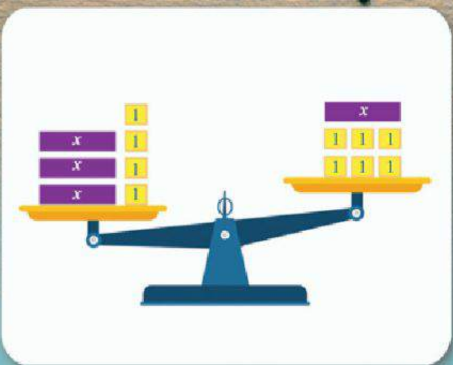
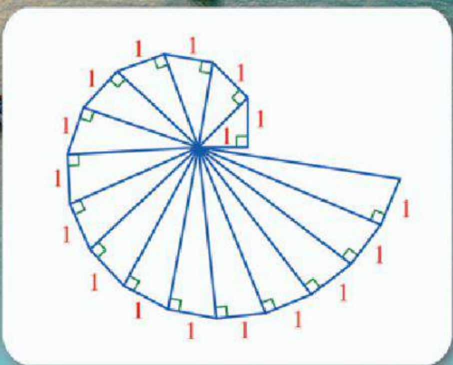
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

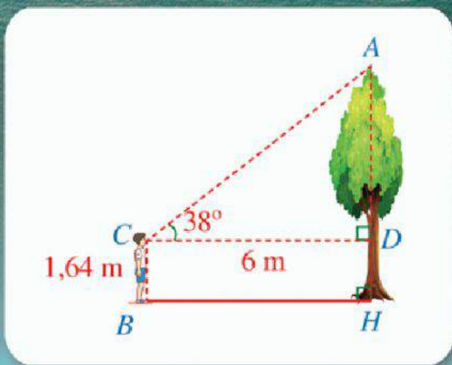
Toán 9

TẬP MỘT

BẢN MẪU







CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
LÊ TUẤN ANH – ĐỖ TIẾN ĐẠT – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM ĐỨC QUANG

Toán 9

TẬP MỘT

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 9 yêu quý!

*Năm học này, chúng ta lại vui mừng gặp nhau qua cuốn sách **Toán 9**. Sách **Toán 9** tiếp tục giúp các em có thêm nhiều hiểu biết về phương trình và hệ phương trình bậc nhất, bất đẳng thức và bất phương trình bậc nhất một ẩn, căn thức, hàm số bậc hai và đồ thị (ở dạng đơn giản), phương trình bậc hai, một số hình khối trong thực tiễn (hình trụ, hình nón, hình cầu). Các em cũng được tìm hiểu hệ thức lượng trong tam giác vuông, đường tròn, đa giác đều, từ đó các em có thể tìm hiểu sâu sắc hơn đặc điểm của những hình phẳng quen thuộc. Ngoài ra, các em cũng được tiếp tục làm quen với thống kê và xác suất; tiến hành những hoạt động thực hành và trải nghiệm; đặc biệt về những hoạt động tài chính đơn giản; sử dụng phần mềm toán học trong thực hành tính toán và vẽ hình hình học. Qua đó giúp các em hiểu biết thêm những công cụ quan trọng của toán học trong việc giải quyết các vấn đề thực tiễn.*

*Năm học này cũng là năm học cuối cùng của các em ở cấp trung học cơ sở, sách **Toán 9** sẽ giúp các em nhìn nhận lại những học vấn toán học cốt lõi ở những lớp trước, chuẩn bị tốt nhất cho các em bước vào cấp trung học phổ thông.*

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những câu chuyện lí thú về khoa học tự nhiên, về văn hoá và nghệ thuật, kiến trúc, thể thao và du lịch. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với các thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học Toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học Toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương I

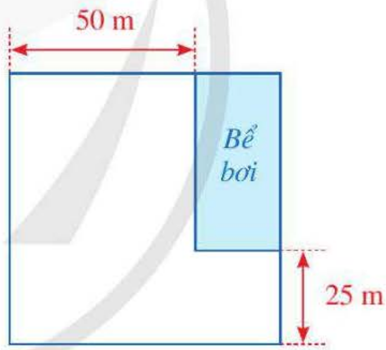
PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn; phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn; giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

§1. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Trong một khu đất có dạng hình vuông, người ta dành một mảnh đất có dạng hình chữ nhật ở góc khu đất để làm bể bơi (*Hình 1*). Biết diện tích của bể bơi bằng 1 250 m^2.

Bể bơi
(Nguồn: https://shutterstock.com)



Hình 1

Độ dài cạnh của khu đất bằng bao nhiêu mét?

I. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CÓ DẠNG $(ax + b)(cx + d) = 0$ $(a \neq 0, c \neq 0)$

1

a) Cho hai số thực u, v có tích $uv = 0$. Có nhận xét gì về giá trị của u, v?

b) Cho phương trình $(x - 3)(2x + 1) = 0$.

- Hãy giải mỗi phương trình bậc nhất sau: $x - 3 = 0$; $2x + 1 = 0$.

- Chứng tỏ rằng nghiệm của phương trình $x - 3 = 0$ và nghiệm của phương trình $2x + 1 = 0$ đều là nghiệm của phương trình $(x - 3)(2x + 1) = 0$.
- Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình $(x - 3)(2x + 1) = 0$. Giá trị $x = x_0$ có phải là nghiệm của phương trình $x - 3 = 0$ hoặc phương trình $2x + 1 = 0$ hay không?

Để giải phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$ với $a \neq 0$ và $c \neq 0$, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Giải hai phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$

Bước 2. Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình bậc nhất vừa giải được ở *Bước 1*.

Ví dụ 1 Giải phương trình: $(x + 5)(3x - 9) = 0$.

Giải

Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau:

*) $x + 5 = 0$

$x = -5$;

*) $3x - 9 = 0$

$3x = 9$

$x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -5$ và $x = 3$.

1 Giải phương trình: $(4x + 5)(3x - 2) = 0$.

Ví dụ 2 Giải các phương trình:

a) $(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$; b) $x^2 - 9 = 3(x + 3)$.

Giải

a) Ta có:

$$(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$$

$$(2x - 3)^2 - (x + 7)^2 = 0$$

$$[(2x - 3) - (x + 7)][(2x - 3) + (x + 7)] = 0$$

$$(x - 10)(3x + 4) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau:

*) $x - 10 = 0$

$x = 10$;

*) $3x + 4 = 0$

$x = -\frac{4}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 10$ và $x = -\frac{4}{3}$.

b) Ta có: $x^2 - 9 = 3(x + 3)$

$$(x - 3)(x + 3) - 3(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)[(x - 3) - 3] = 0$$

$$(x + 3)(x - 6) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau:

*) $x + 3 = 0$ *) $x - 6 = 0$

$x = - 3$; $x = 6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = - 3$ và $x = 6$.

2 Giải các phương trình:

a) $x^2 - 10x + 25 = 5(x - 5)$;

b) $4x^2 - 16 = 5(x + 2)$.

Ví dụ 3 Giải bài toán nêu trong phần mở đầu.

Giải

Gọi độ dài cạnh của khu đất có dạng hình vuông là x (m) với $x > 50$. Khi đó, mảnh đất dạng hình chữ nhật để làm bể bơi có các kích thước lần lượt là $x - 50$ (m), $x - 25$ (m). Do đó, diện tích của mảnh đất đó là: $(x - 50)(x - 25)$ (m^2).

Vì vậy, ta có phương trình: $(x - 50)(x - 25) = 1\,250$.

Giải phương trình: $(x - 50)(x - 25) = 1\,250$

$$(x - 50)(x - 25) - 1\,250 = 0$$

$$x^2 - 75x = 0$$

$$x(x - 75) = 0$$

$x = 0$ hoặc $x = 75$.

Do $x > 50$ nên $x = 75$. Vậy độ dài cạnh của khu đất là 75 m.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

2 Cho phương trình: $\dfrac{x + 2}{x} = \dfrac{x - 3}{x - 2}$ (1)

Tìm điều kiện của x để cả hai mẫu thức có trong phương trình (1) là khác 0.

Phương trình (1) được gọi là phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Điều kiện $x \neq 0$, $x \neq 2$ được gọi là điều kiện xác định của phương trình (1).

Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là *điều kiện xác định của phương trình*.

Ví dụ 4 Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{2x+1}{x-2}=5$;   b) $\frac{2}{5x-3}=1+\frac{1}{x+2}$.

Giải

a) Điều kiện xác định của phương trình

$\frac{2x+1}{x-2}=5$ là $x-2\neq 0$ hay $x\neq 2$.

b) Điều kiện xác định của phương trình

$\frac{2}{5x-3}=1+\frac{1}{x+2}$ là $5x-3\neq 0$ và $x+2\neq 0$

hay $x\neq\frac{3}{5}$ và $x\neq -2$.

3 Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

$$\frac{x-8}{x-7}=8+\frac{1}{1-x}.$$

3 Cho phương trình:

$$\frac{2x+1}{2x}=1-\frac{2}{x-3} \qquad (2)$$

Hãy giải phương trình (2) theo các bước sau:

a) Tìm điều kiện xác định của phương trình (2).

b) Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức các phân thức ở hai vế của phương trình (2) và khử mẫu.

c) Giải phương trình vừa tìm được.

d) Kiểm tra điều kiện xác định của phương trình (2) đối với các giá trị của ẩn vừa tìm được rồi kết luận.

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế của phương trình rồi khử mẫu

Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được

Bước 4. *Kết luận nghiệm:* Trong các giá trị của ẩn tìm được ở *Bước 3*, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 5 Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x^2}{2-x}+\dfrac{3x-1}{3}=\dfrac{5}{3}$;

b) $\dfrac{4}{x(x-1)}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{4}{x-1}$.

4 Giải phương trình:

$$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{2}{(2-x)(x-3)}.$$

Giải

a) Điều kiện xác định: $2-x\neq 0$ hay $x\neq 2$.

$$\frac{x^2}{2-x}+\frac{3x-1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{3x^2}{3(2-x)}+\frac{(3x-1)(2-x)}{3(2-x)}=\frac{5(2-x)}{3(2-x)}$$

$$3x^2+(3x-1)(2-x)=5(2-x)$$

$$3x^2+6x-3x^2-2+x=10-5x$$

$$7x-2=10-5x$$

$$12x=12$$

$$x=1.$$

Ta thấy $x=1$ thoả mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

b) Điều kiện xác định: $x\neq 0$ và $x\neq 1$.

$$\frac{4}{x(x-1)}+\frac{3}{x}=\frac{4}{x-1}$$

$$\frac{4}{x(x-1)}+\frac{3(x-1)}{x(x-1)}=\frac{4x}{x(x-1)}$$

$$4+3(x-1)=4x$$

$$4+3x-3=4x$$

$$3x+1=4x$$

$$x=1.$$

Ta thấy $x=1$ không thoả mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 6 Hai bạn Phong và Khang cùng hẹn nhau đạp xe đến một địa điểm cách vị trí bạn Phong 6 km và cách vị trí bạn Khang 7 km. Hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc. Tính tốc độ của mỗi bạn, biết tốc độ của bạn Khang hơn tốc độ của bạn Phong là 2 km/h.

Giải

Gọi tốc độ của bạn Phong là x (km/h) $(x>0)$. Khi đó, tốc độ của bạn Khang là $x+2$ (km/h).

Thời gian đi của bạn Phong là $\dfrac{6}{x}$ (giờ).

Thời gian đi của bạn Khang là $\dfrac{7}{x+2}$ (giờ).

Do hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc nên thời gian đi của hai bạn là như nhau. Ta có phương trình:

$$\frac{6}{x}=\frac{7}{x+2}.$$

Giải phương trình: $\frac{6}{x} = \frac{7}{x+2}$

$$\frac{6(x+2)}{x(x+2)} = \frac{7x}{x(x+2)}$$

$$6(x+2) = 7x$$

$$6x + 12 = 7x$$

$$x = 12 \text{ (thoả mãn } x > 0\text{)}.$$

Vậy tốc độ của bạn Phong là 12 km/h, tốc độ của bạn Khang là 14 km/h.

5 Một đội công nhân làm đường nhận nhiệm vụ trải nhựa 8 100 m^2 mặt đường. Ở giai đoạn đầu, đội trải được 3 600 m^2 mặt đường. Ở giai đoạn hai, đội công nhân tăng năng suất thêm 300 m^2/ngày rồi hoàn thành công việc. Hỏi đội công nhân đã hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày? Biết năng suất lao động của đội là không thay đổi ở mỗi giai đoạn và thời gian làm việc của hai giai đoạn là như nhau.

Ví dụ 7 Biết nồng độ muối của nước biển là 3,5% và khối lượng riêng của nước biển là 1 020 g/*l*. Từ 2 *l* nước biển như thế, người ta hoà thêm muối để được một dung dịch có nồng độ muối là 20%. Tính lượng muối cần hoà thêm.

Giải

Khối lượng của 2 *l* nước biển là: $1\,020 \,.\, 2 = 2\,040$ (g).

Khối lượng muối trong 2 *l* nước biển là: $2\,040 \,.\, 3{,}5\% = 71{,}4$ (g).

Gọi lượng muối cần hoà thêm vào 2 *l* nước biển như thế để được một dung dịch có nồng độ muối là 20% là x (g) ($x > 0$). Ta có phương trình:

$$\frac{71{,}4 + x}{2\,040 + x} = \frac{20}{100}.$$

Giải phương trình: $\frac{71{,}4 + x}{2\,040 + x} = \frac{20}{100}$

$$\frac{100 \,.\, (71{,}4 + x)}{100 \,.\, (2\,040 + x)} = \frac{20 \,.\, (2\,040 + x)}{100 \,.\, (2\,040 + x)}$$

$$100 \,.\, (71{,}4 + x) = 20 \,.\, (2\,040 + x)$$

$$7\,140 + 100x = 40\,800 + 20x$$

$$100x - 20x = 40\,800 - 7\,140$$

$$80x = 33\,660$$

$$x = 420{,}75 \text{ (thoả mãn } x > 0\text{)}.$$

Vậy cần hoà thêm 420,75 g muối vào 2 *l* nước biển ban đầu để được một dung dịch có nồng độ muối là 20%.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình:

a) $(9x - 4)(2x + 5) = 0$;

b) $(1{,}3x + 0{,}26)(0{,}2x - 4) = 0$;

c) $2x(x + 3) - 5(x + 3) = 0$;

d) $x^2 - 4 + (x + 2)(2x - 1) = 0$.

2. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{3(x+2)}$;

b) $\dfrac{x}{2x-1} = \dfrac{x-2}{2x+5}$;

c) $\dfrac{5x}{x-2} = 7 + \dfrac{10}{x-2}$;

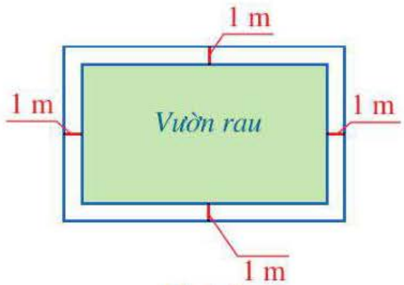
d) $\dfrac{x^2-6}{x} = x + \dfrac{3}{2}$.

3. Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm *A* đến địa điểm *B*, rồi lại đi ngược dòng từ địa điểm *B* trở về địa điểm *A*. Thời gian cả đi và về là 3 giờ. Tính tốc độ của dòng nước. Biết tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là 27 km/h và độ dài quãng đường *AB* là 40 km.

4. Một doanh nghiệp sử dụng than để sản xuất sản phẩm. Doanh nghiệp đó lập kế hoạch tài chính cho việc loại bỏ chất ô nhiễm trong khí thải theo dự kiến sau: Để loại bỏ $p\%$ chất ô nhiễm trong khí thải thì chi phí C (triệu đồng) được tính theo công thức: $C = \dfrac{80}{100-p}$ với $0 \le p < 100$ (*Nguồn: John W. Cell, Engineering Problems Illustrating Mathematics, MeGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, năm 1943*). Với chi phí là 420 triệu đồng thì doanh nghiệp loại bỏ được bao nhiêu phần trăm chất gây ô nhiễm trong khí thải (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

5. Bạn Hoa dự định dùng hết số tiền 600 nghìn đồng để mua một số chiếc áo đồng giá tặng các bạn có hoàn cảnh khó khăn. Khi đến cửa hàng, loại áo mà bạn Hoa dự định mua được giảm giá 30 nghìn đồng/chiếc. Do vậy, bạn Hoa đã mua được số lượng áo gấp 1,25 lần so với số lượng dự định. Tính giá tiền của mỗi chiếc áo bạn Hoa đã mua.

6. Một mảnh đất có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 52 m. Trên mảnh đất đó, người ta làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật với diện tích là 112 m^2 và một lối đi xung quanh vườn rộng 1 m (*Hình 2*). Tính các kích thước của mảnh đất đó.



Hình 2

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Một lạng thịt bò chứa 26 g protein, một lạng thịt cá chứa 22 g protein. Bác An dự định chỉ bổ sung 70 g protein từ thịt bò và thịt cá trong một ngày.

Thịt bò

Thịt cá

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Số lạng thịt bò và số lạng thịt cá mà bác An ăn trong một ngày cần thoả mãn điều kiện ràng buộc gì để đáp ứng nhu cầu bổ sung protein của bác An?

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 Trong bài toán ở phần mở đầu, ta gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò, số lạng thịt cá mà bác An ăn trong một ngày. Viết hệ thức liên hệ giữa x và y để đáp ứng nhu cầu bổ sung protein của bác An.

Hệ thức cần tìm là: $26x + 22y = 70$.

Hệ thức trên là một phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng: $ax + by = c$, trong đó a, b, c là những số cho trước, $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.

Ví dụ 1 Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y?

a) $2x - y = 1$.　　b) $0x + 3y = 9$.　　c) $5x + 0y = -2$.　　d) $3x^2 - y = 7$.

Giải

Phương trình ở các câu a, b, c là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y. Phương trình ở câu d không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

1 Nêu hai ví dụ về phương trình bậc nhất hai ẩn.

2 Cho phương trình bậc nhất hai ẩn x, y:

$$3x - 2y = 6 \qquad (1)$$

Tính giá trị của biểu thức ở vế trái của phương trình (1) tại $x = 4$; $y = 3$. Giá trị đó có bằng 6 hay không?

Trong phương trình (1), giá trị của vế trái tại $x = 4$; $y = 3$ bằng vế phải.

Cặp số (4 ; 3) được gọi là một nghiệm của phương trình (1).

Cho phương trình bậc nhất hai ẩn x, y: $ax + by = c$.
Nếu $ax_0 + by_0 = c$ là một khẳng định đúng thì cặp số $(x_0 ; y_0)$ được gọi là một *nghiệm* của phương trình $ax + by = c$.

Ví dụ 2 Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình: $2x - 3y = 5$?

a) $(1 ; -1)$. b) $(0 ; 5)$. c) $(-2 ; -3)$.

Giải

a) Thay $x = 1$; $y = -1$, ta có:

$$2 . 1 - 3 . (-1) = 5.$$

Vậy $(1 ; -1)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

b) Thay $x = 0$; $y = 5$, ta có:

$$2 . 0 - 3 . 5 = -15 \neq 5.$$

Vậy $(0 ; 5)$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Thay $x = -2$; $y = -3$, ta có:

$$2 . (-2) - 3 . (-3) = 5.$$

Vậy $(-2 ; -3)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

2 Nêu hai nghiệm của phương trình:

$$6x - 5y = 11.$$

Chú ý

- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi nghiệm của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0 ; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $(x_0 ; y_0)$.
- Ta cũng áp dụng được quy tắc chuyển vế, quy tắc nhân đã biết ở phương trình bậc nhất một ẩn để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 3 Cô Hạnh có hai khoản đầu tư với lãi suất là 8% và 10% mỗi năm. Cô Hạnh thu được tiền lãi từ hai khoản đầu tư đó là 160 triệu đồng mỗi năm. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho hai khoản đầu tư của cô Hạnh và chỉ ra ba nghiệm của phương trình đó.

Giải

Gọi x (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 8% mỗi năm ($x > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là:

$$8\% \,.\, x = \frac{2x}{25} \text{ (triệu đồng).}$$

Gọi y (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 10% mỗi năm ($y > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là:

$$10\% \,.\, y = \frac{y}{10} \text{ (triệu đồng).}$$

Ta có phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho hai khoản đầu tư của cô Hạnh là:

$$\frac{2x}{25} + \frac{y}{10} = 160 \text{ hay } 4x + 5y = 8\,000.$$

Ba nghiệm của phương trình trên là: $(100\,;\,1\,520)$, $(500\,;\,1\,200)$, $(1\,000\,;\,800)$.

Ví dụ 4 Cho phương trình $x + 0y = 2$.

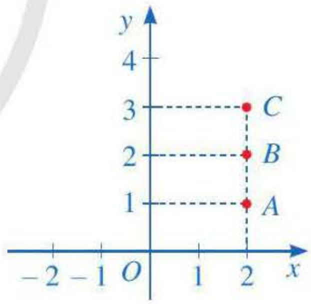
a) Chứng tỏ rằng các cặp số $(2\,;\,1)$, $(2\,;\,2)$, $(2\,;\,3)$ là nghiệm của phương trình trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các nghiệm $(2\,;\,1)$, $(2\,;\,2)$, $(2\,;\,3)$ của phương trình trên.

Giải

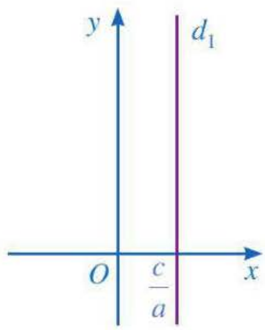
a) Do $1\,.\,2 + 0\,.\,1 = 2$ là khẳng định đúng nên cặp số $(2\,;\,1)$ là nghiệm của phương trình trên. Tương tự, các cặp số $(2\,;\,2)$, $(2\,;\,3)$ cũng là nghiệm của phương trình trên.

b) Các nghiệm $(2\,;\,1)$, $(2\,;\,2)$, $(2\,;\,3)$ lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $A(2\,;\,1)$, $B(2\,;\,2)$, $C(2\,;\,3)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy như ở *Hình 3*.



Hình 3

Nhận xét: Mỗi nghiệm của phương trình $ax + 0y = c$ $(a \neq 0)$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $\left(\frac{c}{a}\,;\,y_0\right)$ $(y_0 \in \mathbb{R})$ nằm trên đường thẳng d_1: $x = \frac{c}{a}$. Đường thẳng d_1 là đường thẳng đi qua điểm $\frac{c}{a}$ trên trục Ox và vuông góc với trục Ox (*Hình 4*).



Hình 4

Ví dụ 5 Cho phương trình $0x + 2y = 4$.

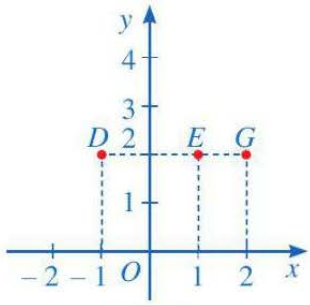
a) Chứng tỏ rằng các cặp số $(-1 ; 2)$, $(1 ; 2)$, $(2 ; 2)$ là nghiệm của phương trình trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các nghiệm $(-1 ; 2)$, $(1 ; 2)$, $(2 ; 2)$ của phương trình trên.

Giải

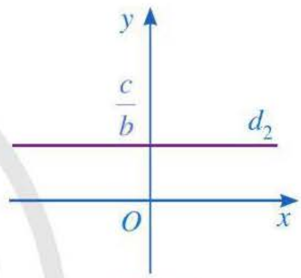
a) Do $0 . (-1) + 2 . 2 = 4$ là khẳng định đúng nên cặp số $(-1 ; 2)$ là nghiệm của phương trình đó. Tương tự, các cặp số $(1 ; 2)$, $(2 ; 2)$ cũng là nghiệm của phương trình trên.

b) Các nghiệm $(-1 ; 2)$, $(1 ; 2)$, $(2 ; 2)$ lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $D(-1 ; 2)$, $E(1 ; 2)$, $G(2 ; 2)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy như ở *Hình 5*.



Hình 5

Nhận xét: Mỗi nghiệm của phương trình $0x + by = c$ $(b \neq 0)$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $\left(x_0 ; \frac{c}{b}\right)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$ nằm trên đường thẳng d_2: $y = \frac{c}{b}$. Đường thẳng d_2 là đường thẳng đi qua điểm $\frac{c}{b}$ trên trục Oy và vuông góc với trục Oy (*Hình 6*).



Hình 6

Ví dụ 6 Cho phương trình $2x + y = 4$.

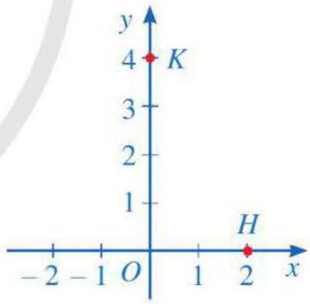
a) Chứng tỏ rằng các cặp số $(2 ; 0)$, $(0 ; 4)$ là nghiệm của phương trình trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các nghiệm $(2 ; 0)$, $(0 ; 4)$ của phương trình trên.

Giải

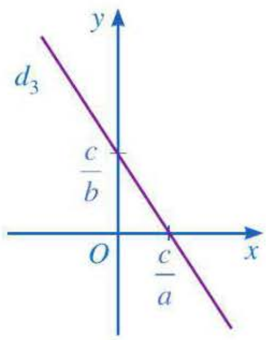
a) Do $2 . 2 + 0 = 4$ là khẳng định đúng nên cặp số $(2 ; 0)$ là nghiệm của phương trình trên. Tương tự, cặp số $(0 ; 4)$ cũng là nghiệm của phương trình trên.

b) Các nghiệm $(2 ; 0)$, $(0 ; 4)$ lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $H(2 ; 0)$, $K(0 ; 4)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy như ở *Hình 7*.



Hình 7

Nhận xét: Mỗi nghiệm của phương trình $ax + by = c$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ được biểu diễn bởi điểm nằm trên đường thẳng d_3: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Đường thẳng d_3 là đồ thị của hàm số $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (*Hình 8*).



Hình 8

II. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

3 Hai bạn Dũng, Huy vào siêu thị mua vở và bút bi để ủng hộ các bạn học sinh vùng lũ lụt. Bạn Dũng mua 5 quyển vở và 3 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả là 39 000 đồng. Bạn Huy mua 6 quyển vở và 2 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả là 42 000 đồng. Giả sử giá của mỗi quyển vở là x đồng ($x > 0$), giá của mỗi chiếc bút bi là y đồng ($y > 0$).

a) Viết hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y lần lượt biểu thị tổng số tiền phải trả của bạn Dũng, bạn Huy.

b) Cặp số $(x ; y) = (6\,000 ; 3\,000)$ có phải là nghiệm của từng phương trình bậc nhất đó hay không? Vì sao?

Ta nói rằng cặp số $(x ; y) = (6\,000 ; 3\,000)$ là một nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 5x + 3y = 39000 \\ 6x + 2y = 42000. \end{cases}$$

- Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (I), ở đó mỗi phương trình $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ đều là phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Nếu cặp số $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ (I) thì cặp số $(x_0 ; y_0)$ được gọi là *nghiệm* của hệ (I).
- *Giải hệ phương trình* là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

Ví dụ 7 Trong những trường hợp sau, hãy chỉ ra các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 3y = -11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x = -6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9y = -27 \\ x + 3y = -11; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 121 \\ x + 3y = -11. \end{cases}$

Giải

Hệ phương trình ở các câu a, b, c là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Trường hợp ở câu d không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

3 Cho ví dụ về hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 8 Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 3y = -11. \end{cases}$

Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

a) $(-2 ; -3)$. b) $(1 ; -1)$.

Giải

a) Thay giá trị $x = -2$, $y = -3$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có:

$$2 \,.\, (-2) - 3 \,.\, (-3) = 5;$$

$$-2 + 3 \,.\, (-3) = -11.$$

Suy ra cặp số $(-2 ; -3)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(-2 ; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b) Thay giá trị $x = 1$, $y = -1$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có:

$$2 \,.\, 1 - 3 \,.\, (-1) = 5;$$

$$1 + 3 \,.\, (-1) = -2 \neq -11.$$

Do đó, cặp số $(1 ; -1)$ không là nghiệm của phương trình thứ hai trong hệ phương trình đã cho.

Vậy cặp số $(1 ; -1)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

4 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Kiểm tra xem cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình đã cho:

a) $(3 ; 3)$; b) $(4 ; 2)$.

BÀI TẬP

1. Trong các cặp số $(8 ; 1)$, $(-3 ; 6)$, $(4 ; -1)$, $(0 ; 2)$, cho biết cặp số nào là nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $x - 2y = 6$; b) $x + y = 3$.

2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

a) $(3 ; -1)$. b) $(1 ; 0)$.

3. Nhân dịp tết Trung thu, một doanh nghiệp dự định sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh nướng, bánh dẻo lần lượt là 60 g, 50 g. Gọi x và y lần lượt là số lượng bánh nướng và bánh dẻo mà doanh nghiệp dự định sản xuất để lượng đường sản xuất bánh là 500 kg. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn x, y và chỉ ra ba nghiệm của phương trình đó.

Bánh nướng *Bánh dẻo*

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

4. Năm bạn Châu, Hà, Khang, Minh, Phong cùng đi mua sticker để trang trí vở. Có hai loại sticker: loại I giá 2 nghìn đồng/chiếc và loại II giá 3 nghìn đồng/chiếc. Mỗi bạn mua 1 chiếc và tổng số tiền năm bạn phải trả là 12 nghìn đồng. Gọi x và y lần lượt là số sticker loại I và loại II mà năm bạn đã mua.

a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

b) Cặp số (3 ; 2) có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

5. Để chuẩn bị cho buổi liên hoan của gia đình, bác Ngọc mua hai loại thực phẩm là thịt lợn và cá chép. Giá tiền thịt lợn là 130 nghìn đồng/kg, giá tiền cá chép là 50 nghìn đồng/kg. Bác Ngọc đã chi 295 nghìn để mua 3,5 kg hai loại thực phẩm trên. Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt lợn và cá chép mà bác Ngọc đã mua.

a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

b) Cặp số (1,5 ; 2) có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

6. Người ta cần sơn hai loại sản phẩm A, B bằng hai loại sơn: sơn xanh, sơn vàng. Lượng sơn để sơn mỗi loại sản phẩm đó được cho ở *Bảng 1* (đơn vị: kg/1 sản phẩm).

Loại sơn / Loại sản phẩm	Sơn xanh	Sơn vàng
Sản phẩm loại A	0,6	0,3
Sản phẩm loại B	0,5	0,4

Bảng 1

Người ta dự định sử dụng 85 kg sơn xanh và 50 kg sơn vàng để sơn tất cả các sản phẩm của hai loại đó. Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại A, số sản phẩm loại B được sơn.

a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y.

b) Cặp số (100 ; 50) có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

§3. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Một nhóm khách vào cửa hàng bán trà sữa. Nhóm khách đó đã mua 6 cốc trà sữa gồm trà sữa trân châu và trà sữa phô mai. Giá mỗi cốc trà sữa trân châu, trà sữa phô mai lần lượt là 33 000 đồng, 28 000 đồng. Tổng số tiền nhóm khách thanh toán cho cửa hàng là 188 000 đồng.

Hỏi nhóm khách đó mua bao nhiêu cốc trà sữa mỗi loại?

I. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

1 Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -x + y = 3 & (1) \\ 3x + 2y = 11 & (2) \end{cases}$ (I)

Hãy giải hệ phương trình (I) theo các bước sau:

a) Từ phương trình (1), ta biểu diễn y theo x rồi thế vào phương trình (2) để được phương trình ẩn x.

b) Giải phương trình (ẩn x) vừa nhận được để tìm giá trị của x.

c) Thế giá trị vừa tìm được của x vào biểu thức biểu diễn y theo x ở câu a để tìm giá trị của y. Từ đó, kết luận nghiệm của hệ phương trình (I).

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế theo các bước sau:

Bước 1. *(Thế)* Từ một phương trình của hệ đã cho, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình một ẩn

Bước 2. *(Giải phương trình một ẩn)* Giải phương trình (một ẩn) nhận được ở *Bước 1* để tìm giá trị của ẩn đó

Bước 3. *(Tìm ẩn còn lại và kết luận)* Thế giá trị vừa tìm được của ẩn đó ở *Bước 2* vào biểu thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia ở *Bước 1* để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Ví dụ 1 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 11 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1), ta có: $y = 5 - 2x$ (3)

Thay vào phương trình (2), ta được: $3x - 2(5 - 2x) = 11$ (4)

Giải phương trình (4): $3x - 2(5 - 2x) = 11$

$$3x - 10 + 4x = 11$$

$$7x = 21$$

$$x = 3.$$

Thay giá trị $x = 3$ vào phương trình (3), ta có:

$$y = 5 - 2 . 3 = - 1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x ; y) = (3 ; - 1)$.

