn giản nhất trước khi thực hiện công việc nhẩm nghiệm để tránh những sai sót không đáng có.*

DẠNG 2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số u và v thỏa mãn $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases}$

thì u, v là hai nghiệm của phương trình $t^2-St+P=0 \qquad (1)$.

Nhận xét. *Nếu (1) có hai nghiệm t_1, t_2 (điều kiện $S^2-4P \geqslant 0$) thì ta được*

$$\begin{cases} u=t_1 \\ v=t_2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u=t_2 \\ v=t_1. \end{cases}$$

VÍ DỤ 1: Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau

a. $u+v=32$, $uv=231$.

b. $u+v=-8$, $uv=-105$.

c. $u+v=2$, $uv=9$.

a. Ta có $u+v=32$, $uv=231$.
Do đó u và v là hai nghiệm của phương trình

$$x^2-32x+231=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=16+\sqrt{25}=21 \\ x=16-\sqrt{25}=11 \end{array}\right..$$

Vậy, ta có hai cặp nghiệm $u=21$ và $v=11$ hoặc $u=11$ và $v=21$.

b. Ta có $u+v=-8$, $uv=-105$.
Do đó, u và v là hai nghiệm của phương trình

$$x^2+8x-105=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15 \\ x=7 \end{array}\right..$$

Vậy, ta có hai cặp nghiệm $u=-15$ và $v=7$ hoặc $u=7$ và $v=-15$.

c. Ta có $u+v=2$, $uv=9$.
Do đó, u và v là hai nghiệm của phương trình $x^2-2x+9=0$ (vô nghiệm)
Vậy, không tồn tại cặp u, v nào thỏa điều kiện trên.

VÍ DỤ 2: Tìm các cạnh của hình chữ nhật, biết chu vi bằng 30 m và diện tích bằng 54 m^2.

Gọi độ dài hai cạnh của hình chữ nhật là u và v, điều kiện $u, v>0$.
Với giả thiết:

- Hình chữ nhật có chu vi bằng 30 m, ta được:

$$2(u+v)=30 \Leftrightarrow u+v=15 \qquad (1)$$

- Hình chữ nhật có diện tích bằng $54\,\text{m}^2$, ta được:

$$uv = 54 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra u và v là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 15x + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x_2 = 9. \end{array}\right.$$

Vậy, hình chữ nhật có hai cạnh là $6\,\text{m}$ và $9\,\text{m}$.

Nhận xét. a. *Trong lời giải trên, với hai nghiệm $x_1 = 6$ và $x_2 = 9$ chúng ta có thể gán u cho x_1 còn v cho x_2 hoặc ngược lại chỉ có điều cả hai cách gán này đều cho đáp số về một hình chữ nhật. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp với mỗi phép gán như vậy chúng ta sẽ nhận được một nghiệm (ví dụ (u, v) là tọa độ của một điểm) của hệ phương trình.*

b. *Như vậy, điểm cốt yếu của ứng dụng này là chuyển việc "Giải một hệ phương trình" thành việc "Giải một phương trình".*

VÍ DỤ 3: Giải hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}.$

b. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}.$

a. Từ hệ phương trình, suy ra x, y là nghiệm của hệ phương trình:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(-1; 3)$ và $(3; -1)$.

b. Từ hệ phương trình, suy ra x, y là nghiệm của hệ phương trình:

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 - \sqrt{3} \\ t = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ và $(2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$.

Nhận xét. *Như vậy, trong ví dụ trên:*

a. *Ở câu a), chỉ mang tính minh họa cho phương pháp chuyển đổi từ hệ phương trình thành phương trình. Bởi vì, chúng ta thấy ngay phép chuyển đổi này không hiệu quả khi mà có thể nhẩm được nghiệm ngay từ hệ đó, cụ thể:*

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \textit{hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$$

b. *Ở câu b), vì hệ không thể nhẩm được nghiệm nên việc chuyển hệ là hoàn toàn phù hợp.*

VÍ DỤ 4: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ xy=-4 \end{cases}$.

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về dạng:

$$(x+y)^2-2xy=12 \Leftrightarrow (x+y)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=-2 \end{array}\right..$$

- Với $x+y=2$, ta nhận được hệ $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-4 \end{cases}$. Suy ra x,y là nghiệm của phương trình: $t^2-2t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1-\sqrt{5} \\ t=1+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ y=1+\sqrt{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1+\sqrt{5} \\ y=1-\sqrt{5} \end{cases}$.
- Với $x+y=-2$, ta nhận được hệ $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-4 \end{cases}$. Suy ra x,y là nghiệm của phương trình:

$$t^2+2t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{5} \\ t=-1+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{5} \\ y=-1-\sqrt{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-1-\sqrt{5} \\ y=-1+\sqrt{5} \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm $(1-\sqrt{5};1+\sqrt{5})$, $(1+\sqrt{5};1-\sqrt{5})$, $(-1-\sqrt{5};-1+\sqrt{5})$ và $(-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5})$.

Nhận xét. *Như vậy, trong ví dụ trên, chúng ta cần sử dụng phép biến đổi hằng đẳng thức sau đó dùng phép thế để nhận được hệ phương trình cơ bản.*
Ngoài ra, trong nhiều trường hợp chúng ta còn cần sử dụng tới ẩn phụ. Ví dụ sau sẽ minh họa điều này.

VÍ DỤ 5: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \\ xy=27 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{x} \\ v=\sqrt[3]{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=x \\ v^3=y \end{cases}$. Khi đó, hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^3.v^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ (uv)^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3. \end{cases}$$

Suy ra u,v là nghiệm của phương trình

$$t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{x}=1 \\ \sqrt[3]{y}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x}=3 \\ \sqrt[3]{y}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=27 \end{cases} \\ \begin{cases} x=27 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1;27)$, $(27;1)$.

Nhận xét. *a. Trong ví dụ trên bằng việc sử dụng hai ẩn phụ chúng ta đã chuyển được một hệ vô tỉ về dạng chuẩn để có thể chuyển nó về một phương trình bậc hai.*
Tuy nhiên, cho dù lời giải này là tường minh nhưng chúng ta có thể thực hiện gọn hơn mà không cần sử dụng tới ẩn phụ, cụ thể Xét phương trình thứ nhất của hệ:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3=4^3 \Leftrightarrow x+y+3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=64 \Leftrightarrow x+y=28.$$

Vậy hệ có dạng $\begin{cases} x+y=28 \\ xy=27 \end{cases}$. *Suy ra x,y là nghiệm của phương trình*

$$t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3. \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1;27)$, $(27;1)$.

b. *Như vậy, bằng việc sử dụng hệ thức Vi-ét chúng ta đã biết cách chuyển một hệ phương trình thành một phương trình bậc hai để giải. Tuy nhiên, đó vẫn chỉ là phép biến đổi một bước, chúng ta hãy thử quan tâm tới sơ đồ biến đổi sau:*

Phương trình $\Leftrightarrow$ *Hệ phương trình* $\Leftrightarrow$ *Phương trình.*

VÍ DỤ 6: Giải phương trình sau $\sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}=4$.

Điều kiện $x \geqslant 0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} \\ v=\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow\ 0<u\leqslant v$ và $uv=\sqrt{x+9-x}=3$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ $\begin{cases} u+v=4 \\ uv=3. \end{cases}$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases}.$$

Suy ra,

$$\begin{cases} \sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} \\ \sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+9}-\sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x+9}+\sqrt{x}=9 \end{cases} \Rightarrow -2\sqrt{x}=-8 \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=16$.

⚠ *Cuối cùng, trong ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ trình bày một ví dụ về hệ có chứa tham số.*

VÍ DỤ 7: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x+y=6 \end{cases}$ (m là tham số).

a. Giải hệ phương trình với $m=26$.

b. Xác định m để hệ vô nghiệm.

c. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất, xác định nghiệm đó.

d. Xác định m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Biến đổi hệ phương trình về dạng $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=m \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=\dfrac{36-m}{2}, \end{cases}$

khi đó x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2-6t+\frac{36-m}{2}=0. \tag{1}$$

a. Với $m=26$, phương trình có dạng

$$2t^2-12t+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy, với $m=26$ hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(1;5)$ và $(5;1)$.

b. Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm
$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18.$

c. Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất
$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m = 18.$

Khi đó, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 3$.

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} > 0 \Leftrightarrow m - 18 > 0 \Leftrightarrow m > 18.$
Vậy, với $m > 18$ thì hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

DẠNG 3. Tìm giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2. Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P, ví dụ:

a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P.$

b. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP.$

c. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P}.$

d. $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{S^2 - 2P}{P^2}.$

VÍ DỤ 1: Cho phương trình $\sqrt{3}x^2 - 15x + 3 = 0$.

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

a. Nhận xét rằng $\Delta = 15^2 - 4.\sqrt{3}.3 = 225 - 12\sqrt{3} > 0$. Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \\ x_1x_2 = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}$.

Ta có $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5.$

Nhận xét. *Như vậy, với yêu cầu trong câu b) của ví dụ trên nếu chúng ta đi tính cụ thể các x_1 và x_2 rồi thay vào biểu thức A thì sẽ phải thực hiện việc đơn giản biểu thức chứa căn rất phức tạp. Trong khi, sử dụng hệ thức Vi-ét chúng ta đã có được một lời giải rất gọn.*

VÍ DỤ 2: Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-x_1$ và $-x_2$.

b. x_1^2 và x_2^2.

c. $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 suy ra: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

a. Ta có $\begin{cases} (-x_1)+(-x_2)=-S \\ (-x_1).(-x_2)=P \end{cases}$.
Suy ra $-x_1$ và $-x_2$ là nghiệm của phương trình $t^2+St+P=0$.

b. Ta có $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=S^2-2P \\ x_1^2.x_2^2=P^2 \end{cases}$.
Suy ra x_1^2 và x_2^2 là nghiệm của phương trình $t^2-(S^2-2P)t+P^2=0$.

c. Ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{S}{P} \\ \dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{P} \end{cases}$.
Suy ra $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình $t^2-\dfrac{S}{P}t+\dfrac{1}{P}=0$.

