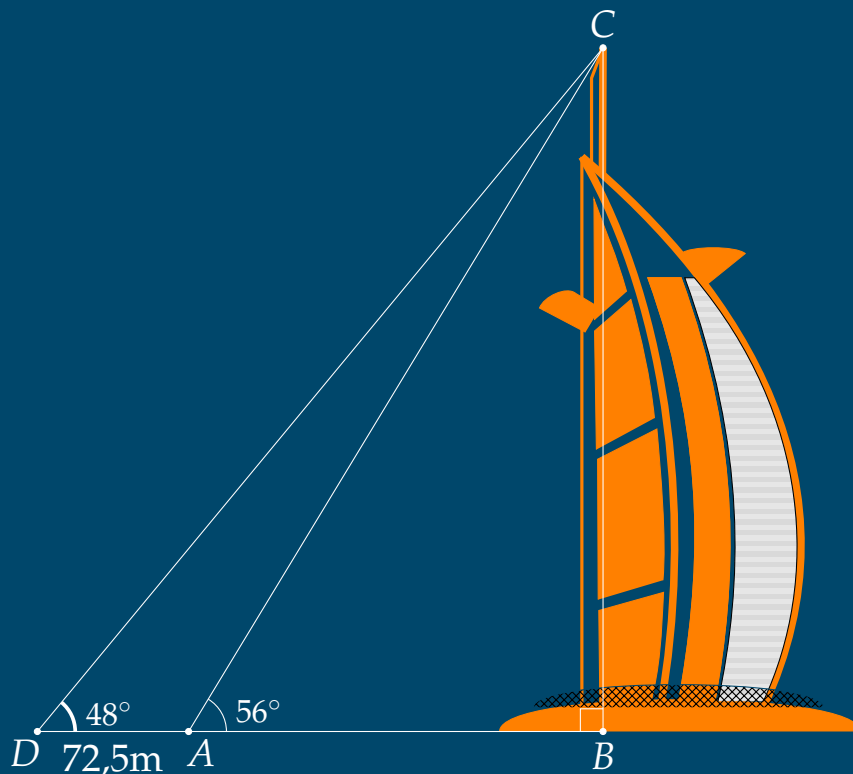


TRẦN CÔNG DŨNG



TÀI LIỆU HỌC TẬP
MÔN TOÁN 9 - TẬP 1

THEO ĐỊNH HƯỚNG ĐỀ THI TP. HCM



TP. HCM - 2022

MỤC LỤC

Chương 1 Căn bậc hai, căn bậc ba	3
A Căn bậc hai	3
I Tóm tắt lý thuyết	3
II Phương pháp giải toán	3
B Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	5
I Tóm tắt lý thuyết	5
II Phương pháp giải toán	5
Dạng 1. Điều kiện để \sqrt{A} có nghĩa	5
Dạng 2. Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = A $	5
Dạng 3. Giải phương trình	6
III Bài tập tự luyện và nâng cao	6
C Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương	8
I Tóm tắt lý thuyết	8
II Các dạng toán	8
III Bài tập tự luyện và nâng cao	9
D Biến đổi đơn giản và rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai	10
I Tóm tắt lý thuyết	10
II Các dạng toán	10
Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào bên trong dấu căn	10
Dạng 2. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn-Phép nhân liên hợp	11
III Bài tập rèn luyện	12

E	Bài tập ôn chương 1	15
	Dạng 1. Rút gọn biểu thức số	15
	Dạng 2. Giải phương trình chứa căn thức đơn giản	16
	Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn thức	17

Chương 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT 21

A	Nhắc lại và bổ sung khái niệm về hàm số	21
I	Tóm tắt lí thuyết	21
II	Các dạng toán	21
	Dạng 1. Tìm giá trị của hàm số, biến số	21
	Dạng 2. Toán thực tế về hàm số	22
B	Hàm số bậc nhất	24
I	Tóm tắt lí thuyết	24
II	Phương pháp giải toán	24
III	Bài tập luyện tập	25
C	Tương giao hai đường thẳng	27
I	Tóm tắt lí thuyết	27
II	Phương pháp giải toán	27
III	Bài tập luyện tập	28
D	Hệ số góc của đường thẳng	29
I	Tóm tắt lí thuyết	29
II	Phương pháp giải toán	29
	Dạng 1. Hệ số góc của đường thẳng	30
	Dạng 2. Lập phương trình đường thẳng biết hệ số góc	30
III	Bài tập tự luyện	31

E	Bài tập ôn chương 2	31
---	---------------------	----

Chương 1 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 37

A	Một số hệ thức về cạnh và đường cao của tam giác vuông	37
---	--	----

I	Tóm tắt lí thuyết	37
---	-------------------	----

II	Phương pháp giải toán	37
----	-----------------------	----

	Dạng 1. Giải các bài toán định lượng	38
--	--------------------------------------	----

	Dạng 2. Giải các bài toán định tính	38
--	-------------------------------------	----

III	Bài tập tự luyện	39
-----	------------------	----

B	Tỉ số lượng giác	41
---	------------------	----

I	Tóm tắt lí thuyết	41
---	-------------------	----

II	Phương pháp giải toán	41
----	-----------------------	----

III	Bài tập tự luyện	41
-----	------------------	----

C	Ứng dụng thực tế hệ thức lượng trong tam giác vuông	43
---	---	----

Chương 2 ĐƯỜNG TRÒN 49

A	Sự xác định đường tròn	49
---	------------------------	----

I	Tóm tắt lí thuyết	49
---	-------------------	----

B	Đường kính và dây của đường tròn	50
---	----------------------------------	----

C	Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây	50
---	--	----

I	Bài tập rèn luyện	50
---	-------------------	----

D	Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn - Dấu hiệu nhận biết đường tròn	52
---	---	----

I	Tóm tắt lí thuyết	52
---	-------------------	----

A. CĂN BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai của một số

Định nghĩa 1. Căn bậc hai số học của một số $a \geq 0$ là một số x không âm mà bình phương của nó bằng a . Ký hiệu \sqrt{a} .

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}, \text{ với } a \geq 0.$$

Tổng quát trên \mathbb{R} :

1. Mọi số dương $a > 0$ có hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

$\sqrt{a} > 0$ gọi là căn bậc hai số học hay còn gọi là căn bậc hai dương của a .

$-\sqrt{a} < 0$ gọi là căn bậc hai âm của a .

2. Số 0 có căn bậc hai duy nhất là 0.

3. Số âm không có căn bậc hai.

2. So sánh các căn bậc hai số học

Định lý 1: Với hai số a, b không âm, ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Tính $\sqrt{16}$; $\sqrt{1,44}$; $\sqrt{(-8)^2}$.

Rèn luyện 1: Tính

a) $\sqrt{121}$.

b) $-\sqrt{144}$.

c) $\sqrt{0,25}$.

d) $-\sqrt{0,0016}$.

e) $\sqrt{3^4}$.

f) $-\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

g) $\sqrt{\frac{25}{49}}$.

h) $\sqrt{(-7)^2}$.

i) $\sqrt{\sqrt{16}}$.

j) $-\sqrt{4\sqrt{81}}$.

VÍ DỤ 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $\sqrt{0,16} + \sqrt{\frac{4}{25}}$.

b) $\sqrt{3\frac{1}{16}} - \sqrt{0,36}$.

Rèn luyện 2: Tính:

a) $3\sqrt{144} - 5\sqrt{169} + \frac{1}{2}\sqrt{256}$

b) $\sqrt{7\frac{1}{9}} - 0,5\sqrt{144} - \frac{3}{2}\sqrt{169}$

c) $\left(\frac{3}{4}\sqrt{256} - \frac{1}{2}\sqrt{289}\right) : \sqrt{36}$

d) $\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{4}{4}}\right) : \sqrt{\frac{4}{25}}$

e) $2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + 4\sqrt{3}$

f) $-8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\right)$

VÍ DỤ 3: Tìm x , biết

a) $x^2 = \frac{16}{9}$.

b) $(x - 1)^2 = \frac{1}{9}$.

Rèn luyện 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $x^2 - 7 = 0$

c) $x^2 - \sqrt{16} = 0$

d) $4x^2 - 7 = 13$

e) $(x + 3)^2 = 6x + 11$

f) $x^2 + 2x = 15$

VÍ DỤ 4: So sánh các số 5 và $\sqrt{23}$.**Rèn luyện 4:** So sánh các căn bậc hai sau:

a) 6 và $\sqrt{41}$

b) $\sqrt{19}$ và 4

c) $\sqrt{21}$ và 5

d) $5\sqrt{3} - 4$ và $3\sqrt{5}$

e) $\sqrt{26} + \sqrt{17} + \sqrt{10} + \sqrt{5} + 1$ và 15

B. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Điều kiện để \sqrt{A} có nghĩa
 \sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.
- Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$
$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Điều kiện để \sqrt{A} có nghĩa

- \sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.
- $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $A > 0$.
- $\frac{1}{A}$ có nghĩa khi và chỉ khi $A \neq 0$.

VÍ DỤ 1: Tìm điều kiện của x để $\sqrt{2x+4}$ tồn tại.

VÍ DỤ 2: Tìm điều kiện của x để $\sqrt{-2x+1}$ tồn tại.

VÍ DỤ 3: Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{\sqrt{5x+10}}$ có nghĩa

Rèn luyện 1: Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau có nghĩa

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $\sqrt{5x}$. | b) $\sqrt{3x+7}$. | c) $\sqrt{5-x}$. |
| d) $\frac{-5}{\sqrt{3-2x}}$. | e) $\sqrt{\frac{4}{3-2x}}$. | f) $\sqrt{\frac{-3}{1+4x}}$. |
| g) $\sqrt{-7x^2}$. | h) $\sqrt{10+x^2}$. | i) $\sqrt{x^2-1}$. |

DẠNG 2. Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

VÍ DỤ 1: Tính:

a) $\sqrt{(0,09)^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

Rèn luyện 1: Rút gọn:

1) $\sqrt{(3 - \sqrt{11})^2}$

2) $\sqrt{(\sqrt{17} - 4)^2}$

3) $\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$

4) $\sqrt{(4 - \sqrt{17})^2} - \sqrt{(\sqrt{17} - 3)^2}$

5) $\sqrt{(5 - \sqrt{6})^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2}$

6) $\sqrt{(17 + \sqrt{47})^2} - \sqrt{(7 - \sqrt{47})^2}$

VÍ DỤ 2: Tính:

a) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

Rèn luyện 2: Rút gọn:

1) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

3) $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$

4) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} - \sqrt{32 + 10\sqrt{7}}$

5) $\sqrt{31 - 10\sqrt{6}} - \sqrt{(3 - 2\sqrt{6})^2}$

6) $\sqrt{28 - 16\sqrt{3}} - \sqrt{(4 - 3\sqrt{3})^2}$

DẠNG 3. Giải phương trình

VÍ DỤ 1: Tìm x , biết

a) $\sqrt{(x + 1)^2} = 9;$

b) $\sqrt{(x - 3)^2} = 3 - x.$

Rèn luyện 1: Tìm x , biết

a) $\sqrt{(x - 2)^2} = 16;$

b) $\sqrt{(x + 3)^2} = 25;$

c) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 100;$

d) $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = 169;$

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN VÀ NÂNG CAO

BÀI 1: Tìm tập xác định của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{5x + 40};$

b) $B = \frac{2x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x^2 - 4}};$

c) $C = \frac{\sqrt{2x + 4}}{x^2 - 6x + 9};$

d) $D = \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 123}}.$

BÀI 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3}}{x^2 - 3};$

b) $B = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x - 2}};$

c) $C = \frac{\sqrt{(x - 4)^2}}{x^2 - 5x + 4};$

d) $D = \frac{3x + 1}{\sqrt{9x^2 + 6x + 1}}.$

BÀI 3: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x + 2\sqrt{x+1}} = 3;$

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 1 - 2x;$

c) $\sqrt{x - 2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x} - 1;$

d) $\sqrt{x - 2\sqrt{x-2} - 1} = \sqrt{x-2} - 1.$

BÀI 4: Cho biểu thức $A = 6x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

1. Rút gọn biểu thức A ;
2. Tính giá trị biểu thức A với $x = 5$;
3. Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 1$.

BÀI 5: Cho biểu thức $A = x + 8 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

1. Rút gọn biểu thức A ;
2. Tính giá trị biểu thức A với $x = -1$;
3. Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 0$.

BÀI 6: Tìm x , biết:

a) $\sqrt{2x-1} + 1 = 2x;$

b) $\sqrt{3x-2} + 4 = 6x.$

BÀI 7: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = 2;$

b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} = 0;$

BÀI 8: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 1;$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x + 5.$

BÀI 9: Giải phương trình:

a) $5\sqrt{x-2} = x + 2;$

b) $3\sqrt{2x-1} = 2x - 5.$

BÀI 10: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $2\sqrt{x^2} + 2x - 5$ với $x \geq 0$

2) $3\sqrt{(x-2)^2} + 4x - 1$ với $x < 2$

3) $\sqrt{(3-\sqrt{x})^2} + 2\sqrt{x}$ với $x > 9$

4) $\sqrt{(x-4)^2} - \sqrt{(x-3)^2}$ với $x > 4$

BÀI 11: Tính:

1) $(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2) - \sqrt{5}(\sqrt{5} - 5)$

2) $(3 + \sqrt{5})^2 - 8\sqrt{5} - 14$

3) $(5 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) - (1 - 2\sqrt{3})^2$

4) $(2 - 3\sqrt{5})(2 + 3\sqrt{5})$

BÀI 12: So sánh các căn bậc hai sau:

1) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$

2) $3\sqrt{10}$ và $4\sqrt{5}$

3) $-3\sqrt{10}$ và $-4\sqrt{5}$

4) $\sqrt{\sqrt{3}}$ và $\sqrt{\sqrt{2}}$

5) $\sqrt{\sqrt{63}}$ và $2\sqrt{2}$

6) $\sqrt{2009} - \sqrt{2007}$ và $\sqrt{2011} - \sqrt{2009}$

7) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ và 10

C. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các định lý

Định lý 1: Với $A \geq 0, B \geq 0$ thì $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

Định lý 2: Với $A \geq 0, B > 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

2. Khai phương một tích

Muốn khai phương một tích các biểu thức không âm ta có thể khai phương từng biểu thức rồi nhân kết quả với nhau.

