MỤC LỤC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TRANG BỊ CHO HỌC SINH CHUYÊN TOÁN TỪ TRUNG HỌC CƠ SỞ

1. Chuyên đề 1: Phương pháp chứng minh phản chứng:

1.1. Chứng minh phản chứng và các bước chứng minh phản chứng:

Trong *chứng minh bằng phản chứng* (tiếng La tinh là reductio ad absurdum, có nghĩa là "thu giảm đến sự vô lí"), người ta sẽ chứng minh nếu một phát biểu nào đó xảy ra, thì dẫn đến mâu thuẫn về lôgic, vì vậy phát biểu đó không được xảy ra. Phương pháp này có lẽ là phương pháp phổ biến nhất trong chứng minh toán học.

Bước 1 (phủ định kết luận): Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.

Bước 2 (đưa đến mâu thuẫn): Từ điều giả sử trên và từ giả thiết của bài toán, ta suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay với các kiến thức đã học.

Bước 3 (khẳng định kết luận): Vậy kết luận của bài toán là đúng.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Chứng minh:

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, ta sẽ biểu diễn được $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, (a,b) = 1$.

Do đó $a = b\sqrt{2}$. Bình phương hai vế ta được: $a^2 = 2b^2$. Thì vế phải chia hết cho 2 nên vế trái cũng phải chia hết cho 2 (vì chúng bằng nhau và đều là số tự nhiên). Do đó a^2 là số chẵn, có nghĩa là a cũng phải là số chẵn. Do vậy ta có thể viết $a = 2c$, trong đó c cũng là số tự nhiên. Thay vào phương trình ban đầu ta có: $(2c)^2 = 2b^2$ hay $b^2 = 2c^2$. Nhưng khi đó, tương tự như trên, b^2 chai hết cho 2 nên b phải là số chẵn. Nhưng nếu a và b đều là số chẵn thì chúng sẽ có chung một ước số là 2. Điều này trái với giả thiết $(a,b) = 1$. Vậy giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ là sai. Do đó $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Ví dụ 2: Không dùng máy tính, hãy chứng minh $6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$.

Chứng minh:

Giả sử $6 - \sqrt{35} \geq \frac{1}{10}$ hay $59 \geq 10\sqrt{35}$. Bình phương hai vế ta có: $59^2 \geq 100.35$ hay $3481 \geq 3500$, điều này vô lý. Vậy giả sử trên là sai, do đó $6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y, z, t đồng thời thỏa mãn đồng thời các đẳng thức sau:

$$x + xyzt = 1987 \quad (1)$$
$$y + xyzt = 987 \quad (2)$$
$$z + xyzt = 87 \quad (3)$$
$$t + xyzt = 7. \quad (4)$$

Chứng minh:

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn đồng thời các đẳng thức $(1),(2),(3),(4)$. Trừ từng vế các đẳng thức này ta được:

$$x - y = 1000,\ y - z = 900,\ z - t = 80.$$

Suy ra x, y, z, t có cùng tính chẵn lẻ.

Nếu x, y, z, t cùng tính chẵn thì $x + xyzt$ là số chẵn, mâu thuẫn với (1).

Nếu x, y, z, t cùng lẻ thì $x + xyzt$ vẫn là số chẵn, mâu thuẫn với (1).

Điều này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì số $2010^n - 1$ không chia hết cho $1000^n - 1$.

Chứng minh:

Giả sử với n là số nguyên dương thì $2010^n - 1$ chia hết cho $1000^n - 1$.

Khi đó, do $1000^n - 1$ chia hết cho 3 nên $2010^n - 1$ chia hết cho 3. Điều này là vô lí vì $2010^n - 1$ không chia hết cho 3. Vậy điều giả sử $2010^n - 1$ chia hết cho $1000^n - 1$ là sai. Suy ra $2010^n - 1$ không chia hết cho $1000^n - 1$.

Ví dụ 5: Chứng minh: nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là một hoán vị tùy ý của các số $1, 2, ..., n$ với n là số lẻ, thì tích $(a_1 - 1)(a_2 - 2)...(a_n - n)$ là một số chẵn.

Chứng minh:

Đầu tiên, ta có nhận xét rằng tổng của một số lẻ các số lẻ là một số lẻ. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh rằng tồn tại một hiệu $a_k - k$ nào đó là số chẵn. Giả sử rằng tất cả các hiệu $a_k - k$ đều là số lẻ. Khi đó tổng $S = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + ... + (a_n - n) = 0$, vì các số a_k là sắp xếp lại của các số $1, 2, ..., n$. Nhưng theo nhận xét trên thì S là số lẻ vì tổng của một số lẻ các số lẻ. Điều này mâu thuẫn. Do đó giả sử tất cả các hiệu $a_k - k$ là số chẵn, suy ra tích $(a_1 - 1)(a_2 - 2)...(a_n - n)$ là số chẵn.

• Có nhiều cách chứng minh về sự tồn tại vô hạn các số nguyên tố, ví dụ sau đưa ra cách chứng minh bằng phản chứng của Euclid cho kết quả này.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố.

Chứng minh:

Giả sử chỉ có hữu hạn các số nguyên tố là $p_1, p_2, ..., p_n$ và giả sử $p_1 < p_2 < ... < p_n$. Xét tích $A = p_1.p_2...p_n + 1$. Rõ ràng $A > p_n$ nên A là hợp số, do đó A có ít nhất một ước nguyên tố p. Khi đó do $p_1, p_2, ..., p_n$ là tất cả các số nguyên tố nên tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $p = p_i$.

Như vậy $A \vdots p$; $(p_1.p_2...p_n) \vdots p$ nên $1 \vdots p$, mâu thuẫn.

Do đó giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố là sai. Vậy có vô hạn các số nguyên tố.

Ví dụ 7: Cho số nguyên n là hợp số, n > 1. Chứng minh rằng n có ước nguyên tố $p \le \sqrt{n}$

Chứng minh:

Do n là hợp số nên n có thể viết dưới dạng $n = a.b$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 1, b > 1$. Bây giờ nếu cả $a > \sqrt{n}$ và $b > \sqrt{n}$ thì $ab > \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$, mâu thuẫn. Do đó phải có $a \le \sqrt{n}$ hoặc $p \le \sqrt{n}$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Kết quả trong ví dụ này có thể dùng làm tiêu chuẩn để kiểm tra một số có phải là số nguyên tố hay không. Ví dụ: Để kiểm ra số 101 có là số nguyên tố hay không, trước tiên ta tính $\sqrt{101} \approx 10,04$. Khi đó, theo Ví dụ 11,7 thì hoặc 101 là số nguyên tố hoặc 101 chia hết cho 2, 3, 5 hoặc 7 (là các số nguyên tố nhỏ hơn 10,04). Do không có số nào trong các số 2, 3, 5, 7 là ước của 101 nên 101 là số nguyên tố.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng:

a) Tích của những số nguyên có dạng $4k+1$ là số có dạng $4k+1$.

b) Tồn tại vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Chứng minh:

a) Vì với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ thì

$(4k_1+1)(4k_2+1) = 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 4k_3 + 1$, do đó tích của những số nguyên có dạng $4k+1$ là số có dạng $4k+1$.

b) ***Nhận xét:*** Mỗi số có dạng $4k+3$ sẽ có ít nhất một ước nguyên tố có dạng đó.

Thật vậy, rõ ràng n có ước cùng dạng với nó vì bản thân n là ước của n. Gọi p là ước nhỏ nhất trong các ước như thế. Nếu p là số nguyên tố thì nhận xét được chứng minh. Nếu p là hợp số thì p phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố lẻ (do p lẻ). Các thừa số này không thể có cùng dạng $4m+1$ (vì khi đó theo câu a p sẽ có dạng $4m+1$). Vậy ít nhất một thừa số nguyên tố có dạng $4k+3$. Do ước của p cũng là ước của n nên n có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố có dạng $4k+3$ là $p_1, p_2, ..., p_n$.

Xét số $N = 4p_1p_2...p_n - 1$ thì N có dạng $4k+3$. Theo nhận xét trên thì N có ít nhất một ước nguyên tố có dạng $4k+3$. Nhưng từ cách xác định N thì N không chia hết cho bất cứ số nguyên tố nào có dạng $4k+3$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả sử trên là sai. Vậy có vô số các số nguyên tố có dạng $4k+3$.

Ví dụ 9: Cho a, b là hai số thực sao cho với mọi số thực $\varepsilon > 0$ ta luôn có $a < b + \varepsilon$. Chứng minh rằng $a \le b$.

Chứng minh: Giả sử ngược lại là $a > b$. Khi đó $\frac{a-b}{2} > 0$. Do $a < b + \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$ nên với $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, ta có: $a < b + \frac{a-b}{2}$ hay $a < b$. Điều này mâu thuẫn với giả sử $a > b$. Suy ra giả sử $a > b$ là sai. Vậy $a \le b$.

Ví dụ 10: Cho a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương x, y để $ax+by=ab$.

Chứng minh:

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x_o, y_o thỏa mãn đẳng thức đã cho, tức là: $ax_o+by_o=ab$ (1)

Ta có: $ax_o=ab-by_o=b(a-y_o)\vdots b$. Vì $(a,b)=1$ nên $x_o \vdots b$.

Do đó, tồn tại $x_1\in\mathbb{N}^*$ sao cho $x_o=bx_1$.

Tương tự, tồn tại $y_1\in\mathbb{N}^*$ sao cho $y_o=ay_1$. Thay vào đẳng thức (1) ta được $abx_1+aby_1=ab$ hay $x_1+y_1=1$. Điều này vô lí vì $x_1y_1\ge 1$. Vậy điều giả sử trên là sai. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, ta luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số $f(n)=n^3+an^2+bn+c$ không phải là số chính phương.

Chứng minh:

Giả sử ngược lại, tồn tại $a,b,c\in\mathbb{Z}$ để với mọi số nguyên dương n thì $f(n)$ là số chính phương.

Khi đó: $f(1)=1+a+b+c$, $f(2)=8+4a+2b+c$,

$f(3)=27+9a+3b+c$, $f(4)=64+16a+4b+c$,

là các số chính phương.

Nhận xét rằng: Một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1. Do đó số dư trong phép chia hiệu của hai số chính thương cho 4 chỉ có thể là 0, 1 hoặc –1.

Ta có: $f(4)-f(2)=12a+2b+56=4(3a+14)+2b$, mà 2b là số chẵn nên theo nhận xét trên thì $2b\vdots 4$. (1)

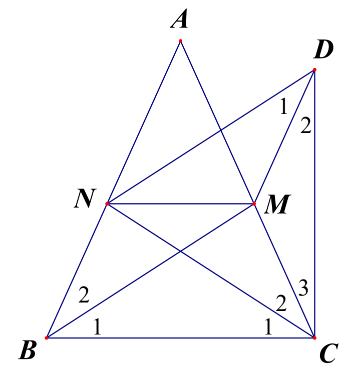
Tương tự, $f(3)-f(1)=8a+2b+26=4(2a+6)+2b+2$, mà $2b+2$ cũng là số chẵn nên $(2b+2)\vdots 4$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2\vdots 4$, vô lí. Do đó giả sử trên là sai. Vậy với mọi số nguyên a, b, c luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số $f(n)=n^3+an^2+bn+c$ không phải là số chính phương.

Ví dụ 12: Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác đó cân.

Chứng minh:

Xét ΔABC có hai đường phân giác trong bằng nhau $BM = CN$. Ta sẽ chứng minh ΔABC cân tại A.
Giả sử ΔABC không cân tại A.
Xét $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow \widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ (1). Qua M kẻ đường thẳng song song AB, qua N kẻ đường thẳng song song BM cắt nhau tại D.
Khi đó $\Delta BNM = \Delta DMN \Rightarrow BM = DN, \widehat{B_2} = \widehat{D_1}$. Theo giả thiết $BM = CN \Rightarrow ND = NC$. Vậy ΔNCD cân tại $N \Rightarrow \widehat{NCD} = \widehat{NDC}$ (2).



Vì $\widehat{B_2} = \widehat{D_1}$ và $\widehat{B_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{D_1} > \widehat{C_2}$ (3).

Từ $(2),(3) \Rightarrow \widehat{D_2} < \widehat{C_3} \Rightarrow MC < MD = BN$. Hai tam giác BNC, BMC có BC chung, $CN = BM, BN > CM \Rightarrow \widehat{C_1} > \widehat{B_1}$, mâu thuẫn với (1).

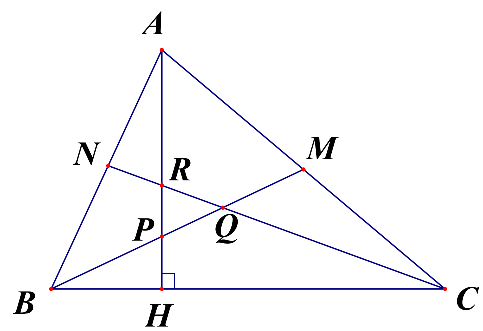
Trường hợp $\widehat{B} < \widehat{C}$, chứng minh tương tự dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C}$, suy ra ΔABC cân tại A.

Ví dụ 13: Cho một tam giác có ba góc nhọn. Qua một đỉnh của tam giác đó vẽ đường cao, qua đỉnh thứ hai vẽ trung tuyến, qua đỉnh thứ ba vẽ phân giác. Chứng minh rằng nếu ba đường đã vẽ được cắt nhau, tạo thành một tam giác thì tam giác đó không phải là tam giác đều.

Chứng minh:

Xét ΔABC có ba góc nhọn và đường cao AH, đường trung tuyến BM, đường phân giác CN cắt nhau và tạo thành ΔPQR như hình vẽ. Ta cần chứng minh ΔPQR không là tam giác đều.
Giả sử ngược lại ΔPQR đều. Khi đó trong tam giác vuông CRH có $\widehat{CRH} = 60^0$
$\Rightarrow \widehat{RCH} = 30^0 \Rightarrow \widehat{C} = 2\widehat{RCH} = 60^0, \widehat{HAC} = 30^0$



ΔAPM có $\widehat{PAM} = 30^0, \widehat{APM} = 60^0 \Rightarrow \widehat{AMP} = 90^0$ hay $BM \perp AC$.

ΔABC có đường trung tuyến BM là đường cao nên ΔABC cân. Hơn nữa $\widehat{C} = 60^0$ nên ΔABC đều, dẫn đến P, Q, R trùng nhau, trái giả thiết.

Vậy ΔPQR không thể đều.

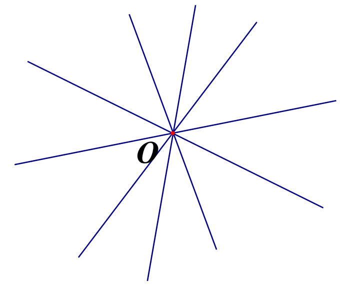
Ví dụ 14: Qua điểm O trong mặt phẳng, vẽ 5 đường thẳng phân biệt.

a) Có bao nhiêu góc đỉnh O được tạo thành trong hình vẽ?

b) Chứng minh rằng trong các góc đó, có ít nhất 1 góc không vượt quá 36^0.

Chứng minh:

a) 5 đường thẳng cắt nhau tại O tạo thành 10 tia chung gốc O. Mỗi tia trong 10 tia này tạo với 9 tia còn lại thành 9 góc, có 10 tia nên có $9.10 = 90$ góc. Nhưng mỗi góc đã được tính 2 lần nên có tất cả $90 : 2 = 45$ góc đỉnh O được tạo thành.



b) Trong 45 góc đỉnh O thì chỉ có 10 góc không có điểm trong chung có tổng số đo 360^0. Giả sử tất cả các góc đều lớn hơn 36^0 thì 10 góc vừa nêu có tổng số đo lớn hơn $10.36^0 = 360^0$, mâu thuẫn. Vậy phải có ít nhất một góc không vượt quá 36^0.

Ví dụ 15: Trên một mặt phẳng có thể xếp được 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác được không?

Giải:

Câu trả lời là không. Thật vậy, giả sử xếp được 7 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác.

Ta lập bảng gồm 7 hàng, 7 cột và đánh dấu các ô: nếu hai đoạn thẳng cắt nhau ta đánh dấu X, nếu không cắt nhau ta đánh dấu 0. Chẳng hạn nếu đoạn thẳng thứ I cắt đoạn thẳng thứ j ta đánh dấu X vào giao của dòng i và cột j, dòng j và cột i. Khi đó mỗi dòng có 3 dấu X.

	1		i		j		7
1	0						
		0					
i			0		X		
				0			
j			X		0		
						0	
7							0

Mặt khác bảng sẽ có 7 dấu 0 xếp theo đường chéo của hình vuông. Như nói ở trên nếu ô giao của dòng I cột j có dấu X thì ô giao của dòng j cột I cũng có dấu X, hai ô này đối xứng qua đường chéo gồm các ô có dấu 0. Vì vậy các ô được đánh dấu X trong bảng phải là số chẵn. Mâu thuẫn vì có 21 ô có dấu X theo giả thiết.

BÀI TẬP:

1.Chứng minh rằng:

a) Tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là một số vô tỉ.

b) Không tồn tại số hữu tỉ dương nhỏ nhất.

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là tối giản.

3. Tích của 43 số nguyên có trước bằng 1. Chứng minh rằng tổng của chúng không thể bằng 0.

4. Gọi $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ là các số tự nhiên thỏa mãn $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... \frac{1}{a_{2000}} = 1$. Chứng mỉnh rằng tồn tại ít nhất một số a_k là số chẵn.

5. *Số palindrome* (còn gọi là *số xuôi ngược* hay *số đối xứng*) là số mà đọc xuôi hay đọc ngược đều như nhau, ví dụ các số 151, 1991, 1211121, 15677651 là những số đối xứng. Chứng minh rằng không tồn tại số đối xứng dương chia hết cho 10.

6. Chứng minh: với mọt số tự nhiên n ta luôn có $A = n^2 + 3n - 38$ không chia hết cho 49.

7. Cho n là số tự nhiên khác 0; a là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng n^2+2 không thể là số chính phương.

8. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n > 2$ thì giữa n và n! có ít nhất một số nguyên tố. Từ đó suy ra có vô hạn các số nguyên tố.

9. Đặt các số $1, 2, 3, ..., 25$ trên một vòng tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng luôn có 3 số liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 39.

10. Cho dãy số: $3, 7, 11, 15, 19, 23, ...$ và $5, 11, 17, 23, 29, 35, ...$ Chứng minh rằng trong những số hạng của mỗi dãy số trên có vô số các số nguyên tố.

11. Chứng minh rằng trong một tam giác, góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

12. Chứng minh rằng trong một tam giác, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nữa cạnh huyền.

13. Chứng minh rằng nếu tam giác có 1 góc bằng 30^0 và cạnh đối diện với góc này bằng nữa một cạnh khác thì tam giác đó là tam giác vuông.

14. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:

$$M = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

không thể là số nguyên.

15. Trong 1 mặt phẳng cho n điểm $(n > 3)$ thỏa điều kiện: bất kỳ đường thẳng nào đi qua 2 trong trong những điểm đó đều chứa 1 điểm khác trong các điểm đã cho. Chứng minh tất cả các điểm trên cùng nằm trên 1 đường thẳng.

2. Chuyên đề 2: Nguyên lí Dirichlet:

2.1 GIỚI THIỆU VỀ NGUYÊN LÍ DIRICHLET

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lí mang tên ông – nguyên lí Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi cái lồng có không quá 2 con thỏ*. Nói cách khác, *nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con trở lên*. Một cách tổng quát hơn, **nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với $k = kn + r\ (0 < r \le k-1)$) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ n + 1 con thỏ trở lên.**

Ta cũng có thể dễ dàng chứ minh nguyên lí Dirichet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứ n + 1 con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có m con thỏ với $m = kn + r\ (0 < r \le k-1)$.

Nguyên lí Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về ciệc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lí Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

2.2 MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI CHIA HẾT

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m "con thỏ", các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những "lồng"; như vậy sẽ có n cái lồng: lồng i $(0 \le i \le b)$ gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng:

a) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).

b) Trong 2012 sô tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Giải

a) Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 "con thỏ"; "lồng i" gồm các số chia cho 2011 dư i $(0 \le i \le 2011)$ nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, …, lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lí Dirchlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.

b) Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 nhận nhiều nhất 2012 số dư khác nhau là 1, 2, …, 2011. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

1) Trong n + 1 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).
2) Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 20122012…2012 (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

Giải

Xét 2014 số sau: 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2102).

Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho 2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là a = 2012...2012 (gồm i bộ 2012) và b = 2012...2012 (gồm j bộ 2012) với $1 \le i \le j \le 2014$. Khi đó

$b - a = 2012...2012.10^{4i}$ (gồm j – i bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.

Lại có ƯCLN$(10^{4i}, 2013) = 1$ nên số 2012...2012 (gồm j – i bộ 2012 sẽ chia hết cho 2013.

Bài toán được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là số có dạng 2012...2012, "lồng" là số dư trong phép chia cho 2013).