DẠNG 4. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số

Ta thực hiện theo các bước sau

- ☑ *Bước 1. Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là*

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'\geqslant 0 \end{cases}.$$

- ☑ *Bước 2. Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta được*

$$\begin{cases} x_1+x_2=f(m) \\ x_1.x_2=g(m) \end{cases}. \qquad (1)$$

- ☑ *Bước 3. Khử m từ hệ (1) ta được hệ thức cần tìm.*

VÍ DỤ 1: Cho phương trình $x^2-2mx+2m-2=0$.

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

a. Nhận xét rằng $\Delta' = m^2 - 2m + 2 = (m-1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.
Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 . x_2 = 2m - 2. \end{cases}$
Từ hệ trên, bằng cách thay $2m$ ở phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta được

$$x_1 . x_2 = x_1 + x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1 . x_2 = 2.$$

Đây chính là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

Nhận xét. *Như vậy, với yêu cầu trong câu b) của ví dụ trên nếu chúng ta đi tính cụ thể các x_1 và x_2 rồi thực hiện các phép thử để tìm ra được một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m thì sẽ phải thực hiện khá nhiều lần và quan trọng hơn cả là không có được định hướng chính xác. Trong khi, sử dụng hệ thức Vi-ét chúng ta đã có được một lời giải rất gọn.*

VÍ DỤ 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx - m^2 = 0$.
Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Nhận xét rằng $\Delta' = m^2 + m^2 = 2m^2 \geqslant 0, \forall m \in \mathbb{R}$.
Do đó, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2.
Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 . x_2 = -m^2. \end{cases}$
Từ hệ trên, bằng cách rút m từ phương trình thứ nhất rồi thay vào phương trình thứ hai ta được

$$x_1 . x_2 = -\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1 . x_2 = 0.$$

Đây chính là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.
Nhận xét. *Trong dạng toán trên việc tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là bắt buộc phải có. Và để tránh cho các em học sinh mắc phải thiếu sót này, thường thì bài toán đưa ra câu hỏi tìm điều kiện trước.*

VÍ DỤ 3: Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0$.

a. Xác định m để phương trình có hai nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào m.

a. Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ (m-4)^2 - (m-1)(m-5) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -2m + 11 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leqslant \dfrac{11}{2} \end{cases}.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{m-5}{m-1}. \end{cases}$
Khử m từ hệ trên ta được $2(x_1 + x_2) - 3x_1 . x_2 = 1$, là hệ thức cần tìm.

⚠ *Trong nhiều trường hợp, việc khử tham số từ hệ thức Vi-ét cần sử dụng các hằng đẳng thức, đặc biệt là các hằng đẳng thức lượng giác, cụ thể:*

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

b. $\tan\alpha . \cot\alpha = 1.$

VÍ DỤ 4: Cho phương trình $x^2 - 2x\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \quad (1).$

a. Chứng minh rằng với mọi α phương trình (1) luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm $x_1,\ x_2$ không phụ thuộc vào α.

a. Ta có $\Delta' = \sin^2\alpha + (1-\cos\alpha) \geqslant 0, \forall\alpha.$
Vậy, với mọi α phương trình luôn có hai nghiệm $x_1,\ x_2$.

b. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sin\alpha \\ x_1 . x_2 = \cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ \cos\alpha = x_1 . x_2 + 1. \end{cases}$
mà $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên suy ra

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + (x_1x_2+1)^2 = 1.$$

là biểu thức liên hệ giữa $x_1,\ x_2$ mà không phụ thuộc vào α.

VÍ DỤ 5: *Cho phương trình:* $x^2 - 2x\tan\alpha - 1 - cot^2\alpha = 0.$
Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc α.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}.$
Trước hết ta cần đi tìm α để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 + \cot^2\alpha \geq 0, \text{luôn đúng}.$$

Suy ra, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\tan\alpha \\ x_1 . x_2 = -1 - \cot^2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ \cot^2\alpha = -1 - x_1 . x_2 \end{cases}$
$\Rightarrow \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2 . (-1 - x_1 . x_2) = 1$
đó chính là hệ thức cần tìm.

VÍ DỤ 6: *Cho phương trình:* $\left(1+m^2\right)x^2 - 2mx + 1 - m^2 = 0.$

a. Chứng minh rằng với mọi $m > 1$ *phương trình luôn có nghiệm.*

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào m.

a. Ta có: $\Delta' = m^2 - (1+m^2)(1-m^2) = m^4 + m^2 - 1 > 0,\ \forall m > 1$.
Suy ra, với $\forall m > 1$ phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{1+m^2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{cases} \quad (1)$$

b. Khử m từ hệ (1) bằng nhận xét:
$$(x_1+x_2)^2 + (x_1.x_2)^2 = \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 + (x_1.x_2)^2 = 1$$
đó chính là hệ thức cần tìm.

DẠNG 5. Xét dấu các nghiệm

Dùng hệ thức Viét ta có thể xét dấu các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ dựa trên kết quả:

1. *Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_1 \Leftrightarrow P = \dfrac{c}{a} < 0$.*
2. *Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$.*
3. *Phương trình có hai nghiệm dương $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.*
4. *Phương trình có hai nghiệm âm $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.*

VÍ DỤ 1: *Cho phương trình: $x^2 - 2x + m^2 + 5 = 0$.*
Chứng tỏ rằng nếu phương trình có hai nghiệm thì hai nghiệm đó đều dương.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, khi đó:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1.x_2 = m^2 + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1, x_2 > 0,\ \text{đpcm}$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã đánh giá được phương trình có hai nghiệm dương, dựa trên:
$x_1.x_2 > 0 \Rightarrow x_1, x_2$ cùng dấu.
$x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow x_1, x_2$ cùng dấu.

VÍ DỤ 2: *Cho phương trình: $x^2 - 2x + m = 0$.*
Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tùy theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình .

Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện :
$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.
khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.
Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \leq 1$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $m = 0$, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = 2$.
- Nếu $m < 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

VÍ DỤ 3: *Cho phương trình:* $x^2 - 2(m+1)x - m + 1 = 0$.
Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm trái dấu.

b. Có hai nghiệm dương phân biệt.

a. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$
$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$.
Vậy với $m > 1$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $0 < x_1 < x_2$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 > \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m > 0 \\ 1 - m > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$
Vậy với $0 < m < 1$ phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

VÍ DỤ 4: *Cho phương trình:* $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 1 = 0. \qquad (1)$
Xác định m để phương trình:

a. Có một nghiệm.

b. Có hai nghiệm cùng dấu.

a. Xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ phương trình có dạng:
$6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, là ngh duy nhất của phương trình .
Trường hợp 2: Với $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
Khi đó để phương trình có một nghiệm, điều kiện :

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - (m-1)(m-1) = 0 \Leftrightarrow 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{1}{2}$ phương trình có một nghiệm.

b. Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu, điều kiện :
$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m + 3 \geq 0 \\ \dfrac{m-1}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \geq m \neq 1$. Vậy với $-\dfrac{1}{2} \geq m \neq 1$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

VÍ DỤ 5: *Cho phương trình:* $mx^2 - 2(3-m)x + m - 4 = 0. \qquad (1)$
Xác định m để phương trình:

a. *Có hai nghiệm đối nhau.*

b. *Có đúng một nghiệm âm.*

a. Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} P < 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-4}{m} < 0 \\ \dfrac{3-m}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$
Vậy với $m = 3$ phương trình có hai nghiệm đối nhau.

b. Xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: Với $m = 0$.
Phương trình có dạng: $-6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$, thỏa mãn.
Trường hợp 1: Với $m \neq 0$.
Khi đó, phương trình có đúng một nghiệm âm khi và chỉ khi:
$$\left[\begin{array}{l} x_1 < 0 \leq x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < 0 = x_2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0) = 0 \\ S < 0 \end{cases} \\ P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m - 4 = 0 \\ \dfrac{2(3-m)}{m} < 0 \end{cases} \\ \dfrac{m-4}{m} < 0 \\ \begin{cases} -2m + 9 = 0 \\ \dfrac{3-m}{m} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ 0 < m < 4 \\ m = \dfrac{9}{2} \end{array}\right. .$$
Vậy với $m \in (0; 4) \cup \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$. phương trình có đúng một nghiệm âm.

DẠNG 6. Tìm giá trị của tham số để các nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước.

Ta thực hiện các bước sau:
Bước 1: *Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm* $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}.$
Bước 2: *Áp dụng hệ thức Viét, ta được:* $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases} \qquad (I)$
Bước 3: *Biểu diễn điều kiện K thông qua* (I)
Bước 4: *Kết luận.*

Trong một vài trường hợp, bài toán còn được phát biểu dưới dạng:
"Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình thỏa mãn hệ thức cho trước."

VÍ DỤ 1: (Bài 62/tr 64 - Sgk): *Cho phương trình:* $7x^2 + 2(m-1)x - m^2 = 0$.

a. *Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm?*

b. *Trong trường hợp phương trình có nghiệm, dùng hệ thức Viét, hãy tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình đó theo m.*

a. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi; $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 7m^2 \geq 0, \forall m$. Vậy với mọi giá trị của m phương trình luôn có nghiệm.

b. Gọi x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình , ta có:
$x_1 + x_2 = \dfrac{-2(m-1)}{7} = \dfrac{2(1-m)}{7}$ và $x_1.x_2 = \dfrac{-m^2}{7}$.
Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1.x_2 = \dfrac{4(1-m)^2}{49} - 2.\dfrac{-m^2}{7} = \dfrac{18m^2 - 8m + 4}{49}$.

VÍ DỤ 2: *Cho phương trình:* $(m+1)\,x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$.
Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 *thỏa mãn:*

$$4\,(x_1 + x_2) = 7x_1.x_2$$

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2, điều kiện :
$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 3 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3. \qquad (*)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}$.

