SỬ DỤNG PHƯƠNG TÍCH – TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG
TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

PHẦN 1: ĐẶT VẤN ĐỀ

Các bài toán Hình học phẳng là một phần quan trọng trong các chuyên đề toán học và đồng thời nó cũng là một mảng khó trong chương trình toán THPT chuyên. Chính vì thế trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán quốc tế và khu vực, những bài toán Hình học phẳng cũng hay được đề cập và thường được xem là bài toán khó của kì thi. Trong các dạng toán liên quan đến Hình học phẳng thì bài toán đồng quy, thẳng hàng vừa được coi là bài toán quen và lạ, vừa dễ vừa khó. Bởi bài toán đồng quy, thẳng hàng đã được làm quen từ khi các em bắt đầu học Hình học cho đến chúng ta cảm thấy rất quen thuộc với Hình hoc nó vẫn hiện hữu. Nó lại là bài toán có tần suất xuất hiện nhiều nhất trong tất cả các kì thi HSG các cấp với rất nhiều hình thái khác nhau, mức độ khác nhau thậm chí là rất khó.

Các em học sinh bậc Trung học phổ thông thường gặp một số khó khăn khi tiếp cận các dạng toán liên quan đến bài toán đồng quy thẳng hàng nói riêng và bài toán Hình học phẳng nói chung bởi không biết phải bắt đầu từ đâu và khó khăn khi định hướng vẽ hình phụ. Cái khó của các em chính là không nắm được tường tận các phương pháp giải quyết từ đó dẫn đến khó khăn trong khâu định hướng. Để hiểu và vận dụng tốt một số dạng toán cơ bản và vận dụng kiến thức Hình học phẳng vào giải toán đồng quy thẳng hàng thì thông thường học sinh phải có kiến thức nền tảng Hình học tương đối đầy đủ và chắc chắn trên tất cả các lĩnh vực của nó. Đó là một khó khăn rất lớn đối với giáo viên và học sinh khi giảng dạy và học tập phần các kiến thức cần thiết trong Hình học.

Trong số rất nhiều các phương pháp để giải quyết bài toán đồng quy, thẳng hàng tác giả lựa chọn công cụ “Phương tích, trục đẳng phương”. Đây là một trong những công cụ mạnh và hữu hiệu để giải quyết lớp bài toán này.

PHẦN II. NỘI DUNG

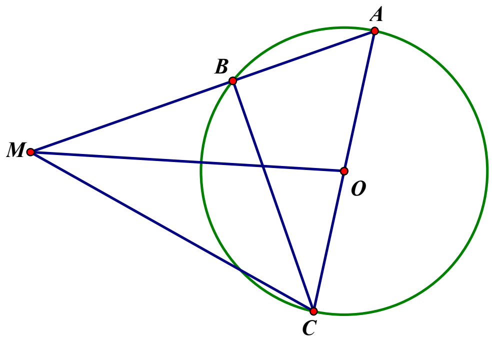
SỬ DỤNG PHƯƠNG TÍCH – TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG

1.1 Lý thuyết

1.1.1 Phương tích của một điểm đối với đường tròn.

Định lý 1.1 Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định, OM = *d*. Một đường thẳng thay đổi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó $\overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - R^2 = d^2 - R^2$

Chứng minh:



Gọi C là điểm đối xứng của A qua O. Ta có $CB \perp AM$ hay B là hình chiếu của C trên AM.

Khi đó ta có

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)$$

$$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = OM^2 - OA^2 = d^2 - R^2$$

Định nghĩa. Giá trị không đổi $\overline{MA}.\overline{MB} = d^2 - R^2$ trong định lý 1.1 được gọi là *phương tích* của điểm M đối với đường tròn (O) và kí hiệu $\wp_{M/(O)}$.

Khi đó theo định nghĩa ta có $\wp_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB} = d^2 - R^2$

Định lý 1.2 Nếu hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P và $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$ thì 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt CD tại D'. Khi đó ta có theo định lý 1.1 ta có $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD'}$, suy ra $\overline{PC}.\overline{PD} = \overline{PC}.\overline{PD'} \Rightarrow D \equiv D'$. Suy ra 4 điểm A, B, C và D cùng thuộc một đường tròn.

Một số tính chất

1) M nằm trên đường tròn (O) khi và chỉ khi $\wp_{M/(O)} = 0$

M nằm ngoài đường tròn (O) khi và chỉ khi $\wp_{M/(O)} > 0$

M nằm trong đường tròn (O) khi và chỉ khi $\wp_{M/(O)} < 0$

2) Khi M nằm ngoài đường tròn (O) và MT là tiếp tuyến của (O) thì $\wp_{M/(O)} = MT^2$

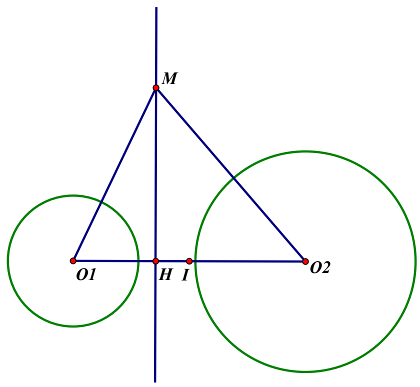
3) Nếu A, B cố định và $\overline{AB}.\overline{AM} = const \Rightarrow$ M cố định. Ý tưởng này giúp ta giải các bài toán về đường đi qua điểm cố định.

4) Cho hai đường thẳng AB, MT phân biệt cắt nhau tại M (M không trùng với A, B, T). Khi đó, nếu $\overline{MA}.\overline{MB} = MT^2$ thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABT tiếp xúc với MT tại T.

1.1.2. Trục đẳng phương của hai đường tròn.

Định lý 1.3 Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$. Tập hợp các điểm M có cùng phương tích đối với hai đường tròn là một đường thẳng, đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Chứng minh:



Giả sử điểm M có phương tích đến hai đường tròn bằng nhau.

Gọi H là hình chiếu của M trên O_1O_2, I là trung điểm của O_1O_2. Ta có:

$$\wp_{M/(O_1)} = \wp_{M/(O_2)} \Leftrightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

$$\Leftrightarrow \left(MH^2 + HO_1^{\ 2}\right) - \left(MH^2 + HO_2^{\ 2}\right) = R_1^2 - R_2^2 \Leftrightarrow HO_1^{\ 2} - HO_2^{\ 2} = R_1^2 - R_2^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{HO_1} - \overline{HO_2}\right)\left(\overline{HO_1} + \overline{HO_2}\right) = R_1^2 - R_2^2 \Leftrightarrow \overline{O_2O_1}.2\overline{HI} = R_1^2 - R_2^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\overline{O_1O_2}} \qquad (1)$$

Từ đây suy ra H cố định, suy ra M thuộc đường thẳng qua H và vuông góc với O_1O_2.

Vậy tập hợp những điểm M có phương tích đối với hai đường tròn bằng nhau là đường thẳng đi qua điểm H (xác định như (1)) và vuông góc với O_1O_2.

