SỬ DỤNG CHỦ YẾU SUY LUẬN TRONG GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Một số bài toán có dạng đặc biệt được giải nhanh nhờ những suy luận toán học, mà nếu chúng ta giải bằng cách thông thường thì cho ta lời giải khá dài, do đó mất thời gian. Đây thường là những bài toán ở mức " vận dụng" và " vận dụng cao ", do đó chúng ta cần chuẩn bị kiến thức sâu rộng để linh hoạt trong việc giải quyết bài toán đó, không bị dập theo một khuôn mẫu khô cứng, thiếu sáng tạo.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $m = 11$.   B. $m = 0$.   C. $m = -2$.   D. $m = 3$.

(Câu 23 - Mã đề 101 – THPT QG - 2017)

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có : $y' = 3x^2 - 14x + 11$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = \dfrac{11}{3} \notin [0;2] \end{array}\right.$.

Xét các giá trị: $y(0) = -2$; $y(1) = 3$; $y(2) = 0$.

Suy ra $\min\limits_{[0;2]} y = y(0) = -2$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Xét $m = -2$ là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị ở 4 đáp án đã cho.

Khi đó phương trình $x^3 - 7x^2 + 11x - 2 = -2$ có nghiệm $x = 0 \in [0;2]$ nên chọn đáp án C.

Ví dụ 2. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m=1$. B. $m=-1$. C. $m=5$. D. $m=-7$.

(Câu 32 - Mã đề 102 – THPT QG - 2017)

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-4$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=3$ nên $y'(3)=0 \Leftrightarrow m^2-6m+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$.

Lại có $y''=2x-2m \Rightarrow y''(3)=6-2m$.

Với $m=1$ thì $y''(3)=6-2=4>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Với $m=5$ thì $y''(3)=6-10=-4<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-4$;

$$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-4=0 \Leftrightarrow (x-m)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m=2 \\ x-m=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+2 \\ x=m-2 \end{array}\right..$$

Do hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ có hệ số $a=\frac{1}{3}>0$ nên $x_{CĐ}<x_{CT}$.

Suy ra $x_{CĐ}=m-2$, mà $x_{CĐ}=3$ nên ta được $m-2=3 \Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 3. Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-2x$ là :

A. $y_{CĐ}+y_{CT}=0$. B. $2y_{CĐ}=3y_{CT}$. C. $y_{CT}=2y_{CĐ}$. D. $y_{CT}=y_{CĐ}$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $y' = 3x^2 - 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow y = \dfrac{4\sqrt{6}}{9} \\ x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{4\sqrt{6}}{9} \end{array} \right. .$$

Vậy $y_{CĐ} + y_{CT} = 0$.

Chọn đáp án A.

<u>Cách giải khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Do hàm số $y = x^3 - 2x$ là hàm số lẻ và có tâm đối xứng là gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$ nên $y_{CĐ} + y_{CT} = 0$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 4. Hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + m^2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m < 0$ hoặc $m \geq 1$; B. $m \geq 0$; C. $0 < m \leq 1$; D. $m \leq 0$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $y' = mx^2 - 2mx + 2m - 1$.

TH1: Nếu $m = 0$ thì $y' = -1 < 0$ thỏa mãn bài toán.

TH2: Nếu $m \neq 0$, để thỏa mãn bài toán ta cần có

$$\begin{cases} m < 0 \\ m^2 - m\left(2m-1\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Vậy $m \leq 0$, chọn đáp án D.

<u>Cách giải khác 1</u> (chọn đại diện)

Nếu $m=-3$ hàm số trở thành $y=-x^3+3x^2-7x+9$; $y'=-3x^2+6x-7<0, \forall x \in \mathbb{R}$

(dùng máy tính casio 570vn plus giải bất phương trình $-3x^2+6x-7<0$ sẽ cho nghiệm là tập $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$Loại trường hợp B, C.

