ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 12

TẬP HAI

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
Môn Toán - Lớp 12
(Theo Quyết định số 1882/QĐ-BGDĐT ngày 29 tháng 6 năm 2023 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Lê Mậu Hải (Chủ tịch), Cao Thị Hà (Phó Chủ tịch), Phạm Đức Tài (Ủy viên, Thư kí).
Các Ủy viên: Phạm Khắc Ban, Nguyễn Hắc Hải, Nguyễn Doãn Phú, Nguyễn Chiến Thắng, Nguyễn Thị Vinh Thuyên, Đinh Cao Thượng, Phạm Đình Tùng, Vũ Thị Như Trang.

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

Toán 12

TẬP HAI

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

CHƯƠNG IV

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những vấn đề sau: nguyên hàm; nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp; tích phân; ứng dụng hình học của tích phân.

§1 NGUYÊN HÀM

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Một hòn đá rơi từ mỏm đá có độ cao 150 m so với mặt đất theo phương thẳng đứng. Biết tốc độ rơi của hòn đá (tính theo đơn vị m/s) tại thời điểm t (tính theo giây) được cho bởi công thức $v(t) = 9,8t$.

Quãng đường rơi được S của hòn đá tại thời điểm t được cho bởi công thức nào? Sau bao nhiêu giây thì hòn đá chạm đến mặt đất?

I. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

1 Cho hàm số $F(x) = x^3$, $x \in (-\infty ; +\infty)$. Tính $F'(x)$.

Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = 3x^2$, $x \in (-\infty ; +\infty)$. Do $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (-\infty ; +\infty)$ nên hàm số $F(x)$ được gọi là *nguyên hàm* của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

Với K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

Ví dụ 1 Hãy giải thích vì sao ta có các kết luận sau:

a) Hàm số $F(x) = \frac{x^5}{5}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4$ trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số $F(x) = \sin x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ trên $\mathbb{R}$.

1 Hàm số $F(x) = \cot x$ là nguyên hàm của hàm số nào? Vì sao?

Giải

a) Hàm số $F(x) = \frac{x^5}{5}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4$ trên $\mathbb{R}$ vì $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $F(x) = \sin x$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ vì $(\sin x)' = \cos x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2 Cho hàm số $F(x) = x^3 - 1, x \in \mathbb{R}$ và $G(x) = x^3 + 5, x \in \mathbb{R}$.

a) Cả hai hàm số $F(x)$ và $G(x)$ có phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$ hay không?

b) Hiệu $F(x) - G(x)$ có phải là một hằng số C (không phụ thuộc vào x) hay không?

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

b) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm $H(x)$ của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $H(x) = F(x) + C$ với mọi x thuộc K.

Ví dụ 2 Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4$ trên $\mathbb{R}$.

Giải

Do $(x^5)' = 5x^4$ nên x^5 là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy mọi nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4$ đều có dạng $x^5 + C$, với C là một hằng số.

2 Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \cos x$ trên $\mathbb{R}$.

Họ (hay tập hợp) tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K được kí hiệu là

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Nhận xét

• Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số. Vì vậy,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

• Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Ta có:

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 3 Chứng tỏ rằng:

a) $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$ với k là hằng số thực;

b) $\int kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{k}{2}x^2 + C$ với k là hằng số thực khác không.

3 Chứng tỏ rằng

$$\int kx^2\mathrm{d}x = \frac{k}{3}x^3 + C\ (k \neq 0).$$

Giải

a) Do $(kx)' = k$ nên kx là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = k$ trên $\mathbb{R}$. Vậy $\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$.

b) Do $\left(\dfrac{k}{2}x^2\right)' = kx$ nên $\dfrac{k}{2}x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = kx$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy $\int kx\,\mathrm{d}x = \dfrac{k}{2}x^2 + C\ (k \neq 0)$.

Nhận xét: $\int 0\,\mathrm{d}x = C$ và $\int \mathrm{d}x = x + C$.

II. TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực $\mathbb{R}$.

3 Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên K, k là hằng số thực khác không.

a) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Hỏi $kF(x)$ có phải là nguyên hàm của hàm số $kf(x)$ trên K hay không?

b) Giả sử $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $kf(x)$ trên K. Đặt $G(x) = kH(x)$ trên K. Hỏi $H(x)$ có phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K hay không?

c) Nêu nhận xét về $\int kf(x)\mathrm{d}x$ và $k\int f(x)\mathrm{d}x$.

Từ Hoạt động 3, ta có:

Tính chất 1

$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0.

Ví dụ 4 Cho n là số nguyên dương.

a) Chứng tỏ rằng $\int x^n\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

b) Cho k là hằng số thực khác không. Tính $\int kx^n\mathrm{d}x$.

Giải

a) Do $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$ nên $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^n$ trên $\mathbb{R}$.

Vậy $\int x^n\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

b) Ta có: $\int kx^n\mathrm{d}x = k\int x^n\mathrm{d}x = \dfrac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

4 Chứng tỏ rằng $\int (n+1)x^n\mathrm{d}x = x^{n+1} + C$.

4 Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.

a) Giả sử $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $g(x)$ trên K. Hỏi $F(x) + G(x)$ có phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$ trên K hay không?

b) Giả sử $H(x)$, $F(x)$ lần lượt là nguyên hàm của hàm số $f(x) + g(x)$, $f(x)$ trên K. Đặt $G(x) = H(x) - F(x)$ trên K. Hỏi $G(x)$ có phải là nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên K hay không?

c) Nêu nhận xét về $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$ và $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Từ Hoạt động 4, ta có:

Tính chất 2

- $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 5 Tìm $\int(2x+5)\,\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có: $\int(2x+5)\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x + \int 5\,\mathrm{d}x = x^2 + 5x + C.$

5 Tìm $\int(2x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 6 Một quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5 m với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -9{,}8t + 19{,}6$ (m/s).

a) Viết công thức tính độ cao của quả bóng theo thời gian t.

b) Sau bao nhiêu lâu kể từ khi ném lên thì quả bóng chạm đất?

Giải

a) Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t ($h(t)$ tính theo mét, t tính theo giây).

Khi đó, ta có:

$$h(t) = \int(-9{,}8t + 19{,}6)\,\mathrm{d}t = -4{,}9t^2 + 19{,}6t + C.$$

Mà quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5 m tức là tại thời điểm $t = 0$ thì $h = 24{,}5$ hay $h(0) = 24{,}5$. Suy ra $C = 24{,}5$.

Vậy công thức tính độ cao $h(t)$ của quả bóng theo thời gian t là:

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 19{,}6t + 24{,}5.$$

b) Khi quả bóng chạm đất thì $h(t) = 0$. Ta có: $-4{,}9t^2 + 19{,}6t + 24{,}5 = 0$. Giải phương trình ta được $t = -1$; $t = 5$. Mà $t > 0$ nên $t = 5$.

Vậy sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

BÀI TẬP

1. Hàm số $F(x) = x^3 + 5$ là nguyên hàm của hàm số:

A. $f(x) = 3x^2$.

B. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + 5x + C$.

C. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + 5x$.

D. $f(x) = 3x^2 + 5x$.

2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 3x^2 + x$;

b) $f(x) = 9x^2 - 2x + 7$;

c) $f(x) = \int(4x-3)(x^2+3)\,\mathrm{d}x$.

3. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x^5 + 2x - 3$, biết $F(-1) = -5$.

4. Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 1{,}5t + 5$, trong đó $h(t)$ (cm) là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm) *(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage 2014)*. Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

5. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số

$$B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1\,000t,$$

trong đó t tính bằng giờ ($0 \le t \le 15$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ.

(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

a) Viết công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \le t \le 15$.

b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

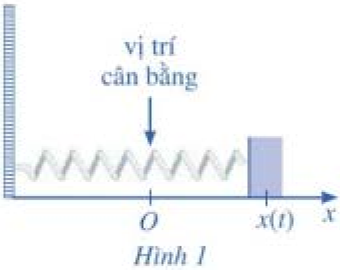
6. Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$.

Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số

$$m(t) = 800 - 2t,$$

trong đó t tính theo ngày ($0 \le t \le 400$), $m(t)$ tính theo người *(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016)*. Đơn giá cho một ngày công lao động là 400 000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

§2 NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP



Hình 1

Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như *Hình 1*, có vận tốc tức thời cho bởi $v(t) = 4\cos t$, trong đó t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng centimét/giây. Tại thời điểm $t = 0$, con lắc đó ở vị trí cân bằng.

Phương trình chuyển động của con lắc đó được xác định bằng cách nào?

I. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

1. Hàm số luỹ thừa

Cho số thực α. Hàm số $y = x^{\alpha}$ được gọi là *hàm số luỹ thừa*.

Chẳng hạn, các hàm số $y = x^2$; $y = x^{-4}$; $y = x^{\frac{1}{3}}$; $y = x^{\sqrt{2}}$ là những hàm số luỹ thừa.

Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ tuỳ thuộc vào giá trị của α. Cụ thể như sau:

- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Với α không nguyên, tập xác định là $(0\ ;+\infty)$.

Ta thừa nhận định lí sau:

> Hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

2. Nguyên hàm của hàm số luỹ thừa

1 Hàm số $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ có là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x$ hay không?

> Với $\alpha \neq -1$, ta có: $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

Ví dụ 1 Tìm:

a) $\int x^4\,\mathrm{d}x$; b) $\int x^{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int x^4\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{4+1}}{4+1} + C = \dfrac{x^5}{5} + C$.

b) $\int x^{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + C$.

1 Tìm:

$\int (x^4 - 5x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2 Tìm:

a) $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$; b) $\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$; c) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$.

b) $\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

c) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$.

2 Tìm:

a) $\int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

II. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln|x|$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

b) Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln|x|$ trên khoảng $(-\infty\,;0)$.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$$

Ví dụ 3 Tìm $\int \dfrac{3}{x}\,\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có: $\int \dfrac{3}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x| + C$.

3 Tìm $\int \dfrac{4}{9x}\,\mathrm{d}x$.

III. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

3

a) Hàm số $y = -\cos x$ có là nguyên hàm của hàm số $y = \sin x$ hay không?

b) Hàm số $y = \sin x$ có là nguyên hàm của hàm số $y = \cos x$ hay không?

c) Với $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), hàm số $y = -\cot x$ có là nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ hay không?

d) Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), hàm số $y = \tan x$ có là nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ hay không?

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$

Ví dụ 4 Tìm:

a) $\int 3\cos x \, dx$; b) $\int (\sin x + \cos x) dx$.

Giải

a) $\int 3\cos x \, dx = 3\int \cos x \, dx = 3\sin x + C.$

b) $\int (\sin x + \cos x) dx = \int \sin x \, dx + \int \cos x \, dx$

$= -\cos x + \sin x + C.$

4 Tìm:

a) $\int 8\sin x \, dx$;

b) $\int (2\sin x - 5\cos x) dx$.

Ví dụ 5 Tìm:

a) $\int \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} \right) dx$; b) $\int (1 + \tan^2 x) dx$.

Giải

a) $\int \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx - \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot x - \tan x + C.$

b) $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \left(1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

$= \int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \tan x + C.$

5 Tìm:

a) $\int (1 + \cot^2 x) dx$;

b) $\int \dfrac{1}{1 + \cos 2x} dx$.

Ví dụ 6 Giải bài toán trong phần mở đầu.

Giải

Giả sử con lắc chuyển động theo phương trình: $s = s(t)$. Suy ra $s'(t) = v(t)$, do đó $s(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$. Ta có:

$$\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int 4\cos t\,\mathrm{d}t = 4\int \cos t\,\mathrm{d}t = 4\sin t + C.$$

Suy ra $s(t) = 4\sin t + C$.

Tại thời điểm $t = 0$, ta có $s(0) = 0$, tức là $4\sin 0 + C = 0$, hay $C = 0$.

Vậy phương trình chuyển động của con lắc là: $s(t) = 4\sin t$.

IV. NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ

4 Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$. Từ đó, nêu một nguyên hàm của hàm số $f(x) = a^x$.

Với $a > 0, a \neq 1,$ ta có: $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

Nhận xét: Áp dụng công thức trên, ta có: $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$.

Ví dụ 7 Tìm:

a) $\int 3^x\,\mathrm{d}x$; b) $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int 2^{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

b) $\displaystyle\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \int \left(e^2\right)^x\mathrm{d}x = \frac{\left(e^2\right)^x}{\ln\left(e^2\right)} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

c) $\displaystyle\int 2^{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 2\,.\,2^x\,\mathrm{d}x = 2\int 2^x\,\mathrm{d}x = 2\,.\,\frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C.$

6 Tìm:

a) $\int 4^{x+2}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int (5^{x+2} - e^{x+1})\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 8 Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 72 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 80 m. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ

$v(t) = -10t + 30$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t (giây) kể từ lúc đạp phanh.

a) Lập công thức biểu diễn hàm số $s(t)$.

b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu giây?

c) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là bao nhiêu mét? Xe ô tô liệu có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật trên đường hay không?