1 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ - 2x + 5y = 1. \end{cases}$$

Ví dụ 2 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 12y = - 5 & (1) \\ x + 4y = 3 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ phương trình (2), ta có: $x = 3 - 4y$ (3)

Thay vào phương trình (1), ta được: $3(3 - 4y) + 12y = - 5$ (4)

Giải phương trình (4): $3(3 - 4y) + 12y = - 5$

$$9 - 12y + 12y = - 5$$

$$0y = - 14.$$

Do đó, phương trình (4) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} - 2x + 4y = 5 \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

Ví dụ 3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12x - 4y = - 16 & (1) \\ 3x - y = - 4 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (2), ta có: $y = 3x + 4$ (3)

Thay vào phương trình (1), ta được: $12x - 4(3x + 4) = - 16$ (4)

Giải phương trình (4): $12x - 4(3x + 4) = -16$

$$12x - 12x - 16 = -16$$

$$0x = 0.$$

Do đó, phương trình (4) có vô số nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

3 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8. \end{cases}$$

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình (1) về dạng: $3x - y = -4$. Do đó, hệ phương trình đã cho có thể viết về dạng: $\begin{cases} 3x - y = -4 \\ 3x - y = -4. \end{cases}$

Vì vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho cũng là nghiệm của phương trình $3x - y = -4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x + 4. \end{cases}$

Chú ý: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

II. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

2 Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 7 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$ (II)

a) Các hệ số của y trong hai phương trình (1) và (2) có đặc điểm gì?

b) Cộng từng vế hai phương trình của hệ (II), ta nhận được phương trình nào?

c) Giải phương trình nhận được ở câu b. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình (II).

Ví dụ 4 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 6y = -9 & (1) \\ 3x + 4y = -5 & (2) \end{cases}$

Giải

Trừ từng vế hai phương trình (1) và (2), ta nhận được phương trình:

$$2y = -4, \text{ tức là } y = -2.$$

Thế $y = -2$ vào phương trình (2), ta được phương trình: $3x + 4 . (-2) = -5$ (3)

Giải phương trình (3), ta có: $3x + 4 . (-2) = -5$

$$3x - 8 = -5$$

$$3x = 3$$

$$x = 1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x ; y) = (1 ; -2)$.

4 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x + 2y = 7. \end{cases}$$

Nhận xét: Cách giải hệ phương trình như trên được gọi là giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.

3 Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 5y = -3 & (1) \\ -3x + 7y = -10 & (2) \end{cases}$ (III)

a) Các hệ số của x trong hai phương trình (1) và (2) có bằng nhau (hoặc đối nhau) hay không? Các hệ số của y trong hai phương trình (1) và (2) có bằng nhau (hoặc đối nhau) hay không?

b) Nhân hai vế của phương trình (1) với 3 và nhân hai vế của phương trình (2) với 2, ta được hệ phương trình mới với hệ số của x trong hai phương trình đó có đặc điểm gì?

c) Giải hệ phương trình nhận được ở câu b. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình (III).

Ví dụ 5 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (1) \\ -2x + 3y = -7 & (2) \end{cases}$

Giải

Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 và nhân hai vế của phương trình (2) với 3, ta được

hệ phương trình sau: $\begin{cases} 6x + 4y = 8 & (3) \\ -6x + 9y = -21 & (4) \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình (3) và (4), ta nhận được phương trình: $13y = -13$ (5)

Giải phương trình (5), ta có: $13y = -13$

$y = -1.$

Thế giá trị $y = -1$ vào phương trình (1), ta được phương trình: $3x + 2 . (-1) = 4$ (6)

Giải phương trình (6): $3x + 2 . (-1) = 4$

$3x = 6$

$x = 2.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x ; y) = (2 ; -1)$.

Nhận xét: Cách giải hệ phương trình như trên cũng được gọi là giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.

Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số theo các bước sau:

Bước 1. (*Làm cho hai hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau hoặc đối nhau*) Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

Bước 2. *(Đưa về phương trình một ẩn)* Cộng (hay trừ) từng vế hai phương trình của hệ phương trình nhận được ở *Bước 1* để nhận được một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0, tức là nhận được phương trình một ẩn. Giải phương trình một ẩn đó.

Bước 3. *(Tìm ẩn còn lại và kết luận)* Thế giá trị vừa tìm được ở *Bước 2* vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. Từ đó, ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Ví dụ 6 Một trường trung học cơ sở mua 500 quyển vở để làm phần thưởng cho học sinh. Giá bán của mỗi quyển vở loại thứ nhất, loại thứ hai lần lượt là 8 000 đồng, 9 000 đồng. Hỏi nhà trường đã mua mỗi loại bao nhiêu quyển vở? Biết rằng số tiền nhà trường đã dùng để mua 500 quyển vở đó là 4 200 000 đồng.

Giải

Gọi số quyển vở loại thứ nhất, loại thứ hai lần lượt là x, y ($x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$).

Theo giả thiết, ta có phương trình: $x + y = 500$.

Mặt khác, ta có phương trình: $8\,000x + 9\,000y = 4\,200\,000$, tức là $8x + 9y = 4\,200$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 500 & (1) \\ 8x + 9y = 4\,200 & (2) \end{cases}$

Ta giải hệ phương trình trên:

Từ phương trình (1), ta có: $y = 500 - x$.

Thay vào phương trình (2), ta được: $8x + 9(500 - x) = 4\,200 \quad (3)$

Giải phương trình (3):
$$\begin{aligned} 8x + 9(500 - x) &= 4\,200 \\ 8x + 4\,500 - 9x &= 4\,200 \\ -x + 4\,500 &= 4\,200 \\ x &= 300. \end{aligned}$$

Thay giá trị $x = 300$ vào phương trình $y = 500 - x$, ta có: $y = 500 - 300 = 200$.

Do đó, hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x\,;y) = (300\,;200)$.

Vậy nhà trường đã mua 300 quyển vở loại thứ nhất và 200 quyển vở loại thứ hai.

5 Giải bài toán ở phần mở đầu.

Ví dụ 7 Tìm các hệ số x, y để cân bằng phương trình phản ứng hoá học:

$$x\mathrm{Fe_3O_4} + \mathrm{O_2} \rightarrow y\mathrm{Fe_2O_3}.$$

Giải

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O, ta có: $\begin{cases} 3x = 2y \\ 4x + 2 = 3y. \end{cases}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x = 2y \\ 4x + 2 = 3y \end{cases}$ hay $\begin{cases} 3x - 2y = 0 & (1) \\ 4x - 3y = -2 & (2) \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình (1) với – 4 và nhân hai vế của phương trình (2) với 3, ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases} -12x + 8y = 0 & (3) \\ 12x - 9y = -6 & (4) \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình (3) và (4), ta nhận được phương trình:

$$-y = -6, \text{ tức là } y = 6.$$

Thế giá trị $y = 6$ vào phương trình $3x = 2y$, ta được phương trình: $3x = 2 . 6$ (5)

Giải phương trình (5): $3x = 2 . 6$

$3x = 12$

$x = 4.$

Do đó, hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x ; y) = (4 ; 6)$.

Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $4Fe_3O_4 + O_2 \rightarrow 6Fe_2O_3$.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Ta có thể tìm nghiệm (đúng hoặc gần đúng) của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng cách sử dụng máy tính cầm tay. Mỗi loại máy tính khác nhau có thể có các phím khác nhau. Tuy nhiên, đều có quy tắc chung là phải mở chương trình giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn rồi mới nhập dữ liệu. Chẳng hạn, ấn liên tiếp các phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$.

Ví dụ 8 Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1. \end{cases}$

Giải

Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$
$\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = -13$.

Ấn tiếp phím $\boxed{=}$ ta thấy trên màn hình hiện ra $y = -5$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x ; y) = (-13 ; -5)$.

6 Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + y = 3. \end{cases}$$

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}y = -2 \\ \dfrac{3}{2}x - y = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = 0. \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12x + 18y = -24 \\ -2x - 3y = 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -2x + 6y = 10. \end{cases}$

3. Xác định a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A, B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(1 ; -2)$ và $B(-2 ; -11)$; b) $A(2 ; 8)$ và $B(-4 ; 5)$.

4. Một ca nô đi xuôi dòng một quãng đường 42 km hết 1 giờ 30 phút và ngược dòng quãng đường đó hết 2 giờ 6 phút. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng và tốc độ của dòng nước. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường và tốc độ của dòng nước cũng không đổi khi ca nô chuyển động.

5. Bác Phương chia số tiền 800 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 54 triệu đồng. Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6%/năm và khoản đầu tư thứ hai là 8%/năm. Tính số tiền bác Phương đầu tư cho mỗi khoản.

6. Nhân dịp ngày Giỗ Tổ Hùng Vương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết của một chiếc tủ lạnh và một chiếc máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng. Tuy nhiên, trong dịp này tủ lạnh giảm 40% giá niêm yết và máy giặt giảm 25% giá niêm yết. Vì thế, cô Liên đã mua hai mặt hàng trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá niêm yết của mỗi mặt hàng trên là bao nhiêu?

7. Tìm các hệ số x, y để cân bằng mỗi phương trình phản ứng hoá học sau:

a) $2Fe + yCl_2 \rightarrow xFeCl_3$; b) $xFeCl_3 + Fe \rightarrow yFeCl_2$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Nghiệm của phương trình $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{6}$ là:

A. $x = 3$. B. $x = -3$. C. $x = 6$. D. $x = -6$.

2. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$ là:

A. $(x ; y) = (4 ; 5)$. B. $(x ; y) = (5 ; 4)$.

C. $(x ; y) = (-5 ; -4)$. D. $(x ; y) = (-4 ; -5)$.

3. Giải các phương trình:

a) $(3x + 7)(4x - 9) = 0$; b) $(5x - 0{,}2)(0{,}3x + 6) = 0$;

c) $x(2x - 1) + 5(2x - 1) = 0$; d) $x^2 - 9 - (x + 3)(3x + 1) = 0$;

e) $x^2 - 10x + 25 = 5(5 - x)$; g) $4x^2 = (x - 12)^2$.

4. Giải các phương trình:

a) $\frac{-6}{x + 3} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{x - 2}{2} + \frac{1}{2x} = 0$;

c) $\frac{8}{3x - 4} = \frac{1}{x + 2}$; d) $\frac{x}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2} = 1$;

e) $\frac{3x - 2}{x + 1} = 4 - \frac{x + 2}{x - 1}$; g) $\frac{x^2}{(x - 1)(x - 2)} = 1 - \frac{1}{x - 1}$.

5. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x + 8y = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -3x + 6y = 2. \end{cases}$

6. Một nhóm bạn trẻ cùng tham gia khởi nghiệp và dự định góp vốn là 240 triệu đồng, số tiền góp mỗi người là như nhau. Nếu có thêm 2 người tham gia cùng thì số tiền mỗi người góp giảm đi 4 triệu đồng. Hỏi nhóm bạn trẻ đó có bao nhiêu người?

7. Một nhóm công nhân cần phải cắt cỏ ở một số mặt sân cỏ. Nếu nhóm công nhân đó sử dụng 3 máy cắt cỏ ngồi lái và 2 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 2 990 m^2 cỏ.

Nếu nhóm công nhân đó sử dụng 4 máy cắt cỏ ngồi lái và 3 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 4 060 m^2 cỏ. Hỏi trong 10 phút, mỗi loại máy trên sẽ cắt được bao nhiêu mét vuông cỏ?

Máy cắt cỏ ngồi lái

Máy cắt cỏ đẩy tay

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

8. Tại một buổi biểu diễn nhằm gây quỹ từ thiện, ban tổ chức đã bán được 500 vé. Trong đó có hai loại vé: vé loại I giá 100 000 đồng; vé loại II giá 75 000 đồng. Tổng số tiền thu được từ bán vé là 44 500 000 đồng. Tính số vé bán ra của mỗi loại.

9. Trong một đợt khuyến mãi, siêu thị giảm giá cho mặt hàng A là 20% và mặt hàng B là 15% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B thì phải trả số tiền là 362 000 đồng. Nhưng nếu mua trong khung giờ vàng thì mặt hàng A được giảm giá 30% và mặt hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên phải trả số tiền là 552 000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi mặt hàng A và B.

10. Trong phòng thí nghiệm, cô Linh muốn tạo ra 500 g dung dịch HCl 19% từ hai loại dung dịch HCl 10% và HCl 25%. Hỏi cô Linh cần dùng bao nhiêu gam cho mỗi loại dung dịch đó?

11. Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm *A* đến địa điểm *B* và lại ngược dòng từ địa điểm *B* về địa điểm *A* mất 9 giờ, tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường đó và tốc độ của dòng nước cũng không đổi khi ca nô chuyển động. Biết thời gian ca nô đi xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô đi ngược dòng 4 km và quãng đường *AB* là 160 km. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng và tốc độ của dòng nước.

Chương II

BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: bất đẳng thức; bất phương trình bậc nhất một ẩn.

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

Tìm hiểu trên Internet, bạn Châu được biết một con voi nặng khoảng 5 000 kg, một con hổ nặng khoảng 200 kg, một con tê giác đen nặng khoảng 450 kg.

Con voi

Con hổ

Con tê giác đen

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Để biểu thị con voi nặng hơn cả con hổ và con tê giác đen, bạn Châu đã viết:

$$5\,000 > 200 + 450.$$

I. NHẮC LẠI VỀ THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP SỐ THỰC

Như ta đã biết, trong hai số thực khác nhau luôn có một số nhỏ hơn số kia.

- Nếu số thực a nhỏ hơn số thực b thì ta viết $a < b$ hay $b > a$.
- Số thực lớn hơn 0 gọi là số thực dương.
- Số thực nhỏ hơn 0 gọi là số thực âm.

Ta đã có các kết quả sau:

- Trên trục số nằm ngang, nếu số thực a nằm bên trái số thực b thì $a < b$ hay $b > a$.

- Tổng của hai số thực dương là số thực dương. Tổng của hai số thực âm là số thực âm.
- Với hai số thực a, b, ta có:
  $ab > 0$ thì a, b cùng dương hoặc cùng âm (hay a, b cùng dấu) và ngược lại;
  $ab < 0$ thì a, b trái dấu và ngược lại.
- Với a, b là hai số thực dương, nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Ví dụ 1 So sánh:

a) $3\frac{1}{7}$ và 3,14; b) 4 và $\sqrt{17}$.

Giải

a) Do $3\frac{1}{7} = 3{,}1428...$ nên $3\frac{1}{7} > 3{,}14$.

b) Ta có: $4 = \sqrt{16}$.

Do $16 < 17$ nên $\sqrt{16} < \sqrt{17}$ hay $4 < \sqrt{17}$.

1 So sánh:

a) $5\frac{1}{4}$ và 5,251;

b) $\sqrt{5}$ và $\sqrt{\frac{26}{5}}$.

II. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm

1 Viết hệ thức thể hiện số thực a lớn hơn số thực b.

Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$, $a \le b$, $a \ge b$) là *bất đẳng thức* và gọi a là *vế trái*, b là *vế phải* của bất đẳng thức.

Chú ý

- Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c < d$ (hay $a > b$ và $c > d$) được gọi là hai bất đẳng thức *cùng chiều*.
- Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c > d$ (hay $a > b$ và $c < d$) được gọi là hai bất đẳng thức *ngược chiều*.

Ví dụ 2 Trong các cặp bất đẳng thức sau đây, cặp bất đẳng thức nào là cùng chiều?

a) $3 < 4$ và $11 < 23$.

b) $\sqrt{50} > 7$ và $6 > \sqrt{34}$.

c) $\sqrt{17} > \sqrt{13}$ và $\sqrt{82} < \sqrt{97}$.

Giải

Cặp bất đẳng thức ở các câu a, b là cặp bất đẳng thức cùng chiều. Cặp bất đẳng thức ở câu c là cặp bất đẳng thức ngược chiều.

2 Hãy viết hai cặp bất đẳng thức cùng chiều.

2. Tính chất

2 Cho bất đẳng thức $15 > 14$. Hãy so sánh hiệu $15 - 14$ và 0.

Ta thừa nhận các khẳng định sau:

Với hai số thực a và b, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a - b > 0$. Ngược lại, nếu $a - b > 0$ thì $a > b$.
- Nếu $a < b$ thì $a - b < 0$. Ngược lại, nếu $a - b < 0$ thì $a < b$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a - b \geq 0$. Ngược lại, nếu $a - b \geq 0$ thì $a \geq b$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a - b \leq 0$. Ngược lại, nếu $a - b \leq 0$ thì $a \leq b$.

Nhận xét: Do khẳng định nêu trên, để chứng minh $a > b$, ta có thể chứng minh $a - b > 0$ hoặc chứng minh $b - a < 0$.

Ví dụ 3 Cho $a < b$. Chứng minh:

a) $a + b > 2a$; b) $5a - b < 4a$; c) $a - 1 < b + 6$.

Giải

Do $a < b$ nên $b - a > 0$ và $a - b < 0$.

a) Xét hiệu: $(a + b) - 2a = b - a > 0$. Vậy $a + b > 2a$.

b) Xét hiệu: $(5a - b) - 4a = a - b < 0$. Vậy $5a - b < 4a$.

c) Xét hiệu: $(b + 6) - (a - 1) = (b - a) + 7$.

Do $b - a > 0$ và $7 > 0$ nên $(b - a) + 7 > 0$.

Vậy $(b + 6) - (a - 1) > 0$ hay $a - 1 < b + 6$.

3 Cho $a \geq 2b$. Chứng minh:

a) $2a - 1 \geq a + 2b - 1$;

b) $4b + 4a \leq 5a + 2b$.

Sau đây, ta sẽ tìm hiểu một số tính chất của bất đẳng thức.

3 Cho bất đẳng thức $a > b$ và cho số thực c.

a) Xác định dấu của hiệu: $(a + c) - (b + c)$.

b) Hãy so sánh: $a + c$ và $b + c$.

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Như vậy, nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$ với mọi số thực c.

Tương tự, nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$ với mọi số thực c.

Ví dụ 4 Chứng minh: $\dfrac{2\,024}{2\,023} > \dfrac{2\,025}{2\,024}$.

Giải

Do $\dfrac{1}{2\,023} > \dfrac{1}{2\,024}$ nên $\dfrac{1}{2\,023} + 1 > \dfrac{1}{2\,024} + 1$.

Vậy $\dfrac{2\,024}{2\,023} > \dfrac{2\,025}{2\,024}$.

Ví dụ 5 Cho $a^2 \leq 1$. Chứng minh: $(a + 1)^2 \leq 2a + 2$.

Giải

Do $a^2 \leq 1$ nên $a^2 + (2a + 1) \leq 1 + (2a + 1)$, suy ra

$$a^2 + 2a + 1 \leq 2a + 2.$$

Vậy $(a + 1)^2 \leq 2a + 2$.

4 Chứng minh:

a) $\sqrt{11} - \sqrt{3} > \sqrt{10} - \sqrt{3}$;

b) $(a - 1)^2 \geq 4 - 2a$ với $a^2 \geq 3$.

4 Cho bất đẳng thức $a > b$ và số thực $c > 0$.

a) Xác định dấu của hiệu: $ac - bc$.

b) Hãy so sánh: ac và bc.

Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c mà $c > 0$, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $ac > bc$;
- Nếu $a < b$ thì $ac < bc$;
- Nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$;
- Nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$.

Ví dụ 6 Cho $a < b$. Chứng minh: $2a + 1 < 2b + 1$.

Giải

Do $a < b$ nên $2a < 2b$. Vậy $2a + 1 < 2b + 1$.

5 Cho $a \geq b$. Chứng minh:

$$5b - 2 \leq 5a - 2.$$

5 Cho bất đẳng thức $a > b$ và số thực $c > 0$.

a) Xác định dấu của hiệu: $ac - bc$.

b) Hãy so sánh: ac và bc.

Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho..

Như vậy, với ba số a, b, c mà $c < 0$, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $ac < bc$;
- Nếu $a < b$ thì $ac > bc$;
- Nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$;
- Nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$.

Ví dụ 7 Cho $a < b$. Chứng minh:

a) $-3a + 19 > -3b + 19$;

b) $-2a - 8 > -2b - 8$.

Giải

a) Do $a < b$ nên $-3a > -3b$. Suy ra $-3a + 19 > -3b + 19$.

b) Do $a < b$ nên $-2a > -2b$. Suy ra $-2a - 8 > -2b - 8$.

6 Cho $a \leq 1$. Chứng minh: $(a-1)^2 \geq a^2 - 1$.

6 Cho các bất đẳng thức $a > b$ và $b > c$.

a) Xác định dấu của hiệu: $a - b$, $b - c$, $a - c$.

b) Hãy so sánh: a và c.

Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

Ví dụ 8 Cho $a > b$ và $c > d$. Chứng minh $a + c > b + d$.

Giải

Do $a > b$ nên $a + c > b + c$.

Lại do $c > d$ nên $b + c > b + d$.

Vậy $a + c > b + d$.

7 Cho a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a > b$ và $c > d$. Chứng minh: $ac > bd$.

Ví dụ 9 Một ca nô đi xuôi dòng trong 2 giờ 30 phút. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không quá 40 km/h và tốc độ của dòng nước là 6 km/h. Chứng minh quãng đường ca nô đi được trong thời gian trên không vượt quá 115 km.

Giải

Gọi tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là x (km/h) ($x > 6$). Tốc độ ca nô đi xuôi dòng là $x + 6$ (km/h).

Ta có $x \leq 40$ nên $x + 6 \leq 40 + 6$, tức là $x + 6 \leq 46$.

Gọi s (km) là quãng đường ca nô đi được trong 2 giờ 30 phút = 2,5 giờ.

Ta có: $s = 2,5 \,.\, (x + 6)$ (km). Do $x + 6 \leq 46$ nên $2,5 \,.\, (x + 6) \leq 2,5 \,.\, 46 = 115$ hay $s \leq 115$.

Vậy quãng đường ca nô đi được trong 2 giờ 30 phút không vượt quá 115 km.

Ví dụ 10 Chỉ số khối cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt BMI (tiếng Anh là *Body Mass Index*) cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức sau: $\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$, trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét. Căn cứ vào bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương, một người đàn ông có BMI ≥ 30 sẽ bị béo phì độ II (trung bình) hoặc độ III (nặng), người đó cần phải có các biện pháp tập thể dục, thể thao, thay đổi chế độ dinh dưỡng để có được cơ thể khoẻ mạnh (*Nguồn: Toán 7 – Tập Hai, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017*). Bác Dũng có chiều cao 1,65 m và cân nặng ít nhất 82 kg. Hỏi bác Dũng có bị béo phì độ II hoặc độ III hay không?

Giải

Gọi m (kg) là khối lượng cơ thể của bác Dũng, h (m) là chiều cao của bác Dũng. Theo giả thiết, ta có: $m \geq 82$; $h = 1,65$. Do đó chỉ số BMI của bác Dũng là:

$$\text{BMI} = \frac{m}{(1,65)^2} = \frac{m}{2,7225}.$$

Do $m \geq 82$ nên $\frac{m}{2,7225} \geq \frac{82}{2,7225}$. Vì $\frac{82}{2,7225} \approx 30,11938$ và $30,11938 > 30$ nên $\frac{m}{2,7225} > 30$. Như vậy, bác Dũng có BMI > 30. Vậy bác Dũng có thể đã bị béo phì độ II hoặc độ III.

BÀI TẬP

1. Chứng minh:

a) $\sqrt{29} - \sqrt{6} > \sqrt{28} - \sqrt{6}$;

b) $26,2 < 2a + 3,2 < 26,4$ với $11,5 < a < 11,6$.

2. Chứng minh:

a) $\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}<a^2+\frac{4}{5}$ với $a \neq 0$;

b) $2m + 4 > 2n + 3$ với $m > n$.

3. a) Cho $a > b > 0$. Chứng minh: $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy so sánh: $\frac{2\,022}{2\,023}$ và $\frac{2\,023}{2\,024}$.

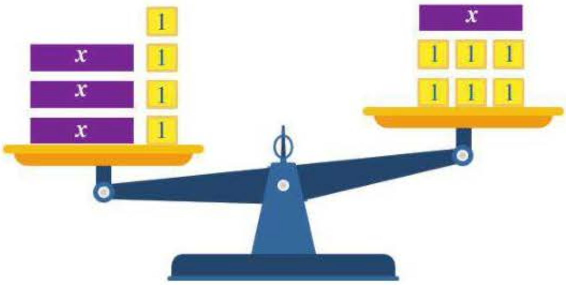
4. Chứng minh: $x^2 + y^2 \geq 2xy$ với mọi số thực x, y.

5. Nồng độ cồn trong máu (tiếng Anh là *Blood Alcohol Content*, viết tắt: BAC) được định nghĩa là tỉ lệ phần trăm lượng rượu (ethyl alcohol hoặc ethanol) trong máu của một người. Chẳng hạn, nồng độ cồn trong máu là 0,05% nghĩa là có 50 mg rượu trong 100 ml máu. Càng uống nhiều rượu bia thì nồng độ cồn trong máu càng cao và càng nguy hiểm khi tham gia giao thông. Nghị định 100/2019/NĐ-CP quy định mức xử phạt vi phạm hành chính đối với người điều khiển xe gắn máy uống rượu bia khi tham gia giao thông như sau:

Mức độ vi phạm	Hình thức xử phạt
Mức 1: Nồng độ cồn trong máu dương và chưa vượt quá 50 mg/100 ml máu	Từ 2 triệu đồng đến 3 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 10 tháng đến 12 tháng
Mức 2: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 50 mg/100 ml máu và chưa vượt quá 80 mg/100 ml máu	Từ 4 triệu đồng đến 5 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 16 tháng đến 18 tháng
Mức 3: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 80 mg/100 ml máu	Từ 6 triệu đồng đến 8 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 22 tháng đến 24 tháng

Giả sử nồng độ cồn trong máu của một người sau khi uống rượu bia được tính theo công thức sau: $y = 0{,}076 - 0{,}008t$, trong đó y được tính theo đơn vị % và t là số giờ tính từ thời điểm uống rượu bia. Hỏi 3 giờ sau khi uống rượu bia, nếu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức nào?

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN



Hình 1

Giả sử mỗi hộp màu tím đặt trên đĩa cân ở *Hình 1* đều có khối lượng là x kg, còn mỗi hộp màu vàng đều có khối lượng là 1 kg. Khi đó, hai biểu thức biểu thị (theo x) tổng khối lượng của các hộp xếp ở đĩa cân bên trái, đĩa cân bên phải lần lượt là $3x + 4$, $x + 6$. Do đĩa cân lệch về bên trái nên ta có hệ thức: $3x + 4 > x + 6$.

Trong toán học, hệ thức $3x + 4 > x + 6$ được gọi là gì?

I. MỞ ĐẦU VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1 Xét hệ thức $3x + 4 > x + 6$ (1) nêu ở bài toán ở phần mở đầu.

a) Các biểu thức $3x + 4$, $x + 6$ có phải là hai biểu thức của cùng một biến x hay không?

b) Khi thay giá trị $x = 5$ vào hệ thức (1), ta có được một khẳng định đúng hay không?

Ta nói rằng hệ thức $3x + 4 > x + 6$ là một bất phương trình với ẩn x.

Giá trị $x = 5$ là một nghiệm của bất phương trình đó.

- Một bất phương trình với ẩn x có dạng $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$) trong đó *vế trái* $A(x)$ và *vế phải* $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.
- Khi thay giá trị $x = a$ vào bất phương trình với ẩn x, ta được một khẳng định đúng thì số a (hay giá trị $x = a$) gọi là *nghiệm* của bất phương trình đó.

Chú ý: Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

Ví dụ 1 Trong các giá trị sau của x, giá trị nào là nghiệm của bất phương trình

$$x + 4 > 2x - 12?$$

a) $x = 1$.

b) $x = 17$.

Giải

a) Khi thay giá trị $x = 1$ vào bất phương trình đã cho, ta được $1 + 4 > 2 . 1 - 12$ là khẳng định đúng. Vậy giá trị $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Khi thay giá trị $x = 17$ vào bất phương trình đã cho, ta được $17 + 4 > 2 . 17 - 12$ là khẳng định không đúng. Vậy giá trị $x = 17$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

1 Cho biết giá trị $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau:

a) $5x + 4 > 4x - 12$;

b) $x^2 - 3x + 5 \leq 4$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Định nghĩa

2 Cho bất phương trình (ẩn x): $5x + 20 > 0$.

Đa thức ở vế trái của bất phương trình đó có bậc bằng bao nhiêu?

Ta có định nghĩa sau:

Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$) với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được gọi là *bất phương trình bậc nhất một ẩn*.

Ví dụ 2 Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $3x - 6 > 0$.

b) $-13x + 20 < 0$.

c) $7y \geq 0$.

d) $2x^2 - 19 \leq 0$.

Giải

Bất phương trình ở các câu a, b, c là bất phương trình bậc nhất một ẩn. Bất phương trình ở câu d không là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

2 Nêu hai ví dụ về bất phương trình bậc nhất ẩn x.

Ví dụ 3 Kiểm tra xem giá trị $x = 5$ có phải là nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất sau hay không?

a) $6x - 29 > 0$. b) $11x - 52 > 0$. c) $x - 2 \le 0$.

Giải

a) Thay $x = 5$, ta có: $6 . 5 - 29 > 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình $6x - 29 > 0$.

b) Thay $x = 5$, ta có: $11 . 5 - 52 > 0$ là khẳng định đúng.

Vậy $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình $11x - 52 > 0$.

c) Thay $x = 5$, ta có: $5 - 2 \le 0$ là khẳng định không đúng.

Vậy $x = 5$ không là nghiệm của bất phương trình $x - 2 \le 0$.

3 Kiểm tra xem $x = -7$ có phải là nghiệm của bất phương trình bậc nhất $2x + 15 \ge 0$ hay không?

2. Cách giải

3 Giải bất phương trình: $4x - 32 < 0$ (2)

Để giải bất phương trình (2), ta làm như sau:

$4x - 32 < 0$

$4x < 32$ ← *Cộng cả hai vế với 32*

$x < 8$. ← *Nhân cả hai vế với* $\frac{1}{4}$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x < 8$.

Một cách tổng quát, ta có:

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a > 0$) được giải như sau:

$ax + b > 0$

$ax > -b$

$x > \frac{-b}{a}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$x > \frac{-b}{a}$.

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a < 0$) được giải như sau:

$ax + b > 0$

$ax > -b$

$x < \frac{-b}{a}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$x < \frac{-b}{a}$.

Chú ý: Các bất phương trình bậc nhất $ax + b < 0$, $ax + b \ge 0$, $ax + b \le 0$ với a, b là hai số đã cho và $a \ne 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 4 Giải các bất phương trình:

a) $-0,3x + 12 > 0$; b) $\frac{3}{4}x - 6 \le 0$.

Giải

a) $-0,3x + 12 > 0$

$$-0,3x > -12$$
$$x < \frac{-12}{-0,3}$$
$$x < 40.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 40$.

b) $\frac{3}{4}x - 6 \le 0$

$$\frac{3}{4}x \le 6$$
$$x \le 6 \cdot \frac{4}{3}$$
$$x \le 8.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \le 8$.

4 Giải các bất phương trình:

a) $-8x - 27 < 0$;

b) $\frac{5}{4}x + 20 \ge 0$.

4 Giải bất phương trình: $3x + 4 > x + 12$.

Để giải bất phương trình trên, ta làm như sau:

$$\begin{aligned}
3x + 4 &> x + 12 \\
3x + 4 - x &> 12 && \leftarrow \text{Cộng cả hai vế với } -x \\
2x &> 12 - 4 && \leftarrow \text{Cộng cả hai vế với } -4 \\
2x &> 8 \\
x &> 4. && \leftarrow \text{Nhân cả hai vế với } \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 4$.

Nhận xét: Bằng cách tương tự như trên, ta có thể giải được các bất phương trình dạng:

$$ax + b > cx + d; \quad ax + b < cx + d; \quad ax + b \ge cx + d; \quad ax + b \le cx + d$$
(với $a \ne c$).

Ví dụ 5 Giải bất phương trình: $3x - (6 + 2x) \le 3(x + 4)$.