Một số hệ quả

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2). Từ định lý 1.3 ta suy ra được các tính chất sau:

1) Trục đẳng phương của hai đường tròn vuông góc với đường thẳng nối tâm.

2) Nếu hai đường tròn cắt nhau tại A và B thì AB chính là trục đẳng phương của chúng.

3) Nếu điểm M có cùng phương tích đối với (O_1) và (O_2) thì đường thẳng qua M vuông góc với O_1O_2 là trục đẳng phương của hai đường tròn.

4) Nếu hai điểm M, N có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì đường thẳng MN chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

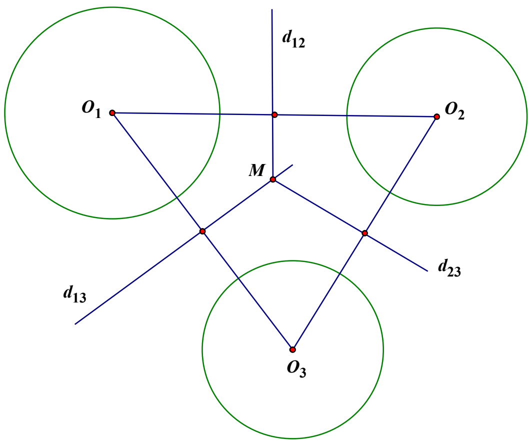
5) Nếu 3 điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì 3 điểm đó thẳng hàng.

6) Nếu (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại A thì đường thẳng qua A và vuông góc với O_1O_2 chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

1.1.3. Tâm đẳng phương.

Định lý 1.4 Cho 3 đường tròn (C_1), (C_2) và (C_3). Khi đó 3 trục đẳng phương của các cặp đường tròn hoặc trùng nhau hoặc song song hoặc cùng đi qua một điểm. Nếu các trục đẳng phương đó cùng đi qua một điểm thì điểm đó được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Chứng minh.



Gọi d_{ij} là trục đẳng phương của hai đường tròn (C_i) và (C_j). Ta xét hai trường hợp sau.

TH1: Giả sử có một cặp đường thẳng song song, không mất tính tổng quát ta giả sử $d_{12} // d_{23}$.

Ta có $d_{12} \perp O_1O_2, d_{23} \perp O_2O_3$ suy ra O_1, O_2, O_3 thẳng hàng. Mà $d_{13} \perp O_1O_3$ suy ra $d_{13} // d_{23} // d_{12}$

TH2: Giả sử d_{12} và d_{23} có điểm M chung. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} \wp_{M/(O_1)} = \wp_{M/(O_2)} \\ \wp_{M/(O_2)} = \wp_{M/(O_3)} \end{cases} \Rightarrow \wp_{M/(O_1)} = \wp_{M/(O_3)} \Rightarrow M \in d_{13}$$

Từ đây suy ra nếu có hai đường thẳng trùng nhau thì đó cũng là trục đẳng phương của cặp đường tròn còn lại. Nếu hai trục đẳng phương chỉ cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cũng thuộc trục đẳng phương còn lại

Một số hệ quả.

1) Nếu 3 đường tròn đôi một cắt nhau thì các dây cung chung cùng đi qua một điểm

2) Nếu 3 trục đẳng phương song song hoặc trùng nhau thì tâm của 3 đường tròn thẳng hàng.

3) Nếu 3 đường tròn cùng đi qua một điểm và có các tâm thẳng hàng thì các trục đẳng phương trùng nhau.

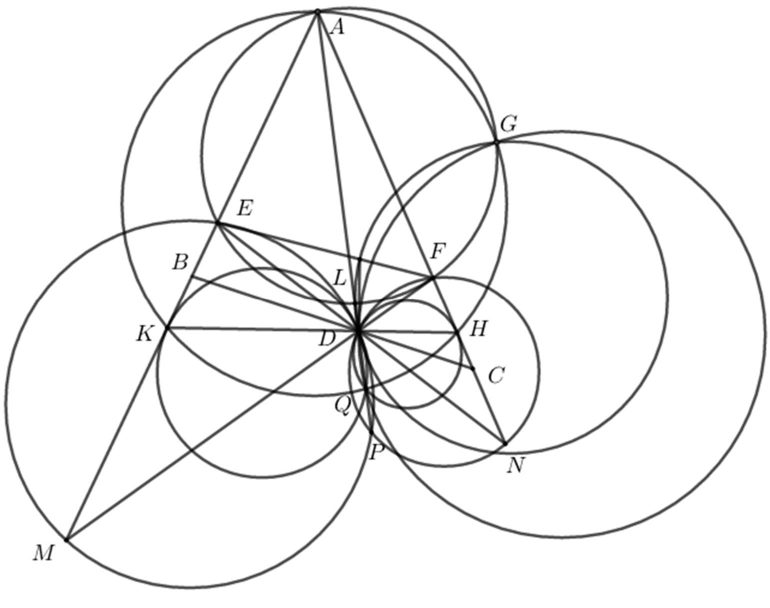
1.2 Bài tập minh họa

Bài 1 (VMO 2018). Cho tam giác nhọn không cân ABC và D là một điểm trên cạnh BC. Trên các cạnh AB, AC lấy các điểm E, F sao cho $\widehat{DEB} = \widehat{DFC}$ và DF, DE lần lượt cắt các cạnh AB, AC tại M, N. Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DEM, DFN. Ký hiệu (J_1) là đường tròn tiếp xúc với (I_1) tại D và tiếp xúc với AB tại K, (J_2) là đường tròn tiếp xúc với (I_2) tại D và tiếp xúc với AC tại H. Gọi P là giao điểm của (I_1) và (I_2), Q là giao điểm của (J_1) và (J_2) $(P, Q \neq D)$.

a) Chứng minh rằng P, Q, D thẳng hàng.

b) Cho đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK và đường thẳng AQ tại G và L $(G, L \neq A)$. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp tam giác QLG cắt đường thẳng EF tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DLG.

Lời giải



a) Do đường tròn (J_1) tiếp xúc trong với đường tròn (DEM) tại D và tiếp xúc với EM tại K nên theo tính chất quen biết, DK là phân giác trong của góc $\widehat{EDM}$, tương tự $\widehat{EDN}$. Do hai góc này đối nhau nên D, K, H thẳng hàng. Từ giả thiết $\widehat{DEM}=\widehat{DFN}$, suy ra $\Delta DEM\sim\Delta DFN$. Để ý rằng K,H là chân các đường phân giác trong góc D trong các tam giác trên nên $\widehat{AKD}=\widehat{AHD}$. Do vậy ΔAKH cân tại A.

Ta có $P_{A/(J_1)}=AK^2=AH^2=P_{A/(J_2)}\Rightarrow A,D,Q$ thẳng hàng.

Mặt khác do tứ giác $EFNM$ nội tiếp nên $P_{A/(I_1)}=\overline{AE}.\overline{AM}=\overline{AF}.\overline{AN}=P_{A/(I_2)}\Rightarrow A,D,P$ thẳng hàng.