Giải

a) Ta đã biết, công thức tính quãng đường $s(t)$ xe ô tô đi được trong t (giây) là một nguyên hàm của hàm $v(t)$. Do

$$\int(-10t+30)\mathrm{d}t = -5t^2 + 30t + C$$

nên ta có: $s(t) = -5t^2 + 30t + C$ với C là hằng số nào đó. Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$. Suy ra $s(t) = -5t^2 + 30t$.

b) Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t) = 0$, tức là $-10t + 30 = 0$ hay $t = 3$.

Vậy thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.

c) Ta có: tốc độ 72 km/h cũng là tốc độ 20 m/s.

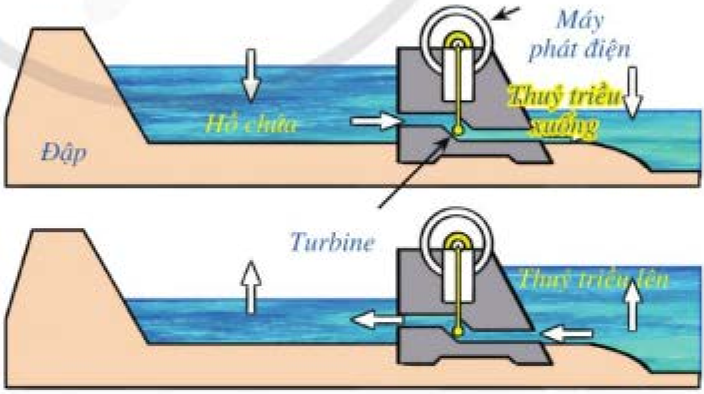
Do đó, quãng đường xe ô tô còn di chuyển được kể từ lúc đạp phanh đến khi xe dừng hẳn là: $s(3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 = 45$ (m).

Vậy quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là: $20 + 45 = 65$ (m).

Do $65 < 80$ nên xe ô tô đã dừng hẳn trước khi va chạm với chướng ngại vật trên đường. Vì thế, tai nạn đã không xảy ra đối với xe ô tô đó.

Ví dụ 9 Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thuỷ triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra (khi thuỷ triều xuống) và nước chảy vào (khi thuỷ triều lên) (*Hình 2*). Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số

$$h'(t) = \frac{1}{216}(5t^2 - 120t + 480),$$



Hình 2

trong đó t tính bằng giờ ($0 \le t \le 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa là 6 m (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

a) Viết công thức xác định hàm số $h(t)$.

b) Mực nước trong hồ chứa cao nhất và thấp nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét)?

c) Mực nước trong hồ chứa thay đổi nhanh nhất khi nào? Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa khi đó là bao nhiêu?

Giải

a) Ta có: $\int h'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{1}{216}(5t^2 - 120t + 480)\mathrm{d}t = \frac{1}{216}\int (5t^2 - 120t + 480)\mathrm{d}t$

$$= \frac{5}{216}\int t^2\mathrm{d}t - \frac{120}{216}\int t\,\mathrm{d}t + \frac{480}{216}\int \mathrm{d}t = \frac{5}{648}t^3 - \frac{5}{18}t^2 + \frac{20}{9}t + C.$$

Suy ra $h(t) = \frac{5}{648}t^3 - \frac{5}{18}t^2 + \frac{20}{9}t + C.$

Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa là 6 m nên $h(0) = 6$, suy ra $C = 6$.

Vậy mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số:

$$h(t) = \frac{5}{648}t^3 - \frac{5}{18}t^2 + \frac{20}{9}t + 6 \ (0 \le t \le 24).$$

b) Ta tìm $\min\limits_{[0\,;\,24]} h(t)$ và $\max\limits_{[0\,;\,24]} h(t)$.

• $h'(t) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 120t + 480 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 24t + 96 = 0 \Leftrightarrow t = 12 - 4\sqrt{3} \text{ hoặc } t = 12 + 4\sqrt{3}.$$

• Bảng biến thiên:

t	0		$12-4\sqrt{3}$		$12+4\sqrt{3}$		24
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$	6	$\nearrow$	$h(12-4\sqrt{3}) \approx 11{,}1$	$\searrow$	$h(12+4\sqrt{3}) \approx 0{,}9$	$\nearrow$	6

Do đó, ta có: $\min\limits_{[0\,;\,24]} h(t) = \min\{h(0); h(12+4\sqrt{3})\} = h(12+4\sqrt{3}) \approx 0{,}9$;

$$\max\limits_{[0\,;\,24]} h(t) = \max\{h(24); h(12-4\sqrt{3})\} = h(12-4\sqrt{3}) \approx 11{,}1$$

Vậy mực nước trong hồ chứa cao nhất khoảng 11,1 m và thấp nhất khoảng 0,9 m.

c) Ta tìm $\max\limits_{[0\,;\,24]} h'(t)$.

- $h''(t) = \dfrac{1}{216}(10t - 120)$;

  $h''(t) = 0$ khi $t = 12$.

- Bảng biến thiên của hàm số $h'(t)$:

t	0		12		24
$h''(t)$		$-$	0	$+$	
$h'(t)$	$\dfrac{20}{9}$	$\searrow$	$-\dfrac{10}{9}$	$\nearrow$	$\dfrac{20}{9}$

Do đó, ta có: $\max\limits_{[0\,;\,24]} h'(t) = \max\left\{h'(0);\, h'(24)\right\} = h'(24) = \dfrac{20}{9}$.

Vậy mực nước trong hồ chứa thay đổi nhanh nhất khi $t = 0$ và $t = 24$. Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa khi đó là $\dfrac{20}{9}$ m/h.

BÀI TẬP

1. $\int(2\sin x - 3\cos x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $2\cos x - 3\sin x + C$.

B. $2\cos x + 3\sin x + C$.

C. $-2\cos x + 3\sin x + C$.

D. $-2\cos x - 3\sin x + C$.

2. $\int 7^x \mathrm{d}x$ bằng:

A. $7^x . \ln 7 + C$.

B. $\dfrac{7^{x+1}}{x+1} + C$.

C. $\dfrac{7^x}{\ln 7} + C$.

D. $7^x + C$.

3. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$ bằng:

A. $2\sqrt[3]{x^2} + C$.

B. $\dfrac{-6}{\sqrt{x}} + C$.

C. $3\sqrt{x} + C$.

D. $2x\sqrt{x} + C$.

4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 - \tan^2 x$ bằng:

A. $2 - \tan x + C$.

B. $2x - \tan x + C$.

C. $x - \dfrac{\tan^3 x}{3} + C$.

D. $-2\tan x + C$.

5. Tìm:

a) $\int (7x^6 - 4x^3 + 3x^2)\mathrm{d}x$;

b) $\int \dfrac{21}{8x}\mathrm{d}x$;

c) $\int \dfrac{1}{x^4}\mathrm{d}x$;

d) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

6. Tìm:

a) $\int (5\sin x + 6\cos x)\mathrm{d}x$;

b) $\int (2 + \cot^2 x)\mathrm{d}x$;

c) $\int 2^{3x}\mathrm{d}x$;

d) $\int (2.3^{2x} - e^{x+1})\mathrm{d}x$.

7. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số

$$v(t) = -0,1t^3 + t^2,$$

trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimét) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t *(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016)*.

a) Viết công thức xác định hàm số $h(t)$ $(t \geq 0)$.

b) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài bao lâu?

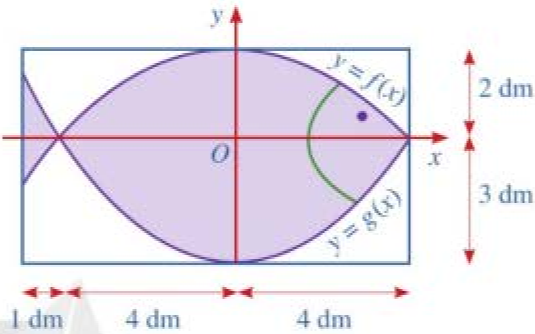
c) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là bao nhiêu?

d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua sẽ cao bao nhiêu?

8. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày $(0 \leq t \leq 10)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn *(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014)*. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

§3 TÍCH PHÂN

Hoạ sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong *Hình 3* (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).



Hình 3

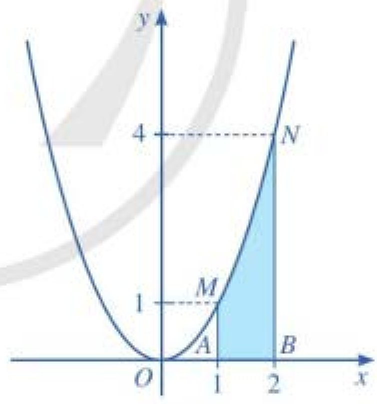
Làm thế nào để tính diện tích của logo?

I. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

1. Bài toán dẫn tới khái niệm tích phân

Có nhiều bài toán thực tiễn dẫn tới khái niệm tích phân. Một trong những bài toán quan trọng nhất là tính diện tích của những "hình thang cong".

1 Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ (*Hình 4*). Xét hình phẳng (được tô màu) gồm tất cả điểm $M(x\,;\,y)$ trên mặt phẳng toạ độ sao cho $1 \le x \le 2$ và $0 \le y \le x^2$. Hình phẳng đó được gọi là *hình thang cong AMNB* giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.



Hình 4

Chia đoạn $[1\,;\,2]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{1}{n},\ x_2 = 1 + \frac{2}{n},\ \ldots,$$

$$x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n},\ x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2\ \textit{(Hình 5)}.$$

a) Tính diện tích T_0 của hình chữ nhật dựng trên đoạn $[x_0 ; x_1]$ với chiều cao là $f(x_0)$.

Tính diện tích T_1 của hình chữ nhật dựng trên đoạn $[x_1 ; x_2]$ với chiều cao là $f(x_1)$.

Tính diện tích T_2 của hình chữ nhật dựng trên đoạn $[x_2 ; x_3]$ với chiều cao là $f(x_2)$.

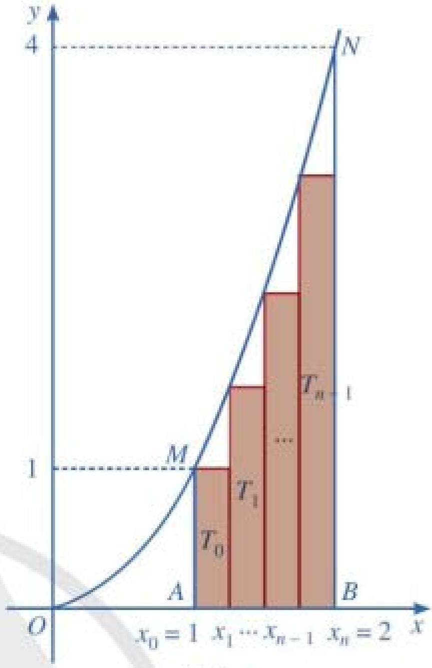
...

Tính diện tích T_{n-1} của hình chữ nhật dựng trên đoạn $[x_{n-1} ; x_n]$ với chiều cao là $f(x_{n-1})$.

b) Đặt $S_n = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1}$. Chứng minh rằng:

$$S_n = \frac{1}{n} . [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})].$$

Tổng S_n gọi là *tổng tích phân cấp n* của hàm số $f(x) = x^2$ trên đoạn [1 ; 2].



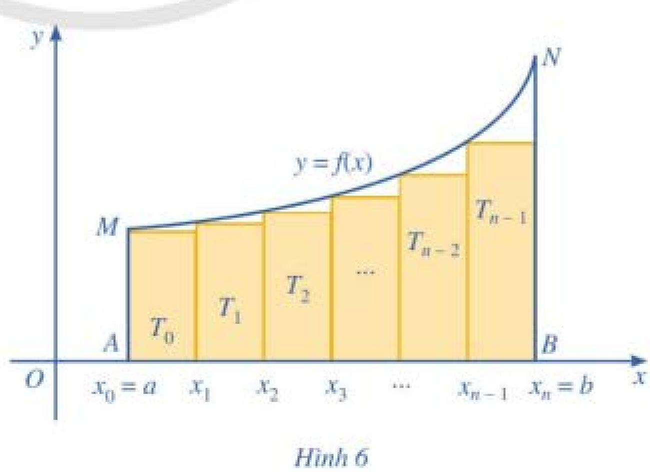
Hình 5

Nhận xét: Người ta có thể chứng minh được rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = F(2) - F(1) = \frac{7}{3}$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên đoạn [1 ; 2]. Số thực $\frac{7}{3}$ được gọi là *diện tích hình thang cong AMNB* (*Hình 5*).

Vậy $S_{\text{hình thang cong } AMNB} = F(2) - F(1)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên đoạn [1 ; 2].

Trong trường hợp tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$.