Suy ra: $4\,(x_1 + x_2) = 7x_1.x_2 \Leftrightarrow 4.\dfrac{2(m-1)}{m+1} = 7.\dfrac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow m = -6$ thỏa mãn $(*)$.
Vậy $m = -6$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

VÍ DỤ 3: *Xác định m để phương trình:* $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 *thỏa mãn:* $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 :
$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \neq 0. \qquad (*)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m+1}{m} \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{4(m+1)^2}{m^2} - \dfrac{2(m+1)}{m} = 2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{3}$.
Vậy $m = -\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

VÍ DỤ 4: *Cho phương trình:* $x^2 - 2kx - (k-1)(k-3) = 0$.
Chứng minh rằng với mọi k, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 *thỏa mãn:*

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = 0$$

.

Ta có: $\Delta' = k^2 + (k-1)(k-3) = 2k^2 - 4k + 4 = 2(k-1)^2 + 2 > 0, \forall k$.
Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1.x_2 = -(k-1)(k-3) \end{cases}$.
Khi đó $\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = \frac{1}{4}(2k)^2 - (k-1)(k-3) - 2.2k + 3 = 0$, đpcm.

VÍ DỤ 5: *Giả sử phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2.
Chứng minh rằng hệ thức: $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$ *là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.*

Theo giả thiết ta được: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$. $\quad (I)$

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} A &= (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = x_1.x_2 + x_1^2.x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3) \\ &= x_1.x_2 + x_1^2.x_2^2 - \left[(x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2\,(x_1 + x_2)\right] \\ &= \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \left[-\frac{b^3}{a^3} + 3.\frac{c}{a}.\frac{b}{a}\right] = \frac{b^3 + a^2c + ac^2 - 3abc}{a^3} \end{aligned}$$

Do đó $A = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2^2 \\ x_2 = x_1^2 \end{array}\right.$, đpcm.

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $x^2 - 10x + 16 = 0$.

b. $x^2 + 9x + 18 = 0$.

c. $x^2 - 8x + 65 = 0$.

d. $x^2 + 9x - 22 = 0$.

BÀI 2: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $-x^2 - 23x - 132 = 0$.

b. $3x^2 + 9x - 162 = 0$.

c. $\frac{1}{14}x^2 + \frac{10}{7}x + 6 = 0$.

d. $3x^2 + 19x - 22 = 0$.

BÀI 3: Tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết chu vi bằng $24m$ và diện tích bằng $27m^2$.

BÀI 4: Giải hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y=20 \\ x.y=99 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x+y=-21 \\ x.y=54 \end{cases}$.

BÀI 5: Giải hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y=4 \\ x.y=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 3(x+y)=2 \\ x.y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

BÀI 6: Giải hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y=4 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)=280 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x-y-xy=3 \end{cases}$.

BÀI 7: Giải hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2+y^2=128 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$.

BÀI 8: Cho hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+xy+y=m+2 \\ x^2y+xy^2=m+1 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m=-3$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

BÀI 9: Cho hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2=2(m+1) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với $m=1$.

b. Xác định m để hệ có đúng hai nghiệm phân biệt.

BÀI 10: Cho hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+xy+y=m+1 \\ x^2y+xy^2=3m-5 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m=\dfrac{5}{2}$.

b. Xác định m để hệ vô nghiệm.

c. Xác định m để hệ có một nghiệm duy nhất.

d. Xác định m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

BÀI 11: Cho hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m=12$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

BÀI 12: Cho phương trình: $\sqrt{2}x^2-4\sqrt{3}x+4=0$.

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

BÀI 13: Cho phương trình: $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x - 8 = 0$.

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$.

BÀI 14: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-2x_1$ và $-2x_2$.

b. $3x_1$ và $3x_2$.

c. $-x_1^2$ và $-x_2^2$.

d. $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

e. $x_1 + x_2$ và $-x_1.x_2$.

BÀI 15: Tìm m để phương trình: $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-x_1$ và $-x_2$.

b. $2x_1$ và $2x_2$.

c. x_1^3 và x_2^3.

d. $\dfrac{1}{x_1^4}$ và $\dfrac{1}{x_2^4}$.

e. $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^2.x_2^2$.

BÀI 16: Tìm m để phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-3x_1$ và $-3x_2$.

b. $x_1 + x_2$ và x_1x_2.

c. x_1^2 và x_2^2.

d. $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^2.x_2^2$.

BÀI 17: Cho phương trình $mx^2 - 2mx + 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

BÀI 18: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - m + 1 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

BÀI 19: Cho phương trình $x^2 - 2x\cos\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$.

a. Chứng minh rằng với mọi α phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc α.

BÀI 20: Cho phương trình $x^2 - 2x\cot\alpha - 1 - \tan^2\alpha = 0$.
Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc α.

BÀI 21: Cho phương trình $(1+m^2)x^2 - 2(m^2-1)x + m = 0$.

a. Tìm m để phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

BÀI 22: Cho phương trình $x^2 + 2x + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tùy theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

BÀI 23: Cho phương trình $x^2 - 4mx + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tùy theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

BÀI 24: Cho phương trình $mx^2 - 6x + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tùy theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

BÀI 25: Cho phương trình $mx^2 - 8x + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tùy theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

BÀI 26: Cho phương trình $x^2 - 2(m+7)x + m^2 - 4 = 0$. Xác định m để phương trình

a. Có hai nghiệm trái dấu.

b. Có hai nghiệm cùng dấu.

BÀI 27: Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình

a. Có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Có hai nghiệm dương phân biệt.

BÀI 28: Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2mx + m + 1 = 0$. Xác định m để phương trình

a. Có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Có hai nghiệm đối nhau.

BÀI 29: Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_1. Chứng minh rằng:

a. Phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_2.

b. $x_1 + x_2 \geq 2$.

BÀI 30: Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$. Khi đó

a. Tính theo m giá trị các biểu thức $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ và $F = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.

b. Tìm m sao cho $x_1^4 + x_2^4 = 32$.

c. Tìm m sao cho $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = 47$.

BÀI 31: Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$. Chứng minh rằng hệ thức $(k+1)^2ac - kb^2 = 0$, với $k \neq 0$ là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại.

F. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Giải phương trình tích

Phương pháp giải: *Biến đổi phương trình về dạng* $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0. \end{array}\right.$

VÍ DỤ 1: Giải các phương trình sau

1. (Bài 26.a/tr 56 - Sgk) $\left(3x^2 - 5x + 1\right)\left(x^2 - 4\right) = 0$.

2. (Bài 39.a/tr 57 - Sgk) $(3x^2-7x-10)\left[2x^2+\left(1-\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}-3\right]=0$.

VÍ DỤ 2: Giải các phương trình sau

1. (Bài 36.b/tr 56 - Sgk) $\left(2x^2+x-4\right)^2-(2x-1)^2=0$.
2. (Bài 39.d/tr 57 - Sgk) $\left(x^2+2x-5\right)^2=\left(x^2-x+5\right)^2$.

VÍ DỤ 3: Giải phương trình $\left(x^2-1\right)(0{,}6x+1)=0{,}6x^2+x$.

DẠNG 2. Sử dụng ẩn phụ chuyển phương trình về phương trình bậc hai

VÍ DỤ 1: Giải phương trình $2x^2+1=\dfrac{1}{x^2}-4$.

VÍ DỤ 2: Giải các phương trình sau

a) $2\left(x^2-2x\right)^2+3\left(x^2-2x\right)+1=0$;

b) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3=0$.

VÍ DỤ 3: Giải các phương trình sau

a) $3\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-1=0$;

b) $\left(x^2-4x+2\right)^2+x^2-4x-4=0$;

c) $x-\sqrt{x}=5\sqrt{x}+7$;

d) $\dfrac{x}{x+1}-10\cdot\dfrac{x+1}{x}=3$.

DẠNG 3. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Phương pháp giải: *Ta thực hiện theo các bước sau:*

Bước 1: *Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.*

Bước 2: *Khử mẫu, đưa phương trình về dạng thông thường.*

Bước 3: *Kiểm tra điều kiện cho các nghiệm tìm được rồi kết luận.*

VÍ DỤ 1: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{10-2x}{x^2-2x}$;

b) $\dfrac{x+0{,}5}{3x+1}=\dfrac{7x+2}{9x^2-1}$.

VÍ DỤ 2: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x+2}{x-5}+3=\dfrac{6}{2-x}$.

b) $\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)(x+2)}$.

Trong một vài trường hợp, việc quy đồng mẫu số không phải là giải pháp tối ưu, đặc biệt khi quy đồng chúng ta nhận được một phương trình bậc cao hơn 2, trong những trường hợp như vậy chúng ta thường nghĩ tới những phương pháp giảm bậc cho phương trình và một trong số đó là phương pháp đặt ẩn phụ. Ví dụ sau sẽ minh họa nhận định này

VÍ DỤ 3: Giải phương trình $\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+2}-\dfrac{x^2+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{5}{2}$.

Nhận xét.

1) *Như vậy, với bài toán trên nếu chúng ta lựa chọn hướng quy đồng mẫu số thì sẽ nhận được một phương trình bậc 4 và việc giải phương trình này phụ thuộc rất nhiều vào kỹ năng đoán nghiệm cùng phép chia đa thức để chuyển phương trình về dạng tích. Tuy nhiên, một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra ở đây là "Tại sao lại có thể nghĩ ra được cách chia cho x rồi đặt ẩn phụ như vậy?", câu trả lời có thể được khẳng định ở dạng phương trình tổng quát*

$$\frac{ax^2+mx+c}{ax^2+nx+c}+\frac{ax^2+px+c}{ax^2+qx+c}=0.$$

Ta có thể lựa chọn phép chia cả tử và mẫu cho x (hoặc x^2) rồi đặt ẩn phụ $t=ax+\dfrac{c}{x}$ $\left(\text{hoặc } t=a+\dfrac{c}{x^2}\right)$.
Ý tưởng trên được mở rộng cho phương trình dạng

$$\frac{mx}{ax^2+bx+d}+\frac{nx}{ax^2+cx+d}=p.$$

2) *Việc lựa chọn ẩn phụ trong hầu hết các trường hợp luôn cần tới những biến đổi đại số để làm xuất hiện dạng của ẩn phụ và để thực hiện tốt công việc này các em học sinh luôn phải thật linh hoạt và sáng tạo. Ví dụ sau sẽ minh họa nhận định này.*

VÍ DỤ 4: Giải phương trình $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

DẠNG 4. Giải phương trình bậc ba

Phương pháp giải: *Để giải phương trình:* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1)
ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Đoán nghiệm x_0 của (1).*

Bước 2: *Phân tích (1) thành*

$$(x-x_0)(ax^2+b_1x+c_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=ax^2+b_1x+c_1=0 \ (2)\end{array}\right.$$

Bước 3: *Giải (2) rồi kết luận nghiệm của phương trình.*

1) *Dự đoán nghiệm dựa vào kết quả sau:*

   a) *Nếu $a+b+c+d=0$ thì (1) có nghiệm $x=1$.*

   b) *Nếu $a-b+c-d=0$ thì (1) có nghiệm $x=-1$.*

c) *Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỉ $\dfrac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a.*

d) *Nếu $ac^3 = bd^3$ $(a, d \neq 0)$ thì (1) có nghiệm $x = -\dfrac{c}{b}$.*

2) *Với các phương trình có chứa tham số có thể coi tham số là ẩn để thực hiện việc phân tích đa thức.*

VÍ DỤ 1: Giải các phương trình sau

a) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$; b) $2x^3 + x + 3 = 0$.