Nếu $m=3$ hàm số trở thành $y=x^3-3x^2+5x+9$; $y'=3x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

$\Rightarrow$Loại trường hợp A.

Vậy chọn đáp án D.

Cách giải khác 2 (dùng chủ yếu suy luận toán học - phương pháp tam thức bậc hai)

Ta có $y'=mx^2-2mx+2m-1$ là tam thức bậc hai nên cần xét $m<0$ hoặc $m=0$.

Loại ba trường hợp A, B và C.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 5. Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(-1;0)$. B. $(0;1)$. C. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Cách giải thông thường

Yêu cầu của bài toán tương đương với phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng $x^3-3x^2+1=(3m-1)x+6m+3$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$. (*)

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình trên, theo tính chất cấp số cộng ta có : $x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$.

Mà theo định lí Vi-ét ta có $x_1+x_2+x_3=3$ nên suy ra $3x_2=3 \Leftrightarrow x_2=1$.

Thế $x=1$ vào phương trình (*) ta được $m=-\frac{1}{3}$.

Khi $m=-\frac{1}{3}$ phương trình (*) trở thành : $x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.

Mà $m=-\frac{1}{3}\in(-1;0)$ nên chọn đáp án A.

<u>Cách giải khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Nhận xét rằng : nếu điểm uốn của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ thuộc đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ thì thỏa mãn bài toán.

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y''=6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$. Suy ra điểm $M(1;-1)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

Thế tọa độ của M vào phương trình $y=(3m-1)x+6m+3$ ta được $m=-\frac{1}{3}\in(-1;0)$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Giá trị thực của m thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây, để đường thẳng (d): $y=2x+m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tiếp tuyến tại M và N song song nhau là :

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. B. $(0;2)$. C. $(2;3)$. D. $\left(\frac{7}{2};5\right)$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Phương trình hoành độ giao điểm là : $\dfrac{x+1}{x-1}=2x+m \Leftrightarrow x+1=(2x+m)(x-1)$

$\Leftrightarrow x+1=2x^2-2x+mx-m \Leftrightarrow 2x^2+(m-3)x-m-1=0$. (1)

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M, N khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ g(1)\neq 0\end{cases}$ (với $g(x)=2x^2+(m-3)x-m-1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-3)^2+8(m+1)>0\\ 2+(m-3)-m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+2m+17>0\\ -2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}.$$

Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, khi đó ta có tọa độ giao điểm $M(x_1;2x_1+m)$; $N(x_2;2x_2+m)$.

Tiếp tuyến tại M và N song song với nhau khi $f'(x_1)=f'(x_2)$ (với $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$)

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x_1-1)^2}=\frac{-2}{(x_2-1)^2} \Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1-1=x_2-1\\ x_1-1=-(x_2-1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=x_2\ (loại)\\ x_1+x_2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x_1+x_2=2 \Leftrightarrow -\frac{m-3}{2}=2 \Leftrightarrow m=-1\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right).$$

Chọn đáp án A.

Cách giải khác (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Nhận xét rằng : Nếu hai điểm M, N trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ mà tiếp tuyến của (C) tại hai điểm M, N song song với nhau thì đường thẳng MN đi qua tâm đối xứng của của đồ thị (C).

Tâm đối xứng I của đồ thị (C) là giao điểm của hai đường tiệm cận, ta có $I(1;1)$.

Đường thẳng (d) : $y = 2x + m$ đi qua $I(1;1)$, suy ra $1 = 2 + m$ $\Leftrightarrow m = -1 \in \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 4}$ là :

A. 3. B. $\dfrac{1}{3}$. C. $\dfrac{1}{4}$. D. 4.

<u>Cách giải thông thường</u>

Điều kiện $x^2 + 2x + 4 \neq 0$ (luôn đúng). Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+4\right)^2};\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\searrow$	0

Kết luận: $\max_{\mathbb{R}} f\left(x\right)=f\left(-1\right)=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B.