3. Nhân các căn thức bậc hai

Muốn nhân các căn thức bậc hai của các biểu thức không âm ta có thể nhân các biểu thức dưới dấu căn với nhau rồi lấy căn bậc hai của kết quả đó.

4. Khai phương một thương

Muốn khai phương một thương $\frac{A}{B}$ của hai biểu thức $A \geq 0, B > 0$, ta có thể khai phương lần lượt biểu thức bị chia A và biểu thức chia B . Sau đó lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

5. Chia hai căn thức bậc 2

Muốn chia hai căn thức bậc hai của hai biểu thức không âm A cho căn thức bậc hai của biểu thức dương B , ta có thể chia biểu thức A cho biểu thức B rồi lấy căn bậc hai của thương đó.

II. CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1: Sử dụng quy tắc khai phương một tích, tính

a) $\sqrt{25 \cdot 49}$.

b) $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 36}$.

c) $\sqrt{27 \cdot 48}$.

d) $\sqrt{81a^2}$.

Rèn luyện 1: Tính

a) $\sqrt{49 \cdot 100}$.

b) $\sqrt{2^4 \cdot (-9)^2}$.

c) $\sqrt{72 \cdot 32}$.

d) $\sqrt{12,1 \cdot 490}$.

Rèn luyện 2: Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{27 \cdot 48(a-3)^2}$.

b) $\sqrt{48 \cdot 75a^2}$.

Rèn luyện 3: Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$, với $a \geq 3$.

b) $\frac{1}{a-b} \sqrt{a^6(a-b)^2}$, với $a < b < 0$.

VÍ DỤ 2: Sử dụng quy tắc nhân các căn thức bậc hai, tính

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$.

b) $\sqrt{1,1} \cdot \sqrt{44} \cdot \sqrt{10}$.

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$.

d) $\sqrt{27a} \cdot \sqrt{3a}$, với $a > 0$.

Rèn luyện 4: Thực hiện phép tính

a) $A = \sqrt{72} \cdot \sqrt{18}$.

b) $B = \sqrt{\frac{25}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}$.

c) $C = \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2} \right) \sqrt{2}$.

Rèn luyện 5: Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{9}{a}}$, với $a > 0$.

b) $\sqrt{8a^2} \cdot \sqrt{18a^4}$, với $a < 0$.

Rèn luyện 6: Thực hiện phép tính

1. $A = (\sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{2}) \sqrt{2}$.

2. $B = (\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}})^2$.

3. $C = (3\sqrt{5} + \sqrt{2})(3\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

VÍ DỤ 3: Thực hiện phép tính

a) $A = \sqrt{72} : \sqrt{2}$

b) $B = (\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$

c) $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}$.

VÍ DỤ 4: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}}$

b) $B = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

VÍ DỤ 5: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a^6}{b^3}}$, với $b > 0$.

b) $B = b^5 \sqrt{\frac{a^2+6a+9}{b^8}}$.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN VÀ NÂNG CAO

D. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn

Ta có: $\sqrt{A^2B} = |A| \sqrt{B}$, với $B \geq 0$.

2. Đưa một thừa số vào trong dấu căn

Ta có: $|A| \sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$, với $B \geq 0$.

Ta có hai trường hợp:

- Nếu $A \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$, với $B \geq 0$.
- Nếu $A < 0$ thì $A\sqrt{B} = -|A| \sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$, với $B \geq 0$.

3. Khử mẫu của biểu thức lấy dấu căn

Ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{A \cdot B}$, với $A \cdot B \geq 0, B \neq 0$.

4. Trục căn thức ở mẫu, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

- Phân tích nhân tử và mẫu ra thừa số chung chứa căn rồi rút gọn thừa số đó.
- Nhân tử và mẫu với thừa số thích hợp để làm mất căn thức mẫu. Có các dạng cơ bản sau:

$$\checkmark \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0).$$

$$\checkmark \frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B})} = \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{A - B}, \text{ với } A > 0, B > 0, A \neq B.$$

$$\checkmark \frac{1}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B})} = \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{A - B}, \text{ với } A > 0, B > 0, A \neq B.$$

Hai phép biến đổi dạng 2 và dạng 3 gọi là phép nhân liên hợp.

5. Rút gọn biểu thức chứa căn

Ta thực hiện phối hợp các phép biến đổi đơn giản các biểu thức chứa căn

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào bên trong dấu căn

VÍ DỤ 1: Viết gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{18}$

b) $B = \sqrt{25 \cdot 90}$

c) $C = \sqrt{75 \cdot 54}$

d) $D = \sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{75}$.

Rèn luyện 1: Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt{27}$

c) $\sqrt{50} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{75} - 2\sqrt{3}$.

e) $3\sqrt{8} - \sqrt{18} - 5\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{50}$

VÍ DỤ 2: Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{2}{a-2} \cdot \sqrt{2a^8(a^2-4a+4)}$

Rèn luyện 2: Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = |a|$, với $a > b$.

VÍ DỤ 3: So sánh các cặp số sau

a) 5 và $3\sqrt{3}$;

b) $4\sqrt{5}$ và $6\sqrt{3}$.

Rèn luyện 3: Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần: $6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{7}$.

DẠNG 2. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn-Phép nhân liên hợp

VÍ DỤ 1: Khử mẫu các biểu thức lấy căn sau

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

Rèn luyện 1: Khử mẫu của các biểu thức lấy căn sau - Rút gọn

a) $\sqrt{\frac{11}{3}}$.

b) $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

c) $\sqrt{\frac{4}{27}}$.

d) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$.

e) $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{5})^2}{75}}$.

f) $\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{162}}$.

g) $\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{27}}$.

h) $xy\sqrt{\frac{x}{y}}$.

i) $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}$.

VÍ DỤ 2: Trục căn thức ở mẫu các biểu thức sau

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Rèn luyện 2: Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{11}{2\sqrt{3}}$

c) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$

d) $\frac{1}{3\sqrt{20}}$

e) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

f) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

g) $\frac{a}{2\sqrt{a}-1}$

h) $\frac{9-x}{\sqrt{x}+3}$

i) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$

Rèn luyện 3: Trục căn thức ở mẫu của các phân thức rồi rút gọn:

a) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

e) $\frac{4}{\sqrt{5}-3} - \frac{1}{\sqrt{5}+2}$

f) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}}$

h) $\frac{7}{3-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

i) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{4}{1-\sqrt{3}}$

j) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

k) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

l) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} - \frac{6-2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1: Tính:

1) $3\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$

4) $2\sqrt{2} + \sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{450} + \frac{2}{7}\sqrt{392}$

2) $\sqrt{1100} - 7\sqrt{44} + 2\sqrt{176} - \sqrt{1331}$

5) $-2\sqrt{50} + \sqrt{18} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$

3) $\sqrt{20} - 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{45}$

6) $2\sqrt{8\sqrt{3}} + 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$

BÀI 2: Khử mẫu các biểu thức lấy căn rồi rút gọn biểu thức:

1) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{15}$

2) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}$

3) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$.

4) $5\sqrt{x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}} - x\sqrt{\frac{4}{x}}$ với $x > 0$.

5) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x}$ với $x > 0$.

6) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$ với $a, b > 0$.

BÀI 3: Rút gọn

1) $\frac{3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}}{3 - \sqrt{15}}$.

2) $\frac{5\sqrt{6} - 6\sqrt{5}}{2\sqrt{15} - 5\sqrt{2}}$.

3) $\frac{14 - 6\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3}$.

4) $\frac{9 - 4\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}$.

5) $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 + 4\sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

6) $\frac{8\sqrt{6} - (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$.

7) $\frac{12\sqrt{6} - (\sqrt{6} + 3)^2}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$.

8) $\frac{(\sqrt{5} + 2)^2 - 8\sqrt{5}}{5\sqrt{5} - 8}$.

BÀI 4: Rút gọn

1) $\frac{-2}{\sqrt{3} - 1}$.

2) $\frac{5}{1 - \sqrt{6}}$.

3) $\frac{2 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$.

4) $\frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$.

5) $\frac{x + a\sqrt{x}}{a\sqrt{x}}$.

6) $\frac{2x}{4 + \sqrt{x}}$.

7) $\frac{6}{1 - \sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 1}$.

8) $\frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{6}{2 - \sqrt{10}}$.

9) $\frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

10) $\frac{7}{3\sqrt{2} - 5} - \frac{\sqrt{18} - 3\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 1}$.

11) $\frac{6}{\sqrt{5} - 1} + \frac{7}{1 - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

12) $\frac{5}{3 - \sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

13) $\frac{\sqrt{12} - 6}{\sqrt{8} - \sqrt{24}} - \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{7} - 1}$.

BÀI 5: Với các biểu thức đã cho là có nghĩa. Rút gọn:

1) $\frac{4\sqrt{x} - x - 4}{x - 4}$.

2) $\frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}$.

3) $\frac{x - 9}{x\sqrt{x} - 27}$.

4) $\frac{x - \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 2}{x - 1}$.

5) $\frac{x - 4}{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}$.

6) $\frac{\sqrt{xy} - 3\sqrt{y}}{x\sqrt{y} - 5\sqrt{xy} + 6\sqrt{y}}$.

7) $\left(2 + \frac{a - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 2}\right) \left(2 + \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$.

8) $\left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + 2\right) \left(2 - \frac{\sqrt{x} + x}{1 + \sqrt{x}}\right)$.

$$9) \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

$$11) \left(\frac{y\sqrt{y} - x\sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \sqrt{xy} \right) \left(\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \right)^2.$$

$$10) \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab}.$$

BÀI 6: Với các biểu thức đã cho đã có nghĩa. Hãy rút gọn:

$$1) \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x} - 4} - \frac{4\sqrt{x}}{x - 4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 \right).$$

$$2) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{5\sqrt{x} - 3}{x - 1} \right) \cdot \left(2 - \frac{4}{\sqrt{x} + 3} \right).$$

$$3) \left(\frac{2\sqrt{x} - 4}{x - 4\sqrt{x} + 4} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right).$$

$$4) \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 4}{6\sqrt{x} - 6x}.$$

$$5) \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{2\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{9 - x}.$$

$$6) \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right).$$

$$7) \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a + 1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1} \right).$$

$$8) \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6}.$$

$$9) \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{x + 5}{x - \sqrt{x} - 2}.$$

$$10) \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{x^3} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right).$$

$$11) \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

E. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 1

DẠNG 1. Rút gọn biểu thức số

BÀI 1: Rút gọn các biểu thức sau

$$a) 2\sqrt{121} - 3\sqrt{36} + \frac{1}{2}\sqrt{25}$$

$$b) \frac{3}{2}\sqrt{64} + 2\sqrt{256} - 6\sqrt{400} + \sqrt{4}$$

$$c) 36\sqrt{\frac{49}{144}} - \frac{2}{5}\sqrt{225} - 3\sqrt{\sqrt{81}}$$

$$d) \sqrt{16} - 2\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \sqrt{72}$$

$$e) 6\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 5\sqrt{75} - 7\sqrt{108}$$

$$f) -\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - 6\sqrt{80} - \frac{1}{5}\sqrt{125}$$

$$g) 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$$

$$h) \sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$$

BÀI 2: Rút gọn các biểu thức sau

$$a) \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + 2)^2}$$

$$b) \sqrt{(5 - 2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2}$$

$$c) \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2}$$

$$d) \sqrt{(\sqrt{11} - 3\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{11} - \sqrt{2})^2}$$

$$e) \sqrt{(4 - \sqrt{7})^2} \sqrt{(4 + \sqrt{7})^2}$$

$$f) \left(-\sqrt{5} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \sqrt{27 - \sqrt{560}}$$

$$g) \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$$

$$h) \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$$

$$i) \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$j) \sqrt{47 + 6\sqrt{10}} - \sqrt{23 - 6\sqrt{10}}$$

$$k) \sqrt{46 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$$

$$l) \sqrt{13 - \sqrt{160}} - \sqrt{53 + 4\sqrt{90}}$$

$$m) (\sqrt{3} - 2) \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$n) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} (2 + \sqrt{5})$$

$$o) \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} (4 - 3\sqrt{2})$$

$$p) (\sqrt{10} - 6) \sqrt{23 + 6\sqrt{10}}$$

$$q) \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$$

BÀI 3: Rút gọn các biểu thức sau

$$a) \sqrt{2} (\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{2})$$

$$b) \sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{6}$$

$$c) \sqrt{15 + 5\sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

$$d) \sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}} - 2\sqrt{4 - \sqrt{7}}$$

$$e) \sqrt{2 - \sqrt{3}} (\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$f) \sqrt{7 - \sqrt{33}} (\sqrt{22} + \sqrt{6})$$

$$g) (\sqrt{10} + \sqrt{2}) (6 - 2\sqrt{5}) \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

$$h) (\sqrt{10} + \sqrt{6}) (4 - \sqrt{15}) \sqrt{4 + \sqrt{15}}$$

$$i) \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} (7 + 3\sqrt{5}) (3\sqrt{2} + \sqrt{10})$$