VÍ DỤ 2: Giải các phương trình sau

a) $1{,}2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$; b) $5x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$.

VÍ DỤ 3: Giải các phương trình sau

a) $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$; b) $x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

⚠ *Khi đã thành thạo các phương pháp nhẩm nghiệm các bạn học sinh không cần nêu nhận xét trong lời giải cho mỗi phương trình.*

VÍ DỤ 4: Giải phương trình $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$.

VÍ DỤ 5: Cho phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 3(m+4)x - m - 12 = 0$.

1. Giải phương trình với $m = -12$.
2. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

⚠ *Nếu phương trình có chứa tham số m, ta có thể coi $m$là ẩn, còn x là tham số. Sau đó tìm lại x theo m.*

VÍ DỤ 6: Xác định m để phương trình $m^2x^3 - 3mx^2 + (m^2+2)x - m = 0$, với $m \neq 0$ có ba nghiệm phân biệt.

⚠ *Nếu các phương pháp nhẩm nghiệm không có tác dụng, ta có thể thử vận dụng kiến thức về phân tích đa thức.*

VÍ DỤ 7: Giải phương trình $x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 7x - \sqrt{3} = 0$. (1)

DẠNG 5. Giải phương trình trùng phương

Phương pháp giải: *Với phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$* (1)
ta thực hiện các bước:

Bước 1: *Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.*

Bước 2: *Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng*

$$at^2 + bt + c = 0 \qquad (2)$$

***Bước 3:** Giải (2) để tìm nghiệm t, từ đó suy ra nghiệm x cho phương trình.*

⚠ *Nếu phương trình (2) có nghiệm $t_0 \geq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.*

VÍ DỤ 1: Giải các phương trình sau

a) $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$; b) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$; c) $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$.

VÍ DỤ 2: Cho phương trình $mx^4 - 2(m-1)x^2 + m - 1 = 0$. (1)
Tìm m để phương trình

1. Có nghiệm duy nhất.
2. Có hai nghiệm phân biệt.
3. Có ba nghiệm phân biệt.
4. Có bốn nghiệm phân biệt.

DẠNG 6. Giải phương trình hồi quy và phản hồi quy

☑ *Phương trình hồi quy:*
Để giải phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (1) ta thực hiện theo các bước:
***Bước 1:** Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được*

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

***Bước 2:** Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.*
Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$at^2 + bt + c - 2a = 0. \quad (3)$$

☑ *Phương trình phản hồi quy:*
Để giải phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ (1) ta thực hiện theo các bước:
***Bước 1:** Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được*

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

***Bước 2:** Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.*
Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$at^2 + bt + c + 2a = 0. \quad (3)$$

***Chú ý:** Phương pháp mở rộng tự nhiên cho dạng phương trình*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

có hệ số thoả mãn $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2, e \neq 0$.

Khi đó ta đặt ẩn phụ $t = x + \dfrac{d}{b}.\dfrac{1}{x}$.
Trước hết ta quan tâm tới phương trình có dạng hồi quy.

VÍ DỤ 1: Giải phương trình $x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 - x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1 = 0$.

VÍ DỤ 2: Giải phương trình $x^4 + 3x^3 - \dfrac{35}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$.

VÍ DỤ 3: Giải phương trình $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

⚠ *Nhiều phương trình ở dạng ban đầu không phải là phương trình hồi quy hay phản hồi quy, tuy nhiên với phép đặt ẩn phụ thích hợp ta có thể chuyển chúng về dạng hồi quy hoặc phản hồi quy, từ đó áp dụng phương pháp đã biết để giải. Ta đi xem xét hai ví dụ sau.*

VÍ DỤ 4: Giải phương trình

$$(x-2)^4 + (x-2)(5x^2 - 14x + 13) + 1 = 0. \quad (1)$$

VÍ DỤ 5: Giải phương trình

$$(x^2 - x)^2 - 2x(3x-5) - 3 = 0.$$

DẠNG 7. Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m \quad (1)$, với $a+b = c+d$

Phương pháp: Để giải phương trình (1) *ta thực hiện theo các bước:*
Bước 1: *Viết lại phương trình dạng:*

$$\left[x^2 + (a+b)x + ab\right] \cdot \left[x^2 + (c+d)x + cd\right] = m. \quad (2)$$

Bước 2: *Đặt* $t = x^2 + (a+b)x + ab$, *suy ra* $x^2 + (c+d)x + cd = t - ab + cd$.
Khi đó, phương trình (2) *có dạng:*

$$t(t - ab + cd) = m \Leftrightarrow t^2 - (ab - cd)t - m = 0. \quad (3)$$

VÍ DỤ 1: Giải phương trình $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$.

VÍ DỤ 2: Giải phương trình $(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3) = -9$.

DẠNG 8. Phương trình dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ (1)

Phương pháp giải

Bước 1: *Đặt* $t=x+\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow\begin{cases}x+a=t+\dfrac{a-b}{2}\\ x+b=t-\dfrac{a-b}{2}.\end{cases}$

Khi đó, phương tình (1) *có dạng:*

$$2t^4+12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2t^2+2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=c.\quad(2)$$

Bước 2: *Đặt* $u=t^2$, *điều kiện* $u\geq 0$.
Khi đó, phương trình có dạng

$$2u^2+12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2u+2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=c.\quad(3)$$

Bước 3: *Giải* (3) *nhận được* u, *từ đó suy ra nghiệm* t *rồi tới* x.

VÍ DỤ 1: Giải phương trình $(x+4)^4+(x+6)^4=82$.

VÍ DỤ 2: Cho phương trình $(a+1)^4+(x+3)^4=2m$. (1)

1. Giải phương trình với $m=1$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

DẠNG 9. Sử dụng phương trình bậc hai giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Với các phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, có thể được chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:
Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm

$|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.$

$|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{cases}$ *hoặc* $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geq 0\\ f(x)=g(x)\end{cases}\quad\begin{cases}f(x)\leq 0\\ -f(x)=g(x)\end{cases}\end{array}\right.$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.
Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

VÍ DỤ 1: Giải phương trình: $|x^2-2x-2|=|x^2+2x|$.

Nhận xét. *Như vậy, ví dụ trên đã minh họa cho phép biến đổi tương đương thứ nhất của phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.*

VÍ DỤ 2: Giải phương trình: $|x^2+x|=-x^2+x+2$.

Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh họa việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối về phương trình bậc hai.

VÍ DỤ 3: Giải phương trình: $(x-1)^2 + 4|x-1| + 3 = 0$.

DẠNG 10. Sử dụng phương trình bậc hai giải phương trình chứa căn thức

Phương pháp giải

Với các phương trình chứa căn thức, có thể chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:

Cách 1: *Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm:*

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0.$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Cách 2: *Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.*

Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa căn thức được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

VÍ DỤ 1: Giải các phương trình:

1. $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x+1}$
2. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{2x^2 - 7x + 9}$.

Nhận xét. *Trong ví dụ trên:*

Ở câu a), chúng ta lựa chọn điều kiện $x + 1 \geq 0$, vì có cảm giác nó đơn giản hơn điều kiện $x^2 - 4x = 5 \geq 0$. Tuy nhiên, thực tế ta thấy điều kiện $x^2 - 4x + 5 \geq 0$ là đơn giản hơn vì $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 0$, luôn đúng và trong trường hợp này chúng ta không cần kiểm tra lại nghiệm.

Ở câu b), chúng ta lựa chọn điều kiện $x^2 - 2x + 3 \geq 0$, vì điều này luôn đúng.

VÍ DỤ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + x - 3} = x - 1$.

VÍ DỤ 3: Giải phương trình: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh họa việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa căn về phương trình bậc hai.

VÍ DỤ 4: Giải phương trình: $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$.

II. BÀI TẬP

BÀI 1: Giải các phương trình sau.

a) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = 1$.

b) $\dfrac{9(x^2+x+1)}{x^2-x+1} - \dfrac{7(x+1)}{x-1} = 0$.