Giải

$$3x - (6 + 2x) \le 3(x + 4)$$
$$3x - 6 - 2x \le 3x + 12$$
$$x - 6 \le 3x + 12$$
$$-6 - 12 \le 3x - x$$
$$-18 \le 2x$$
$$x \ge -9.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \ge -9$.

5 Giải bất phương trình:

$2(x - 0,5) - 1,4 \ge 1,5 - (x + 1,2)$.

Ví dụ 6 Tìm chỗ sai trong lời giải sau và giải lại cho đúng:

$$3x - 5 - 2x > 25 + 4x$$
$$3x - 2x - 4x > 25 + 5$$
$$-3x > 30$$
$$x > 30 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$x > -10.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > -10$.

Giải

Khi nhân cả hai vế của bất phương trình $-3x > 30$ với $-\frac{1}{3}$, ta phải đổi chiều bất phương trình vì $-\frac{1}{3} < 0$. Vì vậy, lời giải trên sai ở bước thứ tư. Ta có thể giải lại như sau:

$$3x - 5 - 2x > 25 + 4x$$
$$3x - 2x - 4x > 25 + 5$$
$$-3x > 30$$
$$x < 30 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$x < -10.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -10$.

Ví dụ 7 Bác Ngọc gửi tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Bác Ngọc dự định tổng số tiền nhận được sau khi gửi 12 tháng ít nhất là 21 440 000 đồng. Hỏi bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu để đạt được dự định đó?

Giải

Giả sử bác Ngọc gửi x (đồng) tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ($x > 0$). Khi đó, tổng số tiền bác Ngọc nhận được sau khi gửi 12 tháng là:

$$x + 7,2\% \,.\, x = \left(1 + \frac{7,2}{100}\right)x = \frac{1\,072}{1\,000}x = \frac{134}{125}x \text{ (đồng)}.$$

Theo giả thiết, ta có: $\frac{134}{125}x \geq 21\,440\,000$.

Giải bất phương trình trên, ta có:

$$\frac{134}{125}x \geq 21\,440\,000$$
$$x \geq 21\,440\,000 \cdot \frac{125}{134}$$

$x \geq 20\ 000\ 000.$

Vậy bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là 20 triệu đồng để đạt được dự định.

Ví dụ 8 Tổng chi phí của một doanh nghiệp sản xuất áo sơ mi là 410 triệu đồng/tháng. Giá bán của mỗi chiếc áo sơ mi là 350 nghìn đồng. Hỏi trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất bao nhiêu chiếc áo sơ mi để thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng sau 1 năm?

Giải

Giả sử trung bình mỗi tháng doanh nghiệp bán được x chiếc áo sơ mi ($x \in \mathbb{N}^*$).

Lợi nhuận của doanh nghiệp sau 12 tháng là:

$$12 \cdot (350\ 000x - 410\ 000\ 000) \text{ (đồng)}.$$

Do đó, để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng thì

$$12 \cdot (350\ 000x - 410\ 000\ 000) \geq 1\ 380\ 000\ 000.$$

Giải bất phương trình trên, ta có:

$$12 \cdot (350\ 000x - 410\ 000\ 000) \geq 1\ 380\ 000\ 000$$

$$350\ 000x - 410\ 000\ 000 \geq 115\ 000\ 000$$

$$350\ 000x \geq 115\ 000\ 000 + 410\ 000\ 000$$

$$350\ 000x \geq 525\ 000\ 000$$

$$x \geq \frac{525\ 000\ 000}{350\ 000}$$

$$x \geq 1\ 500.$$

Vậy trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất 1 500 chiếc áo sơ mi để doanh nghiệp thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng sau 1 năm.

BÀI TẬP

1. Kiểm tra xem số nào là nghiệm của mỗi bất phương trình tương ứng sau đây.

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$ với $x = -3$; $x = 1,5$.

b) $2 - 2x < 3x + 1$ với $x = \frac{2}{5}$; $x = \frac{1}{5}$.

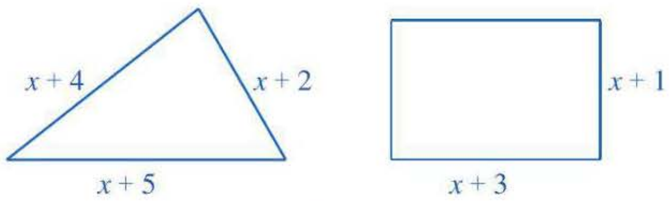
2. Giải các bất phương trình:

a) $2x + 6 > 1$; b) $0,6x + 2 > 6x + 9$; c) $1,7x + 4 \geq 2 + 1,5x$.

3. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{8-3x}{2} - x < 5$; b) $3 - 2x - \frac{6+4x}{3} > 0$; c) $0{,}7x + \frac{2x-4}{3} - \frac{x}{6} > 1$.

4. Tìm $x > 0$ sao cho ở *Hình 2* chu vi của hình tam giác lớn hơn chu vi của hình chữ nhật:



Hình 2

5. Một kho chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi x là số ngày xuất xi măng của kho đó. Tìm x sao cho khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn sau x ngày xuất hàng.

TÌM TÒI – MỞ RỘNG **(Đọc thêm)**

Quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân đối với bất phương trình

Tương tự như bất đẳng thức đối với bất phương trình, ta cũng có các quy tắc sau:

- *Quy tắc chuyển vế:* Trong một bất phương trình, ta có thể chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia và đổi dấu số hạng đó.
- *Quy tắc nhân với một số* (gọi tắt là *quy tắc nhân*): Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:

– Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương;

– Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

Chú ý: Nhân cả hai vế với $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ cũng có nghĩa là chia cả hai vế cho a. Do đó quy tắc nhân còn có thể phát biểu như sau:

Khi chia hai vế của bất phương trình cho cùng một số khác 0, ta phải:

– Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương;

– Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

1. Cho bất đẳng thức $a > b$. Kết luận nào sau đây là **không** đúng?

A. $2a > 2b$. B. $-a < -b$. C. $a - 3 < b - 3$. D. $a - b > 0$.

2. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a > 0$ có nghiệm là $x < \frac{-b}{a}$.

b) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm là $x < \frac{-b}{a}$.

c) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a < 0$ có nghiệm là $x > \frac{-b}{a}$.

d) Bất phương trình $ax + b < 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm là $x > \frac{-b}{a}$.

3. Chứng minh:

a) Nếu $a > 5$ thì $\frac{a-1}{2} - 2 > 0$;

b) Nếu $b > 7$ thì $4 - \frac{b+3}{5} < 2$;

4. Cho $4,2 < a < 4,3$. Chứng minh: $13,8 < 3a + 1,2 < 14,1$.

5. Cho $a \geq 2$. Chứng minh:

a) $a^2 \geq 2a$; b) $(a+1)^2 \geq 4a + 1$.

6. Chứng minh nửa chu vi của một tam giác lớn hơn độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

7. Giải các bất phương trình:

a) $5 + 7x \leq 11$; b) $2,5x - 6 > 9 + 4x$;

c) $2x - \frac{x-7}{3} < 9$; d) $\frac{3x+5}{2} + \frac{x}{5} - 0,2x \geq 4$.

8. Để đổi từ độ Fahrenheit (độ F) sang độ Celsius (độ C), người ta dùng công thức sau:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

a) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95 °F. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ C?

b) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 36 °C. Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ F?

9. Một nhà máy sản xuất xi măng mỗi ngày đều sản xuất được 100 tấn xi măng. Lượng xi măng tồn trong kho của nhà máy là 300 tấn. Hỏi nhà máy đó cần ít nhất bao nhiêu ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho)?

10. Đến ngày 31/12/2022, gia đình bác Hoa đã tiết kiệm được số tiền là 250 triệu đồng. Sau thời điểm đó, mỗi tháng gia đình bác Hoa đều tiết kiệm được 10 triệu đồng. Gia đình bác Hoa dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng gia đình bác Hoa có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được?

11. Chỉ số khối cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt BMI (tiếng Anh là *Body Mass Index*) cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức sau: $\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$, trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét.

Dưới đây là bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương:

Nam	Nữ
BMI < 20: Gầy 20 ≤ BMI < 25: Bình thường 25 ≤ BMI < 30: Béo phì độ I (nhẹ) 30 ≤ BMI < 40: Béo phì độ II (trung bình) 40 ≤ BMI: Béo phì độ III (nặng)	BMI < 18: Gầy 18 ≤ BMI < 23: Bình thường 23 ≤ BMI < 30: Béo phì độ I (nhẹ) 30 ≤ BMI < 40: Béo phì độ II (trung bình) 40 ≤ BMI: Béo phì độ III (nặng)

a) Giả sử một người đàn ông có chiều cao 1,68 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

b) Giả sử một người phụ nữ có chiều cao 1,6 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 1
LÀM QUEN VỚI BẢO HIỂM

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Một số khái niệm cơ bản về bảo hiểm

Bảo hiểm từ lâu đã gắn liền với cuộc sống con người. Hiểu một cách đơn giản, bảo hiểm là một hoạt động qua đó một cá nhân có quyền được hưởng trợ cấp bảo hiểm nhờ vào một khoản đóng góp cho mình hoặc cho người thứ ba trong trường hợp xảy ra rủi ro.

Có hai loại hình bảo hiểm:

- *Bảo hiểm bắt buộc* là loại bảo hiểm do pháp luật quy định về điều kiện bảo hiểm, mức phí bảo hiểm, số tiền bảo hiểm tối thiểu mà tổ chức, cá nhân tham gia bảo hiểm và doanh nghiệp bảo hiểm có nghĩa vụ thực hiện.
- *Bảo hiểm tự nguyện* là loại hình bảo hiểm mà người tham gia được quyền lựa chọn công ty bảo hiểm, sản phẩm bảo hiểm, mức phí và quyền lợi bảo hiểm.

Sau đây, chúng ta sẽ làm quen với bảo hiểm xã hội và bảo hiểm y tế.

2. Bảo hiểm xã hội

a) Bảo hiểm xã hội là sự bảo đảm thay thế hoặc bù đắp một phần thu nhập của người lao động khi họ bị giảm hoặc mất thu nhập do ốm đau, thai sản, tai nạn lao động, bệnh nghề nghiệp, hết tuổi lao động hoặc chết, trên cơ sở đóng vào quỹ bảo hiểm xã hội.

b) Có hai loại hình bảo hiểm xã hội:

- *Bảo hiểm xã hội bắt buộc* là loại hình bảo hiểm xã hội do Nhà nước tổ chức mà người lao động và người sử dụng lao động phải tham gia.
- *Bảo hiểm xã hội tự nguyện* là loại hình bảo hiểm xã hội do Nhà nước tổ chức mà người tham gia được lựa chọn mức đóng, phương thức đóng phù hợp với thu nhập của mình và Nhà nước có chính sách hỗ trợ tiền đóng bảo hiểm xã hội để người tham gia hưởng chế độ hưu trí và tử tuất.

c) Thời gian đóng bảo hiểm xã hội là thời gian được tính từ khi người lao động bắt đầu đóng bảo hiểm xã hội cho đến khi dừng đóng. Trường hợp người lao động đóng bảo hiểm xã hội không liên tục thì thời gian đóng bảo hiểm xã hội là tổng thời gian đã đóng bảo hiểm xã hội.

d) Người lao động có nhiều quyền lợi khi tham gia bảo hiểm xã hội, như: nhận lương hưu và trợ cấp bảo hiểm xã hội, được hưởng bảo hiểm y tế và các chế độ chăm sóc sức khỏe.

(*Nguồn: Luật bảo hiểm xã hội – Luật số: 58/2014/QH13*)

3. Bảo hiểm y tế

a) Bảo hiểm y tế là hình thức bảo hiểm được áp dụng trong lĩnh vực chăm sóc sức khỏe, không vì mục đích lợi nhuận, do Nhà nước tổ chức thực hiện và các đối tượng có trách nhiệm tham gia theo quy định của pháp luật.

b) Một số nguyên tắc bảo hiểm y tế là:

- Bảo đảm chia sẻ rủi ro giữa những người tham gia bảo hiểm y tế.
- Mức đóng bảo hiểm y tế được xác định theo tỉ lệ phần trăm của tiền lương, tiền công, tiền lương hưu, tiền trợ cấp hoặc mức lương tối thiểu của khu vực hành chính (sau đây gọi chung là mức lương tối thiểu).
- Mức hưởng bảo hiểm y tế theo mức độ bệnh tật, nhóm đối tượng trong phạm vi quyền lợi của người tham gia bảo hiểm y tế.

c) Tham gia bảo hiểm y tế bao gồm nhiều loại đối tượng, như: người lao động; trẻ em dưới 6 tuổi; học sinh, sinh viên; ...

d) Thẻ bảo hiểm y tế được cấp cho người tham gia bảo hiểm y tế và làm căn cứ để được hưởng các quyền lợi về bảo hiểm y tế theo quy định của pháp luật. Mỗi người chỉ được cấp một thẻ bảo hiểm y tế và có giá trị sử dụng kể từ ngày đóng bảo hiểm y tế.

e) Người tham gia bảo hiểm y tế có những *nghĩa vụ* sau:

- Đóng bảo hiểm y tế đầy đủ, đúng thời hạn.
- Sử dụng thẻ bảo hiểm y tế đúng mục đích, không cho người khác mượn thẻ bảo hiểm y tế.
- Chấp hành các quy định và hướng dẫn của tổ chức bảo hiểm y tế, cơ sở khám bệnh, chữa bệnh khi đến khám bệnh, chữa bệnh.
- Thanh toán chi phí khám bệnh, chữa bệnh cho cơ sở khám bệnh, chữa bệnh ngoài phần chi phí do quỹ bảo hiểm y tế chi trả.

g) Mức đóng bảo hiểm y tế được quy định như sau:

- Đối với người đi làm:

Mức đóng bảo hiểm y tế hàng tháng tối đa = 1,5% . 20 . *Mức lương cơ sở*.

Như vậy mức đóng bảo hiểm y tế hàng tháng tối đa cho người đi làm tính từ ngày 01/7/2023 là:

$$1,5\% \,.\, 20 \,.\, 1\,800\,000 = 540\,000 \text{ (đồng/tháng)}.$$

• Đối với học sinh, sinh viên:

Mức đóng bảo hiểm y tế hàng năm = 70% . 4,5% . *Mức lương cơ sở* . 12

Như vậy mức đóng bảo hiểm y tế hàng năm cho học sinh, sinh viên tính từ ngày 01/7/2023 là:

$$70\% \,.\, 4,5\% \,.\, 1\,800\,000 \,.\, 12 = 680\,400 \text{ (đồng/năm)}.$$

(*Nguồn: Luật bảo hiểm y tế – Luật số: 25/2008/QH12 và Luật sửa đổi, bổ sung một số điều của luật bảo hiểm y tế – Luật số: 46/2014/QH13*)

Ví dụ 1 Anh Chính là giáo viên và có hai con đang học cấp trung học cơ sở. Căn cứ vào mức đóng bảo hiểm y tế được quy định từ ngày 01/7/2023, tính số tiền bảo hiểm y tế tối đa mà anh Chính và hai con có thể đóng hàng năm.

Giải

Do mức đóng bảo hiểm y tế hàng tháng tối đa cho anh Chính là 540 000 đồng/tháng nên mức đóng bảo hiểm y tế hàng năm tối đa cho anh Chính là:

$$540\,000 \,.\, 12 = 6\,480\,000 \text{ (đồng)}.$$

Do hai con của anh Chính đang học cấp trung học cơ sở nên mức đóng bảo hiểm y tế hàng năm cho hai người con đó là:

$$680\,400 \,.\, 2 = 1\,360\,800 \text{ (đồng)}$$

Vậy số tiền bảo hiểm y tế tối đa mà anh Chính và hai con có thể đóng hàng năm là:

$$6\,480\,000 + 1\,360\,800 = 7\,840\,800 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 2 Một công ty dự định chi 650 triệu đồng để đóng bảo hiểm y tế năm 2024 cho nhân viên theo mức đóng bảo hiểm y tế hàng tháng tối đa. Hỏi công ty có thể đóng được bảo hiểm y tế ở mức đó cho nhiều nhất là bao nhiêu nhân viên? Biết rằng theo Điều 7, Nghị định 146/2018/NĐ-CP, tính từ ngày 01/7/2023, công ty có thể đóng mức bảo hiểm y tế hàng tháng tối đa cho một nhân viên là:

$$3\% \,.\, 20 \,.\, 1\,800\,000 = 1\,080\,000 \text{ (đồng/tháng)}.$$

Giải

Gọi x là số nhân viên mà công ty có thể đóng được bảo hiểm y tế ở mức đó cho năm 2024 ($x \in \mathbb{N}^*$). Do số tiền công ty có thể đóng bảo hiểm y tế tối đa năm 2024 cho một nhân viên là 1 080 000 . 12 = 12 960 000 (đồng) nên $12\,960\,000x \le 650\,000\,000$ hay $x \le \dfrac{650\,000\,000}{12\,960\,000}$. Mà $\dfrac{650\,000\,000}{12\,960\,000} \approx 50,2$, suy ra $x \le 50$. Vậy công ty có thể đóng được bảo hiểm y tế ở mức đó cho nhiều nhất là 50 nhân viên.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

Thực hành tính toán số tiền bảo hiểm y tế tối đa mà một nhóm người cần đóng hàng năm (chỉ xét các đối tượng: người đi làm; học sinh, sinh viên).

Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện nhiệm vụ sau: Chia lớp thành những nhóm học sinh và giao nhiệm vụ các nhóm tìm hiểu thông tin về bảo hiểm xã hội và bảo hiểm y tế ở nước ta, đặc biệt là cách tính số tiền bảo hiểm y tế tối đa mà cá nhân cần đóng hàng năm.

2. Phần thực hiện

2 Mỗi nhóm học sinh trao đổi, thảo luận để xác định rõ nhiệm vụ của nhóm và thực hành tính toán số tiền bảo hiểm y tế tối đa mà một nhóm người cần đóng hàng năm.

Nhiệm vụ: Đưa ra tình huống giả định về một nhóm người, tính số tiền bảo hiểm y tế tối đa mà những người đó cần đóng hàng năm.

3. Phần tổng kết

3 Làm việc chung cả lớp để thực hiện các nhiệm vụ sau:

– Các nhóm báo cáo về tính số tiền bảo hiểm y tế tối đa mà nhóm người giả định trên cần đóng hàng năm. Từ đó, cả lớp góp ý cho báo cáo của mỗi nhóm.

– Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá: đánh giá trong dạy học dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.

– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.

– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

Chương III

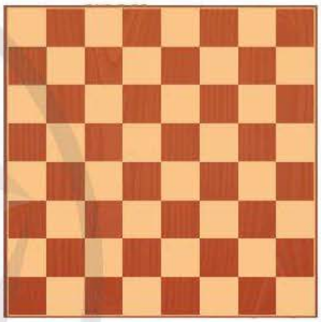
CĂN THỨC

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: căn bậc hai và căn bậc ba của số thực; một số phép tính về căn bậc hai của số thực; căn thức bậc hai và căn thức bậc ba của biểu thức đại số; một số phép biến đổi căn thức bậc hai của biểu thức đại số.

§1. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA CỦA SỐ THỰC

Một bàn cờ vua có dạng hình vuông gồm 64 ô vuông nhỏ (*Hình 1*).

Hỏi mỗi cạnh của bàn cờ gồm bao nhiêu cạnh ô vuông nhỏ?



Hình 1

I. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC KHÔNG ÂM

1 Tìm các số thực x sao cho:

a) $x^2 = 9$;

b) $x^2 = 25$.

Ta có: $3^2 = 9$; $(-3)^2 = 9$.

Ta nói 3 và – 3 là các căn bậc hai của 9.

Căn bậc hai của một số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.

Ví dụ 1

a) Số 2 và – 2 có phải là căn bậc hai của 4 hay không?

b) Số 0,7 và – 0,7 có phải là căn bậc hai của 0,49 hay không?

c) Số $\frac{1}{9}$ và $-\frac{1}{9}$ có phải là căn bậc hai của $\frac{1}{3}$ hay không?

Giải

a) Ta thấy: $2^2 = 4$ và $(-2)^2 = 4$ nên số 2 và – 2 là căn bậc hai của 4.

b) Ta thấy: $(0,7)^2 = 0,49$ và $(-0,7)^2 = 0,49$ nên số 0,7 và – 0,7 là căn bậc hai của 0,49.

c) Vì $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} \neq \frac{1}{3}$ và $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81} \neq \frac{1}{3}$ nên các số $\frac{1}{9}$ và $-\frac{1}{9}$ không phải là căn bậc hai của $\frac{1}{3}$.

Chú ý

- Khi $a > 0$, số a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$; số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$. Ta gọi $\sqrt{a}$ là *căn bậc hai số học* của a.
- Căn bậc hai của số 0 bằng 0.
- Số âm không có căn bậc hai.

Ví dụ 2

a) Số 8 và – 8 có phải là căn bậc hai của 64 hay không?

b) Từ đó, hãy sử dụng kí hiệu căn bậc hai để biểu thị giá trị 8 và giá trị – 8.

Giải

a) Ta thấy: $8^2 = 64$ và $(-8)^2 = 64$ nên số 8 và – 8 là căn bậc hai của 64.

b) Ta có: $\sqrt{64} = 8$ và $-\sqrt{64} = -8$.

Ví dụ 3 Chỉ ra câu trả lời đúng trong các câu trả lời sau:

a) $\sqrt{49} = 7$; b) $-\sqrt{0,25} = -0,5$; c) $\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$.

Giải

a) Do 7 là căn bậc hai số học của 49 nên $\sqrt{49} = 7$ là câu trả lời đúng.

b) Do 0,5 là căn bậc hai số học của 0,25 nên $-\sqrt{0,25} = -0,5$ là câu trả lời đúng.

c) Do $-\frac{1}{4}$ không phải là căn bậc hai số học của $\frac{1}{16}$ nên $\sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}$ là câu trả lời sai.

Ví dụ 4 Tìm:

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; b) $-\sqrt{0,01}$; c) Căn bậc hai của 144.

Giải

a) Do $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ nên $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$.

b) Vì $(0,1)^2 = 0,01$ nên $-\sqrt{0,01} = -0,1$.

c) Do $12^2 = (-12)^2 = 144$ nên căn bậc hai của 144 có hai giá trị là 12 và – 12. Cụ thể, ta có: $\sqrt{144} = 12$ và $-\sqrt{144} = -12$.

1 Tìm căn bậc hai của:

$256; \quad 0,04; \quad \frac{121}{36}$.

Ví dụ 5 So sánh:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$; b) 3 và $\sqrt{10}$.

Giải

a) Do $3 < 5$ nên $\sqrt{3} < \sqrt{5}$.

b) Ta có: $3 = \sqrt{9}$. Do $9 < 10$ nên $\sqrt{9} < \sqrt{10}$ hay $3 < \sqrt{10}$.

Với hai số a, b không âm, ta có:

- Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;
- Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

Ví dụ 6 Trong một thí nghiệm, một vật rơi tự do từ độ cao 80 m so với mặt đất. Biết quãng đường dịch chuyển được của vật đó tính theo đơn vị mét được cho bởi công thức $h = 5t^2$ với t là thời gian vật đó rơi, tính theo đơn vị giây ($t > 0$). Hỏi sau bao nhiêu lâu kể từ lúc rơi thì vật đó chạm đất?

Giải

Khi vật chạm đất thì quãng đường dịch chuyển được của vật đó là 80 m.

Ta có: $80 = 5t^2$ hay $t^2 = 16$. Do đó $t = \sqrt{16} = 4$ hoặc $t = -\sqrt{16} = -4$.

Vì $t > 0$ nên $t = 4$. Vậy sau 4 giây kể từ lúc rơi thì vật đó chạm đất.

II. CĂN BẬC BA

2 Bạn Loan cần làm một chiếc hộp giấy có dạng hình lập phương với thể tích là 64 dm^3. Hỏi cạnh của chiếc hộp giấy đó là bao nhiêu decimét? Biết rằng độ dày của tờ giấy để làm hộp là không đáng kể.

Ta có: $4^3 = 64$.

Ta nói 4 là căn bậc ba của 64.

Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$.

Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a.$

Ví dụ 7

a) Số 2 có phải là căn bậc ba của 8 hay không?

b) Số – 5 có phải là căn bậc ba của – 125 hay không?

c) Số 0,1 có phải là căn bậc ba của 0,01 hay không?

Giải

a) Ta thấy: $2^3 = 8$ nên số 2 là căn bậc ba của 8.

b) Ta có: $(-5)^3 = -125$ nên số – 5 là căn bậc ba của – 125.

c) Vì $(0,1)^3 = 0,001 \neq 0,01$ nên số 0,1 không phải là căn bậc ba của 0,01.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng: Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.

Ví dụ 8 Tìm giá trị của:

a) $\sqrt{1\,000}$; b) $\sqrt[3]{-0,064}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{1\,000} = 10$. b) $\sqrt[3]{-0,064} = -0,4$. c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}} = \dfrac{1}{5}$.

2 Tìm giá trị của:

a) $\sqrt[3]{-8}$;

b) $\sqrt[3]{0,125}$;

c) $\sqrt[3]{0}$.

Ví dụ 9 So sánh:

a) $\sqrt[3]{-11,35}$ và $\sqrt[3]{-13,12}$;

b) 3 và $\sqrt[3]{27\dfrac{1}{4}}$.

Giải

a) Do $-11,35 > -13,12$ nên $\sqrt[3]{-11,35} > \sqrt[3]{-13,12}$.

b) Ta có: $3 = \sqrt[3]{27}$. Do $27 < 27\dfrac{1}{4}$ nên $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{27\dfrac{1}{4}}$ hay $3 < \sqrt[3]{27\dfrac{1}{4}}$.

Với hai số a, b, ta có:

- Nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$;
- Nếu $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ thì $a < b$.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

3 Ta có thể tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc hai, căn bậc ba của một số hữu tỉ bằng máy tính cầm tay.

• Để tính căn bậc hai của một số hữu tỉ dương, ta sử dụng phím $\boxed{\sqrt{\square}}$.

• Để tính căn bậc ba của một số hữu tỉ, ta sử dụng liên tiếp hai phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt{\square}}$.

Chẳng hạn, để tính $\sqrt{5}$, $-\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{343}$, $\sqrt[3]{-215}$, ta làm như sau:

Phép tính	**Nút ấn**	**Kết quả**
$\sqrt{5}$	$\boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	2,236067977
$-\sqrt{11}$	$\boxed{-}\ \boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$	– 3,31662479
$\sqrt[3]{343}$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$	7
$\sqrt[3]{-215}$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	– 5,990726415

Ví dụ 10 Dùng máy tính cầm tay để tính giá trị (đúng hoặc gần đúng):

a) $\sqrt{0,35}$; b) $\sqrt[3]{-512}$.

Giải

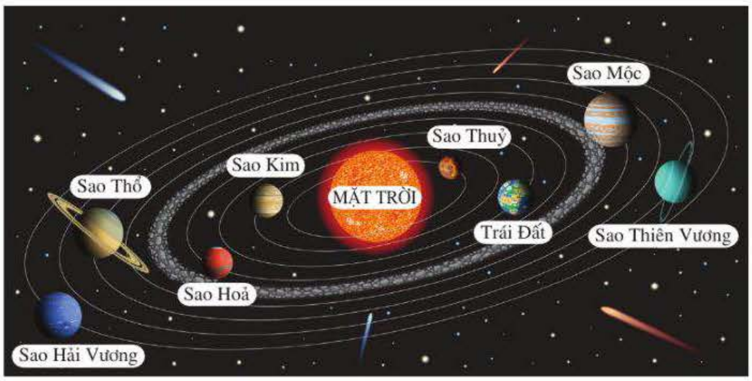
Ta có:

Phép tính	**Nút ấn**	**Kết quả**
$\sqrt{0,35}$	$\boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$	0,5916079783
$\sqrt[3]{-512}$	$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt{\square}}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$	– 8

3 Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị (đúng hoặc gần đúng) trong mỗi trường hợp sau:

a) $\sqrt{2,37}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{-7}{11}}$.

Ví dụ 11 Định luật thứ ba của Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong hệ Mặt Trời cho biết khoảng cách trung bình d (triệu dặm) từ một hành tinh quay xung quanh Mặt Trời đến Mặt Trời được tính bởi công thức: $d = \sqrt[3]{6t^2}$ với t (ngày Trái Đất) là thời gian hành tinh đó quay quanh Mặt Trời đúng một vòng (*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*).



Hệ Mặt Trời

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

a) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời trong khoảng 365 ngày Trái Đất. Hỏi khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời là bao nhiêu triệu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? Biết 1 dặm = 1,609344 km.

b) Một năm Sao Hoả dài bằng 687 ngày trên Trái Đất, nghĩa là Sao Hoả quay xung quanh Mặt Trời đúng một vòng với thời gian bằng 687 ngày Trái Đất. Hỏi khoảng cách trung bình giữa Sao Hoả và Mặt Trời là bao nhiêu triệu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Giải

a) Thay $t = 365$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta có:

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} = \sqrt[3]{799\,350} \approx 92{,}807 \text{ (triệu dặm).}$$

Đổi: 92,807 triệu dặm $\approx$ 149,4 triệu km.

Vậy khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời là khoảng 149,4 triệu km.

b) Thay $t = 687$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta có:

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} = \sqrt[3]{2\,831\,814} \approx 141{,}478 \text{ (triệu dặm).}$$

Đổi: 141,478 triệu dặm $\approx$ 227,7 triệu km.

Vậy khoảng cách trung bình giữa Sao Hoả và Mặt Trời là khoảng 227,7 triệu km.

BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Mỗi số dương có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

b) Số âm không có căn bậc hai.

c) Số âm không có căn bậc ba.

d) Căn bậc ba của một số dương là số dương.

e) Căn bậc ba của một số âm là số âm.

2. Tìm căn bậc hai của:

a) 289; b) 0,81; c) 1,69; d) $\frac{49}{121}$.

3. Tìm căn bậc ba của:

a) 1 331; b) – 27; c) – 0,216; d) $\frac{8}{343}$.

4. So sánh:

a) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ và $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$;

b) $\sqrt{0,48}$ và 0,7;

c) $\sqrt[3]{-45}$ và $\sqrt[3]{-50}$;

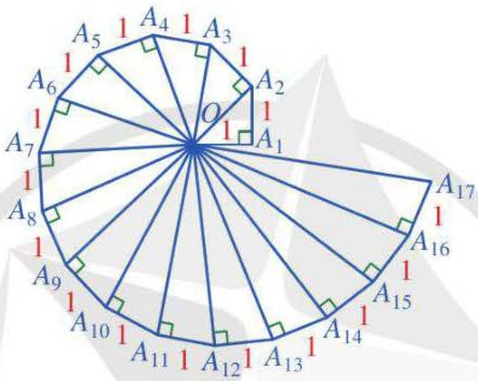
d) – 10 và $\sqrt[3]{-999}$.

5. Chứng minh:

a) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1$;

b) $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}+1\right]=3$.

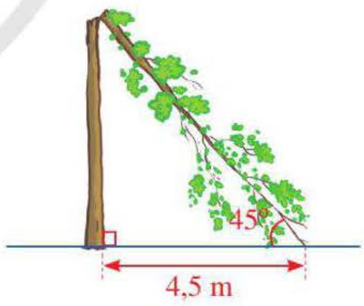
6. Tính độ dài cạnh huyền của mỗi tam giác vuông trong *Hình 2*.



Hình 2

7. Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng 53 052 m^2 (*Nguồn: https://vi.wikipedia.org*). Hỏi độ dài cạnh nền của kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

8. Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh hoạ ở *Hình 3*). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là 4,5 m. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 3

9. Thể tích của một khối bê tông có dạng hình lập phương là khoảng 220 348 cm^3. Hỏi độ dài cạnh của khối bê tông đó là bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

§2. MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC

Bóng rổ
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Khi một quả bóng rổ được thả xuống, nó sẽ nảy trở lại, nhưng do tiêu hao năng lượng nên nó không đạt được chiều cao như lúc bắt đầu. Hệ số phục hồi của quả bóng rổ được tính theo công thức $C_R = \sqrt{\frac{h}{H}}$, trong đó H là độ cao mà quả bóng được thả rơi và h là độ cao mà quả bóng bật lại.

(*Nguồn: J. Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017*)

Một quả bóng rổ rơi từ độ cao 3,24 m và bật lại độ cao 2,25 m. Làm thế nào để viết hệ số phục hồi của quả bóng đó dưới dạng phân số?

I. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

1 So sánh:

a) $\sqrt{4^2}$ và $|4|$; b) $\sqrt{(-5)^2}$ và $|-5|$.