Hình phẳng gồm các điểm có toạ độ $(x ; y)$ sao cho $a \le x \le b$ và $0 \le y \le f(x)$ được gọi là *hình thang cong AMNB* giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (*Hình 6*). Bằng cách chia đoạn $[a ; b]$ thành n phần bằng nhau ta lập được *tổng tích phân cấp n* của hàm số $y = f(x)$ trên



Hình 6

đoạn $[a ; b]$ là:

$$S_n = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} = \left(\frac{b-a}{n}\right).[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})].$$

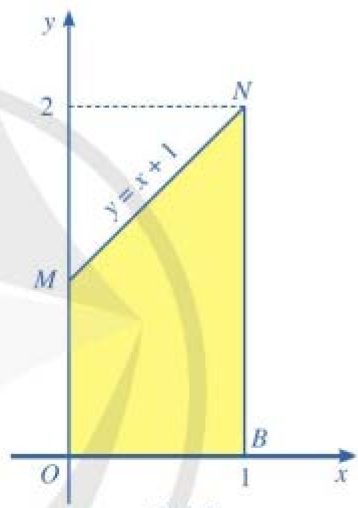
Nhận xét: Người ta có thể chứng minh được rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = F(b) - F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$. Hiệu $F(b) - F(a)$ được gọi là *diện tích hình thang cong AMNB* giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Cụ thể, ở *Hình 6*, ta có: $S_{\text{hình thang cong } AMNB} = F(b) - F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

Ví dụ 1 Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 1$ $(x \in [0 ; 1])$. Xét hình thang vuông $OMNB$ giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = x + 1$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ (*Hình 7*).

a) Tính diện tích hình thang vuông $OMNB$.

b) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 1$ trên đoạn $[0 ; 1]$. Tính $F(1) - F(0)$. Từ đó hãy chứng tỏ rằng

$$S_{\text{hình thang vuông } OMNB} = F(1) - F(0).$$



Hình 7

Giải

a) Ta có:

$$S_{\text{hình thang vuông } OMNB} = \frac{1}{2}.(OM + BN).OB$$
$$= \frac{1}{2}.(1+2).1 = \frac{3}{2}.$$

b) Ta có:

$$\int (x+1)\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Như vậy $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 1$ trên đoạn $[0 ; 1]$.

Ta có:

$$F(1) - F(0) = \left(\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 0\right) = \frac{3}{2}.$$

Vậy $S_{\text{hình thang vuông } OMNB} = F(1) - F(0)$.

1 Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x$ $(x \in [0 ; 2])$. Xét tam giác vuông OAB giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = 2x$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$.

a) Tính diện tích tam giác vuông OAB.

b) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x$ trên đoạn $[0 ; 2]$. Tính $F(2) - F(0)$. Từ đó hãy chứng tỏ rằng $S_{\text{tam giác vuông } OAB} = F(2) - F(0)$.

2. Định nghĩa tích phân

2 Cho hàm số $f(x) = x^2$.

a) Chứng tỏ $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$; $G(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ là các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$.

b) Chứng minh rằng $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, tức là hiệu số $F(b) - F(a)$ không phụ thuộc việc chọn nguyên hàm.

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chú ý

• Kí hiệu $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ và đọc là $F(x)$ thế cận từ a đến b.

Vậy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Gọi: $\int_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới, b là cận trên; $f(x)\,\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

• Ta quy ước: $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$; $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2 Tính:

a) $\int_2^3 6x\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

2 Tính $\int_0^{\pi} \cos u\,\mathrm{d}u$.

Giải

a) $\int_2^3 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2\Big|_2^3 = 3(3^2 - 2^2) = 3(9 - 4) = 15$.

b) $\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e^t\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

Chú ý: Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

II. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

3 So sánh $\int_0^1 2x\,dx$ và $2\int_0^1 x\,dx$.

Tính chất 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;b]$. Khi đó, ta có:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \text{ (} k \text{ là hằng số).}$$

Ví dụ 3 Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx$.

Giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\,.\,1 = 2.$$

3 Cho $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$.

Tính $\int_0^{\pi} \frac{4}{3}\sin x\,dx$.

4 So sánh:

a) $\int_0^1 (2x+3)\,dx$ và $\int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 3\,dx$;

b) $\int_0^1 (2x-3)\,dx$ và $\int_0^1 2x\,dx - \int_0^1 3\,dx$.

Tính chất 2.

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;b]$. Khi đó, ta có:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ví dụ 4 Tính $\int_0^1 (x^2+x)\mathrm{d}x$.

> **4** Tính $\int_1^2 (x^3-x)\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có: $\int_0^1 (x^2+x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{5}{6}$.

5 So sánh $\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2x\,\mathrm{d}x$ và $\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x$.

Tính chất 3.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;b]$. Giả sử c là số thực tuỳ ý thuộc đoạn $[a\,;b]$. Khi đó, ta có:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 5 Tính $\int_{-1}^1 |x|\mathrm{d}x$.

Giải

Ta có: $\int_{-1}^1 |x|\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 |x|\mathrm{d}x + \int_0^1 |x|\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$

$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$

> **5** Tính $\int_1^3 |x-2|\mathrm{d}x$.

III. TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP

1. Tích phân của hàm số luỹ thừa

Nhận xét: Với $\alpha \neq -1$, ta có: $\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Ví dụ 6 Tính:

a) $\int_0^1 (4x^3+3x^2-2)\mathrm{d}x$; b) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; c) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int_0^1 (4x^3+3x^2-2)\,dx = \int_0^1 4x^3 dx + \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 2dx$

$= x^4\Big|_0^1 + x^3\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1$

$= (1^4 - 0^4) + (1^3 - 0^3) - (2\,.\,1 - 2\,.\,0) = 0.$

b) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \sqrt{x}\Big|_1^4 = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1.$

c) $\int_1^3 x^{\sqrt{2}}dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}\Big|_1^3 = \frac{3^{\sqrt{2}+1}-1}{\sqrt{2}+1}.$

6 Tính:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$;

b) $\int_1^3 x^{\frac{2}{3}}\,dx$;

c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$.

2. Tích phân của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$

Nhận xét: Với hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a|.$$

Ví dụ 7 Tính $\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x}dx$.

Giải

$\int_{-e}^{-1} \frac{2}{x}dx = 2\ln|x|\Big|_{-e}^{-1} = 2\ln|-1| - 2\ln|-e| = -2.$

7 Tính $\int_1^e \frac{7}{3x}dx$.

3. Tích phân của hàm số lượng giác

Nhận xét

- $\int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = -\cos b - (-\cos a) = \cos a - \cos b.$
- $\int_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a.$

• Với hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x\Big|_a^b = -\cot b-(-\cot a)=\cot a-\cot b.$$

• Với hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$, ta có:

$$\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x\Big|_a^b = \tan b-\tan a.$$

Ví dụ 8 Tính:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

Giải

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{4}-(-\cos 0)+\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}-0=1.$$

b) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\cot\frac{\pi}{4}-\left(-\cot\frac{\pi}{6}\right)-\tan\frac{\pi}{4}-\left(-\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-1+\sqrt{3}-1+\frac{1}{\sqrt{3}}=-2+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

8 Tính:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\sin x-2\cos x)\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

4. Tích phân của hàm số mũ

Nhận xét: Với $a>0$, $a\neq 1$, ta có: $\displaystyle\int_\alpha^\beta a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}\Big|_\alpha^\beta=\frac{a^\beta-a^\alpha}{\ln a}$.

Chú ý: Áp dụng công thức trên, ta có: $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_\alpha^\beta=e^\beta-e^\alpha$.

Ví dụ 9 Tính:

a) $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 2^x \mathrm{d}x$; c) $\int_0^1 (3\,.\,2^x - e^x)\mathrm{d}x$.

Giải

a) $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

b) $\int_0^1 2^x \mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^1 = \dfrac{2^1}{\ln 2} - \dfrac{2^0}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

c) $\int_0^1 (3\,.\,2^x - e^x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3\,.\,2^x \mathrm{d}x - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = 3\int_0^1 2^x \mathrm{d}x - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x$

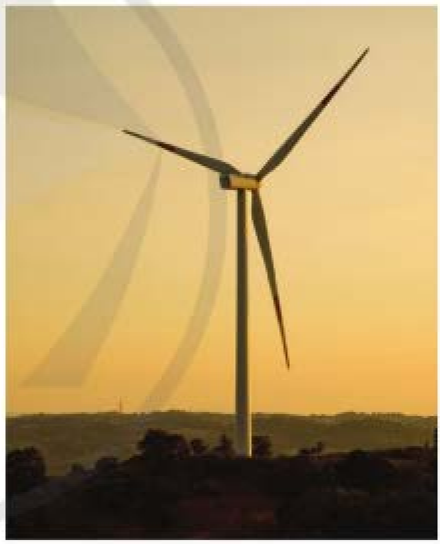
$$= \frac{3}{\ln 2} - (e-1) = \frac{3}{\ln 2} - e + 1.$$

9 Tính:

a) $\int_0^1 3^x \mathrm{d}x$;

b) $\int_0^1 (2\,.\,3^x - 5e^x)\mathrm{d}x$.

Ví dụ 10 Năng lượng gió trên đất liền là một trong những công nghệ năng lượng tái tạo đang được phát triển ở quy mô toàn cầu. Năng lượng gió không trực tiếp phát thải khí nhà kính, không thải ra môi trường các chất ô nhiễm khác, cũng như không tiêu thụ nước để làm mát cho các nhà máy. Các turbine gió thường có ba cánh quay trên một trục ngang, lấy động năng từ quá trình di chuyển dòng không khí (gió) để chuyển đổi thành điện năng thông qua một máy phát điện được kết nối với lưới điện. Hình thang cong (tô màu vàng) trong *Hình 8* mô tả một phần mặt cắt đứng của cánh turbine, được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 2$, $x = 25$, trục Ox và đồ thị hàm số

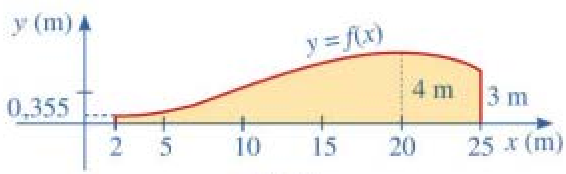


(Nguồn: https//shutterstock.com)

$$y = f(x) = -\frac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400).$$

(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematick, Grundkurs ma-1 Cornelsen 2016).

Hãy tính diện tích hình thang cong đó.



Hình 8

Giải

Diện tích của hình thang cong được tô màu vàng là:

$$I = \int_2^{25} -\frac{1}{800}(x^3 - 33x^2 + 120x - 400)\,dx$$

$$= -\frac{1}{800}\left(\int_2^{25} x^3\,dx - 33\int_2^{25} x^2\,dx + 120\int_2^{25} x\,dx - 400\int_2^{25} dx\right)$$

$$= -\frac{1}{800}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_2^{25} - 11x^3\Big|_2^{25} + 60x^2\Big|_2^{25} - 400x\Big|_2^{25}\right) = \frac{184\,299}{3\,200}\ (\text{m}^2).$$

BÀI TẬP

1. Tích phân $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{1}{6}$.   B. $-\frac{1}{6}$.   C. $\frac{19}{648}$.   D. $-\frac{19}{648}$.

2. Tích phân $\int_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{5}} \sin x\,dx$ có giá trị bằng:

A. $\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{7}$.   B. $\sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{5}$.

C. $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{7}$.   D. $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{5}$.

3. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{3^x}{2}dx$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{\ln 3}$.   B. $\frac{1}{\ln 3}$.   C. -1 D. 1.

4. Cho $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = -10$, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2\ ;\ 3]$, $F(3) = -8$. Tính $F(-2)$.

5. Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

6. Tính:

a) $\int_0^1 (x^6 - 4x^3 + 3x^2)\mathrm{d}x$; b) $\int_1^2 \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$; c) $\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 3\cos x)\mathrm{d}x$; e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x\,\mathrm{d}x$; g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$;

h) $\int_{-1}^0 e^{-x}\mathrm{d}x$; i) $\int_{-2}^{-1} e^{x+2}\,\mathrm{d}x$; k) $\int_0^1 (3\,.\,4^x - 5e^{-x})\mathrm{d}x$.

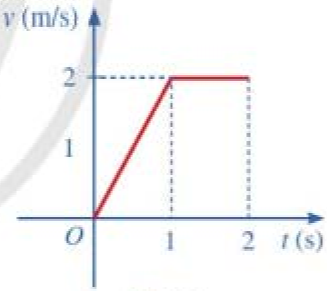
7. a) Cho một vật chuyển động với vận tốc $y = v(t)$ (m/s). Cho $0 < a < b$ và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [a\,;\,b]$. Hãy giải thích vì sao $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ biểu thị quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b (a, b tính theo giây).

b) Áp dụng công thức ở câu a) để giải bài toán sau: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 - \sin t$ (m/s). Tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s).

8. Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị ở *Hình 9*.

a) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 1 giây đầu tiên.

b) Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 2 giây đầu tiên.



Hình 9

9. Ở nhiệt độ 37 °C, một phản ứng hoá học từ chất đầu A, chuyển hoá thành chất sản phẩm B theo phương trình: A → B. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời gian x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$, thoả mãn hệ thức: $y'(x) = -7\,.\,10^{-4}y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là 0,05 mol L^{-1}.

a) Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$. Hãy tính $f'(x)$, từ đó hãy tìm hàm số $f(x)$.

b) Giả sử ta tính nồng độ trung bình chất A (đơn vị mol L^{-1}) từ thời điểm a (giây) đến thời điểm b (giây) với $0 < a < b$ theo công thức $\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$. Xác định nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây.