BÀI 2: Giải các phương trình sau.

a) $\dfrac{x^2-2x-1}{6}-\dfrac{1}{x^2-2x}=0.$

b) $\dfrac{2}{x^2-3x+3}+\dfrac{1}{x^2-3x+4}=\dfrac{15}{2(x^2-3x+5)}.$

BÀI 3: Giải các phương trình sau.

a) $\dfrac{2x^2+5x+8}{2x^2+3x+8}+\dfrac{2x^2+3x+8}{2x^2+7x+8}=0.$

b) $\dfrac{5x^2+6x+9}{5x^2+4x+9}+\dfrac{5x^2+10x+9}{5x^2+7x+9}=0.$

BÀI 4: Giải các phương trình sau:

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+2}+\dfrac{2x}{x^2-5x+2}=0.$
2. $\dfrac{2x^2+x+3}{2x^2-7x+3}+\dfrac{3x}{2x^2+6x+3}=0.$

BÀI 5: Giải các phương trình sau:

1. $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}-8=0.$
2. $4x^2+\dfrac{4x^2}{(2x+1)^2}-5=0.$

BÀI 6: Cho phương trình $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2.$

1. Tìm a, b để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm a, b để phương trình có nghiệm.

BÀI 7: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+2}+\dfrac{2x}{x^2-5x+2}=0.$

b) $\dfrac{2x^2+x+3}{2x^2-7x+3}+\dfrac{3x}{2x^2+6x+3}=0.$

BÀI 8: Giải các phương trình sau

a) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}+8=0.$

b) $x^2+\dfrac{x^2}{(2x+1)^2}+5=0.$

BÀI 9: Cho phương trình $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2\,(1).$

1. Tìm a, b để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm a, b để phương trình có nghiệm.

BÀI 10: Giải các phương trình sau.

a) $4x^3-9x^2+6x-1=0.$

b) $2x^3+x^2-5x+2=0.$

c) $2x^3+x+3=0.$

d) $2x^3+7x^2+7x+2=0.$

e) $2x^3-9x+2=0.$

f) $8x^3-4x^2+10x-5=0.$

BÀI 11: Giải phương trình sau, biết rằng phương trình có một nghiệm không phụ thuộc vào a, b và $b>0: x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a-b)x-(a^2-b)=0.$

BÀI 12: Cho phương trình $mx^3+(3m-4)x^2+(3m-7)x+m-3=0\,(1).$

1. Giải phương trình với $m=3$.
2. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt không dương.

BÀI 13: Cho phương trình $x^3-2mx^2+mx+m-1=0\,(1)$. Xác định m để

1. Phương trình có đúng 1 nghiệm.
2. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
3. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

BÀI 14: Cho phương trình $x^3-2mx^2+(2m^2-1)x-m(m^2-1)=0\,(1)$. Xác định m để

1. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.
2. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.
3. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt âm.

BÀI 15: Xác định m để phương trình $x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1)=0\,(1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

BÀI 16: Cho phương trình $2x^3+2(6m-1)x^2-3(2m-1)x-3(1+2m)=0\,(1)$. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 28.

BÀI 17: Giải các phương trình sau.

a) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$.

b) $x^4-6x^3-x^2+54x-72=0$.

c) $x^4-2x^3-6x^2+8x+8$.

d) $2x^4-13x^3+20x^2-3x-2=0$.

BÀI 18: Giải các phương trình sau.

a) $x^4-3x^2-4x-3=0$.

b) $x^4-4x^3+3x^2-2x-1=0$.

BÀI 19: Cho phương trình $mx^4-(m+2)x^3+2(1-2m)x^2+4(2+m)x-8=0\,(1)$.

1. Giải phương trình với $m=2$.
2. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.
3. Xác định m để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt.

BÀI 20: Cho phương trình $mx^4-6mx^3+(2+11m)x^2-6(m+1)x+4=0\,(1)$.

1. Giải phương trình với $m=1$.
2. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.
3. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.
4. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

BÀI 21: Cho phương trình $x^4-4mx^3+4(m^2-1)x^2+12x-9=0\,(*)$.

1. Xác định m để phương trình có đúng 1 nghiệm.
2. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.
3. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

4. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

BÀI 22: Giải các phương trình sau.

a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

c) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

d) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

BÀI 23: Cho phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0\,(1)$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

BÀI 24: Giải các phương trình sau.

a) $x - \sqrt{2x+3} = 0$.

b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$.

c) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}$.

BÀI 25: Giải các phương trình sau.

a) $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$.

b) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$.

c) $\sqrt{(x+1)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2$.

BÀI 26: Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$.

b) $\sqrt{2x^2+5x+2} - 2\sqrt{2x^2+5x-6} = 1$.

BÀI 27: Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{x^2+3x+2} - 2\sqrt{2x^2+6x+2} = -\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} = 2$.

BÀI 28: Giải phương trình $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3$.

BÀI 29: Giải phương trình $2\sqrt[n]{(1+x)^2} - 3\sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$ với n chẵn.

G. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trước hết các em cần ôn lại kiến thức của phương pháp giải toán bằng cách:

1. Lập phương trình bậc nhất một ẩn.
2. Lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình.

- Chọn ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn.
- Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
- Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập phương trình.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán đưa ra thường thuộc một trong 5 dạng sau:

Dạng 1: Bài toán chuyển động.

Dạng 2: Bài toán về số và chữ số.

Dạng 3: Bài toán vòi nước.

Dạng 4: Bài toán có nội dung hình học.

Dạng 5: Bài toán về phần trăm - năng suất.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Bài toán chuyển động

VÍ DỤ 1: Một đoàn xe vận tải dự định điều số xe cùng loại để vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao thêm 14 tấn nữa. Do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại và mỗi xe ban đầu phải chở thêm nửa tấn nữa. Tính số xe phải điều theo dự định.

Nhận xét. *Như vậy trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

- *Chúng ta lựa chọn ẩn x cho giá trị cần tìm là số xe phải điều.*
- *Việc thiết lập phương trình dựa trên phép so sánh khối lượng mỗi xe phải chở.*
- *Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập với nhau với mục đích minh họa để giúp các em học sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các ví dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.*

VÍ DỤ 2: Một xe lửa đi từ Hà Nội vào Bình Sơn (Quảng Ngãi). Sau 1 giờ, một xe lửa khác đi từ Bình Sơn ra Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường Hà Nội - Bình Sơn dài 900 km.

VÍ DỤ 3: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một canô đi từ bến A đến bến B, nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về lại bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là 3 km/h.

VÍ DỤ 4: Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng nghỉ lại 1 giờ tại thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi là 5 km với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

VÍ DỤ 5: Hai bến sống A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với canô đi xuôi từ A có một chiếc bè trôi từ A với vận tốc 3 km/h. Sau khi đi đến B canô trở về bến A ngay và gặp bè khi đã trôi được 8 km. Tính vận tốc riêng của canô. Biết vận tốc của canô không thay đổi.

VÍ DỤ 6: Một người đi xe máy trên quãng đường AB dài 120 km với vận tốc định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó, người lái xe tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

DẠNG 2. Bài toán về số và chữ số

VÍ DỤ 1: Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

⚠ *Ta cũng có thể gọi các số cần tìm là x và $x+5$.*
Kết quả ta cũng có hai cặp $(10;15)$ hoặc $(-10;-15)$ thỏa mãn các điều kiện đề bài.

VÍ DỤ 2: Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng bằng 8 và tổng các bình phương của chúng bằng 424.

⚠ *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

1. *Cho dù bài toán yêu cầu chúng ta đi tìm hai số (điều này có thể khiến học sinh hiểu theo hướng cần hai ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số thứ hai được xác đinh thông qua số thứ nhất (bởi hiệu giữa chúng bằng 8). Do đó chúng ta lựa chọn ẩn x cho số thứ nhất và dễ thấy số thứ hai là $x+8$.*

2. *Việc thiết lập phương trình là đơn giản, khi đã có được hai số cần tìm.*

3. *Với nhận định trong 1, bài toán có thể được giải thông qua hệ hai ẩn x, y (với x là số thứ nhất và y là số thứ hai), cụ thể:*

   ☑ *Hiệu của chúng bằng 8 nên $x-y=8$.*

- *Tổng bình phương của hai số bằng 424 nên* $x^2 + y^2 = 424$.
- *Từ đây ta có hệ phương trình* $\begin{cases} x - y = 8 \\ x^2 + y^2 = 424. \end{cases}$

  Học sinh tự giải bằng cách chuyển về phương trình bậc hai.

VÍ DỤ 3: Bài toán yêu cầu tìm tích của một số dương với một số lớn hơn nó 2 đơn vị nhưng bạn Quân nhầm đầu bài lại tính tích của một số dương với một số bé hơn nó 2 đơn vị. Kết quả của bạn Quân là 120. Hỏi nếu làm đúng đầu bài đã cho thì kết quả phải là bao nhiêu?

VÍ DỤ 4: Đố em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

VÍ DỤ 5: Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

VÍ DỤ 6: Một lớp học được nhà trường phát phần thưởng ba lần và chia đều cho các em học sinh. Lần thứ nhất chia hết 66 quyển vở nhưng vắng 5 em, lần thứ hai chia hết 125 quyển vở nhưng vắng 2 em, còn lần thứ ba thì không vắng em nào và chia hết 216 quyển vở. Biết một học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu. Tính số học sinh.

DẠNG 3. Bài toán vòi nước

VÍ DỤ 1: Có hai vòi nước. Người ta mở vòi thứ nhất cho vòi chảy đầy một bể nước cạn rồi khóa lại. Sau đó mở vòi thứ hai cho nước chảy ra hết với thời gian lâu hơn so với thời gian vòi một chảy là 4 giờ. Nếu cùng mở cả hai vòi thì bể đầy sau 19 giờ 15 phút. Hỏi vòi thứ nhất chảy trong bao lâu mới đầy bể khi vòi thứ hai khóa lại.

⚠ *Trong bài toán trên, các em cần lưu ý:*

- *Vòi thứ nhất chảy để cho nước vào bể.*
- *Vòi thứ hai chảy để lấy nước từ bể ra.*

Do đó khi lập phương trình ta phải lấy thời gian của vòi thứ nhất trừ thời gian của vòi thứ hai: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{4}{77}$.

Còn trong trường hợp cả hai vòi cùng chảy vào bể thì ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{4}{77}$.

DẠNG 4. Bài toán có nội dung hình học

VÍ DỤ 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 240 m^2. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất.

VÍ DỤ 2: Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết hình chữ nhật có chu vi bằng 340 m và diện tích bằng 7200 m^2.

Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:

- *Với hai giá trị phải tìm chúng ta lựa chọn nó cho hai ẩn tương ứng. Từ đó, cần đi thiết lập một hệ hai phương trình theo hai ẩn đó.*
- *Hệ phương trình được giải nhờ hệ thức Vi-ét*

VÍ DỤ 3: Cho tam giác ABC có $BC = 16$ cm, đường cao $AH = 12$ cm. Một hình chữ nhật $MNPQ$ có đỉnh M thuộc cạnh AB, đỉnh N thuộc cạnh AC còn hai đỉnh P và Q thuộc cạnh BC. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho diện tích của hình chữ nhật đó bằng 36 cm^2.