Cách giải khác (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Ta có $x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2+3}\le\dfrac{1}{0+3}=\dfrac{1}{3}$, với $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(-1\right)=\dfrac{1}{3}$.

Do đó, giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ là $\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 8. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ bằng :

A. $\dfrac{\pi}{2}$. B. $\dfrac{3\pi}{2}$. C. 2π . D. π .

Cách giải thông thường

Đặt $x=\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos t.dt$.

Đổi cận : $x=-1\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}$; $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

Ta được $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}.\cos t.dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t\right|\cos t.dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án A.

Cách khác (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Ta có : $y=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y\ge 0 \end{cases}$, nên hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn phía trên trục Ox (tính cả hai điểm $(-1;0),(1;0)$). Mà đường tròn $x^2+y^2=1$ có bán kính $R=1$, theo ý nghĩa hình học của tích phân ta suy ra: $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{S}{2}=\frac{\pi.1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$. Với S là diện tích hình tròn có bán kính bằng 1.

Chọn đáp án A.

Ví dụ 9. Biết rằng $I=\int_1^e\left(\ln^2 x+2\ln x\right)dx=ae-b$, với $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}$. Khi đó $S=a+b$ bằng bao nhiêu ?

A. 0 . B. $\frac{3}{2}$. C. 1. D. 2.

Cách giải thông thường

Ta có $I=\int_1^e\left(\ln^2 x+2\ln x\right)dx=\int_1^e \ln^2 xdx+2\int_1^e \ln xdx$.

Xét tích phân $J=\int_1^e \ln^2 xdx$.

Đặt $u=\ln^2 x \Rightarrow du=\frac{2}{x}\ln x dx$; $dv=dx \Rightarrow v=x$.

Ta được $J=x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e \ln x dx$.

$$\Rightarrow I=\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e \ln x dx\right)+2\int_1^e \ln x dx \;=x\ln^2 x\Big|_1^e=e=1.e-0.$$

$\Rightarrow a=1;b=0 \Rightarrow S=a+b=1.$

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Ta có $\ln^2 x+2\ln x=(x)'.\ln^2 x+x.(\ln^2 x)'=(x\ln^2 x)'$ nên suy ra :

$$I=\int_1^e\left(\ln^2 x+2\ln x\right)dx=\int_1^e\left(x\ln^2 x\right)'dx=\int_1^e d\left(x\ln^2 x\right)=\left(x\ln^2 x\right)\Big|_1^e=e.$$

Suy ra : $S=a+b=1.$

Chọn đáp án C.

Câu 10. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $(z-1)(z^2+2z+5)=0$ có nghiệm là :

A. $\left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1+2i \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} z=-1-2i \\ z=-1+2i \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} z=1-2i \\ z=1+2i \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} z=-1-2i \\ z=-1+2i \\ z=1 \end{array}\right.$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có : $(z-1)(z^2+2z+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2+2z+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1-2i \\ z=-1+2i \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D.

<u>Cách khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Do phương trình $z^2+2z+5=0$ có hai nghiệm nên phương trình đã cho có ba nghiệm khác nhau.

Chọn đáp án D.

Câu 11. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i.$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2.$ B. $|z|>2.$ C. $|z|<\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}.$

(Câu 34 – Đề thử nghiệm THPT QG năm 2017)

<u>Cách giải thông thường</u>

Đặt $z=a+bi$ (với $a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}$) và $k=|z|=\sqrt{a^2+b^2}>0$ ta được :

$$(1+2i)k=\frac{\sqrt{10}}{a+bi}-2+i \Leftrightarrow (1+2i)k=\frac{\sqrt{10}(a-bi)}{a^2+b^2}-2+i$$

$$\Leftrightarrow (1+2i)k=\frac{a\sqrt{10}}{k^2}-\frac{b\sqrt{10}}{k^2}i-2+i \Leftrightarrow \left(k+2-\frac{a\sqrt{10}}{k^2}\right)+\left(\frac{b\sqrt{10}}{k^2}-1+2k\right)i=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-\dfrac{a\sqrt{10}}{k^2}+2=0 \\ \dfrac{b\sqrt{10}}{k^2}+2k-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+2=\dfrac{a\sqrt{10}}{k^2} \\ 1-2k=\dfrac{b\sqrt{10}}{k^2} \end{cases}.$$