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 (= 2013 + 1) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 111...1 chia hết cho 29.

VÍ DỤ 3. Cho sáu số tự nhiên a, b, c, d, e, g. Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

Giải

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a + b$$
$$S_3 = a + b + c$$
$$S_4 = a + b + c + d$$
$$S_5 = a + b + c + d + e$$
$$S_6 = a + b + c + d + e + g.$$

Đem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nếu tồn tại $S_i (i = 1, 2, ..., 6)$ chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có S_i nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia hết cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau $(1, 2, 3, 4, 5)$; theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn S_2 và S_5 do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là $c + d + e$ chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là các số S_i, "lồng" là số dư trong phép chia cho 6).

Nhận xét. Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n.

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng:
a) Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n.
b) Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.
Giải:
a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n. Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là n – 1 số dư khác nhau $(1, 2, 3, ..., n-1)$, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó a – b chia hết cho n, điều này mâu thuẫn với $0 < a - b < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9. Giả sử đó là N và tổng các chữ số của N là s. Khi đó 11 số $N, N+1, N+2, N+3, ...N+9, N+19$ sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của $N, N+1, N+2, ..., N+9$ lần lượt bằng $s, s+1, s+2, ..., s+9$. Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của N + 10 bằng s + 1, tổng các chữ số của N + 19 bằng s + 10.
Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $s, s+1, s+2, s+3, ..., s+9, s+10$ luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là $s + i (0 \le i \le 10)$: Nếu $0 \le i \le 9$ thì ta chọn được số $N + i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu i = 10 thì ta chọn được số N + 19 thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Nhận xét. Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

VÍ DỤ 5. Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?
Giải
Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.
Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k + 2$ $(k = 0, 1, 2, ..., 670)$. Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất $672 (= 671 + 1)$ số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được $a, b (a > b)$ sao cho $a - b \le 2$ (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn $3.671 = 2013$. Điều này mâu thuẫn giả thiết với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012 - 1 = 2011$), nghĩa là a – b bằng 1 hoặc 2.
- Nếu a – b = 1 thì hiển nhiên a + b chia hết cho a – b (= 1)

- Nếu a – b = 2 thì a + b là số chẵn nên a + b chia hết cho a – b (= 2).
Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

Dạng 2. BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHẦN TỬ TRONG TẬP HỢP

Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau.

VÍ DỤ 6. Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ với $0 < a_1 < a_2 < ... < a_6 < 10$.

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5 + 5 = 10$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

(Ở đây, có 10 "thỏ" là 10 số $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$ và có 9 "lồng" là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Nhận xét. Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hơn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

VÍ DỤ 7. Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Giải

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, ..., a_{700}$. Ta xét các tập hợp sau:

$$A = \{a_1, a_2, ...a_{700}\};$$
$$B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, ...a_{700} + 6\};$$
$$C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, ...a_{700} + 9\};$$

Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là 700.3 = 2100, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá 2006 + 9 = 2015, mà 2100 > 2015 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại

hai phần tử bằng nhau. Vì mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B, hoặc A và C, hoặc B và C.
- Nếu hai phần tử thuộc A và B, chẳng hạn $a_i = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 6$.
- Nếu hai phần tử thuộc A và C, chẳng hạn $a_i = a_j + 9$ suy ra $a_i - a_j = 9$.
- Nếu hai phần tử thuộc B và C, chẳng hạn $a_i + 3 = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 3$.

Như vậy luôn tồn lại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.
(Ở đây 2100 "thỏ" là 2010 phần tử của ba tập hợp A, B, C; 2015 "lồng" là các số từ 1 đến 2015)
Nhận xét. Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau:
Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3;6;9\}$.
Chứng minh.
Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho3 dư 2.
Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà 505 = 3.168 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.
Trong tập hợp này, hai số bất kì có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn 12.168 = 2016 > 2006, trái với đề bài.
Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà $x - y \in E$.

VÍ DỤ 8. Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n. Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n.
Giải
Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \text{ và } B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$$

với $a < n \ (i = 1,2,...,m)$, $b_j < n \ (j = 1,2,...,k)$ và $m + l \geq n$.

Xét tập hợp $C = \{n - b_1, n - b_2, ..., n - b_k\}$.

Nhận thấy, có tất cả n – 1 số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n, các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số các phần tử của A và C không nhỏ hơn n. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C, do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C, tức là tồn tại hai số a_p và $n - b_q$ mà

$a_p = n - b_q \Leftrightarrow a_p + b_q = n$ (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi m + k "thỏ" là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C, n – 1 "lồng" là các số nguyên dương từ 1 đến n – 1).

Dạng 3. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BẢNG Ô VUÔNG

Một bảng vuông kích thước n x n gồm n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.
Một bảng các ô vuông kích thước m x n gồm m dòng và n cột.

VÍ DỤ 9. Cho một mảng ô vuông kích thước 5 x 5. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số -1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Giải

Bảng ô vuông kích thước 5 x 5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập {–1; 0; 1}. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5} có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 các giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh.
(Ở đây "thỏ" là tổng nên có 12 "thỏ", "lồng" là giá trị của tổng nên có 11 "lồng").
Nhận xét. Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:
Cho một bảng ô vuông kích thước n x n. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số –1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

VÍ DỤ 10. Trên bảng ô vuông kích thước 8 x 8, ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.
Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).
Ta có 64 = 14.4 + 7 nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn 4 + 1 = 5. Bài toán được chứng minh.
(Ở đây, "thỏ" là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; "lồng" là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

Nhận xét.

- Mấu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiện lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là (8 – 1) + (8 – 1) = 14 ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà m = kn + r $(1 \le r \le k-1)$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn n + 1 con thỏ.

- Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8 x 10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả cầu bài toán còn đúng hay không? Hãy chứng minh.

Dạng 4. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TẾ

Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lí Dirichlet.
Điều quan trọng nhất là phải xác định được “thỏ” và “lồng”.

VÍ DỤ 11. Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau.
Giải
Ta coi “thỏ” là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; “lồng” là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi (i = 1, 2, 3, 4). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà 9 = 4.2 + 1, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn 2 + 1 = 3 thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

VÍ DỤ 12. Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.
Giải
Ta coi “thỏ” là đấu thủ nên có 8 thỏ; “lồng” là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: “lồng i” gồm các đấu thủ đã thi đấu i trận (với i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).
Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.
Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cược đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu dùng một số trận.

VÍ DỤ 13. Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Giải
Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.
Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2.2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).
Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề bài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.
(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là "thỏ" nên có 5 thỏ, coi đề tài là "lồng" nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

Dạng 5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ SẮP XẾP

Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận lôgic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

VÍ DỤ 14. Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.
Giải
Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.
Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người A_i và B_i quen nhau $(1 \le i \le k)$.
Giả sử $k \le 9$, kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M. Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quen hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà 19 = 9.2 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B. Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau: trong k – 1 thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp A_k và B, còn thuyền thứ k + 1 xếp A và B_k. Điều này mâu thuẫn với giả sử.
Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

Dạng 6. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

VÍ DỤ 15. Chứng minh: trong ba số thực bất kì luôn tìm được hai số có tích không âm.
Giải
Ta coi "thỏ" là số thực nên có 3 con thỏ; coi "lồng là loại số (số không âm hoặc số âm) nên có 2 lồng. Có 3 con thỏ nhốt vào 2 lồng nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 2 thỏ chứa trong một lồng, tức là tồn tại hai số không âm (hoặc 2 số âm), khi đó tích của chúng sẽ thành số không âm.

VÍ DỤ 16. Chứng minh rằng trong bốn số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp $A=\{1,2,3,...,3^4\}$ có ít nhất hai số x, y thỏa mãn $0<\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right|<1$.

Giải

Ta có $\forall x\in A$ thì $1\le\sqrt[4]{x}\le 3$

Xét ba tập hợp: $B=\{b\,|\,1\le b\le 2\}$; $C=\{c\,|\,2\le c\le 3\}$ và $D=\{3\}$. Với 4 số có dạng $\sqrt[4]{x}$ (với $x\in A$) sẽ thuộc vào một trong ba tập hợp B, C, D ở trên nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một tập hợp, tập hợp đó là B hoặc C. Gọi hai số đó là $\sqrt[4]{x},\sqrt[4]{y},$ ta có $0<\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right|<1$.

3. Chuyên đề 3: Định lý Bézout – Lược đồ Horner:

3.1 KIẾN THỨC CƠ BẢN

3.1.1 Định lí Bézout

a. Định lí: Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức x – a bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.

Chứng minh: Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho x – a là $Q(x)$.

Đa thức chia bậc một nên dư là một hằng số r.

Ta có $f(x) = (x-a)Q(x) + r$ với mọi x.

$$f(a) = (a-a)Q(a) + r = 0 + r = r.$$

Vậy $f(a) = r$ (đpcm)

Chú ý. Từ định lý Bézout ta suy ra hệ quả sau.

b. Hệ quả. Đa thức $f(x)$ chia hết cho x – a khi và chỉ khi $f(a) = 0$ (hay a là nghiệm của đa thức $f(x)$).

c. Ứng dụng của định lí Bézout:

- Định lý Bézout giúp chúng ta tính số dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho x – a mà không cần thực hiên phép chia đa thức.

- Hệ quả của định lí Bézout giúp chúng ta phân tích đa thức bậc cao (bậc ≥ 2) thành nhân tử: Nếu $f(a) = 0$ thì $f(x)$ phải chứa nhân tử (x – a).

3.1.2 Lược đồ Horner

Ngoài các phương pháp đặt tính chia đa thức, hệ số bất định, trị số riêng ta còn có thể tìm được kết quả khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức x – a; đồng thời cũng tính được giá trị của đa thức $f(x)$ tại x = a bằng lược đồ Horner (hay thuật toán Horner) như sau:

Nếu đa thức bị chia là $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, đa thức chia là x – a, đa thức thương là: $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$ thì giữa các hệ số $a_n; a_{n-1}; ...; a_1; a_0$ với $b_{n-1}; b_{n-2}; ...; b_1; b_0$ và hằng số a có mối quan hệ sau:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + a.b_{n-1}$$
$$b_{n-3} = a_{n-2} + a.b_{n-2}$$
....
$$b_1 = a_2 + a.b_2$$
$$b_0 = a_1 + a.b_1$$
$r = a_0 + a.b_0$ (r là số dư)

Để cho tiện ta thường lập bảng các hệ số:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$	$b_{n-3} = b_{n-2} + ab_{n-1}$	...	$b_0 = a_1 + ab_1$	$r = a_0 + ab_0$

3.2 VÍ DỤ MINH HỌA

Áp dụng hệ quả định lí Bézout phân tich các đa thức (thường có các hệ số nguyên và nghiệm nguyên) thành nhân tử, ta thường làm như sau:

Bước 1: Chọn một giá trị x = a nào đó (thường là ước của hạng tử tự do trong đa thức cần phân tích) tìm $f(a)$.

Bước 2: Nếu $f(a)=0$ thì $f(x)=f(x-a).g(x)$. Để tìm g(x) ta dùng phép chia đa thức $f(x)$ cho x – a, hoặc dùng lược đồ Horner, hoặc tách thêm bớt các hạng tử một cách hợp lí sao cho xuất hiện nhân tử chung x – a.

Bước 3: Tiếp tục phần tích $g(x)$ thành nhân tử nếu còn phân tích được.

Ví dụ 1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $2x^3-7x^2+x+10$.

Nhận xét: Thay x bằng các giá trị là ước của 10 (± 1; ± 2; ± 5; ± 10) ta thấy với x = – 1 thì $f(-1)=-2-7-1+10=0$. Vậy $f(x)=(x+1).g(x)$. Ta tìm $g(x)$:

Cách 1: Tách thêm bớt các hạn tử:

$$f(x)=2x^3-7x^2+x+10=2x^3+2x^2-9x^2-9x+10x+10.$$
$$=2x^2(x+1)-9x(x+1)+10(x+1)$$
$$=(x+1)(2x^2-9x+10).$$

Phân tích tiếp $2x^2-9x+10=2x^2-4x-5x+10=2x(x-2)-5x(x-2)=(x-2)(x-5).$

Vậy $f(x)=(x+1)(x-2)(2x-5).$

Cách 2: Dùng đặc tính chia đa thức:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3-7x^2+\quad x+10 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^3+2x^2\qquad\qquad & 2x^2-9x+10 \\ \cline{1-1}
-9x^2+\quad x+10 & \\
-\ -9x^2-\ 9x\qquad & \\ \cline{1-1}
10x+10 & \\
-\ 10x+10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Nhận xét với $x=2$ thì $g(2)=0$ rồi chia tiếp $g(x)=2x^2-9x+10$ cho $x+2$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^2-9x+10 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^2-4x\qquad & 2x-5 \\ \cline{1-1}
-5x+10 & \\
-\ -5x+10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Vậy $f(x)=(x+1)(x-2)(2x-5).$

Cách 3: Dùng lược đồ Horner:

Hệ số của $f(x)$		2	-7	1	10
Hệ số của $g(x)$	$a=-1$	2	$-7+(-1).2=-9$	$1+(-1).(-9)=10$	$10+(-1).10=0=r$

Vậy $g(x)=2x^2-9x+10$ và $f(x)=(x+1)(2x^2-9x+10)$

Ví dụ 2. Cho đa thức $f(x)=a_{10}x^{10}+a_9x^9+...a_2x^2+a_1x+a_0$. Chứng minh rằng:

a) Đa thức $f(x)$ chia hết cho x – 1 nếu tổng các hệ số bằng 0.

b) Đa thức $f(x)$ chia hết cho x + 1 nếu các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các chữ số của hạng tử bậc lẻ.

Ví dụ 3. Không dùng chia đa thức, xét xem đa thức $h(x) = x^3 - 7x + 6$

a) Có chia hết cho x + 2 hay không?

b) Có chia hết cho x – 2 hay không?

c) Có chia hết cho x – 4 hay không?

Ví dụ 4. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng khi chia cho x + 2 thì dư – 4; chia cho $x-3$ thì dư 21; chia cho $x^2 - x - 6$ thì được thương là $x^2 + 4$ và còn dư.

Ví dụ 5. Cho đa thức $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 1945x - 2012$ chia cho x – 3.

a) Dùng lược đồ Horner để tính số dư và viết đa thức thương.

b) Dùng Định lí Bézout để tính số dư.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng ba phương pháp: Tách và thêm bớt hạng tử. chia đa thức và dùng lược đồ Horner:

a) $p(x) = x^3 + 6x^2 - 12x - 42$.

b) $q(x) = x^3 - 7x + 6$.

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 104x + 105$.

d) $h(x) = x^6 - 12x^4 + 49x^2 - 36$.

2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng cách áp dụng định lý Bézout:

a) $A = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; b) $B = (x+y)^5 - x^5 - y^5$.

3. Tìm dư trong phép chia:

a) $x^{21} : (x^2+1)$; b) $x^{63} : (x^2+1)$.

4. Tìm dư của phép chia $f(x) = x^{67} + x^{47} + x^{27} + x^7 + x + 1$ cho:

a) $x+1$; b) x^2+1; c) x^2-1.

5. Tìm giá trị của a để:

a) $f(x) = 18x^2 + a$ chia hết cho $3x+5$;

b) $g(x) = x^4 + ax^2 + 16$ chia hết cho $x^2 + 4x + 4$;

c) $h(x) = 3x^2 + ax - 32$ chia $x+5$ có số dư là 3.

6. Tìm a và b để:

a) $f(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho $x^2 - 5x + 6$;

b) $g(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 + x - 2$ dư $2x+1$;

c) $h(x) = 3x^3 + ax + b$ chia $x+1$ dư 6; chia $x-3$ dư 70.

7. Cho $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + k$ và $g(x) = x^2 + x - 2$. Tìm giá trị của k để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$;

a) Bằng phương pháp sử dụng định lý Bézout.

b) Dùng lược đồ Horner.

8. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng khi chia cho x – 2 thì dư 4; chia cho x + 5 thì dư – 17; chia cho $x^2 + 3x - 10$ thì được thương là $x^2 + 1$ và còn dư.

9. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho giá trị của $f(n) = n^3 + 2n^2 + 17$ chia hết cho giá trị của $g(n) = n + 3$ (bằng ba cách: Chia đa thức; dùng định lí Bézout và lược đồ Horner).

10. Không làm phép chia, tìm các giá trị nguyên của k để:

a) Giá trị của biểu thức $f(x) = 2k^2 - k - 1$ chia hết cho giá trị của biểu thức $k - 2$;

b) Giá trị của biểu thức $g(k) = k^2 + 5k - 19$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2k - 3$.

11. Cho $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2012} + (x^2 - x - 1)^{2012} - 2$. Chứng minh $f(x) \vdots (x^2 - 1)$.

12. Chứng minh rằng:

Nếu đa thức bị chia là: $P(n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 x$, đa thức chia là: $x - a$, đa thức thương là: $Q_{n-1}(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + a_0$, dư là: r thì giữa các hệ số $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ với $b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0$; hằng số a và số dư r có mối quan hệ sau:

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$$
$$b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$$
....
$$b_1 = a_2 + ab_2$$
$$b_0 = a_1 + ab_1$$
$r = a_0 + ab_1$ (r là số dư).

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức $f(n) = 3n^3 - n^2 - 2n + 3$ chia hết cho giá trị biểu thức $n^2 - n$.

4. Chuyên đề 4: Dấu tam thức bậc hai:

Đây là chuyên đề rất dễ tìm thấy trong nhiều tài liệu vì thế ở chuyên đề này chúng tôi chỉ giới thiệu sơ lược mà không đi vào các bài giải chi tiết. Người đọc có thể tự tham khảo thêm.

4.1 KIẾN THỨC CƠ BẢN

4.1.1 Định lí về dấu của tam thức bận hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

a) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm và:

• Với mọi x nằm *trong* khoảng hai nghiệm thì $f(x)$ *trái* dấu với a;

• Với mọi x nằm *ngoài* khoảng hai nghiệm thì $f(x)$ *cùng* dấu với a.

Lưu ý. Nhớ câu "trong trái, ngoài cùng".

Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

Giả sử tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 $(x_1 < x_2)$. Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta suy ra:

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2.$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2. \end{array}\right.$$

4.1.2 Điều kiện để bất phương trình bậc hai nghiệm đúng với mọi x.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$

a) $f(x) > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

b) $f(x) \geq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

c) $f(x) < 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

d) $f(x) \leq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Lưu ý

– Các kết quả trên đều được suy ra từ định nghĩa về đấu của tam thức bậc hai.

4.2 VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình:

$$a) x^2 - 3x + 2 > 0; \qquad b) 2x^2 + 5x + 2 \leq 0$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{2}{1-x} + \dfrac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị của m để biểu thức sau có giá trị không âm với mọi x:

$$f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m.$$

Ví dụ 4. Tìm giá trị của m để nghiệm của bất phương trình sau là mọi số thực x

$$(m+2)x^2+4x+3<0.$$

Ví dụ 5. Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$. Chứng minh rằng điều kiện để $f(x)\geq 0$ với mọi x và xảy ra được $f(0)=0$ là $a>0$ và $\Delta=0$.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình:

a) $x^2-x-1>0$; b) $x^2-14x+29<0$.

2. Tìm giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x:

$$(m-1)x^2-2x+1>0.$$

3. Cho phương trình

$$x^2-2mx+3m+1=0.$$

Tìm giá trị của m để phương trình:

a) Có nghiệm;

b) Có hai nghiệm trái dấu;

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

4. Cho biểu thức

$$A=x^2-(m+1)x+1.$$

Tìm giá trị của m để $A\geq 0$ với mọi x.

5. Cho biểu thức

$$A=-x^2+4mx-(m+1).$$

Tìm giá trị của m để biểu thức A có giá trị lớn nhất là 2.

6. Cho biểu thức

$$A=\frac{2x^2+mx+n}{x^2+1}.$$

Tìm các giá trị của m, n để biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất là 3.

5. Chuyên đề 5: Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên:

5.1 PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

5.1.1 Biến đổi phương trình về dạng $A_1A_2...A_n = k$ trong đó $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ là các đa thức hệ số nguyên, k là số nguyên

Phương pháp: Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ, phân tích đa thức thành nhân tử đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất của các A_i để phân tích $k = k_1k_2...k_n$ (với $k \in \mathbb{Z}$) rồi dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1 = k_1 \\ A_2 = k_2 \\ \quad ... \\ A_n = k_n \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2xy - x - y = 1$.

Giải.

Biến đổi phương trình thành $4xy - 2x - 2y = 2$

$\Leftrightarrow 2x(2y-1) - (2y-1) = 3 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1) = 3$.

Vì x và y là các số nguyên nên $2x-1$ và $2y-1$ là các số nguyên.

Do vai trò của x, y như nhau, không giảm tổng quát giả sử $x \geq y$ nên $2x - 1 \geq 2y - 1$. Mà $3 = 3.1 = (-3)(-1)$ nên xảy ra hai trường hợp

$1)\begin{cases} 2x-1=3 \\ 2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases};$

$2)\begin{cases} 2x-1=-1 \\ 2y-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1. \end{cases}$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $(x; y)$ là $(2;1), (1;2), (0;-1), (-1;0)$.