BÀI 4: Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{18}+2\sqrt{3}}$

c) $\frac{2}{\sqrt{5}-2} + \frac{-2}{\sqrt{5}+2}$

d) $\frac{3}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

e) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

f) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2}$

g) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{2}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

h) $\frac{12}{\sqrt{5}+1} - \frac{4}{\sqrt{5}+2} + \frac{20}{3+\sqrt{5}}$

i) $\frac{15}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}} - \frac{2}{1-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

j) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} - \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

k) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{20}-3\sqrt{10}}{3-\sqrt{2}}$

l) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} + \frac{6+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

m) $\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} + \frac{6+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

n) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

DẠNG 2. Giải phương trình chứa căn thức đơn giản

BÀI 1: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2-2x+1} = 1.$

2) $\sqrt{x^2-4x+4} = 1.$

3) $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5.$

4) $\sqrt{4(1-2x+x^2)} - 6 = 0.$

5) $\sqrt{9x^2} = 2x+1.$

6) $\sqrt{9-6x+x^2} = x.$

7) $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-1.$

8) $\sqrt{x^2+4x+4} = 2x-1.$

9) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 4x+3.$

10) $\sqrt{4x^2+1-4x} = \sqrt{x^2+16+8x}.$

11) $\sqrt{9x^2+6x+1} = \sqrt{x^2+6-2\sqrt{6}x}.$

BÀI 2: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2x-5} = 7.$

2) $\sqrt{2x-3} = 13.$

3) $3 + \sqrt{x-2} = 4.$

4) $\sqrt{x^2-7} = 2.$

5) $2 - \sqrt{x^2-1} = 0.$

6) $3 - \sqrt{x^2+3} = 0.$

7) $\sqrt{x(x-2)} - \sqrt{3} = 0.$

8) $3 - \sqrt{-x(x+6)} = 0.$

9) $\sqrt{2x^2+7} = 2-x.$

10) $\sqrt{3-x} = 3x-5.$

11) $\sqrt{4x-3} = x-2.$

12) $3x + \sqrt{5x+4} = 0.$

13) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-1}.$

14) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+3} = 0.$

15) $\sqrt{6-x} - \sqrt{-3x} = 0.$

16) $\sqrt{x^2-5} = \sqrt{4x-9}.$

17) $\sqrt{x^2-2x-4} = \sqrt{2-x}.$

18) $\sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{x+1}.$

BÀI 3: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{9x} + \sqrt{4x} - \sqrt{16x} = 3.$

2) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 8.$

3) $\sqrt{3x} - \sqrt{12x} + 1 = \sqrt{27x} - 11.$

4) $\sqrt{9x+9} - 2\sqrt{x+1} = 4.$

5) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4.$

6) $\sqrt{4x+8} - \sqrt{9x+18} - \sqrt{x+2} = -\sqrt{x+7}.$

7) $\sqrt{9x+18} - \sqrt{9x+9} = -\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}.$

8) $\sqrt{50x+25} + \sqrt{9x+9} = \sqrt{16x+16} + \sqrt{32x+16}.$

DẠNG 3. Rút gọn biểu thức chứa căn thức

BÀI 1: Chứng minh

1. $\left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy}\right) \div (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 1$ với $x, y > 0$;

2. $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{xy + \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} + 1} = x + y$ với $x, y > 0$;

3. $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right) \div \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} + 1$ với $x > 0$;

4. $\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 4x$ với $x > 0$ và $x \neq 1$;

5. $\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x - y} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = 1$ với $x, y > 0$ và $x \neq y$;

6. $\left(\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \div \frac{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}(y - x)} = \sqrt{y} - \sqrt{x}$ với $x, y > 0$ và $x \neq y$;

7. $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$;

8. $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a} - 2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b - a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$;

BÀI 2: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y

1. $A = \left(\frac{1}{2 + 2\sqrt{x}} + \frac{1}{2 - 2\sqrt{x}} - \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$;

2. $B = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x - y} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$ với $x, y > 0$ và $x \neq 0$;

ĐS: a) 1 b) 1

DẠNG 4: RÚT GỌN VÀ ĐIỀU KIỆN CÓ NGHĨA

BÀI 3: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) \div \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right).$

- a) Tìm x để A có nghĩa; b) Rút gọn A ; c) Tính A với $x = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$;

ĐS: a) $-1 < x < 1$ b) $\sqrt{1-x}$ c) $\sqrt{3} - 1$

BÀI 4: Cho biểu thức $B = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{y-x} \right) \div \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

- a) Rút gọn B ; b) Chứng minh $B \geq 0$; c) So sánh B với \sqrt{B} ;

ĐS: a) $\frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}$ b) $B \geq 0$ c) $B \leq \sqrt{B}$

BÀI 5: Cho biểu thức $C = \left(\frac{2+\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}} - \frac{2-\sqrt{a}}{2+\sqrt{a}} - \frac{4a}{a-4} \right) \div \left(\frac{2}{2-\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}+3}{2\sqrt{a}-a} \right)$.

- a) Rút gọn C ; b) Tính giá trị của a để $C > 0$;
c) Tìm giá trị của a để $C = -1$;

ĐS: a) $\frac{4a}{\sqrt{a}-3}$ b) $a > 9$ c) $a = \frac{9}{16}$

BÀI 6: Cho biểu thức $D = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

- a) Rút gọn D ; b) Tìm x để $D < 1$;
c) Tìm giá trị nguyên của x để $D \in \mathbb{Z}$;

ĐS: a) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ b) $\begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 4 \end{cases}$ c) $x \in \{16; 25; 49\}$

BÀI 7: Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \div \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$.

- Rút gọn P ;
- Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.
- Tìm giá trị của x thỏa mãn $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$;

ĐS: a) $\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$ c) 4

BÀI 8: Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) \div \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$.

- a) Tìm giá trị của x để P xác định? b) Rút gọn P ;
c) Tìm x sao cho $P > 1$;

ĐS: a) $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$ b) $\frac{4x}{\sqrt{x}-3}$ c) $x > 9$.

BÀI 9: Cho biểu thức $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) \div \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.

- a) Tìm giá trị của x để C xác định. b) Tìm x sao cho $C < -1$.

$$\text{ĐS: a) } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9. \end{cases} \quad \text{b) } x > 16.$$

BÀI 10: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right) \div \left(\frac{\sqrt{x}-4}{1-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm x để $P < 1$.

c) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{ĐS: a) } \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}. \quad \text{b) } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases} \quad \text{c) } x = 0.$$

A. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số và đồ thị

Định nghĩa 1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x sao cho mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x , x được gọi là biến số. Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc cho bởi công thức $y = f(x)$.

2. Đồ thị của hàm số

Định nghĩa 2. Đồ thị của hàm số là tập hợp các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng của $(x, f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ.


3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Định nghĩa 3.

- Hàm số $y = f(x)$ là hàm số **đồng biến** trên \mathbb{R} nếu khi x tăng thì y cũng tăng
- Hàm số $y = f(x)$ là hàm số **nghịch biến** trên \mathbb{R} nếu khi x tăng thì y giảm.

II. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Tìm giá trị của hàm số, biến số

 VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y = f(x) = 3x - 1$

- Tính $f(-2); f(8); f(0); f\left(\frac{2}{3}\right)$.
- Tính các giá trị của x ứng với $y = -1; y = 2$.

 Rèn luyện 1: Cho hàm số $y = f(x) = |2x - 3|$.

- Tính $f(-2); f(8)$.
- Tính các giá trị của x ứng với $y = -1; y = 3$.

 Rèn luyện 2: Cho hàm số $y = f(x) = 2x + 9$.

a) Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ vào bảng sau.

x	-3	-1	2	6	
$y = f(x)$					27

b) Xác định $f(-8), f(7)$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = 3x - 1$. Tìm các giá trị của x sao cho

a) y nhận giá trị âm.

b) y nhận giá trị lớn hơn 5.

Rèn luyện 3: Cho hàm số $y = 2x - 6$. Tìm các giá trị của x sao cho

a) y nhận giá trị dương.

b) y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

DẠNG 2. Toán thực tế về hàm số

VÍ DỤ 1: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức: $G(x) = 0,024(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tính nồng độ giảm huyết áp của bệnh nhân sau khi tiêm 10mg thuốc? (kết quả làm tròn tới 1 chữ số thập phân).

VÍ DỤ 2: Điện áp V (đơn vị V) yêu cầu cho một mạch điện được cho bởi công thức $V = \sqrt{P \cdot R}$, trong đó P là công suất (đơn vị W) và R là điện trở trong (đơn vị Ω).

1. Cần điện áp bao nhiêu để thắp sáng 1 bóng đèn A có công suất $100W$ và điện trở trong của bóng đèn là 110Ω ?

2. Bóng đèn B có điện áp bằng $110V$, điện trở trong là 88Ω có công suất lớn hơn bóng đèn A không? Giải thích?

Rèn luyện 1: Để chuyển đổi liều thuốc dùng theo độ tuổi, các dược sĩ dùng công thức sau: $c = 0,0417D(a + 1)$, trong đó: D là liều dùng cho người lớn (theo đơn vị mg) và a là tuổi của em bé, c là liều dùng cho em bé. Với loại thuốc có liều dùng cho người lớn là $D = 200mg$ thì với em bé 2 tuổi sẽ có liều dùng thích hợp là bao nhiêu?

Rèn luyện 2: Khi nuôi cá trong hồ, các nhà sinh vật học đã ước tính rằng: Nếu trên mỗi mét vuông hồ cá có n con cá thì khối lượng trung bình của mỗi con cá sau một vụ cân nặng $T = 500 - 200n(gam)$. Sau khi nuôi vụ đầu tiên thì cân nặng trung bình mỗi con cá là $200 gam$. Biết rằng diện tích của hồ là $150 m^2$. Hãy tính số lượng cá được nuôi trong hồ

Rèn luyện 3: Thời gian t (được tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy Bungee trên cao cách mặt nước d (tính bằng m) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức: $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$. Tìm thời gian một người nhảy Bungee từ vị trí cao cách mặt nước $108 m$ đến khi chạm mặt nước?

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1: Hàm số $y = f(x) = \frac{36}{x}$.

1. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số $y = f(x)$ vào bảng sau

x	-9	-6	3	12	
$y = f(x)$					1

2. Xác định $f(-12), f(72)$.

BÀI 2: Cho hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 9$.

- Tính $f(-4), f(-2), f(0), f(1), f(5)$.
- Tính các giá trị của x ứng với $y = -8, y = -5, y = 0, y = -10$.

BÀI 3: Cho hàm số $y = 6 - 5x$. Tìm các giá trị của x sao cho

- y nhận giá trị âm.
- y nhận giá trị lớn hơn 1.

BÀI 4: Cách đây hơn một thế kỷ, nhà khoa học người Hà Lan Hendrich Lorentz (1853 – 1928) đưa ra công thức tính số cân nặng lí tưởng của con người theo chiều cao như sau : $M = 1 - 100 - \frac{T - 150}{N}$ (công thức Lorentz) Trong đó :

- M là số cân nặng lí tưởng tính theo kilogam.
 - T là chiều cao tính theo centimet.
 - $N = 4$ với nam giới và $N = 2$ với nữ giới.
- Bạn An, là nam giới, có chiều cao 1,6m. Hỏi cân nặng của bạn nên là bao nhiêu kg để đạt lí tưởng ?
 - Với chiều cao bằng bao nhiêu thì số cân nặng lí tưởng của nam giới và nữ giới bằng nhau ?

BÀI 5: Một hình chữ nhật có kích thước 30×20 cm. Người ta tăng kích thước của hình chữ nhật thêm x cm. Khi đó chu của hình chữ nhật được cho bởi hàm số bậc nhất $P = 4x + 100$

- Cho biết hàm số đồng biến hay nghịch biến trên \mathbb{R} ? Vì sao?
- Hãy tính chu vi hình chữ nhật khi tăng mỗi kích thước 10cm.

BÀI 6: Ở độ cao h (m) bạn có thể nhìn thấy đường chân trời cách xa V (km), những đại lượng này liên hệ với nhau theo công thức $V = 3,5\sqrt{h}$

- Một người có thể nhìn thấy đường chân trời cách 392 km từ cửa sổ máy bay, hỏi máy bay đó đang ở độ cao bao nhiêu?
- Một người đang đứng ở trên đỉnh Hoàng Liên Sơn 3143 m (cao nhất Việt Nam) thì có thể nhìn thấy đường chân trời cách đó bao nhiêu km?

BÀI 7: Thả một vật nặng từ trên cao xuống, chuyển động của vật được gọi là vật rơi tự do. Biết rằng quãng đường đi của vật được cho bởi công thức $s = 4,9t^2$. Với s là quãng đường rơi của vật tính bằng mét; t là thời gian rơi tính bằng giây.

- Nếu thả vật từ độ cao 122,5 m thì sau bao lâu vật chạm đất?
- Hãy tính quãng đường vật rơi trong giây thứ tư?

B. HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, với $a \neq 0$, trong đó a và b là các số thực xác định.

⚠ Nếu $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ là hàm số biểu thị sự tương quan tỷ lệ thuận.

Tính chất 1. Ta có:

- ☑ Hàm số $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$.
- ☑ Trong tập xác định \mathbb{R} , hàm số $y = ax + b$
 - Đồng biến nếu $a > 0$.
 - Nghịch biến nếu $a < 0$.

2. Cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

Vì đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng nên muốn vẽ ta chỉ cần xác định hai điểm phân biệt bất kỳ trên đường thẳng đó.

⚠ Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b, a \neq 0$:

- ☑ Ta nên chọn hai điểm có tọa độ chẵn.
- ☑ Thông thường ta chọn hai điểm $A(0; b)$ và $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ theo thứ tự là giao điểm của đồ thị với trục Oy và Ox nếu hai điểm đó không nằm quá xa gốc tọa độ (thí dụ $y = x + 2005$) hoặc tọa độ của chúng không quá phức tạp trong tính toán (thí dụ $y = \sqrt[3]{2}x + \sqrt{89}$).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y = (m - 2)x + 3$.

1. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.
2. Tìm m để hàm số đã cho đồng biến.
3. Tìm m để hàm số nghịch biến.

Rèn luyện 1: Cho hàm số $y = f(x) = (m - 1)x - 2$

1. Tìm điều kiện m để hàm số trên là hàm số bậc nhất.
2. Xác định m để hàm số trên nghịch biến.
3. Biết $f(2) = -3$. Xác định công thức chính xác của $f(x)$.

Rèn luyện 2: Cho hàm số $y = mx - m^2 - x + 1$.

- a) Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.
- b) Tìm m để hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .
- c) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

VÍ DỤ 2: Vẽ đồ thị của các hàm số sau

1. $y = 2x + 3$.

2. $y = -x + 1$.

Rèn luyện 3: Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2x + 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$ trên cùng mặt phẳng tọa độ.

Rèn luyện 4: Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của các hàm số $y = 3x$ và $y = -3x$. Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này?

Rèn luyện 5: Cho các hàm số $y = -2x + 5$ (1) và $y = x + 2$ (2)

1. Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ

2. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đồ thị hàm số (1). $A(1;3)$ $B(-1;3)$; $C\left(\frac{1}{2};6\right)$; $D\left(\frac{3}{2};2\right)$.

3. Tìm trên đồ thị hàm số (2) điểm E có hoành độ là 0,5 và điểm F có tung độ là -3 .

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Một ô tô vận tốc 50 km/h khởi hành từ bến xe phía Nam cách Hà Nội 5 km và đi về phía Nghệ An (Bến xe nằm trên đường Hà Nội - Nghệ An). Hỏi sau khi khởi hành x giờ, xe cách Hà Nội bao nhiêu?

BÀI 2: Cho các hàm số

a) $y = 5x + \sqrt{3}$.

b) $y = 2 - \sqrt[3]{5x}$.

c) $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

d) $y = 3(x - 2) + x$.

e) $y = -\frac{1}{x} + 3$.

f) $y = 2\sqrt{x} + 8$.

Trong các hàm số trên, hàm nào là hàm số bậc nhất? Hàm số nào là hàm số đồng biến, hàm số nào là hàm nghịch biến.

BÀI 3: Cho hàm số $y = f(x) = (m - 1)x - 2$

1. Tìm điều kiện m để hàm số trên là hàm số bậc nhất.

2. Xác định m để hàm số trên nghịch biến.

3. Biết $f(2) = -3$. Xác định công thức chính xác của $f(x)$.

BÀI 4: Cho hàm số $y = (m - 1)x + \sqrt{m}$.

1. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

2. Tìm m để hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

BÀI 5: Tìm m để các hàm số sau là hàm bậc nhất.

a) $y = mx + 6$.

b) $y = m^2x + \sqrt{3} - x$.

c) $y = mx + \sqrt{m + 2}$.

d) $y = (m^2 - m)x^2 + mx + 8$.

BÀI 6: Cho hai hàm số $f(x) = (m^2 + 5)x - 3$ và $g(x) = 2mx + 1$, với $m \neq 0$. Chứng minh rằng

1. Các hàm $f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ là các hàm đồng biến.
2. Hàm số $g(x) - f(x)$ là hàm nghịch biến.

BÀI 7: Cho hàm số $y = (m - 1)x + 2m - 3$.

1. Tìm m để hàm số là đồng biến, nghịch biến, không đổi.
2. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI 8: Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:

- | | |
|--|---|
| a) $y = 2x + 3$ và $y = 2x - 2$. | b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ và $y = -\frac{1}{2}x - 1$. |
| c) $y = -x + 2$ và $y = x + 4$. | d) $y = 3x - 1$ và $y = -\frac{1}{3}x$. |
| e) $y = \frac{1}{3}x + 2$ và $y = x$. | f) $y = x + \frac{1}{2}$ và $y = 2x - 1$. |

C. TƯƠNG GIAO HAI ĐƯỜNG THẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) là:

- Song song với nhau nếu $a = a'$ và $b \neq b'$.
- Trùng nhau nếu $a = a'$ và $b = b'$.

2) Đường thẳng cắt nhau

- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.
- Đặc biệt nếu $a \neq a'$ và $b = b'$, chúng cắt nhau tại một điểm trên Oy .

3) Vị trí của hai đường thẳng trên mặt phẳng tọa độ

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = a_1x + b_1$, $(d_2): y = a_2x + b_2$, ta có các kết quả sau:

- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
- $(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
- $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

- a) $(d_1): y = 2x + 1$ và $(d_2): y = -x + 2$. b) $(d_3): y = 3x + 1$ và $(d_4): y = 3x + 5$.
- c) $(d_5): y = -x + 1$ và $(d_6): x + y - 1 = 0$.

Rèn luyện 1: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

- a) $(d_1): y = 2x + 1$ và $(d_2): y = -5x + 2020$. b) $(d_3): 2x + 3y + 6 = 0$ và $(d_4): y = -\frac{2}{3}x + 5$.
- c) $(d_5): y = -x + 1$ và $(d_6): x - y - 1 = 0$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số bậc nhất: $y = 2x + k$ và $y = (2m + 1)x + k - 1$. Tìm m và k để hai đồ thị hàm số trên là:

- a) Hai đường thẳng cắt nhau
- b) Hai đường thẳng song song.
- c) Hai đường thẳng trùng nhau.

Rèn luyện 2: Cho hàm số bậc nhất: $y = \left(m - \frac{3}{2}\right)x + 2$ (1) và $y = (2 - m)x - 3$

1. Với giá trị nào của m thì đồ thị hai hàm số trên cắt nhau?
2. Với giá trị nào của m thì đồ thị hai hàm số trên song song nhau?

Rèn luyện 3: Cho hàm số $y = \frac{-1}{2}x$ có đồ thị (D_1) và $y = 2x - 5$ có đồ thị (D_2)

- Vẽ (D_1) và (D_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm m để đồ thị hàm số $y = (3m^2 - 1)x + 3$ song song với (D_2) .

Rèn luyện 4: Cho hàm số $y = ax + 2$

- Xác định a , biết đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -x$.
- Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong câu a). Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong câu a) và các trục tọa độ.

VÍ DỤ 3: Cho đường thẳng $(\Delta): y = x + 6$. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và đi qua điểm $M(1;2)$.

Rèn luyện 5: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1$, $(d_2): y = x + 1$.

- Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định tọa độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua I và song song với đường thẳng $y = -4x + 1$.
- Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$.

VÍ DỤ 4: Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x - 1$, $(d_2): y = 2 - x$; $(d_3): y = mx + 1$. Xác định m để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.

Rèn luyện 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hàm số $y = 4x - 6$ có đồ thị là đường thẳng (d_1) và hàm số $y = -2x$ có đồ thị là đường thẳng (d_2)

- Vẽ đồ thị (d_1) và (d_2) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) bằng phép tính.
- Cho đường thẳng $(d_3): y = (m^2 - 1)x + m^2 - 5$ với $m \neq \pm 1$. Xác định m để ba đường thẳng (d_1) , (d_2) và (d_3) đồng quy.

III. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) biết

- $(d_1): x + y + 1 = 0$ và $(d_2): 2x + 2y + 3 = 0$.
- $(d_1): 3x - y + 1 = 0$ và $(d_2): 4x - y + 1 = 0$.
- $(d_1): x + 2y + 1 = 0$ và $(d_2): x + 4y + 3 = 0$.
- $(d_1): 2x + 3y + 1 = 0$ và $(d_2): 4x + 6y + 2 = 0$.

Trong trường hợp cắt nhau, hãy tìm tọa độ giao điểm.

BÀI 2: Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(\Delta): y = -3x$ và đi qua điểm $M(1;3)$. Vẽ đồ thị của (d) .

BÀI 3: Cho đường thẳng $(\Delta): y = -x + 2$. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và

1. Đi qua điểm $M(1; -2)$.
2. Chấn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.
3. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $9\sqrt{2}$.

BÀI 4: Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x - 1$ và $(d_2): y = -x + 2$.

1. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định tọa độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục tọa độ.
2. Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = 5x + 7$.

BÀI 5: Cho đường thẳng $(d): y = ax + 2$ (a khác 0) và $(d'): y = a'x - 3$

- a) Tìm a biết (d) đi qua điểm $A(2; -6)$.
- b) Tìm a' biết (d') cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -2
- c) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (d') với a và a' vừa tìm được.

BÀI 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x$ có đồ thị là (d_1) và hàm số $y = x + 2$ có đồ thị là (d_2) .

- a) Vẽ (d_1) và (d_2) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .
- b) Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) bằng phép toán.
- c) Cho đường thẳng $(d_3): y = mx + n$. Tìm m và n biết (d_3) song song với (d_2) và (d_3) qua điểm $B(-3; 1)$.

BÀI 7: Cho các đường thẳng $(D_1): y = x + 2$, $(D_2): y = 2x + 1$ và $(D_3): y = 3x$.

1. Vẽ (D_1) và (D_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ và tìm giao điểm của hai đường thẳng bằng phép toán?
2. Chứng tỏ ba đường thẳng (D_1) , (D_2) và (D_3) đồng quy tại một điểm.

BÀI 8: Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x + 3$, $(d_2): y = 3x + 2$ và $(d_3): y = ax + a + 3$. Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.

D. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc a và

- Nếu $a > 0$ thì $\alpha < 90^\circ$.
- Nếu $a < 0$ thì $\alpha > 90^\circ$ (khi đó $\alpha = 180^\circ - \widehat{ABO}$).

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Hệ số góc của đường thẳng

VÍ DỤ 1: Cho đường thẳng $(d): y = x + 8$.

1. Vẽ đường thẳng (d) .
2. Tính hệ số góc của đường thẳng (d) .

VÍ DỤ 2: Cho hai điểm $A(3;2)$ và $B(5;8)$ thuộc đường thẳng (d) .

1. Tính hệ số góc của đường thẳng (d) .
2. Xác định đường thẳng (d) đó.

DẠNG 2. Lập phương trình đường thẳng biết hệ số góc

Phương pháp.

Ta ghi nhận kết quả: "Mọi đường thẳng có hệ số góc k luôn có phương trình $y = kx + b$ ".
Khi đó để xác định phương trình đường thẳng ta chỉ cần xác định b .

VÍ DỤ 1: Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ và

1. Đi qua điểm $M(-1; -1)$.
2. Chấn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 24.

VÍ DỤ 2: Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ và khoảng cách từ O đến (d) bằng $\frac{12}{5}$.

VÍ DỤ 3: Lập phương trình đường thẳng (d) biết (d) cắt Ox, Oy theo thứ tự tại $A(a;0), B(0;b)$ với $a, b \neq 0$.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa việc sử dụng phương trình đoạn chắn để giải toán.

VÍ DỤ 4: Trên mặt phẳng tọa độ, cho điểm $M(4;1)$. Một đường thẳng (d) luôn đi qua M cắt Ox, Oy theo thứ tự tại $A(a;0), B(0;b)$ với $a, b > 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) sao cho

1. Diện tích $\triangle OAB$ nhỏ nhất.
2. $OA + OB$ nhỏ nhất.
3. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

VÍ DỤ 5: 1. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-5;5)$ sao cho (d) tạo với

tia Ox một góc α có $\tan \alpha = \frac{1}{2}$.

2. Tìm trên đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1: Lập phương trình đường thẳng (d) , biết (d)

- đi qua điểm $M(1;2)$ có hệ số góc bằng 3.
- đi qua điểm $A(-3;2)$ và tạo với tia Ox một góc 45° .
- đi qua điểm $B(3;2)$ và tạo với tia Ox một góc 60° .

BÀI 2: Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{-4}{3}$ và

- Đi qua điểm $M(1; -1)$.
- Chấn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 54.
- Khoảng cách từ O đến (d) bằng $\frac{3}{5}$.

BÀI 3: Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(\Delta): y = -3x$ và đi điểm $M(1;3)$. Vẽ đồ thị của (d) .

E. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 2

BÀI 1: Cho hai đường thẳng $(D_1): y = (2 + m)x + 1$ $(D_2): y = (1 + 2m)x + 2$

- Tìm m để (D_1) và (D_2) cắt nhau.
- Với $m = -1$, vẽ (D_1) và (D_2) trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy rồi tìm tọa độ điểm của hai đường thẳng (D_1) và (D_2) bằng phép tính.

BÀI 2: Cho hàm số $y = 2x + 1$ (1)

- Vẽ đường thẳng (d) là đồ thị của hàm số trên và tính góc tạo bởi đường thẳng (d) với trục hoành.
- Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số (1): $A(-2; -3); B(3; -1)$.
- Trên đường thẳng (d) lấy hai điểm C có hoành độ là 3 và D có tung độ là -2 . Tìm tọa độ của điểm C và D .
- Cho $(D): y = ax + b, a \neq 0$. Tìm a, b biết $(D) \parallel (d)$ và (D) đi qua điểm $E(-1; 2)$.
- Viết phương trình đường thẳng (d') có hệ số góc bằng -1 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.