§4 ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

Gốm Bát Tràng là tên gọi chung của các loại đồ gốm Việt Nam được sản xuất tại làng Bát Tràng, thuộc xã Bát Tràng, huyện Gia Lâm, Hà Nội. Với hơn 700 năm tuổi, gốm Bát Tràng nổi tiếng ở trong và ngoài nước về chất lượng gốm và độ tinh xảo của các sản phẩm. Những chiếc chén trong bộ ấm chén uống trà ở *Hình 10* có dạng khối tròn xoay.

Bộ ấm chén Bát Tràng
(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 10

Thể tích của các khối tròn xoay được tính như thế nào?

I. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

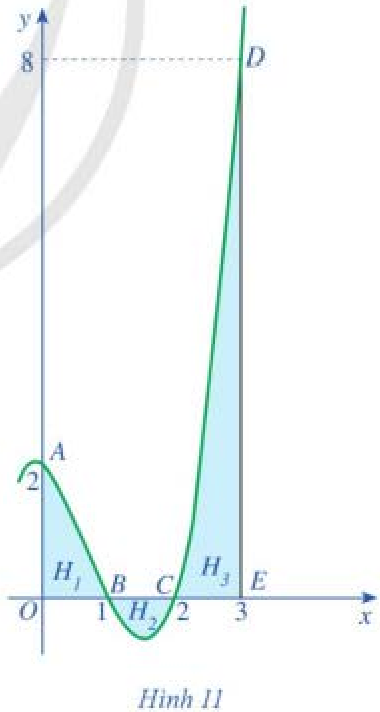
1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

1 Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ có đồ thị được minh hoạ ở *Hình 11*.

a) Quan sát *Hình 11*, hãy cho biết các hình phẳng H_1, H_2, H_3 lần lượt được giới hạn bởi các đường thẳng và đồ thị hàm số nào.

b) Tính diện tích S_{H_1}, S_{H_2}, S_{H_3} của các hình phẳng đó.

c) Gọi H là hợp của các hình phẳng H_1, H_2, H_3. Hình phẳng H được gọi là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 3$. Chứng tỏ rằng diện tích S_H của hình phẳng H bằng $S_H = S_{H_1} + S_{H_2} + S_{H_3} = \int_0^3 |f(x)| \mathrm{d}x$.



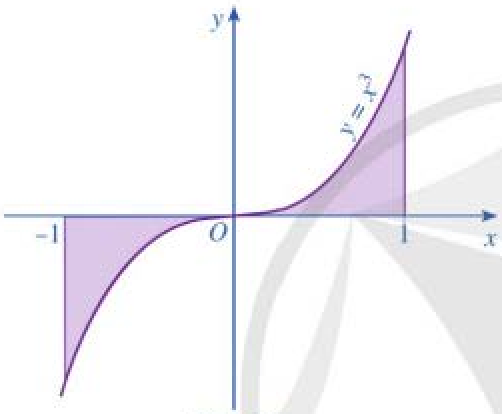
Hình 11

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

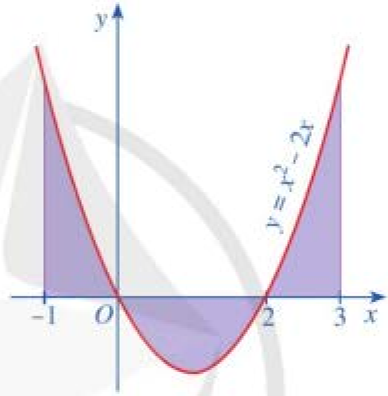
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Khi đó, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 1 Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị như *Hình 12*.



Hình 12



Hình 13

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ là:

$$\int_{-1}^{1} |x^3|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |x^3|\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} |x^3|\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^3)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = -\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

1 Trong *Hình 13*, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$.

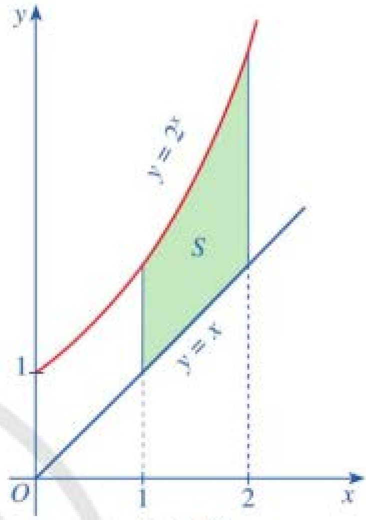
2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

2 Cho các hàm số $y = 2^x$, $y = x$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và đồ thị hàm số $y = 2^x$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và đồ thị hàm số $y = x$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 2^x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ (*Hình 14*).



Hình 14

a) Biểu diễn S theo S_1, S_2.

b) So sánh S và $\int_1^2 (2^x - x)\mathrm{d}x$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2 Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3 + 2x + 1$, $y = x^3 + x + 3$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$.

Giải.

Diện tích hình phẳng đã cho là:

$$S = \int_1^3 \left|(x^3 + 2x + 1) - (x^3 + x + 3)\right|\mathrm{d}x = \int_1^3 |x - 2|\mathrm{d}x = \int_1^2 |x - 2|\mathrm{d}x + \int_2^3 |x - 2|\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 (2 - x)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x - 2)\mathrm{d}x = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3 = 1.$$

Ví dụ 3 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

Giải

Ta có: $-\frac{1}{2}x^2 + 2x > \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ với mọi $x \in [1 ; 4]$

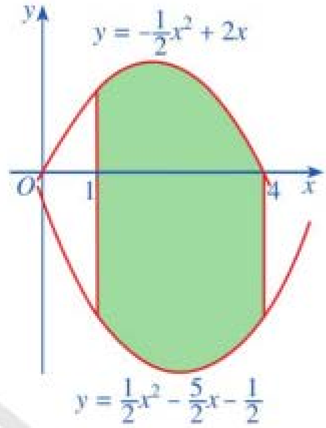
(*Hình 15*). Vậy diện tích hình phẳng đó là:

$$S = \int_1^4 \left|\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right)\right| dx$$

$$= \int_1^4 \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int_1^4 \left(-x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_1^4 + \frac{9x^2}{4}\Big|_1^4 + \frac{x}{2}\Big|_1^4 = -21 + \frac{135}{4} + \frac{3}{2} = \frac{57}{4}.$$



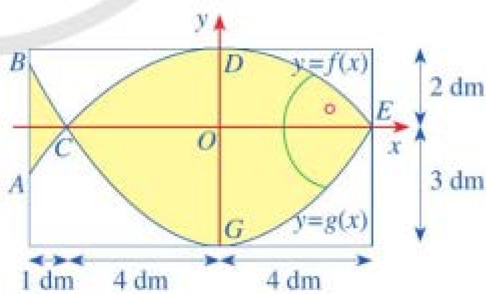
Hình 15

2 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 10 - x^2$, $y = x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 2$.

Ví dụ 4 Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, hoạ sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong *Hình 16* (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).

a) Lập phương trình các parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.



Hình 16

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Giải

a) • Giả sử parabol $y = f(x)$ cho bởi $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Do parabol $y = f(x)$ đi qua điểm $D(0 ; 2)$ nên $c = 2$, suy ra $f(x) = ax^2 + bx + 2$ $(a \neq 0)$. Vì parabol $y = f(x)$ đi qua các điểm $C(-4 ; 0)$, $E(4 ; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 16a - 4b + 2 = 0 \\ 16a + 4b + 2 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm là $a = -\dfrac{1}{8}$, $b = 0$.

Vậy $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2 + 2$.

• Giả sử parabol $y = g(x)$ cho bởi $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ $(a_1 \neq 0)$. Do parabol $y = g(x)$ đi qua điểm $G(0 ; -3)$ nên $c_1 = -3$, suy ra $g(x) = a_1x^2 + b_1x - 3$ $(a_1 \neq 0)$. Vì parabol $y = g(x)$ đi qua các điểm $C(-4 ; 0)$, $E(4 ; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 16a_1 - 4b_1 - 3 = 0 \\ 16a_1 + 4b_1 - 3 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm là $a_1 = \dfrac{3}{16}$, $b_1 = 0$.

Vậy $g(x) = \dfrac{3}{16}x^2 - 3$.

b) Diện tích của logo là: $S = S_1 + S_2$, trong đó S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các parabol $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2 + 2$, $g(x) = \dfrac{3}{16}x^2 - 3$ và hai đường thẳng $x = -5$, $x = -4$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các parabol $f(x) = -\dfrac{1}{8}x^2 + 2$, $g(x) = \dfrac{3}{16}x^2 - 3$ và hai đường thẳng $x = -4$, $x = 4$.

Do đó, ta có:

$$S = \int_{-5}^{-4} |f(x) - g(x)|\,dx + \int_{-4}^{4} |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$= \int_{-5}^{-4} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-5}^{-4} \left[\left(\frac{3}{16}x^2 - 3\right) - \left(-\frac{1}{8}x^2 + 2\right)\right]\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4} \left[\left(-\frac{1}{8}x^2 + 2\right) - \left(\frac{3}{16}x^2 - 3\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-5}^{-4} \left(\frac{5}{16}x^2 - 5\right)\mathrm{d}x + \int_{-4}^{4} \left(-\frac{5}{16}x^2 + 5\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{48}x^3\Big|_{-5}^{-4} - 5x\Big|_{-5}^{-4} - \frac{5}{48}x^3\Big|_{-4}^{4} + 5x\Big|_{-4}^{4}$$

$$= \frac{305}{48} - 5 - \frac{640}{48} + 40 = \frac{1\,345}{48}.$$

Vậy $S = \dfrac{1\,345}{48}$ (dm^2).

c) Gọi t là lượng ánh sáng đi qua mỗi dm^2 của logo. Suy ra lượng ánh sáng đi qua logo là $\dfrac{1\,345}{48}t$. Mặt khác, diện tích của cửa sổ là $(8 + 1) \,.\, (2 + 3) = 45$ (dm^2) và lượng ánh sáng đi qua mỗi dm^2 của phần cửa sổ nằm ngoài logo là $2t$. Suy ra, lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là $45 \,.\, 2t = 90t$ và lượng ánh sáng đi qua phần cửa sổ nằm ngoài logo là:

$$\left(45 - \frac{1\,345}{48}\right)2t = \frac{815}{24}t.$$

Do đó, tổng lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo là:

$$\frac{1345}{48}t + \frac{815}{24}t = \frac{2\,975}{48}t.$$

Tỉ số phần trăm của lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo so với lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là:

$$\left(\frac{2\,975}{48}t : 90t\right).100\% = \frac{297\,500}{4\,320}\% \approx 68,9\%.$$

Vậy lượng ánh sáng khi đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm đi xấp xỉ là:

$$100\% - 68,9\% = 31,1\%.$$

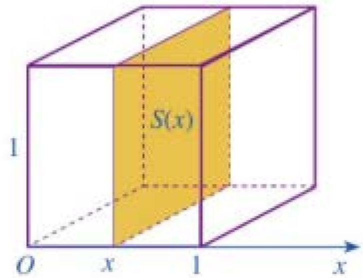
II. TÍNH THỂ TÍCH CỦA HÌNH KHỐI

1. Thể tích của vật thể

3 Cắt khối lập phương có cạnh bằng 1 bởi một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với trục Ox tại x, với $0 \le x \le 1$ ta nhận được hình phẳng có diện tích là $S(x)$ (*Hình 17*).

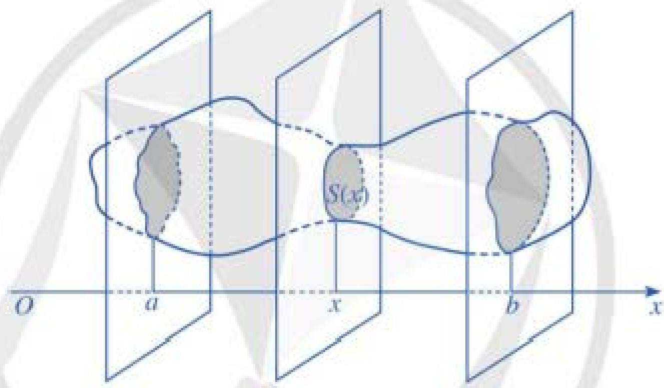
a) Tính $S(x)$.

b) So sánh thể tích khối lập phương đó với $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x$.



Hình 17

Trong trường hợp tổng quát (*Hình 18*), ta có định lí sau:



Hình 18

Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại x $(a \le x \le b)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x)$. Giả sử hàm số $S(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên được tính bởi công thức

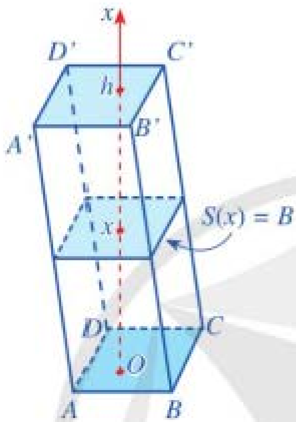
$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chú ý: Nếu $S(x) = S$ không đổi với mỗi $x \in [a\,;\,b]$ thì $V = (b - a)S$.

Ví dụ 5 Tính thể tích khối lăng trụ, biết diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h.