Với mọi số a, ta có: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ví dụ 1 Tính:

a) $\sqrt{13^2}$; b) $\sqrt{(-8)^2}$; c) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$.

Giải

a) $\sqrt{13^2} = |13| = 13$.

b) $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.

c) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \left|\sqrt{3}-2\right|$.

Do $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ hay $\sqrt{3} < 2$ nên $\sqrt{3} - 2 < 0$. Vì thế, ta có: $\left|\sqrt{3}-2\right| = 2 - \sqrt{3}$.

Vậy $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \left|\sqrt{3}-2\right| = 2 - \sqrt{3}$.

1 Tính:

a) $\sqrt{35^2}$;

b) $\sqrt{\left(-\frac{7}{9}\right)^2}$;

c) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$.

II. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

2 So sánh: $\sqrt{4 \,.\, 25}$ và $\sqrt{4} \,.\, \sqrt{25}$.

Với hai số không âm a, b, ta có: $\sqrt{a \,.\, b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$.

Chú ý: Quy tắc trên có thể mở rộng cho tích có nhiều thừa số không âm.

Ví dụ 2 Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{81 \,.\, 49}$; b) $\sqrt{5} \,.\, \sqrt{20}$; c) $\sqrt{1{,}3} \,.\, \sqrt{10} \,.\, \sqrt{13}$.

Giải

a) $\sqrt{81 \,.\, 49} = \sqrt{81} \,.\, \sqrt{49} = 9 \,.\, 7 = 63$.

b) $\sqrt{5} \,.\, \sqrt{20} = \sqrt{5 \,.\, 20} = \sqrt{100} = 10$.

c) $\sqrt{1{,}3} \,.\, \sqrt{10} \,.\, \sqrt{13} = \sqrt{1{,}3 \,.\, 10 \,.\, 13} = \sqrt{13 \,.\, 13} = 13$.

2 Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{25 \,.\, 121}$;

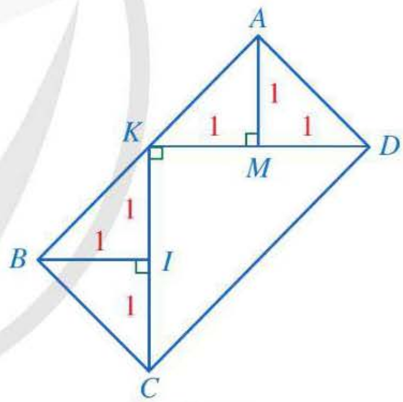
b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{9}{8}}$;

c) $\sqrt{10} \,.\, \sqrt{5{,}2} \,.\, \sqrt{52}$.

Ví dụ 3 Bạn Lan cắt một hình chữ nhật $ABCD$ thành những hình tam giác như *Hình 4* (đơn vị tính theo centimét).

a) Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$.

b) Sau đó, bạn Lan muốn cắt một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật $ABCD$. Tính độ dài cạnh của hình vuông đó.



Hình 4

Giải

a) Trong tam giác vuông cân BIC, ta có:

$BC^2 = BI^2 + CI^2$ (theo định lí Pythagore).

Suy ra $BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Do đó $BC = \sqrt{2}$ (cm).

Ta có: $CK = 1 + 1 = 2$ (cm); $DK = 1 + 1 = 2$ (cm).

Trong tam giác vuông cân CKD, ta có: $CD^2 = CK^2 + DK^2$ (theo định lí Pythagore).

Suy ra $CD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Do đó $CD = \sqrt{8}$ (cm).

Vậy hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = BC = \sqrt{2}$ cm, $AB = CD = \sqrt{8}$ cm.

b) Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$BC \,.\, CD = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{8} = \sqrt{2 \,.\, 8} = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Gọi độ dài cạnh của hình vuông là x (cm) với $x > 0$.

Ta có: $x^2 = 4$. Do $x > 0$ nên $x = \sqrt{4}$ hay $x = 2$.

Vậy độ dài cạnh của hình vuông là 2 cm.

III. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

3 So sánh: $\sqrt{\frac{16}{25}}$ và $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

Với $a \geq 0, b > 0$, ta có: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Ví dụ 4 Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; b) $\sqrt{\frac{1,69}{0,25}}$; c) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$.

b) $\sqrt{\frac{1,69}{0,25}} = \frac{\sqrt{1,69}}{\sqrt{0,25}} = \frac{1,3}{0,5} = 2,6$.

c) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$.

3 Trong tình huống nêu ra ở phần mở đầu, viết hệ số phục hồi của quả bóng rổ dưới dạng phân số.

IV. ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN BẬC HAI

4 So sánh:

a) $\sqrt{3^2 . 11}$ và $3\sqrt{11}$; b) $\sqrt{(-5)^2 . 2}$ và $-(-5\sqrt{2})$.

Ta có quy tắc sau (còn được gọi là *phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai*):

Cho hai số a, b với $b \geq 0$. Khi đó $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

Cụ thể, ta có:

- Nếu $a \geq 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$;
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$.

Ví dụ 5 Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{7^2 . 2}$; b) $\sqrt{(-11)^2 . 3}$; c) $\sqrt{50}$.

Giải

a) $\sqrt{7^2 . 2} = 7\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{(-11)^2 . 3} = |-11| . \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$.

c) $\sqrt{50} = \sqrt{25 . 2} = \sqrt{5^2 . 2} = 5\sqrt{2}$.

Ví dụ 6 Rút gọn biểu thức: $\sqrt{20} - \sqrt{5}$.

Giải

Ta có: $\sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{4 . 5} - \sqrt{5} = \sqrt{2^2 . 5} - \sqrt{5}$
$= 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$.

4 Rút gọn biểu thức:
$\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$.

Ví dụ 7 Để tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{(-4)^2 . 5}}{(-4) + 5}$, bạn Ngân làm như sau:

Ta có: $M = \dfrac{\sqrt{(-4)^2 . 5}}{(-4) + 5} = \dfrac{(-4) . \sqrt{5}}{1} = -4\sqrt{5}$.

Cách làm của bạn Ngân là đúng hay sai? Vì sao?

Giải

Cách làm của bạn Ngân là sai vì $\sqrt{(-4)^2 . 5} = |-4| . \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \neq (-4) . \sqrt{5}$.

Cách làm đúng sẽ là: $M = \dfrac{\sqrt{(-4)^2 . 5}}{(-4) + 5} = \dfrac{|-4| . \sqrt{5}}{1} = 4\sqrt{5}$.

V. ĐƯA THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN BẬC HAI

5 So sánh:

a) $3\sqrt{5}$ và $\sqrt{3^2 . 5}$; b) $-5\sqrt{2}$ và $-\sqrt{(-5)^2 . 2}$.

Ngược với phép đưa thừa số ra ngoài dấu căn là phép đưa thừa số vào trong dấu căn.

Ta có quy tắc sau (còn được gọi là *phép đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai*):

- Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.
- Với $a < 0$ và $b \geq 0$, ta có: $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Ví dụ 8 Rút gọn biểu thức:

a) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

b) $5\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{35}$.

Giải

a) $3\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3^2 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$.

b) $5\sqrt{\frac{7}{5}} - \sqrt{35} = \sqrt{5^2 \cdot \frac{7}{5}} - \sqrt{35} = \sqrt{5 . 7} - \sqrt{35}$

$= \sqrt{35} - \sqrt{35} = 0$.

5 Rút gọn biểu thức:

a) $-7\sqrt{\frac{1}{7}}$;

b) $6\sqrt{\frac{11}{6}} - \sqrt{66}$.

BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\sqrt{25^2}$;

b) $\sqrt{(-0,16)^2}$;

c) $\sqrt{\left(\sqrt{7} - 3\right)^2}$.

2. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

a) $\sqrt{36 . 81}$;

b) $\sqrt{49 . 121 . 169}$;

c) $\sqrt{50^2 - 14^2}$;

d) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} . \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

3. Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\frac{49}{36}}$;

b) $\sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{81}}$;

c) $\frac{\sqrt{9^3 + 7^3}}{\sqrt{9^2 - 9 . 7 + 7^2}}$;

d) $\frac{\sqrt{50^3 - 1}}{\sqrt{50^2 + 51}}$.

4. Áp dụng quy tắc đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$;

b) $2\sqrt{80} - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{20}$;

c) $\sqrt{2,8} . \sqrt{0,7}$.

5. Áp dụng quy tắc đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai, hãy rút gọn biểu thức:

a) $9\sqrt{\frac{2}{9}} - 3\sqrt{2}$;

b) $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{12} - \sqrt{11}\right)$.

6. So sánh:

a) $\sqrt{3} . \sqrt{7}$ và $\sqrt{22}$; b) $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{2}}$ và 5; c) $3\sqrt{7}$ và $\sqrt{65}$.

7. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh là a. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC theo a.

8. Trong Vật lí, ta có định luật Joule – Lenz để tính nhiệt lượng toả ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua:

$$Q = I^2Rt.$$

Trong đó: Q là nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính theo Jun (J);

I là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A);

R là điện trở dây dẫn tính theo Ohm (Ω);

t là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở $R = 80$ Ω. Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn toả ra trong 1 giây là 500 J.

9. Tốc độ gần đúng của một ô tô ngay trước khi đạp phanh được tính theo công thức $v = \sqrt{2\lambda gd}$, trong đó v (m/s) là tốc độ của ô tô, d (m) là chiều dài của vết trượt tính từ thời điểm đạp phanh cho đến khi ô tô dừng lại trên đường, λ là hệ số cản lăn của mặt đường, $g = 9{,}8$ m/s^2 *(Nguồn: J. Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017)*. Nếu một chiếc ô tô để lại vết trượt dài khoảng 20 m trên đường nhựa thì tốc độ của ô tô trước khi đạp phanh là khoảng bao nhiêu mét trên giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng hệ số cản lăn của đường nhựa là $\lambda = 0{,}7$.

Vết trượt của ô tô
(Nguồn: https://shutterstock.com)

§3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Đoạn đường có dạng cung tròn
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn, người lái cần biết tốc độ tối đa cho phép là bao nhiêu. Vì thế, ở những đoạn đường đó thường có bảng chỉ dẫn cho tốc độ tối đa cho phép của ô tô. Tốc độ tối đa cho phép v (m/s) được tính bởi công thức $v = \sqrt{rg\mu}$, trong đó r (m) là bán kính của cung đường, $g = 9{,}8$ m/s^2, μ là hệ số ma sát trượt của đường.

(*Nguồn: J. Libby Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Mc Farland, năm 2017*)

Hãy viết biểu thức tính v theo r khi biết $\mu = 0{,}12$.
Trong toán học, biểu thức đó được gọi là gì?

I. CĂN THỨC BẬC HAI

1 Cửa hàng điện máy trưng bày một chiếc ti vi màn hình phẳng 55 in, tức là độ dài đường chéo của màn hình ti vi bằng 55 in (1 in = 2,54 cm). Gọi x (in) là chiều rộng của màn hình ti vi (*Hình 5*). Viết công thức tính chiều dài của màn hình ti vi theo x.

Hình 5

Biểu thức $\sqrt{55^2 - x^2}$ được gọi là một căn thức bậc hai.

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là *căn thức bậc hai* của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

Chẳng hạn, $\sqrt{55^2 - x^2}$ là căn thức bậc hai của biểu thức đại số $55^2 - x^2$.

Ta cũng gọi $\sqrt{55^2 - x^2}$ là một biểu thức đại số.

Chú ý: Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa, khai căn bậc hai làm thành một *biểu thức đại số*.

Ví dụ 1 Mỗi biểu thức sau có phải là một căn thức bậc hai hay không?

a) $\sqrt{x+1}$.   b) $\sqrt{5}$.   c) $2x - 1$.

Giải

a) Biểu thức $\sqrt{x+1}$ là một căn thức bậc hai vì $x + 1$ là một biểu thức đại số.

b) Biểu thức $\sqrt{5}$ là một căn thức bậc hai vì 5 cũng là một biểu thức đại số.

c) Biểu thức $2x - 1$ không là một căn thức bậc hai.

1 Mỗi biểu thức sau có phải là một căn thức bậc hai hay không?

a) $\sqrt{2x-5}$.

b) $\sqrt{\frac{1}{x}}$.

c) $\frac{1}{x+1}$.

Ví dụ 2 Tính giá trị của $\sqrt{x^2 - 9}$ tại:

a) $x = 5$;   b) $x = -7$;   c) $x = \sqrt{10}$.

Giải

a) Thay $x = 5$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt{5^2 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

b) Thay $x = -7$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt{(-7)^2 - 9} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}.$$

c) Thay $x = \sqrt{10}$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - 9} = \sqrt{1} = 1.$$

2 Tính giá trị của $\sqrt{2x^2+1}$ tại:

a) $x = 2$;

b) $x = -\sqrt{12}$.

2 Cho căn thức bậc hai $\sqrt{x-1}$. Biểu thức đó có xác định hay không tại mỗi giá trị sau?

a) $x = 0$.   b) $x = 1$.   c) $x = 2$.

Điều kiện xác định cho căn thức bậc hai $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

Ví dụ 3 Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau:

a) $\sqrt{4x}$;   b) $\sqrt{x-3}$.

Giải

a) $\sqrt{4x}$ xác định khi $4x \geq 0$ hay $x \geq 0$.

b) $\sqrt{x-3}$ xác định khi $x - 3 \geq 0$ hay $x \geq 3$.

3 Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau:

a) $\sqrt{x+1}$; b) $\sqrt{x^2+1}$.

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, tính tốc độ tối đa cho phép v (m/s) để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường có dạng cung tròn với bán kính $r = 400$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), biết $\mu = 0,12$.

Giải

Với $r = 400$ m và $\mu = 0,12$, ta có: $v = \sqrt{400 \,.\, 9,8 \,.\, 0,12} = \sqrt{470,4} \approx 21,7$.

Vậy tốc độ tối đa cho phép để lái xe an toàn khi đi qua đoạn đường đó là 21,7 m/s.

II. CĂN THỨC BẬC BA

3 Thể tích V của một khối lập phương được tính bởi công thức: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh của khối lập phương. Viết công thức tính độ dài cạnh của khối lập phương theo thể tích V của nó.

Biểu thức $\sqrt[3]{V}$ được gọi là một căn thức bậc ba.

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là *căn thức bậc ba* của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

Chẳng hạn, $\sqrt[3]{V}$ là căn thức bậc ba của biểu thức đại số V.

Ta cũng gọi $\sqrt[3]{V}$ là một biểu thức đại số.

Chú ý: Các số, biến số được nối với nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên luỹ thừa, khai căn (bậc hai hoặc bậc ba) làm thành một *biểu thức đại số.*

Ví dụ 5 Mỗi biểu thức sau có phải là một căn thức bậc ba hay không?

a) $\sqrt[3]{x}$. b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x+1}}$. c) $8x + \sqrt[3]{2}$.

Giải

a) Biểu thức $\sqrt[3]{x}$ là một căn thức bậc ba vì x là một biểu thức đại số.

b) Biểu thức $\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$ là một căn thức bậc ba vì $\frac{1}{x+1}$ là một biểu thức đại số.

c) Biểu thức $8x + \sqrt[3]{2}$ không là một căn thức bậc ba.

4 Mỗi biểu thức sau có phải là một căn thức bậc ba hay không?

a) $\sqrt[3]{2x^2 - 7}$.

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{5x-4}}$.

c) $\frac{1}{7x+1}$.

Ví dụ 6 Tính giá trị của $\sqrt[3]{6x+4}$ tại:

a) $x = -2$; b) $x = 10$.

Giải

a) Thay $x = -2$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt[3]{6.(-2)+4} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

b) Thay $x = 10$ vào biểu thức, ta được:

$$\sqrt[3]{6.10+4} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

5 Tính giá trị của $\sqrt[3]{x^3}$ tại $x = 3$; $x = -2$; $x = -10$.

4 Cho căn thức bậc ba $\sqrt[3]{\frac{2}{x-1}}$. Biểu thức đó có xác định hay không tại mỗi giá trị sau?

a) $x = 17$.

b) $x = 1$.

Điều kiện xác định của căn thức bậc ba $\sqrt[3]{A}$ chính là điều kiện xác định của biểu thức A.

Ví dụ 7 Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau:

a) $\sqrt[3]{5x-11}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{5x-11}$ xác định với mọi số thực x vì $5x - 11$ xác định với mọi số thực x.

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ xác định với $x \neq 0$ vì $\frac{1}{x}$ xác định với $x \neq 0$.

6 Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau:

a) $\sqrt[3]{x^2 + x}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x-9}}$.

Ví dụ 8 Công thức $h = 0,4.\sqrt[3]{x}$ biểu diễn mối liên hệ giữa cân nặng x (kg) và chiều cao h (m) của một con hươu cao cổ ở tuổi trưởng thành (*Nguồn: J. Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017*).

a) Một con hươu cao cổ cân nặng 180 kg thì cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

b) Một con hươu cao cổ có chiều cao 2,56 m thì nặng bao nhiêu kilôgam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

a) Với $x = 180$ (kg), chiều cao của con hươu cao cổ là:

$$h = 0,4.\sqrt[3]{180} \approx 2,26 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của hươu cao cổ là khoảng 2,26 m.

b) Với $h = 2,56$ (m), ta có:

$$2,56 = 0,4.\sqrt[3]{x}$$
$$\sqrt[3]{x} = 6,4$$
$$x = (6,4)^3$$
$$x = 262,144.$$

Vậy cân nặng của con hươu cao cổ là khoảng 262 kg.

BÀI TẬP

1. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau:

a) $\sqrt{17 - x^2}$ tại $x = 1$; $x = -3$; $x = 2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x^2 + x + 1}$ tại $x = 0$; $x = -1$; $x = -7$.

2. Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc hai sau:

a) $\sqrt{x - 6}$; b) $\sqrt{17 - x}$; c) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

3. Tính giá trị của mỗi căn thức bậc ba sau:

a) $\sqrt[3]{2x - 7}$ tại $x = -10$; $x = 7,5$; $x = -0,5$;

b) $\sqrt[3]{x^2 + 4}$ tại $x = 0$; $x = 2$; $x = \sqrt{23}$.

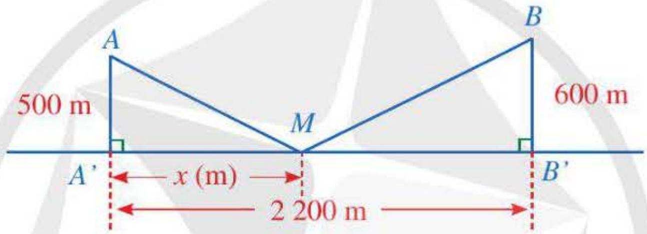
4. Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau:

a) $\sqrt[3]{3x+2}$;　　b) $\sqrt[3]{x^3-1}$;　　c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2-x}}$.

5. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2\,200$ m. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Giả sử vị trí của trạm cung cấp nước sạch đó là điểm M trên đoạn $A'B'$ với $MA' = x$ (m), $0 < x < 2\,200$ (minh hoạ ở *Hình 6*).

a) Hãy tính tổng khoảng cách $MA + MB$ theo x.

b) Tính tổng khoảng cách $MA + MB$ khi $x = 1\,200$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



Hình 6

6. Hệ quả của hiện tượng nóng lên toàn cầu là băng của một số sông băng đang tan chảy. Mười hai năm sau khi băng biến mất, những loài thực vật nhỏ bé, được gọi là địa y, bắt đầu mọc trên đá. Mỗi nhóm địa y phát triển ở dạng (gần như) một hình tròn. Đường kính d (mm) của hình tròn này và tuổi của địa y có thể được tính gần đúng bằng công thức: $d = 7\sqrt{t-12}$ với t là số năm tính từ khi băng biến mất ($t \geq 12$) (*Nguồn: J. Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017*).

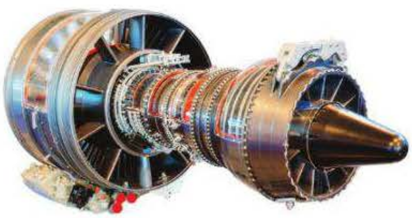
Tính đường kính của hình tròn do địa y tạo nên sau khi băng biến mất 13 năm; 16 năm.

7. Chiều cao ngang vai của một con voi đực ở châu Phi là h (cm) có thể được tính xấp xỉ bằng công thức: $h = 62{,}5.\sqrt[3]{t} + 75{,}8$ với t là tuổi của con voi tính theo năm (*Nguồn: J. Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017*).

a) Một con voi đực 8 tuổi thì có chiều cao ngang vai là bao nhiêu centimét?

b) Nếu một con voi đực có chiều cao ngang vai là 205 cm thì con voi đó bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

§4. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ



Động cơ phản lực
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Khí trong động cơ giãn nở từ áp suất p_1 và thể tích V_1 đến áp suất p_2 và thể tích V_2 thoả mãn đẳng thức: $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$ (*Nguồn: John W. Cell, Engineering Problems Illustrating Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, năm 1943*).

Có thể tính được thể tích V_1 theo p_1, p_2 và V_2 được hay không?

I. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

1 Tìm số thích hợp cho $\boxed{?}$:

a) $\sqrt{7^2} = \boxed{?}$;

b) $\sqrt{(-9)^2} = \boxed{?}$;

c) $\sqrt{a^2} = \boxed{?}$ với a là một số cho trước.

Cũng như căn bậc hai số học, ta có quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương:

Với mỗi biểu thức A, ta có: $\sqrt{A^2} = |A|$, tức là:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$;

b) $\sqrt{x^4}$.

Giải

a) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x - 2$ (vì $x - 2 \geq 0$ khi $x \geq 2$).

b) $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = x^2$ (vì $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x).

1 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$ với $x < -3$;

b) $\sqrt{y^4 + 2y^2 + 1}$.

II. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

2 So sánh:

a) $\sqrt{16 \,.\, 0,25}$ và $\sqrt{16} \,.\, \sqrt{0,25}$;

b) $\sqrt{a \,.\, b}$ và $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$ với a, b là hai số không âm.

Cũng như căn bậc hai số học, ta có quy tắc về căn thức bậc hai của một tích:

> Với các biểu thức A, B không âm, ta có: $\sqrt{A \,.\, B} = \sqrt{A} \,.\, \sqrt{B}$.

Ví dụ 2 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{4a^2}$;

b) $\sqrt{2a} \,.\, \sqrt{8a}$ với $a > 0$.

Giải

a) $\sqrt{4a^2} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{a^2} = 2|a|$.

b) $\sqrt{2a} \,.\, \sqrt{8a} = \sqrt{2a \,.\, 8a} = \sqrt{16a^2} = \sqrt{16} \,.\, \sqrt{a^2}$

$= 4|a| = 4a$ (vì $a > 0$).

2 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{9x^4}$;

b) $\sqrt{3a^3} \,.\, \sqrt{27a}$ với $a > 0$.

III. CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

3 So sánh:

a) $\sqrt{\dfrac{49}{169}}$ và $\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{169}}$;

b) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ và $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ với a là số không âm, b là số dương.

Cũng như căn bậc hai số học, ta có quy tắc về căn thức bậc hai của một thương:

> Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có: $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

Ví dụ 3 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}}$ với $a > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{4a^2}{25}} = \dfrac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{4}\,.\,\sqrt{a^2}}{5} = \dfrac{2|a|}{5}$.

b) $\dfrac{\sqrt{125a}}{\sqrt{5a}} = \sqrt{\dfrac{125a}{5a}} = \sqrt{25} = 5$.

3 Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\dfrac{9}{(x-3)^2}}$ với $x > 3$;

b) $\dfrac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ với $x > 0$.

IV. TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

4 Xét phép biến đổi: $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\,.\,\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Hãy xác định mẫu thức của mỗi biểu thức sau: $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Phép biến đổi trên đã làm mất căn thức ở mẫu thức của biểu thức $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Nhận xét: Phép biến đổi làm mất căn thức bậc hai ở mẫu thức của một biểu thức được gọi là *trục căn thức ở mẫu* của biểu thức đó.

Ví dụ 4 Trục căn thức ở mẫu: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ với $x > -1$.

Giải

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1\,.\,\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}\,.\,\sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}$.

Chú ý: Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có: $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$.

4 Trục căn thức ở mẫu:

$\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 1$.

Ví dụ 5 Trục căn thức ở mẫu: $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}}$.

Giải

Ta có: $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{5\,.\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right)}$

$= \dfrac{10-5\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{10-5\sqrt{3}}{4-3} = 10-5\sqrt{3}$.

5 Trục căn thức ở mẫu:

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 1$.

Chú ý: Với các biểu thức A, B, C mà $B \geq 0$ và $A^2 \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{A+\sqrt{B}}=\frac{C\left(A-\sqrt{B}\right)}{A^2-B};\quad \frac{C}{A-\sqrt{B}}=\frac{C\left(A+\sqrt{B}\right)}{A^2-B}.$$

$A - \sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $A + \sqrt{B}$ và ngược lại.

Ví dụ 6 Trục căn thức ở mẫu: $\dfrac{a+1}{\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2}}$ với $a > -1$.

Giải

Ta có: $$\frac{a+1}{\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2}}=\frac{(a+1)\left(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2}\right)}{\left(\sqrt{2a+3}-\sqrt{a+2}\right)\left(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2}\right)}$$

$$=\frac{(a+1)\left(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2}\right)}{\left(\sqrt{2a+3}\right)^2-\left(\sqrt{a+2}\right)^2}$$

$$=\frac{(a+1)\left(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2}\right)}{(2a+3)-(a+2)}$$

$$=\frac{(a+1)\left(\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2}\right)}{a+1}$$

$$=\sqrt{2a+3}+\sqrt{a+2}.$$

6 Trục căn thức ở mẫu: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$.

Chú ý: Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B};$$

$$\frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}.$$

$\sqrt{A} - \sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ và ngược lại.

BÀI TẬP

1. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một bình phương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(5-x)^2}$ với $x \geq 5$; b) $\sqrt{(x-3)^4}$; c) $\sqrt{\left(y+1\right)^6}$ với $y < -1$.

2. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một tích, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{25(a+1)^2}$ với $a > -1$; b) $\sqrt{x^2(x-5)^2}$ với $x > 5$;

c) $\sqrt{2b}\,.\,\sqrt{32b}$ với $b > 0$; d) $\sqrt{3c}\,.\,\sqrt{27c^3}$ với $c > 0$.

3. Áp dụng quy tắc về căn thức bậc hai của một thương, hãy rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{\dfrac{(3-a)^2}{9}}$ với $a > 3$;

b) $\dfrac{\sqrt{75x^5}}{\sqrt{5x^3}}$ với $x > 0$;

c) $\sqrt{\dfrac{9}{x^2 - 2x + 1}}$ với $x > 1$;

d) $\sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 6x + 9}}$ với $x \geq 2$.

4. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$;

b) $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ với $a > 0$;

c) $\dfrac{7}{3 - \sqrt{2}}$;

d) $\dfrac{5}{\sqrt{x} + 3}$ với $x > 0, x \neq 9$;

e) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ với $x > 0, x \neq 3$.

5. Rút gọn biểu thức: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \dfrac{2b}{a - b}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

TÌM TÒI – MỞ RỘNG (Đọc thêm)

Bất đẳng thức Cauchy

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) là một nhà toán học người Pháp có những đóng góp to lớn cho Toán học ở thế kỉ XIX. Một bất đẳng thức mang tên ông có rất nhiều ứng dụng trong việc chứng minh các bất đẳng thức và giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức:

Bất đẳng thức Cauchy cho hai số là:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ với } a \geq 0, b \geq 0 \qquad (1)$$

Bất đẳng thức này còn được gọi là *bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân.*

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức (1) như sau:

Do $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ nên $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, suy ra

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Augustin-Louis Cauchy
(*Nguồn: https://repository.cam.ac.uk*)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

1. Căn bậc hai của 16 là

A. 4. B. 4 và – 4. C. 256. D. 256 và – 256.

2. Nếu $\sqrt{x} = 9$ thì x bằng

A. 3. B. 3 hoặc – 3. C. 81. D. 81 hoặc – 81.

3. Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt{40^2 - 24^2}$;

b) $B = \left(\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - \sqrt{27}\right) . \sqrt{3}$;

c) $C = \dfrac{\sqrt{63^3 + 1}}{\sqrt{63^2 - 62}}$;

d) $D = \sqrt{60} - 5\sqrt{\dfrac{3}{5}} - 3\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

4. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x+1}}$ với $x > -1$;

b) $\dfrac{3}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0, x \neq 4$;

c) $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$;

d) $\dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ với $x > 0, x \neq 3$.

5. So sánh:

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$;

b) $7\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ và $\sqrt{2} . \sqrt{11}$;

c) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ và $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$.

6. Cho biểu thức: $M = \dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với $a > 0, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị của biểu thức tại $a = 2, b = 8$.

7. Cho biểu thức: $N = \dfrac{x\sqrt{x} + 8}{x - 4} - \dfrac{x + 4}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức N.

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = 9$.

8. Ngày 28/9/2018, sau trận động đất 7,5 độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là *Tsunami*) cao hơn 6 m đã tràn vào đảo Sulawesicuar (Indonesia) và tàn phá thành phố Palu gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ cơn sóng thần v (m/s) và chiều sâu đại dương d (m) của nơi bắt đầu sóng thần liên hệ bởi công thức $v = \sqrt{dg}$, trong đó $g = 9,81$ m/s^2.

(Nguồn: https://tuoitre.vn/toc-do-song-than-khung-khiep-den-muc-nao)

a) Hãy tính tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét trên giây).

b) Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, tốc độ cơn sóng thần ngày 28/9/2018 là 800 km/h, hãy tính chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Sóng thần

(Nguồn: https://shutterstock.com)

9. Khi bay vào không gian, trọng lượng P (N) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao h (m) được tính theo công thức:

$$P = \frac{28\,014 \,.\, 10^{12}}{(64 \,.\, 10^5 + h)^2}.$$

(Nguồn: Chuyên đề Vật lí 11, NXB Đại học Sư phạm, năm 2023)

a) Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10 000 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

10. Áp suất P (lb/in^2) cần thiết để ép nước qua một ống dài L (ft) và đường kính d (in) với tốc độ v (ft/s) được cho bởi công thức: $P = 0,00161 \cdot \dfrac{v^2L}{d}$ *(Nguồn: John W. Cell, Engineering Problems Illustrating Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, năm 1943)*.

a) Hãy tính v theo P, L và d.

b) Cho $P = 198,5$; $L = 11\,560$; $d = 6$. Hãy tính tốc độ v (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của feet trên giây).

Biết rằng 1 in = 2,54 cm; 1 ft (feet) = 0,3048 m; 1 lb (pound) = 0,45359237 kg; 1 lb/in^2 = 6 894,75729 Pa (Pascal).

Chương IV

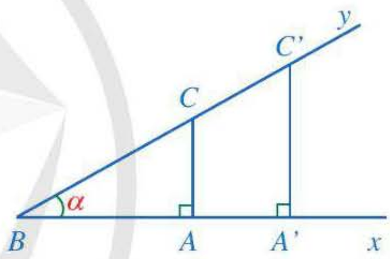
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: tỉ số lượng giác của góc nhọn; một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông; ứng dụng của tỉ số lượng giác của góc nhọn.

§1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Cho góc nhọn $\widehat{xBy} = \alpha$. Xét tam giác ABC vuông tại A, tam giác $A'BC'$ vuông tại A' với A, A' thuộc tia Bx và C, C' thuộc tia By (*Hình 1*). Do $\Delta ABC \backsim \Delta A'BC'$ nên $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A'C'}{BC'}$.

Như vậy, tỉ số giữa cạnh đối AC của góc nhọn α và cạnh huyền BC trong tam giác vuông ABC không phụ thuộc vào việc chọn tam giác vuông đó.



Hình 1

Tỉ số $\dfrac{AC}{BC}$ có mối liên hệ như thế nào với độ lớn góc α?

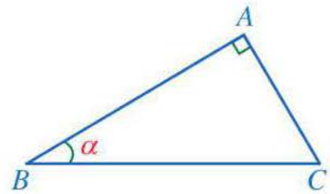
I. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \alpha$ (*Hình 2*).

a) Cạnh góc vuông nào là cạnh đối của góc B?

b) Cạnh góc vuông nào là cạnh kề của góc B?

c) Cạnh nào là cạnh huyền?



Hình 2

Cho góc nhọn α. Xét tam giác *ABC* vuông tại *A* có $\widehat{B} = \alpha$ (*Hình 3*).