Vậy A,D,P,Q thẳng hàng.

b) Trước hết ta chứng minh rằng G thuộc đường tròn (AMN). Thật vậy, ta có $\widehat{GKE}=\widehat{GHF}$ và $\widehat{GEA}=\widehat{GFA}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{GA}$) nên cũng có $\widehat{EGK}=\widehat{FGH}$. Suy ra $\Delta GKE\sim\Delta GHF$.

Từ nhận xét $\Delta DEM\sim\Delta DFN$ và K,H là chân các đường phân giác trong góc D của các tam giác này (ở phần a), ta có $\dfrac{KE}{KM}=\dfrac{HF}{HN}$, từ đây và do $\Delta GKE\sim\Delta GHF$ ta suy ra $\Delta GEM\sim\Delta GFN\Rightarrow\widehat{GMA}=\widehat{GNA}$. Vậy G thuộc đường tròn (AMN). Xét các đường tròn $(AGEF),(AGKH),(AGMN)$ có các trục đẳng phương (của từng cặp) là AG,EF,MN đồng quy. Trong tứ giác toàn phần $EFNMSA$, ta có $A(M,N,S,D)=-1$. Để ý rằng A,L,D thẳng hàng (theo kết quả câu a) và Q thuộc đường tròn $(AGKH)$

(do $\widehat{KQH}=\widehat{KQD}+\widehat{HQD}=\widehat{AKH}+\widehat{AHK}=180^0-\widehat{KAH}$) nên áp dụng phép chiếu A lên các đường tròn $(AEF),(AGK)$, ta suy ra các tứ giác $GELF$ và $GKQH$ điều hòa.

Từ tính chất đồng dạng của các tam giác ở trên, ta có

$\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{DK}{DH}=\dfrac{EK}{FH}=\dfrac{GE}{GF}=\dfrac{GK}{GH}$. Do vậy các đường tròn $(GDQ),(GLD)$ là các đường tròn Apolonius qua đỉnh G trong các tam giác GKH,GEF. Do D và tâm của đường tròn (GDQ) đều nằm trên đường thẳng KH nên tiếp tuyến tại D với

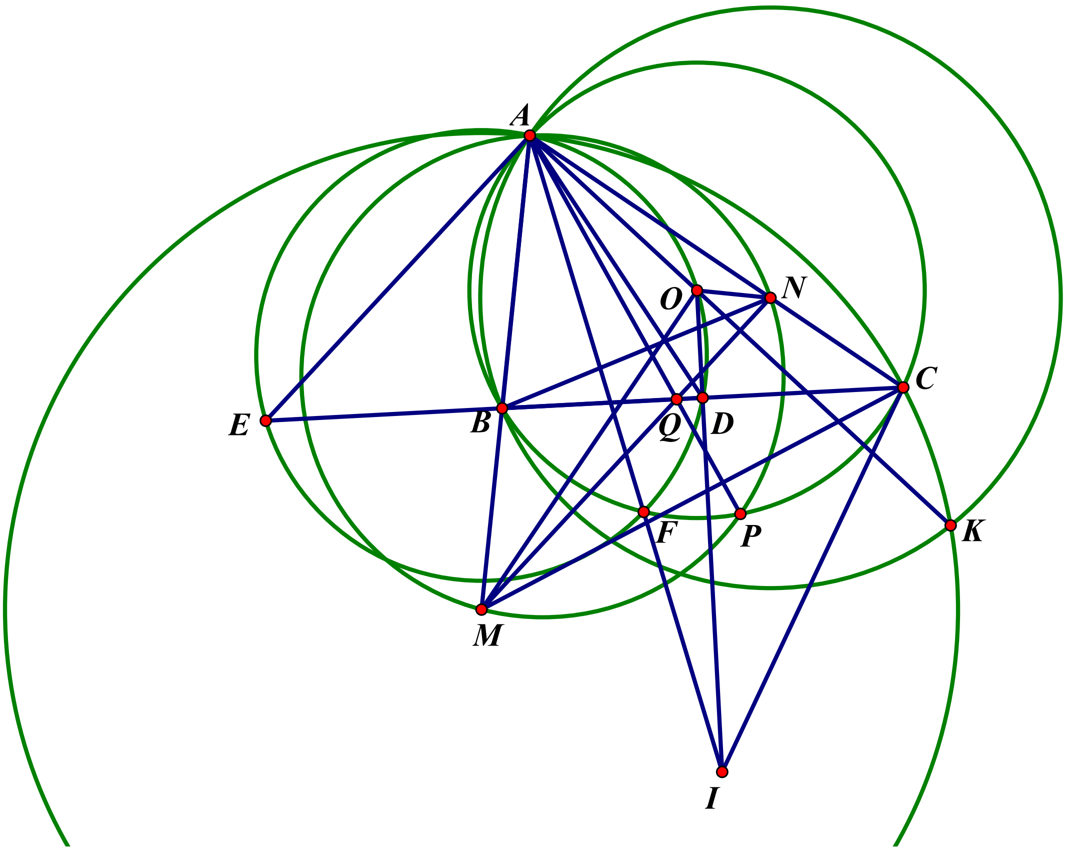
(GDQ) vuông góc với KH và vì KH là phân giác ngoài của $\widehat{EDF}$ nên giao điểm T của tiếp tuyến này với EF chính là chân đường phân giác trong góc $\widehat{EDF}$ của tam giác ΔDEF. Vậy T phải thuộc đường tròn (GLD).

Bài 2 (VMO 2014) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trong đó B, C cố định và A thay đổi trên (O). Trên các tia AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MA = MC và NA = NB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMN và ABC cắt nhau tại P $(P \neq A)$. Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại Q.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

b) Gọi D là trung điểm của BC. Các đường tròn có tâm là M, N và cùng đi qua A cắt nhau tại K $(K \neq A)$. Đường thẳng qua A vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại F $(F \neq A)$. Chứng minh rằng đường thẳng AF đi qua một điểm cố định.

Giải:



a) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB \le AC$ như hình vẽ, các trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự. Khi đó, M nằm ngoài đoạn AB và N nằm trong đoạn AC. Do NA = NB nên $\widehat{NBA} = \widehat{NAB}$ và do MA = MC nên $\widehat{MCA} = \widehat{MAC}$. Từ đây suy ra $\widehat{NBA} = \widehat{MCA}$ hay tứ giác BMCN nội tiếp và khi đó ta được QM.QN = QB.QC.
Từ đây suy ra Q có cùng phương tích đến hai đường tròn (O) và (AMN) nên nó nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn này. Trục đẳng phương đó chính là dây chung AP nên suy ra A, P, Q thẳng hàng.
b) Ta thấy rằng đường tròn (ODC) tiếp xúc với (O) tại C nên trục đẳng phương của hai đường tròn này chính là tiếp tuyến d của (O) ở C. Ta sẽ chứng minh rằng O ∈ (ADE).
Thật vậy, ta có O,M cùng nằm trên trung trực của AC nên OM ⊥ AC. Tương tự thì ON ⊥ AB nên O là trực tâm tam giác AMN. Suy ra AO ⊥ MN.
Xét hai đường tròn (M, MA), (N, NA) thì do dây chung vuông góc với đường nối tâm nên ta có AK ⊥ MN. Từ đây suy ra A, O, K thẳng hàng nên $\widehat{OAE} = 90^0$.
Hơn nữa, ta cũng có $\widehat{ODE} = 90^0$ nên tứ giác AODE nội tiếp hay O ∈ (ADE). Do đó, trục đẳng phương của (ADE) và (ODC) chính là OD. Ngoài ra, trục đẳng phương của (O) và (ADE) là AF.
Xét ba đường tròn (O), (ADE), (ODC) có các trục đẳng phương của từng cặp đường tròn là
OD, d, AF nên chúng sẽ đồng quy tại một điểm. Vậy AF đi qua giao điểm của OD với đường
thẳng d và đó là một điểm cố định.