Giải

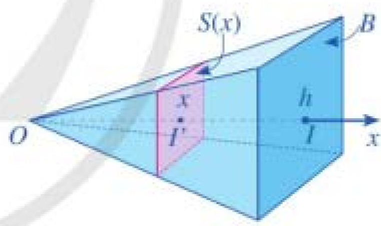
Chọn trục Ox song song với đường cao của khối lăng trụ, còn hai đáy nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = 0$ và $x = h$ (*Hình 19*). Khi đó, một mặt phẳng vuông góc với trục Ox, cắt lăng trụ theo hình phẳng có diện tích $S(x) = B$ không đổi với mỗi $x \in [0 ; h]$. Áp dụng chú ý trên, ta có: $V = Bh$.



Hình 19

3 Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại x $(1 \leq x \leq 2)$ cắt vật thể đó theo hình phẳng có diện tích là $S(x) = 2x$. Tính thể tích V của phần vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

Ví dụ 6 Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Chọn trục Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm I sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và có hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OI}$ (minh hoạ ở *Hình 20*). Khi đó $OI = h$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(0 \leq x \leq h)$, cắt khối chóp theo hình phẳng có diện tích $S(x)$. Người ta chứng minh được rằng $S(x) = B\dfrac{x^2}{h^2}$. Tính thể tích khối chóp đó.



Hình 20

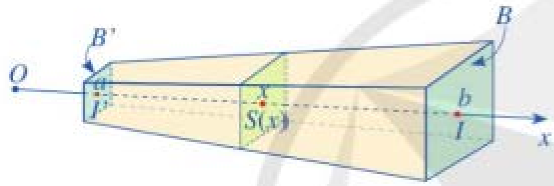
Giải

Thể tích khối chóp đó là:

$$V = \int_0^h S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h B\frac{x^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = B\frac{x^3}{3h^2}\bigg|_0^h = B\frac{h^3}{3h^2} = \frac{Bh}{3}.$$

Nhận xét

- Cho khối lăng trụ có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Thể tích V của khối lăng trụ đó được tính bởi công thức $V = Bh$.
- Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Thể tích V của khối chóp đó được tính bởi công thức $V = \frac{Bh}{3}$.

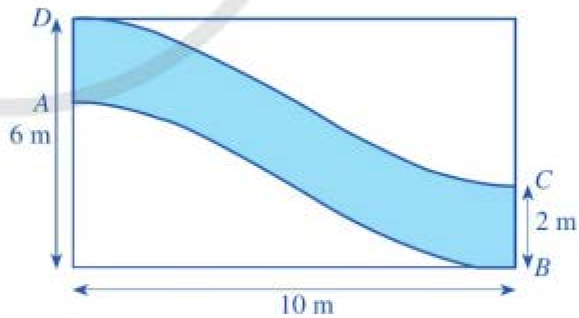


Hình 21

4 Cho khối chóp cụt đều tạo bởi khối chóp đỉnh S, diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao h. Chọn trục Ox chứa đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S (*Hình 21*). Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt đều lần lượt cắt Ox tại I và I'.

Đặt $OI = b$, $OI' = a$ $(a < b)$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(a \leq x \leq b)$, cắt khối chóp cụt đều theo hình phẳng có diện tích $S(x)$. Người ta chứng minh rằng $S(x) = B\frac{x^2}{b^2}$. Tính thể tích khối chóp cụt đều đó.

Ví dụ 7 Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong *Hình 22*. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m.

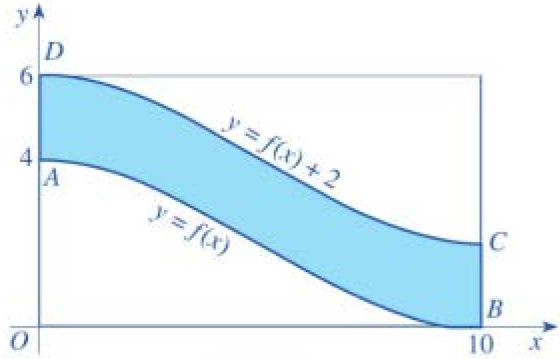


Hình 22

Ngoài ra, cô Hạnh quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.

Giải

Xét hệ trục toạ độ Oxy như *Hình 23* (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét).



Hình 23

Trong hệ trục toạ độ đó, đường cong AB được cho bởi đồ thị của hàm số liên tục $y = f(x)$, $0 \leq x \leq 10$. Suy ra, đường cong DC được cho bởi đồ thị của hàm số liên tục $y = f(x) + 2$, $0 \leq x \leq 10$. Áp dụng công thức tính diện tích, ta có:

$$S_{\text{hình phẳng được tô màu } ABCD} = \int_0^{10} [(f(x)+2) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} 2\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_0^{10} = 20\ (\mathrm{m}^2).$$

Do đó, thể tích khối bê tông dùng để đổ con đường là: $20 \,.\, 0{,}15 = 3\ (\mathrm{m}^3)$.

Vậy số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó là:

$$1\,080\,000 \,.\, 3 = 3\,240\,000 \text{ (đồng)}.$$

2. Thể tích của khối tròn xoay

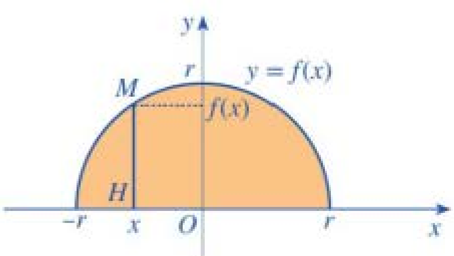
4 Xét nửa hình tròn tâm O, bán kính r (*Hình 24*). Nửa hình tròn đó là hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f(x)$.

a) Tìm hàm số $y = f(x)$.

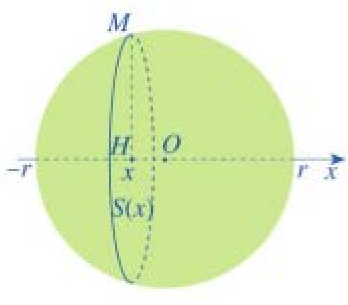
b) Quay nửa hình tròn đó quanh trục hoành, ta nhận được hình cầu tâm O bán kính r (*Hình 25*). Xét điểm $M(x\,;f(x))$ $(-r \leq x \leq r)$ nằm trên nửa đường tròn tâm O bán kính r. Gọi $H(x\,;0)$ là hình chiếu của điểm M trên trục Ox. Khi quay nửa hình tròn quanh trục hoành, đoạn thẳng HM tạo nên một hình tròn tâm H bán kính $f(x)$.

Tính diện tích $S(x)$ của hình tròn đó theo $f(x)$.

Từ đó, sử dụng công thức tính thể tích vật thể, hãy tính thể tích V của hình cầu tâm O bán kính r.



Hình 24



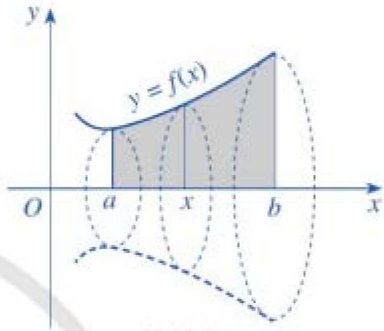
Hình 25

Trong trường hợp tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một hình khối gọi là *khối tròn xoay*. Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox, ta được một hình tròn có bán kính là $f(x)$.

Ta có định lí sau (*Hình 26*):

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$



Hình 26

Ví dụ 8 Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox.

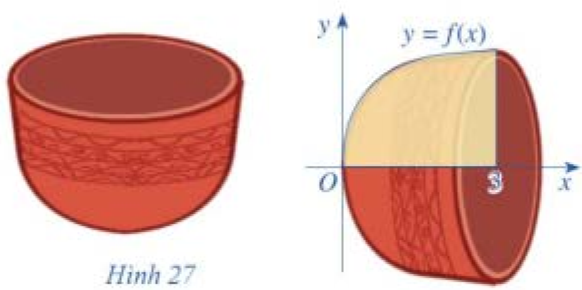
Giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$, quay quanh trục Ox là:

$$V = \pi\int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \pi\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = \pi\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7\pi}{3}.$$

5 Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox.

Ví dụ 9 Xét chiếc chén trong bộ ấm chén uống trà ở phần mở đầu, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số



Hình 27

$f(x) = 0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét) (*Hình 27*).

Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến hàng đơn vị của centimét khối).

Giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$f(x) = 0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85,$$

trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ quay quanh trục Ox là:

$$V = \pi\int_0^3 (0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^3 (0,0196x^6 - 0,2436x^5 + 1,2945x^4 - 3,1028x^3 + 2,2074x^2 + 3,264x + 0,7225)\mathrm{d}x$$

$$= \pi(0,0028x^7 - 0,0406x^6 + 0,2589x^5 - 0,7757x^4 + 0,7358x^3 + 1,632x^2 + 0,7225x)\Big|_0^3$$

$$= 13,3293\pi \approx 42 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy thể tích của chiếc chén khoảng 42 cm^3.

BÀI TẬP

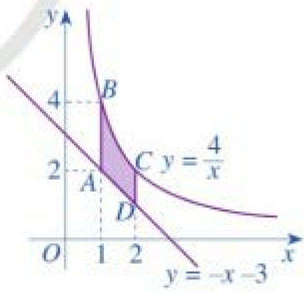
1. Hình thang cong $ABCD$ ở *Hình 28* có diện tích bằng:

A. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x + 3\right)\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{4}{x} + x + 3\right)\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x - 3\right)\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_2^4 \left(\frac{4}{x} + x + 3\right)\mathrm{d}x$.



Hình 28

2. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quay quanh trục Ox là:

A. $\pi\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

B. $\pi\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$.

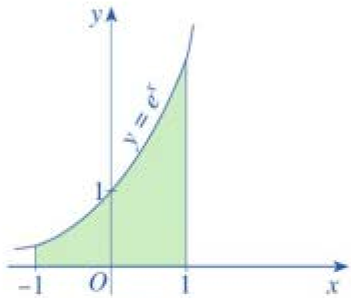
C. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$.

3. Cho đồ thị hàm số $y = e^x$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 29*.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

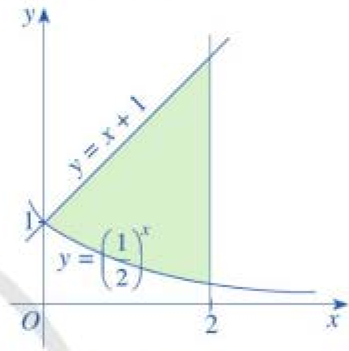


Hình 29

4. Cho đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = x + 1$ và hình phẳng được tô màu như *Hình 30*.

a) Hình phẳng đó được giới hạn bởi các đường nào?

b) Tính diện tích hình phẳng đó.

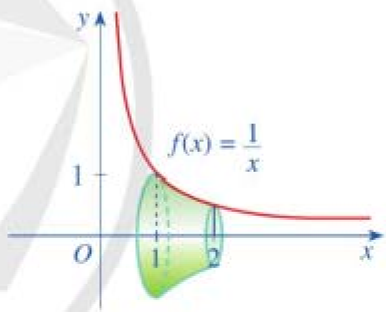


Hình 30

5. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và khối tròn xoay như *Hình 31*.

a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như *Hình 31*?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.

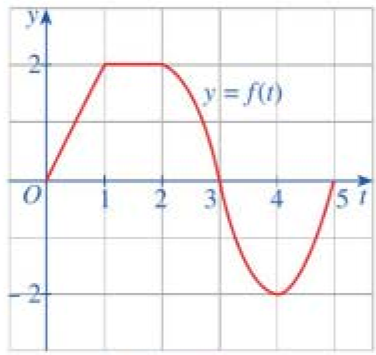


Hình 31

6. Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như *Hình 32*.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0$, $t = 2$.

b) Hỏi $\int_0^1 f(u)\,du$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường nào trong *Hình 32*?



Hình 32

7. Người ta dự định lắp kính cho cửa của một mái vòm có dạng hình parabol. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao 21 m và rộng 70 m (*Hình 33*).

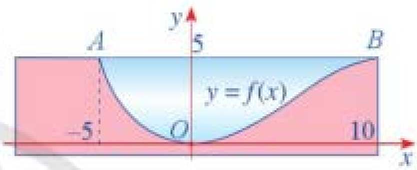
(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 33

8. *Hình 34* minh hoạ mặt cắt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục toạ độ *Oxy*. Đáy của con kênh là một đường cong cho bởi phương trình

$$y = f(x) = \frac{3}{100}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2\right).$$

Hãy tính diện tích hình phẳng tô màu xanh trong *Hình 34*, biết đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét.

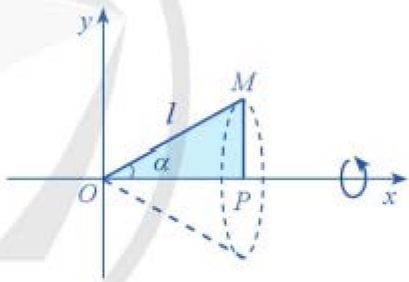


Hình 34

9. Cho tam giác vuông *OPM* có cạnh *OP* nằm trên trục *Ox*.

Giả sử $\widehat{POM} = \alpha$, $OM = l$ $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3};\ l > 0)$.