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng $ax + by + cxy = d$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên.

Ví dụ 2. Tìm số nguyên x để $x^2 + x + 2009$ là số chính phương.

Giải.

Ta có $x^2 + x + 2009 = y^2 (y \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2 - (2y)^2 = -8035$

$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1) = -8035.$

Do $y \in \mathbb{N}$ nên $2x + 2y + 1 \geq 2x - 2y + 1$, và chúng đều là số nguyên.

Ta có sự phân tích $-8035 = 1607.(-5) = (-1607).5 = 1.(-8035) = (-8035).1$.

Vì vậy xảy ra bốn trường hợp

$$1)\begin{cases}2x+2y+1=1607\\2x-2y+1=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=1602\\4y=1612\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=400\\y=403.\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}2x+2y+1=-1607\\2x-2y+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=-1602\\4y=1612\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-401\\y=403.\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}2x+2y+1=1\\2x-2y+1=-8035\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=-8034\\4y=8036\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2009\\y=2009.\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}2x+2y+1=-1\\2x-2y+1=8035\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2=8034\\4y=8036\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2008\\y=2009.\end{cases}$$

Vậy x có thể là $400,-401,-2009,2008$.

5.1.2 Biến đổi phương trình về dạng $a_1A_1^2+a_2A_2^2+...+a_nA_n^2=k$, trong đó $A_i(i=1,...,n)$ là các đa thức hệ số nguyên, a_i là số nguyên dương, k là số tự nhiên

Phương pháp: Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ $(a+b)^2$, đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất các a_i, A_i để phân tích thành $k=a_1k_1^2+a_2k_2^2+...+a_nk_n^2$ (với $k_i\in\mathbb{Z}$), dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases}A_1^2=k_1^2\\A_2^2=k_2^2\\\quad ...\\A_n^2=k_n^2\end{cases}$$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+5y^2+6z^2+2xy-4xz=10$.

Giải.

Biến đổi như sau

$[x^2+2x(2y-2z)+(y-2z)^2]-(y-2z)^2+5y^2+6z^2=10$

$\Leftrightarrow(x+y-2z)^2+4y^2+4yz+2z^2=10$

$\Leftrightarrow(x+y-2z)^2+(2y+z)^2+z^2=10.$

Nhận thấy x,y,z là các số nguyên và $2y+z+z=2(y+z)$ là số chẵn, nên $(2y+z)^2$ và z^2 là hai số chính phương cùng tính chẵn lẻ, nên viết

$$10=0^2+3^2+1^2.$$

Xảy ra các khả năng sau

$$1)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\(2y+z)^2=3^2\\z^2=1\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(1;1;1),(4;-2;1),(-4;2;-1),(-1;-1;-1). \qquad (*)$$

$$2)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\ (2y+z)^2=1^2\\ z^2=3\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$(7;-1;3),(8;-2;3),(-8;2;-3),(-7;1;-3).$ $(**)$

Vậy có tất cả 8 bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn được mô tả ở $(*)$ và $(**)$.

5.2 PHƯƠNG PHÁP RÚT MỘT ẨN THEO ẨN CÒN LẠI

Xét phương trình tìm nghiệm nguyên dạng $F(x,y)=0$

5.2.1 Nếu $F(x,y)$ **là đa thức bậc nhất đối với** x **(hoặc** y**) với hệ số nguyên** thì ta sẽ biểu diễn được x và y (hoặc y theo x) rồi sử dụng phép chia đa thức và tính chất chia hết để giải.

5.2.2 Nếu $F(x,y)$ **là đa thức bậc hai đối với** x **(hoặc** y**) với hệ số nguyên** thì ta sẽ coi $F(x,y)=0$ là phương trình bậc hai ẩn x (hoặc y) để xét điều kiện Δ phải là số chính phương.

Ví dụ 4. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2-2xy+y-5x+2=0.$

Giải.

Cách 1. Phương trình này chỉ chứa bậc nhất đối với y nên ta có thể rút y theo x.

Ta có $(1-2x)y=-3x^2+5x-2$.

Do x nguyên nên $1-2x\neq 0$. Suy ra

$$y=\frac{3x^2-5x+2}{2x-1}\Leftrightarrow 4y=\frac{12x^2-20x+8}{2x-1}=6x+7+\frac{1}{2x-1}.$$

Do x,y là các số nguyên suy ra $\frac{1}{2x-1}$ là số nguyên, nên $2x-1\in\{1;-1\}$. Từ đó tìm được $(x;y)$ là $(1;0),(0;2)$.

Cách 2. Coi phương trình bậc hai đối với x, ta có

$$3x^2-(2y-5)x+y+2=0.$$

$\Delta=(2y+5)^2-12(y+2)=4y^2+8y+1.$

Nên phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$4y^2+8y+1=k^2 (k\in\mathbb{N})$$
$$\Leftrightarrow (2y+2)^2-k^2=3$$
$$\Leftrightarrow (2y+k+2)(2y-k+2)=3.$$

Từ đó cũng tìm được các nghiệm như trên

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng

$ax^2+bxy+cx+dy=e$, hoặc $(ay^2+bxy+cx+dy=e)$

Trong đó a,b,c,d,e là các số nguyên.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$.

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng

$$y[2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2]=0.$$

Nếu $y=0$ thì x sẽ là số nguyên tùy ý.

Xét $y\neq 0$ thì $2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2=0.$ (1)

Ta coi (1) là phương trình bậc hai theo ẩn y, ta tính

$$\Delta=(x^2-3x)^2-8(x+3x^2)=x(x+1)^2(x-8).$$

Trường hợp $x=-1$ thì $\Delta=0$, nghiệm kép của (1) là $y=-1$.

Trường hợp $x\neq -1$, để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là $x(x-8)=k^2 (k\in\mathbb{N}) \Leftrightarrow (x-4-k)(x-4+k)=16.$

Vì $k\in\mathbb{N}$ nên $x-4-k\le x-4+k$ và $(x-4-k)+(x-4+k)=2(x-4)$ nên $x-4-k, x-4+k$ cùng chẵn. Lại có $16=2.8=4.4=(-4).(-4)=(-2).(-8).$ Xảy ra bốn trường hợp

$$\begin{cases} x-4-k=a \\ x-4+k=b \end{cases} \text{ với } (a;b)=(2;8),(4;4),(-4;-4),(-2;-8).$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-1;-1),(8;-10),(0;k)$ với $k\in\mathbb{Z}.$

Lưu ý. Trong trường hợp $F(x,y)$ là đa thức có hệ số nguyên với bậc cao hơn 2 theo biến x và y, ta cũng có thể đưa về một trong hai trường hợp trên bằng cách đặt ẩn phụ.

Ví dụ 6. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3-y^3=2xy+8.$

Giải.

Ta có thể đưa về dạng phương trình bậc hai ẩn y bằng phép đặt $x=y+a$ (với a nguyên). Khi đó ta có $(3a-2)y^2+(3a^2-2)y+a^3-8=0.$

Do a nguyên nên $3a-2\neq 0$, tính

$$\begin{aligned}\Delta&=(3a^2-2)^2-4(3a-2)(a^3-8)\\ &=-3a^4+8a^3-12a^2+96a-60\\ &=-(a^2-4a-2)^2-2a(a^3-56)-56.\end{aligned}$$

Để cho $\Delta\ge 0$ suy ra $2a(a^3-56)<0 \Leftrightarrow 0<a\le\sqrt[3]{56}$. Vì a nguyên nên a chỉ nhận giá trị $1,2,3.$ Thử chọn chỉ có $a=2$ là thích hợp và tìm được $(x;y)$ là $(0;-2),(-2;0).$

5.3 PHƯƠNG PHÁP SẮP THỨ TỰ

5.3.1 Phương pháp sắp thứ tự toàn phần

Khi phương trình đối xứng với các ẩn $x,y,z,...$, ta thường giả sử $x\le y\le z\le ...$ để giới hạn miền nghiệm của phương trình và bắt đầu đi tìm từ nghiệm bé nhất trở đi

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5(x+y+z)+3=2xyz.$

Giải.

Do vai trò x,y,z như nhau, không giảm tổng quát giả sử $1\le x\le y\le z.$ Chia hai vế của phương trình cho xyz ta có

$$2=\frac{5}{xy}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xyz}\le\frac{18}{x^2}.$$

Do vậy $2x^2 \le 18 \Rightarrow x \in \{1,2,3\}$.

1) Với $x=1$ thì ta có $5(y+z)+8=2yz \Leftrightarrow (2y-5)(2z-5)=41$.

Vì y,z nguyên dương và $y \le z$ nên $-3 \le 2y-5 \le 2z-5$, và $41=1.41$.

Chỉ xảy ra trường hợp $\begin{cases} 2y-5=1 \\ 2z-5=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=23. \end{cases}$

2) Với $x=2$ thì ta có $5(y+z)+13=4yz \Leftrightarrow (4y-5)(4z-5)=77$.

Vì y,z nguyên dương và $2=x \le y \le z$ nên $-3 \le 4y-5 \le 4z-5$, và $77=11.7$.

Xảy ra trường hợp $\begin{cases} 4y-5=7 \\ 4z-5=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=4. \end{cases}$

3) Với $x=3$ thì ta có $5(y+z)+18=6yz \Leftrightarrow (6y-5)(6y-5)=133$. (*)

Mặt khác y,z nguyên dương và $3 \le y \le z$ nên $15 \le 6y-5 \le 6z-5$

suy ra $(6y-5)(6y-5) \ge 15^2 = 225$. (Mâu thuẫn với (*)).

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ là $(1;3;3),(2;3;4)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Với cách làm tương tự, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $a(x_1+x_2+...+x_n)+b=cx_1x_2...x_n$, trong đó a,b,c,n là các số nguyên dương và $n \ge 2$.

Ví dụ 8. Tìm tất cả các tam giác có số đo các cạnh là những số nguyên dương và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

Giải.

Gọi độ dài của ba cạnh của tam giác là a,b,c với $a \ge b \ge c \ge 1$, với $a,b,c \in \mathbb{N}^*$.

Theo công thức tính diện tích tam giác, ta có

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}, r$ là bán kính đường tròn nội tiếp.

Do $r=1$ nên

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2$$
$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c)=p$$
$$\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{2}.\frac{a-b+c}{2}.\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Suy ra $(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)=4(a+b+c)$.

Vì $(b+c-a),(a-b+c),(a+b-c)$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ, mà $4(a+b+c)$ là số chẵn nên $(b+c-a),(a-b+c),(a+b-c)$ cùng chẵn.

Đặt $x=\dfrac{b+c-a}{2}, y=\dfrac{a-b+c}{2}, z=\dfrac{a+b-c}{2}$ với $x,y,z \in \mathbb{N}^*$ dẫn đến phương trình $xyz=x+y+z$.

Do $a \ge b \ge c$ nên $x \le y \le z$, suy ra $xyz=x+y+z \le 3z$, dẫn đến $xy \in \{1;2;3\}$.

Xảy ra các khả năng

a) Nếu $xy=1$ thì $x=1; y=1$ suy ra $2+z=z \Leftrightarrow z=0$ (loại do $z \ge 1$).

b) Nếu $xy=2$ thì $x=1; y=2$ suy ra $3+z=2z \Leftrightarrow z=3$.

c) Nếu $xy = 3$ thì $x = 1; y = 3$ suy ra $4 + z = 3z \Leftrightarrow z = 2$ (loại do $y \le z$).

Do vậy $(x; y; z) = (1; 2; 3)$. Suy ra $(a; b; c) = (5; 4; 3)$.

Vậy tam giác có độ dài ba cạnh là $5, 4, 3$ thỏa mãn.

5.3.2 Phương pháp sắp thứ tự từng phần

Ở một số phương trình nghiệm nguyên ta quan tâm đến một ẩn bằng cách chia tập hợp số của ẩn đó thành các tập hợp con rời nhau. Sau đó giải phương trình nghiệm nguyên trong từng tập con đó.

Ta thường sử dụng những nhận xét sau: Với X, Y nguyên, a, n nguyên dương

a) Nếu $X^n < Y^n < (X + a)^n$ thì $Y^n = (X + i)^n$ với $i = 1, 2, ..., a - 1$.

b) Nếu $X(X + 1) < Y(Y + 1) < (X + a)(X + a + 1)$ thì

$$Y(Y + 1) = (X + i)(X + i + 1) \text{ với } i = 1, 2, ..., a - 1.$$

c) Không tồn tại số nguyên Y sao cho $X^n < Y^n < (X + 1)^n$.

d) Không tồn tại số nguyên Y sao cho $X(X + 1) < Y(Y + 1) < (X + 1)(X + 2)$.

Ví dụ 9. Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình

a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^4$;

b) $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$.

Giải.

a) Với $x = 0$ thay vào phương trình tìm được $y = 1$ hoặc $y = -1$.

Với $x = -1$ thì $y = 1$ hoặc $y = -1$.

Với $x > 0$ thì $x^4 < y^4 < (x + 1)^4$, điều này vô lí.

Với $x < -1$ thì $(x + 1)^4 < y^4 < x^4$, điều này vô lí.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0;1), (0;-1), (-1;1), (-1;-1)$.

b) Với $x = 0$ thì $y = 1$.

Với $x = -1$ thì $y = 0$.

Với $x > 0$ thì $x^3 < y^3 < (x + 1)^3$, điều này vô lí.

Với $x < -1$ thì $(x + 1)^3 < y^3 < x^3$, điều này vố lí.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0;1), (-1;0)$.

Nhận xét. Với cách làm tương tự như trên, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $1 + x + x^2 + ... + x^n = y^n$ với n là số nguyên dương.

5.4 PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN TỐ

Phương pháp

- Dựa vào đặc điểm của phương trình để phát hiện tính chia hết của một ẩn.
- Để chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên thì có thể sử dụng tính chất chia hết: Chỉ ra tồn tại số nguyên m sao cho hai vế của phương trình khi cùng chia cho m có số dư khác nhau

- Nhưng kết quả thường dùng:

Với $a \in \mathbb{Z}$ thì a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, chia cho 4 dư 0 hoặc 1, chia cho 8 dư 0 hoặc 1 hoặc 4; a^3 chia cho 9 dư 0,1,8; a^4 chia cho 16 dư 0,1.

- Ta thường sử dụng một số tính chất sau đây của số nguyên tố để giải phương trình

a) Nếu p là số nguyên tố thì $a^n \vdots p \Leftrightarrow a \vdots p$ (với nguyên a nguyên).

b) Định lí Fermat nhỏ: Nếu p là số nguyên tố thì $a^p - a \vdots p$ với mọi số nguyên dương a. Đặc biệt nếu $(a,p)=1$ thì $a^{p-1}-1 \vdots p$.

c) Nếu p là số nguyên tố dạng $4k+3 (k \in \mathbb{N})$ thì $(a^2+b^2) \vdots p \Leftrightarrow a \vdots p$ và $b \vdots p$.

Thật vậy nếu $a \vdots p$ và $b \vdots p$ thì $a^2+b^2 \vdots p$.

Giả sử a không chia hết cho p, do $a^2+b^2 \vdots p$ nên b không chia hết cho p. Theo định lí Fermat nhỏ ta có $a^{p-1}-1 \vdots p$ và $b^{p-1}-1 \vdots p$. Khi đó

$$a^{p-1}+b^{p-1}-2 = a^{4k+2}+b^{4k+2}-2 = (a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}-2.$$

Suy ra $2 \vdots p$, điều này mâu thuẫn với p là số nguyên tố dạng $4k+3$.

Hệ quả. i) x^2+1 không có ước nguyên tố dạng $4k+3$ với $x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$.

ii) Nếu p là số nguyên tố và $x^2+1 \vdots p$ thì p có dạng $4k+1$ với $k \in \mathbb{N}$,

d) Nếu p là số nguyên tố lẻ dạng $8k+5$ hoặc $8k+7$ thì $a^2+2b^2 \vdots p \Leftrightarrow a \vdots p$ và $a \vdots p$.

Ví dụ 10. Giải phương trình nghiệm nguyên $4x+9y=48$.

Giải.

Giả xử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình đã cho.

Ta thấy 48 và $4x$ chia hết cho 4 nên $9y$ chia hết cho 4, mà $(9;4)=1$ nên $y \vdots 4$.

Đặt $y=4t\left(t \in \mathbb{Z}\right)$, thay vào phương trình đầu ta được $4x+36t=48$

$\Leftrightarrow x=12-9t$ và $y=4t$ (*). Thay các biểu thức của x, y ở (*) thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có vô số nghiệm $\left(x;y\right)=\left(12-9t;4t\right)$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 11.Tìm những số tự nhiên lẻ n để $26n+17$ là số chính phương.

Giải.

Giả sử $26n+17=k^2$ (với k tự nhiên lẻ). Khi đó

$26n+13=\left(k-2\right)\left(k+2\right) \Leftrightarrow 13\left(2n+1\right)=\left(k-2\right)\left(k+2\right)$.

Do $13\left(12n+1\right) \vdots 13$ nên $\left(k-2\right) \vdots 13$ hoặc $\left(k+2\right) \vdots 13$.

Nếu $\left(k-2\right) \vdots 13$ thì $k=13t+2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2-4t-1}{2}$.

Nếu $\left(k+2\right) \vdots 13$ thì $k=13t-2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2+4t-1}{2}$.

Vậy số tự nhiên lẻ n cần tìm có dạng $\dfrac{13t^2 \pm 4t-1}{2}$($t$ lẻ).

Ví dụ 12.Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $x^4+y^4+z^4=2012$.

Giải

Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình.

Nhận thấy x^4, y^4, z^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1, nên $x^4+y^4+z^4$ chia cho 16 có số dư là một trong các số 0, 1, 2, 3.
Trong khi đó số 2012 chia cho 16 dư 12. Hai điều này mâu thuẫn với nhau.
Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 13.Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases} x^2+13y^2=z^2 \\ 13x^2+y^2=t^2. \end{cases}$

Giải. Giả sử tìm được bộ số nguyên dương $(x,y,z,t)=(a,b,c,d)$ thỏa mãn điều kiện bài ra, ta có $\begin{cases} a^2+13b^2=c^2 \\ 13a^2+b^2=d^2. \end{cases}$

Gọi $\text{ƯCLN}(a,b)=m\,(m\in\mathbb{N}^*)$, suy ra $c \vdots m$ và $d \vdots m.$

Đặt $a=ma_1, b=mb_1, c=mc_1, d=md_1,$ với a_1,b_1,c_1,d_1 là các số tự nhiên và $(a_1,b_1)=1.$ Suy ra $14(a^2+b^2)=c^2+d^2 \Leftrightarrow 14(a_1^2+b_1^2)=c_1^2+d_1^2.$ Suy ra $c_1^2+d_1^2 \vdots 7,$ do đó $c_1 \vdots 7$ và $d_1 \vdots 7,$ dẫn đến $a_1^2+b_1^2 \vdots 7$ nên $a_1 \vdots 7$ và $b_1 \vdots 7.$ Điều này mâu thuẫn với $(a_1,b_1)=1.$

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được hệ phương trình $\begin{cases} x^2+ny^2=z^2 \\ nx^2+y^2=t^2 \end{cases}$ với $n+1$ có ước nguyên tố dạng $4k+3$ và $(n+1,p^2)=1$ không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 14.Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3-3y^3-9z^3=0.$

Giải. Giả sử (x_0,y_0,z_0) là nghiệm của phương trình.

Khi đó $x_0 \vdots 3,$ đặt $x_0=3x_1$ (với $x_1\in\mathbb{Z}$) ta có $9x_1^3-y_0^3-3z_0^3=0.$

Khi đó $y_0 \vdots 3,$ đặt $y_0=3y_1$ (với $y_1\in\mathbb{Z}$) ta có $3x_1^3-9y_1^3-z_0^3=0.$

Khi đó $z_0 \vdots 3,$ đặt $z_0=3z_1$ (với $z_1\in\mathbb{Z}$) ta có $x_1^3-3y_1^3-9z_1^3=0.$

Như vậy $(x_1,y_1,z_1)=\left(\frac{x_0}{3};\frac{y_0}{3};\frac{z_0}{3}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của phương trình. Quá trình tiếp tục như vậy ta suy ra các bộ số $\left(\frac{x_0}{3^n};\frac{y_0}{3^n};\frac{z_0}{3^n}\right)$ mọi $n\in\mathbb{N}$ cũng là nghiệm của phương trình. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x_0=y_0=z_0=0,$

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm nguyên $(x;y;z)=(0;0;0).$

Nhận xét. Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp lùi vô hạn của Fermat, thường dùng để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.