VÍ DỤ 4: Một thửa ruộng hình chữ nhật, một người đi theo chiều dài hết 1 phút 5 giây, đi theo chiều rộng hết 39 giây. Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng 1,5 m thì diện tích còn lại là 5529 m^2. Tính kích thước của thửa đất.

DẠNG 5. Bài toán về phần trăm - năng suất

VÍ DỤ 1: Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 2000000 người lên 2020050 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

VÍ DỤ 2: Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong công việc. Nếu họ làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc?

VÍ DỤ 3: Muốn làm xong công việc cần 480 công thợ. Người ta có thể thuê một trong hai nhóm thợ A hoặc B. Biết nhóm A ít hơn nhóm B là 4 người và nếu giao cho nhóm B thì công việc hoàn thành sớm hơn 10 ngày so với nhóm A. Hỏi số người của mỗi nhóm.

Với ví dụ trên, ta có thể gọi x là số người nhóm A và y là số người nhóm B. Sau đó ta thiết lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ \dfrac{480}{y} - \dfrac{480}{x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 16. \end{cases}$$

VÍ DỤ 4: Bác Thời vay 2000000 đồng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp vào với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm phải trả tất cả là 2420000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?

VÍ DỤ 5: Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm được 720 sản phẩm. Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì so với giảm năng suất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thời gian hoàn thành ngắn hơn 4 ngày. Tính năng suất dự định

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 5 và tổng các bình phương của chúng bằng 125.

BÀI 2: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 25 và hiệu các bình phương của chúng cũng bằng 25.

BÀI 3: Lúc 7 giờ sáng một ôtô khởi hành từ A để đến B cách A 120 km. Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường ôtô dừng lại 20 phút để nghỉ rồi đi chậm hơn trước 8 km/h. Ôtô đến B lúc 10 giờ. Hỏi ôtô nghỉ lúc mấy giờ?

BÀI 4: Một người đi từ A đến B rồi lại trở về A. Lúc về đi được 30 km người đó nghỉ 20 phút. Sau khi nghỉ xong, người đó đi với vận tốc nhanh hơn trước 6 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết quãng đường AB dài 90 km và thời gian đi bằng thời gian về kể cả nghỉ.

BÀI 5: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc xác định. Khi từ B về A người đó đi bằng đường khác dài hơn đường trước 29 km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 3 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết thời giang về nhiều hơn thời gian đi là 1 giờ 30 phút.

BÀI 6: Một ôtô đi từ A đến B rồi quay về A ngay. Sau khi ô tô đi được 15 km thì một người đi xe đạp từ B về A. Tính vận tốc mỗi xe. Biết:
- Quãng đường AB dài 24 km.
- Vận tốc ôtô nhanh hơn xe đạp 37 km/h.
- Ôtô quay trở về A sớm hơn xe đạp đến B là 44 phút.

BÀI 7: Một ô tô dự định đi quãng đường AB dài 60 km. Trong thời gian nhất định, trên nửa quãng đường AB do đường xấu nên ô tô chỉ đi với vận tốc ít hơn dự định 6 km/h. Để đến B đúng dự định, ô tô phải đi quãng đường còn lại với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định 10 km/h. Tính thời gian dự định đi hết quãng đường.

BÀI 8: Một tổ lao động hoàn thành đào đắp 8000 m^3 đất trong một thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày vượt mức 50 m^3 thì tổ lao động hoàn thành kế hoạch sớm 8 ngày. Tính thời gian dự định.

BÀI 9: Một nông trường phải trồng 75 ha rừng với năng suất đã định từ trước. Nhưng trong thực tế, khi bắt tay vào trồng rừng thì mỗi tuần nông trường trồng thêm được 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha. Do vậy, họ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 tuần. Tính năng suất dự định của nông trường.

BÀI 10: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh khu vườn rộng 2 m. Diện tích còn lại là 4256. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

BÀI 11: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn nếu cả hai vòi cùng chảy một lúc thì sau 4 giờ mới đầy bể. Nếu từng vòi chảy một thì thời gian vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 6 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể.

BÀI 12: Hai vòi nước cùng chảy vào bể trong 6 giờ 40 phút thì đầy. Nếu chảy riêng từng vòi một thì mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể. Biết rằng vòi thứ hai chảy lâu hơn vòi thứ nhất 3 giờ.

Phần II

Hình học

Chương 3 GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

A. GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Góc ở tâm đường tròn

Định nghĩa 1. *Góc ở tâm đường tròn là góc mà đỉnh của nó là tâm của đường tròn.*
Mỗi góc ở tâm cắt đường tròn tại hai điểm, do đó xác định hai cung tròn và có thể xảy ra hai trường hợp:

1. Một cung nhỏ và một cung lớn.
2. Hai cung đều bằng nửa đường tròn.

2. Số đo của cung tròn

Định nghĩa 2. số đo của cung AB (kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$) được xác định như sau:

1. Số đo (độ) của cung nhỏ AB bằng số đo (độ) của góc ở tâm chắn cung đó.
2. Số đo (độ) của cung lớn AB bằng 360° trừ đi số đo độ cung nhỏ AB.
3. Số đo (độ) của nửa đường tròn bằng 180°.

Định nghĩa 3. Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

1. Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo (độ).
2. Trong hai cung không bằng nhau, cung lớn hơn là cung có số đo (độ) lớn hơn.

3. Điểm nằm trên cung tròn

Định lí 1: *Nếu điểm C nằm trên cung AB và chia cung này thành hai cung kí hiệu là $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$ thì ta có sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$.*

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau:

a) 3 giờ. b) 5 giờ. c) 6 giờ. d) 12 giờ. e) 20 giờ.

VÍ DỤ 2: Cho đường tròn $(O; R)$, dây $AB = R$. Tính số đo hai cung $\overset{\frown}{AB}$.

VÍ DỤ 3: Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M. Biết $\widehat{AMB} = 35^\circ$.

1. Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.

2. Tính số đo mỗi cung $\overset{\frown}{AB}$ (cung lớn và cung nhỏ).

VÍ DỤ 4: Cho đường tròn (O), góc ở tâm $\widehat{AOB} = 120^\circ$, góc ở tâm $\widehat{AOC} = 30^\circ$. Tính số đo cung $\overset{\frown}{BC}$.

VÍ DỤ 5: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác với AB, AC, BC theo thứ tự ở D, E, F.

1. Tính số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{DE}$.
2. Tính số đo cung nhỏ và cung lớn EF.

VÍ DỤ 6: Chứng minh rằng nếu một tiếp tuyến song song với một dây thì tiếp điểm chia đôi cung căng dây.

VÍ DỤ 7: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90°. Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$.

b) Ba điểm C, O, E thẳng hàng.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1: Cho đường tròn tâm $(O; R)$, dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo hai cung $\overset{\frown}{AB}$.

BÀI 2: Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, E. Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$.

BÀI 3: Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AM và AN, chúng tạo với nhau một góc α.

1. Tính số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{MN}$.
2. Từ một điểm I trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$, vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt AM và AN lần lượt tại B và C. Tia OB và OC cắt đường tròn lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng số đo của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ có giá trị không đổi khi điểm I chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$.

BÀI 4: Cho đường tròn (O) và dây AB. Lấy hai điểm M và N nằm trên cung nhỏ AB chia cung này thành ba cung bằng nhau $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$. Các bán kính OM và ON cắt AB tại C và D. Chứng minh rằng $AC = BD$ và $AC > CD$.

BÀI 5: Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây AB sao cho số đo của cung lớn AB gấp đôi cung nhỏ AB. Tính diện tích $\triangle ABC$.

BÀI 6: Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tính số đo của hai cung $\overset{\frown}{AB}$.

BÀI 7: Cho $\triangle ABC$. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C.

1. Tính số đo các góc ở tâm tạo bởi hai trong trong ba bán kính OA, OB, OC.
2. Tính số đo các cung tạo bởi hai trong ba điểm A, B, C.

B. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn:

1. Hai cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng căng hai dây bằng nhau.
2. Cung lớn hơn khi và chỉ khi nó căng dây lớn hơn.

Trong đường tròn (O), ta có minh họa:

- $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$.
- $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AOB} > \widehat{COD}$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

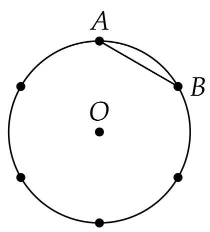
VÍ DỤ 1: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

b) $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC}$.

VÍ DỤ 2:

1. Vẽ đường tròn tâm (O), bán kính $R = 2$ cm. Nêu cách vẽ cung $\overset{\frown}{AB}$ có số đo bằng 60°. Hỏi dây AB dài bao nhiêu xen-ti-mét?
2. Làm thế nào để chia được đường tròn thành sáu cung bằng nhau như trên hình bên.



VÍ DỤ 3: Cho đường tròn (O), dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ dây MC cắt dây AB tại D. Vẽ đường vuông góc với AB tại D, cắt OC ở K. Chứng minh rằng $\triangle KCD$ là tam giác cân.

VÍ DỤ 4: Chứng minh rằng hai cung chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

VÍ DỤ 5: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH của tam giác cắt đường tròn ở D. Vẽ đường kính AE.

1. Chứng minh rằng $BECD$ là hình thang cân.
2. Gọi M là điểm chính giữa của cung DE, OM cắt BC tại I. Chứng minh rằng I là trung điểm của BC.
3. Tính bán kính của đường tròn biết $BC = 24$ cm, $IM = 8$ cm.

VÍ DỤ 6: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ các đường kính AC, của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O'). Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O').

1. So sánh các cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{BD}$.
2. Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{EBD}$ (tức là điểm B chia cung $\overset{\frown}{EBD}$ thành hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD}$).

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1: Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Biết $AB < AD$, chứng minh rằng $BC > CD$.

BÀI 2: Hai đường tròn (O) và (O') cùng bán kính cắt nhau tại M và N.