Gọi $\mathscr{N}$ là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục *Ox* (*Hình 35*). Tính thể tích của $\mathscr{N}$ theo α và l.



Hình 35

10. Sau khi đo kích thước của thùng rượu vang (*Hình 36*), bạn Quân xác định thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$y = -0{,}011x^2 - 0{,}071x + 40,$$

trục *Ox* và hai đường thẳng $x = -35$, $x = 35$ quay quanh trục *Ox*. Tính thể tích thùng rượu vang đó, biết đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét.

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Hình 36

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0) = 2\,023$ là:

A. $x^2 + e^x + 2\,023$.　　B. $x^2 + e^x + C$.

C. $x^2 + e^x + 2\,022$.　　D. $x^2 + e^x$.

2. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)]\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{23}{4}$.　　B. 7.　　C. 9.　　D. $\frac{15}{4}$.

3. Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]\mathrm{d}x = 2$. Khi đó, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. 1.　　B. 4.　　C. 2.　　D. 0.

4. Tìm:

a) $\int 2x(x^3 - x + 2)\mathrm{d}x$;　　b) $\int \left(2x + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$;　　c) $\int (3 + 2\tan^2 x)\mathrm{d}x$;

d) $\int (1 - 3\cot^2 x)\mathrm{d}x$;　　e) $\int (\sin x + 2^{-x+1})\mathrm{d}x$;　　g) $\int (2.6^{2x} - e^{-x+1})\mathrm{d}x$.

5. a) Cho hàm số $f(x) = x^2 + e^{-x}$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0) = 2\,023$.

b) Cho hàm số $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$. Tìm nguyên hàm $G(x)$ của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$ sao cho $G(1) = 2\,023$.

6. Tính:

a) $\int_{-1}^{1} (x+2)^3\mathrm{d}x$;　　b) $\int_1^2 \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$;　　c) $\int_1^4 x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_{-1}^{0} 2^{3x+2}\mathrm{d}x$;　　e) $\int_0^2 2^x \,.\, 3^{x+1}\mathrm{d}x$;　　g) $\int_0^1 \frac{7^x}{11^x}\mathrm{d}x$.

7. Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số

$$v(t) = -0{,}12t^2 + 1{,}2t,$$

với t tính bằng phút, $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát ($t = 0$), khinh khí cầu ở độ cao 520 m và 5 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu đã ở độ cao 530 m (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

a) Viết công thức xác định hàm số $h(t)$ ($0 \le t \le 29$).

b) Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là bao nhiêu?

c) Khi nào khinh khí cầu sẽ trở lại độ cao khi xuất phát?

8. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 100 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng tại thời điểm t cho bởi hàm số

$$m(t) = 500 + 50\sqrt{t} - 10t,$$

trong đó t tính theo ngày ($0 \le t \le 100$), $m(t)$ tính theo người (*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).

a) Khi nào có 360 công nhân được sử dụng?

b) Khi nào số công nhân được sử dụng lớn nhất?

c) Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công công trình). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Tổng cộng cần bao nhiêu ngày công để hoàn thành công trình xây dựng đó?

9. Trong bài này, ta xét một tình huống giả định có một học sinh sau kì nghỉ đã mang virus cúm quay trở lại khuôn viên trường học biệt lập với 1 000 học sinh. Sau khi có sự tiếp xúc giữa các học sinh, virus cúm lây lan trong khuôn viên trường. Giả thiết hệ thống chống dịch chưa được khởi động và virus cúm được lây lan tự nhiên. Gọi $P(t)$ là số học sinh bị nhiễm virus cúm ở ngày thứ t tính từ ngày học sinh mang virus cúm quay trở lại khuôn viên trường. Biết rằng tốc độ lây lan của virus cúm tỉ lệ thuận với số học sinh không bị nhiễm virus cúm theo hệ số tỉ lệ là hằng số $k \neq 0$. Số học sinh bị nhiễm virus cúm sau 4 ngày là 52 học sinh. Xác định số học sinh bị nhiễm virus cúm sau 10 ngày.

10. Một chiếc xe ô tô chạy thử nghiệm trên một đường thẳng bắt đầu từ trạng thái đứng yên. Tốc độ của chiếc xe ô tô đó (tính bằng mét/giây) lần lượt ở giây thứ 10, thứ 20, thứ 30, thứ 40, thứ 50 và thứ 60 được ghi lại trong *Bảng 1*.

Thời gian (giây)	0	10	20	30	40	50	60
Tốc độ (mét/giây)	0	5	21	40	62	78	83

Bảng 1

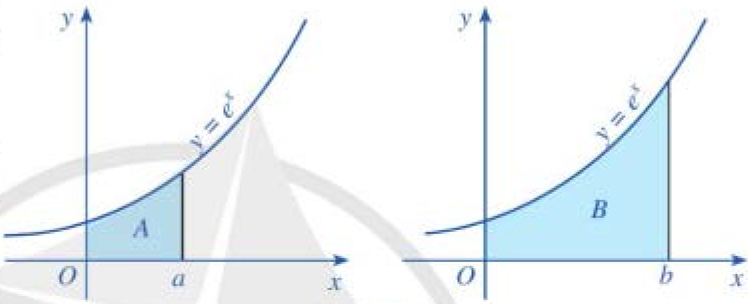
a) Hãy xây dựng hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ để biểu diễn các số liệu ở *Bảng 1*, tức là ở hệ trục toạ độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ "gần" với các điểm $O(0 ; 0)$, $B(10 ; 5)$, $C(20 ; 21)$, $D(30 ; 40)$, $E(40 ; 62)$, $G(50 ; 78)$, $K(60 ; 83)$ (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*).

b) Hãy tính (gần đúng) quãng đường mà xe ô tô đó đã đi được tính đến giây thứ 60 của quá trình thử nghiệm.

11. Giả sử A, B lần lượt là diện tích các hình được tô màu ở *Hình 37*.

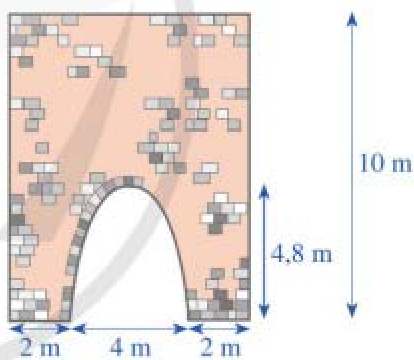
a) Tính các diện tích A, B.

b) Biết $B = 3A$. Biểu diễn b theo a.



Hình 37

12. *Hình 38* minh hoạ mặt cắt đứng của một bức tường cũ có dạng hình chữ nhật với một cổng ra vào có dạng hình parabol với các kích thước được cho như trong hình đó. Người ta dự định sơn lại mặt ngoài của bức tường đó. Chi phí để sơn bức tường là 15 000 đồng/1 m^2. Tổng chi phí để sơn lại toàn bộ mặt ngoài của bức tường đó sẽ là bao nhiêu?

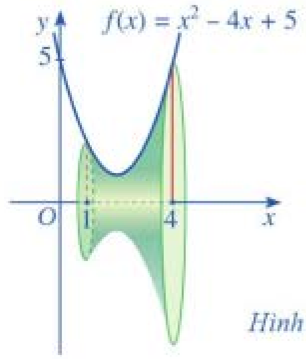


Hình 38

13. Cho khối tròn xoay như *Hình 39*.

a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như *Hình 39*?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.



Hình 39

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

CHỦ ĐỀ 2: THỰC HÀNH TẠO ĐỒNG HỒ MẶT TRỜI

I. NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHỦ ĐỀ

1. Đồng hồ Mặt Trời *(Nguồn tham khảo: Denis Savoie, Sundials, Design, Construction, and Use, Springer 2009)*

Cách đây khoảng 5 000 – 7 000 năm, con người đã xây dựng được lịch (trong một năm) và thời gian (trong một ngày đêm) để theo dõi và quan sát các hiện tượng của thế giới tự nhiên, vận hành nền sản xuất nông nghiệp và quản lí các sinh hoạt của con người trong xã hội. Đối với những khoảng thời gian lớn như năm thì có thể xác định tương đối chính xác ngay cả khi chưa có chiếc đồng hồ đầu tiên. Tuy nhiên, những khoảng thời gian dưới một ngày thì rất khó xác định chính xác. Vì thế, việc chế tạo các dụng cụ xác định thời gian chính xác hơn luôn được con người quan tâm đặc biệt. Các thiết bị để đo thời gian bằng cách theo dõi ánh sáng Mặt Trời đã được phát triển và sử dụng rộng rãi từ hàng ngàn năm trước Công nguyên, chẳng hạn như cột nấp cầu, gnomon (thanh kim loại thẳng đứng được đặt trên bề mặt phẳng) và các loại đồng hồ Mặt Trời khác.

Đồng hồ Mặt Trời được cho là một trong những loại đồng hồ đầu tiên được phát triển bởi con người. Nó đã được sử dụng từ hàng ngàn năm trước Công nguyên trong các nền văn minh cổ đại như Ai Cập cổ đại, Babylon, Hy Lạp và La Mã. Ngày nay, mặc dù đồng hồ Mặt Trời không được sử dụng phổ biến như các loại đồng hồ khác, nhưng nó vẫn được sử dụng trong một số ứng dụng đặc biệt như đo đạc địa chất, nghiên cứu thiên văn học và các hoạt động ngoài trời như sinh tồn.

Đồng hồ Mặt Trời được sử dụng để đo thời gian bằng cách theo dõi ánh sáng Mặt Trời. Nguyên tắc hoạt động của nó là theo dõi vết của ánh sáng Mặt Trời hiện trên một bề mặt phẳng có các vạch chia tương ứng để đo thời gian.

Đồng hồ Mặt Trời cổ ở Ai Cập (khoảng năm 1500 TCN)

(*Nguồn: University of Basel*)

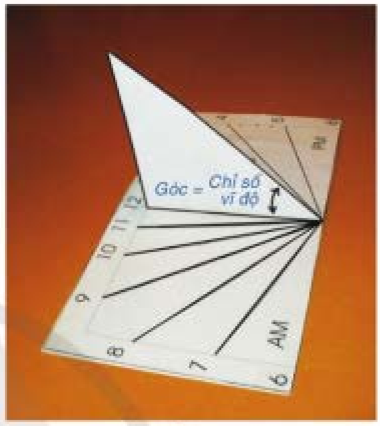
Đồng hồ Mặt Trời ở Taganrog

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Sau đây, ta sẽ tìm hiểu đồng hồ Mặt Trời ngang (tiếng Anh: typical horizontal sundial) là loại đồng hồ có mặt đồng hồ được đặt song song với mặt đất và kim chỉ thời gian thì nghiêng theo góc trùng với chỉ số vĩ độ nơi ta đang đứng.

2. Đồng hồ Mặt Trời ngang

a)



b)

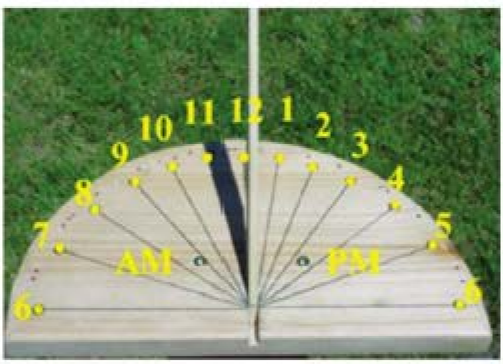
Hình 1

Đồng hồ Mặt Trời ngang (*Hình 1a*, *b*) có hai bộ phận chính:

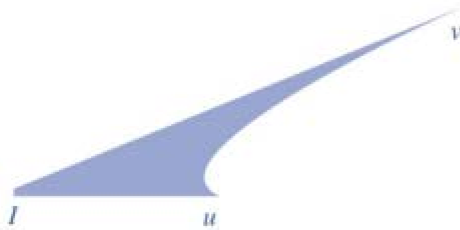
• *Đĩa* mặt đồng hồ được đặt song song với mặt đất, trên mặt đĩa có khắc các đường chỉ thời gian trong ngày (*Hình 2*).

• *Kim* chỉ thời gian là một thanh kim loại mỏng, nghiêng với mặt đồng hồ theo góc trùng với chỉ số vĩ độ nơi ta đang đứng. Hơn nữa, để một đồng hồ Mặt Trời chỉ được giờ chính xác, kim phải chỉ đúng về cực Bắc (ta có thể sử dụng la bàn để thực hiện việc này) (*Hình 3*).

Khi Mặt Trời di chuyển trong ngày, bóng của kim sẽ đổ xuống thẳng hàng với các đường trên mặt đĩa. Từ đó, ta xác định được thời gian trong ngày. Chẳng hạn, trong *Hình 2*, bóng của kim đổ xuống thẳng hàng với đường xác định 11 giờ trên mặt đĩa. Vậy thời điểm đó là 11 giờ trưa.