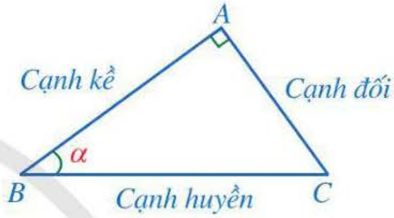
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là ***sin*** của góc α, kí hiệu $\sin \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là ***côsin*** của góc α, kí hiệu $\cos \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là ***tang*** của góc α, kí hiệu $\tan \alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là ***côtang*** của góc α, kí hiệu $\cot \alpha$.

Bốn tỉ số trên được gọi là các tỉ số lượng giác của góc nhọn α.

Trong *Hình 3*, ta có:

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}; \quad \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC};$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}; \quad \cot \widehat{B} = \frac{AB}{AC}.$$



Hình 3

Nhận xét

- Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α không phụ thuộc vào việc chọn tam giác vuông có góc nhọn α. Thật vậy, nếu hai tam giác *ABC*, *A'B'C'* lần lượt vuông tại *A*, *A'* và có $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} = \alpha$ thì $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, suy ra

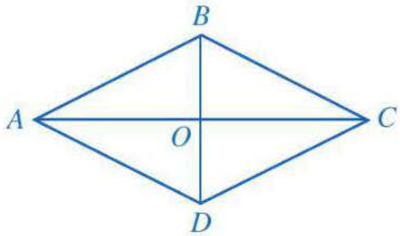
$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}; \ \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}; \ \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}; \ \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

- Khi không sợ nhầm lẫn, ta có thể viết $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$, $\cot B$ lần lượt thay cho các kí hiệu $\sin \widehat{B}$, $\cos \widehat{B}$, $\tan \widehat{B}$, $\cot \widehat{B}$.
- Từ định nghĩa trên, ta thấy các tỉ số lượng giác của góc nhọn α luôn dương và $\sin \alpha < 1$, $\cos \alpha < 1$, $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$.

Ví dụ 1 Cho hình thoi *ABCD* có hai đường chéo cắt nhau tại điểm *O* (*Hình 4*).

a) Tỉ số $\dfrac{OB}{AB}$ là sin của góc nhọn nào? Tỉ số $\dfrac{OB}{BC}$ là côsin của góc nhọn nào?

b) Viết tỉ số lượng giác của mỗi góc nhọn sau: $\tan \widehat{OCD}$, $\cot \widehat{OAD}$.



Hình 4

Giải

Hình thoi *ABCD* có hai đường chéo cắt nhau tại điểm *O* nên *AC* vuông góc với *BD* tại *O*.

a) • Tam giác OAB vuông tại O nên $\dfrac{OB}{AB} = \sin\widehat{OAB}$.

• Tam giác OBC vuông tại O nên $\dfrac{OB}{BC} = \cos\widehat{OBC}$.

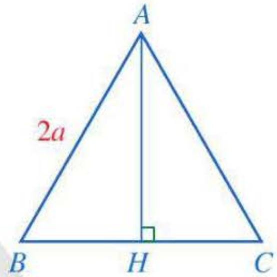
b) • Tam giác OCD vuông tại O nên $\tan\widehat{OCD} = \dfrac{OD}{OC}$.

• Tam giác OAD vuông tại O nên $\cot\widehat{OAD} = \dfrac{OA}{OD}$.

Ví dụ 2 Cho tam giác đều ABC có $AB = 2a$. Kẻ đường cao AH (*Hình 5*).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BH, AH.

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc 30°.



Hình 5

Giải

a) Ta có: $BH = \dfrac{BC}{2} = a$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

b) Xét tam giác ABH vuông tại H có $\widehat{BAH} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, suy ra

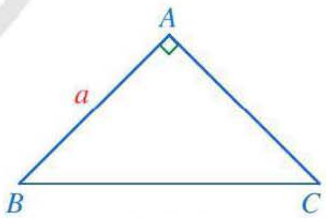
$\sin 30^\circ = \sin\widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \cos\widehat{BAH} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan 30^\circ = \tan\widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot 30^\circ = \cot\widehat{BAH} = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$ (*Hình 6*).

a) Tính độ dài các cạnh AC, BC và số đo góc B.

b) Tính các tỉ số lượng giác của góc 45°.



Hình 6

Giải

a) Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB = AC = a$ và $\widehat{B} = 45^\circ$.

Theo định lí Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Suy ra $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Do đó $BC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

b) Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$\sin 45^\circ = \sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos 45^\circ = \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 45^\circ = \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\cot 45^\circ = \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$

1 Cho tam giác MNP vuông tại M, $MN = 3$ cm, $MP = 4$ cm. Tính độ dài cạnh NP và các tỉ số lượng giác của góc P.

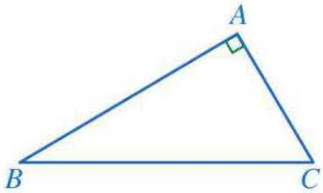
II. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

2 Cho tam giác ABC vuông tại A (*Hình 7*).

a) Tổng số đo của góc B và góc C bằng bao nhiêu?

b) Viết công thức tính các tỉ số lượng giác của góc B và góc C.

c) Mỗi tỉ số lượng giác của góc B bằng tỉ số lượng giác nào của góc C?



Hình 7

Nhận xét: Hai góc nhọn có tổng bằng 90° được gọi là *hai góc phụ nhau.*

Ta có định lí:

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Nhận xét: Với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, ta có:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; $\quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$; $\quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$.

Ví dụ 4 Sử dụng kết quả của *Ví dụ 2*, tính các tỉ số lượng giác của góc 60°.

Giải

Vì 60° và 30° là hai góc phụ nhau nên ta có:

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$;

$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$; $\quad \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2 Tính:

a) $\sin 61^\circ - \cos 29^\circ$;

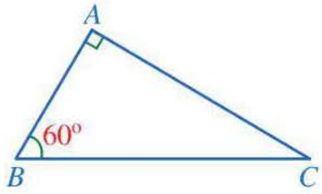
b) $\cos 15^\circ - \sin 75^\circ$;

c) $\tan 28^\circ - \cot 62^\circ$;

d) $\cot 47^\circ - \tan 43^\circ$.

Ví dụ 5 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Tính các tỉ số $\dfrac{AB}{BC}$ và $\dfrac{AC}{BC}$.

Giải. (*Hình 8*)



Hình 8

Xét tam giác ABC với $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, ta có:

$$\frac{AB}{BC} = \cos B = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\frac{AC}{BC} = \sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Từ các kết quả trên, ta có *bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt* như sau:

α / **Tỉ số lượng giác**	**30°**	**45°**	**60°**
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 6 Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$;

b) $\tan 30^\circ \,.\, \cot 30^\circ$.

Giải

a) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

b) $\tan 30^\circ \,.\, \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{3} = 1.$

Ta quy ước:

$\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$;
$\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$;
$\tan^2\alpha = (\tan\alpha)^2$;
$\cot^2\alpha = (\cot\alpha)^2$.

3 Sử dụng bảng tỉ số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt, tính giá trị của biểu thức:

$\sin 60^\circ - \cos 60^\circ \,.\, \tan 60^\circ$.

III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

1. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

3 Cùng với đơn vị đo góc là độ (kí hiệu: °), người ta còn sử dụng những đơn vị đo góc khác là: phút (kí hiệu: ’); giây (kí hiệu: ’’) với quy ước: 1° = 60’; 1’ = 60’’.

Ta có thể tính giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc nhọn bằng cách sử dụng các phím: sin, cos, tan trên máy tính cầm tay. Trước hết, ta đưa máy tính về chế độ "độ". Để nhập độ, phút, giây, ta sử dụng phím °'".

Chẳng hạn, để tính sin 35° và tan 70°25'43'', ta làm như sau:

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
sin 35°	sin 3 5 =	0,5735764364
tan 70°25'43''	tan 7 0 °'" 2 5 °'" 4 3 °'" =	2,812770138

Ví dụ 7 Dùng máy tính cầm tay để tính (gần đúng) các giá trị lượng giác sau:

cos 28°; tan 45°75'52''; sin 84°42''.

Giải

Ta có:

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
cos 28°	cos 2 8 =	0,8829475929
tan 45°75'52''	tan 4 5 °'" 7 5 °'" 5 2 °'" =	1,045140969
sin 84°42''	sin 8 4 °'" 0 °'" 4 2 °'" =	0,994543159

4 Sử dụng tính chất cot α = tan (90° – α), ta có thể tính được côtang của một góc nhọn. Chẳng hạn, ta tính cot 56° như sau:

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
cot 56°	tan 9 0 − 5 6 =	0,6745085168

4 Sử dụng máy tính cầm tay để tính (gần đúng) các giá trị lượng giác sau:

sin 71°; cos 48°;
tan 59°; cot 23°.

Nhận xét: Ta có thể tính cot α theo công thức: $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

2. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm số đo của một góc nhọn khi biết một tỉ số lượng giác của góc đó

Để tính số đo (đúng hoặc gần đúng) của một góc nhọn khi biết một giá trị lượng giác của góc đó ta sử dụng các phím: SHIFT cùng với sin, cos, tan và kết hợp với giá trị lượng giác của góc đó. Trước hết, ta đưa máy tính về chế độ "độ".

Ví dụ 8 Tìm số đo góc nhọn α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ), biết:

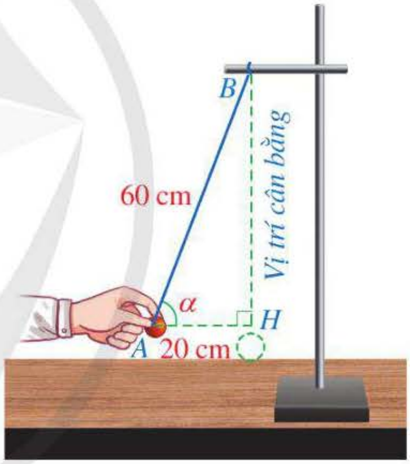
a) $\cos\alpha = 0{,}97$; b) $\tan\alpha = 0{,}68$; c) $\sin\alpha = 0{,}45$.

Giải

Ta có thể làm như sau:

	Nút ấn	**Kết quả (làm tròn đến hàng đơn vị của độ)**
$\cos\alpha = 0{,}97$	SHIFT cos 0 . 9 7 =	14°
$\tan\alpha = 0{,}68$	SHIFT tan 0 . 6 8 =	34°
$\sin\alpha = 0{,}45$	SHIFT sin 0 . 4 5 =	27°

Ví dụ 9 Treo quả cầu kim loại nhỏ vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dãn. Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng, dây treo có phương thẳng đứng. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng. Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng, giả sử tâm A của quả cầu cách B một khoảng $AB = 60$ cm và cách vị trí cân bằng một khoảng $AH = 20$ cm (*Hình 9*). Tính số đo góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Hình 9

Giải

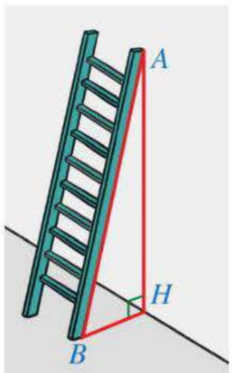
Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Do đó $\alpha \approx 19^\circ$.

Vậy góc α tạo bởi sợi dây BA và vị trí cân bằng có số đo khoảng 19°.

Ví dụ 10 *Hình 10* mô tả một chiếc thang có chiều dài $AB = 4$ m được đặt dựa vào tường, khoảng cách từ chân thang đến chân tường là $BH = 1{,}5$ m. Tính góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



Hình 10

Giải

Ta có: Góc tạo bởi cạnh AB và phương nằm ngang trên mặt đất là $\widehat{ABH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có: $\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{1,5}{4} = 0,375$.

Vậy $\widehat{ABH} \approx 68^\circ$.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 4$ cm, $BC = 6$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$ cm, $AC = 3$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc C.

3. Cho tam giác MNP có $MN = 5$ cm, $MP = 12$ cm, $NP = 13$ cm. Chứng minh tam giác MNP vuông tại M. Từ đó, tính các tỉ số lượng giác của góc N.

4. Mỗi tỉ số lượng giác sau đây bằng tỉ số lượng giác nào của góc 63°? Vì sao?

a) $\sin 27^\circ$. b) $\cos 27^\circ$. c) $\tan 27^\circ$. d) $\cot 27^\circ$.

5. Sử dụng máy tính cầm tay để tính các tỉ số lượng giác của mỗi góc sau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm):

a) 41°; b) $28^\circ 35'$; c) $70^\circ 27' 46''$.

6. Sử dụng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, tính giá trị biểu thức:

$$A = \sin 25^\circ + \cos 25^\circ - \sin 65^\circ - \cos 65^\circ.$$

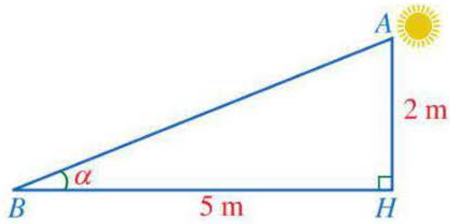
7. Cho góc nhọn α. Biết rằng, tam giác ABC vuông tại A sao cho $\widehat{B} = \alpha$.

a) Biểu diễn các tỉ số lượng giác của góc nhọn α theo AB, BC, CA.

b) Chứng minh: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$; $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Từ đó, tính giá trị biểu thức: $S = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ$; $T = \tan 61^\circ \cdot \cot 61^\circ$.

8. *Hình 11* mô tả tia nắng mặt trời dọc theo AB tạo với phương nằm ngang trên mặt đất một góc $\alpha = \widehat{ABH}$. Sử dụng máy tính cầm tay, tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ), biết $AH = 2$ m, $BH = 5$ m.



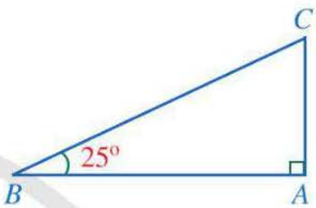
Hình 11

§2. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Hình 12b mô tả đường lên dốc ở *Hình 12a*, trong đó góc giữa BC và phương nằm ngang BA là $\widehat{ABC} = 25^{o}$.

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

a)



b)

Hình 12

Cạnh góc vuông AC và cạnh huyền BC (Hình 12b) có liên hệ với nhau như thế nào?

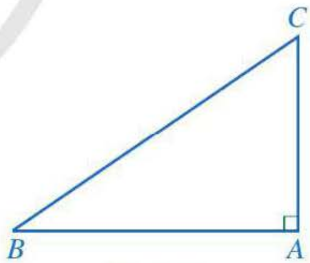
I. TÍNH CẠNH GÓC VUÔNG THEO CẠNH HUYỀN VÀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1 Cho tam giác ABC vuông tại A (*Hình 13*).

a) Biểu diễn sin B, cos C theo AC, BC.

b) Viết công thức tính AC theo BC và sin B.

c) Viết công thức tính AC theo BC và cos C.



Hình 13

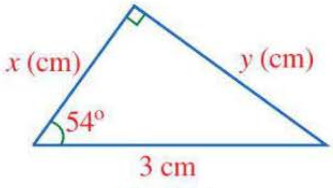
Ta có định lí:

> Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin của góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.

Trong *Hình 13*, ta có: $AC = BC \,.\, \sin B = BC \,.\, \cos C$;

$$AB = BC \,.\, \sin C = BC \,.\, \cos B.$$

Ví dụ 1 Tìm x, y trong *Hình 14* (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimét).



Hình 14

Giải

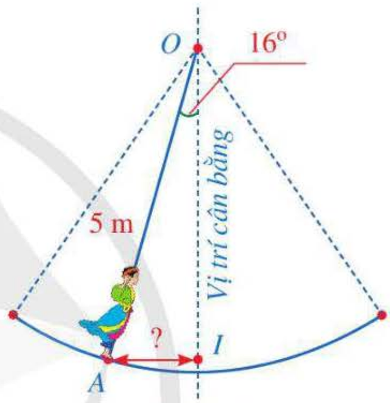
Từ *Hình 14*, ta có:

$$x = 3 \,.\, \cos 54^\circ \approx 1{,}76 \text{ (cm)};$$

$$y = 3 \,.\, \sin 54^\circ \approx 2{,}43 \text{ (cm)}.$$

1 Tính độ cao AC trong *Hình 12b* khi $BC = 20$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

Ví dụ 2 Trong trò chơi đánh đu của một lễ hội vào mùa xuân, khi người chơi nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi dao động quanh vị trí cân bằng. *Hình 15* minh hoạ người chơi đang ở vị trí A với $OA = 5$ m và dây OA tạo với phương thẳng đứng một góc là $\widehat{AOI} = 16^\circ$. Tính khoảng cách AI (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét)?



Hình 15

Giải

Vì tam giác OAI vuông tại I nên

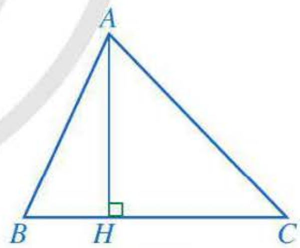
$$AI = OA \,.\, \sin \widehat{AOI} = 5 \,.\, \sin 16^\circ \approx 1{,}38 \text{ (m)}.$$

Ví dụ 3 Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH.

a) Biểu thị AH theo AB và tỉ số lượng giác của góc B.

b) Chứng minh

$$AB \,.\, \sin B = AC \,.\, \sin C.$$



Hình 16

Giải. (*Hình 16*)

a) Vì tam giác ABH vuông tại H nên

$$AH = AB \,.\, \sin B.$$

b) Vì tam giác ACH vuông tại H nên

$$AH = AC \,.\, \sin C.$$

Ta có:

$$AH = AB \,.\, \sin B \text{ và } AH = AC \,.\, \sin C$$

nên $\quad AB \,.\, \sin B = AC \,.\, \sin C.$

2 Cho tam giác nhọn ABC có đường cao CK. Biểu thị CK theo AC và $\sin A$. Từ đó, chứng minh diện tích tam giác ABC bằng

$$\frac{1}{2} \cdot AB \,.\, AC \,.\, \sin A.$$

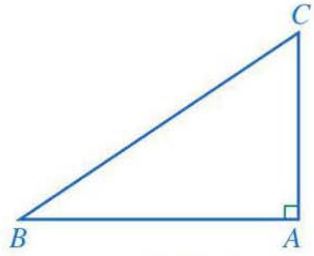
II. TÍNH CẠNH GÓC VUÔNG THEO CẠNH GÓC VUÔNG CÒN LẠI VÀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

2 Cho tam giác ABC vuông tại A (*Hình 17*).

a) Biểu diễn tan B, cot C theo AB, AC.

b) Viết công thức tính AC theo AB và tan B.

b) Viết công thức tính AC theo AB và cot C.



Hình 17

Ta có định lí:

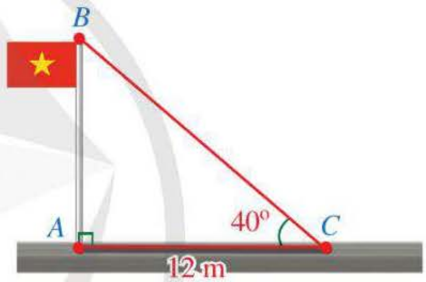
Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang của góc đối hoặc nhân với côtang của góc kề.

Trong *Hình 17*, ta có:

$$AC = AB \cdot \tan B = AB \cdot \cot C;$$

$$AB = AC \cdot \tan C = AC \cdot \cot B.$$

Ví dụ 4 Tam giác ABC ở *Hình 18* (có $\widehat{A} = 90^\circ$) mô tả cột cờ AB và bóng nắng của cột cờ trên mặt đất là AC. Người ta đo được độ dài $AC = 12$ m và $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính chiều cao AB của cột cờ (làm tròn kết quả đến phần trăm của mét).



Hình 18

Giải

Vì tam giác ABC vuông tại A nên

$$AB = AC \cdot \tan C = 12 \cdot \tan 40^\circ \approx 10{,}07 \text{ (m)}.$$

3 Tính AB trong *Hình 17* khi $AC = 4$ cm và $\widehat{B} = 34^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimét).

III. ÁP DỤNG TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN ĐỂ GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

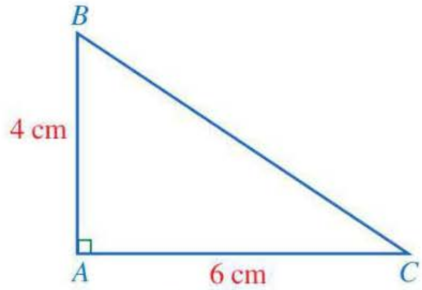
Trong một tam giác vuông, nếu cho biết độ dài hai cạnh hoặc độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả độ dài các cạnh và số đo các góc còn lại của tam giác đó. Bài toán đặt ra như thế gọi là bài toán "giải tam giác vuông".

Lưu ý rằng, trong kết quả của các ví dụ và bài tập dưới đây, nếu không nói gì thêm thì ta làm tròn đến độ (với số đo góc) và đến hàng phần mười (với số đo độ dài).

Ta sẽ tìm hiểu bài toán giải tam giác vuông qua những ví dụ cụ thể sau đây.

Ví dụ 5 Tìm độ dài cạnh huyền BC và số đo các góc nhọn B, C của tam giác vuông ABC, biết hai cạnh góc vuông $AB = 4$ cm và $AC = 6$ cm.

Giải. (*Hình 19*)



Hình 19

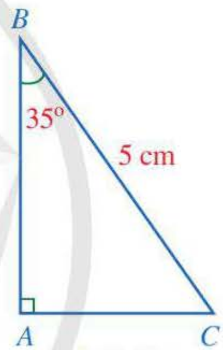
Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (theo định lí Pythagore), suy ra $BC^2 = 4^2 + 6^2 = 52$ hay $BC = \sqrt{52} \approx 7,2$ (cm);
- $\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, suy ra $\widehat{B} \approx 56^\circ$;
- $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông), suy ra $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.

4 Tìm độ dài cạnh góc vuông AC và số đo các góc nhọn B, C của tam giác vuông ABC, biết cạnh góc vuông $AB = 5$ cm và cạnh huyền $BC = 13$ cm.

Ví dụ 6 Tìm số đo góc nhọn C và độ dài hai cạnh góc vuông AB, AC của tam giác vuông ABC, biết cạnh huyền $BC = 5$ cm và $\widehat{B} = 35^\circ$.

Giải. (*Hình 20*)



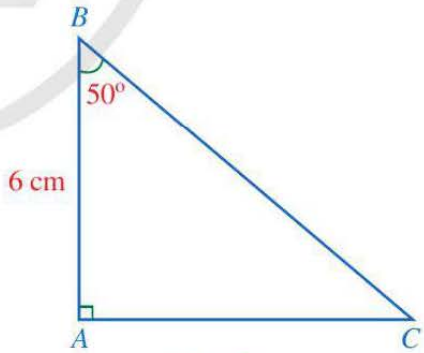
Hình 20

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

- $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông), suy ra $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$;
- $AB = BC \,.\, \cos B = 5 \,.\, \cos 35^\circ \approx 4,1$ (cm);
- $AC = BC \,.\, \sin B = 5 \,.\, \sin 35^\circ \approx 2,9$ (cm).

Ví dụ 7 Tìm số đo góc nhọn C và độ dài cạnh góc vuông AC, cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC, biết cạnh góc vuông $AB = 6$ cm và $\widehat{B} = 50^\circ$.

Giải. (*Hình 21*)



Hình 21

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

- $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn của tam giác vuông), suy ra $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$;
- $AC = AB \,.\, \tan B = 6 \,.\, \tan 50^\circ \approx 7,2$ (cm);
- $AB = BC \,.\, \cos B$ hay $BC = \dfrac{AB}{\cos B} = \dfrac{6}{\cos 50^\circ} \approx 9,3$ (cm).

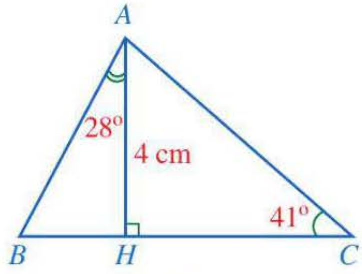
5 Tìm số đo góc nhọn C và độ dài cạnh góc vuông AB, cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC, biết cạnh góc vuông $AC = 7$ cm và $\widehat{B} = 55^\circ$.

Ví dụ 8 Trong *Hình 22*, tính độ dài của mỗi đoạn thẳng sau:

a) HB và HC;

b) AB và AC.

Giải



Hình 22

a) Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có:

$$HB = AH \,.\, \tan \widehat{BAH} = 4 \,.\, \tan 28^{\circ} \approx 2{,}1 \text{ (cm)}.$$

Vì tam giác ACH vuông tại H nên

$$HC = AH \,.\, \cot C = 4 \,.\, \cot 41^{\circ} \approx 4{,}6 \text{ (cm)}.$$

b) Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có:

$$\cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB}$$

hay $AB = \dfrac{AH}{\cos \widehat{BAH}} = \dfrac{4}{\cos 28^{\circ}} \approx 4{,}5$ (cm).

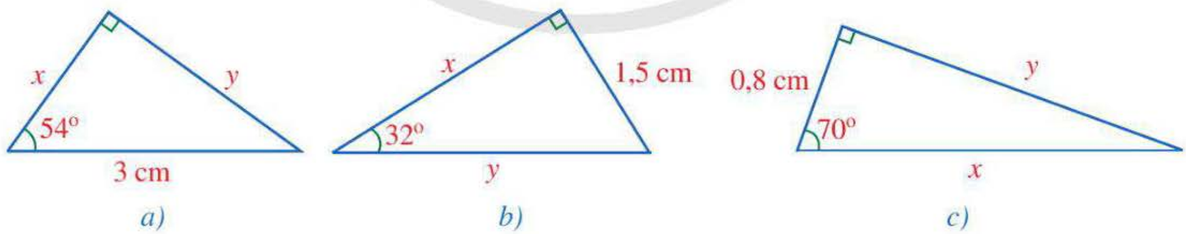
Do tam giác ACH vuông tại H nên $\sin C = \dfrac{AH}{AC}$

hay $AC = \dfrac{AH}{\sin C} = \dfrac{4}{\sin 41^{\circ}} \approx 6{,}1$ (cm).

6 Cho hình chữ nhật $ABCD$ thoả mãn $AC = 6$ cm, $\widehat{BAC} = 47^{\circ}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AD.

BÀI TẬP

1. Tìm x, y trong mỗi hình *23a*, *23b*, 23*c* (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimét).



Hình 23

2. Cho tam giác ABC có đường cao $AH = 6$ cm, $\widehat{B} = 40^{\circ}$, $\widehat{C} = 35^{\circ}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BH, AC, BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của centimét).

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^{\circ}$. Chứng minh $AC = \dfrac{1}{2}BC$.

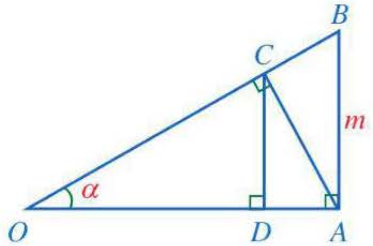
4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Chứng minh $AB = AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BC$.

5. Trong *Hình 24*, cho $\widehat{O} = \alpha$, $AB = m$ và $\widehat{OAB} = \widehat{OCA} = \widehat{ODC} = 90^\circ$. Chứng minh:

a) $OA = m \cdot \cot \alpha$;

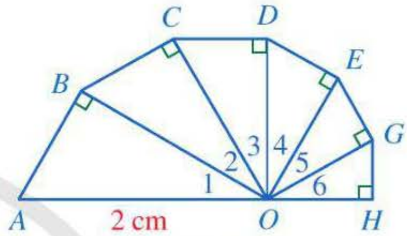
b) $AC = m \cdot \cos \alpha$;

c) $CD = m \cdot \cos^2 \alpha$.



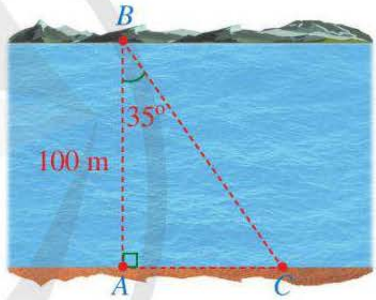
Hình 24

6. Tính độ dài đường gấp khúc $ABCDEGH$, biết các tam giác OAB, OBC, OCD, ODE, OEG, OGH là các tam giác vuông tại các đỉnh lần lượt là B, C, D, E, G, H; các góc O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 đều bằng 30° và $OA = 2$ cm (*Hình 25*).



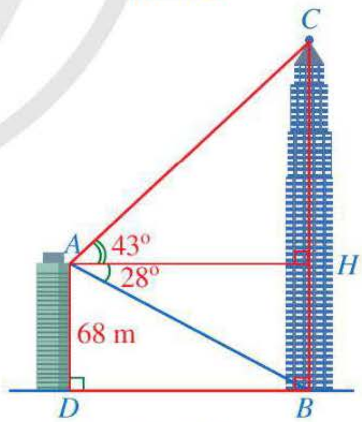
Hình 25

7. *Hình 26* minh hoạ một phần con sông có bề rộng $AB = 100$ m. Một chiếc thuyền đi thẳng từ vị trí B bên này bờ sông đến vị trí C bên kia bờ sông. Tính quãng đường BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết $\widehat{ABC} = 35^\circ$.



Hình 26

8. Từ vị trí A ở phía trên một toà nhà có chiều cao $AD = 68$ m, bác Duy nhìn thấy vị trí C cao nhất của một tháp truyền hình, góc tạo bởi tia AC và tia AH theo phương nằm ngang là $\widehat{CAH} = 43^\circ$. Bác Duy cũng nhìn thấy chân tháp tại vị trí B mà góc tạo bởi tia AB và tia AH là $\widehat{BAH} = 28^\circ$, điểm H thuộc đoạn thẳng BC (*Hình 27*). Tính khoảng cách BD từ chân tháp đến chân toà nhà và chiều cao BC của tháp truyền hình (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

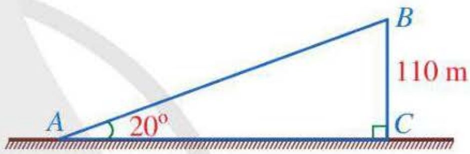


Hình 27

§3. ỨNG DỤNG CỦA TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Hình 28 minh hoạ một máy bay cất cánh từ vị trí A trên đường băng của sân bay và bay theo đường thẳng AB tạo với phương nằm ngang AC một góc là 20°. Sau 5 giây, máy bay ở độ cao $BC = 110$ m.

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)



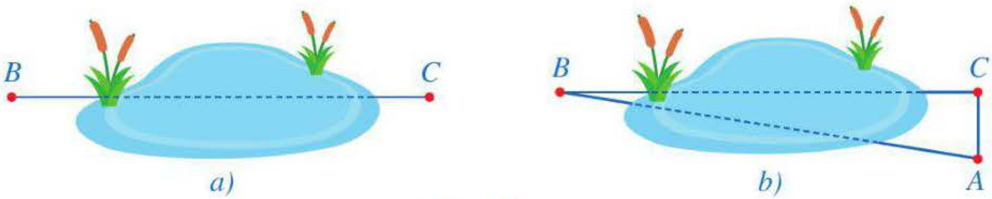
Hình 28

Có thể tính khoảng cách AB bằng cách nào?

I. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH

Từ xưa, người ta đã biết cách ứng dụng lượng giác để ước lượng khoảng cách. Bằng cách sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn, ta có thể ước lượng khoảng cách giữa hai vị trí khi khó đo trực tiếp khoảng cách giữa hai vị trí đó.

Ví dụ 1 Để đo khoảng cách giữa hai vị trí B và C khi không thể đo trực tiếp (*Hình 29a*), người ta có thể làm như sau (*Hình 29b*):



Hình 29

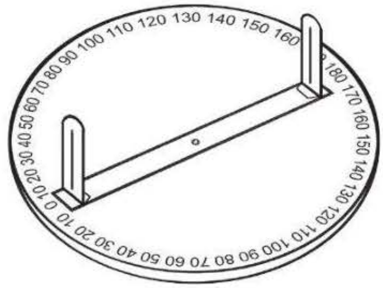
– Sử dụng giác kế (một loại dụng cụ để đo góc, xem *Hình 30*), chọn điểm A ở vị trí thích hợp sao cho góc ACB là góc vuông. Đo khoảng cách AC;

– Sử dụng giác kế để đo góc *BAC*;

– Từ đó, tính độ dài *BC*.

a) Theo cách làm trên, nêu công thức tính khoảng cách giữa hai vị trí *B*, *C*.

b) Tính khoảng cách giữa hai vị trí *B*, *C*, biết $AC = 4$ m và $\widehat{BAC} = 81^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).