5.5 PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp: Để giải phương trình bằng phương pháp này, ta thường làm như sau:
Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá một vế của phương trình không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) vế còn lại. Muốn cho hai vế bằng nhau thì bất đẳng thức phải trở thành đẳng thức.
Các bất đẳng thức cơ bản thường dùng:

1) $\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \ge 0, \forall a_i, i = 1,...,n. \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n. \end{array}$

2) Bất đẳng thức Cô-si

+ Với hai số a,b không âm luôn có $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ta khi và chỉ khi $a=b.$

+ Tổng quát, giả sử $a_i \ge 0$ với $i=1,2,...n.$ Khi đó $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3) Bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki

+ Với hai cặp số $(a;b)$ và $(x;y)$ luôn có $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \ge (ax+by)^2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx.$

+ Tổng quát, cho hai dãy số thực tùy ý $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$, khi đó ta có

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = kb_i$ với mọi $i=1,2,...,n.$

Ví dụ 15.Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-4z=-4.$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng

$\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)+\left(z^2-4z+4\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(2;2;2)$.

Ví dụ 16.Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+4\right)\left(z^2+9\right)=48xyz.$$

Giải.

Nhận thấy nếu $(x_0;y_0;z_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình thì x_0,y_0,z_0 cùng dương hoặc có hai số âm và một số dương.

Ngoài ra $(-x_0;-y_0;z_0),(x_0;-y_0;-z_0),(-x_0;y_0;-z_0)$ cũng là nghiệm.

Do đó trước hết ta đi tìm nghiệm nguyên dương.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$x^2+1 \ge 2x \ge 0; y^2+4 \ge 4y \ge 0; z^2+9 \ge 6z \ge 0.$$

Suy ra $\left(x^2+1\right)\left(y^2+4\right)\left(z^2+9\right) \ge 48xyz.$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x=1, y=2, z=3.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z)$ của phương trình là

$$(1;2;3),(-1;-2;3),(1;-2;-3),(-1;2;-3).$$

Nhận xét. Bằng cách này ta có thể tìm nghiệm nguyên của phương trình dạng

$\left(x_1^2+a_1^2\right)\left(x_2^2+a_2^2\right)...\left(x_n^2+a_n^2\right)=2^n x_1x_2...x_n.a_1a_2...a_n$ với a_i, n là các số nguyên dương.

Ví dụ 17. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ y^2+t^2=16 \\ xt+yz=12. \end{cases}$$

Giải.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki cho hai bộ số (x,z) và (t,y) ta có

$$9.16=\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)\geq\left(xt+yz\right)^2=12^2,$$

suy ra $\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)=\left(xt+yz\right)^2$ khi và chỉ khi $xy=zt.$

Từ $x^2+z^2=9\Leftrightarrow x=0, z=\pm3$ hoặc $x=\pm3, z=0.$

Nếu $x=0$ thì $t=0,$ khi đó $y^2=16, yz=12.$ Vậy $y=4, z=3$ hoặc $y=-4, z=-3.$

Nếu $z=0$ thì $y=0,$ tương tự tìm được $x=3, t=4$ hoặc $x=-3, t=-4.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z;t)$ của hệ là

$$\left(0;4;3;0\right),(0;-4;-3;0),(3;0;0;4),(-3;0;0-4).$$

BÀI TẬP

Phương pháp phân tích

1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $2x^2-xy-6y^2+13y-3x+7=0;$

b) $3x^2+10xy+8y^2=21.$

2. Tìm số nguyên dương x sao cho 2^x+65 là số chính phương.

3. Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài cạnh là số tự nhiên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

4. Hãy viết số 2012 thành tổng của các số nguyên liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách viết?

5. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

a) $x^2+2y^2+3z^2+4t^2+2xy+2xz+2xt+4yz-2zt=10.$

b) $x^2+2y^2+3z^2+4t^2+2xy+2xz+2xt+4xy-2zt=10.$

Phương pháp rút một ẩn theo ẩn còn lại

6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $xy^2+2xy-243y+x=0.$

7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2x=x^2+x+12.$

8. Giải phương trình tìm nghiệm nguyên $3x^2y+5xy-8y-x^2-10x=4.$

Phương pháp sắp thứ tự

9. Tìm ba số nguyên dương biết tổng nghịch đảo của chúng bằng 1.

10. Tìm bốn số nguyên dương biết tổng bình phương các nghịch đảo của chúng bằng 1.

11. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$\frac{1}{x^2(x^2+y^2)}+\frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}+\frac{1}{x^2(x^2+y^2+z^2)}=1.$$

12. Cho tam giác có số đo đường cao là số tự nhiên và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh rằng tam giác đó đều.

13. Hãy tìm tất cả bộ ba số nguyên dương phân biệt (q,p,r) khác 1 sao cho $qpr-1$ chai hết cho $(p-1)(q-1)(r-1)$.

14. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau

a) $(x+2)^4-x^4-8x=y^2$;

b) $x^3-y^3-2y^2-3y-1=0$;

c) $x^4-y^4+z^4+2x^2z^2+3x^2+4z^2+1=0$.

15. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$8(2-x)+y^2-z^2=0 \text{ với } y<x<10.$$

Phương pháp sử dụng tính chất chia hết và tính chất của số nguyên tố

16. Giải các phương trình tìm nghiệm nguyên

a) $1+x+x^2+x^3=1997^y$; b) $2^x+153=y^2$.

17. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên $4x^2+y^2+9z^2=71$.

18. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $x^2+y^2+z^2=2xyz$; b) $x^3+3y^3+9z^3=9xyz$;

c) $x^3+2y^3+4z^3=8t^3$; d) $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$.

Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức

19. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $x^2+2y^2+z^2=2xy+2y-4z-5$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\dfrac{x+y+z}{2}$.

20. Giải phương trình

$$\frac{4}{\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{25}{\sqrt{z-5}}=16-\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}-\sqrt{z-5}.$$

21. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\left(x+y+1\right)^2=3\left(x^2+y^2+1\right).$$

22. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} xy+yz+zx=12 \\ x^4+y^4+z^4=48. \end{cases}$$

6. Chuyên đề 6: Phần nguyên và ứng dụng:

6.1 PHẦN NGUYÊN

6.1.1 Định nghĩa

Phần nguyên có số thực a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a, kí hiệu là $[a]$. Ta có $[a]\le a<[a]+1$.

Phần lẻ của số thực a là hiệu của a với phần nguyên của nó, kí hiệu là $\{a\}$.

Ta có $\{a\}=a-[a], 0\le\{a\}\le 1$.

Ví dụ.

$$[5,3]=5;$$
$$[-5,3]=-6;$$
$$[2012]=2012;$$
$$\{5,3\}=5,3-5=0,3;$$
$$\{-5,3\}=-5,3-(-6)=0,7;$$
$$\{2012\}=2012-2012=0.$$

6.1.2 Tính chất

1) $a\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow[a]=a$ hoặc $\{a\}=0.$

2) $n\in\mathbb{Z}$ và $n\le a<n+1\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow[a]=n.$

3) $[\{a\}]=\{[a]\}=0.$

4) Nếu $n\in\mathbb{Z}$ thì $[n+a]=n+[a];[n+a]=\{a\}.$

5) Nếu $[n+a]=n$ thì $n\in\mathbb{Z}$ và $0\le a\le1.$

6) $a\ge b\Rightarrow[a]\ge[b].$

7) $[a]+[b]\le[a+b].$

Tổng quát $[a_1]+[a_2]+...+[a_n]\le[a_1+a_2+...+a_n],$

8) $[a]-[b]\ge[a-b].$

9) $\{a\}+\{b\}\ge\{a+b\};\{a\}-\{b\}\le\{a-b\}.$

10) Nếu $[a]=[b]$ thì $|a-b|<1.$

11) $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a].$

12) Nếu $n\in\mathbb{N}^*$ thì $[na]\ge n[a];\left[\frac{[a]}{n}\right]=\left[\frac{a}{n}\right].$

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a]=-[a];$

Nếu a không là số nguyên thì $[-a]=-[a]-1;$

Chứng minh

Các tính chất 1) đến 5) có thể chứng minh dễ dàng trên dựa vào định nghĩa phần nguyên.

6) Vì $a\ge b$ nên tồn tại số $c\ge0$ sao cho $a=b+c.$ Do đó. $a=[b]+\{b\}+c,$ suy ra

$$[a]=[b]+[\{b\}+c].\text{ Mà }[\{b\}+c]\ge0\text{ nên }[a]\ge[b].$$

7) Viết $a=[a]+\{a\},b=[b]+\{b\}.$ Khi đó

$$[a+b]=[[a]+\{a\}+[b]+\{b\}]=[a]+[b]+[\{a\}+\{b\}].$$

Mà $[\{a\}+\{b\}]\ge0$ nên

$$[a+b]\ge[a]+[b].$$

8) Áp dụng tính chất 7 ta có

$$[a+b]+[b]\le[a-b+b]=[a] \text{ nên } [a]-[b]\ge[a-b].$$

9) $\{a\}-\{b\}=a-[a]+b-[b]=(a+b)-([a]+[b])\ge a+b-[a+b]=\{a+b\}.$

Vậy $\{a\}-\{b\}\ge\{a-b\}.$

10) $[a]=[b]$ suy ra $a-\{a\}=b-\{b\}$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $a\ge b$

Nếu $a=b$ thì $|a-b|=0;$

Nếu $a>b$ thì từ $a-b=\{a\}-\{b\}\le\{a-b\}$

Suy ra $|a-b|=a-b\le\{a-b\}<1$

Vậy luôn có $0\le|a-b|\le1.$

11) Đặt $\{a\}=d$ thì $0\le d\le1.$

- Nếu $0\le d<\frac{1}{2}$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[[a]+d+\frac{1}{2}\right]=[a]+\left[d+\frac{1}{2}\right]=[a];$

$[2a]=\left[2([a]+d)\right]=2[a]+[2d]=2[a].$ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Nếu $\frac{1}{2}\le d<1$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right]=\left[[a]+d+\frac{1}{2}\right]=[a]+\left[d+\frac{1}{2}\right]=[a]+1;$

$[2a]=\left[2([a]+d)\right]=2[a]+[2d]=2[a]+1.$ Suy ra điều phải chứng minh.

12) Ta có $[na]=\left[n([a]+\{a\})\right]=n[a]+\left[n\{a\}\right]$, mà $\left[n\{a\}\right]\ge0$ nên $[na]\ge n[a].$

$$\left[\frac{a}{n}\right]=\left[\frac{[a]}{n}+\frac{\{a\}}{n}\right]=\left[\frac{[a]}{n}\right].$$

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a]=-a=-[a].$

Nếu a không nguyên thì $0<\{a\}<1,$ nên $-1<-\{a\}<0,$ suy ra $\left[-\{a\}\right]=-1.$

Ta có $[-a]=\left[-([a]+\{a\})\right]=\left[-[a]\right]+\left[-\{a\}\right]=-[a]+1.$

6.2 ỨNG DỤNG

6.2.1 Chứng minh một số bài toán về số học

Ví dụ 1. Cho $a>0$ và số n nguyên dương. Chứng minh rằng số các số nguyên dương là bội số của n và không vượt quá a là $\left[\frac{a}{n}\right].$

Giải.

Ta viết $a=nq+r,$ trong đó q là số tự nhiên, $0\le r<n.$

Rõ ràng các bội số của n không vượt quá a là $n,2n,...,qn.$ tổng cộng có q số.

Mặt khác $\left[\frac{a}{n}\right]=q.$ Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Ví dụ 2. Số $2012!$ có tận cùng bao nhiêu số 0?

Giải.

Vì $10 = 2.5$ nên để biết $2012!$ có tận cùng bằng bao nhêu chữ số 0, ta cần phải tính số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố.

Theo **Ví dụ 1**, Số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố bằng

$$\left[\frac{2012}{5}\right]+\left[\frac{2012}{5^2}\right]+\left[\frac{2012}{5^3}\right]+\left[\frac{2012}{5^4}\right]=402+80+16+3=501.\ (\text{Do } 2012<5^5)$$

Do mũ của 2 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố nhiều hơn 501.

Vậy $2012!$ Có tận cùng là 501 chữ số 0.

Nhận xét. Nếu $5^k \le n < 5^{k+1}$ thì số chữ số 0 tận cùng về bên phải của số $n!$ bằng

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+...+\left[\frac{n}{5^k}\right].$$

Ví dụ 3. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k.

Giải.

Ta có $2012 = 2^2.503$.

Số mũ cao nhất của 503 có trong 2011! Là

$$\left[\frac{2011}{503}\right]=3\ (\text{do } 2011<503^2).$$

Vậy 2011! chia hết cho 503^3 và không chia hết cho 503^4, hiển nhiên 2011! chia hết cho 4^3. Do vậy 2011! chia hết cho 2012^3 và không chia hết cho 2012^4.

Muốn $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k thì $k \le 3.2012 = 6036$.

Vậy $\max k = 6036$.

Ví dụ 4. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\frac{n}{2010}\right]=\left[\frac{n}{2011}\right]=\left[\frac{n}{2012}\right].\ (1)$$

Giải.

Viết $n = 2010k + r(0 \le r \le 2009, k, r$ là có số tự nhiên). Thay vào (1) ta có

$$\left[\frac{2010k+r}{2010}\right]=\left[\frac{2011k+r-k}{2011}\right]=\left[\frac{2012k+r-2k}{2012}\right]$$

$$\Leftrightarrow k=k+\left[\frac{r-k}{2011}\right]=k+\left[\frac{r-2k}{2012}\right]\Leftrightarrow\left[\frac{r-k}{2011}\right]=\left[\frac{r-2k}{2012}\right]=0.$$

Suy ra $0 \le r-2k$ nên $2k \le r \le 2009, 0 \le k \le 1004$.

Vậy $n = 2010k + r(0 \le k \le 1004; 2k \le r \le 2009)$.

Do có 105 giá trị của k (từ 0 đến 1004). Với một k thì r nhận các giá trị từ $2k$ đến 2009. Vậy sô nghiệm tự nhiên n của (1) là

$$\sum_{k=0}^{1004}\left(2010-2k\right)=1011030.$$

Ví dụ 5. Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right] \text{ là số nguyên tố.}$$

Giải.

Nhận xét

$$\left[\sqrt{n^2}\right]=\left[\sqrt{n^2+1}\right]=...=\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=n, n\in\mathbb{N}.$$

Đặt $S_n=\left[\sqrt{n^2}\right]+\left[\sqrt{n^2+1}\right]+...+\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=(2n+1)n=2n^2+n.$

Do đó $y=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right]=S_1+S_2+...+S_{x-1}=\dfrac{x\left(4x^2-3x-1\right)}{6}.$

Nên $6y=x\left(4x^2-3x-1\right)$, suy ra $6y\,\vdots\,x$, mà x,y là các số nguyên tố suy ra $x\in\{2;3;y\}$.

Nếu $x=2$ thì $y=3$ (thỏa mãn); nếu $x=3$ thì $y=13$ (thỏa mãn); nếu $x=y$ thì $y=-1$ hoặc $y=\dfrac{7}{4}$ (loại).

Vậy bài toán có hai nghiệm $x=2$ và $x=3$.

6.2.2 Giải phương trình có chứa dấu phần nguyên

a) Dạng 1. $\left[f(x)\right]=a\,(a\in\mathbb{Z})$

Phương pháp: $\left[f(x)\right]=a\,(a\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow a\le f(x)<a+1.$

Ví dụ 6. Giải phương trình $[x]^2-3[x]+2=0.$

Ví dụ 7. Giải phương trình $\left[x^2+5\right]^2-9\left[x^2+7\right]=-26.$ (gợi ý: $\left[x^2+7\right]=\left[x^2+5\right]+2$)

b) Dạng 2. $\left[f(x)\right]=g(x)$

Phương pháp: Đặt $g(x)=t$ (t nguyên), biểu diễn $f(x)=h(t)$ đưa về phương trình $\left[h(t)\right]=t\Leftrightarrow t\le h(t)<t+1$ hay $0\le h(t)-t<1.$

Tìm t, sau đó từ $g(x)=t$ tìm ra x.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\left[\dfrac{4-3x}{5}\right]=\dfrac{5x-5}{7}.$

Giải.

Đặt $\dfrac{5x-5}{7}=t\,(t\in\mathbb{Z})$ thì $x=\dfrac{7t+5}{5};\dfrac{4-3x}{5}=\dfrac{5-21t}{25}.$

Ta có $\left[\dfrac{5-21t}{25}\right]=t\Leftrightarrow t\le\dfrac{5-21t}{25}<t+1$

$\Leftrightarrow 25t\le 5-21t\le 25t+25\Leftrightarrow \dfrac{-20}{46}<t\le\dfrac{5}{46}.$

Do t nguyên nên $t=0.$ Suy ra $x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1.$

Ví dụ 9. Giải phương trình $x^2-9[x]+8=0.$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng $[x]=\dfrac{x^2+8}{9}.$

Đặt $\frac{x^2+8}{9}=t(t\in\mathbb{N}^*)$ thì $x=\sqrt{9t-8}$ (do $x>0$). Ta có

$\left[\sqrt{9t-8}\right]=t\Leftrightarrow t\le\sqrt{9t-8}<t+1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-9t+8\le 0\\ t^2-7t+9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le t\le 8t\\ \left[\begin{array}{l}t\le\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\\ t\ge\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Do t là số tự nhiên nên $t\in\{1;6;7;8\}$. Do đó $x\in\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Vật tập nghiệm của phương trình là $\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3}$.

Áp dụng tính chất 11) $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]$, ta có

$\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{4x-2}{3}\right]$

Nên phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{4x-2}{3}\right]=\frac{5x-4}{3}.$$

Đặt $\frac{5x-4}{3}=t\left(t\in\mathbb{Z}\right)$ thì $x=\frac{3t+4}{5};\frac{4x-2}{3}=\frac{4t+2}{5}$. Suy ra

$$\left[\frac{4t+2}{5}\right]=t\Leftrightarrow 0\le\frac{4t+2}{5}-t<1\Leftrightarrow -3<t\le 2\Leftrightarrow t\in\{-2;-1;0;1;2\}$$

(do t nguyên), tương ứng tìm được $x\in\left\{\frac{-2}{5};\frac{1}{5};\frac{4}{5};\frac{7}{5};2\right\}$.

c) Dạng 3. $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]$

Phương pháp: Đặt $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]=t$ suy ra $\left|f(x)-g(x)\right|<1$, dẫn đến $a<x<b$.

Với $a<x<b$ suy ra $\begin{cases}a_1<f(x)<b_1\\ a_2<f(x)<b_2\end{cases}$, từ đó tìm được t.

Ứng với mỗi giá trị của t nguyên, giải hệ $\begin{cases}\left[f(x)\right]=t\\ \left[g(x)\right]=t\end{cases}$ để tìm x.

Tập hợp các giá trị x tìm được từ hệ trên sẽ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]$.

Giải.

Đặt $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=t\left(t\in\mathbb{Z}\right)$. Theo tính chất 10) ta có

$\left|\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x+1}{2}\right|<1 \Leftrightarrow -1<\dfrac{x-5}{6}<1 \Leftrightarrow -1<x<11$. Khi đó

$\begin{cases} 0<\dfrac{x+1}{2}<6 \\ -1<\dfrac{2x-1}{3}<7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le\left[\dfrac{x+1}{2}\right]\le 5 \\ -1\le\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]\le 6 \end{cases}$. Suy ra $t\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

Với $t=0$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le\dfrac{2x-1}{3}<1 \\ 0\le\dfrac{x+1}{2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x<2 \\ -1\le x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x<1.$

Với $t=1$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le\dfrac{2x-1}{3}<2 \\ 1\le\dfrac{x+1}{2}<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le x<\dfrac{7}{2} \\ 1\le x<3 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x<3.$

Với $t=2$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le\dfrac{2x-1}{3}<3 \\ 2\le\dfrac{x+1}{2}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{2}\le x<5 \\ 3\le x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{2}\le x<5.$

Với $t=3$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\le\dfrac{2x-1}{3}<4 \\ 3\le\dfrac{x+1}{2}<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le x<\dfrac{11}{2} \\ 5\le x<7 \end{cases} \Leftrightarrow 5\le x<\dfrac{11}{2}.$

Với $t=4$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\le\dfrac{2x-1}{3}<5 \\ 4\le\dfrac{x+1}{2}<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{2}\le x<8 \\ 7\le x<9 \end{cases} \Leftrightarrow 7\le x<8.$

Với $t=5$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le\dfrac{2x-1}{3}<6 \\ 5\le\dfrac{x+1}{2}<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\le x<\dfrac{19}{2} \\ 9\le x<11 \end{cases} \Leftrightarrow 9\le x<\dfrac{19}{2}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left[0,5;1\right)\cup\left[2;3\right)\cup\left[3,5;5,5\right]\cup\left[7;8\right)\cup\left[9;9,5\right)$.

d) Dạng 4. Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên

Phương pháp: Sử dụng tính chất của phần nguyên, phân tích đa thức thành nhân tử, đặt ẩn phụ (nếu cần) để dưa về các dạng $1,2,3$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $[x]+[2x]+[3x]+...+[2009x]=4036082$.

Giải.