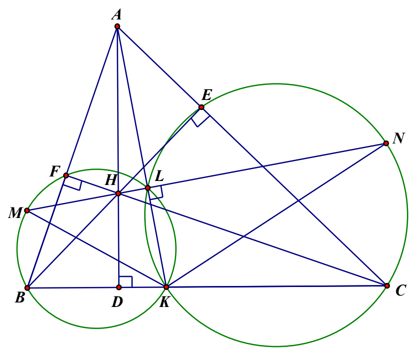
Nhận xét.

Câu a) của bài toán này có thể dễ dàng giải quyết bằng ý tưởng chứng minh các điểm B, M, N, C cùng thuộc một đường tròn Ω và các đoạn AP, MN, BC đều là các trục đẳng phương tương ứng của hai trong ba đường tròn (O), Ω, (AMN) nên sẽ đồng quy tại tâm đẳng phương Q. Hướng tiếp cận này có thể nhận thấy được.

Tuy nhiên, ở ý b) do có sự xuất hiện của nhiều đường tròn, đường thẳng hơn với yêu cầu “đi qua điểm cố định” thì nhiều bạn gặp khó khăn. Nhưng nếu để ý cẩn thận ta có thể dễ dàng tìm được điểm cố định I bằng cách cho A tiến dần đến hai điểm đối xứng với B, C qua tâm (O) để phát hiện ra rằng điểm cố định nếu có thì phải nằm trên tiếp tuyến của (O) tại B, C. Và cũng không khó để nhận ra mô hình quen thuộc về tứ giác điều hòa hoặc đường đối trung. Cụ thể thì ABFC là tứ giác điều hòa tương ứng với AF là đường đối trung của tam giác ABC. Lời giải nêu trên thực tế là chứng minh lại các tính chất của mô hình này mà thôi. Ta biết trong trong tứ giác điều hòa thì tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại hai đỉnh đối nhau thì đồng quy với đường chéo đi qua hai đỉnh còn lại, còn đường đối trung thì đối xứng với trung tuyến AD qua phân giác góc A (cũng có thể coi đây là một phần của mô hình tứ giác điều hòa). Thông qua cách dựng điểm E là giao điểm của tiếp tuyến của (O) với BC, bài toán xây dựng thêm đường tròn đường kính EO để có một tứ giác như vậy. Trên thực tế, hai bước xây dựng trên đã bị che giấu đi bản chất thông qua các điểm thẳng hàng và các điểm đồng viên nhằm loại đi vai trò của điểm O.

Bài 3 (**IMO 2013**). Cho tam giác ABC nhọn, kẻ đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC và khác B, C. Kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Giải:



Gọi L là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (BKF) và (CKE), khi đó dễ thấy A, L, K thẳng hàng (Do AF.AB = AH.AD = AE.AC nên A có cùng phương tích với 2 đường tròn).

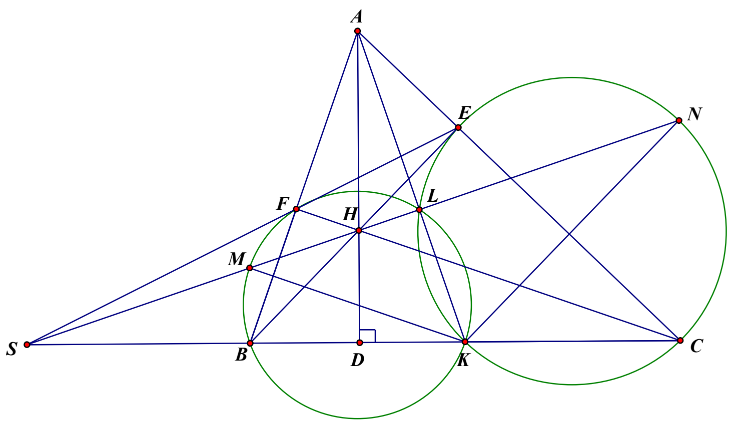
Ta có $\overline{AH}.\overline{AD} = \overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AL}.\overline{AK}$, suy ra tứ giác $DHLK$ nội tiếp, suy ra $HL \perp AK$.

Mà $ML \perp AK$ nên M, H, L thẳng hàng. Tương tự thì N, H, L thẳng hàng.

Do đó M, H, N thẳng hàng (đpcm).

Nhận xét 1. Giả sử EF cắt BC tại điểm *S*. Ta sẽ đi xem xét khi nào thì đường thẳng *HL* đi qua điểm *S*, nói một cách khác là với vị trí nào của điểm *K* trên cạnh *BC* thì ba đường thẳng EF, HL, BC đồng quy ?

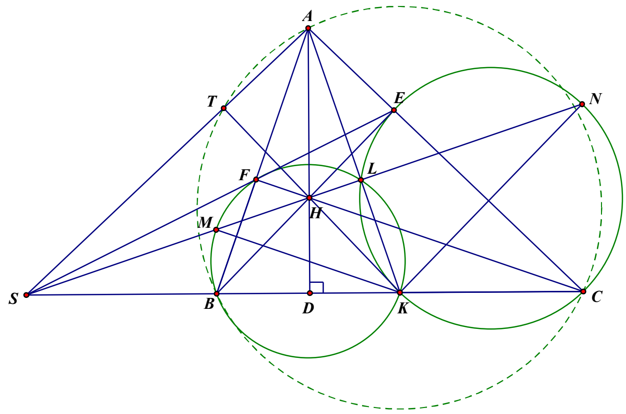
* Nếu *HL* đi qua *S* thì từ tứ giác *DHLK* nội tiếp, ta có $\overline{SD}.\overline{SK} = \overline{SH}.\overline{SL} = \overline{AL}.\overline{AK}$. Mặt khác năm điểm A, F, H, L, E đồng viên nên $\overline{SH}.\overline{SL} = \overline{SE}.\overline{SF}$. Từ đó suy ra $\overline{SD}.\overline{SK} = \overline{SE}.\overline{SF}$, hay tứ giác $DFEK$ nội tiếp, điều này chứng tỏ *K* nằm trên đường tròn Euler của tam giác *ABC* (đường tròn này đi qua D, E, F), do đó *K* là trung điểm cạnh *BC*.