Hình 30

(Nguồn: Toán 6 – Tập 2, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2011)

Giải

a) Vì tam giác *ABC* vuông tại *C* nên

$$BC = AC \,.\, \tan A.$$

b) Khi $AC = 4$ m và $\widehat{BAC} = 81^\circ$, ta có:

$$BC = 4 \,.\, \tan 81^\circ \approx 25{,}26 \text{ (m)}.$$

1 Hãy giải bài toán ở phần mở đầu và tính *AB* trong *Hình 29b* (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).

Ví dụ 2 Năm 1990, tháp nghiêng ở thành phố Pisa (Italia) bắt đầu quá trình trùng tu nhằm giảm độ nghiêng của tháp. Sau 10 năm trùng tu, vào năm 2001, các kĩ sư đã thành công trong việc đưa độ nghiêng của tháp chỉ còn khoảng 4° (*Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Leaning_Tower_of_Pisa*). Giả sử một người đứng trên tháp (tại vị trí *A*), cách mặt đất một khoảng là $AH = 45$ m, thả một vật rơi xuống đất (*Hình 31*). Tính khoảng cách từ vị trí chạm đất (vị trí *H*) đó đến chân tháp (vị trí *B*) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).

Hình 31

Giải

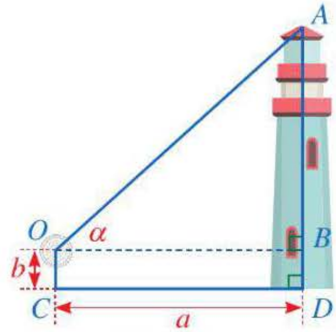
Xét tam giác *ABH* vuông tại *H*, ta có:

$$BH = AH \,.\, \tan A = 45 \,.\, \tan 4^\circ \approx 3{,}15 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách từ vị trí chạm đất đến chân tháp là khoảng 3,15 m.

II. ƯỚC LƯỢNG CHIỀU CAO

Ví dụ 3 Để ước lượng chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh tháp, người ta sử dụng giác kế, thước cuộn, máy tính cầm tay. Chẳng hạn, ở *Hình 32*, để đo chiều cao *AD* của tháp, người ta đặt giác kế tại một điểm quan sát cách chân tháp một khoảng $CD = OB = a$, trong đó chiều cao của điểm đặt giác kế



Hình 32

là $OC = b$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm thanh này ta nhìn thấy đỉnh A của tháp, đọc trên giác kế số đo α của góc AOB. Tính chiều cao của tháp, biết $\alpha = 42^o$; $b = 13,81$ m; $a = 90$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét).

Giải

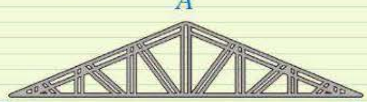
Vì tam giác OAB vuông tại B nên

$$AB = OB \cdot \tan \widehat{AOB} = 90 \cdot \tan 42^o \approx 81,04 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của tháp khoảng:

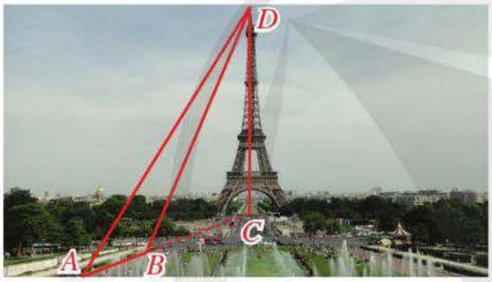
$$81,04 + 13,81 = 94,85 \text{ (m)}.$$

2 Mặt cắt đứng của khung thép có dạng tam giác cân ABC với $\widehat{B} = 23^o$, $AB = 4$ m (*Hình 33*). Tính độ dài đoạn thẳng BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



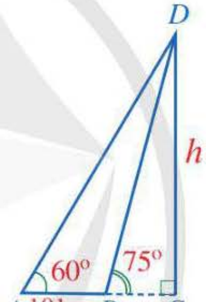
Hình 33

Ví dụ 4 Trong lần đến tham quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Vân muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Vân đã minh hoạ lại kết quả đo đạc ở *Hình 34*. Em hãy giúp bạn Vân tính độ cao h của tháp Eiffel theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Tháp Eiffel

(*Nguồn: https://pixabay.com*)



Hình 34

Giải

Xét tam giác ADC vuông tại C, ta có: $AC = h \cdot \cot \widehat{DAC} = h \cdot \cot 60^o$.

Xét tam giác BDC vuông tại C, ta có: $BC = h \cdot \cot \widehat{DBC} = h \cdot \cot 75^o$.

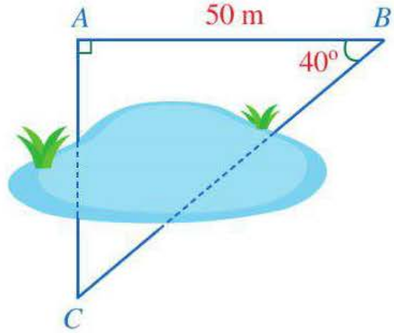
Do $AC - BC = AB = 101$ nên

$$h \cdot \cot 60^o - h \cdot \cot 75^o = 101 \text{ hay } h \cdot (\cot 60^o - \cot 75^o) = 101.$$

Suy ra $h = \dfrac{101}{\cot 60^o - \cot 75^o} \approx 326$ (m). Vậy tháp Eiffel có độ cao khoảng 326 m.

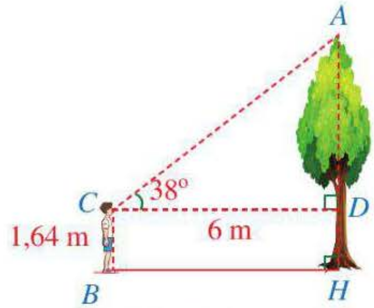
BÀI TẬP

1. *Hình 35* mô tả ba vị trí A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ C đến A và từ C đến B. Biết $AB = 50$ m, $\widehat{ABC} = 40^o$. Tính các khoảng cách CA và CB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).



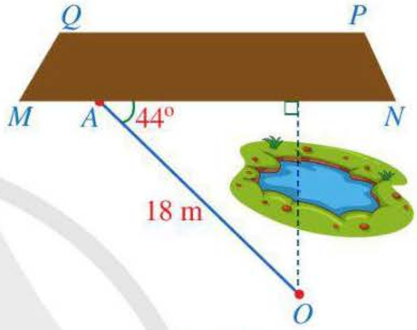
Hình 35

2. Để ước lượng chiều cao của một cây trong sân trường, bạn Hoàng đứng ở sân trường (theo phương thẳng đứng), mắt bạn Hoàng đặt tại vị trí C cách mặt đất một khoảng $CB = DH = 1{,}64$ m và cách cây một khoảng $CD = BH = 6$ m. Tính chiều cao AH của cây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét), biết góc nhìn ACD bằng 38° minh hoạ ở *Hình 36*.



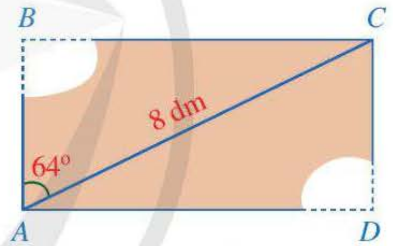
Hình 36

3. Trong công việc, người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí O đến khu đất có dạng hình thang $MNPQ$ nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng MN. Người ta chọn vị trí A ở đáy MN và đo được $OA = 18$ m, $\widehat{OAN} = 44^\circ$ (*Hình 37*). Tính khoảng cách từ vị trí O đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).



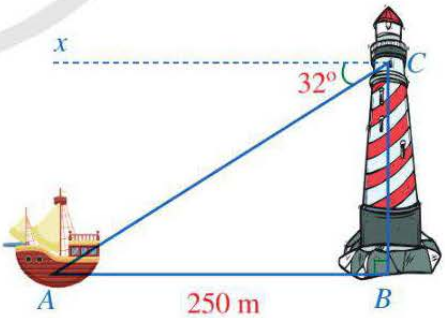
Hình 37

4. Một mảnh gỗ có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với đường chéo $AC = 8$ dm. Do bảo quản không tốt nên mảnh gỗ bị hỏng phía hai đỉnh B và D. Biết $\widehat{BAC} = 64^\circ$ (*Hình 38*). Người ta cần biết độ dài AB và AD để khôi phục lại mảnh gỗ ban đầu. Độ dài AB, AD bằng bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 38

5. Trên mặt biển, khi khoảng cách AB từ ca nô đến chân tháp hải đăng là 250 m, một người đứng trên tháp hải đăng đó nhìn về phía ca nô theo phương CA tạo với phương nằm ngang Cx một góc là $\widehat{ACx} = 32^\circ$ (*Hình 39*). Tính chiều cao của tháp hải đăng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết $AB \parallel Cx$ và độ cao từ tầm mắt của người đó đến đỉnh tháp hải đăng là 3,2 m.



Hình 39

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và $\widehat{B} = \alpha$ (*Hình 40*).

a) Tỉ số $\dfrac{HA}{HB}$ bằng

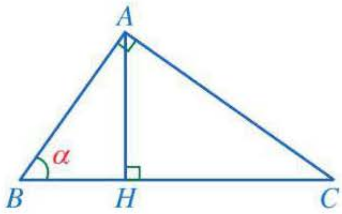
A. $\sin \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $\cot \alpha$.

b) Tỉ số $\dfrac{HA}{HC}$ bằng

A. $\sin \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $\cot \alpha$.

c) Tỉ số $\dfrac{HA}{AC}$ bằng

A. $\sin \alpha$. B. $\cos \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $\cot \alpha$.



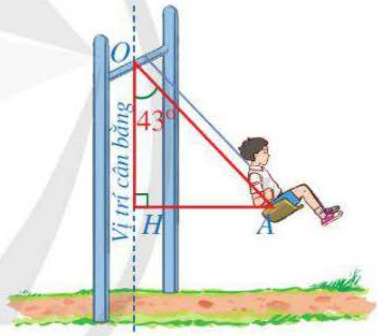
Hình 40

2. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$, $\widehat{BAD} = 2\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Chứng minh:

a) $BD = 2a \, . \sin \alpha$;

b) $AC = 2a \, . \cos \alpha$.

3. Trong trò chơi xích đu ở *Hình 41*, khi dây căng xích đu (không dãn) $OA = 3$ m tạo với phương thẳng đứng một góc là $\widehat{AOH} = 43^\circ$ thì khoảng cách AH từ em bé đến vị trí cân bằng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

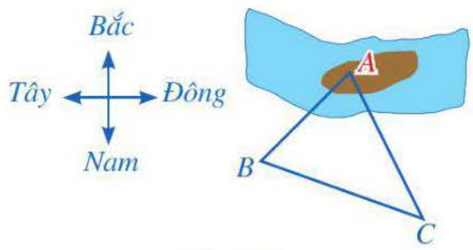


Hình 41

4. Một người đứng ở vị trí B trên bờ sông muốn sử dụng la bàn để ước lượng khoảng cách từ vị trí đó đến một vị trí A ở trên một cù lao giữa dòng sông. Người đó đã làm như sau:

– Sử dụng la bàn, xác định được phương BA lệch với phương Nam – Bắc về hướng Đông 52°.

– Người đó di chuyển đến vị trí C, cách B một khoảng là 187 m. Sử dụng la bàn, xác định được phương CA lệch với phương Nam – Bắc về hướng Tây 27°; CB lệch với phương Nam – Bắc về hướng Tây 70° (*Hình 42*).



Hình 42

Em hãy giúp người đó tính khoảng cách AB từ những dữ liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

Chương V
ĐƯỜNG TRÒN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: đường tròn, vị trí tương đối của hai đường tròn; vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn; tiếp tuyến của đường tròn; góc ở tâm, góc nội tiếp; độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn, diện tích hình vành khuyên.

§1. ĐƯỜNG TRÒN. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

(*Ảnh: Mr. Alex*)

Hình 1

Mỗi bánh xe đạp ở *Hình 1* gợi nên hình ảnh của một đường tròn.

Hai đường tròn đó có điểm chung hay không?

I. KHÁI NIỆM ĐƯỜNG TRÒN

1 Đồng hồ được mô tả ở *Hình 2* có kim phút dài 12 cm. Khi kim phút quay một vòng thì đầu mút của kim phút vạch nên đường gì?

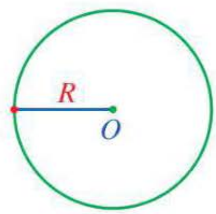
(*Ảnh: Nikki Zalewski*)

Hình 2

Trong mặt phẳng, đường tròn tâm O bán kính R là tập hợp các điểm cách điểm O một khoảng bằng R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$.

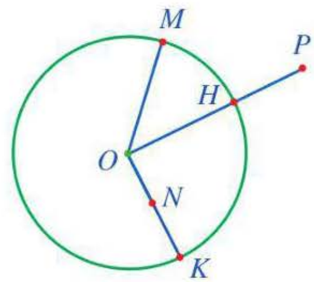
Chú ý

- Một đường tròn hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính (*Hình 3*).
- Khi không quan tâm đến bán kính của đường tròn $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu đường tròn là (O).



Hình 3

Ví dụ 1 Cho đường tròn $(O; R)$ và năm điểm M, N, P, H, K (*Hình 4*). So sánh độ dài các đoạn thẳng OM, ON, OH, OK, OP với R.



Hình 4

Giải

Vì M, H, K thuộc $(O; R)$ nên $OM = OH = OK = R$.

Ta có: $ON < OK$ nên $ON < R$;

$OP > OH$ nên $OP > R$.

1 Hãy chỉ ra một số đồ vật trong thực tiễn gợi nên hình ảnh của đường tròn.

Nhận xét

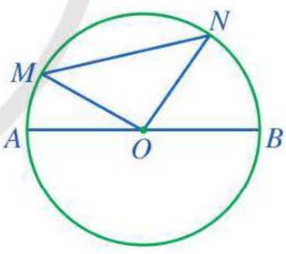
- Nếu điểm M thuộc đường tròn (O) (hay ta còn nói điểm M nằm trên đường tròn (O), hoặc đường tròn (O) đi qua điểm M) thì $OM = R$ và ngược lại.
- Nếu điểm M nằm bên trong (hay nằm trong, ở trong) đường tròn (O) thì $OM < R$ và ngược lại.
- Nếu điểm M nằm bên ngoài (hay nằm ngoài, ở ngoài) đường tròn (O) thì $OM > R$ và ngược lại.

II. LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

2 Quan sát *Hình 5*.

a) So sánh MN và $OM + ON$.

b) So sánh MN và AB.

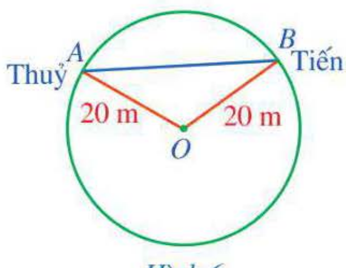


Hình 5

Chú ý

- Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt thuộc đường tròn được gọi là *dây* (hay *dây cung*) của đường tròn.
- Dây đi qua tâm là *đường kính* của đường tròn. Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Ví dụ 2 Trong một trò chơi, hai bạn Thuỷ và Tiến cùng chạy trên một đường tròn tâm O có bán kính 20 m (*Hình 6*). Có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m hay không? Vì sao?



Hình 6

Giải

Đường tròn tâm O có đường kính là:

$$2 . 20 = 40 \text{ (m)}.$$

Vì độ dài dây AB không vượt quá độ dài đường kính của đường tròn nên $AB \leq 40$. Vậy không có thời điểm nào dây AB nối vị trí của hai bạn đó có độ dài bằng 41 m.

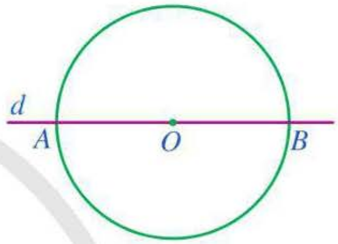
2 Cho tam giác nhọn ABC. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh $MN < BC$.

III. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

3 Cho đường tròn $(O; R)$.

a) Vẽ đường thẳng d đi qua tâm O cắt đường tròn tại A, B. So sánh OA và OB (*Hình 7*).

b) Giả sử M là một điểm tuỳ ý trên đường tròn $(O; R)$. Trên tia đối của tia OM, ta lấy điểm N sao cho $ON = OM$. Điểm N có thuộc đường tròn $(O; R)$ hay không?

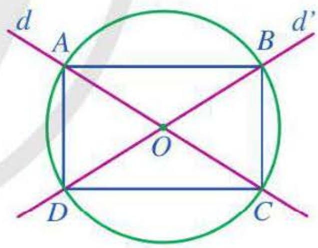


Hình 7

Nhận xét: Điểm đối xứng của một điểm tuỳ ý trên đường tròn qua tâm của đường tròn cũng nằm trên đường tròn đó.

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Ví dụ 3 Cho đường tròn $(O; R)$. Đường thẳng d đi qua tâm O, cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, C. Đường thẳng d' (khác d) đi qua tâm O, cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, D. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.



Hình 8

Giải. (*Hình 8*)

Do $OA = OC$ và $OB = OD$ nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Hình bình hành $ABCD$ có $AC = BD = 2R$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

4 Cho đường tròn $(O; R)$. Giả sử d là đường thẳng đi qua tâm O và M là một điểm tuỳ ý trên đường tròn $(O; R)$. Kẻ $MH \perp d$ ($H \in d$). Trên tia MH lấy điểm N sao cho H là trung điểm của MN (ta gọi điểm N là điểm đối xứng với điểm M qua đường thẳng d). Điểm N có thuộc đường tròn $(O; R)$ hay không?

Nhận xét: Điểm đối xứng của một điểm tuỳ ý trên đường tròn qua một đường thẳng đi qua tâm của đường tròn cũng nằm trên đường tròn đó.

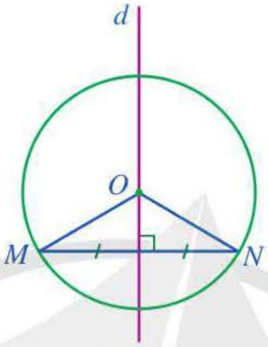
Đường tròn là hình có trục đối xứng. Mỗi đường thẳng đi qua tâm là một trục đối xứng của đường tròn đó.

Ví dụ 4 Cho dây MN của đường tròn (O). Gọi d là đường trung trực của đoạn thẳng MN. Chứng tỏ rằng đường thẳng d là một trục đối xứng của đường tròn (O).

Giải. (*Hình 9*)

Vì $OM = ON$ nên điểm O nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng MN.

Do đường thẳng d đi qua tâm của đường tròn (O) nên đường thẳng d là một trục đối xứng của đường tròn (O).



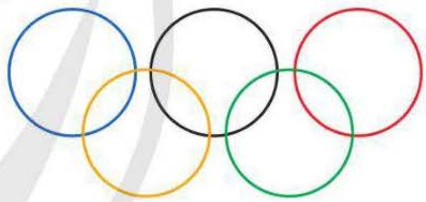
Hình 9

3 Bạn Hoa có một tờ giấy hình tròn. Nêu cách gấp giấy để xác định tâm của hình tròn đó.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Hai đường tròn cắt nhau

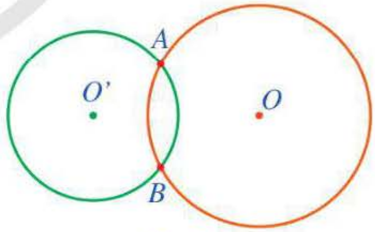
5 Bạn Đan vẽ năm vòng tròn minh hoạ cho biểu tượng của Thế vận hội Olympic như ở *Hình 10*. Hình vẽ đó thể hiện những cặp đường tròn cắt nhau. Theo em, hai đường tròn cắt nhau thì chúng có bao nhiêu điểm chung?


Hình 10

Hai đường tròn có đúng hai điểm chung gọi là hai đường tròn *cắt nhau*.

Mỗi điểm chung của hai đường tròn cắt nhau được gọi là một *giao điểm* của hai đường tròn đó.

Ở *Hình 11*, hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai giao điểm là A và B.



Hình 11

Nhận xét: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R \geq r$. Người ta chứng minh được khẳng định sau: Nếu hai đường tròn đó cắt nhau thì $R - r < OO' < R + r$. Điều ngược lại cũng đúng.

Ví dụ 5 Cho hai đường tròn $(O$; 4 cm) và $(O'$; 3 cm). Biết rằng $OO' = 5$ cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Giải

Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O), (O') lần lượt là $R = 4$ cm, $r = 3$ cm.

Do $R - r = 4 - 3 = 1$ (cm), $R + r = 4 + 3 = 7$ (cm) và $1 < 5 < 7$ nên $R - r < OO' < R + r$.

Vậy hai đường tròn $(O$; 4 cm) và $(O'$; 3 cm) cắt nhau.

4 Cho hai đường tròn $(O$; 14 cm), $(O'$; 5 cm) với $OO' = 8$ cm. Hỏi hai đường tròn đó có cắt nhau hay không?

2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau

6 *Hình 12* mô tả các ống tròn xếp lên nhau và gợi nên hình ảnh các cặp đường tròn tiếp xúc nhau. Theo em, hai đường tròn tiếp xúc nhau thì chúng có bao nhiêu điểm chung?

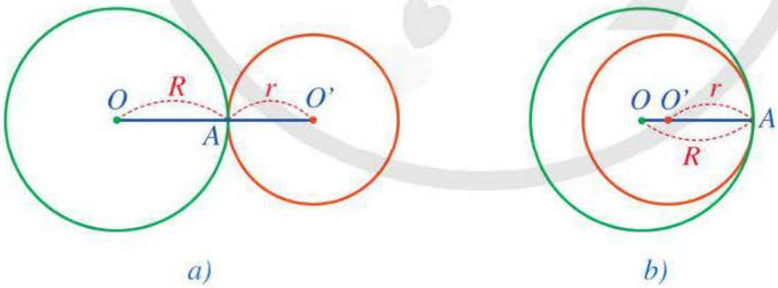
(*Ảnh: Tae PY15MU*)

Hình 12

Hai đường tròn có đúng một điểm chung gọi là hai đường tròn *tiếp xúc nhau* (tại điểm chung đó).

Điểm chung của hai đường tròn tiếp xúc nhau được gọi là *tiếp điểm*.

Ta có hai trường hợp về hai đường tròn tiếp xúc nhau: hai đường tròn *tiếp xúc ngoài* (*Hình 13a*), hai đường tròn *tiếp xúc trong* (*Hình 13b*).



Hình 13

Nhận xét: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$. Người ta chứng minh được các khẳng định sau:

- Nếu hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài (*Hình 13a*) thì tiếp điểm A nằm giữa O, O' và $OO' = R + r$. Điều ngược lại cũng đúng.
- Giả sử $R > r$. Nếu hai đường tròn đó tiếp xúc trong (*Hình 13b*) thì điểm O' nằm giữa O, A và $OO' = R - r$. Điều ngược lại cũng đúng.

Ví dụ 6 Cho hai đường tròn $(O; R)$, $(O'; R')$, ở đó $R > 2$ cm và $OO' = 6$ cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $R = 4$ cm và $R' = 2$ cm;

b) $R = 8$ cm và $R' = 2$ cm.

Giải

a) Ta thấy: $R + R' = 4 + 2 = 6$ (cm) nên $OO' = R + R'$.

Vậy hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài.

b) Ta thấy: $R - R' = 8 - 2 = 6$ (cm) nên $OO' = R - R'$.

Vậy hai đường tròn đó tiếp xúc trong.

5 Cho hai đường tròn $(O; 2{,}5$ cm$)$ và $(O'; 4{,}5$ cm$)$. Tìm độ dài OO' sao cho hai đường tròn đó tiếp xúc trong.

3. Hai đường tròn không giao nhau

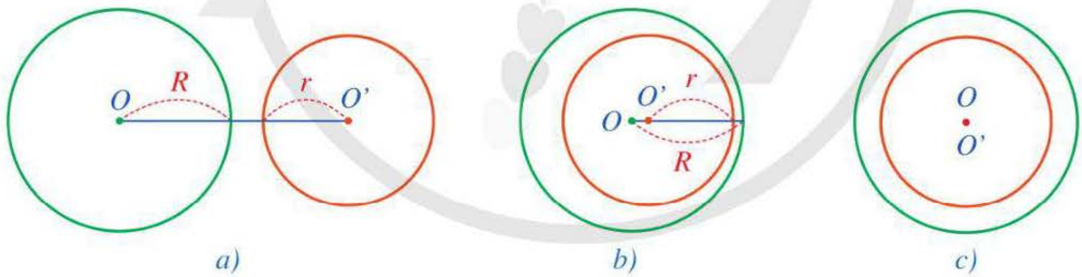
7 *Hình 14* mô tả hai bánh xe rời nhau, gợi nên hình ảnh hai đường tròn không giao nhau. Theo em, hai đường tròn không giao nhau thì có bao nhiêu điểm chung.

(*Ảnh: Gamegfx*)

Hình 14

Hai đường tròn không có điểm chung gọi là hai đường tròn *không giao nhau.*

Ta có hai trường hợp về hai đường tròn không giao nhau: hai đường tròn *ở ngoài nhau* (*Hình 15a*); đường tròn (O) *đựng* đường tròn (O') (*Hình 15b*).



Hình 15

Nhận xét: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$. Người ta chứng minh được các khẳng định sau:

- Nếu hai đường tròn ở ngoài nhau (*Hình 15a*) thì $OO' > R + r$. Điều ngược lại cũng đúng.
- Giả sử $R > r$. Nếu đường tròn (O) đựng đường tròn (O') (*Hình 15b*) thì $OO' < R - r$. Điều ngược lại cũng đúng.

Ví dụ 7 Cho hai đường tròn $(O; 6$ cm$)$ và $(O'; 2$ cm$)$. Biết rằng $OO' = 9$ cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Giải

Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O), (O') lần lượt là $R = 6$ cm, $r = 2$ cm.

Do $R + r = 6 + 2 = 8$ (cm) và $8 < 9$ nên $R + r < OO'$.

Vậy hai đường tròn $(O; 6$ cm$)$ và $(O'; 2$ cm$)$ ở ngoài nhau.

Ví dụ 8 Cho hai đường tròn $(O; 6{,}5$ cm$)$ và $(O'; 3$ cm$)$. Biết rằng $OO' = 3$ cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Giải

Ta thấy bán kính của hai đường tròn (O), (O') lần lượt là $R = 6{,}5$ cm, $r = 3$ cm.

Do $R - r = 6{,}5 - 3 = 3{,}5$ (cm) và $3 < 3{,}5$ nên $OO' < R - r$.

Vậy đường tròn $(O; 6{,}5$ cm$)$ đựng đường tròn $(O'; 3$ cm$)$.

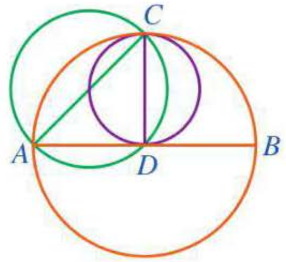
6 Cho hai đường tròn $(O; 11{,}5$ cm$)$, $(O'; 6{,}5$ cm$)$ với độ dài $OO' = 4$ cm. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Nhận xét: Ta có thể nhận biết vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$, $(O'; r)$ $(R \geq r)$ thông qua hệ thức giữa OO' với R và r được tóm tắt trong bảng sau:

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ $(R \geq r)$	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	 $OO' = R + r$ $OO' = R - r > 0$
Hai đường tròn không giao nhau: – (O) và (O') ở ngoài nhau – (O) đựng (O')	0	 $OO' > R + r$ $OO' < R - r$

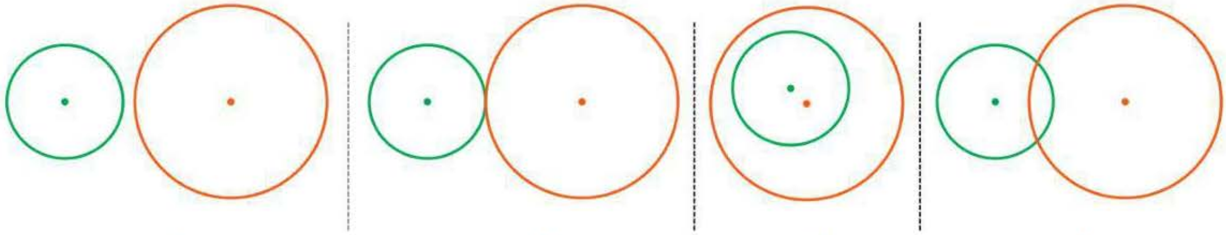
BÀI TẬP

1. Trong *Hình 16*, có ba đường tròn với các đường kính lần lượt là AB, AC, CD. Hãy sắp xếp độ dài ba đoạn thẳng AB, AC, CD theo thứ tự tăng dần và giải thích kết quả tìm được.



Hình 16

2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn trong mỗi hình *17a*, *17b*, *17c*, *17d*:



Hình 17

3. Cho đoạn thẳng MN và đường thẳng a là đường trung trực của đoạn thẳng MN. Điểm O thuộc đường thẳng a.

a) Vẽ đường tròn tâm O bán kính $R = OM$.

b) Chứng minh điểm N thuộc đường tròn $(O; R)$.

4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = R$. Tính số đo góc AOB.

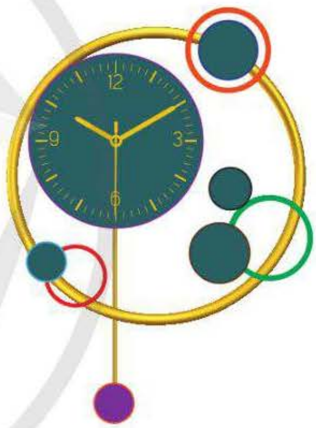
5. Chiếc đồng hồ trang trí ở *Hình 18* gợi nên vị trí tương đối của các đường tròn. Quan sát *Hình 18* và chỉ ra một cặp đường tròn:

a) Cắt nhau;

b) Tiếp xúc ngoài;

c) Tiếp xúc trong;

d) Không giao nhau.



Hình 18

6. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB khác đường kính. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Đường thẳng OM có phải là đường trung trực của đoạn thẳng AB hay không? Vì sao?

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB, biết $R = 5$ cm, $AB = 8$ cm.

7. Cho hai đường tròn cùng tâm $(O; R)$, $(O; r)$ với $R > r$. Các điểm A, B thuộc đường tròn $(O; R)$, các điểm A', B' thuộc đường tròn $(O; r)$ sao cho O, A, A' thẳng hàng; O, B, B' thẳng hàng và điểm O không thuộc đường thẳng AB. Chứng minh:

a) $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$;

b) $AB \parallel A'B'$.

§2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

(Ảnh: Djgis)

Hình 19

Vị trí của mặt trời so với đường chân trời (*Hình 19*) gợi nên hình ảnh vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

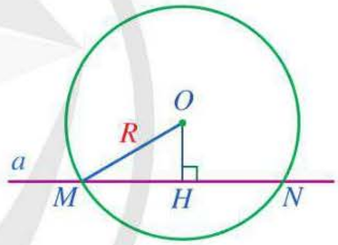
Làm thế nào để xác định được vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn?

I. ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

1 Quan sát *Hình 20*.

a) Cho biết đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ có bao nhiêu điểm chung.

b) So sánh độ dài đoạn thẳng OH và R.



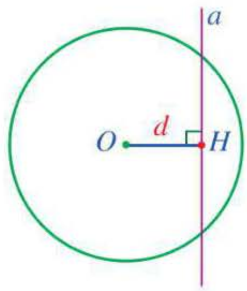
Hình 20

Khi đường thẳng và đường tròn có hai điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn *cắt nhau*.

Nếu đường thẳng và đường tròn cắt nhau thì mỗi điểm chung được gọi là một *giao điểm*.

Nhận xét: Đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R và ngược lại.

Ví dụ 1 Cho đường tròn $(O; R)$, điểm H nằm trong $(O; R)$, $OH = d$. Đường thẳng a đi qua H và vuông góc với OH. Đường thẳng a có cắt đường tròn $(O; R)$ hay không? Vì sao?



Hình 21

Giải. (*Hình 21*)

Vì điểm H nằm trong đường tròn $(O; R)$ nên $d < R$.

Do đường thẳng OH vuông góc với đường thẳng a tại điểm H (thuộc a) nên khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a bằng $OH = d$. Suy ra khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a nhỏ hơn R. Vậy đường thẳng a cắt đường tròn $(O; R)$.