BÀI 3: a) Trên cùng mặt phẳng tọa độ, vẽ các đường thẳng $(D_1): y = 2x - 1$ và $(D_2): y = -x + 5$.

- Tìm tọa độ giao điểm của (D_1) và (D_2) bằng phép tính.

c) Biết đường thẳng (D) là đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Xác định a, b biết $(D) \parallel (D_2)$ và giao với trục tung tại điểm có tung độ là 3.

BÀI 4: Cho hàm số Cho $(D) : y = \frac{-x}{2} + 3$.

- Vẽ (D) trên hệ trục tọa độ.
- Tìm trên (D) điểm M có hoành độ là 4 và điểm N có tung độ là 2.
- Tìm giao điểm của (D) và $(D)'$: $y = 3x - 1$.
- Cho Cho $(D) : y = ax + b, (a \neq 0)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -2 .

BÀI 5: Cho đường thẳng $(d) : y = (m - 2)x + m + 3 (m \neq 2)$ và $(D) : y = -3x + 2$

- Tìm m để $(d) \parallel (D)$. Vẽ (d) và (D) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Với m vừa tìm được ở trên. Tìm giao điểm của (d) và (D) bằng phép tính.
- Tìm m để (d) và (D) cắt nhau.
- Tìm m để (d) và (D) trùng nhau.

BÀI 6: Cho 2 hàm số $y = (2m - 1)x + n$ (1) và $y = (-5 + m)x + n - 2$ (2)

- Tìm m, n để các đồ thị hàm số (1) và (2) song song.
- Tìm m, n để các đồ thị hàm số (1) và (2) cắt nhau tại một điểm.
- Tìm m, n để các đồ thị hàm số (1) và (2) trùng nhau.
- Tìm m, n để các đồ thị hàm số (1) và (2) cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

BÀI 7: a) Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $y = 2x + 3 + m$ và $y = 3x + 5 - m$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) biết (d) song song với $(d)'$: $y = \frac{-1}{2}x$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 10.

BÀI 8: Cho hai đường thẳng: $(D_1) : y = \frac{1}{2}x + 2$ và $(D_2) : y = -x + 2$

- Vẽ (D_1) và (D_2) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .
- Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (D_1) và (D_2) với trục Ox , C là giao điểm của (D_1) và (D_2) . Tính chu vi và diện tích $\triangle ABC$.

BÀI 9: Cước điện thoại y (nghìn đồng) là số tiền mà người sử dụng điện thoại cần trả hàng tháng, nó phụ thuộc vào lượng thời gian gọi x (phút) của người đó trong tháng. Mỗi liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Hãy tìm a, b biết rằng nhà bạn Nam trong tháng 5 đã gọi 100 phút với số tiền là 40 nghìn đồng và trong tháng 6 đã gọi 40 phút với số tiền là 28 nghìn đồng.

BÀI 10: Năm 2020, diện tích rừng ở nước ta khoảng 14,6 triệu ha (tính cả rừng tự nhiên và rừng trồng). Tình trạng phá rừng và chuyển đổi mục đích sử dụng rừng không hợp lý đã dẫn đến hậu quả thiên tai nặng nề. Nhà nước đưa ra các biện pháp bảo vệ rừng và trồng rừng để diện tích rừng được tăng vào các năm tới. Giả sử sau mỗi năm diện tích rừng tăng trung bình 0,12 triệu ha thì diện tích rừng nước ta được biểu diễn theo công thức $S = 14,6 + 0,12t$. Trong đó diện tích S tính theo triệu ha, t là số năm kể từ năm 2020.

1. Tính diện tích rừng của nước ta vào năm 2025? Khi đó diện tích rừng tăng bao nhiêu phần trăm so với năm 2020? (Làm tròn kết quả đến số thập phân thứ nhất).
2. Diện tích rừng nước ta đạt 16,56 triệu ha vào năm nào?

BÀI 11: Bạn Phương đã đọc được 100 trang đầu một cuốn sách. Hôm nay, trong 3 giờ bạn đọc thêm 120 trang. Gọi x (giờ) là thời gian đọc sách, y (trang) là số trang đã đọc được trong x (giờ) (số trang sách đọc được mỗi giờ là không thay đổi). Mối liên hệ giữa y và x là một hàm số bậc nhất: $y = ax + b$ có đồ thị như hình dưới.

1. Xác định các hệ số a, b .
2. Nếu quyển sách 380 trang thì bạn Phương cần thêm bao nhiêu giờ để đọc hết quyển sách trên.

BÀI 12: Để bước đầu khởi nghiệp, một nhóm bạn trẻ quyết định làm một số sản phẩm handmade (sản phẩm làm bằng thủ công) để kinh doanh. Sau khi tính toán về vốn và chi phí các bạn thấy số tiền lời hoặc lỗ khi kinh doanh được tính bởi công thức là $L = 50000x - 8000000$ trong đó L (đồng) là số tiền lời hoặc lỗ khi bán x số sản phẩm bán được.

1. Hỏi nếu bán được 100 sản phẩm thì nhóm bạn trẻ kinh doanh lời hay lỗ?
2. Để lời được 4000000 đồng thì nhóm bạn phải bán được bao nhiêu sản phẩm?

BÀI 13: Ước tính dân số Việt Nam được xác định bởi hàm số: $S = 77,7 + 1,07 \cdot t$. Trong đó

S : Tính bằng triệu người.

t : Tính bằng số năm kể từ năm 2000.

1. Hãy ước tính dân số Việt Nam vào năm 2025.
2. Hãy cho biết dân số Việt Nam đạt khoảng 115,15 triệu người vào năm bao nhiêu?
3. Theo ước tính trên dân số nước ta sẽ đạt gấp đôi hiện nay sau bao nhiêu năm nữa?

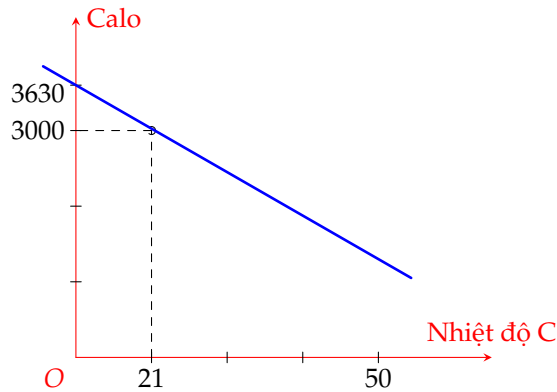
BÀI 14: Hiện tại Nam đã để dành được số tiền là 800 000 đồng. Nam đang có ý định mua một chiếc xe đạp trị giá 2 000 000 đồng. Hằng ngày Nam đều để dành cho mình 20 000 đồng. Gọi y (đồng) là số tiền Nam tiết kiệm được sau x (ngày).

1. Thiết lập hàm số y theo x .
2. Hỏi sau bao nhiêu ngày tiết kiệm thì Nam có thể mua được chiếc xe đạp đó.

BÀI 15: Do các hoạt động công nghiệp thiếu kiểm soát của con người làm cho nhiệt độ trái đất tăng dần một cách đáng lo ngại. Các nhà khoa học đưa ra công thức dự báo nhiệt độ trung bình trên bề mặt trái đất như sau: $T = 0,02 \cdot t + 15$. Trong đó T là nhiệt độ trung bình của bề mặt trái đất 0°C , t là số năm kể từ năm 1960.

1. Em hãy tính nhiệt độ trung bình của bề mặt trái đất vào năm 2020.
2. Hỏi vào năm nào thì nhiệt độ trung bình của bề mặt trái đất là 17°C ?

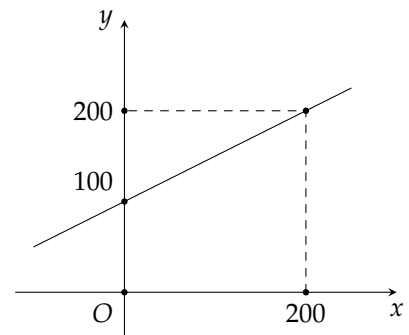
BÀI 16: Qua nghiên cứu, người ta nhận thấy rằng với mỗi người trung bình nhiệt độ môi trường giảm đi 1°C thì lượng calo cần tăng thêm khoảng 30 calo. Tại 21°C , một người làm việc cần sử dụng khoảng 3000 calo mỗi ngày. Người ta thấy mối quan hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị như sau



1. Xác định hệ số a và b .
2. Nếu một người làm việc ở sa mạc Sahara trong nhiệt độ 50°C thì cần bao nhiêu calo?

BÀI 17:

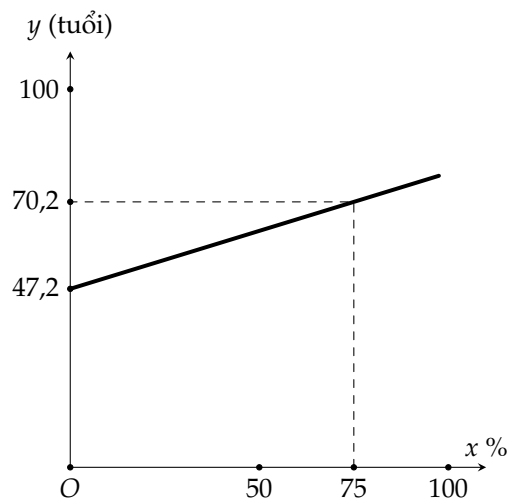
Người ta đun sôi nước bằng ấm điện. Công suất hao phí P sẽ phụ thuộc vào thời gian t . Biết rằng mối liên hệ giữa P và t là một hàm số bậc nhất có dạng $P = at + b$ và được biểu diễn bằng đồ thị như hình bên.



1. Xác định các hệ số a và b .
2. Tính công suất nhiệt hao phí khi đun nước trong 30s. (biết đơn vị công suất là W , đơn vị thời gian là s)

BÀI 18:

Dựa trên số liệu về dân số, kinh tế, xã hội của 85 nước trên thế giới, người ta xây dựng được quan hệ tuổi thọ trung bình của phụ nữ (y) và tỉ lệ phần trăm biết chữ của họ (x) bởi hàm số bậc nhất $y = ax + b$ và có đồ thị như hình bên.



1. Xác định các hệ số a và b của hàm số trên (làm tròn hệ số a đến chữ số thập phân thứ 3).
2. Cuộc tổng điều tra dân số của Việt Nam tính đến năm 2020 cho thấy tuổi thọ trung bình của phụ nữ Việt Nam khoảng 76,3 tuổi. Theo mối quan hệ của x và y nói trên, tính đến năm 2020, tỉ lệ phụ nữ Việt Nam biết chữ là bao nhiêu phần trăm? (sử dụng kết quả đã làm tròn ở câu trên và làm tròn kết quả câu này đến chữ số thập phân thứ nhất).

BÀI 19: Công ty đồ chơi Bingbon vừa cho ra đời một đồ chơi tàu điện điều khiển từ xa. Trong điều kiện phòng thí nghiệm, quãng đường (centimet) đi được của đoàn tàu đồ chơi là một hàm số của thời gian t (giây), hàm số đó là $s = 6t + 9$. Trong điều kiện thực tế người ta thấy rằng nếu đoàn tàu đồ chơi di chuyển quãng đường 12 cm thì mất 2 giây và cứ trong mỗi 10 giây thì nó đi được 52 cm.

- a) Trong điều kiện phòng thí nghiệm, sau 5 (giây) đoàn tàu đồ chơi di chuyển được bao nhiêu centimet?
- b) Mẹ bé An mua đồ chơi này về cho bé chơi, bé ngồi cách mẹ 1,5 m. Hỏi cần bao nhiêu giây để đoàn tàu đồ chơi từ chỗ mẹ đến chỗ bé?

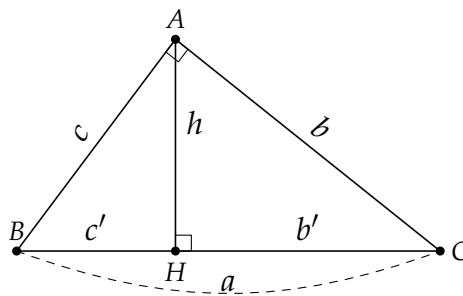
BÀI 20: Sau những vụ va chạm giữa các xe trên đường, cảnh sát thường sử dụng công thức $v = \sqrt{30fd}$ để ước lượng tốc độ v (đơn vị : dặm/giờ) của xe từ vết trượt trên mặt đường sau khi thắng đột ngột. Trong đó, d là chiều dài vết trượt của bánh xe trên nền đường tính bằng feet(ft), f là hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt đường (là thước đo sự “trơn trượt” của mặt đường).

- a) Cho biết vận tốc của một chiếc xe hơi là 60 dặm/giờ, và hệ số ma sát $f = 0,8$. Tính chiều dài vết trượt của bánh xe trên nền đường khi xe thắng gấp.
- b) Đường cao tốc Long Thành – Dầu Giây có tốc độ giới hạn là 100 km/h. Sau một vụ va chạm giữa hai xe, cảnh sát đo được vết trượt của một xe là $d = 172$ (ft) và hệ số ma sát mặt đường tại thời điểm đó là $f = 0,7$. Chủ xe đó nói xe của ông không chạy quá tốc độ. Hãy áp dụng công thức trên để ước lượng tốc độ chiếc xe đó rồi cho biết lời nói của người chủ xe đó đúng hay sai? (Biết 1 dặm = 1069 m)

A. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC VUÔNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền



Định lí 1: Trong một tam giác vuông, bình phương của một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta nhận được

$$AB^2 = BC \cdot BH \Leftrightarrow c^2 = a \cdot c',$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \Leftrightarrow b^2 = a \cdot b'.$$

2. Một số hệ thức liên quan tới đường cao

Định lí 2: Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta nhận được

$$AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow h^2 = b' \cdot c'.$$

Định lí 3: Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta nhận được

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \Leftrightarrow b \cdot c = a \cdot h.$$

Định lí 4: Trong một tam giác vuông, nghịch đảo bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

Như vậy, trong $\triangle ABC$ vuông tại A , ta nhận được

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Giải các bài toán định lượng

VÍ DỤ 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, AH là đường cao. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, BH, CH, AH .