* Ngược lại, nếu *K* là trung điểm của *BC* thì rõ ràng tứ giác DFEK nội tiếp, do vậy nếu gọi *S* là giao điểm của *EF* với *BC* thì $\overline{SD}.\overline{SK} = \overline{SE}.\overline{SF}$, suy ra *S* có cùng phương tích với hai đường tròn (DHLK) và (AFHLE), tức là *S* thuộc trục đẳng phương *HL* của hai đường tròn này.

Kết luận: Ba đường thẳng EF, HL, BC đồng quy tại *S* khi và chỉ khi *K* là trung điểm *BC*.

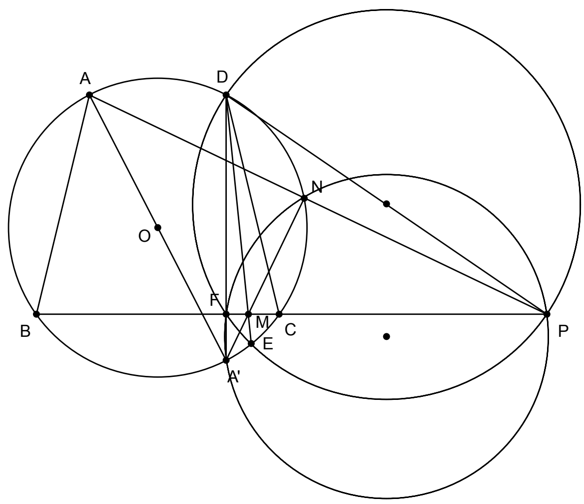
Nhận xét 2. Khi ba đường thẳng EF, HL, BC đồng quy tại S thì H cũng là trực tâm tam giác ASK, suy ra $HK \perp AS$. Ta có $\overline{ST}.\overline{SA} = \overline{SE}.\overline{SF} = \overline{SB}.\overline{SC}$, nên T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Bài 4 (VMO 2007) Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn BC và nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm thay đổi trên BC và nằm ngoài đoạn BC sao cho PA không là tiếp tuyến của đường tròn (O). Đường tròn đường kính PD cắt (O) tại $E\left(E \neq D\right)$. Gọi M là giao điểm của BC với DE, N là giao điểm khác A với (O). Chứng minh đường thẳng MN qua một điểm cố định.

Lời giải.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm O. Ta chứng minh N, M, A' thẳng hang, từ đó suy ra MN đi qua A' cố định.

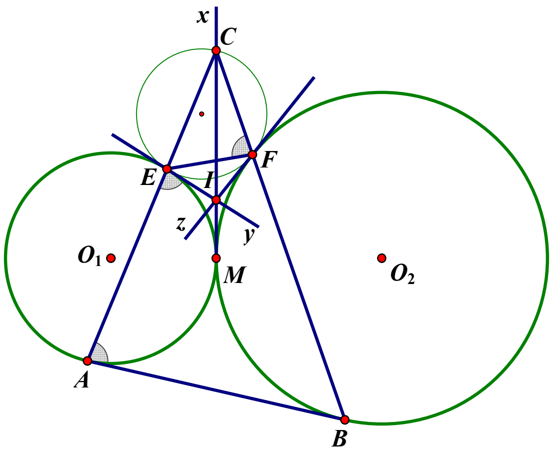


Thật vậy, ta có DE là trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn (γ_1) đường kính PA'. Giả sử DA' cắt BC tại F, do $\widehat{ADA'} = 90^0 \Rightarrow \widehat{PFA'} = 90^0$ nên BC là trục đẳng phương của (γ_1) và (γ_2). Vì các trục đẳng phương đồng quy tại tâm đẳng phương, suy ra DE, BC và NA' đồng quy tại điểm M. Vậy M, N, A' thẳng hàng.

Bài 5 (Hà tĩnh TST 2014). Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại tiếp điểm *M*. Gọi *AB* là một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) với *A, B* phân biệt lần lượt là các tiếp điểm. Trên tia tiếp tuyến chung *Mx* của hai đường tròn (*Mx* không cắt *AB*) lấy điểm *C* khác *M*. Gọi *E* và *F* lần lượt là giao điểm thứ hai của *CA* với (C_1) và *CB* với (C_2). Chứng minh rằng tiếp tuyến của (C_1) tại *E*, tiếp tuyến của (C_2) tại *F* và *Mx* đồng quy.

Giải:

Cách 1:



Ta có $CA.CE = CM^2 = CF.CB$, suy ra tứ giác *ABFE* nội tiếp. Gọi tiếp tuyến của (C_1) tại *E* là *Ey*, khi đó $\angle yEA = \angle EAB = \angle EFC$, suy ra *Ey* cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác *CEF* hay các đường tròn (C_1) và (*CEF*) tiếp xúc nhau tại *E*.

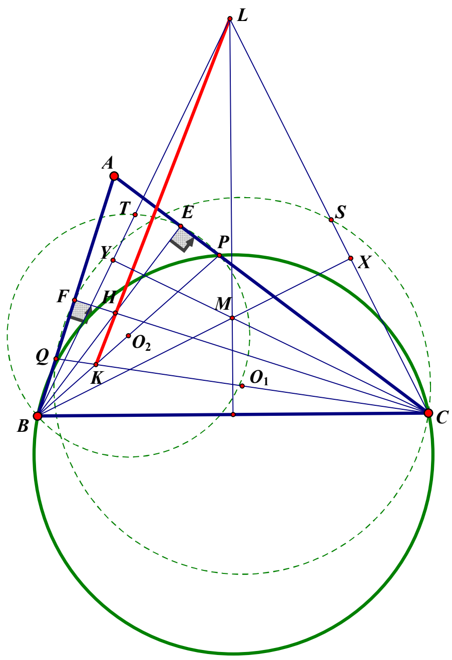
Tương tự, tiếp tuyến *Fz* của (C_2) tại *F* cũng là tiếp tuyến của (*CEF*) và các đường tròn (C_2), (*CEF*) tiếp xúc nhau tại *F*.

Gọi I là giao điểm của các tiếp tuyến Ey và Fz. Ta có $IE = IF$ nên I thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (C_1) và (C_2) hay $I \in Mx$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Ta có $CA.CE = CM^2 = CF.CB$ nên phép nghịch đảo cực C, phương tích Ta có $p = CM^2$ biến (C_1) và (C_2) thành chính nó, biến (CEF) thành AB. Mà AB tiếp xúc với (C_1) và (C_2) nên (CEF) tiếp xúc với (C_1) và (C_2) tại E và F. Do đó 3 đường cần chứng minh là các trục đẳng phương của (C_1), (C_2) và (CEF) nên chúng đồng quy.

Bài 6 (Iran TST 2014). Cho tam giác ABC và điểm M thuộc trung trực của BC. Gọi K là điểm liên hợp đẳng giác với M trong tam giác ABC và L là trực tâm tam giác MBC. Chứng minh rằng KL đi qua trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.



Giả sử BH, CH cắt AC, AB tại E và F; BK, CK cắt AC, AB tại P và Q.