Để ý rằng $k=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow k^2=a^2+b^2$, ta có :

$$(k+2)^2+(1-2k)^2=\left(\frac{a\sqrt{10}}{k^2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{10}}{k^2}\right)^2=\frac{10(a^2+b^2)}{k^4}=\frac{10}{k^2}.$$

$$\Leftrightarrow (k+2)^2+(1-2k)^2=\frac{10}{k^2} \Leftrightarrow 5k^4+5k^2-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2=1 \\ k^2=-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \quad (nhaä) \\ k=-1\ (loaï) \end{array}\right..$$

Vậy $k=|z|=1$ tức là $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}.$

Chọn đáp án D.

Cách khác (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Vì các khoảng $\left(\frac{3}{2};2\right),(2;+\infty),\left(-\infty;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ đôi một không có điểm chung và trong bốn đáp án thì có một đáp án đúng nên ta chọn đại diện.

Chọn $|z|=1$, ta có : $(1+2i)=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i \Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{10}}{3+i}=\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{10}}{10}i$.

Khi đó $\left|\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{10}}{10}i\right|=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=1$. (thỏa mãn điều kiện bài toán)

Chọn đáp án D.

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=|z|$.

A. $P_{\max}=12$. B. $P_{\max}=5$. C. $P_{\max}=9$. D. $P_{\max}=3$.

Cách giải thông thường

Đặt $z = a + bi$ (với $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) ta được $|a + bi - 3 + 4i| = 4$ $\Leftrightarrow |(a-3)+(b+4)i| = 4$ $\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b+4)^2 = 16 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a + 8b + 9 = 0$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 9 = 6a - 8b \leq 10.\sqrt{a^2 + b^2}$.

Suy ra $P^2 + 9 \leq 10P \Leftrightarrow P^2 - 10P + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq P \leq 9$.

Vậy $P_{\max} = 9$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$ nên điểm M biểu diễn của số phức z thuộc đường tròn tâm $I(3;-4)$, bán kính $R = 4$.

Suy ra, $P = |z|$ lớn nhất bằng $P_{\max} = OI + R = \sqrt{3^2 + 4^2} + 4 = 9$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz), có bán kính $R = 3$ và có tâm nằm trên tia Oy. Mặt cầu (S) có phương trình là :

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$.

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$.

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Gọi $I(0;b;0)$ là tâm của mặt cầu (S) thì $b > 0$ (do I nằm trên tia Oy).

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y = 0$.

Ta có : $d\left(I,(Oxz)\right)=R \Leftrightarrow \dfrac{|b|}{\sqrt{1^2}}=3 \Leftrightarrow |b|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b=3 & (nhận) \\ b=-3 & (loại) \end{array}\right.$.

Vậy $(S): x^2+(y-3)^2+z^2=3^2$ hay $(S): x^2+y^2+z^2-6y=0$.

Chọn đáp án B.

<u>Cách giải khác 1</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Do tâm mặt cầu nằm trên tia Oy nên có tọa độ dạng $I(0;b;0)$. Suy ra, ta loại đáp án A (tâm I có hoành độ bằng 3), loại đáp án C (tâm I có cao độ bằng 3), loại đáp án D (tâm I trùng với gốc tọa độ nên không tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz)).

Chọn đáp án B.