Rèn luyện 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Trong các đoạn thẳng sau: AB, AC, BC, AH, HB, HC hãy tính các đoạn thẳng còn lại nếu biết:

- | | |
|--|--|
| a) $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}$. | b) $AB = 15\text{cm}, HB = 9\text{cm}$. |
| c) $AC = 44\text{cm}, BC = 55\text{cm}$. | d) $AC = 40\text{cm}, AH = 24\text{cm}$. |
| e) $AH = 9,6\text{cm}, HC = 12,8\text{cm}$. | f) $HB = 12,5\text{cm}, HC = 7,2\text{cm}$. |

VÍ DỤ 2: Cho tam giác ABC có $AB = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$ và $BC = 25\text{cm}$. Từ B vẽ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt AC kéo dài tại H . Đường thẳng qua H và song song với BC cắt AB tại K .

- Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- Tính độ dài các đoạn thẳng HC, HB, HK .
- Tính diện tích tứ giác $BHKC$ bằng 2 cách.

Rèn luyện 2: Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có góc $A = 90^\circ$ và M là trung điểm BC . Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Cho biết $AM = 13\text{cm}$ và $AH = 12\text{cm}$.

- Tính MH, AB, AC .
- Đường thẳng qua B và vuông góc với AM cắt AC tại F . Tính AF, BF .

DẠNG 2. Giải các bài toán định tính

VÍ DỤ 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao.

- Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^3}{AC^3}$.
- Gọi I và J lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB . Chứng minh $AI \cdot AC = AH^2$.
- Chứng minh $\triangle AJI \sim \triangle ACB$ đồng dạng và $\widehat{AJI} = \widehat{ACB}$.

Rèn luyện 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , AH là đường cao, H, F lần lượt là các đường cao của $\triangle AHB, \triangle AHC$. Chứng minh rằng

- $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$.
- $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

Rèn luyện 2: Cho $\triangle ABC$, biết $S = \frac{1}{4} \cdot (a + b - c) \cdot (a - b + c)$ (1). Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 15$, $AC = 20$, AH là đường cao.

- a) Tính BC . b) Tính BH . c) Tính CH . d) Tính AH .

BÀI 2: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , biết $BH = 3\text{cm}$, $CH = \frac{16}{3}\text{cm}$.

- Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.
- Tính độ dài AH .

BÀI 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. Tính độ dài đường cao AH .

BÀI 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB < AC$, biết rằng đường cao $AH = \frac{6\sqrt{13}}{13}\text{cm}$, $BC = \sqrt{13}\text{cm}$.

- a) Tính AB . b) Tính AC . c) Tính HB . d) Tính HC .

BÀI 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$. Kẻ đường cao AH và phân giác AD của tam giác ABC (H, D thuộc BC)

- Tính độ dài các đoạn thẳng DB, DC .
- Tính độ dài các đoạn thẳng HD, AD .
- Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC . Tính diện tích tứ giác $BIKC$.

BÀI 6: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = \frac{3}{5}BC$ và đường cao $H = 12\text{cm}$. Tính chu vi $\triangle ABC$.

BÀI 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao $AH = 24$ và $AB : AC = 3 : 4$. Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

BÀI 8: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH . Biết $AB = CH$ và $BC = 2$. Tính AB .

BÀI 9: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , biết $BH = 1\text{cm}$, $AC = 2\sqrt{5}\text{cm}$.

- a) Tính BC . b) Tính AB . c) Tính AH .

BÀI 10: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, đường cao AH . Điểm I thuộc cạnh AB sao cho $IA = 2IB$, CI cắt AH tại E . Tính độ dài cạnh CE .

BÀI 11: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AM là đường cao.

- Chứng minh $BC^2 = 2AM^2 + BM^2 + CM^2$.
- Kẻ ME vuông góc AB tại E và MF vuông góc AC tại F . Chứng minh $\frac{BE}{CF} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

BÀI 12: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC . Chứng minh:

- a) $BM^2 = \frac{BH^3}{BC}$. b) $AH^3 = BC \cdot BM \cdot CN$. c) $HM \cdot HN = \frac{AH^3}{BC}$.

BÀI 13: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B . Tia DI và tia CB cắt nhau tại K . Kẻ đường thẳng qua D vuông góc DI , đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L . Chứng minh:

- a) $\triangle DIL$ cân.

b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên AB .

BÀI 14: Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AH và BK . Chứng minh $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4HA^2}$.

BÀI 15: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC, AHB, AHC . Chứng minh rằng

a) $r_1 = r \cdot \frac{c}{a}$ và $r_2 = r \cdot \frac{b}{a}$.

b) $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

B. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

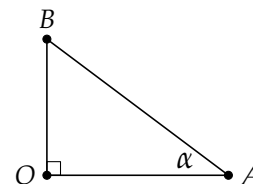
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tỉ số lượng giác

Cho $\triangle AOB$ vuông tại O , ta có

$$\checkmark \sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OB}{AB} \quad \checkmark \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{OB}{OA}$$

$$\checkmark \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OA}{AB} \quad \checkmark \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \frac{OA}{OB}$$



2. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

Giá trị \ Góc	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	//
$\cot \alpha$	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

3. Hàm số lượng giác của hai góc phụ nhau

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

c) $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$.

d) $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1: Tính các tỉ số lượng giác (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

a) $\sin 35^\circ$.

b) $\cos 39^\circ 13'$.

c) $\tan 80^\circ$.

d) $\cot 45^\circ$.

e) $\cos 52^\circ 18'$.

f) $\cot 10^\circ 17'$.

g) $\sin 42^\circ 28'$.

BÀI 2: Tính các tỉ số lượng giác (làm tròn đến chữ số hàng phần nghìn):

a) $\sin 23^\circ$.

b) $\tan 30^\circ$.

c) $\cos 15^\circ 25'$.

d) $\cot 65^\circ$.

e) $\cos 75^\circ$.

BÀI 3: Tìm số đo các góc sau, biết tỉ số lượng giác của chúng là:

BÀI 13: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $\tan B = \frac{3}{4}$; $AB = 2$ cm. Tính AC, BC .

BÀI 14: Cho $\triangle CDE$ có $CD = 27$ cm; $CE = 36$ cm; $DE = 45$ cm. Tính:

1. Chứng tỏ $\triangle ABC$ vuông.
2. Vẽ đường cao CH của $\triangle CDE$. Tính CH, HE .
3. Tính góc D , góc E .

BÀI 15: Cho $\triangle ACB$ vuông tại A ($AB > AC$) đường cao AH chia cạnh BC thành hai đoạn thẳng $CH = 4$ cm; $BH = 9$ cm. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC .

1. Tính độ dài đoạn thẳng AH và số đo góc B ; góc C của tam giác ABC (Làm tròn số đo góc đến phút)
2. Chứng minh $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.
3. Chứng minh: $\frac{1}{MN^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

BÀI 16: Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 17$ cm.

1. Chứng tỏ $\triangle ABC$ vuông.
2. Vẽ đường cao AH của $\triangle ABC$. Tính AH, HB .
3. Tính số đo của góc B ; góc C .

BÀI 17: Cho $\triangle ABC$ có đường cao BH . Biết $AB = 40$ cm, $AC = 58$ cm, $BC = 42$ cm.

1. Chứng tỏ tam giác ABC vuông.
2. Tính các tỉ số lượng giác của góc A .
3. Kẻ $HE \perp AB$; $HF \perp AC$. Tính BH, BE, BF và diện tích của tứ giác $EFCA$?

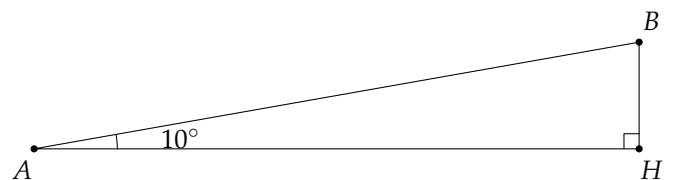
BÀI 18: Cho $\triangle ABC$ có $BC = 16$ cm; $\widehat{C} = 45^\circ$; $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính AB .

BÀI 19: Cho $\triangle CDE$. Biết $DE = 18$ cm; $\widehat{E} = 45^\circ$; $\widehat{C} = 75^\circ$. Tính CD .

C. ỨNG DỤNG THỰC TẾ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1:

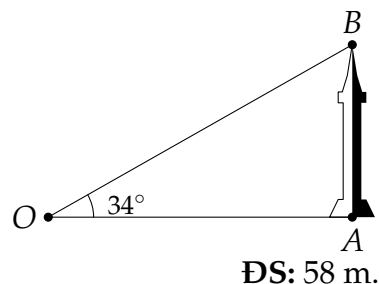
Một người đi xe đạp lên một dốc có độ nghiêng 10° so với phương nằm ngang với vận tốc trung bình 8 km/h, biết đỉnh dốc cao khoảng $34,8$ m so với phương nằm ngang. Hỏi người đó phải mất bao lâu để tới đỉnh?



ĐS: 1,503 phút

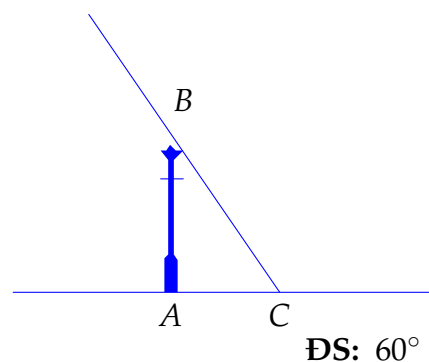
BÀI 2:

Tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 34° và bóng tháp dài 86 m. Tính chiều cao của ngọn tháp?

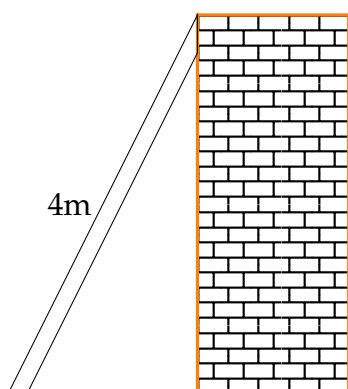


BÀI 3:

Một cột đèn cao 7 m có bóng trên mặt đất dài 4 m. Hãy tính góc mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất?

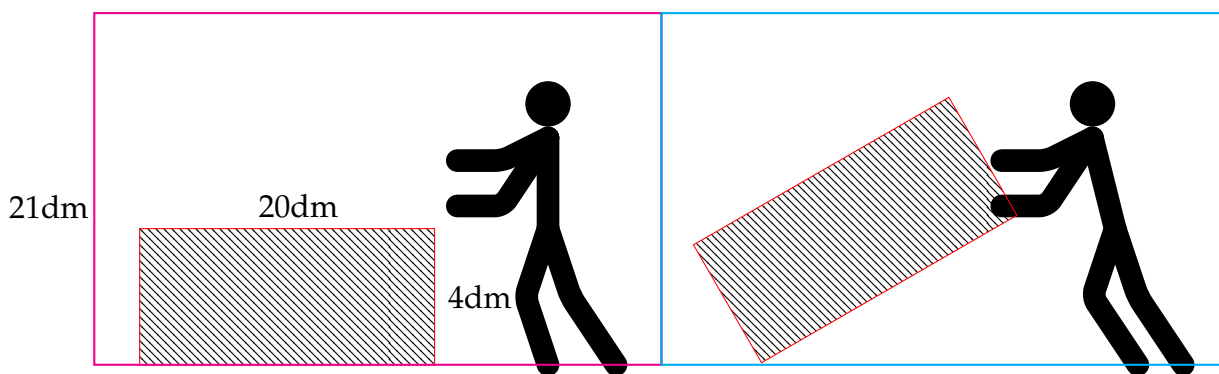


BÀI 4: Một chiếc thang dài 4 m. Cần đặt chân thang cách chân tường bao nhiêu mét để nó tạo với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



ĐS: Cần đặt cách tường khoảng 1,69 m

BÀI 5: Trong lúc bạn Nam dựng tủ cho đứng thẳng, tủ có bị vướng vào trần nhà cao 21 dm không?



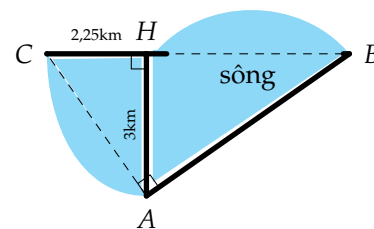
ĐS: Nam đẩy tủ đứng thẳng không bị vướng vào trần nhà.

BÀI 6: Hai trụ điện cùng chiều cao được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ 80 m ($AC = 80$ m). Từ một điểm M trên mặt đường giữa hai trụ người ta nhìn thấy đỉnh hai trụ điện với các góc nâng lần lượt là 60° và 30° . Tính chiều cao của trụ điện và khoảng cách từ điểm M đến gốc mỗi trụ điện.

ĐS: $MA = 20$ m; $MC = 60$ m; $AB = 20\sqrt{3}$ m.