Hình 2



Kim chỉ thời gian

Hình 3

3. Cách xác định các đường chỉ thời gian trong ngày trên mặt đĩa của đồng hồ Mặt Trời ngang

Trên bề mặt đĩa, vẽ nửa cung tròn tâm O, đường kính AB sao cho đường trung trực của đoạn thẳng AB song song với phương chỉ cực Nam – cực Bắc của la bàn.

• Tia Oy trên đường trung trực đó là vạch chỉ 12 h;

• Tia OA là vạch chỉ 6 h;

• Tia OB là vạch chỉ 18 h;

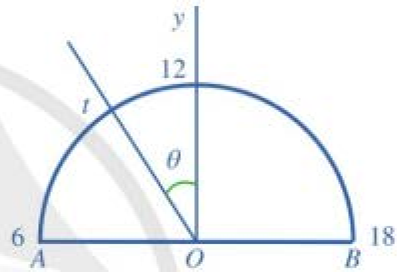
• Để xác định vạch chỉ t (h) ($6 < t < 18$) ta làm như sau:

Tìm góc $\theta \in (0^o ; 90^o)$ sao cho

$$\tan\theta = \sin\alpha^{o} \,.\, \tan(|t - 12| \,.\, 15^o),$$

trong đó, α là chỉ số vĩ độ của nơi đặt đồng hồ Mặt Trời

(Nguồn: R.R.J. Rohr, Sundials: History, theory, and practice, Translated by G. Godin, New York, NY: Dover, 1996, ISBN 0-486-29139-1).



Hình 4

Chẳng hạn: Thành phố Hà Nội có $\alpha = 21$; thành phố Huế có $\alpha = 16$; thành phố Hồ Chí Minh có $\alpha = 11$.

Khi đó, vạch chỉ t giờ ($6 < t < 18$) là tia Ot xuất phát từ tâm O sao cho $\widehat{yOt} = \theta$ (*Hình 4*).

Bằng cách tính toán trực tiếp (hoặc tra cứu trên web: *https://www.anycalculator.com/horizontalsundial.htm*), ta thấy giá trị của góc θ (làm tròn đến hàng đơn vị) được cho ở *Bảng 1*, *Bảng 2* ứng với thành phố Hà Nội có $\alpha = 21$, Thành phố Hồ Chí Minh có $\alpha = 11$:

Giờ		Góc θ (độ)
6 h	18 h	90
7 h	17 h	53
8 h	16 h	32
9 h	15 h	20
10 h	14 h	12
11 h	13 h	5

Bảng 1

Giờ		Góc θ (độ)
6 h	18 h	90
7 h	17 h	35
8 h	16 h	18
9 h	15 h	11
10 h	14 h	6
11 h	13 h	3

Bảng 2

Bảng 3 thống kê các chỉ số vĩ độ α của các tỉnh, thành phố ở nước ta (làm tròn đến hàng đơn vị của độ) (*Nguồn tham khảo: https://geokeo.com/database/state/vn/1/*):

Chỉ số	Tỉnh, thành phố
$\alpha = 22$	Hà Giang, Cao Bằng, Bắc Kạn, Tuyên Quang, Lào Cai, Yên Bái, Điện Biên, Lạng Sơn, Lai Châu, Sơn La
$\alpha = 21$	Hoà Bình, Phú Thọ, Thái Nguyên, Bắc Giang, Hà Nội, Vĩnh Phúc, Bắc Ninh, Quảng Ninh, Hải Dương, Hải Phòng, Hưng Yên
$\alpha = 20$	Hà Nam, Nam Định, Thái Bình
$\alpha = 19$	Ninh Bình, Thanh Hoá, Nghệ An
$\alpha = 18$	Hà Tĩnh
$\alpha = 17$	Quảng Bình, Quảng Trị
$\alpha = 16$	Thừa Thiên-Huế, Đà Nẵng
$\alpha = 15$	Quảng Nam, Quảng Ngãi
$\alpha = 14$	Bình Định, Kon Tum, Gia Lai
$\alpha = 13$	Phú Yên, Đắk Lắk
$\alpha = 12$	Khánh Hoà, Ninh Thuận, Đắc Nông, Lâm Đồng, Bình Phước
$\alpha = 11$	Bình Thuận, Tây Ninh, Bình Dương, Đồng Nai, Thành phố Hồ Chí Minh
$\alpha = 10$	Bà Rịa-Vũng Tàu, Long An, Tiền Giang, Bến Tre, Vĩnh Long, Đồng Tháp, Trà Vinh, Cần Thơ, An Giang, Kiên Giang, Hậu Giang
$\alpha = 9$	Sóc Trăng, Bạc Liêu, Cà Mau

Bảng 3

4. Cách làm đồng hồ Mặt Trời ngang

Ta chọn vật liệu là tấm nhựa trắng hoặc bìa cứng để làm đĩa mặt đồng hồ và kim chỉ thời gian.

Bước 1. Làm đĩa mặt đồng hồ bằng cách sau:

+ Trên bề mặt đĩa, vẽ nửa cung tròn tâm O, đường kính AB.

+ Sau đó, xác định các vạch chỉ 12 h, 6 h, 18 h như đã nêu ở Mục 3.

+ Lập bảng tính giá trị của góc θ (làm tròn đến hàng đơn vị) tương tự *Bảng 1*, ứng với chỉ số vĩ độ của nơi đặt đồng hồ Mặt Trời.

+ Xác định vạch chỉ t (h) ($6 < t < 18$) như đã nêu ở Mục 3.

Bước 2. Làm kim chỉ thời gian có dạng như ở *Hình 3* sao cho góc uIv có độ lớn bằng chỉ số vĩ độ của nơi đặt đồng hồ Mặt Trời.

Bước 3. Đĩa mặt đồng hồ được đặt song song với mặt đất, kim chỉ thời gian được gắn vào mặt đồng hồ sao cho $I \equiv O$, $Iu \equiv Oy$ (*Hình 3* và *Hình 4*), mặt phẳng chứa kim vuông góc với mặt đồng hồ và kim chỉ về đúng cực Bắc.

II. GỢI Ý TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG

Thực hành tạo đồng hồ Mặt Trời ngang.
Tiến trình tổ chức các hoạt động bao gồm: phần chuẩn bị; phần thực hiện; phần tổng kết.

1. Phần chuẩn bị

1 Giáo viên thực hiện nhiệm vụ sau:

– Chia lớp thành những nhóm học sinh và giao nhiệm vụ các nhóm thực hành tạo đồng hồ Mặt Trời ngang bằng bìa cứng.

– Yêu cầu mỗi nhóm học sinh chuẩn bị bìa cứng, kéo, thước kẻ, giấy A4, băng keo trong hoặc keo dán.

2 Mỗi nhóm học sinh trao đổi, thảo luận để xác định rõ nhiệm vụ của nhóm và thực hành nhiệm vụ được giao.

a) *Nhiệm vụ 1.* Xác định vĩ độ của địa phương nơi nhà trường xây dựng (có thể sử dụng Google Maps).

b) *Nhiệm vụ 2.* Lập bảng tính giá trị của góc θ (làm tròn đến hàng đơn vị) tương tự *Bảng 1*, ứng với chỉ số vĩ độ đó.

2. Phần thực hiện

Mỗi nhóm học sinh thực hành tạo đồng hồ Mặt Trời ngang theo các bước như đã nêu trong Mục 4.

3. Phần tổng kết

3 Làm việc chung cả lớp để thực hiện các nhiệm vụ sau:

– Các nhóm báo cáo sản phẩm của nhóm. Từ đó, cả lớp góp ý cho sản phẩm của mỗi nhóm.

– Tổng kết và rút kinh nghiệm.

III. ĐÁNH GIÁ

Hình thức đánh giá của học tập dự án.

1. Đánh giá hoạt động cá nhân

– Mỗi cá nhân tự đánh giá vào phiếu cá nhân.
– Nhóm đánh giá từng thành viên trong nhóm vào phiếu đánh giá cá nhân.

2. Đánh giá hoạt động và sản phẩm của nhóm

– Nhóm tự đánh giá lại hoạt động của nhóm và cho điểm vào phiếu đánh giá hoạt động của nhóm.
– Giáo viên và các nhóm đánh giá, rồi cho điểm phần trình bày của từng nhóm vào phiếu đánh giá hoạt động nhóm.

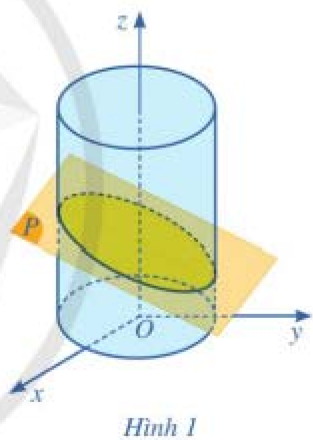
CHƯƠNG V

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phương trình mặt phẳng trong không gian; phương trình đường thẳng trong không gian; phương trình mặt cầu trong không gian.

§1 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Người ta muốn sản xuất một chi tiết máy được cắt ra từ một ống trụ thép bằng gia công cơ khí chính xác (*Hình 1*). Để làm chi tiết máy đó, người ta cần xác định phương trình của mặt cắt trong một hệ toạ độ thích hợp và đưa những dữ liệu đó vào hệ thống máy tính điều khiển các máy gia công cơ khí kĩ thuật số.

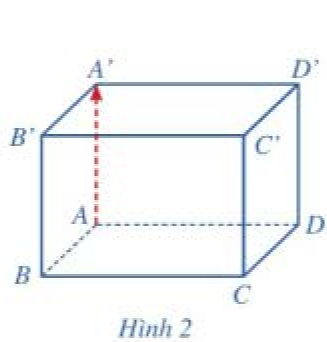


Hình 1

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, phương trình của mặt phẳng là gì? Làm thế nào để lập được phương trình của mặt phẳng?

I. VECTƠ PHÁP TUYẾN. CẶP VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA MẶT PHẲNG

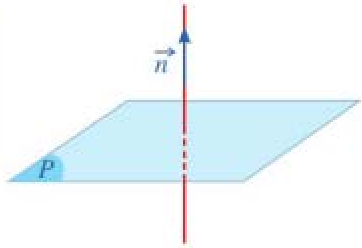
1. Vectơ pháp tuyến



Hình 2

1 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (*Hình* 2). Giá của vectơ $\overrightarrow{AA'}$ có vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ hay không?

Cho mặt phẳng (P). Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) thì $\vec{n}$ được gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (P).



Hình 3

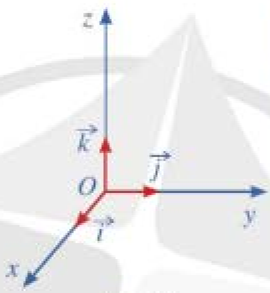
Ở *Hình 3*, vectơ $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Nhận xét: Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Ví dụ 1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy).

Giải. (*Hình 4*)

Vectơ $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$ có giá là trục Oz và $Oz \perp (Oxy)$ nên $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy).



Hình 4

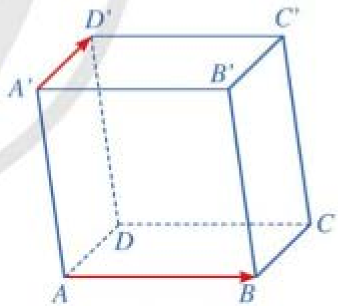
1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của:

a) Mặt phẳng (Oyz);

b) Mặt phẳng (Ozx).

2. Cặp vectơ chỉ phương

2 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Cho biết hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'D'}$ có cùng phương hay không. Nhận xét về vị trí tương đối giữa giá của mỗi vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'D'}$ và mặt phẳng $(ABCD)$ (*Hình 5*).



Hình 5

Cho mặt phẳng (P). Hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) được gọi là *cặp vectơ chỉ phương* của mặt phẳng (P).

Ví dụ 2 Quan sát *Hình 5*.

a) $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ có là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ hay không? Vì sao?

b) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ có là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ hay không? Vì sao?

2 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy chỉ ra một cặp vectơ chỉ phương của mỗi mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx).

Giải

a) Do hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ không cùng phương và có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'D'}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

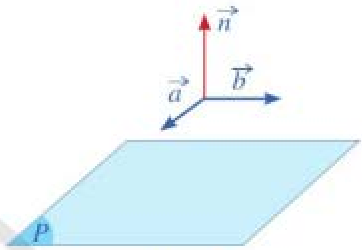
b) Do hai vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ không cùng phương và có giá cùng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

3. Xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết cặp vectơ chỉ phương

3 Cho cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1 ; 0 ; 1)$, $\vec{b} = (2 ; 1 ; 0)$ của mặt phẳng (P).

a) Hãy chỉ ra toạ độ của một vectơ $\vec{n}$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (*Hình 6*).

b) Vectơ $\vec{n}$ có là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) hay không?



Hình 6

Nếu hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$, $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) thì $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ví dụ 3 Cho mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1 ; 3 ; 5)$, $\vec{b} = (-3 ; -1 ; 1)$.

Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Giải

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right) = (8 ; -16 ; 8).$$

3 Trong *Ví dụ 3*, vectơ $\vec{n'} = (1 ; -2 ; 1)$ có là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) hay không? Vì sao?