<u>Cách giải khác 2</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Do (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz), có bán kính $R=3$ và có tâm nằm trên tia Oy nên $I(0;3;0)$. Điểm $M(0;6;0)$ đối xứng với gốc tọa độ qua tâm $I(0;3;0)$ thuộc mặt cầu nên ta loại được các đáp án A, C, D.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox có phương trình là :

A. $(P): x+2z-3=0$.

B. $(P): y-2z+2=0$.

C. $(P): 2y-z+1=0$.

D. $(P): x+y-z=0$.

<u>Cách giải thông thường</u>

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) là : $\overrightarrow{AB}=(-2;2;1)$; $\vec{i}=(1;0;0)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{i}\right]=(0;1;-2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;1;-2)$ là :

$$0(x-1)+1(y-0)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow y-2z+2=0.$$

Chọn đáp án B.

<u>Cách giải khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Mặt phẳng song song với trục Ox có dạng : $By+Cz+D=0$, ta loại được hai đáp án A và D.

Lại có $B(-1;2;2) \notin (P): 2y-z+1=0$ nên loại đáp án C.

Chọn đáp án B.

Ví dụ 15. Cho phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

A. Phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{5}\right)$ và một nghiệm thuộc khoảng $\left(3:+\infty\right)$.

B. Phương trình có ba nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có một nghiệm bằng 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1.

D. Phương trình nghiệm duy nhất $x=1$.

<u>Cách giải thông thường 1</u>

Điều kiện : $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -3$.

Ta có: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5 \Leftrightarrow x+3+2\sqrt{(x+3)(x+8)}+x+8=25$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(x+8)} = 14 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+8)} = 7 - x$

$\Leftrightarrow x^2 + 11x + 24 = 49 - 14x + x^2 \Leftrightarrow 25x = 25 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình nghiệm duy nhất $x = 1$.

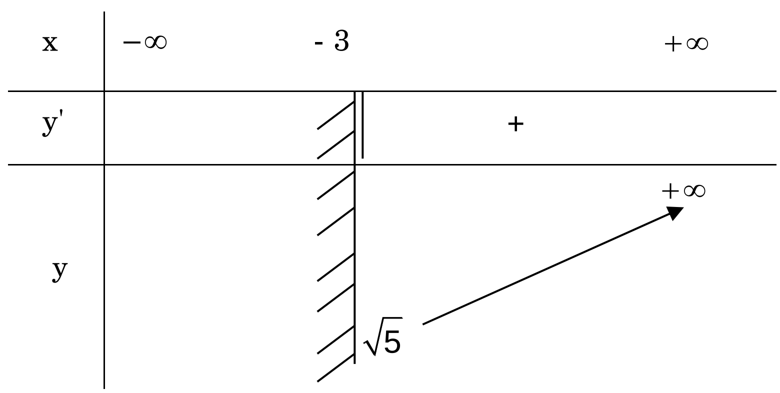
<u>Cách giải thông thường 2</u>

Điều kiện : $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ x+8 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -3$.

Xét hàm $f\left(x\right) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8}$, với $x \in \left[-3; +\infty\right)$.

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{x+8}} > 0, \forall x \in \left(-3; +\infty\right).$$

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta nhận thấy, đường thẳng $y = 5$ nếu có giao điểm với đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8}$ thì có tối đa một giao điểm. Do đó, phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$ có tối đa một nghiệm. Mà $f\left(1\right) = \sqrt{1+3} + \sqrt{1+8} = 5$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chọn đáp án D.

<u>Cách giải khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Các hàm số $y = x + 3$ và $y = x + 8$ đồng biến trên R nên cũng đồng biến trên $\left[-3;+\infty\right)$ vì có hệ số góc dương. Suy ra, các hàm số $y = \sqrt{x+3}$ và $y = \sqrt{x+8}$ cũng là các hàm số đồng biến trên $\left[-3;+\infty\right)$. Do đó, hàm số $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8}$ là hàm số đồng biến trên $\left[-3;+\infty\right)$.

VT(1) là hàm số đồng biến trên $\left[-3;+\infty\right)$, VP(1) là hàm hằng nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì có nhiều nhất là một nghiệm.