BÀI 7:

Hàng ngày bạn Trúc phải đi học từ nhà (vị trí C) rồi đi theo đường đê (vị trí H), sau đó lên theo đường mòn ra đến đầu đường (vị trí B) theo hình vẽ sau:



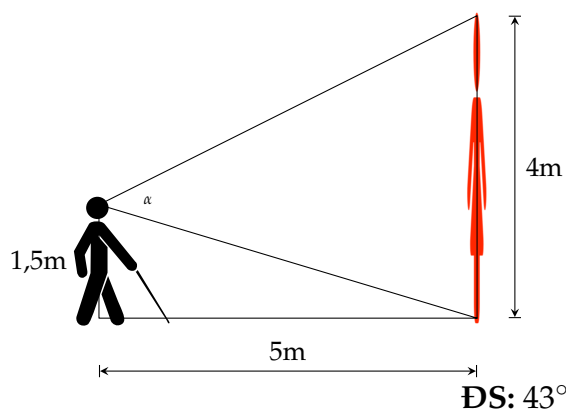
1. Hãy tính quãng đường từ nhà đến trường mà bạn Trúc đã đi.

b) Người ta đã xây dựng cây cầu HB để giúp đỡ cho các bạn đi học dễ dàng hơn. Vậy bạn Trúc đã tiết kiệm bao nhiêu thời gian biết rằng bạn luôn đi với vận tốc 4 km/h? (Làm tròn đến phút).

ĐS: a) 10,25km. b) 1 giờ.

BÀI 8:

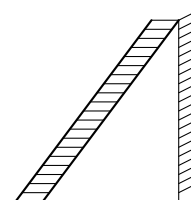
Một bức tượng mỹ thuật có chiều cao 4m. Một người đang đứng cách chân tượng 5m và mắt người ấy cách mặt đất 1,5m (hình bên). Hỏi người đó nhìn toàn bộ bức tượng dưới góc bao nhiêu? (“góc nhìn”, làm tròn đến độ).



ĐS: 43°.

BÀI 9:

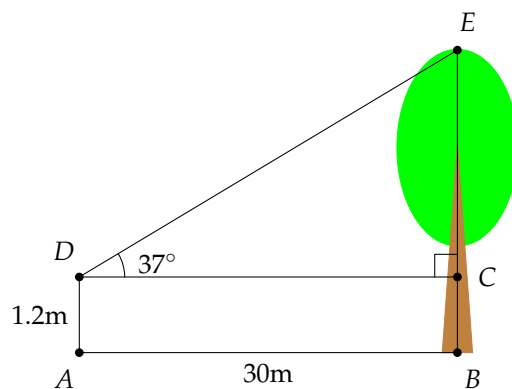
Một chiếc thang dài 3 m. Cần đặt chân thang cách chân tường một khoảng cách bằng bao nhiêu để nó tạo với mặt đất một góc “an toàn” là 65° (tức là đảm bảo thang không bị đổ khi sử dụng)?



ĐS: 1,28 m

BÀI 10:

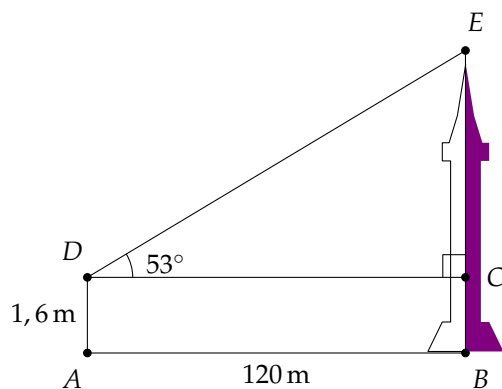
Bạn An đứng ở mặt đất dùng giác kế nhìn thấy ngọn cây dưới góc 37° so với phương ngang song song với mặt đất. Khoảng cách từ bạn An đến cái cây là 30 m. Tính chiều cao của cây đó? Biết giác kế cao 1,2 m.



ĐS: 23,8 m

BÀI 11:

Bạn An đứng ở mặt đất cách một tòa tháp một khoảng 120 m dùng giác kế nhìn thấy đỉnh tháp ở góc 53° so với đường nằm ngang song song với mặt đất. Tính chiều cao của tháp? Biết giác kế có chiều cao 1,6 m.

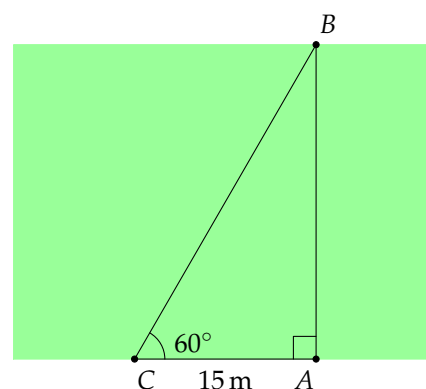


ĐS: 160,85 m

BÀI 12:

Để đo khoảng cách giữa hai bờ của một con sông, bạn An đã làm cách như sau:

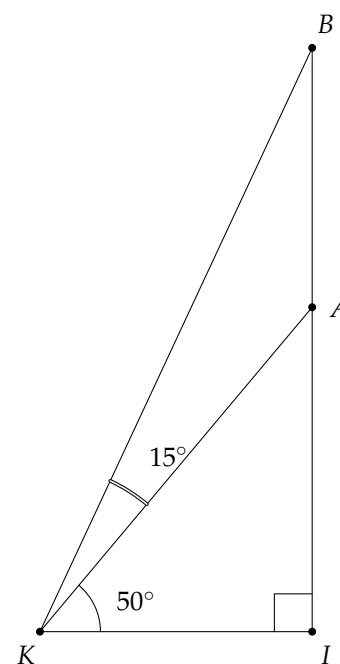
- Trước tiên bạn An sẽ đứng ở vị trí điểm A nhắm một vị trí điểm B bên kia bờ sông và dựng cây cột làm mốc.
- Sau đó An di chuyển 15 m vuông góc với hướng nhắm lúc này đến vị trí điểm C rồi dùng giác kế nhắm vị trí điểm A và vị trí điểm B thì đó được góc 60° . Hãy tính khoảng cách giữa hai bờ sông?



ĐS: 32,26 m

BÀI 13:

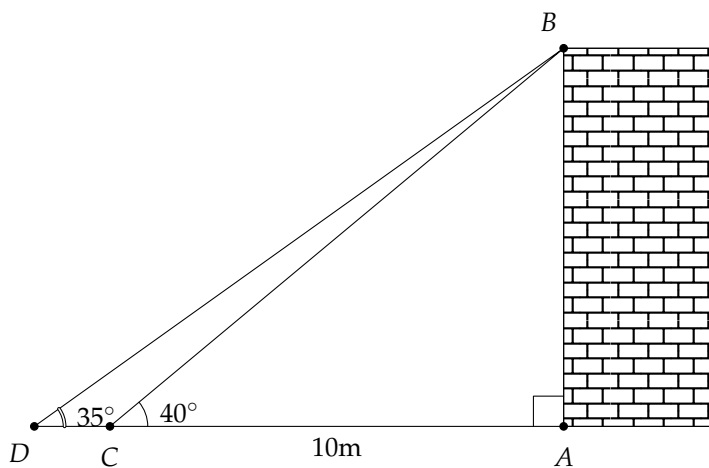
Từ một vị trí trên bờ, bạn An có thể tính được khoảng cách giữa 2 chiếc thuyền ở vị trí A và B bằng cách như sau. Trước tiên bạn chọn một vị trí trên bờ (điểm I) sao cho I, A, B thẳng hàng. Sau đó bạn di chuyển theo hướng vuông góc với IA đến vị trí điểm K cách điểm I một khoảng 380 m rồi dùng giác kế nhắm đến vị trí điểm A, điểm B thì đo được góc 15° và nhắm vị trí điểm A, điểm I thì được góc 50° . Tính khoảng cách 2 chiếc thuyền?



ĐS: 131,48 m

BÀI 14:

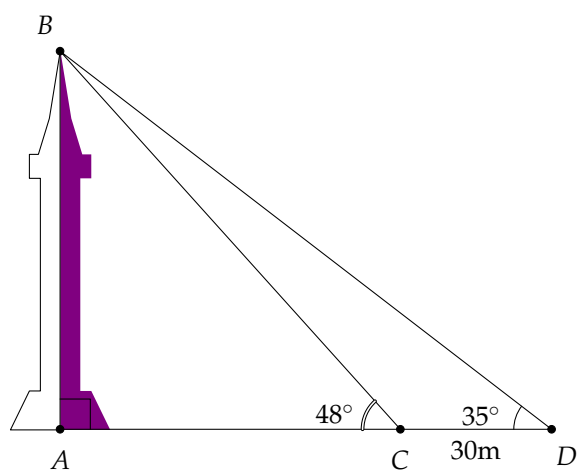
Một người trinh sát đứng cách tòa nhà một khoảng 10 m. Góc “nâng” từ chỗ anh ta đứng đến nóc nhà là 40° . Nếu anh ta dịch chuyển ra xa sao cho góc “nâng” là 35° thì lúc đó anh ta cách tòa nhà bao nhiêu mét?



ĐS: 11,98 m

BÀI 15:

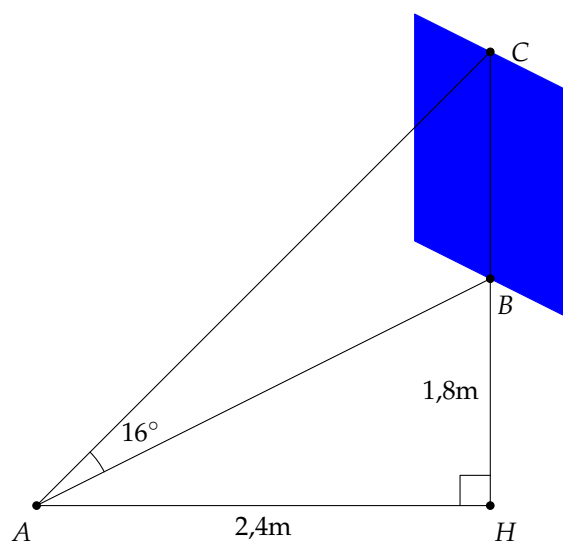
Từ đỉnh một ngọn tháp, bạn An dùng kính viễn vọng thấy được hai vị trí C và D cách nhau 30 m với góc đo lần lượt là 35° và 48° theo phương ngang. Hỏi ngọn tháp cao bao nhiêu?



ĐS: 56,85 m

BÀI 16:

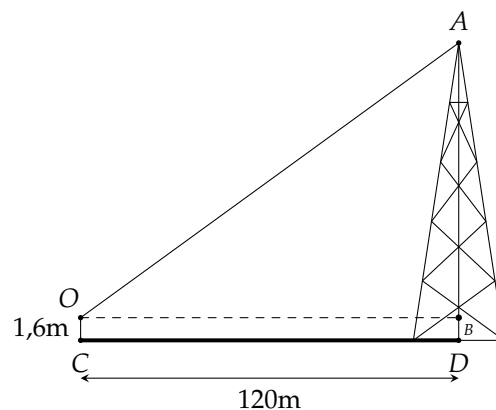
Màn ảnh rộng hình chữ nhật được đặt ở độ cao 1,8 m so với tầm mắt (tính từ mép màn hình). Để nhìn rõ, bạn An ngồi cách màn hình 2,4m. Hỏi chiều cao màn hình? Biết góc nhìn của bạn An là 16° .



ĐS: $3,17 - 1,8 = 2,07\text{m}$

BÀI 17:

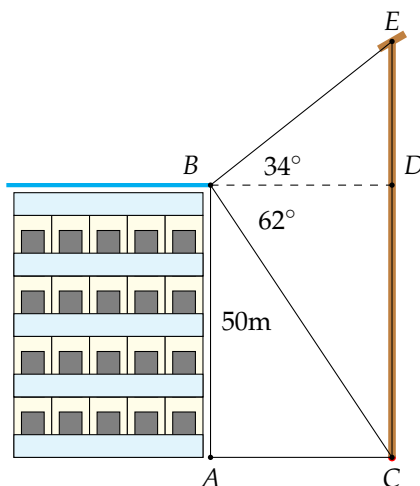
Một người đứng ở vị trí điểm C trên mặt đất cách tháp ăng-ten một khoảng $CD = 120$ m (như hình vẽ). Biết rằng người ấy nhìn thấy đỉnh tháp với $\widehat{AOB} = 36^\circ$ so với đường nằm ngang; khoảng cách từ mắt đến mặt đất $OC = 1,6$ m.



1. Tính chiều cao AD của tháp (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).
2. Giả sử người ấy đứng trên mặt đất cách chân tháp ăng-ten một khoảng bằng chiều cao của tháp ăng-ten ($CD = AD$) và không thay đổi khoảng cách từ mắt đến mặt đất thì người ấy nhìn thấy đỉnh tháp với góc \widehat{AOB} bằng bao nhiêu? (sử dụng kết quả đã làm tròn ở câu trên và làm tròn kết quả câu này đến độ).

ĐS: a) 8,9 m, b) 44°

BÀI 18: Từ nóc một tòa cao ốc 50m người ta nhìn thấy chân và đỉnh một ăng-ten với các góc hạ và nâng lần lượt là 62° và 34° . Tính chiều cao của cột ăng-ten.



ĐS: 67,93 m

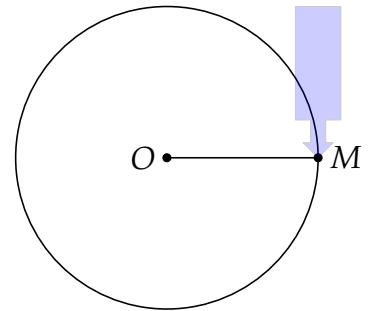
A. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhắc lại về đường tròn

Định nghĩa 1.