Nhận xét rằng

$[x]\le x<[x+1]$ suy ra $k[x]\le kx<k[x]+k$ nên $k[x]\le[kx]\le k[x]+k-1\left(k\in Z^{+}\right)$.

Do đó thay $k=1,2,...,2009$ rồi cộng theo vế ta có

$$2019045[x] \le [x]+[2x]+...+[2009x] \le 2019045[x]+2017036.$$
$$2019045[x] \le 4036082 \le 2019045[x]+2017036.$$
Lại có $4036082 = 2019045 + 2017037.$ Do đó phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 13. Giải phương trình $\left[\frac{2x-1}{3}\right]-\left[x^2\right]=\left[-x^2\right].$

Giải.

Áp dụng tính chất 13) ta có
$$\left[-x^2\right]=\begin{cases}-\left[x^2\right], x^2 \in \mathbb{Z}\\ -\left[x^2\right]-1, x^2 \notin \mathbb{Z}.\end{cases}$$
$\bullet$Nếu x^2 là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành
$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x<2.$$
Mà x^2 là số nguyên nên $x \in \left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}.$

$\bullet$Nếu x^2 không là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành
$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=-1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{2x-1}{3}+1<1 \Leftrightarrow -1 \le x<\frac{1}{2}.$$
Mà x^2 không nguyên nên phải loại $x=-1, x=0 \Rightarrow x \in (-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(-1;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right) \cup \left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}.$

6.3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA DẤU PHẦN NGUYÊN

Khi giải bất phương trình có chứa dấu phần nguyên, ta thường đặt biểu thức $\left[f(x)\right]=t$ (t nguyên) để chuyển về giải bất phương trình không còn chứa dấu phần nguyên, rồi vận dụng định nghĩa và tính chất của phần nguyên để tìm ra nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 14. Giải bất phương trình $[x+2]>5.$

Giải.

Cách 1. Nhận xét rằng $[a]>b$ (b nguyên) khi và chỉ khi $a \ge b+1.$

Ta có $[x+2]>5$ khi và chỉ khi $x+2 \ge 6.$ Do đó $x \ge 4.$

Cách 2. Đặt $[x+2]=t$ (t là số nguyên) thì có $t>5.$ Do vậy $t \in \{6;7;8;...\}.$

Từ $[x+2]=t$ suy ra $t \le x+2<t+1.$ suy ra $t-2 \le x<t-1, t \in \{6;7;8;...\}.$

Vậy $x \ge 4.$ Bất phương trình có vô số nghiệm $x \ge 4.$

Ví dụ 15. Giải bất phương trình $2[x]^2-9[x+1]+16<0.$

Giải.

Áp dụng tính chất 4) ta có $[x+1]=[x]+1.$ Biến đổi bất phương trình thành
$$2[x]^2-9[x]+7<0.$$

Đặt $[x]=t$ (t là số nguyên) thì có $2t^2-9t+7<0$ suy ra $1<t<3,5$ mà t nguyên nên $t\in\{2;3\}$.

Với $t=2$ thì $[x]=2$ suy ra $2\le x<3$.

Với $t=3$ thì $[x]=3$ suy ra $3\le x<4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2;4)$.

Ví dụ 16. Giải bất phương trình $[2x]>[x]$.

Giải.

Cách 1. Đặt $[x]=t$ (t là số nguyên) thì $t\le x<t+1$ suy ra $2t\le 2x<2t+2$. Do đó $[2x]=2t$ hoặc $2t+1$.

- Với $[2x]=2t$ thì $0\le\{x\}<0,5$ và $2t>t\Leftrightarrow t>0$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x\ge 1$.
- Với $[2x]=2t+1$ thì $0,5\le\{x\}<1$ và $2t+1>t\Leftrightarrow t>-1$, mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x\ge 0$.

Kết hợp với $0,5\le\{x\}<1$ dẫn đến $x\ge 0,5$.

Cách 2. Nhận xét rằng $[a]>[b]$ khi và chỉ khi $a>b$ và $[a]\ne[b]$.

Ta có $[2x]>[x]\Leftrightarrow 2x>x$ và $[2x]\ne[x]\Leftrightarrow x>0$ và $[2x]\ne[x]$.

Trước hết ta tìm x sao cho $[2x]=[x]$.

Đặt $[2x]=[x]=t$ (t nguyên) ta có

$$|2x-x|<1\Leftrightarrow|x|<1 \text{ suy ra } 0<x<1 \text{ nên } [x]=0.$$

Với $t=0$ thì $[x]=[2x]=0$ suy ra $0\le 2x<1$ nên $0\le x<0,5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0,5$.

BÀI TẬP

1. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho $(100!)^k$ chia hết cho 10^{100}.

2. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+...+\left[\sqrt[3]{x^3-1}\right]=400$.

3. Giải phương trình $x[x]-3x-\{x\}+2=0$.

4. Giải các phương trình sau

a) $x^2-8[x]+7=0$;

b) $\left[\dfrac{1-x}{2}\right]+\left[1-\dfrac{x}{2}\right]=\dfrac{1-3x}{8}$.

5. Giải phương trình $20\left(x+37-\left[\dfrac{x+37}{3}\right]\right)=x$.

6. Giải phương trình $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2012}\right]+...+\left[x+\dfrac{2011}{2012}\right]=2x+1005$.

7. Giải các bất phương trình

a) $\left[\frac{2x-5}{9}\right]<10;$

b) $\left[\frac{3x-5}{7}\right]>x;$

c) $\left[\frac{2x-1}{2}\right]+[x+1]\le\frac{6x+5}{2};$

d) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]+\left[4x+\frac{1}{2}\right]+\left[8x+\frac{1}{2}\right]\ge 100,1.$

7. Chuyên đề 7: Đường thẳng Simson:

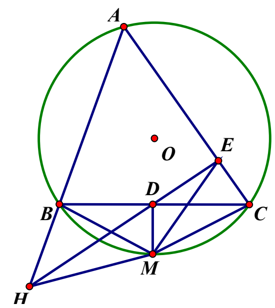
7.1. ĐƯỜNG THẲNG SIMSON

<u>Bài toán 1.</u> Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm tùy ý trên (O); gọi D,E,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC,CA,AB. Chứng minh rằng D,E,H thẳng hàng.

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A.

$MD \perp BC, ME \perp AC \Rightarrow MDEC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{EDC}$. (1)

$MH \perp AB, MD \perp BC \Rightarrow MHBD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{HDB}$. (2)



$ABMC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MCA}$.

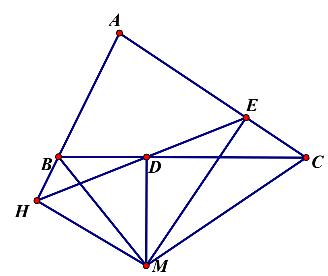
Mà $\widehat{MBH} + \widehat{HMB} = \widehat{MCA} + \widehat{EMC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{HMB}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{HDB} = \widehat{EDC} \Rightarrow H,D,E$ thẳng hàng.

*Đường thẳng qua H,D,E có tên là **đường thẳng Simson** của tam giác ABC ứng với điểm M (hay đường thẳng Wallace).*

<u>Bài toán 2.</u> Cho tam giác ABC, M là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi D,E,H lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC,CA,AB và D,E,H thẳng hàng. Chứng minh M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải. Theo giả thiết, $MD \perp BC, ME \perp CA, MH \perp AB,$ và D,E,H thẳng hàng, suy ra tứ giác $MDBH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{HDB}$ (chắn cung $\overset{\frown}{HB}$), $\widehat{HDB} = \widehat{EDC}$ (đối đỉnh), $\widehat{EDC} = \widehat{EMC}$ (chắn cung $\overset{\frown}{EC}$) $\Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{EMC} \Rightarrow \widehat{EMH} = \widehat{BMC}$ (1)

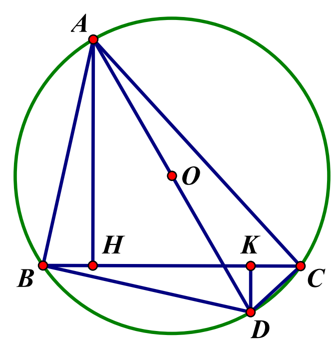


Tứ giác $AEMH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{EMH} = 180^0$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{BMC} = 180^0$. Suy ra tứ giác $ABMC$ nội tiếp $\Rightarrow M$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

*Từ bài toán trên ta có kết quả: **"Cho tam giác ABC, M là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác và không trùng với các đỉnh. Gọi D,E,H là hình chiếu của M trên ba cạnh của tam giác ABC. Điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là D,E,H thẳng hàng".***

Như vậy, với mỗi điểm M có một đường thẳng Simson đối với tam giác ABC cho trước.



7.2. VÍ DỤ MINH HỌA.

<u>Ví dụ 1.</u> Chứng minh rằng:

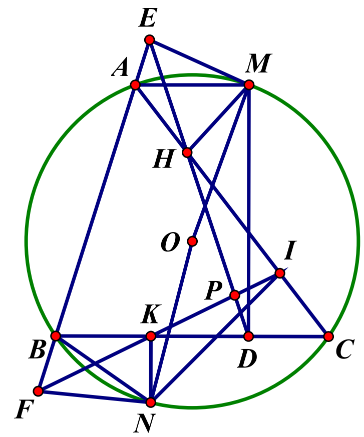
a, Đường thẳng Simson của đỉnh A của tam giác ABC là đường cao hạ từ đỉnh đó.

b, Đường thẳng Simson của đỉnh D (điểm đối xứng với A qua tâm O) là cạnh BC.

Giải. a, Hiển nhiên.

b, D là điểm đối xứng với A qua $O \Rightarrow AD$ là đường kính $\Rightarrow DB \perp AB, DC \perp AC$. Suy ra đường thẳng Simson chính là đường thẳng BC.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M, N là các điểm thuộc (O). Chứng minh góc giữa 2 đường thẳng Simson của M và N đối với tam giác ABC bằng nửa số đo cung $\overset{\frown}{MN}$. Đặc biệt, nếu M, N đối xứng với nhau qua tâm O, thì các đường thẳng Simson của chúng vuông góc với nhau tại một điểm trên đường tròn Euler.



Giải. $AEMH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AMH} = 90^0 - \widehat{MAC}$ (1)

$BFNK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFK} = \widehat{BNK} = 90^0 - \widehat{CBN}$ (2)

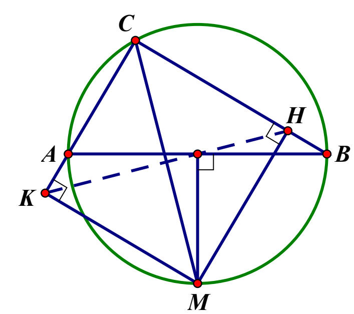
Cộng vế - vế của (1) và (2), suy ra

$\widehat{AEH} + \widehat{BFK} = 180^0 - \widehat{MAC} - \widehat{CBN}$

$\Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{CBN} = 180^0 - (\widehat{AEH} + \widehat{BFK}) = \widehat{EPF}$ (P là giao điểm của ED, FI)

$\Rightarrow ED, FI$ tạo góc có số đo bằng nửa số đo cung $\overset{\frown}{MN}$ (trường hợp đặc biệt tự c/m).

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, C là điểm trên đường tròn. Đường phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn tại M. Gọi H, K là hình chiếu của M trên BC, AC.



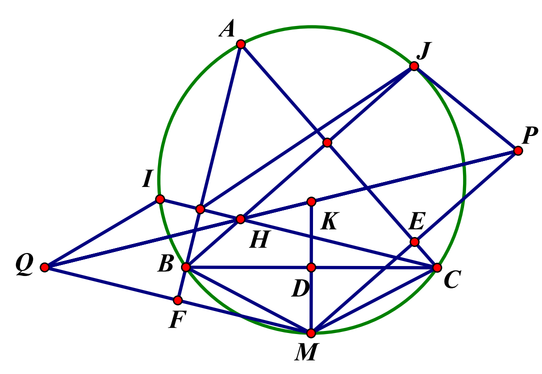
Chứng minh O, K, H thẳng hàng.

Giải. CM là đường phân giác của $\widehat{ACB} \Rightarrow \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow MO \perp AB$

Theo giả thiết, $MH \perp BC, MK \perp CA$ nên theo bài toán 1 thì H, O, K thẳng hàng.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, M là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi K, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, AC, AB. Chứng minh rằng P, K, Q nằm trên 1 đường thẳng, và đường thẳng này luôn đi qua 1 điểm cố định. (*Vô địch Nhật Bản – 1996*)

Giải. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của MK, MP, MQ với BC, CA, AB.



Suy ra $MD \perp BC, ME \perp AC, MF \perp AB$

$\Rightarrow D, E, F$ thẳng hàng.

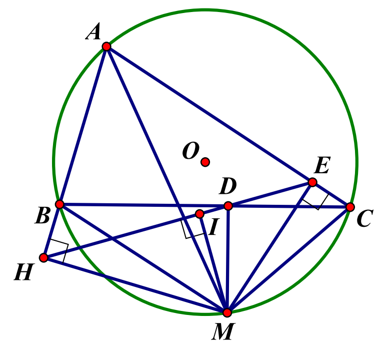
Mặt khác, $MD = DK, ME = EP, MF = FQ$ $\Rightarrow ED$ là đường trung bình của ΔMKP, và DF là đường trung bình của tam giác $MKQ \Rightarrow Q, K, P$ thẳng hàng và $FE // PQ$.

Gọi H là trực tâm $\Delta ABC; I, J$ là điểm đối xứng của H qua AC và $AB \Rightarrow I, J$ thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow MHIP, MHJQ$ là hình thang cân $\Rightarrow \widehat{QHJ} = \widehat{MJH} = \widehat{MAC}$. Tương tự, $\widehat{PHI} = \widehat{MIH} = \widehat{MAB}$

Suy ra $\widehat{QHJ} + \widehat{PHI} + \widehat{JHI} = \widehat{MAC} + \widehat{MAB} + \widehat{JHI} = \widehat{A} + \widehat{JHI} = 180^0 \Rightarrow P, Q, H$ thẳng hàng $\Rightarrow PQ$ luôn đi qua trực tâm H của tam giác ABC (*đường thẳng Steiner*)

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa đỉnh A. Gọi D, E, H là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$\dfrac{BC}{MD} = \dfrac{CA}{ME} + \dfrac{AB}{MH}$ (*Vô địch Mĩ – 1979*)



Giải. Theo BT1 ta có H, D, E thẳng hàng.

Các tứ giác $MHBD, MDEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{MCB}, \widehat{MBC} = \widehat{MHE} \Rightarrow \Delta MEH$ và ΔMCB đồng dạng.

Kẻ $MI \perp HE \Rightarrow \dfrac{BC}{MD} = \dfrac{HE}{MI}$ (1)

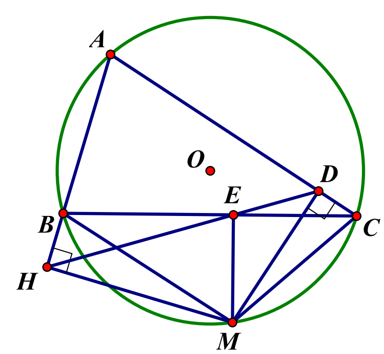
Ta có $\widehat{MHD} = \widehat{MBC} = \widehat{MAC}, \widehat{MDH} = \widehat{MBH} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow \Delta MHD, \Delta MAC$ đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AC}{ME} = \dfrac{HD}{MI}$ (2)

Tương tự $\Delta MED, \Delta MAB$ đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AB}{MH} = \dfrac{ED}{MI}$ (3)

Từ (2), (3) được $\dfrac{AC}{ME} + \dfrac{AB}{MH} = \dfrac{HD + DE}{MI} = \dfrac{HE}{MI}$. Kết hợp (1), suy ra $\dfrac{BC}{MD} = \dfrac{CA}{ME} + \dfrac{AB}{MH}$ ***Lưu ý:*** Đặc biệt, nếu ΔABC đều, ta có $\dfrac{1}{ME} + \dfrac{1}{MH} = \dfrac{1}{MD}$ (*Olympic Việt Nam*).

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC, M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa đỉnh A. Gọi D, H lần lượt là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh AC, AB. Xác định vị trí của M để độ dài DH lớn nhất.



Giải. Hạ $HE \perp BC \Rightarrow D, E, H$ thẳng hàng.

Tứ giác $MHBE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{DHM}$.

Tứ giác $MCDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{HDM}$.

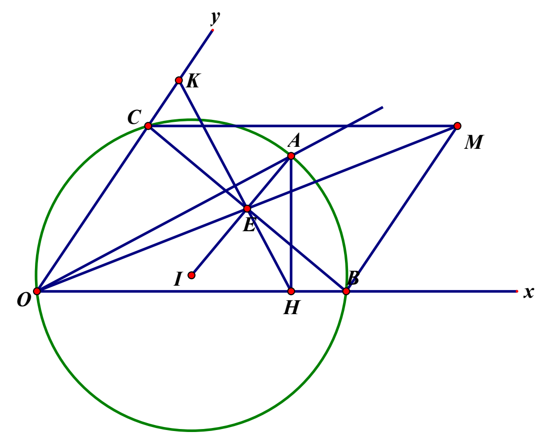
Suy ra $\Delta HDM, \Delta BCM$ đồng dạng

$\Rightarrow \dfrac{HD}{BC} = \dfrac{HM}{BM}, MH \le MB \Rightarrow \dfrac{MH}{MB} \le 1 \Rightarrow \dfrac{HD}{BC} \le 1$

$\Rightarrow HD \le BC$. Do đó HD lớn nhất khi và chỉ khi

$HD = BC \Leftrightarrow MH = MB \Leftrightarrow MB \perp AB \Leftrightarrow AM$ là đường kính $\Leftrightarrow M$ đối xứng với A qua tâm O.

Ví dụ 7. Cho góc $\widehat{xOy}$, lấy điểm A cố định thuộc phân giác của góc $\widehat{xOy}$. Dựng đường tròn (I) thay đổi qua O và A cắt Ox, Oy tại B, C. Dựng hình bình hành $OBMC$. Chứng minh rằng M thuộc một đường thẳng cố định.

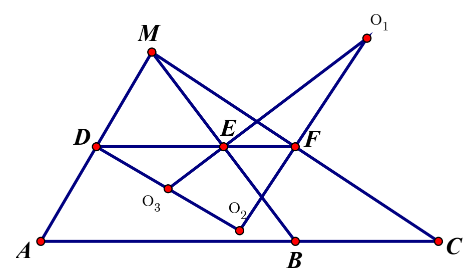


Giải. Vì A trên đường phân giác của góc $\widehat{xOy} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow IA \perp BC$

Kẻ $AH \perp Ox, AK \perp Oy \Rightarrow H, K$ cố định, và K, E, H thẳng hàng $\Rightarrow$ đường thẳng Simson của A đối với tam giác OBC cố định.

Hình bình hành $OBMC$ có $OM = 2OE \Rightarrow M$ thuộc đường thẳng d song song với đường thẳng Simson, và cách O một khoảng không đổi, bằng 2 lần khoảng cách từ O đến HK.

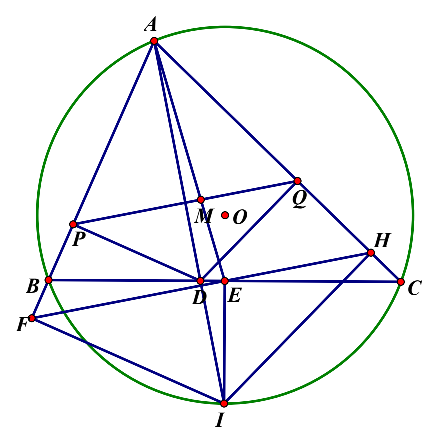
Ví dụ 8. Cho ba điểm A, B, C thuộc một đường thẳng và M không thuộc đường thẳng đó. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MAC và điểm M cùng thuộc một đường tròn.



Giải. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MBC, MAC; và D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh của tam giác $O_1O_2O_3$ ta có D, E, F là trung điểm của MA, MB, MC, suy ra D, E, F thẳng hàng.

Theo bài toán 2 ta có O_1, O_2, O_3, M nằm trên một đường tròn.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường phân giác AD. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt PQ tại M. Chứng minh M thuộc trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC.



Giải. Gọi I là giao điểm của đường phân giác AD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Kẻ $IK \perp AB, IH \perp AC$, gọi $E = OI \cap BC$

$\Rightarrow EB = EC, EI \perp BC$.

Theo bài toán 1, suy ra K, E, H thẳng hàng.