Nhận thấy $y\left(1\right) = \sqrt{1+3} + \sqrt{1+8} = 5$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 16. Cho phương trình ẩn x sau đây : $2x^2 - x^4 - m = 0$, (m là tham số thực). Chọn khẳng định đúng ?

A. Phương trình có nghiệm thực duy nhất khi $m = 0$.
B. Phương trình có nghiệm thực duy nhất khi $m = 1$.
C. Phương trình có nghiệm thực duy nhất khi $m > 1$.
D. Không tồn tại giá trị thực của m để phương trình có nghiệm thực duy nhất.

Cách giải thông thường

Ta có $2x^2 - x^4 - m = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x^4 = m$.

Đặt $f\left(x\right) = 2x^2 - x^4$; $f'\left(x\right) = 4x - 4x^3 = 4x\left(1 - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0 $\qquad\qquad$ $-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra, không tồn tại giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Vậy chọn đáp án D.

Cách giải khác (dùng chủ yếu suy luận toán học – sử dụng tính chất của hàm số chẵn)

Nhận xét rằng : nếu x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho, suy ra $-x_0$ cũng là một nghiệm của phương trình đã cho. Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Thế vào phương trình ta được $m = 0$.

Đảo lại, với $m = 0$ thì phương trình trở thành :

$$2x^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(2 - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy không tồn tại giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 17. Giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = m$ có nghiệm thực duy nhất là :

A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = 2$. D. $m \in \varnothing$.

Cách giải thông thường

Xét hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x},\ x \in \left[0;2\right]$;

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x\left(2-x\right)}}\ ,\ x \in \left(0;2\right).$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{x} \Leftrightarrow 2-x=x \Leftrightarrow x=1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
y'		$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	
y		$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$	

Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, ta cần có : $m=2$.

Chọn đáp án C.

<u>Cách khác</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học – sử dụng tính chất của hàm số chẵn)

Nhận xét rằng : nếu x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho, suy ra $2-x_0$ cũng là một nghiệm của phương trình đã cho. Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=2-x_0 \Leftrightarrow 2x_0=2 \Leftrightarrow x_0=1$. Thế vào phương trình ta được $m=2$.

Đảo lại, với $m=2$ thì phương trình trở thành :

$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=2 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x(2-x)}+2-x=4 \Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)}=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $m=2$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(-\infty;1)$. B. $m\in(0;+\infty)$. C. $m\in(0;1]$. D. $m\in(0;1)$.

(Câu 31 - Mã đề 102 – THPT QG - 2017)

<u>Cách giải thông thường</u>

Ta có $4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2^{x+1} = -m$.

Đặt $f\left(x\right) = 4^x - 2^{x+1}$; $f'\left(x\right) = 4^x \ln 4 - 2^{x+1} \ln 2$;

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 4^x \ln 4 = 2.2^x \ln 2 \Leftrightarrow 4^x = 2^x \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy phương trình có hai nghiệm thực phân biệt khi $\begin{cases} -m > -1 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Chọn đáp án D.

<u>**Cách khác**</u> (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Ta có $4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2.2^x + 1 = 1 - m \Leftrightarrow \left(2^x - 1\right) = 1 - m$.

Điều kiện $1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$. (1)

Khi đó ta có $\left[\begin{array}{l} 2^x - 1 = \sqrt{1-m} \\ 2^x - 1 = -\sqrt{1-m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 + \sqrt{1-m} > 0 \\ 2^x = 1 - \sqrt{1-m} \end{array}\right.$.

Để thỏa mãn bài toán ta cần có $1 - \sqrt{1-m} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-m} < 1 \Leftrightarrow 1 - m < 1 \Leftrightarrow m > 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $0 < m < 1$.

Chọn đáp án D.

Ví dụ 19. Cho hai số thực $x \neq 0$, $y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là :

A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{16}$. D. $M = 16$.