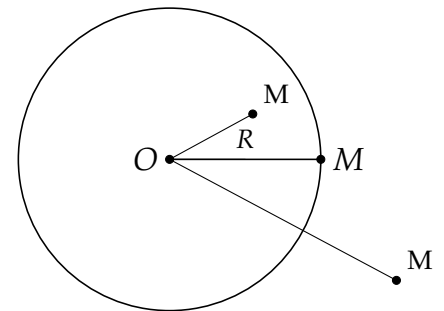
Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R .



Đường tròn như vậy được ký hiệu $(O; R)$, trong trường hợp không cần chú ý đến bán kính có thể sử dụng ký hiệu (O) .

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M , ta có

- ☑ Nếu $OM < R \Leftrightarrow M$ nằm trong đường tròn.
- ☑ Nếu $OM = R \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn.
- ☑ Nếu $OM > R \Leftrightarrow M$ nằm ngoài đường tròn.



2. Cách xác định đường tròn

1. Một điểm O cho trước và một số thực $R > 0$ cho trước xác định một đường tròn $(O; R)$.
2. Một đoạn thẳng AB cho trước xác định một đường tròn đường kính AB .
3. Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một và chỉ một đường tròn đi qua ba điểm đó, ký hiệu (ABC) .

⚠ Trường hợp đặc biệt: Nếu $\triangle ABC$ vuông thì tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là trung điểm của cạnh huyền.

3. Tâm đối xứng - Trục đối xứng

Ta có kết quả:

1. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
2. Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

B. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

Ta có các kết quả sau:

- Đường kính vuông góc với một dây thì chia dây ấy ra làm hai phần bằng nhau.
- Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì vuông góc với dây ấy.

C. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

1. Trong một đường tròn hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.
2. Trong hai dây không bằng nhau của một đường tròn dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

Cả hai kết quả trên vẫn đúng với mọi trường hợp hai đường tròn có bán kính bằng nhau (gọi là hai đường tròn bằng nhau) và nó tỏ ra rất hiệu quả trong bài toán cực trị.

I. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1: Cho tam giác ABC và M là trung điểm cạnh BC . Vẽ MD vuông góc với AB tại D và ME vuông góc với AC tại E . Trên các tia BD và CE lần lượt lấy các điểm I ; K sao cho D là trung điểm BI và E là trung điểm CK . Chứng minh rằng bốn điểm B, I, K, C cùng thuộc một đường tròn.

BÀI 2: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Chứng minh:

1. Bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K .
2. Bốn điểm B, E, F, C cùng thuộc một đường tròn có tâm là I .
3. $\widehat{KEI} = 90^\circ$.

BÀI 3: Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Chứng minh:

1. Bốn điểm B, D, H, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I .
2. Bốn điểm A, F, D, C cùng thuộc một đường tròn có tâm là K .
3. IK đi qua trung điểm của FD .

BÀI 4: Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D, E .

1. Chứng minh $CD \perp AB$ và BE là đường cao của $\triangle ABC$.
2. Gọi K là giao điểm của BE và CD . Chứng minh $AK \perp BC$ tại M .
3. Chứng minh bốn điểm A, E, M, B cùng thuộc một đường tròn.

BÀI 5: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Đường tròn tâm I đường kính AC cắt BC tại H . Trên đoạn HC lấy D sao cho $HD = HB$. Tia AD cắt đường tròn tâm I tại E .

1. Chứng minh AH là đường cao của $\triangle ABC$.
2. Chứng minh $DA \cdot DE = DC \cdot DH$.
3. Gọi K là trung điểm AB . Tính số đo góc IHK .
4. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AKH$.

BÀI 6: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Gọi K là trung điểm AH . Đường tròn tâm K bán kính AK cắt đường tròn (O) đường kính BC tại I và cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E, F . AI cắt BC tại M . Chứng minh:

1. $AEHF$ là hình chữ nhật và $EF^2 = AI \cdot AM$.
2. $MK \perp OA$.

Thiếu

BÀI 7: Cho đường tròn (O) và một điểm I nằm trong đường tròn. Vẽ dây cung MN qua I và vuông góc với OI ; dây cung CD qua I và không vuông góc với OI . Gọi H là trung điểm CD .

1. Chứng minh I là trung điểm MN .
2. Chứng minh tam giác OIH là tam giác vuông, suy ra $OH < OI$.

BÀI 8: Cho $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là trung điểm OA . Qua M vẽ dây cung CD vuông góc với AB .

1. Tứ giác $ACOD$ là hình gì? Vì sao?
2. Tính CD theo R ?

ĐS: b) $CD = R\sqrt{3}$

BÀI 9: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A , bán kính AH . Từ H vẽ HD vuông góc với AB tại D và HE vuông góc AC tại E .

1. Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn.
2. HD và HE cắt đường tròn (A) lần lượt tại P và Q . Chứng minh D là trung điểm HP và 3 điểm P, A, Q thẳng hàng.

BÀI 10: Cho nửa đường tròn đường kính AB . Trên AB lấy 2 điểm C, D cách đều tâm O . Từ C, D kẻ hai tia song song cắt nửa đường tròn ở C' và D' . Chứng minh $C'D'$ vuông góc với CC' và DD' .

BÀI 11: Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

1. Chứng minh B, D, C, E cùng thuộc một đường tròn tâm I .
2. Chứng minh $AB \cdot AE = AC \cdot AD$.
3. Gọi K là điểm đối xứng của H qua I . Chứng minh $BHCK$ là hình bình hành.
4. Chứng minh 4 điểm A, B, K, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn này.
5. Chứng minh $OI \parallel AH$.

BÀI 12: Cho đường tròn (O) và điểm H nằm trong đường tròn. Vẽ dây cung MN qua H và vuông góc với OH ; dây cung CD qua H và không vuông góc với OH . Chứng minh $CD > MN$.

BÀI 13: Cho đường tròn tâm O và hai dây cung MN, PQ bằng nhau, các tia MN và PQ cắt nhau tại 1 điểm A nằm ngoài đường tròn. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của MN, PQ . Chứng minh

- $AE = AF$.
- $AM = AP$ và $AN = AQ$.

BÀI 14: Cho đường tròn (O) bán kính R và hai điểm A, B thuộc (O) sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Tính độ dài dây cung AB và khoảng cách từ tâm đến dây cung theo R .

BÀI 15: Cho $(O; R)$, dây cung AB sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính độ dài dây cung AB và khoảng cách từ tâm đến dây cung theo R .

BÀI 16: Cho $(O; R)$, dây cung BC sao cho $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Tính độ dài dây cung BC và khoảng cách từ tâm đến dây cung theo R .

BÀI 17: Cho đường tròn tâm O , bán kính $R = 10$ cm và dây cung $AB = 16$ cm.

- Tính khoảng cách từ tâm đến dây AB .
- Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 2$ cm. Kẻ dây cung CD đi qua I và vuông góc với AB . Chứng minh $CD = AB$.

BÀI 18: Cho (O) trong đó hai dây AB và CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I . Biết $IC = 2$ cm và $ID = 14$ cm. Tính khoảng cách từ tâm đến mỗi dây.

BÀI 19: Cho (O) có bán kính $R = 25$ cm. Hai dây AB và CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự là 40 cm, 48 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây đó.

D. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN - DẤU HIỆU NHẬN BIẾT ĐƯỜNG TRÒN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Vị trí tương đối của đường thẳng (d) và đường tròn (O) được đánh giá thông qua số điểm chung của (d) với (O) .

Bảng tóm tắt ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
1. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$.
2. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn	1	$d = R$.
3. Đường thẳng cắt đường tròn	2	$d < R$.

Định nghĩa 1. Một đường thẳng được gọi là một tiếp tuyến của đường tròn nếu nó chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

Nhận xét. Như vậy, ta có: (d) là tiếp tuyến của $(O) \Leftrightarrow (d) \cap (O) = \{H\}$, khi đó ta nói “đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H ”.

1. Các tính chất của tiếp tuyến

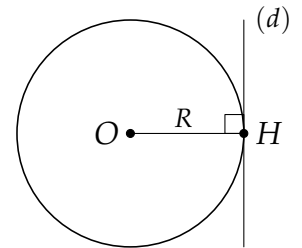
Tính chất 1. Nếu một đường thẳng là một tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Tính chất 2. Nếu đường thẳng vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

Nhận xét.

Như vậy, ta có: (d) là tiếp tuyến của (O) tại $H \Leftrightarrow (d) \perp OH$.

hoặc viết $\begin{cases} \text{Nếu } H \in (O) \text{ và } H \in (d) \\ (d) \perp OH \end{cases} \Leftrightarrow (d) \text{ là tiếp tuyến của } (O) \text{ tại } H.$



BÀI 1: Cho $(O; R)$ có M nằm ngoài đường tròn sao cho $OM = 2R$. Vẽ tiếp tuyến MA , cát tuyến MBC có B nằm giữa M và C . K là trung điểm BC .

1. Chứng minh OK là trung trực của BC .
2. Chứng minh bốn điểm M, A, K, O cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm I và tính bán kính của đường tròn đó theo R .

BÀI 2: Cho đường tròn O có điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE (D nằm giữa A và E).

1. Cho $OA = 3R$. Tính các cạnh còn lại của tam giác OAB theo R .
2. Gọi M là trung điểm DE . Chứng minh O, A, B, C, M cùng thuộc một đường tròn.

BÀI 3: Cho (O) có bán kính $OA = R$. Vẽ dây CD là trung trực của OA cắt OA tại H .

1. Chứng minh $OCAD$ là hình thoi.
2. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại C , tiếp tuyến này cắt đường OA tại I . Tính tích $OH \cdot OI$ và độ dài đoạn CI theo R .
3. Tính số đo \widehat{ODI} .

BÀI 4: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Qua C thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến d của đường tròn. Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến d . Gọi H là hình chiếu của C trên AB . Chứng minh:

1. $CE = CF$.
2. AC là phân giác góc \widehat{BAE} .
3. $CH^2 = AE \cdot BF$.

BÀI 5: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M với (O) cắt tiếp tuyến Ax tại A và tiếp tuyến By tại B của (O) lần lượt tại D, E . Chứng minh bốn điểm O, A, D, M cùng thuộc một đường tròn.

BÀI 6: Cho đường tròn (O) có bán kính $OA = R$. Dây cung BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

1. Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?
2. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , tiếp tuyến này cắt đường thẳng AO tại E . Chứng minh CE là tiếp tuyến của đường tròn (O) và tính CE theo R .

BÀI 7: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) với $OA = 2R$, đường tròn tâm I có đường kính OA cắt (O) tại B, C .

1. Chứng minh AB, AC là các tiếp tuyến của (O) .
2. Chứng minh tứ giác $OBIC$ là hình thoi.

BÀI 8: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Đường tròn tâm I đường kính AC cắt BC tại H . Trên đoạn HC lấy D sao cho $HD = HB$. Tia AD cắt (I) tại E .

1. Chứng minh $AH \perp BC$.
2. Chứng minh $DA \cdot DE = DC \cdot DH$.
3. Gọi K là trung điểm AB . Chứng minh KH là tiếp tuyến của (I) .

BÀI 9: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho $AM = 2R$; BM cắt (O) tại C . Vẽ OD vuông góc với BC (D thuộc BC).

1. Chứng minh D là trung điểm BC .
2. Gọi E là trung điểm MA . Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O) .

BÀI 10: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên đường thẳng vuông góc với AB tại O lấy điểm K sao cho K nằm ngoài (O) . Gọi C và D lần lượt là giao điểm của AK và BK với (O) (C, D khác A, B).

1. Chứng minh $AD \perp BK$ và $BC \perp AK$.
2. Gọi H là giao điểm của AD và BC . Chứng minh K, H, O thẳng hàng và bốn điểm K, C, H, D thuộc cùng một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn qua bốn điểm trên.
3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của (I) và ID là tiếp tuyến của (O) .

BÀI 11: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm S nằm ngoài đường tròn. Kẻ SA, SB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (A, B thuộc (O)). Gọi H là giao điểm của AB và OS .

1. Chứng minh OS là đường trung trực của AB .
2. Chứng minh rằng tích $OH \cdot OS$ không đổi với mọi vị trí của S ở ngoài (O) .

BÀI 12: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB với $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Hai tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại C .

1. Chứng minh OC vuông góc với AB và bốn điểm A, C, B, O cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh tam giác ABC đều và tính diện tích tam giác ABC theo R .
3. Lấy M là một điểm thuộc cung nhỏ AB của đường tròn. Vẽ tiếp tuyến tại M cắt AC và BC tại D và E . Chứng minh $AD + BE = DE$.
4. Chứng minh $\widehat{DCE} = \widehat{DOE}$.

BÀI 13: Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB . Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa đường tròn). Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A, B); kẻ tiếp tuyến với (O) cắt Ax, By lần lượt tại C và D . Chứng minh rằng

1. $\widehat{COD} = 90^\circ$.
2. $CD = AC + BD$.
3. Tích $AC \cdot BD$ không đổi khi M thay đổi trên nửa đường tròn.

BÀI 14: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi M là điểm tùy ý thuộc (O) , tiếp tuyến tại M của (O) cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) theo thứ tự ở C và D .

1. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .
2. Tìm vị trí của M để tứ giác $ABDC$ có chu vi nhỏ nhất.
3. Tìm vị trí của C và D để tứ giác $ABDC$ có chu vi bằng 14 cm, biết $AB = 4$ cm.