1 Hãy chỉ ra một số hiện tượng trong thực tiễn gợi nên hình ảnh của đường thẳng và đường tròn cắt nhau.

II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

2 Trong bức ảnh ở *Hình 22*, sợi dây dưới cùng và bánh xe gợi nên hình ảnh đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau. Theo em, đường thẳng và đường tròn đó có bao nhiêu điểm chung?

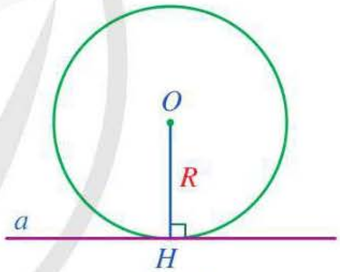
(*Ảnh: Jaka Suryanta*)

Hình 22

Khi đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn *tiếp xúc nhau* tại điểm chung đó.

Nếu đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là *tiếp tuyến* của đường tròn, điểm chung được gọi là *tiếp điểm*.

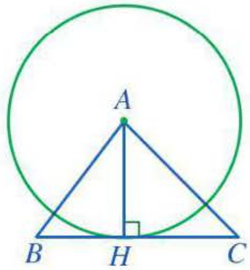
Nhận xét: Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a bằng R và ngược lại (*Hình 23*).



Hình 23

Ví dụ 2 Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Đường thẳng BC có tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$ hay không? Vì sao?

Giải. (*Hình 24*)



Hình 24

Vì $AH \perp BC$ và H thuộc đường thẳng BC nên khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC bằng AH. Do đó, khoảng cách từ tâm A của đường tròn $(A; AH)$ đến đường thẳng BC bằng bán kính AH của đường tròn.

Vậy đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$.

2 Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Đường thẳng AB có tiếp xúc với đường tròn $(C; 4\text{ cm})$ hay không? Vì sao?

III. ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG GIAO NHAU

3 Trong *Hình 25*, cột thẳng đứng và biển quảng cáo có dạng hình tròn gợi nên hình ảnh của đường thẳng và đường tròn không giao nhau. Theo em, đường thẳng và đường tròn không giao nhau thì chúng có điểm chung hay không?

(*Ảnh: Artisans Arena*)

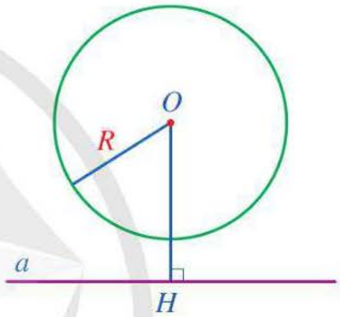
Hình 25

Khi đường thẳng và đường tròn không có điểm chung, ta nói đường thẳng và đường tròn *không giao nhau*.

4 Quan sát *Hình 26*.

a) Cho biết đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ có bao nhiêu điểm chung.

b) So sánh độ dài đoạn thẳng OH và R.



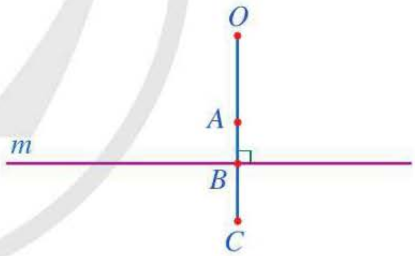
Hình 26

Nhận xét: Đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau khi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn R và ngược lại.

Ví dụ 3 Cho điểm O và đường thẳng a thoả mãn khoảng cách từ O đến đường thẳng a bằng 3 cm. Giải thích vì sao đường thẳng a và đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ không giao nhau.

Giải

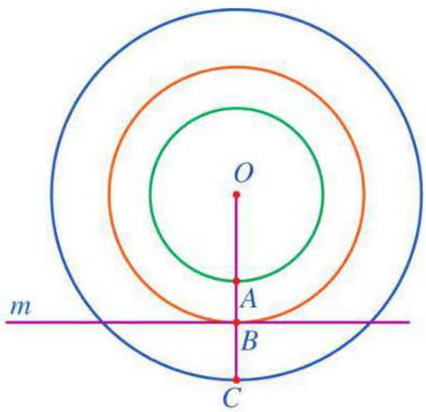
Vì $3 > 2$ nên khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a lớn hơn bán kính của đường tròn $(O; 2\text{ cm})$. Vậy đường thẳng a và đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ không giao nhau.



Hình 27

Ví dụ 4 Cho bốn điểm O, A, B, C thẳng hàng như trong *Hình 27*. Giả sử đường thẳng m đi qua B và vuông góc với đường thẳng OC. Nêu vị trí tương đối của đường thẳng m và ba đường tròn cùng tâm O lần lượt đi qua các điểm A, B, C.

Giải. (*Hình 28*)



Hình 28

Đặt $OB = d$. Khi đó, d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng m.

– Vì $OA < OB$ và $OB = d$ nên $OA < d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OA)$ không giao nhau.

– Vì $OB = d$ nên đường thẳng m và đường tròn $(O; OB)$ tiếp xúc nhau.

– Vì $OC > OB$ và $OB = d$ nên $OC > d$. Vậy đường thẳng m và đường tròn $(O; OC)$ cắt nhau.

3 Cho điểm O và đường thẳng a thoả mãn khoảng cách từ O đến đường thẳng a bằng 4 cm. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng a và các đường tròn $(O; 3\text{ cm})$, $(O; 4\text{ cm})$, $(O; 5\text{ cm})$.

Nhận xét: Ta có thể nhận biết vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ thông qua hệ thức giữa khoảng cách d từ tâm O đến đường thẳng a và bán kính R được tóm tắt trong bảng sau:

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	**Số điểm chung**	**Hệ thức giữa d và R**
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

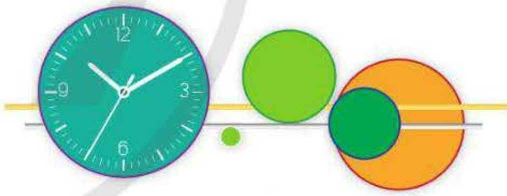
BÀI TẬP

1. Đồng hồ treo tường trang trí ở *Hình 29* gợi nên vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Quan sát *Hình 29* và chỉ ra hình ảnh đường thẳng và đường tròn:

a) Cắt nhau;

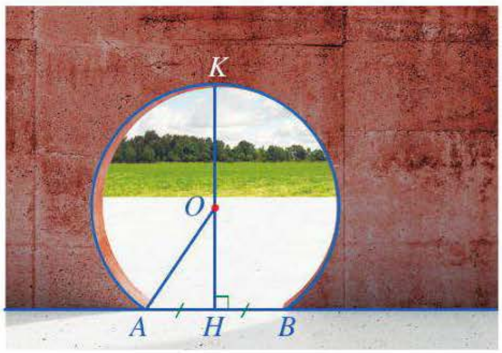
b) Tiếp xúc nhau;

c) Không giao nhau.



Hình 29

2. Trong *Hình 30*, mép ngoài cửa ra vào có dạng một phần của đường tròn bán kính 1,6 m. Hãy tính chiều cao HK của cửa đó, biết $AH = 0{,}9$ m.



(*Ảnh: Evannovostro*)

Hình 30

3. Trên mặt phẳng, một vật nhỏ chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính 2 m, một vật nhỏ khác chuyển động trên đường thẳng a sao cho khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a bằng 3 m. Hai vật nhỏ có bao giờ gặp nhau không?

4. Cho bốn điểm O, M, N, P cùng nằm trên một đường thẳng sao cho điểm M nằm giữa hai điểm O và N; điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Gọi a, b, c lần lượt là các đường thẳng đi qua M, N, P và vuông góc với đường thẳng OP. Xác định vị trí tương đối của mỗi đường thẳng a, b, c và đường tròn $(O; ON)$.

5. Cho điểm O và đường thẳng a không đi qua O.

a) Vẽ điểm H là hình chiếu của điểm O trên đường thẳng a.

b) Từ đó, vẽ ba đường tròn tâm O lần lượt: không giao với đường thẳng a; tiếp xúc với đường thẳng a; cắt đường thẳng a tại hai điểm phân biệt.

TÌM TÒI – MỞ RỘNG (Đọc thêm)

Xác định vị trí của đèn tín hiệu cứu hộ

Ở những vùng núi cao có nhiều tuyết, những người leo núi hoặc trượt tuyết có thể bị tuyết lở vùi lấp. Vì thế, mỗi người đều phải mang theo đèn tín hiệu cứu hộ tuyết lở. Đó là một thiết bị nhỏ phát ra tín hiệu chỉ có thể bắt được trong một hình tròn có bán kính nhất định.

Nếu một người không may bị tuyết lở vùi lấp, quy trình cứu hộ thường được xây dựng như sau:

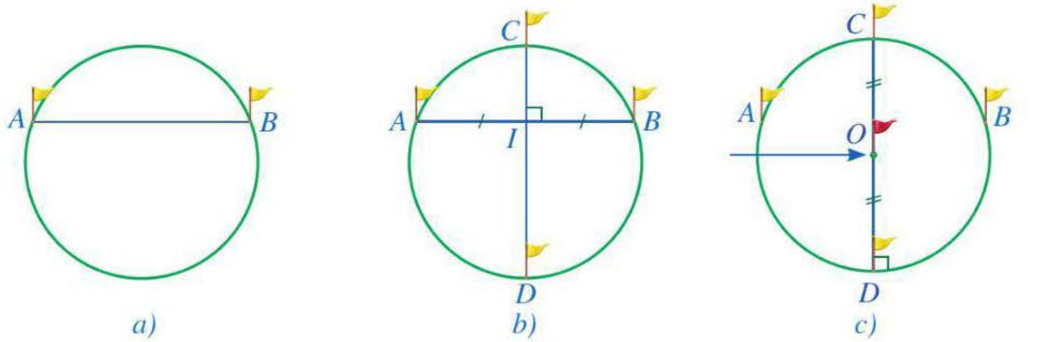
• Trước hết, đội cứu hộ dự đoán vùng có thể nhận biết tín hiệu phát ra từ đèn tín hiệu.

• Một thành viên của đội cứu hộ đi vào vùng đó cho đến khi nhận được tín hiệu phát ra. Người đó tiếp tục đi thẳng cho đến điểm đầu tiên không nhận được tín hiệu phát ra nữa, cắm ngọn cờ tại vị trí *A* đó. Người đó quay ngược lại và đi thẳng cho đến điểm đầu tiên không nhận được tín hiệu phát ra nữa, cắm ngọn cờ tại vị trí *B* đó (*Hình 31a*).

• Xác định trung điểm *I* của đoạn thẳng *AB*. Xuất phát từ điểm *I* và đi theo hướng vuông góc với đoạn thẳng *AB* cho đến điểm đầu tiên không nhận được tín hiệu phát ra nữa, cắm ngọn cờ tại vị trí *C* đó. Người đó quay ngược lại và đi theo tia *CI* cho đến điểm đầu tiên không nhận được tín hiệu phát ra nữa, cắm ngọn cờ tại vị trí *D* đó (*Hình 31b*).

• Xác định trung điểm *O* của đoạn thẳng *CD* (*Hình 31c*). Đây chính là nơi đèn tín hiệu phát ra (hoặc rất gần với nơi có đèn tín hiệu).

(Nguồn: https://mountaineers.org)



Hình 31

§3. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Quan sát máy mài đang hoạt động (*Hình 32*), ta thấy các mảnh vụn sắt chuyển động và văng ra theo phương tiếp tuyến với đường tròn mép đĩa mài.

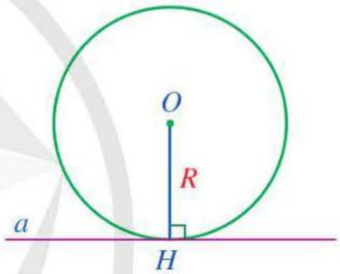
Tiếp tuyến của đường tròn có tính chất gì và được nhận biết như thế nào?

(*Ảnh: Elisanth*)

Hình 32

I. NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1 Cho đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$. Gọi H là hình chiếu của tâm O trên đường thẳng a (*Hình 33*).



Hình 33

a) So sánh khoảng cách OH từ tâm O đến đường thẳng a và bán kính R.

b) Điểm H có thuộc đường tròn $(O; R)$ hay không?

c) Điểm H có phải là tiếp điểm của đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ hay không?

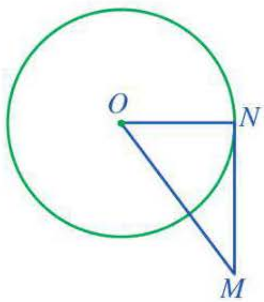
d) Đường thẳng a có vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm hay không?

Nhận xét: Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì đường thẳng đó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Ví dụ 1 Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ thoả mãn $OM = 5$ cm. Đường thẳng MN đi qua M và tiếp xúc với đường tròn (O) tại N.

a) Tam giác OMN có phải là tam giác vuông hay không? Vì sao?

b) Tính độ dài đoạn thẳng MN.



Hình 34

Giải. (*Hình 34*)

a) Vì đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại N nên $ON \perp MN$. Suy ra tam giác OMN vuông tại N.

b) Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác OMN vuông tại N, ta có: $OM^2 = ON^2 + MN^2$, suy ra $5^2 = 3^2 + MN^2$.

Do đó $MN^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Vậy $MN = \sqrt{16} = 4$ (cm).

1 Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó B nằm giữa A và C. Đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng AB tại điểm C. Chứng minh

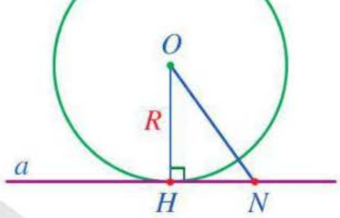
$$AO^2 + BC^2 = BO^2 + AC^2.$$

2 Cho đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ thoả mãn đường thẳng a đi qua điểm H thuộc đường tròn $(O; R)$ và $a \perp OH$ (*Hình 35*).

a) So sánh khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a và bán kính R.

b) Giả sử N là điểm thuộc đường thẳng a và N khác H. So sánh ON và R. Điểm N có thuộc đường tròn $(O; R)$ hay không?

c) Đường thẳng a có phải là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ hay không?



Hình 35

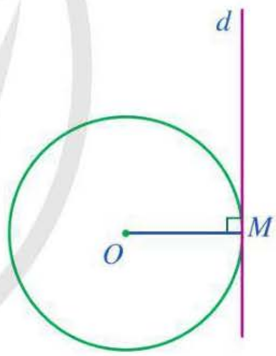
Định lí sau đây cho ta dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn:

> Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 2 Cho đường tròn (O) và điểm M thuộc đường tròn. Hãy nêu cách vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm M.

Giải

Vẽ đường thẳng d đi qua M và vuông góc với OM. Do điểm M thuộc đường tròn $(O; OM)$ và $d \perp OM$ nên đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) (*Hình 36*).



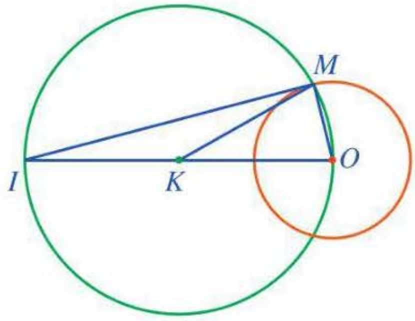
Hình 36

2 Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài nhau tại điểm I. Gọi d là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại điểm I. Chứng minh d là tiếp tuyến của $(O'; R')$.

Ví dụ 3 Cho đường tròn (O) và điểm I ở ngoài đường tròn. Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm K đường kính IO và đường tròn (O). Chứng minh đường thẳng IM là tiếp tuyến của (O) tại M.

Giải. (*Hình 37*)

Vì IO, KM lần lượt là đường kính, bán kính của đường tròn (K) nên $KM = \frac{1}{2}IO$. Xét tam giác IMO, ta có: đường trung tuyến MK ứng với cạnh IO bằng nửa cạnh ấy, suy ra tam giác IMO vuông tại M. Do đó $IM \perp MO$ tại M với $M \in (O)$. Vậy đường thẳng IM là một tiếp tuyến của (O) tại M.



Hình 37

Nhận xét: Cho điểm I nằm ngoài đường tròn (O). Từ *Ví dụ 3*, ta có thể vẽ đường thẳng đi qua điểm I và tiếp xúc với đường tròn (O) như sau:

– Vẽ trung điểm K của đoạn thẳng IO;

– Vẽ đường tròn tâm K bán kính KO, cắt đường tròn (O) tại một giao điểm M.

Khi đó đường thẳng IM là một tiếp tuyến cần vẽ.

3 Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Chứng minh đường thẳng $O'B$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

II. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

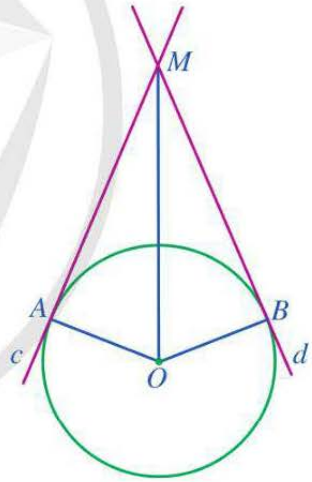
3 Cho đường tròn $(O; R)$. Các đường thẳng c, d lần lượt tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại A, B và cắt nhau tại M (*Hình 38*).

a) Các tam giác MOA và MOB có bằng nhau hay không?

b) Hai đoạn thẳng MA và MB có bằng nhau hay không?

c) Tia MO có phải là tia phân giác của góc AMB hay không?

d) Tia OM có phải là tia phân giác của góc AOB hay không?



Hình 38

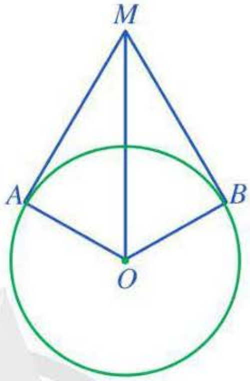
Nhận xét: Góc AOB được gọi là góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm; góc AMB được gọi là góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

Định lí sau đây nêu lên tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn:

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:
- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm;
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;
- Tia kẻ từ tâm đường tròn đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

Ví dụ 4 Một chiếc gương có dạng hình tròn được treo bằng hai sợi dây không dãn, mỗi sợi dây đều tiếp xúc với gương (*Hình 39*). Biết tổng độ dài hai dây treo là 6 dm và góc giữa hai sợi dây là 60°. Hỏi bán kính của chiếc gương là bao nhiêu decimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hình 39



Hình 40

Giải

Giả sử chiếc gương được minh hoạ bởi đường tròn (O), hai sợi dây treo là hai tiếp tuyến cắt nhau MA, MB của đường tròn (O), trong đó $MA + MB = 6$ dm và $\widehat{AMB} = 60^\circ$ (*Hình 40*).

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $MA = MB$ và $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$, suy ra $MA = 3$ dm và $\widehat{OMA} = 30^\circ$.

Xét tam giác OMA vuông tại A, ta có:

$OA = MA \cdot \tan \widehat{OMA} = 3 \cdot \tan 30^\circ = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}73$ (dm).

Vậy bán kính của chiếc gương là khoảng 1,73 dm.

4 Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B. Biết $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Chứng minh $AB = R$.

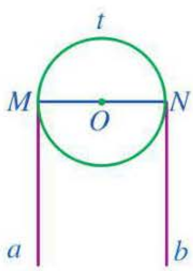
BÀI TẬP

1. Ròng rọc là một loại máy cơ đơn giản có rãnh và có thể quay quanh một trục, được sử dụng rộng rãi trong công việc nâng lên và hạ xuống vật nặng trong cuộc sống. Trong *Hình 41a*, có một sợi dây không dãn vắt qua ròng rọc.

Giả sử ròng rọc được minh hoạ bởi đường tròn (O), sợi dây vắt qua ròng rọc được minh hoạ bởi cung MtN và hai tiếp tuyến Ma, Nb của đường tròn (O) (*Hình 41b*). Chứng minh $Ma \parallel Nb$.

(*Minh hoạ: Mehmet Karabay*)

a)



b)

Hình 41

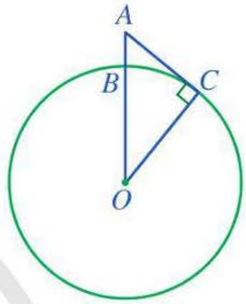
2. Cho đường tròn (O) và dây AB. Điểm M nằm ngoài đường tròn (O) thoả mãn điểm B nằm trong góc MAO và $\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Chứng minh đường thẳng MA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hai đường thẳng c, d đi qua M lần lượt tiếp xúc với (O) tại A, B. Tia phân giác của góc MAB cắt MO tại I. Chứng minh điểm I cách đều ba đường thẳng MA, MB và AB.

4. Một người quan sát đặt mắt ở vị trí A có độ cao cách mực nước biển là $AB = 5$ m. Cắt bề mặt Trái Đất bởi một mặt phẳng đi qua điểm A và tâm của Trái Đất thì phần chung giữa chúng là một đường tròn lớn tâm O như *Hình 42*. Tầm quan sát tối đa từ vị trí A là đoạn thẳng AC, trong đó C là tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A với đường tròn (O). Tính độ dài đoạn thẳng AC (theo đơn vị kilômét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười), biết bán kính Trái Đất là

$$OB = OC \approx 6\,400 \text{ km}.$$

(Nguồn: Toán 9 – Tập Một, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017)



Hình 42

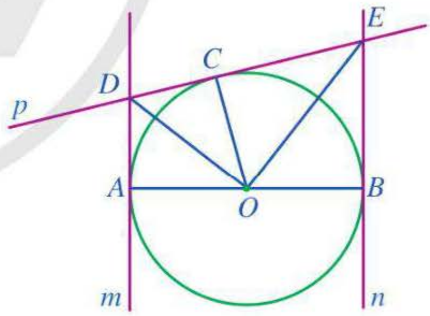
5. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và các đường thẳng m, n, p lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại A, B, C (*Hình 43*). Chứng minh:

a) $AD + BE = DE$;

b) $\widehat{COD} = \frac{1}{2}\widehat{COA}$ và $\widehat{COE} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$;

c) Tam giác ODE vuông;

d) $\frac{OD\,.\,OE}{DE} = R$.



Hình 43

§4. GÓC Ở TÂM. GÓC NỘI TIẾP

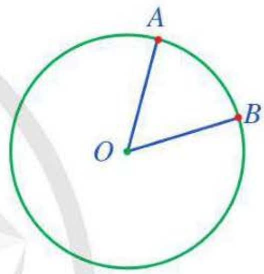
Hình 44

Bác Ngọc dự định làm khung sắt cho khuôn cửa sổ ngôi nhà có dạng đường tròn như *Hình 44*. Hai thanh chắn cửa sổ gợi nên một góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Góc có đặc điểm như vậy trong toán học gọi là góc gì?

I. GÓC Ở TÂM

1 Cho đường tròn (O). Hãy vẽ góc xOy có đỉnh là tâm O của đường tròn đó.

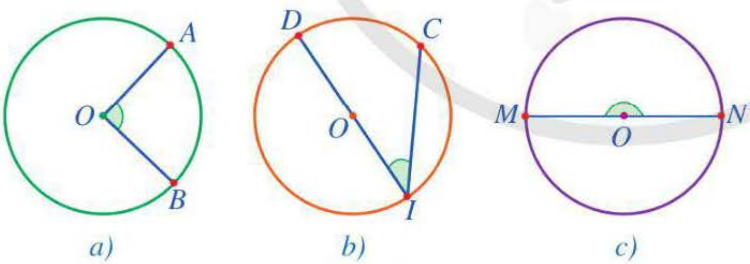


Hình 45

> Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là *góc ở tâm*.

Ở *Hình 45*, góc AOB là góc ở tâm.

Ví dụ 1 Trong các góc AOB, CID, MON ở các hình *46a*, *46b*, *46c*, góc nào là góc ở tâm, góc nào không là góc ở tâm?



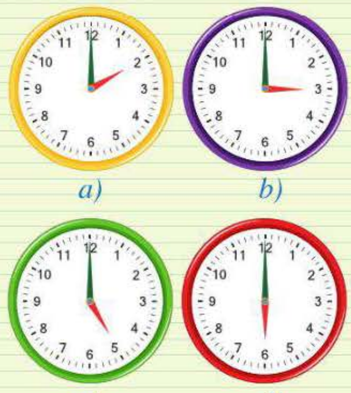
Hình 46

Giải

Hai góc AOB và MON là góc ở tâm vì có đỉnh trùng với tâm đường tròn. Góc CID không là góc ở tâm vì có đỉnh không trùng với tâm đường tròn.

Nhận xét: Đường kính chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần được gọi là một *nửa đường tròn*.

1 Trong *Hình 47*, coi mỗi khung đồng hồ là một đường tròn, kim giờ, kim phút là các tia. Số đo góc ở tâm trong mỗi hình *47a*, *47b*, *47c*, *47d* là bao nhiêu?

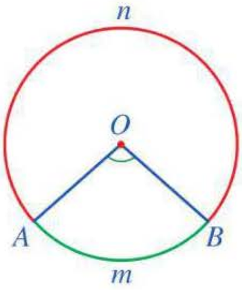


Hình 47

II. CUNG. SỐ ĐO CỦA CUNG

1. Cung

2 Quan sát góc ở tâm *AOB* (khác góc bẹt) ở *Hình 48,* cho biết trong hai phần đường tròn được tô màu xanh và màu đỏ, phần nào nằm bên trong, phần nào nằm bên ngoài góc *AOB*.



Hình 48

Chú ý

- Phần đường tròn nối liền hai điểm *A*, *B* trên đường tròn được gọi là một *cung* (hay *cung tròn*) *AB*, kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.
- Trong *Hình 48*:

  – Cung nằm bên trong góc ở tâm *AOB* được gọi là *cung nhỏ*, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$. Ta còn nói $\overset{\frown}{AmB}$ là *cung bị chắn bởi góc AOB* hay *góc AOB chắn cung nhỏ AmB.*

  – Cung nằm bên ngoài góc ở tâm *AOB* được gọi là *cung lớn*, kí hiệu là $\overset{\frown}{AnB}$.

  – Nếu có điểm *C* (khác *A* và *B*) thuộc $\overset{\frown}{AmB}$ thì ta cũng nói cung này là $\overset{\frown}{ACB}$.

  – Nếu có điểm *D* (khác *A* và *B*) thuộc $\overset{\frown}{AnB}$ thì ta cũng nói cung này là $\overset{\frown}{ADB}$.

Ví dụ 2 Trong *Hình 49*, hãy cho biết:

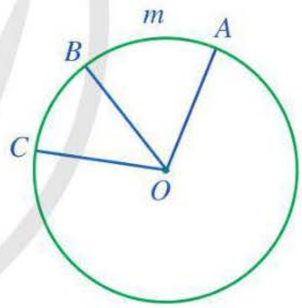
a) Cung *AmB* bị chắn bởi góc ở tâm nào;

b) Góc ở tâm *AOC* chắn cung nào.

Giải

a) Cung *AmB* bị chắn bởi góc ở tâm *AOB*.

b) Góc ở tâm *AOC* chắn cung *ABC*.



Hình 49

2. Số đo của cung

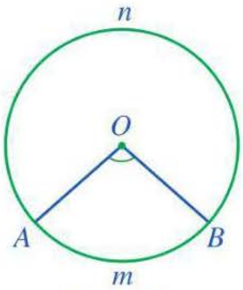
Như ta đã biết, mỗi góc có một số đo. Tương tự như đối với các góc, mỗi cung cũng có một số đo. Cụ thể, ta có định nghĩa sau:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180°.
- Số đo của cung *AB* được kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$.

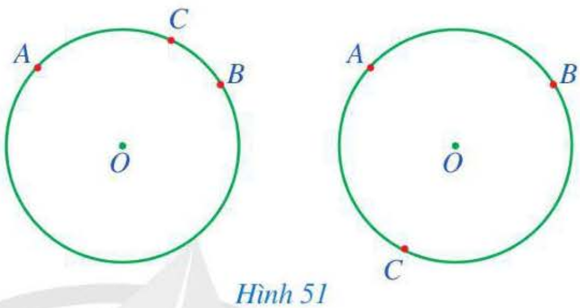
Ta quy ước: Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có "cung không" với số đo 0^o và cung cả đường tròn có số đo 360^o.

Nhận xét: Góc ở tâm chắn một cung mà cung đó là nửa đường tròn thì có số đo bằng 180^o.

Trong *Hình 50*, ta có: sđ $\overset{\frown}{AmB} = \widehat{AOB}$; sđ $\overset{\frown}{AnB} = 360^o -$ sđ $\overset{\frown}{AmB} = 360^o - \widehat{AOB}$.



Hình 50

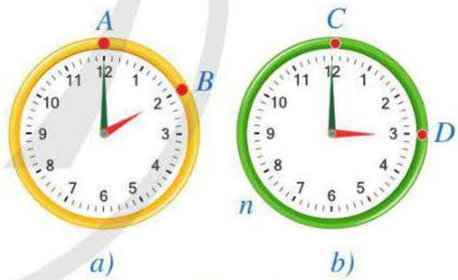


Hình 51

Cho C là một điểm nằm trên cung AB (*Hình 51*), khi đó ta nói: Điểm C *chia* cung AB thành hai cung AC và CB.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh được rằng nếu C là một điểm nằm trên cung AB (*Hình 51*) thì sđ $\overset{\frown}{ACB} =$ sđ $\overset{\frown}{AC} +$ sđ $\overset{\frown}{CB}$.

Ví dụ 3 Trong *Hình 52*, coi mỗi vành đồng hồ là một đường tròn. Tìm số đo của cung nhỏ AB và cung lớn CD.



Hình 52

Giải

– Vì số đo của cung cả đường tròn gấp sáu lần số đo cung nhỏ AB và cung cả đường tròn có số đo 360^o nên

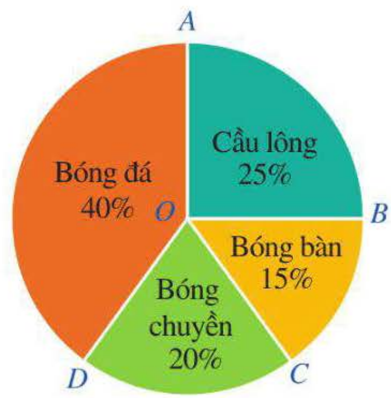
$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{6} \cdot 360^o = 60^o.$$

– Vì số đo của cung cả đường tròn gấp bốn lần số đo cung nhỏ CD và cung cả đường tròn có số đo 360^o nên

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{4} \cdot 360^o = 90^o.$$

Vậy sđ $\overset{\frown}{CnD} = 360^o - 90^o = 270^o$.

Ví dụ 4 Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 53* biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) chọn môn thể thao ưa thích nhất trong bốn môn: Cầu lông, Bóng bàn, Bóng chuyền, Bóng đá của 300 học sinh khối lớp 9 ở một trường trung học cơ sở (mỗi học sinh chỉ được chọn một môn thể thao khi được hỏi ý kiến). Tìm số đo của các góc ở tâm: $\widehat{AOB}$; $\widehat{COD}$.



Hình 53

Giải

– Do số học sinh chọn môn Cầu lông chiếm 25% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 25% số đo của cung cả đường tròn. Vì thế, sđ$\overset{\frown}{AB} = \dfrac{25}{100} \cdot 360^{\circ} = 90^{\circ}$. Vì số đo của cung nhỏ AB bằng số đo của góc ở tâm AOB chắn cung đó nên $\widehat{AOB} = 90^{\circ}$.

– Do số học sinh chọn môn Bóng chuyền chiếm 20% số lượng học sinh nên số đo cung nhỏ AB bằng 20% số đo của cung cả đường tròn.

Vì thế, sđ$\overset{\frown}{CD} = \dfrac{20}{100} \cdot 360^{\circ} = 72^{\circ}$. Vì số đo của cung nhỏ CD bằng số đo của góc ở tâm COD chắn cung đó nên $\widehat{COD} = 72^{\circ}$.

2 Trong *Hình 53*, tìm số đo của các góc ở tâm: $\widehat{BOC}$; $\widehat{DOA}$.

Chú ý

• Khác với so sánh hai góc, ta chỉ so sánh hai cung trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau. Cụ thể:

+ Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau;

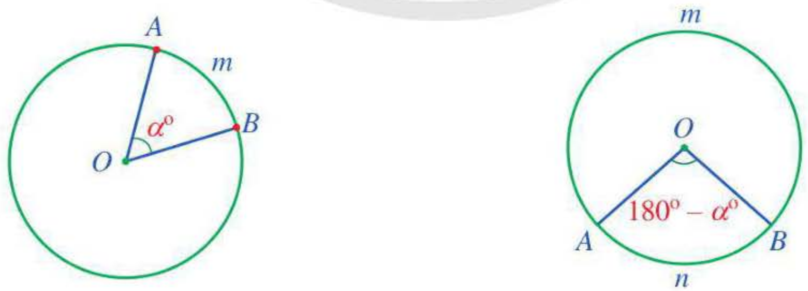
+ Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

Hai cung AB và CD bằng nhau được kí hiệu là $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Cung EG nhỏ hơn cung HK được kí hiệu là $\overset{\frown}{EG} < \overset{\frown}{HK}$. Trong trường hợp này, ta cũng nói cung HK lớn hơn cung EG và kí hiệu là $\overset{\frown}{HK} > \overset{\frown}{EG}$.