Ta có $\widehat{KCP} = \widehat{MCB} = \widehat{MBC} = \widehat{KBQ}$, suy ra tứ giác $BCPQ$ nội tiếp. Gọi $(O_1),(O_2)$ lần lượt là tâm đường tròn đường kính CQ và BP thì O_1, O_2 là trung điểm của CQ, BP.

Do $\overline{KB}.\overline{KP}=\overline{KC}.\overline{KQ}$ nên $P_{K/(O_1)}=P_{K/(O_2)}$. Mặt khác dễ thấy $P_{H/(O_1)}=P_{H/(O_2)}$ nên HK là trục đẳng phương của $(O_1),(O_2)$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh L có cùng phương tích đối với $(O_1),(O_2)$.

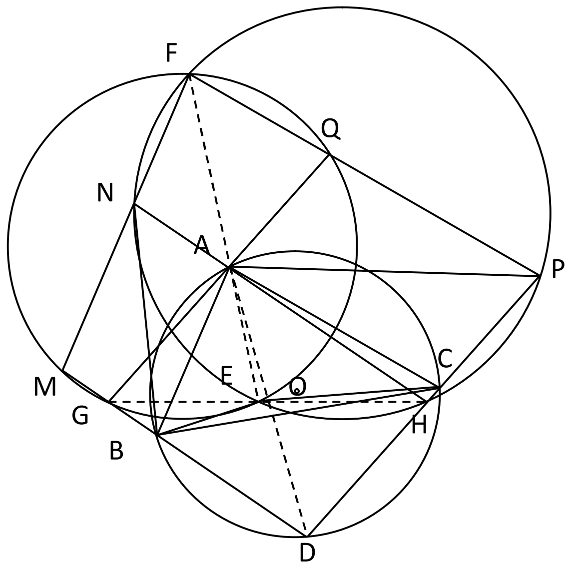
Gọi T là giao điểm thứ hai của (O_2) với BL và S là giao điểm thứ hai của (O_1) với CL. Ta cần chứng minh $\overline{LT}.\overline{LB}=\overline{LS}.\overline{LC}$, hay $LT=LS$.

Giả sử BM và CM lần lượt cắt LC, LB tại X và Y, ta cần chỉ ra $SX=TY$ là xong.

Thật vậy, ta có $\frac{TY}{PC}=\sin\widehat{PCY}=\sin\widehat{PCM}=\sin\widehat{KCB}=\frac{BQ}{2R}$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $BCPQ$, suy ra $TY=\frac{PC.BQ}{2R}$. Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{SX}{BQ}=\frac{PC}{2R}\Rightarrow SX=\frac{PC.BQ}{2R}$. Do đó $SX=TY$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 7 (Ninh Bình TST 2019). Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn tâm *O*. Dựng ra phía ngoài tam giác *ABC* các hình bình hành *ABMN* và *ACPQ* sao cho tam giác *ABN* đồng dạng với tam giác *CAP*. Gọi *G* là giao điểm của *AQ* và *BM*, *H* là giao điểm của *AN* và *CP*. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác *GMQ*, *HNP* cắt nhau tại *E* và *F* (*E* nằm trong đường tròn (*O*)). Chứng minh ba điểm *A*, *E*, *F* thẳng hàng.

Lời giải



Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác GMQ, HNP suy ra EF là trục đẳng phương của (O_1), (O_2).

Gọi D là giao điểm của BM và CP suy ra $AGDH$ là hình bình hành

Vì $\Delta ABN \sim \Delta CAP \Rightarrow (AB, AN) = (CA, CP)$

$(BA, BD) = (AB, AN) = (CA, CP) = (CA, CD) \Rightarrow A, B, C, D$ đồng viên.

Suy ra $(CA, CB) = (DA, DG)$, $(AB, AC) = (DG, DC) = (GD, GA)$

suy ra hai tam giác ABC và GAD đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{GD}{GA} = \dfrac{AH}{AG}$

Mà $\Delta ABN \sim \Delta CAP \Rightarrow \dfrac{AB}{CA} = \dfrac{CP}{AN} \Rightarrow \dfrac{AH}{AG} = \dfrac{CP}{AN} = \dfrac{AQ}{AN} \Rightarrow AH.AN = AG.AQ$

$\Rightarrow P_{A/(O_1)} = P_{A/(O_2)}$

Mà EF là trục đẳng phương của (O_1), (O_2) $\Rightarrow A \in EF$.

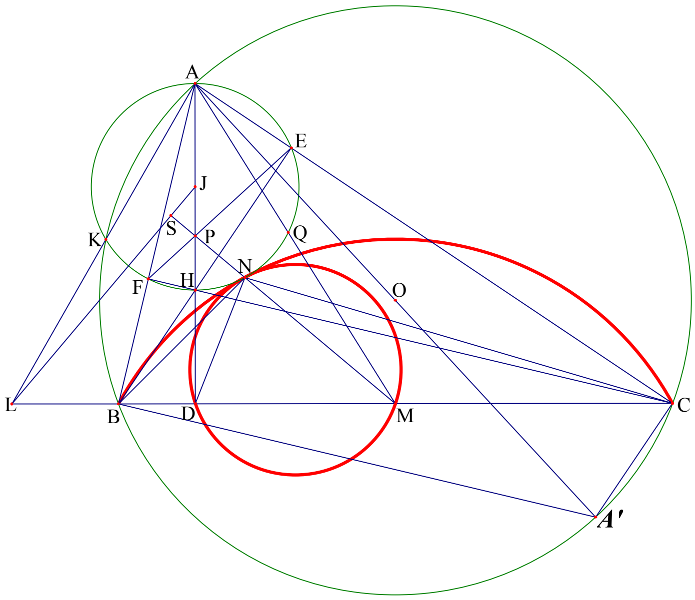
Vậy A, E, F thẳng hàng.

Bài 8 (Hà Nam TST 2019). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H, M là trung điểm cạnh BC. Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K không trùng với A), AM cắt đường tròn (J) tại điểm thứ hai là Q (Q không trùng với A), đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại P, đoạn thẳng PM cắt đường tròn (J) tại N.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng *KF*, *EQ* và *BC* hoặc đồng quy hoặc song song.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác *BNC* tiếp xúc nhau.

Lời giải



Không mất tổng quát giả sử $C(QSDE) = -1 \Rightarrow (QFBA) = -1$

a) Gọi *A'* là điểm đối xứng với *H* qua *M*, suy ra *BHCA'* là hình bình hành.

Do đó $A'C // BH; A'B // CH$ suy ra $\widehat{A'CA} = \widehat{A'BA} = 90^0$. Do đó *AA'* là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Suy ra $A'K \perp AK$ (1)

Dễ thấy *AH* là đường kính của đường tròn (*J*), suy ra $HK \perp AK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra *K*, *H*, *A'* thẳng hàng.

Mà *H*, *M*, *A'* thẳng hàng nên suy ra *K*, *H*, *M*, *A'* thẳng hàng.

Gọi *L* là giao điểm của *AK* và *BC*.