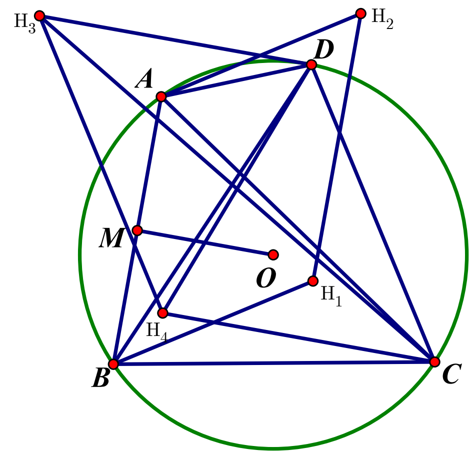
Mặt khác, $DP // KI, DQ // IH \Rightarrow \dfrac{AP}{AK} = \dfrac{AD}{AI}$ và

$\dfrac{AQ}{AH} = \dfrac{AD}{AI} \Rightarrow \dfrac{AP}{AK} = \dfrac{AQ}{AH} \Rightarrow PQ // KH$

$MD \perp BC, IE \perp BC \Rightarrow DM // IE$. Gọi $M' = AE \cap PQ$.

Dễ dàng chứng minh được $M'D // IE \Rightarrow M \equiv M'$. Vậy M thuộc trung tuyến AE.

Ví dụ 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), d_A, d_B, d_C, d_D là các đường thẳng Simson của A, B, C, D tương ứng đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C, d_D đồng quy.

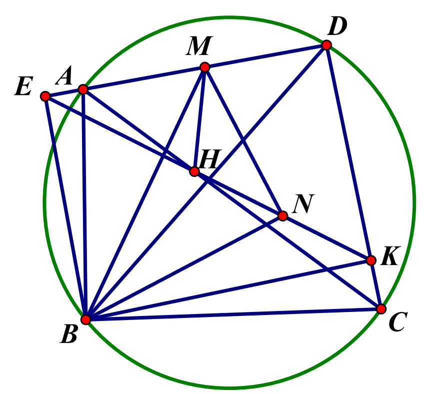


Giải. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Suy ra đường thẳng Steiner của các điểm A, B, C, D đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC lần lượt đi qua $H_1, H_2, H_3, H_4 \Rightarrow d_A, d_B, d_C, d_D$ đi qua trung điểm của AH_1, BH_2, CH_3, DH_4

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow CH_4 = 2OM$

$DH_3 = 2OM \Rightarrow CDH_3H_4$ là hình bình hành $\Rightarrow DH_4, CH_3$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tương tự, AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra d_A, d_B, d_C, d_D đồng quy.

Ví dụ 11. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Gọi H, K là hình chiếu của B trên AC và $CD; M, N$ là trung điểm của AD, HK. Chứng minh ΔBMN là tam giác vuông.



Giải. Từ B kẻ $BE \perp AD$. Theo bài toán 1 ta có E, H, K thẳng hàng.

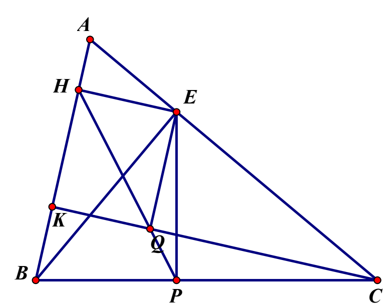
Tứ giác $BEDK, BHKC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{EKB}$; và $\widehat{BHK} + \widehat{BCD} = 180^0$.

Mặt khác $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BHK}$ $\Rightarrow \Delta BHK, \Delta BAD$ đồng dạng;

$MA = MD$ và $NH = NK \Rightarrow \Delta ABM, \Delta HBN$ đồng dạng $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BNE}$

Suy ra tứ giác $BEMN$ nội tiếp; Mà $BE \perp AD \Rightarrow BN \perp MN$. Vậy ΔBMN vuông.

Ví dụ 12. Cho tam giác ABC, BE, CK là các đường cao của tam giác ABC. Gọi P, Q là hình chiếu của E trên BC, CK. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của KE.



Giải. Từ E hạ $EH \perp AB$, theo giả thiết $EP \perp BC$, $EQ \perp CK$, tứ giác $BKEC$ nội tiếp.

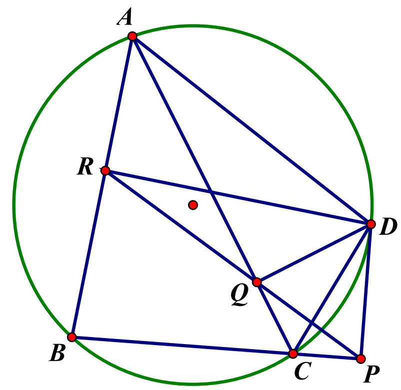
Theo bài toán 1 ta có P, Q, H thẳng hàng.

Tứ giác $KHEQ$ có

$\widehat{EHK} = \widehat{HKQ} = \widehat{KQE} = 90^0 \Rightarrow KHEQ$ là hình chữ nhật. KE, HQ là đường chéo, chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Suy ra đpcm.

<u>Ví dụ 13.</u> Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi các đường phân giác của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên AC.

Giải. Theo giả thiết ta có P, Q, R thẳng hàng.



$DPCQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DCA} = \widehat{DPR}$.

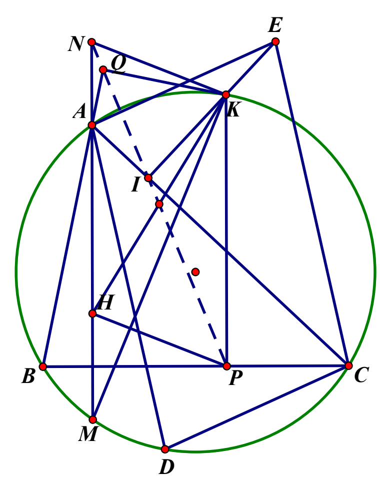
Tương tự, $\widehat{DAC} = \widehat{DRP}$.

Suy ra $\Delta DCA, \Delta DPR$ đồng dạng. Tương tự, $\Delta DAB, \Delta DQP$; $\Delta DBC, \Delta DRQ$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB.\dfrac{QR}{BC}}{DB.\dfrac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ}.\frac{BA}{BC}$$

$PQ = QR$ khi và chỉ khi $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} \Leftrightarrow$ đường phân giác $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ cắt nhau trên AC.

<u>Ví dụ 14.</u> Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H, D là điểm trên cung nhỏ BC. Dựng hình bình hành $ADCE$, K là trực tâm của tam giác ACE. Gọi P, Q là hình chiếu của K trên BC, AB. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của HK. (*Olympic Việt Nam – 2004*)



Giải. Theo giả thiết ta có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC}, K$ là trực tâm $\Delta AEC \Rightarrow EK \perp AC$

$\widehat{AKC} + \widehat{AEC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AKC} + \widehat{ADC} = 180 \Rightarrow$ tứ giác $ADCK$ nội tiếp $\Rightarrow K \in (O), EK$ cắt AC tại I, suy ra P, Q, I thẳng hàng (đường thẳng Simson).

Giả sử AH cắt (O) tại M và cắt PQ tại N, suy ra $MN // KP$; $KQ \perp AB, KP \perp BC$ $\Rightarrow BQKP$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QBK} = \widehat{AMK} = \widehat{QPK} \Rightarrow MPKN$ nội tiếp $\Rightarrow MPKN$ là hình thang cân $\Rightarrow KN = PM$.

Mặt khác, $PH = PM \Rightarrow PH = KN \Rightarrow HPKN$ là hình bình hành $\Rightarrow NP, HK$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn $\Rightarrow PQ$ đi qua trung điểm HK.

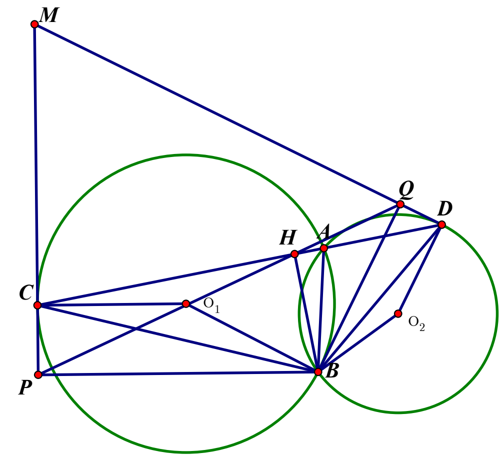
<u>Ví dụ 15.</u> Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng d thay đổi qua A cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại C, D (A nằm giữa C, D). Tiếp tuyến tại C của (O_1) và tại D của (O_2) cắt nhau tại M. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B xuống hai tiếp tuyến. Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải. MC, MD là tiếp tuyến của $(O_1),(O_2) \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{MCA}, \widehat{ABD} = \widehat{MDA}$

$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = 180^0 - \widehat{CMD}$

$\Rightarrow \widehat{CBD} + \widehat{CMD} = 180^0 \Rightarrow MCBD$ nội tiếp.

Hạ $BH \perp CD$. Áp dụng định lý Simson cho điểm B đối với tam giác MCD ta có $P, H,$Q thẳng hàng; A, B cố định, suy ra H nằm trên đường tròn đường kính AB. Nên, PQ luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AB.



BÀI TẬP

1. Cho đường tròn (O) và ba dây cung tùy ý AB, AC, AD. Các đường tròn đường kính AB, AC, AD cắt nhau từng đôi một tại M, N, E. Chứng minh M, N, E thẳng hàng.

2. Nếu 2 tam giác cùng nội tiếp đường tròn (O) thì góc giữa 2 đường thẳng Simson của điểm M trên (O) đối với hai tam giác không phụ thuộc vào vị trí của M trên (O).

3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua AC, F là điểm đối xứng của C qua AB. Giả sử H là trực tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH = 2R$ (*Anh – 1990*)

4. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không cắt (O). Điểm M thay đổi trên *d*. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O). Gọi H là hình chiếu của O trên d; E, F lần lượt là hình chiếu của H trên MA, MB. Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra EF cũng đi qua một điểm cố định.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). $P, Q \in (O)$ sao cho CP, CQ đối xứng với nhau qua phân giác của góc $\widehat{BCA}$. Chứng minh rằng CQ vuông góc với đường thẳng Simson của P đối với tam giác ABC.

6. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ và tia phân giác Oz, điểm M cố định trên Oz (M khác O). Dựng đường tròn (S) đi qua O, M, cắt Ox, Oy tại A, B. Gọi I là trung điểm của AB. Dựng hình vuông $OCID$. Tìm quỹ tích điểm C khi đường tròn (S) thay đổi.

7. Cho tam giác ABC không đều, P là hình chiếu của A trên BC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi l_a là đường thẳng đi qua chân hai đường cao hạ từ P xuống DE, DF. Tương tự cho l_b, l_c. Chứng minh l_a, l_b, l_c đồng quy.

8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), M là điểm trên đường tròn đó. Gọi $a, b,\ c, d$ là các đường thẳng Simson của M đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là hình chiếu của M trên a, b, c, d. Chứng minh A_1, B_1, C_1, D_1 thẳng hàng.

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). MN là dây cung chuyển động trên đường tròn có độ dài không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng Simson của M,N đối với tam giác ABC hợp với nhau một góc không đổi.

10. Cho tứ giác $ABCD$ có AB,CD cắt nhau tại $E;BC,AD$ cắt nhau tại F. Chứng minh các trực tâm của các tam giác ABF,CDF,ADE,BCE thẳng hàng.

8. Chuyên đề 8: Bất đẳng thức Erdos – Modell và một vài ứng dụng:

8.1. BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL.

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

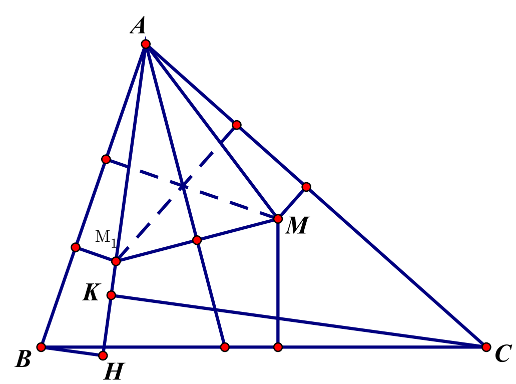
Khi đó ta có bất đẳng thức $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ tam giác ABC đều, và M là tâm của tam giác đều đó.

Bất đẳng thức Erdos – Mordell (E – M) là một bất đẳng thức khá nổi tiếng trong tam giác, được nhà toán học nổi tiếng người Hungari P. Erdos đề xuất vào năm 1935, khi nghiên cứu các tính chất của tam giác. Bị lôi cuốn bởi tính giản dị của bài toán, P. Erdos lao vào chứng minh, song vinh dự giải được bài toán đó không thuộc về ông, mà thuộc về nhà hình học nổi tiếng người Anh tên là Louis Mordel. L. Mordell đã chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp lượng giác (sử dụng định lí Sin và định lí Cosossin). Mãi đến năm 1945, nhà toán học người Nga Cadarinop mới đề xuất được một lời giải thuần túy hình học có thể chấp nhận được. Tiếp theo đó, nhiều nhà toán học trên thế giới đã nêu được những lời giải ngắn gọn cho bất đẳng thức. Chẳng hạn bằng cách sử dụng *định lý Ptolemy* của *André Avez*; sử dụng kiến thức tam giác đồng dạng của *Leon Bankoff*; sử dụng bất đẳng thức về diện tích của *V. Komornik*; sử dụng lượng giác của *Barrow; …*

Sau đây là một lời giải thuần túy hình học phù hợp với trình độ các bạn HS lớp 9.

Chứng minh bất đẳng thức E – M



Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Lấy điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường phân giác trong của góc BAC. Dựng $BH \perp AM_1, CK \perp AM_1$. Giả sử AM_1 cắt BC tại D.

Khi đó $BD \geq BH$; $DC \geq CK$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AD \perp BC$ hay $AM_1 \perp BC$. Từ đó ta có:

$a \geq BH + CK \Leftrightarrow aR_a \geq 2S_{ABM_1} + 2S_{ACM_1}$ ($AM_1 = AM = R_a$) hay $aR_a \geq cd_b + bd_c$

Từ đó $R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$ (1). Tương tự $R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$ (2), $R_c \geq \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (3)

Cộng vế - vế (1), (2), (3) ta thu được

$$R_a + R_b + R_c \geq d_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + d_b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + d_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, đồng thời M_1 là trực tâm của tam giác ABC.

Từ cách chứng minh trên chúng ta còn một số kết quả sau:

Hệ quả 1. (Bất đẳng thức E – M dạng tích)

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có bất đẳng thức $R_a.R_b.R_c \geq 8d_a.d_b.d_c$

Chứng minh. Từ cách chứng minh bất đẳng thức E – M ta có:

$R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$, $R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a$, $R_c \geq \frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a$ (*). Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được $R_a.R_b.R_c \geq \left(\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c\right)\left(\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a\right)\left(\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a\right)$

$$\geq 8\sqrt{\left(\frac{c}{a}d_b.\frac{b}{a}d_c\right)\left(\frac{a}{b}d_c.\frac{c}{b}d_a\right)\left(\frac{a}{c}d_b.\frac{b}{c}d_a\right)} = 8d_a.d_b.d_c \text{ (đpcm)}$$

Hệ quả 2. (Bất đẳng thức E – M dạng căn thức)

Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

Khi đó ta có bất đẳng thức $\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}\right)$

Chứng minh. Từ (*) ở hệ quả 1, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{R_a} \geq \sqrt{\frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c} \geq \frac{\sqrt{\frac{c}{a}}.\sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{a}}.\sqrt{d_c}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{R_b} \geq \sqrt{\frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a} \geq \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{d_c} + \sqrt{\frac{c}{b}}.\sqrt{d_a}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{R_c} \geq \sqrt{\frac{a}{c}d_b + \frac{b}{c}d_a} \geq \frac{\sqrt{\frac{a}{c}}.\sqrt{d_b} + \sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{d_a}}{\sqrt{2}}$$

Cộng vế - vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}\right)\sqrt{d_a} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{a}{c}}\right)\sqrt{d_b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\sqrt{d_c}$$

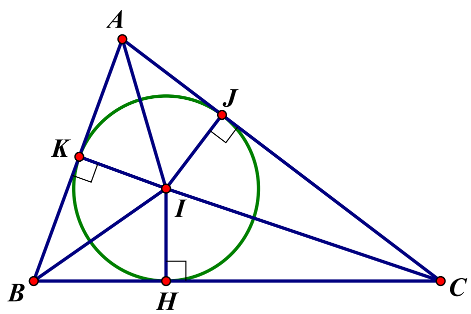
$$\geq \sqrt{2}\left(\sqrt{d_a} + \sqrt{d_b} + \sqrt{d_c}\right) \text{ (đpcm)}$$

8.2. MỘT VÀI ÁP DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC ERDOS – MORDELL

Chúng ta xét vài áp dụng của bất đẳng thức E – M và các hệ quả 1, hệ quả 2 thông qua một số bài toán sau:

Ví dụ 1. Gọi I là tâm, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $IA + IB + IC = 6r$.

Giải. Kẻ IH, IJ, IK theo thứ tự vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Ta có $IH = IJ = IK = r$.



Áp dụng bất đẳng thức E – M cho điểm I trong tam giác ABC, ta thấy

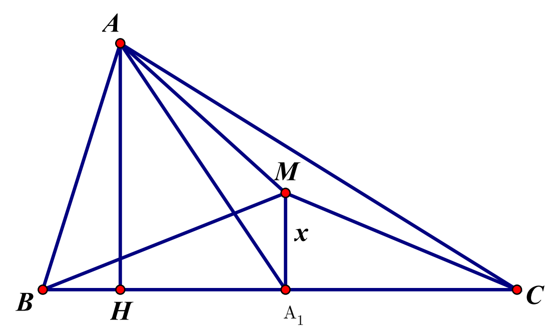
$$IA + IB + IC \geq 2(IH + IJ + IK) = 6r.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nói cách khác, điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $IA + IB + IC = 6r$ (đpcm)

Ví dụ 2. Giả sử M là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $MA + MB + MC \geq 6r$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.



Kẻ $AH \perp BC, MA_1 \perp BC$, khi đó ta có $AM + MA_1 \geq AH$. Từ đó

$$AM \geq \frac{2S_{ABC}}{BC} - x.$$

Tương tự, $BM \geq \dfrac{2S_{ABC}}{CA} - y$,

$CM \geq \dfrac{2S_{ABC}}{AB} - z$. Cộng theo vế 3 bất đẳng thức này được

$$MA + MB + MC \geq 2S_{ABC}\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BA}\right) - (x + y + z)$$

$$= r(BC + CA + AB)\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BA}\right) - (x + y + z) \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $(BC + CA + AB)\left(\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BA}\right) \geq 9$

(2)

Áp dụng bất đẳng thức E – M cho điểm M đối với ΔABC thì

$MA + MB + MC \geq 2(x + y + z)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

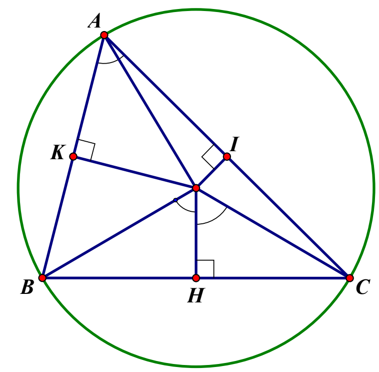
$$MA + MB + MC \geq 9r - \left(\frac{MA + MB + MC}{2}\right) \Leftrightarrow MA + MB + MC \geq 6r$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều (đpcm).

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có các bất đẳng thức a, $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ b, $\cos A.\cos B.\cos C\le\frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải. a, Gọi O,R theo thứ tự là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; H,I,K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc kẻ từ O đến các cạnh BC,CA,AB. Từ giả thiết tam giác ABC nhọn, ta nhận thấy $\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$, hay $\widehat{BAC}=\widehat{HOC}$.



Tương tự có $\widehat{ABC}=\widehat{AOI},\widehat{ACB}=\widehat{BOK}$. Từ đó:

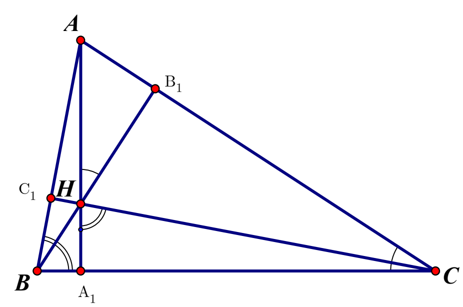
$$\cos A+\cos B+\cos C=\cos\widehat{HOC}+\cos\widehat{AOI}+\cos\widehat{BOK}=\frac{OH}{OC}+\frac{OI}{OA}+\frac{OK}{OB}=\frac{OH+OI+OK}{R}$$

Nhưng theo bất đẳng thức E – M cho điểm O nằm trong tam giác ABC ta có

$$OH+OI+OK\le\frac{OA+OB+OC}{2}$$

Suy ra $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

b, Dựng $AA_1\perp BC,BB_1\perp AC,CC_1\perp AB$. Gọi H là trực tâm ΔABC.