• Cho điểm A thuộc đường tròn (O) và số thực α với $0 < \alpha < 360$. Sử dụng thước thẳng và thước đo độ, ta vẽ điểm B thuộc đường tròn (O) như sau:

+ Nếu $0 < \alpha \leq 180$ thì ta vẽ theo chiều quay của kim đồng hồ góc ở tâm AOB có số đo bằng α°. Khi đó sđ$\overset{\frown}{AmB} = \alpha^{\circ}$ (*Hình 54a*).



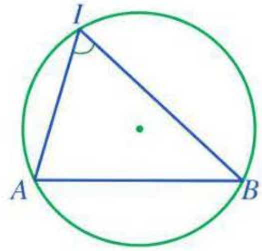
a) b)

Hình 54

+ Nếu $180 < \alpha \leq 360$ thì ta vẽ theo ngược chiều quay của kim đồng hồ góc ở tâm AOB có số đo bằng $\alpha^{\circ} - 180^{\circ}$. Khi đó sđ$\overset{\frown}{AnB} = \alpha^{\circ}$ (*Hình 54b*).

III. GÓC NỘI TIẾP

3 Trong *Hình 55*, đỉnh của góc AIB có thuộc đường tròn hay không? Hai cạnh của góc chứa hai dây cung nào của đường tròn?



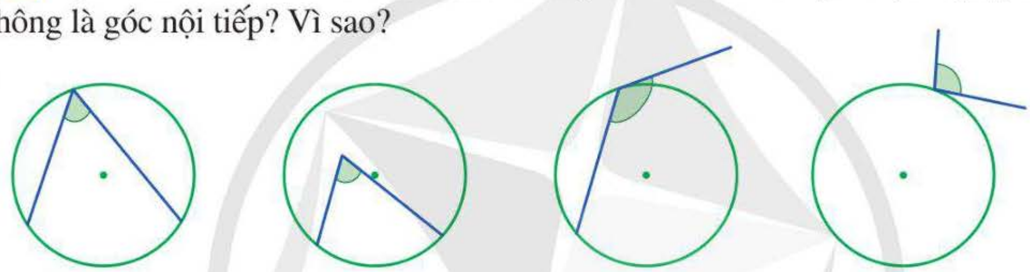
Hình 55

Ta có định nghĩa:

> *Góc nội tiếp* là góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.
> Cung nằm bên trong góc được gọi là *cung bị chắn*.

Ví dụ 5 Quan sát các hình *56a*, *56b*, *56c*, *56d*, góc ở hình nào là góc nội tiếp, góc ở hình nào không là góc nội tiếp? Vì sao?

Giải



Hình 56

Góc ở *Hình 56a* là góc nội tiếp vì góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Góc ở *Hình 56b* không là góc nội tiếp vì đỉnh không thuộc đường tròn.

Góc ở *Hình 56c* không là góc nội tiếp vì một cạnh không chứa dây cung.

Góc ở *Hình 56d* không là góc nội tiếp vì cả hai cạnh không chứa dây cung.

> **3** Hãy vẽ một đường tròn và hai góc nội tiếp trong đường tròn đó.

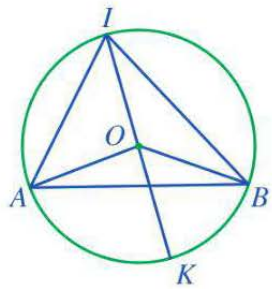
4 Cho góc AIB nội tiếp đường tròn tâm O đường kính IK sao cho tâm O nằm trong góc đó (*Hình 57*).

a) Các cặp góc $\widehat{OAI}$ và $\widehat{OIA}$; $\widehat{OBI}$ và $\widehat{OIB}$ có bằng nhau hay không?

b) Tính các tổng $\widehat{AOI} + 2\widehat{OIA}$, $\widehat{BOI} + 2\widehat{OIB}$.

c) Tính các tổng $\widehat{AOI} + \widehat{AOK}$, $\widehat{BOI} + \widehat{BOK}$.

d) So sánh $\widehat{AOK}$ và $2\widehat{OIA}$, $\widehat{BOK}$ và $2\widehat{OIB}$, $\widehat{AOB}$ và $2\widehat{AIB}$.



Hình 57

Một cách tổng quát, ta có định lí sau:

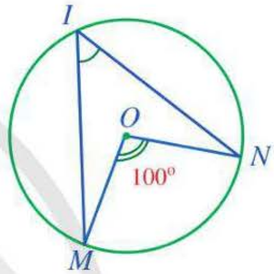
> Mỗi góc ở tâm có số đo gấp hai lần số đo góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Nhận xét: Số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.

Vì số đo của góc ở tâm bằng số đo của cung bị chắn nên từ định lí trên ta có hệ quả sau:

> Trong một đường tròn, góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn.
> Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng 90°.

Ví dụ 6 Tính số đo góc *MIN* ở *Hình 58.*



Hình 58

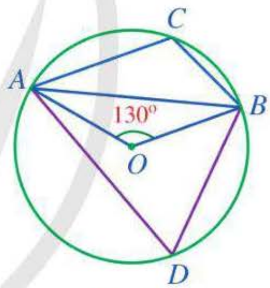
Giải

Xét đường tròn (O): Vì $\widehat{MON}$ là góc ở tâm và $\widehat{MIN}$ là góc nội tiếp cùng chắn cung MN nên

$$\widehat{MIN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ.$$

Vậy $\widehat{MIN} = 50^\circ$.

Ví dụ 7 Tìm số đo cung *ADB* và số đo góc *ACB* ở *Hình 59.*



Hình 59

Giải

Xét đường tròn (O), ta có:

sđ$\overset{\frown}{ADB} = 360^\circ -$ sđ$\overset{\frown}{ACB}$

$= 360^\circ - \widehat{AOB} = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$.

Vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn cung ADB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{ sđ}\overset{\frown}{ADB} = \frac{1}{2} \cdot 230^\circ = 115^\circ.$$

Vậy sđ$\overset{\frown}{ADB} = 230^\circ$; $\widehat{ACB} = 115^\circ$.

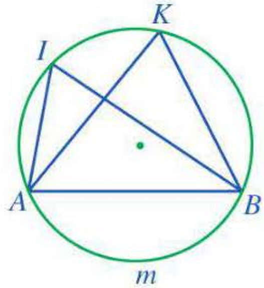
4 Cho đường tròn (O; R) và dây cung $AB = R$. Điểm C thuộc cung lớn AB, C khác A và B. Tính số đo góc ACB.

5 Quan sát *Hình 60* và nêu mối liên hệ giữa:

a) $\widehat{AIB}$ và sđ$\overset{\frown}{AmB}$;

b) $\widehat{AKB}$ và sđ$\overset{\frown}{AmB}$;

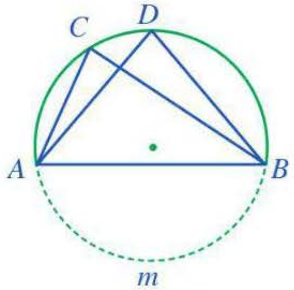
c) $\widehat{AIB}$ và $\widehat{AKB}$.



Hình 60

Nhận xét: Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Ví dụ 8 Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn. Giả sử bóng được đặt ở các vị trí C, D trên cung tròn AB với A, B là hai chân cột của cầu môn như *Hình 61*. Các góc sút ACB và ADB có bằng nhau hay không? Vì sao?



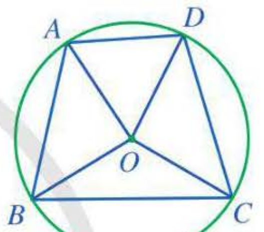
Hình 61

Giải

Xét đường tròn (O) chứa cung ACB và xét cung AmB không chứa C, D. Vì $\widehat{ACB}$ và $\widehat{ADB}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung AmB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

5 Trong *Hình 61*, gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $IA \,.\, ID = IB \,.\, IC$.

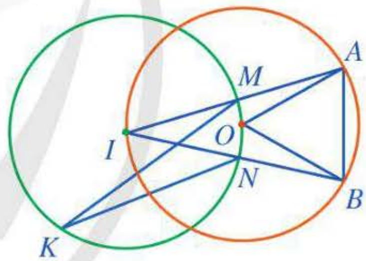
BÀI TẬP



Hình 62

1. Quan sát *Hình 62*, hãy cho biết:
   a) 6 góc ở tâm có hai cạnh lần lượt chứa hai điểm trong bốn điểm A, B, C, D;
   b) 4 góc nội tiếp có hai cạnh lần lượt chứa ba điểm trong bốn điểm A, B, C, D.

2. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Giả sử M, N lần lượt là các điểm thuộc cung lớn AB và cung nhỏ AB (M, N khác A và B).
   a) Tính độ dài đoạn thẳng AB theo R.
   b) Tính số đo các góc ANB và AMB.



Hình 63

3. Trong *Hình 63*, cho biết $AB = OA$.
   a) Tính số đo góc AOB.
   b) Tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn AB của (O).
   c) Tính số đo góc MIN.
   d) Tính số đo cung nhỏ MN và cung lớn MN của (I).
   e) Tính số đo góc MKN.

4. Biểu đồ hình quạt tròn ở *Hình 64* mô tả các thành phần của một chai nước ép hoa quả (tính theo tỉ số phần trăm). Hãy cho biết các cung tương ứng với phần biểu diễn thành phần việt quất, táo, mật ong lần lượt có số đo là bao nhiêu độ.

Hình 64

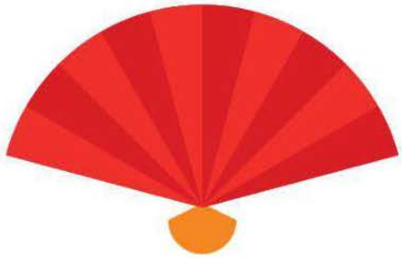
5. Cho hai đường tròn (O), (I) cắt nhau tại hai điểm A, B. Kẻ các đoạn thẳng AC, AD lần lượt là các đường kính của hai đường tròn (O), (I). Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

6. Hãy sử dụng compa và thước thẳng để vẽ tam giác ABC vuông tại A và giải thích kết quả.

§5. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

Hình 65 mô tả một chiếc quạt giấy.

Hình phẳng được tô màu đỏ ở Hình 65 được gọi là hình gì và diện tích của hình đó được tính như thế nào?



Hình 65

I. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

1 Lấy một vòng dây không dãn có dạng đường tròn (*Hình 66a*), cắt vòng dây và kéo thẳng vòng dây đó để nhận được sợi dây như ở *Hình 66b*.

Đo chiều dài sợi dây đó.

Ta nói chiều dài sợi dây bằng *chu vi* của đường tròn.

a) *b)*

Hình 66

Ta thừa nhận kết quả: Tỉ số giữa chu vi C của mỗi đường tròn và đường kính d của đường tròn đó là một hằng số, kí hiệu là π. Số π là số vô tỉ, cụ thể: $\pi = 3,1415...$

- Chu vi đường tròn đường kính d là $C = \pi d$.
- Chu vi đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$.

Ví dụ 1 Một chất điểm chuyển động trên một đường tròn có bán kính $r = 0,3$ m với tốc độ không đổi. Chất điểm chuyển động hết một vòng quanh đường tròn đó trong 20 s. Tính tốc độ của chất điểm (theo đơn vị mét trên giây và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải

Chu vi của đường tròn là $C = 2\pi \,.\, 0,3 = 0,6\pi$ (m).

Vậy tốc độ của chất điểm là:

$$v = \frac{0,6\pi}{20} \approx 0,09 \text{ (m/s)}.$$

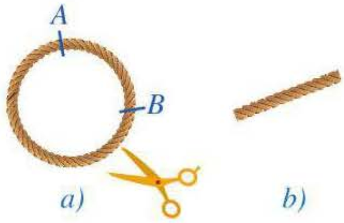
1 Tính chu vi của đường tròn bán kính 5 cm (theo đơn vị centimét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

2

a) Đánh dấu hai điểm A, B trên một vòng dây không dãn có dạng đường tròn (*Hình 67a*), cắt cung AB của vòng dây và kéo thẳng cung đó để nhận được sợi dây như ở *Hình 67b*.

Đo chiều dài sợi dây đó.

Ta nói chiều dài sợi dây bằng độ dài của cung tròn AB.



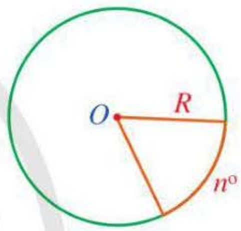
Hình 67

b) Ta coi mỗi đường tròn bán kính R là một cung tròn có số đo 360°. Chia đường tròn đó thành 360 phần bằng nhau, mỗi phần là cung tròn có số đo bằng 1°; chu vi của đường tròn khi đó cũng được chia thành 360 phần bằng nhau. Tính theo R:

- Độ dài của cung tròn có số đo 1°;
- Độ dài của cung tròn có số đo n°.

Ta có định lí sau (*Hình 68*):

> Trong một đường tròn bán kính R, độ dài của cung tròn có số đo n° là $l = \frac{\pi R n}{180}$.



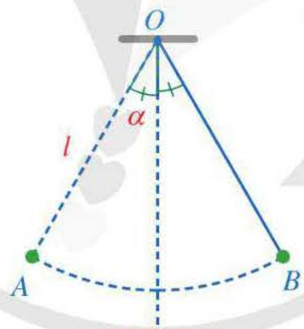
Hình 68

Ví dụ 2 Cung có số đo 100° của đường tròn bán kính 8 cm dài bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Độ dài cung tròn đó là:

$$\frac{100 \cdot \pi \cdot 8}{180} = \frac{40\pi}{9} \approx 14 \text{ (cm)}.$$



Hình 69

2 Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B (*Hình 69*). Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng l và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc α.

II. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN

3 Vẽ đường tròn $(O; 2 \text{ cm})$ và các điểm A, B thoả mãn $OA < 2$ cm, $OB = 2$ cm.

Nêu nhận xét về vị trí của các điểm A, B so với đường tròn $(O; 2 \text{ cm})$.

Chú ý

- Hình tròn tâm O bán kính R bao gồm đường tròn $(O; R)$ và tất cả các điểm nằm trong đường tròn đó.
- Diện tích của hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.

Ví dụ 3 Bề mặt phía trên của một chiếc trống có dạng hình tròn bán kính 8 cm (*Hình 70*). Diện tích bề mặt phía trên của trống đó bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

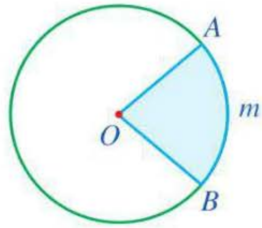
Hình 70

Giải

Diện tích bề mặt phía trên của chiếc trống đó là:

$$S = \pi \,.\, 8^2 = 64\pi \approx 201 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

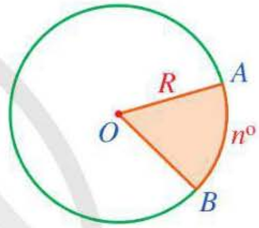
4 Quan sát *Hình 71*, hãy cho biết phần hình tròn (O) tô màu xanh được giới hạn bởi hai bán kính và cung nào?



Hình 71

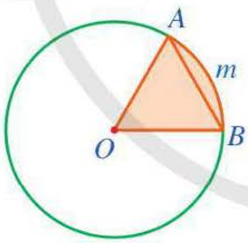
> *Hình quạt tròn* (hay còn gọi tắt là *hình quạt*) là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Trong *Hình 72*, ta có hình quạt tròn AOB, tâm O, bán kính R, cung ứng với hình quạt có số đo n° (số đo n° được hiểu là số đo cung AB giới hạn hình quạt tròn đó).



Hình 72

Ví dụ 4 Cho hình quạt tròn AOB giới hạn bởi hai bán kính OA, OB và cung AmB sao cho $OA = AB$ (*Hình 73*). Hãy tìm số đo cung AmB ứng với hình quạt đó.

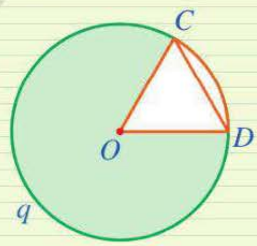


Hình 73

Giải

Do $OA = AB$ nên tam giác AOB là tam giác đều, suy ra $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Vì góc AOB là góc ở tâm chắn cung AmB nên sđ $\overset{\frown}{AOB} = 60^\circ$.

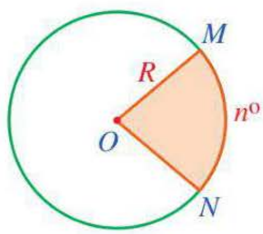
3 Cho hình quạt tròn COD giới hạn bởi hai bán kính OC, OD và cung CnD sao cho $OC = CD$ (*Hình 74*). Hãy tìm số đo cung AmB ứng với hình quạt đó.



Hình 74

5 Ta coi mỗi hình tròn bán kính R là một hình quạt có số đo 360°. Tính diện tích hình quạt tròn tâm O, bán kính R, biết số đo cung ứng với hình quạt tròn đó là:

a) 1°; b) n° (*Hình 75*).



Hình 75

Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n^o là: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$.

Nhận xét: Gọi l là độ dài của cung tròn có số đo n^o thì diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung có số đo n^o là:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2} = \frac{lR}{2}.$$

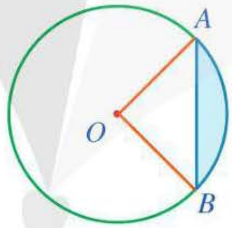
Ví dụ 5 Một hoạ tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4 dm được chia thành nhiều hình quạt tròn (*Hình 76*), mỗi hình quạt tròn có góc ở tâm là 7,5°. Diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Hình 76

Giải

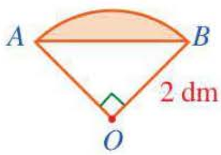
Diện tích của mỗi hình quạt là: $\dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 7{,}5}{360} \approx 1{,}05$ (dm²).

Ví dụ 6 Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung (tương ứng) của đường tròn (minh hoạ bởi phần màu xanh ở *Hình 77*).



Hình 77

Hình 78



Hình 79

Người ta làm một hoạ tiết trang trí bằng cách ghép hai hình viên phân bằng nhau (*Hình 78*), mỗi hình viên phân đó có góc ở tâm tương ứng là 90° và bán kính đường tròn tương ứng là 2 dm (*Hình 79*). Tính diện tích của hoạ tiết trang trí đó (theo đơn vị decimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải

Trong *Hình 79*, ta có:

– Diện tích tam giác OAB là:

$$S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ (dm}^2\text{)};$$

– Do sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^o$ nên diện tích hình quạt tròn AOB tương ứng là:

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} = \pi \text{ (dm}^2\text{)}.$$

4 Hình quạt tô màu đỏ ở *Hình 65* có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150°.

a) Tính diện tích của hình quạt đó theo đơn vị decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.

Suy ra diện tích hình viên phân là: $S_3 = S_2 - S_1 = \pi - 2$ (dm^2).

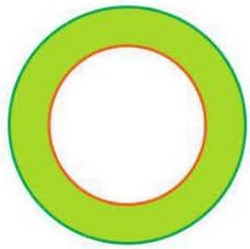
Vậy diện tích của hoạ tiết trang trí đó là: $S = 2S_3 = 2(\pi - 2) \approx 2{,}28$ (dm^2).

III. DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN

6

a) *Hình 80* mô tả một phần bản vẽ của chi tiết máy. Hình đó giới hạn bởi mấy đường tròn cùng tâm?

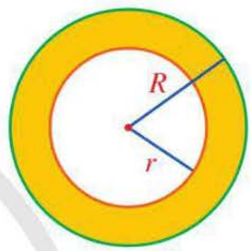
b) Hãy vẽ một hình tương tự *Hình 80* bằng cách vẽ các đường tròn (O; 2 cm) và (O; 3 cm). Tính hiệu diện tích của hai hình tròn đó.



Hình 80

- Hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm được gọi là *hình vành khuyên*.
- Hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn (O; R) và (O; r) (với $R > r$) có diện tích là:

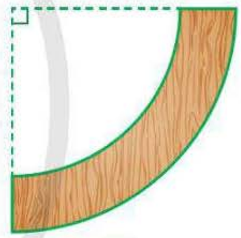
$$S = \pi(R^2 - r^2).$$



Hình 81

Trong *Hình 81*, diện tích của hình vành khuyên tô màu vàng là: $S = \pi(R^2 - r^2)$.

Ví dụ 7 *Hình 82* mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 4 dm và 3 dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 82

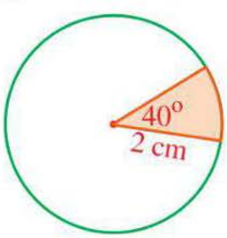
Giải

Diện tích của mặt cắt là: $\frac{1}{4}\pi(4^2 - 3^2) = \frac{7\pi}{4} \approx 5{,}5$ (dm^2).

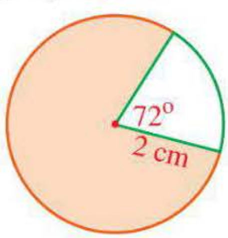
5 Tính diện tích của hình vành khuyên, biết hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm.

BÀI TẬP

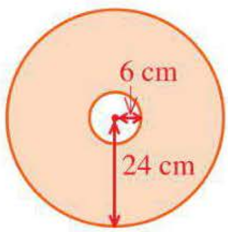
1. Quan sát các hình *83*, *84*, *85*, *86*.



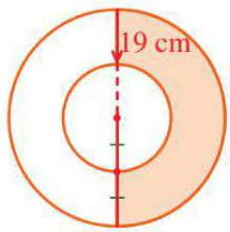
Hình 83



Hình 84



Hình 85

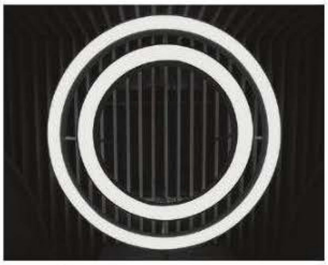


Hình 86

a) Tính diện tích phần được tô màu trong mỗi hình đó.

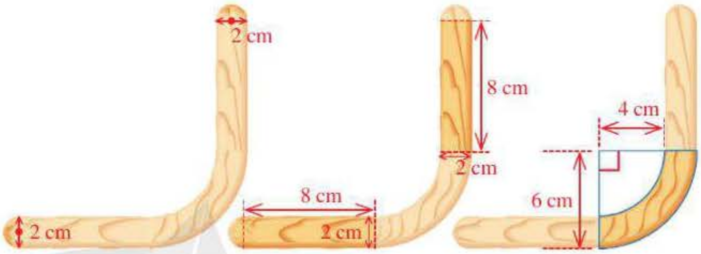
b) Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình *83*, *84*.

2. *Hình 87* mô tả mặt cắt của một chiếc đèn led có dạng hai hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.



(Ảnh: Nekrasov Eugene)

Hình 87



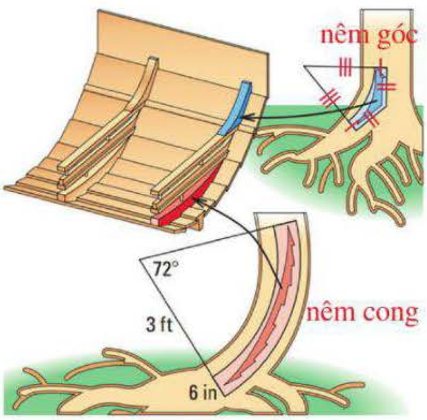
Hình 88

3. *Hình 88* mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa đường tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm; một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 dm và 6 dm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.

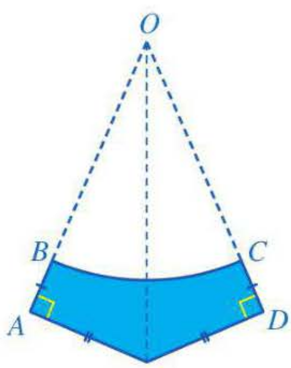
4. Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm: nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong *Hình 89*). Mặt cắt *ABCD* của nêm góc có dạng hai tam giác vuông *OAE*, *ODE* bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn *OBC* (*Hình 90*), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt *MNPQ* của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (*Hình 91*), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở *Hình 91*.

a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1 ft = 30 cm, 1 in = 2,54 cm, $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

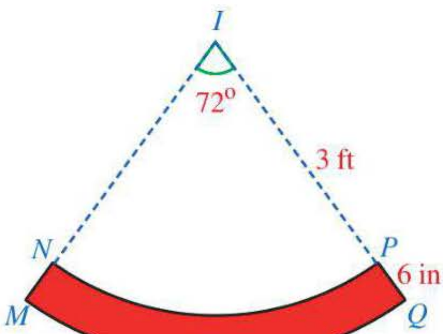
b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?



Hình 89



Hình 90



Hình 91

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. Trong *Hình 92*, cho các điểm A, B, C, D, E thuộc đường tròn (O).

a) Số đo góc BOC là

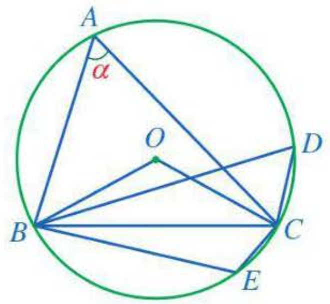
A. α. B. 2α. C. $180^\circ - \alpha$. D. $180^\circ - 2\alpha$.

b) Số đo góc BDC là

A. α. B. $\dfrac{\alpha}{2}$. C. $180^\circ - \alpha$. D. $180^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

c) Số đo góc BEC là

A. α. B. 2α. C. $180^\circ - \alpha$. D. $360^\circ - \alpha$.



Hình 92

2. a) Độ dài cung tròn có số đo 30° của đường tròn bán kính R là:

A. $\dfrac{\pi R}{180}$. B. $\dfrac{\pi R}{360}$. C. 30πR. D. $\dfrac{\pi R}{6}$.

b) Diện tích của hình quạt tròn tâm O, bán kính R, cung có số đo 45° là:

A. $\dfrac{\pi R^2}{45}$. B. $\dfrac{\pi R^2}{4}$. C. $\dfrac{\pi R^2}{8}$. D. $\dfrac{\pi R^2}{16}$.

3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh r và đường tròn $(C; r)$. Giả sử M là một điểm nằm trên đường tròn $(C; r)$ sao cho điểm M nằm trong hình vuông $ABCD$. Tiếp tuyến của đường tròn $(C; r)$ tại tiếp điểm M cắt các đoạn thẳng AB, AD lần lượt tại N, P. Chứng minh:

a) Các đường thẳng NB, PD là các tiếp tuyến của đường tròn $(C; r)$;

b) $\widehat{NCP} = \widehat{NCB} + \widehat{PCD} = 45^\circ$.

4. Chứng minh trong một đường tròn:

a) Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy;

b) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy;

c) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm;

d) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

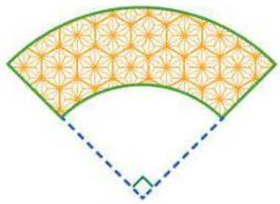
5. Cho hai đường tròn $(I; r)$ và $(K; R)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại P với $R \neq r$, đường thẳng a lần lượt tiếp xúc với $(I; r)$ và $(K; R)$ tại A và B, a cắt KI tại O. Đường thẳng qua P vuông góc với IK cắt đường thẳng a tại M. Chứng minh:

a) $\dfrac{OI}{OK} = \dfrac{r}{R}$; b) $AB = 2MP$; c) $\widehat{IMK} = 90^\circ$.

6. Mặt đĩa CD ở *Hình 93* có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 1,5 cm và 6 cm. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Hình 93

7. *Hình 94* mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có các bán kính lần lượt là 3 dm và 5 dm. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình 94

8. Logo ở *Hình 95* có dạng một hình quạt tròn bán kính 8 cm và góc ở tâm bằng 60°. Tính diện tích mỗi hình sau (theo đơn vị centimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

a) Toàn bộ logo;

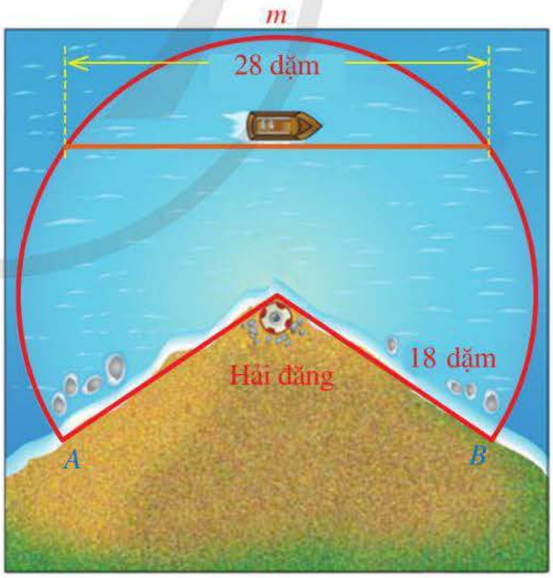
b) Phần logo màu đỏ có dạng hình viên phân.

Hình 95

9. *Hình 96* biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung *AmB* có số đo 245°.

a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 600 m, $\pi = 3{,}14$ và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 96

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
bất đẳng thức	hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$)	29
bất phương trình bậc nhất một ẩn	bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$) với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$	36
căn thức bậc ba	với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là *căn thức bậc ba* của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn	63
căn thức bậc hai	với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là *căn thức bậc hai* của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn	61
đường tròn (O; R)	tập hợp các điểm trong mặt phẳng cách điểm O một khoảng bằng R	93
góc nội tiếp	góc có đỉnh thuộc đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó	115
góc ở tâm	góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn	111
hệ phương trình bậc nhất hai ẩn	hệ phương trình có dạng $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ở đó mỗi phương trình $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ đều là phương trình bậc nhất hai ẩn	16
phương trình bậc nhất hai ẩn	phương trình có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là những số cho trước, $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$	12
hình quạt tròn (hình quạt)	một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung	120
hình vành khuyên	hình giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm	122
tỉ số lượng giác của góc nhọn α	Cho góc nhọn α. Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \alpha$. Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α, kí hiệu sin α. Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là côsin của góc α, kí hiệu cos α. Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc α, kí hiệu tan α. Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là côtang của góc α, kí hiệu cot α.	75
tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau	nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia	77
tiếp tuyến của đường tròn	đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó	107

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM
Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:
LÊ HUY ĐAN

Thiết kế sách và ảnh:
ĐẶNG HOÀNG VŨ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

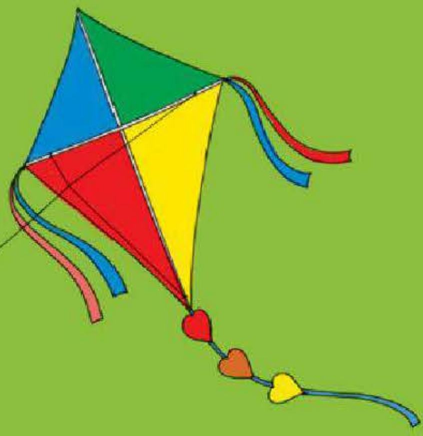
Trình bày bìa:
TRẦN TIỂU LÂM

Sửa bản in:
LÊ HUY ĐAN – VŨ THỊ MINH THẢO

Trong sách có sử dụng tư liệu, hình ảnh của một số tác giả. Trân trọng cảm ơn.

TOÁN 9 - TẬP MỘT
Mã số: ....
ISBN: ....
In …….. cuốn, khổ 19 x 26,5 cm, tại…………….
Địa chỉ: ………………………………
Số xác nhận đăng kí xuất bản ……- … /CXBIPH/ ……-………/ĐHSP
Quyết định xuất bản số: ……………../QĐ - NXBĐHSP, ngày ………….
In xong và nộp lưu chiểu …..

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống



Toán 9 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 9, thuộc bộ sách giáo khoa *Cánh Diều*, thực hiện theo *Chương trình Giáo dục phổ thông 2018*.

Sách gồm hai tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.