1. Chứng minh rằng hai cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của hai đường tròn bằng nhau.
2. Vẽ các đường kính MA của đường tròn (O) và đường kính MB của đường tròn (O'). Chứng minh rằng $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$.
3. Vẽ đường kính NOC. Tia BM cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng các cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CD}$ bằng nhau.

BÀI 3: Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle DBC$. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc với OH, OK với BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

1. Chứng minh rằng $OH > OK$.
2. So sánh hai cung nhỏ $\overset{\frown}{BD}$ và $\overset{\frown}{BC}$.

BÀI 4: Trên dây cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) lấy hai điểm C và D sao cho $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và qua D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF} < \overset{\frown}{EF}$.

BÀI 5:

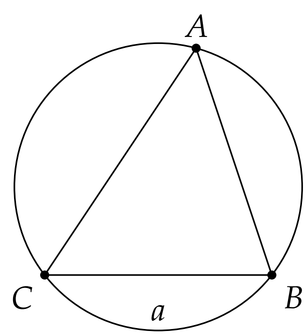
1. Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy. Mệnh đề đảo có đúng không? Hãy nêu thêm điều kiện để mệnh đề đảo đúng.
2. Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

C. GÓC NỘI TIẾP

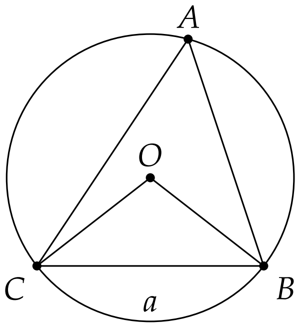
I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên một đường tròn và hai cạnh của nó cắt đường tròn.

Trong hình minh họa bên, ta thấy $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AbC}$ (viết tắt là $\overset{\frown}{AC}$ và được hiểu là cung AC không chứa điểm B).
$\widehat{BCA}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BA}$.
$\widehat{CAB}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{CB}$.



Định lí 1: *Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.*

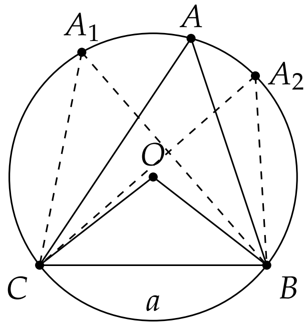


Ta có minh họa $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

Hệ quả 1. Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau của một đường tròn thì bằng nhau.

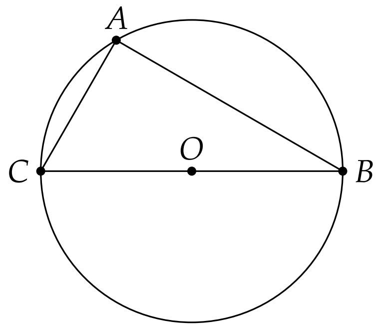
Ta có minh học với các điểm A, A_1, A_1 ở cùng một phía với BC.

$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= \widehat{BA_1C} = \widehat{BA_2C} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}\\ \widehat{AEB} &= \widehat{CFD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD.\end{aligned}$$



Hệ quả 2. Góc nội tiếp chắc nửa đường tròn là góc vuông.
Ta có minh họa:

$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$
BC là đường kính $(O \in BC)$.



Hệ quả 3. Trong một đường tròn, mọi góc nội tiếp không quá 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
Ta có minh họa sau

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Giải bài toán định lượng

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng

VÍ DỤ 1: Muốn xác định tâm của một đường tròn mà chỉ dùng êke thì phải làm như thế nào?

VÍ DỤ 2: Dựng một tam giác vuông, biết cạnh huyền dài 4 cm và một cạnh góc vuông dài 2,5 cm.

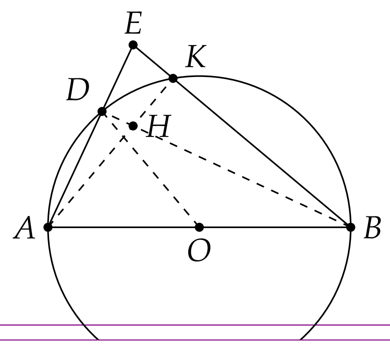
VÍ DỤ 3: Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, AC, BA theo thứ tự tại D, E, F. Cho biết $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$. Tính số đo của góc $\widehat{BAC}$.

DẠNG 2. Giải bài toán định tính

VÍ DỤ 1: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.

VÍ DỤ 2:
Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D. Gọi K là giao điểm của EB với đường tròn (O) và H là giao điểm của BD và AK.

1. $\triangle ABE$ là tam giác gì?
2. Chứng minh rằng EH vuông góc với AB.
3. Chứng minh rằng OD vuông góc với AK.



VÍ DỤ 3: Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có: $MA^2 = MB \cdot MC$.

VÍ DỤ 4: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Đường tròn (O) có đường kính BC cắt AB, AC tại D, E. Gọi I là giao điểm của BE và CD.

1. Chứng minh rằng $AI \perp BC$.
2. Chứng minh rằng $\widehat{IAE} = \widehat{IDE}$.
3. Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$, chứng minh $\triangle DOE$ là tam giác đều.

VÍ DỤ 5: Cho AB, BC, CA là ba dây của đường tròn (O). Từ điểm chính giữa M của cung AB vẽ dây MN song song với dây BC. Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh rằng $SM = SC$ và $SN = SA$.

VÍ DỤ 6: Cho đường tròn (O) và (O') bằng nhau, cắt nhau tại A và B. Qua B vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D.

1. Chứng minh $AC = AD$.
2. Tìm quỹ tích trung điểm M của CD khi cát tuyến CBD quay quanh B.

VÍ DỤ 7: Cho một đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M vẽ một cát tuyến cắt đường tròn ở A và B. Chứng minh rằng tích $MA \cdot MB$ không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến.

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1: Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB và C là một điểm bên ngoài đường tròn. Nối CA, CB gặp đường tròn theo thứ tự ở M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN.

1. Chứng minh rằng $AH \perp AB$.
2. Cho $\widehat{ACB} = 60^\circ$, chứng minh $\triangle OMN$ là tam giác đều.

BÀI 2: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi MBN là tam giác gì? Tại sao?

BÀI 3: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ đường kính AOC và $AO'D$.

1. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng và AB vuông góc với CD.
2. Biết $R \geq r$ và $CD = a$, hãy tính BC và BD.

BÀI 4: Cho $\triangle ABC$. Hai đường tròn đường kính AB và AC cắt nhau tại một điểm thứ hai là D.

1. Chứng minh ba điểm B, D, C thẳng hàng.
2. Đường thẳng AC cắt đường tròn đường kính AB tại E, đường thẳng AB cắt đường tròn đường kính AC tại F. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.

BÀI 5: Cho đường tròn (O) và hai dây AB, CD bằng nhau cắt nhau tại M (điểm C nằm trên cung nhỏ AB, điểm B nằm trên cung nhỏ (CD)).

1. Chứng minh $AC = DB$.
2. Chứng minh $\triangle MAC = \triangle MDB$.
3. Tứ giác $ACBD$ là hình gì? Chứng minh.

BÀI 6: Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi O là điểm chính giữa của nửa đường tròn và M là một điểm bất kì của nửa đường tròn đó. Tia AM cắt đường tròn $(O; OA)$ tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng $MN = MB$.

BÀI 7: Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I và K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI.

1. Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng.
2. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle MAB$.
3. Giả sử $MA = 12$ cm, $MB = 16$ cm, tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

BÀI 8: Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C chạy trên một nửa đường tròn. Vẽ một đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA và CB tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

1. Ba điểm M, I, N thẳng hàng.
2. $ID \perp MN$.
3. Đường thẳng CD đi qua điểm cố định.
4. Nếu cách dựng đường tròn (I) nói trên.

BÀI 9: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Kẻ đường kính AE.

1. Tính $\widehat{ACE}$.
2. Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.
3. Gọi K là giao điểm của AH với đường tròn (O). Tứ giác $BCEK$ là hình gì?

BÀI 10: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt đường tròn tại M.

1. Chứng minh rằng $\triangle BMC$ là tam giác cân.
2. Chứng minh rằng $\widehat{BMC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$.
3. Gọi D là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng $AB \cdot AC = AD \cdot AM$.

BÀI 11: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm trên cung BC. Trên tia AM lấy điểm D sao cho $MD = MB$.

1. $\triangle MBD$ là hình gì? So sánh hai tam giác $\triangle BDA$ và $\triangle BMC$.
2. Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

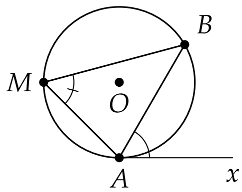
BÀI 12: Cho nửa đường tròn đường kính AB, K là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ bán kính OC sao cho $\widehat{BOC} = 60°$.

1. Gọi M là giao điểm của AC và OK. Chứng minh rằng $MO = MC$.
2. Cho $AB = 2R$, tính MC theo R.

D. GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định lí 1: *Trong một đường tròn, số đo của góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cung đi qua tiếp điểm bằng nửa số đo của cung bị chắn.*
Ta có minh họa: $\widehat{BAx} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$



Nhận xét: Như vậy, góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây cung cùng chắn một cung thì bằng nhau, cụ thể $\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$.

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Giải bài toán định tính

VÍ DỤ 1: Từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O) ta kẻ một tiếp tuyến MT và một cát tuyến MAB của đường tròn đó. Chứng minh rằng $MT^2 = MA \cdot MB$.

VÍ DỤ 2: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Tia Mx quay quanh M và cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Gọi I là một điểm thuộc tia Mx sao cho

$MI^2 = MA.MB$. Tìm quỹ tích điểm I.

VÍ DỤ 3: Cho A, B, C là ba điểm cùng nằm trên một đường tròn. At là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Đường thẳng song song với At cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh rằng $AB \cdot AM = AC \cdot AN$.

VÍ DỤ 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ hai tiếp tuyến với hai đường tròn. Hai tiếp tuyến này gặp đường tròn O ở C và đường tròn (O') ở D. Chứng minh rằng $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$.

VÍ DỤ 5: Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB. Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

DẠNG 2. Giải bài toán định lượng

VÍ DỤ 1: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở A. Tính số đo các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$.