Do tứ giác BC_1HA_1 nội tiếp nên $\widehat{ABC}=\widehat{A_1HC}$. Tứ giác CA_1HB_1 nội tiếp nên $\widehat{ACB}=\widehat{B_1HA}$. Tứ giác AC_1HB_1 nội tiếp nên $\widehat{BAC}=\widehat{C_1HB}$. Do đó:

$$\cos A.\cos B.\cos C=\cos\widehat{A_1HC}.\cos\widehat{B_1HA}.\cos\widehat{C_1HB}=\frac{HA_1.HB_1.HC_1}{HA.HB.HC}\quad(3)$$

Sử dụng bất đẳng thức E – M dạng tích ta có $HA.HB.HC\ge 8HA_1.HB_1.HC_1$

Từ (3) suy ra $\cos A.\cos B.\cos C\le\frac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

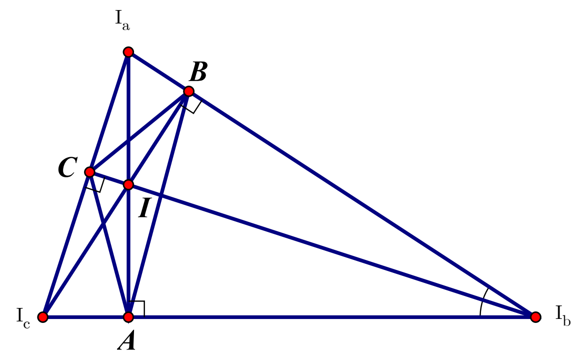
Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC, gọi I,I_a,I_b,I_c theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, tâm các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh A,B,C của tam giác đó; r là bán kính của đường tròn (I). Chứng minh rằng:

a, $IA.IB.IC\ge 8r^3$ b, $II_a+II_b+II_c\ge 12r$

c, $II_a.II_b.II_c\ge 64r^3$ d, $\sqrt{II_a}+\sqrt{II_b}+\sqrt{II_c}\ge 6\sqrt{r}$

Giải. a, Gọi H, J, K lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB. Sử dụng E – M dạng tích, ta có $IA.IB.IC \geq 8IH.IJ.IK$ hay $IA.IB.IC \geq 8r^3$

<u>*Lưu ý:*</u> Bất đẳng thức ở câu a, cũng đúng cho tam giác ABC bất kì.



b, Nhận xét rằng điểm I là trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$.

Áp dụng E – M cho điểm I đối với tam giác $I_aI_bI_c$ ta nhận được

$II_a + II_b + II_c \geq 2(IA + IB + IC) \geq 12r$ (theo ví dụ 1)

c, Áp dụng E – M dạng tích cho điểm I đối với tam giác $I_aI_bI_c$ ta nhận được $II_a.II_b.II_c \geq 8IA.IB.IC \geq 64r^3$ (theo câu a,).

d, Áp dụng E – M dạng căn thức cho điểm I đối với tam giác $I_aI_bI_c$ ta có

$\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \geq \sqrt{2}(\sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC})$ (1)

Áp dụng E – M dạng căn thức cho điểm I đối với tam giác ABC ta được:

$\sqrt{IA} + \sqrt{IB} + \sqrt{IC} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{IH} + \sqrt{IJ} + \sqrt{IK}\right) = 3\sqrt{2}.\sqrt{r}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\sqrt{II_a} + \sqrt{II_b} + \sqrt{II_c} \geq 6\sqrt{r}$

Các đẳng thức ở câu a, b, c, d xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

<u>**Ví dụ 5.**</u> Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó. Chứng minh $abc \geq 24\sqrt{3}r^3$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải. Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC. Từ công thức Heron $S_{ABC}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ và $S_{ABC} = pr$, suy ra $r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ (1)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Theo định lý Pythagore và (1) ta có

$$IA^2.IB^2.IC^2 = \left(r^2 + (p-a)^2\right)\left(r^2 + (p-b)^2\right)\left(r^2 + (p-c)^2\right)$$

$$= \left(\frac{(p-a)bc}{p}\right)\left(\frac{(p-b)ac}{p}\right)\left(\frac{(p-c)ab}{p}\right) \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{p}{3} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

hay $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{p^3}{27}$ (3).

Từ (2), (3) suy ra $IA^2.IB^2.IC^2 \le \dfrac{a^2b^2c^2}{27} \Leftrightarrow IA.IB.IC \le \dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ (4)

Áp dụng E – M dạng tích ta có $IA.IB.IC \ge 8r^3$ (5).

Từ (4), (5) suy ra $abc \ge 24\sqrt{3}r^3$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

<u>*Chú ý*</u>. Các bạn học lớp 9 nếu đã làm quen với định lý Sin trong tam giác ABC thì thấy $a = 2R\sin A; b = 2R\sin B; c = 2R\sin C$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Khi đó từ bất đẳng thức $abc \ge 24\sqrt{3}r^3$ ta nhận được bất đẳng thức

$$8R^3\sin A.\sin B.\sin C \ge 24\sqrt{3}r^3 \Leftrightarrow \sin A.\sin B.\sin C \ge 3\sqrt{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

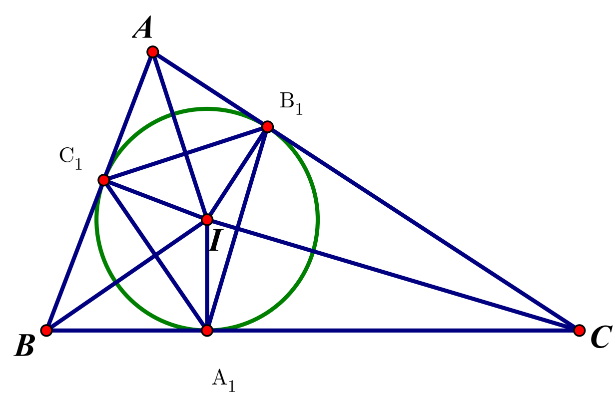
Hệ quả. *Với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức* $\sin A.\sin B.\sin C \ge 3\sqrt{3}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

<u>**Ví dụ 6.**</u> Giả sử đường tròn $(I;r)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh $AB.BC.CA \ge 8A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$ và p là nửa chu vi tam giác ABC



Sử dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác nội tiếp $IC_1AB_1, IC_1BA_1, IA_1CB_1$ ta thấy $IA.B_1C_1 = IB_1.AC_1 + IC_1.AB_1$ hay $IA.B_1C_1 = 2r(p-a)$ (1).

Tương tự, $IB.A_1C_1 = 2r(p-b)$ (2), $IC.A_1B_1 = 2r(p-c)$ (3)

Nhân đẳng thức (1), (2), (3) theo vế ta được $IA.IB.IC = \dfrac{8r^3(p-a)(p-b)(p-c)}{B_1C_1.C_1A_1.A_1B_1}$

(4) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$(p-a)(p-b) \le \left(\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}; (p-b)(p-c) \le \frac{a^2}{4}; (p-a)(p-c) \le \frac{b^2}{4}$$

Nhân ba bất đẳng thức theo vế ta thu được $(p-a)(p-b)(p-c) \le \dfrac{abc}{8}$ (5)

Áp dụng E – M dạng tích ta có $IA.IB.IC \ge 8r^3$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $AB.BC.CA \geq 8A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

<u>Ví dụ 7. (IMO 1991)</u> Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Chứng minh có ít nhất một trong ba góc $\widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA}$ nhỏ hơn hoặc bằng 30^0.

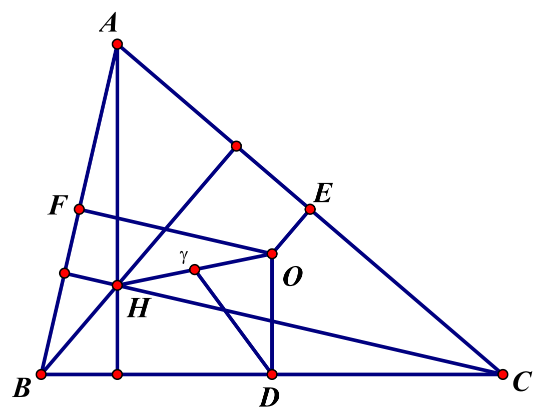
Giải. (*Phản chứng*). Giả sử không có góc nào trong 3 góc $\widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA}$ nhỏ hơn hoặc bằng 30^0. Khi đó, nếu có một góc lớn hơn hoặc bằng 150^0 thì hai góc còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 30^0. Giả sử cả ba góc đều lớn hơn 30^0 và nhỏ hơn 150^0. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có

$2d_a = 2PB.\sin\widehat{PBC} > 2\sin 30^0.PB = BP \quad (1)$

Tương tự $2d_b > PC$ (2), $2d_c > PA$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $PA + PB + PC < 2(d_a + d_b + d_c)$ (mâu thuẫn E – M). Từ đây ta có điều cần chứng minh.

<u>Ví dụ 8.</u> Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R$. Đẳng thức xảy ra khi nào?



Giải. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Còn ω là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Ta có các kết quả sau (*tự chứng minh*):

+ ω là trung điểm của OH.

+ Bán kính đường tròn Euler của tam giác ABC bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Sử dụng hai kết quả trên ta có:

$HD + OD \geq 2\omega D = R;\; HE + OE \geq 2\omega E = R;\; HF + OF \geq 2\omega F = R;$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên: $HD + HE + HF \geq 3R - (OD + OE + OF) \quad (1)$

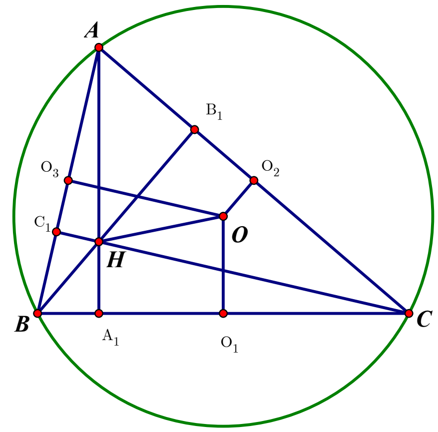
Áp dụng E – M cho điểm O nằm trong tam giác ABC ta có

$$OD + OE + OF \leq \frac{OA + OB + OC}{2} = \frac{3R}{2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $HD + HE + HF \geq \frac{3}{2}R$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 9. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Kẻ $OO_1 \perp BC, OO_2 \perp AC, OO_3 \perp AB$. Chứng minh rằng

$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \le OO_1 + OO_2 + OO_3 \le \frac{3}{2}R$$



Giải. Nhận xét rằng $HA = 2OO_1, HB = 2OO_2, HC = 2OO_3$ (có thể chứng minh các đẳng thức này bằng cách kẻ các đường kính của đường tròn (O) qua A, B, C rồi sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác).

+ Áp dụng E – M cho điểm H trong tam giác ABC ta có:

$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \le \frac{HA + HB + HC}{2} = OO_1 + OO_2 + OO_3$$

+ Áp dụng E – M cho điểm O trong tam giác ABC ta có:

$$OO_1 + OO_2 + OO_3 \le \frac{OA + OB + OC}{2} = \frac{3}{2}R \text{ (đpcm).}$$

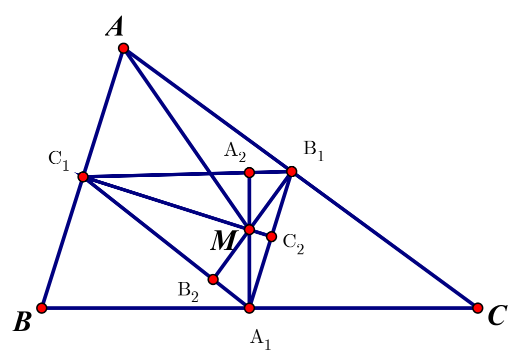
Chú ý: Tổng hợp các kết quả của Ví dụ 8 và Ví dụ 9 ta có dãy bất đẳng thức

$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \le OO_1 + OO_2 + OO_3 \le \frac{3}{2}R \le HO_1 + HO_2 + HO_3$$

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kì trong tam giác đó. Gọi R_a, R_b, R_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C. Còn d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh bất đẳng thức $d_a + d_b + d_c \ge 2\left(\frac{d_b d_c}{R_a} + \frac{d_c d_a}{R_b} + \frac{d_a d_b}{R_c}\right)$

Giải. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M lên các cạnh BC, CA, AB.



Ta có $B_1C_1 = MA.\sin A = R_a.\sin A$, $C_1A_1 = R_b.\sin B$ và $A_1B_1 = R_c.\sin C$.

Kẻ $MA_2 \perp B_1C_1, MB_2 \perp C_1A_1, MC_2 \perp A_1B_1$.

Khi đó

$$MA_2 = MB_1.\sin\widehat{MB_1A_2} = MB_1.\sin\widehat{MAC_1} = \frac{MB_1.MC_1}{MA} = \frac{d_b.d_c}{R_a} \quad (1)$$

$$MB_2 = MC_1.\sin\widehat{MC_1B_2} = MC_1.\sin\widehat{MBA_1} = \frac{MA_1.MC_1}{MB} = \frac{d_a.d_c}{R_b} \quad (2)$$

$$MC_2 = MA_1.\sin\widehat{MA_1C_2} = MA_1.\sin\widehat{MCB_1} = \frac{MB_1.MA_1}{MC} = \frac{d_b.d_a}{R_c} \quad (3)$$

Áp dụng E – M cho điểm M trong tam giác $A_1B_1C_1$ ta có:

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 \geq 2\left(MA_2 + MB_2 + MC_2\right) \text{ (4)}$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra đpcm.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Chứng minh bất đẳng thức $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

2. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A, B, C; và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Chứng minh rằng $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{A}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{B}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{C}{2}}} \geq 3\sqrt{2}$$.Đẳng thức xảy ra khi nào?

4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Chứng minh các hệ thức sau:

a, $HA + HB + HC = 2(R + r)$ b, $HA_1 + HB_1 + HC_1 \leq R + r$

c, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ d, $R \geq 2r$

9. Chuyên đề 9: Định lý Ptôlêmê và đặc trưng của tứ giác nội tiếp:

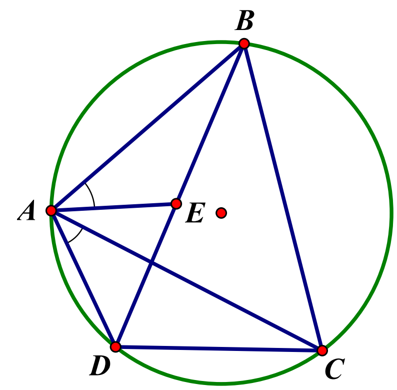
Định lý Ptôlêmê là một trong những định lý đẹp nhất của Hình học sơ cấp. Đẹp trước hết vì tính tự nhiên và sự giản đơn trong cách phát biểu của định lý đó, nhưng chính yếu hơn là do các ứng dụng phong phú của nó. Có lẽ định lý Ptôlêmê là một trong những đặc trưng sâu sắc nhất về tứ giác nội tiếp đường tròn.

9.1. ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ

Định lý Ptôlêmê được phát biểu như sau: *Trong một tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích các cặp cạnh đối diện.*

Sau đây là một phương pháp chứng minh định lý này:

Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O).



Trên BD lấy điểm E sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

Vì $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ nên hai tam giác ABE và ACD đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD} \Leftrightarrow AB.CD = BE.AC$ (1)

Tương tự, $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}, \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ nên hai tam giác AED và ABC đồng dạng

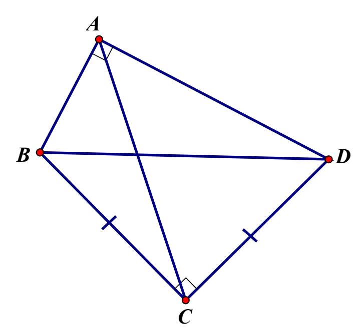
$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{ED}{BC} \Leftrightarrow AD.BC = ED.AC$ (2)

Từ (1), (2) ta được $AB.CD + AD.BC = AC(BE + ED)$ hay $AB.CD + AD.BC = AC.BD$

9.2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ

Định lý Ptôlêmê thường được sử dụng để chứng minh các hệ thức trong tam giác.

<u>**Ví dụ 1.**</u> Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB + AC = 4cm$. Vẽ tam giác BCE vuông cân tại E (E, A nằm khác phía đối với BC). Tính độ dài AE?



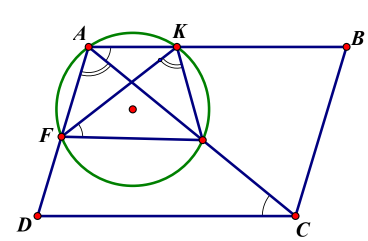
Giải. Đặt $BE = CE = a$.

Áp dụng định lý Ptôlêmê vào tứ giác $ABEC$ ta có $AE.BC = AB.CE + AC.BE \Rightarrow AE.a\sqrt{2} = AB.a + AC.a$

$\Rightarrow AE\sqrt{2} = AB + AC$.

Suy ra $AE = 2\sqrt{2}cm$.

<u>**Ví dụ 2.**</u> Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường tròn đi qua A cắt các đoạn thẳng AB, AC, AD theo thứ tự ở K, E, F. Chứng minh $AK.AB + AF.AD = AE.AC$.



Giải.

Áp dụng định lý Ptôlêmê vào tứ giác $AKEF$ ta có $AK.EF + AF.EK = AE.KF$ (1).

Mặt khác, hai tam giác KFE, ACD đồng dạng nên

$\frac{EF}{CD} = \frac{KE}{AD} = \frac{KF}{AC} = k$ (2).

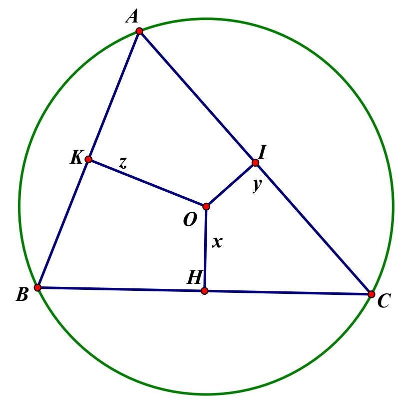
Từ (1), (2) suy ra $AK.kAB + AF.kAD = AE.kAC \Rightarrow AK.AB + AF.AD = AE.AC$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi x, y, z là các khoảng cách từ O đến BC, CA, AB và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a, Chứng minh hệ thức $x + y + z = R + r$

b, Kết quả thế nào nếu góc A tù?

Giải.



a, Gọi H, I, K là chân các đường vuông góc hạ từ O xuống BC, CA, AB. Khi đó H, I, K là trung điểm của BC, CA, AB.

Ta có $KI = \frac{a}{2}$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $AKOI$ ta có $OA.KI = OI.AK + OK.AI$ hay $R\frac{a}{2} = y\frac{c}{2} + z\frac{b}{2}$. Do đó $Ra = yc + zb$. Tương tự, $Rb = ya + xb$, $Rc = xc + za$.

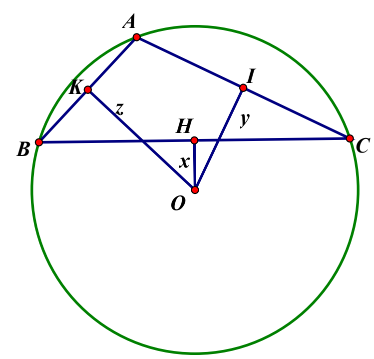
Mặt khác, $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{AOC} + S_{ABO} = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$

Suy ra $(a + b + c)r = ax + by + cz$.

Từ đó $(R + r)(a + b + c) = Ra + Rb + Rc + r(a + b + c)$

$= yc + zb + ya + xb + xa + zc + ax + by + cz = (x + y + z)(a + b + c)$.

Suy ra $x + y + z = R + r$.



b, Khi góc A tù, tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trong tam giác đó. Trong trường hợp này các hệ thức tương ứng sẽ là

$Ra = yc + zb;\ Rb = za - xc;\ Rc = ya - bx;$

và $r(a + b + c) = yb + zc - ax$

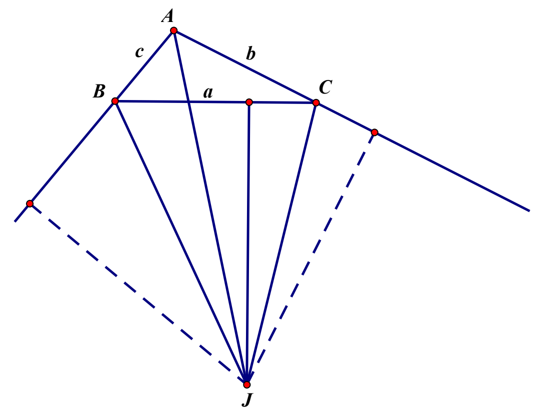
Cộng theo vế các đẳng thức trên, có

$(R + r)(a + b + c) = (y + z - x)(a + b + c) \Leftrightarrow y + z - x = R + r$

<u>Lưu ý</u>: Kết quả $y + z - x = R + r$ không ấn tượng lắm. Tuy nhiên ta sẽ có kết quả đẹp hơn ở ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có góc A tù nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r_a là bán kính của đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi x, y, z là các khoảng cách từ O đến BC, CA, AB. Chứng minh $x + y + z = r_a - R$

Giải.