__**Cách giải thông thường 1**__

Ta có $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2$. (*)

Nếu $x + y = 0$ thì $x^2 + y^2 - xy = 0 \Rightarrow x = y = 0$. (trái với giả thiết)

Với $x + y \neq 0$ thì: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow xy = \frac{x^2+y^2-xy}{x+y}$, thế vào (*) ta được:

$$A = \left(\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2-xy}\right)^2 = \left(1 + \frac{3xy}{x^2+y^2-xy}\right)^2 .$$

Xét biểu thức $B = \frac{3xy}{x^2+y^2-xy} = \frac{3\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 - \frac{x}{y}}$; Đặt $t = \frac{x}{y} \neq 0$ ta được $B = \frac{3t}{t^2+1-t}$

$\Leftrightarrow Bt^2 - (B+3)t + B = 0$. (**)

Do (**) có nghiệm nên $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (B+3)^2 - 4B^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3B^2 + 6B + 9 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq B \leq 3$

.

Suy ra $A \leq (1+B)^2 \leq 16$.

Giá trị lớn nhất của A là 16 khi $B=3 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D.

Cách giải thông thường 2

Ta có: $\left(x+y\right)xy = x^2+y^2-xy \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{xy}$.

Đặt $a=\frac{1}{x}$; $b=\frac{1}{y}$ ta được $a+b=a^2+b^2-ab$. (1)

$A=a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2+b^2-ab\right)=\left(a+b\right)^2$.

Từ (1) suy ra $a+b=\left(a+b\right)^2-3ab \geq \left(a+b\right)^2-\frac{3}{4}\left(a+b\right)^2$. (vì $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$)

$\Rightarrow \left(a+b\right)^2-4\left(a+b\right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \left(a+b\right) \leq 4$.

Suy ra: $A=\left(a+b\right)^2 \leq 4^2=16$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 16 khi $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2 \Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D.

Cách giải khác (dùng chủ yếu suy luận toán học)

Do các biểu thức $\left(x+y\right)xy$; x^2+y^2-xy và $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$ có tính đối xứng nên ta dự đoán biểu thức A đạt giá trị lớn nhất khi $x=y$.

Mặt khác, trong các giá trị mà đề cho ở đáp án thì $M=16$ là giá trị lớn nhất.

Ta xét trường hợp này : $\begin{cases} x = y \\ \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$, các giá trị này thỏa mãn đẳng thức $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$.

Chọn đáp án D.

Câu 20. Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t\ (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét ?

A. $18\ mét$.

B. $\dfrac{45}{2}\ mét$.

C. $36\ mét$.

D. $\dfrac{27}{4}\ mét$.

Hướng dẫn chọn đáp án

Ta có $v(t) = \int a(t)dt = \int (6-2t)dt = 6t - t^2 + C$.

Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ nên $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Ta được $v(t) = 6t - t^2 = -(t-3)^2 + 9 \le 9$, tức là $v_{\max} = 9$ khi $t = 3$.

Quãng đường cần tìm là : $s = \int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3 (6t - t^2)\,dt = \left(3t^2 - \dfrac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 18\ (mét)$.

Chọn đáp án A.

***C**ác phương pháp được trình bày ở trên một cách độc lập nhằm đem lại cho độc giả cái nhìn chung, tổng quát nhất về mỗi phương pháp. Thế nhưng, việc phân định rạch ròi các phương pháp là rất khó khăn, có nhiều bài toán chúng ta phải kết hợp một số phương pháp để chọn được đúng đáp án. Ở trong phương pháp này lại có dấu vết nào đó của phương pháp kia, khiến chúng ta băn khoăn trong việc chọn lựa phương pháp. Vì thế, trong quá trình giải toán, chúng ta cần linh hoạt vận dụng các phương pháp theo hướng tổng lực để xử lý bài toán trắc nghiệm. Tận dụng mặt mạnh, hữu dụng của mỗi phương pháp đối với các dạng bài toán trắc nghiệm khác nhau. Không chỉ tư duy trên nền tảng một phương pháp.*

Sài Gòn, 17 - 7 - 2017

Trần Tuấn Anh