Từ các kết quả trên và giả thiết, suy ra *H* là trực tâm của các tam giác *ALM*.

suy ra LH vuông góc với AM, gọi $Q' = LH \cap AM \Rightarrow Q' \in (J) \Rightarrow Q' \equiv Q$

Do đó các tứ giác: *ABDE*, *ALDQ* nội tiếp, suy ra $\overline{HL}.\overline{HQ} = \overline{HA}.\overline{HD} = \overline{HB}.\overline{HE}$

Suy ra tứ giác *LBQE* nội tiếp.

Ta có: $\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AE}.\overline{AC} = \overline{AK}.\overline{AL} = \overline{AQ}.\overline{AM} = \overline{AF}.\overline{AB}$.

Suy ra các tứ giác $KLBF$, $CMQE$ nội tiếp

Như vậy: LB là trục đẳng phương của hai đường tròn ($LBQE$) và ($KLBF$);

KF là trục đẳng phương của hai đường tròn ($KLBF$) và (J);

EQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (J) và ($LBQE$).

Do đó 3 đường thẳng KF, EQ và BC đồng quy hoặc đôi một song song.

b) Ta có AK là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (J); EF là trục đẳng phương của hai đường tròn (J) và ($BFEC$); BC là trục đẳng phương của hai đường tròn ($BFEC$) và (O), mà AK cắt BC tại L, suy ra AK, EF, BC đồng quy tại L.

Ta có M là tâm của đường tròn ($BFEC$), suy ra $MJ \perp EF$ kết hợp với $JD \perp LM$

Suy ra P là trực tâm tam giác JLM. Do đó $MP \perp JL$. Gọi S là giao điểm của JL và MP, ta có tứ giác $LDPS$ nội tiếp, suy ra $\overline{JS}.\overline{JL} = \overline{JP}.\overline{JD}$ (3)

Xét tứ giác toàn phần $AEHFBC$, ta có (A, H, P, D) = -1, mà J là trung điểm AH, suy ra $JH^2 = \overline{JP}.\overline{JD}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\overline{JS}.\overline{JL} = JH^2 = JN^2$, mà $NS \perp JL$ suy ra LN là tiếp tuyến của (J). Suy ra $LN^2 = \overline{LK}.\overline{LA} = \overline{LB}.\overline{LC} \Rightarrow LN$ là tiếp tuyến của đường tròn (BNC) (5).

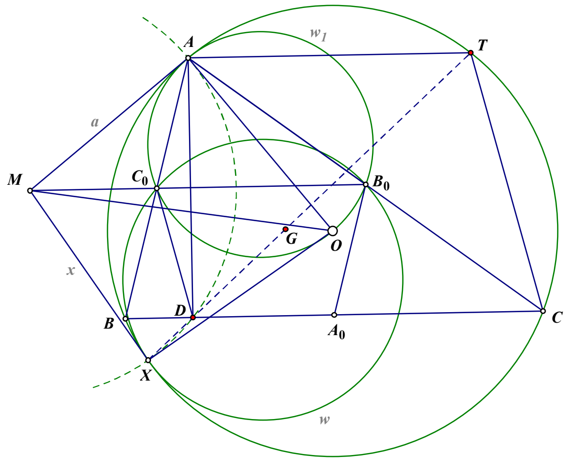
Từ $\widehat{AKM} = \widehat{ADM} = 90^0$ suy ra 4 điểm A, K, D, M cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra $LN^2 = \overline{LK}.\overline{LA} = \overline{LD}.\overline{LM} \Rightarrow LN$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MND (6).

Từ (5) và (6) suy ra hai đường tròn (BNC) và (MND) tiếp xúc nhau tại N.

Bài 9 (IMO shorlist 2011 - G4). Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_0, C_0 là trung điểm của cạnh AC và AB. D là hình chiếu của A trên BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi (ω) là đường tròn qua B_0, C_0 và tiếp xúc với (O) tại điểm X khác A. Chứng minh rằng D, G, X thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi a và x là tiếp tuyến tại A và X của đường tròn (O) và gọi (ω_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_0C_0. Dễ thấy a cũng là tiếp tuyến của (ω_1) tại A và a là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (ω_1).

Như vậy ba đường thẳng a, x và B_0C_0 lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O) và (ω_1);(O) và (ω);(ω) và (ω_1), do đó a, x và B_0C_0 đồng quy tại điểm M.

Ta có $MA = MD = MX$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADX. Gọi T là giao điểm thứ hai của DX với (O), chú ý là $O \in (\omega_1)$. Ta có

$\widehat{DAT} = \widehat{ADX} - \widehat{ATD} = \frac{1}{2}\left(360^0 - \widehat{AMX}\right) - \frac{1}{2}\widehat{AOX} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{AMX} + \widehat{AOX}\right) = 90^0$, suy ra $AD \perp AT \Rightarrow AT \parallel BC$. Do đó $ATCB$ là hình thang cân.

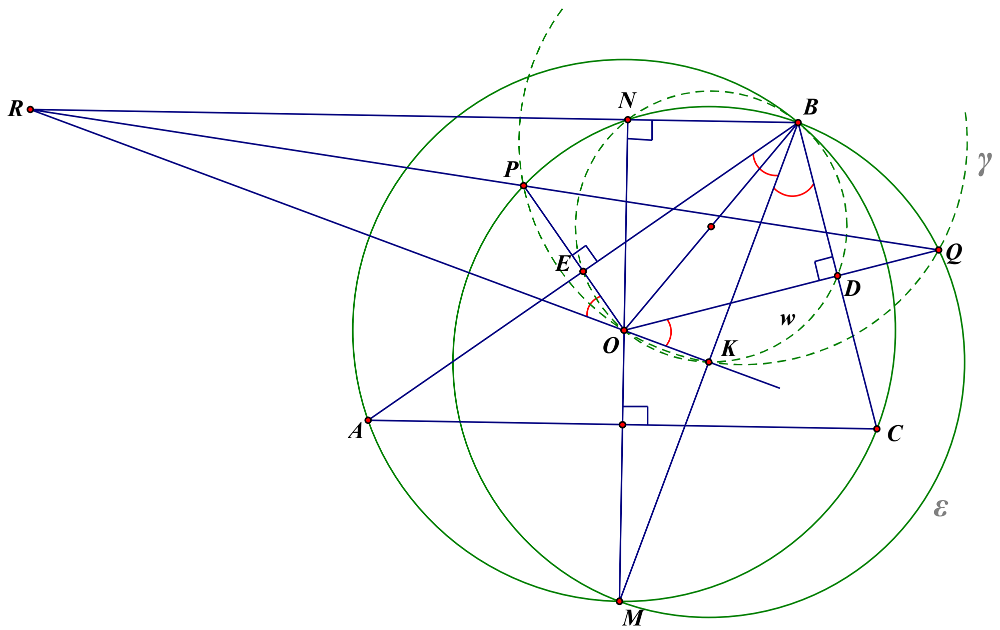
Gọi A_0 là trung điểm của B_0C_0. Xét phép vị tự $V_G^{-\frac{1}{2}}$ biến $A \mapsto A_0$; $B \mapsto B_0$; $C \mapsto C_0$;

$T \mapsto T'$, suy ra $\widehat{TCB} = \widehat{T'C_0B_0}$. Mặt khác $\widehat{TCB} = \widehat{CBA} = \widehat{B_0C_0A} = \widehat{DC_0B_0}$. Do đó $T' \equiv D$, từ đó suy ra D, G, T thẳng hàng và ta có điều phải chứng minh.