$S = S_{OAC} + S_{OAB} - S_{OBC} = \frac{1}{2}(by + cz - ax)$

(1)

Gọi J là tâm của đường tròn bàng tiếp góc A, ta có:

$S = S_{JAC} + S_{JAB} - S_{JBC} = \frac{1}{2}(br_a + cr_a - ar_a)$

$= \frac{r_a}{2}(b + c - a)$ (2)

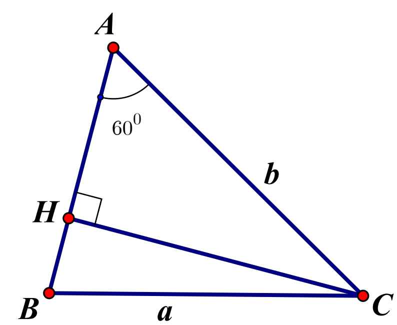
Từ (1), (2) suy ra $by + cz - ax = r_a(b + c - a)$

Ta lại có $Rb = za - xc;\ Rc = ya - bx;\ Ra = yc + zb$

Từ đó, $(r_a - R)(b + c - a) = (x + y + z)(b + c - a) \Leftrightarrow r_a - R = x + y + z$

Bổ đề. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và $\widehat{A} = 60^0$.

Khi đó $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

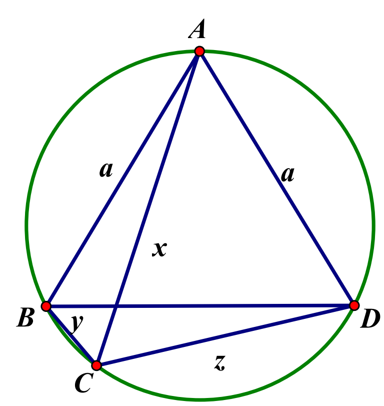


Thật vậy, kẻ $CH \perp AB$. Khi đó trong tam giác vuông ACH có $\widehat{ACH} = 30^0$. Do đó $AH = \frac{b}{2}, CH = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông BHC có

$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc$

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn tâm O và một điểm M trên cung nhỏ BC. Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$. Chứng minh: a, $x = y + z$; b, $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ c, $x^4 + y^4 + z^4 = 2a^4$



Giải.

a, Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABMC$ có $MA.BC = MB.AC + MC.AB$

Do đó $xa = ya + za \Leftrightarrow x = y + z$

b, Chú ý rằng $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^0;\ \widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^0$.

Áp dụng bổ đề trên cho các tam giác MAB, MAC có

$a^2 = x^2 + y^2 - xy$ và $a^2 = x^2 + z^2 - xz$.

Do đó, $2a^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 - x(y+z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2 = y^2 + z^2 + x^2$ (theo câu a,).

c, Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ nhận được

$$a^4 = (x^2 + y^2 - xy)^2 = x^4 + y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3$$

$$a^4 = (x^2 + z^2 - xz)^2 = x^4 + z^4 + 3x^2z^2 - 2x^3z - 2xz^3$$

Từ đó $2a^4 = 2x^4 + y^4 + z^4 + 3x^2(y^2 + z^2) - 2x^3(y+z) - 2x(y^3 + z^3)$ (1)

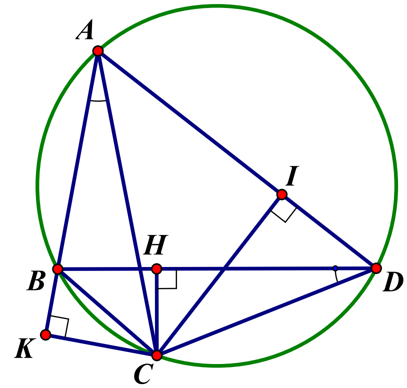
Chú ý rằng $x = y + z$ nên $2x^3(y+z) = 2x^4$

Và $3x^2(y^2 + z^2) - 2x(y^3 + z^3) = 3x^2(y^2 + z^2) - 2x(y+z)(y^2 + z^2 - yz)$

$$= 3x^2(y^2 + z^2) - 2x^2(y^2 + z^2 - yz) = x^2(y^2 + z^2 + 2yz) = x^4$$

Do đó, từ (1) suy ra $2a^4 = x^4 + y^4 + z^4$

<u>Ví dụ 6.</u> Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB. Chứng minh hệ thức $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MI} + \frac{AB}{MK}$.



Giải. Vì $\widehat{MCH} = \widehat{MAK}$ (cùng chắn cung MB) nên hai tam giác MHC, MKA đồng dạng.

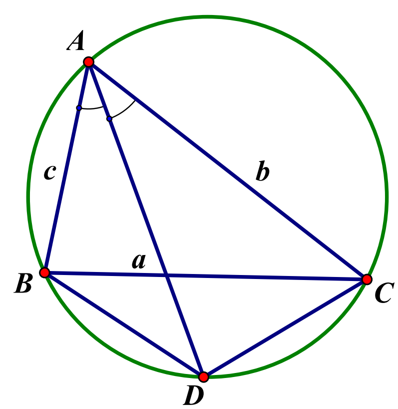
Do đó $\frac{MH}{MK} = \frac{MC}{MA}$. Suy ra $MC = \frac{MH.MA}{MK}$.

Tương tự, $\widehat{MBH} = \widehat{MAI}$ nên tam giác MHB, MIA đồng dạng, suy ra $MB = \frac{MH.MA}{MI}$

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABMC$ có $MA.BC = MB.AC + MC.AB$

Từ đó $MA.BC = \frac{MH.MA}{MI}.AC + \frac{MH.MA}{MK}.AB \Leftrightarrow \frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MI} + \frac{AB}{MK}$ (đpcm).

<u>Ví dụ 7.</u> Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 2\hat{B}$. Chứng minh $a^2 - b^2 = bc$.



Giải. Phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D.

Khi đó $\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{DCB} = \widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ nên $AC = CD = b;\ BD = AC = b$.

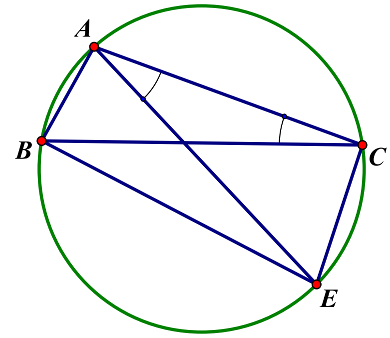
Tương tự, $\widehat{ABD} = 2\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$ nên

$AD = BC = a$. Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ ta có $AD.BC = DC.AB + DB.AC \Leftrightarrow a^2 = bc + b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = bc$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

Giải. Từ giả thiết $\widehat{A} = 2\widehat{B},\ \widehat{B} = 2\widehat{C}$, theo ví dụ 7 có $a^2 - b^2 = bc,\ \ b^2 - c^2 = ac$.

Từ đó $a^2 - c^2 = c(a + b)$.



Trên cung lớn BC, lấy điểm E sao cho $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$.

Khi đó $CE = AB = c$ và $\widehat{ACE} = \widehat{BAC}$ nên $AE = BC = a$

Mặt khác, $\widehat{ABE} = 3\widehat{ACB} = \widehat{BCE}$ nên $BE = AE = a$.

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABEC$ có $BC.AE = AB.EC + AC.BE$ hay $a^2 = c^2 + ab$.

Từ đó, $a^2 - c^2 = ab$.

Theo chứng minh trên $a^2 - c^2 = c(a + b)$ nên $ab = c(a + b)$.

Chia cả 2 vế đẳng thức cuối cùng cho abc ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ (đpcm).

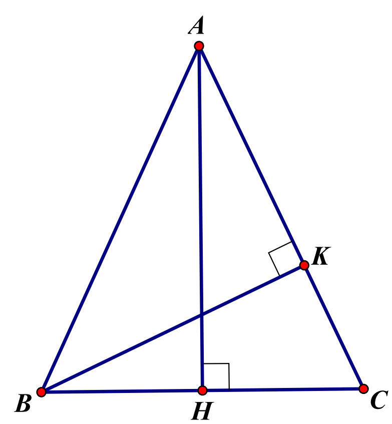
9.3. ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ VÀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Trong phần này ta sẽ sử dụng định lý Ptôlêmê để tính hàm số lượng giác của một số góc nhọn.

Ví dụ 9. Tính $\sin 18^0$ và $\cos 36^0$ (không dùng bảng số và máy tính)

Giải.

•Dựng tam giác cân ABC có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^0,\ \widehat{BAC} = 36^0$. Đặt $BC = a,$ $AB = AC = b$. Khi đó $\widehat{ABC} = 2\widehat{BAC}$ nên theo ví dụ 7 có $b^2 - a^2 = ab$ $(AB = c = b)$



Từ đó

$$a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

•Kẻ $AH \perp BC$. Khi đó $BH = HC = \frac{a}{2}$ và $\widehat{BAH} = 18^0$

Từ đó $\sin 18^0 = \sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2b} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

Kẻ $BK \perp AC$. Khi đó $AK = AB.\cos \widehat{BAK} = b.\cos 36^0$ và

$$KC = BC.\sin\widehat{KBC} = a.\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.b\frac{\sqrt{5}-1}{2} = b\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{8}$$

Vì $AK + KC = AC$ nên $b.\cos 36^0 + b\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{8} = b \Leftrightarrow \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

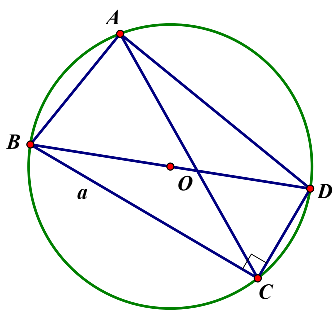
Ví dụ 10. Cho α, β là các góc nhọn sao cho $\alpha + \beta$ là góc nhọn. Chứng minh công thức $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

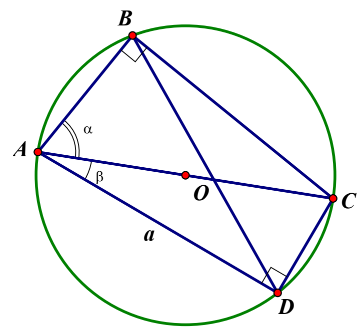
Bổ đề: Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn $(O;R)$.

Khi đó $a = 2R.\sin A$ (định lý hàm số Sin).

Chứng minh: Vẽ đường kính BD. Khi đó $\widehat{BCD} = 90^0$ và $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$

Trong tam giác vuông BDC có $BC = BD.\sin\widehat{BDC} \Leftrightarrow a = 2R.\sin A$.





Giải. Trên đường tròn (O), đường kính $AC = 2R = 1$ lấy các điểm B, D sao cho $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{CAD} = \beta$.

Khi đó $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$ nên $\widehat{ACB} = 90^0 - \alpha$ và $\widehat{ACD} = 90^0 - \beta$.

Áp dụng bổ đề, $AB = 2R\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$. Tương tự $AD = \cos\beta$

Hơn nữa, $AC = 2R = 1, BD = 2R\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$, $BC = \sin\alpha, CD = \sin\beta$.

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $AC.BD = BC.AD + CD.AB$ hay $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$.

Lưu ý: a, Nếu bạn đọ biết thêm rằng $\sin 90^0 = 1$ và β là góc tù thì $\sin\beta = \sin(180^0 - \beta)$, bạn sẽ thấy Định lý hàm số Sin vẫn đúng đối với tam giác ABC tùy ý (không cần giả thiết tam giác nhọn).

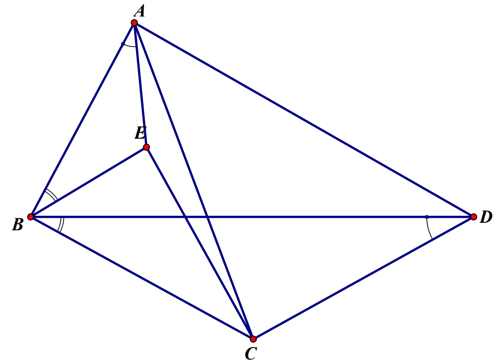
b, Công thức $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$ gọi là *công thức cộng cung*. Thực ra công thức này đúng với α, β tùy ý. Áp dụng thức $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta,$ $\cos^2(\alpha+\beta) = 1 - \sin^2(\alpha+\beta)$ nhận được $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$. Khi $\alpha = \beta$ ta nhận được công thức nhân đôi $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$ và $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

9.4. BẤT ĐẲNG THỨC PTÔLÊMÊ

Bất đẳng thức Ptôlêmê được phát biểu như sau: Trong một tứ giác lồi $ABCD$ ta có

$$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$$

Lấy điểm E trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\widehat{EBA} = \widehat{DBC}, \widehat{EAB} = \widehat{BDC}$.



Khi đó hai tam giác ABE, DBC đồng dạng nên $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AE}{CD} \Leftrightarrow AB.CD = AE.BD$

Ta lại có hai tam giác EBC, ABD đồng dạng nên $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{EC}{AD} \Leftrightarrow BC.AD = EC.BD$

Từ đó

$AB.CD + AD.BC = BD(AE + EC) \Rightarrow AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$.

Đẳng thức này xảy ra khi và chỉ khi E nằm trên đoạn AC , nghĩa là khi và chỉ khi $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ hay $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

9.5. ĐẶC TRƯNG CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN.

Từ bất đẳng thức Ptôlêmê ta suy ra: Điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn là $AB.CD + BC.AD = AC.BD$

Như vậy $AB.CD + BC.AD = AC.BD$ là một đặc trưng của tứ giác nội tiếp $ABCD$.

Thực ra, ta có thể tìm thấy nhiều đặc trưng khác của tứ giác nội tiếp. chúng được cho bởi bài toán sau:

Đối với tứ giác $ABCD$ cho trước, các khẳng định sau là tương đương:

1. Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
2. $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^0$.
3. $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.
4. $AB.CD + BC.AD = AC.BD$.
5. $MA.MC = MB.MD$ (M là giao điểm của AC và BD).
6. H, I, K thẳng hàng, trong đó H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB, BC, CA (đường thẳng Simson).
7. $R_a.R_b = R_c.R_d$, trong đó R_a, R_b, R_c, R_d là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA tương ứng.
8. Tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật, trong đó O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA tương ứng.

9. Tứ giác $G_1G_2G_3G_4$ là tứ giác nội tiếp, trong đó G_1, G_2, G_3, G_4 là trọng tâm các tam giác ABD, ABC, BCD, CDA tương ứng.

10. Hai đường phân giác của các góc (AB, CD) và (AD, BC) vuông góc với nhau.

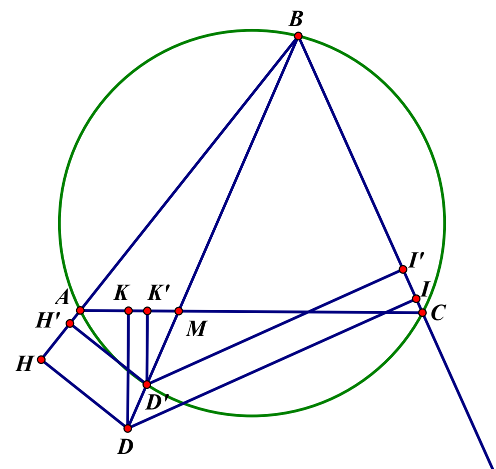
11. $\dfrac{CA}{DK} = \dfrac{AB}{DH} + \dfrac{BC}{DI}$

12. $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Trong đó $AB = a, BC = b, CA = c, DA = d, \dfrac{a+b+c+d}{2} = p$.

<u>Ví dụ 11.</u> Hãy chứng minh sự tương đương giữa các khẳng định (1) và (11) ở trên.

Giải. Ta đã biết (1) suy ra (11) theo ví dụ 6.



Để chứng minh (11) suy ra (1), gọi D' là giao điểm của BD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó tứ giác $ABCD'$ là tứ giác nội tiếp, nên $\dfrac{AB}{D'H'} + \dfrac{BC}{DT} = \dfrac{CA}{D'K'}$ (*), trong đó H', I', K' lần lượt là các chân đường vuông góc hạ từ D' đến AB, BC, CA.

Mặt khác, $\dfrac{D'H'}{DH} = \dfrac{D'B}{DB} = \dfrac{DT}{DI}$ nên

$D'H' = \dfrac{D'B.DH}{DB}$ và $DT = \dfrac{D'B.DI}{DB}$ (**)

Thay (**) vào (*) ta có $\dfrac{AB}{DH} + \dfrac{BC}{DI} = \dfrac{CA.D'B}{DB.D'K'}$

Mà $\dfrac{AB}{DH} + \dfrac{BC}{DI} = \dfrac{CA}{DK}$ nên $\dfrac{D'B}{DB} = \dfrac{D'K'}{DK} = \dfrac{D'M}{DM}$, với M là giao điểm của BD với AC.

Theo tính chất tỉ lệ thức, ta có $\dfrac{|DB - D'B|}{DB} = \dfrac{|DM - D'M|}{DM} \Rightarrow \dfrac{DD'}{DB} = \dfrac{DD'}{DM}$

Mà $DB > DM$ nên $DD' = 0 \Leftrightarrow D \equiv D'$.

Do đó $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

<u>Lưu ý:</u> Bạn đọc tự chứng minh sự tương đương của các cặp mệnh đề còn lại ở trên.

9.6. VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ

Ptôlêmê là nhà toán học Hy Lạp sống vào thế kỉ thứ hai sau Công nguyên, tên đầy đủ của ông là *Claudius Ptolememy*. Tác phẩm chính của ông "Syntaus Mathematica" viết vào khoảng năm 150 sau Công nguyên chủ yếu viết về Thiên văn học. Quyển I là bảng các dây cung cùng một giải thích ngắn gọn về việc nó được ra đời từ một mệnh đề hình học mà ngày nay ta gọi là *Định lý Ptôlêmê*. Sau đây là một số hệ quả được rút ra từ Định lý Ptôlêmê trong tác phẩm ấy.

1. Nếu a,b là hai dây cung có bán kính đơn vị thì $s=\frac{a}{2}\sqrt{4-b^2}+\frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$ là dây tổng của hai dây cung đó.

2. Nếu a,b là hai dây cung có bán kính đơn vị và $a\ge b$ thì $s=\frac{a}{2}\sqrt{4-b^2}-\frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$ là dây của hiệu hai cung đó.

3. Nếu t là dây cung của một đường tròn bán kính đơn vị thì $p=\sqrt{2-\sqrt{4-t^2}}$ là dây cung của nửa cung đó.

Năm trăm năm sau, nhà toán học Ấn Độ Bramagupta trở lại nghiên cứu vấn đề này. Sau đây là một kết quả rút trong tác phẩm "Bramagupta – Sphuta – Siddhamata" của ông.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính R, có $AB=a, BC=b, CD=c$, $DA=d, AC=m, BD=n$. Khi đó

1. $m^2=\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$, $n^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$;

2. $m.n=ac+bd$;

3. $4R^2=\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd}$

Bạn đọc tự chứng minh các kết quả trên.

BÀI TẬP

1. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc. Gọi a,b,c,d là độ dài bốn cạnh liên tiếp của tứ giác. Tính diện tích của tứ giác.

2. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kì thuộc cung nhỏ CD. Chứng minh hệ thức $MA+MC=MB\sqrt{2}$.

3. Cho tam giác nhọn ABC, các đường trung tuyến AM, BN, CP. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh $AM+BN+CP\le 4R+r$ (*Hướng dẫn: sử dụng kết quả của ví dụ 3*).

4. Cho đường tròn (O), dây BC cố định khác đường kính. Hãy xác định điểm A thuộc cung lớn BC sao cho tổng $AB+AC$ có giá trị lớn nhất.

5. Cho tam giác ABC có R, r là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $R \geq 2r$ (*sử dụng kết quả của ví dụ 3 và E – M* $2(x+y+z) \leq 3R$)

6. Giả sử M là một điểm trên đường tròn nội tiếp lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Chứng minh:

a, $MA_1^2 + MA_3^2 + MA_5^2 = MA_2^2 + MA_4^2 + MA_6^2$

b, $MA_1^4 + MA_3^4 + MA_5^4 = MA_2^4 + MA_4^4 + MA_6^4$

7. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M trên cung nhỏ BC. Gọi H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB. Chứng minh:

a, $\dfrac{1}{MH} = \dfrac{1}{MI} + \dfrac{1}{MK}$

b, $MH^2 + MI^2 + MK^2 = h^2$ với h là đường cao của tam giác ABC.

8. Chứng minh các đẳng thức:

a, $\cos 36^0 . \cos 72^0 = \dfrac{1}{4}$

b, $\cos 20^0 . \cos 40^0 . \cos 80^0 = \dfrac{1}{8}$

9. Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ trong mặt phẳng tọa độ cho bởi công thức $MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ để chứng minh bất đẳng thức Ptôlêmê.

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO:

[1] Vũ Hữu Bình, Văn Như Cương, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Trương Công Thành, Phạm Thị Bạch Ngọc, 2015, Tài liệu chuyên Toán THCS, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.