VÍ DỤ 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một tiếp tuyến của đường tròn tại P cắt đường thẳng AB tại T (điểm B nằm giữa O và T). Tính $\widehat{BTP} + 2\widehat{TPB}$.

VÍ DỤ 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của C trên AB.

1. Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCH}$.
2. Giả sử $MA = a$, $MC = 2a$, tính AB và CH.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1: Từ một điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB. Vẽ đường tròn (O') ngoại tiếp $\triangle MAT$. Từ M vẽ tiếp tuyến xy của đường tròn (O'). Chứng minh rằng

1. $MT^2 = MA \cdot MB$.
2. $BT \parallel xy$.

BÀI 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên đường thẳng AB lấy một điểm M (điểm M không thuộc đoạn thẳng AB). Vẽ tiếp tuyến MT của đường tròn (O) và cát tuyến MCD của đường tròn (O'). Chứng minh rằng $MT^2 = MC \cdot MD$.

BÀI 3: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ dây BC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O'). Vẽ dây BD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng

1. $AB^2 = AC \cdot AD$.
2. $\dfrac{BC}{BD} = \sqrt{\dfrac{AC}{AD}}$.

BÀI 4: Cho $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn trên các cạnh AB, BC, CA. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với các tia OA, OB, OC. Chứng minh rằng các điểm M, N, P lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $\triangle ADF$, $\triangle BDE$, $\triangle CEF$.

BÀI 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường tròn (O') tại D. Vẽ đường tròn (I) qua ba điểm A, C, D cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng

1. $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180^\circ$.
2. Tứ giác $BCED$ là hình bình hành.

BÀI 6: Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn ($AB < AC$). Tiếp tuyến tại A cắt đường thẳng BC ở I. Kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng

1. AB là tia phân giác của $\widehat{IAH}$.
2. $IA^2 = IB \cdot IC$.

BÀI 7: Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn ($AB < AC$). Gọi E là điểm đối xứng với B qua A.

1. $\triangle BCE$ là tam giác gì?
2. Gọi D là giao điểm của CE với nửa đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Bx với nủa đường tròn (Bx và A cùng phía với BC). Chứng minh rằng BA là tia phân giác của góc $\widehat{DBx}$.
3. CA cắt BD, Bx theo thứ tự ở I, K. Tứ giác $BKEI$ là hình gì?

BÀI 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ P. Tia PB cắt đường tròn (O') tại Q. Chứng minh AQ song song với tiếp tuyến tại P của đường tròn (O).

BÀI 9: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm I có đường kính BH, nó cắt AB ở M. Vẽ đường tròn tâm K có đường kính CH, nó cắt AC ở N.

1. Tứ giác $AMHN$ là hình gì?
2. Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
3. Vẽ tiếp tuyết Ax của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng Ax song song với MN.

E. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

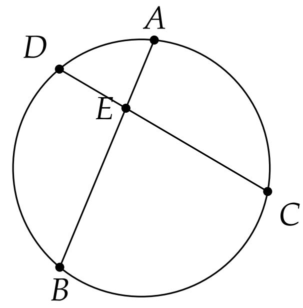
1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

Định lí 1: *Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn có số đo bằng nửa tổng của số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh ấy.*

Ta có minh họa

$$\widehat{AEC} = \widehat{BED} = \frac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\widehat{AED} = \widehat{BEC} = \frac{sđ\overset{\frown}{AD} + sđ\overset{\frown}{BC}}{2}.$$

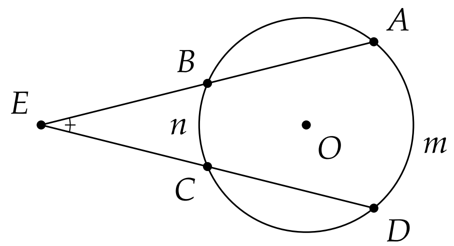


2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

Định lí 2: *Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có số đo bằng nửa hiệu của số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc.*

Ta có minh họa

$$\widehat{AED} = \frac{sđ\overset{\frown}{AmD} - sđ\overset{\frown}{BnC}}{2}.$$



II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Một đường tròn (O) và hai đáy AB, AC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB và AC. Đường thẳng MN cắt dây AB tại E và cắt dây AC tại H. Chứng minh $\triangle AEH$ là tam giác cân.

VÍ DỤ 2: Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AD = DC = CB$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AB. Tính số đo của góc $\widehat{AIB}$ với I là giao điểm của AC và BD.

Nhận xét. *Cách làm trong lời giải của ví dụ trên được hiểu là "Để chứng minh một tam giác là tam giác đều ta đi chứng minh có là tam giác cân và có một góc bằng 60°".*

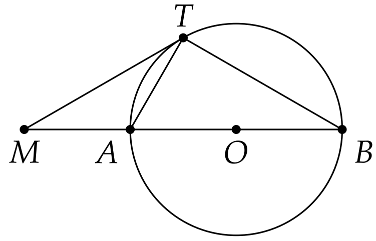
VÍ DỤ 3: Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MB, MC. Vẽ đường kính BOD. Hai đường thẳng CD và MB cắt nhau tại A. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

Nhận xét. *Trong ví dụ trên, ta phải chứng minh $MA = MB$ nhưng $MB = MC$ (tính chất của hai tiếp tuyến) nên ta cần chứng minh $MA = MC$, tức là ta phải chứng minh $\triangle MAC$ cân.*

Khi tính số đo của góc A ta đã thay thế cung $\overset{\frown}{BmD}$ bởi cung $\overset{\frown}{BnD}$ có cùng số đo. Nói chung khi phải tính tổng (hay hiệu) số đo của hai cung nào đó, ta thường dùng phương pháp thay thế một cung bởi một cung khác bằng nó để được hai cung liền nhau (nếu tỉnh tổng) hoặc hai cung có một phần chung (nếu tính hiệu).

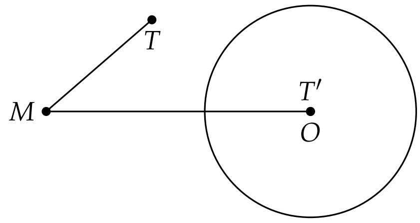
VÍ DỤ 4: Cho đường tròn (O) và hai dây cung bằng nhau AB, AC. Trên cung nhỏ AC lấy điểm M. Gọi I là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = \widehat{ACM}$.

Nhận xét. *Ta có hai trường hợp đặc biệt của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, cụ thể:*



Trường hợp 1: Với MT là tiếp tuyến và AB là đường kính. Khi đó:

$$\begin{aligned}\widehat{TMB} &= \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{TA}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(180^\circ - sđ\overset{\frown}{TA}\right) - sđ\overset{\frown}{TA}\right]\\ &= 90^\circ - sđ\overset{\frown}{TA}\\ &= \frac{1}{2}\left[sđ\overset{\frown}{TB} - \left(180^\circ - sđ\overset{\frown}{TB}\right)\right] = sđ\overset{\frown}{TB} - 90^\circ.\end{aligned}$$



Trường hợp 2: Với MT, MT' là hai tiếp tuyến.

$$\begin{aligned}\widehat{TMT'} &= 180^\circ - sđ\overset{\frown}{TmT'}\\ &= sđ\overset{\frown}{TnT'} - 180^\circ.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 5: Trên một đường tròn, lấy liên tiếp ba cung AC, CD, DB sao cho sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{CD}$ = sđ$\overset{\frown}{DB} = 60^\circ$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại T. Chứng minh rằng:

1. $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$.
2. CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O). Trên cung nhỏ BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M cắt tia AB ở E, đoạn thẳng CM cắt AB ở S. Chứng minh $ES = EM$.

BÀI 2: Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB đi qua tâm (A nằm giữa M và B). Giả sử số đo của cung nhỏ AT bằng 60°. Tính số đo của góc $\widehat{TMB}$.

BÀI 3: Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một diểm S nằm bên trong đường tròn. Chứng minh $\widehat{A} - \widehat{BSM} = 2\widehat{CMN}$.

BÀI 4: Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn tại N cắt đường thẳng AI tại I. Chứng minh rằng:

1. Các tam giác $\triangle INE$ và $\triangle INF$ là tam giác cân.
2. $AI = \dfrac{1}{2}(AE + AF)$.

BÀI 5: Cho đường tròn (O, R) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CN đi qua điểm M. Từ N vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn. Chứng minh rằng:

1. $xy \parallel AC$
2. CN là tia phân giác của góc $\widehat{BCD}$.

BÀI 6: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$, dây này cắt CD tại E. Chứng minh rằng:

1. BM là tia phân giác của góc $\widehat{CBD}$.
2. $MD^2 = ME \cdot MB$.

BÀI 7: Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác của hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau ở E và cắt đường tròn ở F và D. Chứng minh rằng tứ giác $EDAF$ là một hình thoi.

BÀI 8: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn. P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C.

1. Chứng minh $AP \perp QR$.
2. AP cắt CR tại I. Chứng minh $\triangle CPI$ là tam giác cân.

BÀI 9: Cho $\triangle ABC$ nhọn và $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AB, BC, CA. Tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt các đường thẳng BC và DF lần lượt tại M và N. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC với đường thẳng DF và AE.

1. Chứng minh rằng $AE \perp DF$.
2. Chứng minh rằng $MA = MQ, MN = MP$.

BÀI 10: Cho đường tròn (O) đường kính AB, cung $CD = 80^\circ$ nằm cùng phía đối với AB (D thuộc cung BC). Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AD và BC. Tính $\widehat{AEB}, \widehat{AFB}$.

BÀI 11: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M thuộc tia đối của tia BC. Gọi I là giao điểm của MA với đường tròn Chứng minh rằng:

1. $\widehat{AMC} = \widehat{ACI}$.
2. $AI \cdot AM = AC^2$.

BÀI 12: Cho đường tròn (O), đường kính AB vuông góc với dây CD. Qua điểm M thuộc cung AD, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt CD ở I. Gọi E là giao điểm của BM và CD.

1. Chứng minh rằng $IM = IE$.
2. Gọi F là giao điểm của AM và CD. Chứng minh rằng $\widehat{AFC} = \widehat{ABM}$.