Bài 10 (IMO shorlist 2014-G3). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB > BC$. Phân giác của góc ABC cắt (O) tại M khác B. Gọi (ε) là đường tròn đường kính BM. Phân giác của góc AOB và BOC cắt (ε) tại P và

Q. Trên đường thẳng PQ lấy điểm R sao cho $RB = RM$. Chứng minh rằng $BR \parallel AC$.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm của BM thì K là tâm của (ε). OK và OM chính là trung trực của BM và AC, do đó R là giao điểm của PQ với OK.

Gọi N là giao điểm thứ hai của OM với đường tròn (ε), ta có ngay $BN \parallel AC$.

Ta chỉ cần chứng minh đường thẳng BN đi qua R là xong. Điều đó đồng nghĩa với ba đường thẳng BN, PQ, OK đồng quy.

Ta sẽ dựng ra ba đường tròn mà các đường thẳng BN, PQ, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn, từ đó sẽ thu được điều cần chứng minh.

Từ đặc điểm vuông góc tại N và K ta suy ra N và K nằm trên đường tròn (ω) đường kính OB. Tiếp theo ta sẽ chứng minh O, K, P, Q nằm trên đường tròn.

Gọi D và E lần lượt là trung điểm của BC và AB thì D nằm trên OQ và E nằm trên OP. Do các điểm B, E, O, K, D cùng nằm trên đường tròn (ω) nên ta được

$\widehat{EOR} = \widehat{EBK} = \widehat{KBD} = \widehat{KOD}$

Suy ra OK là phân giác ngoài của góc $\widehat{POQ}$. Mặt khác do K là tâm của (ε) nên K nằm trên trung trực của PQ. Từ đó suy ra K là điểm chính giữa cung POQ của đường tròn ngoại tiếp tam giác POQ. Suy ra O,K,P,Q nằm trên đường tròn (γ).

Khi đó OK, BN, PQ lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ω), (γ) và (ε).

Vậy OK, BN, PQ đồng quy, bài toán được chứng minh hoàn toàn.

1.3 Bài tập tương tự

Bài 1. Cho tam giác ABC có đường tròn tâm I nội tiếp, tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. AI cắt đường tròn (I) tại M và N (M nằm giữa A và N). DM cắt cạnh EF tại K, NK cắt đường tròn (I) tại điểm P khác N. Chứng minh rằng các điểm A, P, D thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC, một đường tròn cắt cạnh BC tại A_1, A_2; cắt cạnh CA tại B_1, B_2; cắt cạnh AB tại C_1, C_2. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm H thuộc đoạn AB. Đường thẳng qua H vuông góc với AB cắt đường tròn tại C. Đường tròn đường kính CH cắt AC, BC và (O) lần lượt tại D, E và F.

a) Chứng minh rằng AB, DE và CF đồng quy.

b) Đường tròn tâm C bán kính CH cắt (O) tại P và Q. Chứng minh rằng P, D, E, Q thẳng hàng.

Bài 4. Cho điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB cố định. Đường tròn (O_1) tiếp xúc với đường thẳng AB tại A, đường tròn (O_2) tiếp xúc với đường thẳng AB tại B. Đường tròn (C_1) tâm O_1 bán kính O_1B cắt đường tròn (C_2) tâm O_2 bán kính O_2A tại M và N. Chứng minh rằng ba điểm I, M, N thẳng hàng.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AC và BD, AB và CD. Chứng minh rằng: điểm F, trực tâm tam giác AED và trực tâm tam giác BEC nằm trên một đường thẳng

Bài 6 (IMO 1995). Trên đường thẳng d lấy 4 điểm A, B, C, D (theo thứ tự đó). Đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Lấy P là một điểm trên XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ 2 là M, và BP cắt đường tròn đường kính BD tại điểm thứ 2 là N. Chứng minh rằng AM, DN và XY đồng qui.

Bài 7. Cho tam giác *ABC* không cân ở *A*, *(w)* là đường tròn đi qua *B, C* cắt *AC, AB* tại *E, F.* Gọi *D* là giao điểm của *E F, BC.* Chứng minh rằng trực tâm *H, I, K, L* của các tam giác *ABC, AE F, BDF, CDE* thẳng hàng.

Bài 8 (USA MO 1997). Cho tam giác ABC. Bên ngoài tam giác này vẽ các tam giác cân BCD, CAE, ABF có các cạnh đáy tương ứng là BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba đường thẳng vuông góc kẻ từ A, B, C xuống EF, FD, DE đồng quy.

Bài 9. Cho tam giác ABC nhọn có chiều cao *AH*. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại $D, E, F.$ Đường tròn (A) có tâm *A* bán kính *AE* cắt đoạn thẳng *AH* tại điểm *K*. Đường thẳng *IK* cắt đường thẳng *BC* tại *P*. Các đường thẳng *DK* và *PK* cắt đường tròn (A) lần lượt tại *Q* và *T* khác $K.$

a) Chứng minh rằng tứ giác *TDPQ* nội tiếp và ba điểm Q, A, P thẳng hàng.

b) Đường thẳng *DK* cắt (I) tại điểm thứ hai là *X*. Chứng minh rằng ba đường thẳng AX, EF, TI đồng quy.

c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính *AP* tiếp xúc với đường tròn (I).

Bài 10. Cho tam giác *ABC* không cân tại *A*, nội tiếp đường tròn (*O*). Các tiếp tuyến tại *B, C* của (*O*) cắt nhau *T*, đường thẳng *AT* cắt lại đường tròn tại *X*. Gọi *Y* là điểm xuyên tâm đối của *X* trên (*O*). Các đường thẳng *YB, XC* cắt nhau tại *P,* các đường thẳng *XB, YC* cắt nhau tại *Q*.

a) Chứng minh rằng *P, Q, T* thẳng hàng.

b) Chứng minh các đường thẳng *PQ, BC* và *AY* đồng quy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình: Tài liệu chuyên toán hình học 10. NXB Giáo dục, 2010.

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình: Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10. NXB Giáo dục, 2006

[3] Tuyển tập lời giải và bình luận đề thi VMO các năm của nhóm tác giả Trần Nam Dũng

[4] Trang analgeomatica.blogspot.com của thầy Trần Quang Hùng

[5] Đề thi và đề đề xuất Duyên Hải, Hùng Vương các năm.

[6] Đề thi chọn đội tuyển các tỉnh.

[7] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ

[8] Trần Nam Dũng (chủ biên), *Chuyên đề toán học số 8, 9,* Trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

[9] Nguồn tại liệu từ Internet: www.artofproblemsolving.com, www.diendantoanhoc.net, www.matscope.org, www.mathlinks.org; www.imo.org.yu