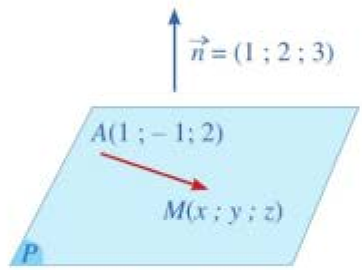
II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

4 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1 ; -1 ; 2)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1 ; 2 ; 3)$.

Giả sử $M(x ; y ; z)$ là một điểm tuỳ ý thuộc mặt phẳng (P) (*Hình 7*).

a) Tính tích vô hướng $\vec{n} . \overrightarrow{AM}$ theo x, y, z.

b) Toạ độ $(x ; y ; z)$ của điểm M có thoả mãn phương trình:
$x + 2y + 3z - 5 = 0$ hay không?



Hình 7

Nhận xét: Ta nói mặt phẳng (P) có *phương trình tổng quát* là: $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

• Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, mỗi mặt phẳng (P) có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0.

• Ngược lại, mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, đều xác định một mặt phẳng trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$.

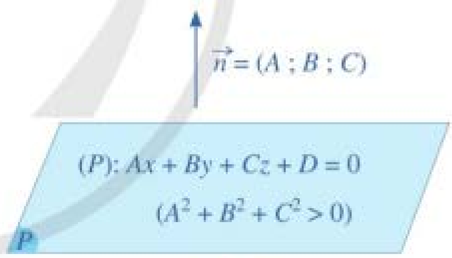
Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C không đồng thời bằng 0) là *phương trình tổng quát* của mặt phẳng. Hệ số D gọi là *hệ số tự do* của phương trình tổng quát.

Nhận xét

Ta có thể chứng minh được rằng nếu mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, thì vectơ $\vec{n} = (A ; B ; C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) (*Hình 8*).



Hình 8

Ví dụ 4 Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $x^2 + y + z - 1 = 0$. B. $x + y^2 + z - 1 = 0$.

C. $x + y + z^2 - 1 = 0$. D. $x + y + z - 1 = 0$.

Giải

Ta thấy chỉ có phương trình $x + y + z - 1 = 0$ là phương trình tổng quát của mặt phẳng. Chọn D.

Ví dụ 5 Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P):

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

Giải

Ta có: $2x - y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \,.\, x + (-1) \,.\, y + 1 \,.\, z - 1 = 0$.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n} = (2 ; -1 ; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.

4 Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng sau:

a) (P): $x - y = 0$;

b) (Q): $z - 2 = 0$.

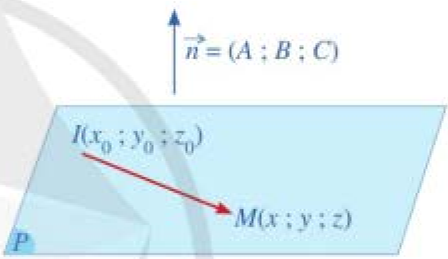
III. LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG BIẾT MỘT SỐ ĐIỀU KIỆN

1. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến

5 Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ có $\vec{n} = (A ; B ; C)$ là vectơ pháp tuyến. Giả sử $M(x ; y ; z)$ là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P) (*Hình 9*).

a) Tính tích vô hướng $\vec{n} \,.\, \overrightarrow{IM}$.

b) Hãy biểu diễn $\vec{n} \,.\, \overrightarrow{IM}$ theo x_0, y_0, z_0; x, y, z và A, B, C.



Hình 9

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A ; B ; C)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Chú ý: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (A ; B ; C)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ví dụ 6 Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1 ; 2 ; 7)$ và nhận $\vec{n} = (3 ; 2 ; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Giải

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$3 \,.\, (x - 1) + 2 \,.\, (y - 2) + 1 \,.\, (z - 7) = 0$$

$\Leftrightarrow 3x + 2y + z - 14 = 0$.

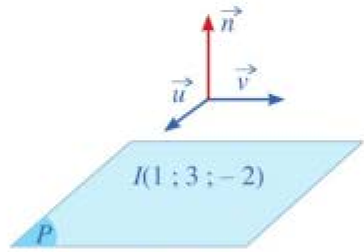
5 Cho hai điểm $M(2;1;0)$, $N(0 ; 3 ; 0)$. Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN.

2. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương

6 Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1 ; 3 ; -2)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1 ; 1 ; 3)$, $\vec{v} = (2 ; -1 ; 2)$ (*Hình 10*).

a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

b) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(1 ; 3 ; -2)$, biết vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.



Hình 10

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}$, $\vec{v}$, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

Bước 2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến.

Ví dụ 7 Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $I(-3 ; 1 ; 0)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2 ; 1 ; -1)$, $\vec{v} = (-1 ; 3 ; 2)$.

Giải

Xét vectơ $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right)$, tức là $\vec{n} = (5 ; -3 ; 7)$. Khi đó, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$5 . (x + 3) + (-3) . (y - 1) + 7 . (z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3y + 7z + 18 = 0.$$

6 Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(x_0 ; y_0 ; z_0)$. Lập phương trình mặt phẳng (P), biết mặt phẳng đó:

a) Vuông góc với trục Ox;

b) Vuông góc với trục Oy;

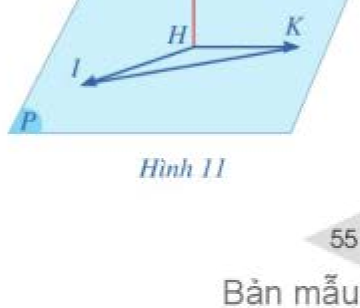
c) Vuông góc với trục Oz.

3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng

7 Cho ba điểm $H(-1 ; 1 ; 2)$, $I(1 ; 3 ; 2)$, $K(-1 ; 4 ; 5)$ cùng thuộc mặt phẳng (P) (*Hình 11*).

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HK}$. Từ đó hãy chứng tỏ rằng ba điểm H, I, K không thẳng hàng.

b) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(-1 ; 1 ; 2)$, biết cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HK}$.



Hình 11

Để lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $H(a_1 ; b_1 ; c_1)$, $I(a_2 ; b_2 ; c_2)$, $K(a_3 ; b_3 ; c_3)$ không thẳng hàng, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) là:

$$\overrightarrow{HI} = (a_2 - a_1 ; b_2 - b_1 ; c_2 - c_1),\ \overrightarrow{HK} = (a_3 - a_1 ; b_3 - b_1 ; c_3 - c_1).$$

Bước 2. Tìm $\vec{n} = \left[\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HK}\right]$.

Bước 3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(a_1 ; b_1 ; c_1)$ nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến.

Ví dụ 8 Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(1 ; 0 ; 2)$, $B(1 ; 1 ; 1)$ và $C(0 ; 1 ; 2)$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0 ; 1 ; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1 ; 1 ; 0)$.

Xét vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$, tức là $\vec{n} = (1 ; 1 ; 1)$.

Khi đó, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$1 . (x - 1) + 1 . (y - 0) + 1 . (z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 3 = 0.$$

7 Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M(1 ; 2 ; 1)$, $N(0 ; 3 ; 2)$ và $P(-1 ; 0 ; 0)$.

Ví dụ 9 Cho ba điểm $A(a ; 0 ; 0)$, $B(0 ; b ; 0)$, $C(0 ; 0 ; c)$ với $abc \neq 0$ (*Hình 12*). Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

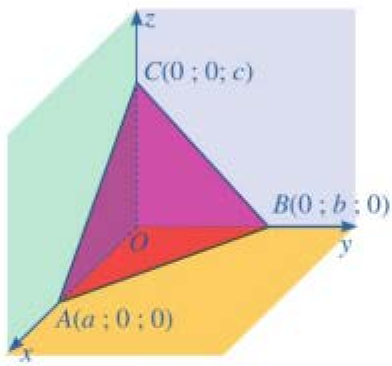
Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-a ; b ; 0) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} = (-a ; 0 ; c) \neq \vec{0}$.

Xét vectơ

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0 \end{vmatrix} \right),$$

tức là $\vec{n} = (bc ; ca ; ab)$. Do $\vec{n} \neq \vec{0}$ nên $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).



Hình 12

Vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

$$bc\,.\,(x-a)+ca\,.\,(y-0)+ab\,.\,(z-0)=0$$
$$\Leftrightarrow bcx+cay+abz-abc=0 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Chú ý: Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a\,;0\,;0)$, $B(0\,;b\,;0)$, $C(0\,;0\,;c)$ với $abc \neq 0$ có phương trình là:

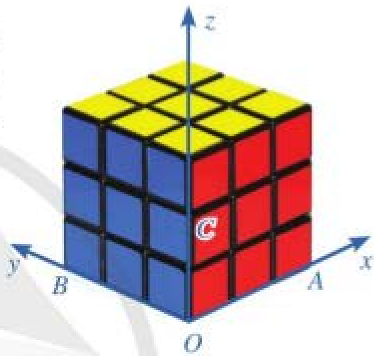
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Phương trình đó còn được gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn*.

Ví dụ 10 Khối rubik được gắn với hệ toạ độ $Oxyz$ có đơn vị bằng độ dài cạnh hình lập phương nhỏ (*Hình 13*). Xét bốn điểm $A(3\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$, $C(0\,;0\,;2)$ và $D(1\,;1\,;1)$.

a) Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng hay không?



Hình 13

Giải

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1 \quad (*)$$

b) Thay toạ độ của điểm D vào vế trái của phương trình (*), ta có: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\neq 1$. Suy ra điểm D không thuộc mặt phẳng (ABC).

Vậy bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

8 Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$, $C(0\,;0\,;4)$.

IV. ĐIỀU KIỆN SONG SONG, VUÔNG GÓC CỦA HAI MẶT PHẲNG

1. Điều kiện song song của hai mặt phẳng

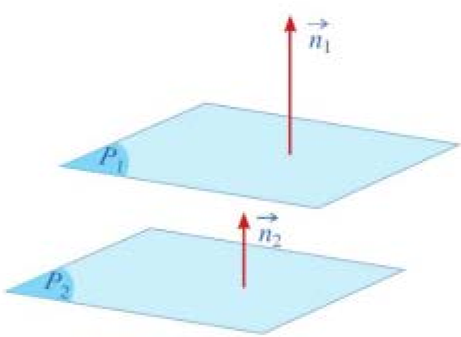
8 Cho mặt phẳng (P_1):

$$2x+2y+2z+1=0 \ (1)$$

và mặt phẳng (P_2):

$$x+y+z-1=0 \ (2).$$

a) Gọi $\vec{n}_1=(2\,;2\,;2)$, $\vec{n}_2=(1\,;1\,;1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1), (P_2) (*Hình 14*). Tìm liên hệ giữa $\vec{n}_1$ và $2\vec{n}_2$.



Hình 14

b) Tìm các hệ số tự do D_1, D_2 lần lượt trong hai phương trình (1), (2). So sánh D_1 và $2D_2$.

c) Nêu vị trí tương đối của hai mặt phẳng (P_1), (P_2).

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Gọi $\vec{n}_1 = (A_1 ; B_1 ; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2 ; B_2 ; C_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1), (P_2).

Khi đó: $(P_1) // (P_2)$ khi và chỉ khi tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2. \end{cases}$

Ví dụ 11 Cho hai mặt phẳng

$$(P_1): 2x - y - 3z + 1 = 0,$$

$$(P_2): 6x - 3y - 9z + 1 = 0.$$

Chứng minh rằng $(P_1) // (P_2)$.

Giải

Hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (2 ; -1 ; -3),\ \vec{n}_2 = (6 ; -3 ; -9).$$

Vì $\vec{n}_2 = 3\vec{n}_1$ và $D_1 = 1 \neq 3 . 1 = 3D_1$ nên $(P_1) // (P_2)$.

9 Cho $m \neq 0$. Chứng minh rằng các mặt phẳng

$(P): x - m = 0,$

$(Q): y - m = 0,$

$(R): z - m = 0$

lần lượt song song với các mặt phẳng (Oyz), (Ozx), (Oxy).

2. Điều kiện vuông góc của hai mặt phẳng

9 Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là:

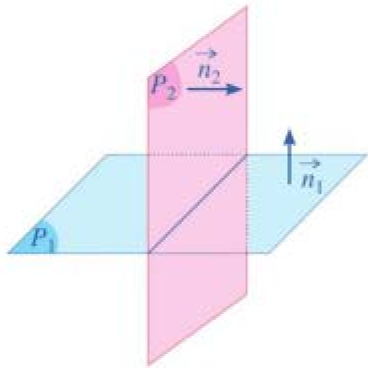
$$x + 2y + z + 1 = 0$$

và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là:

$$3x - 2y + z + 5 = 0.$$

Gọi $\vec{n}_1 = (1 ; 2 ; 1)$, $\vec{n}_2 = (3 ; -2 ; 1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P_1), (P_2). Hai vectơ $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ có vuông góc với nhau hay không?

Người ta chứng minh được rằng hai mặt phẳng (P_1), (P_2) vuông góc với nhau.



Hình 15

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Cho mặt phẳng (P_1) có phương trình tổng quát là $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và mặt phẳng (P_2) có phương trình tổng quát là $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó:

$$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Ví dụ 12 Cho hai mặt phẳng

$$(P_1): x - y - 2z + 4 = 0,$$

$$(P_2): x - y + z + 5 = 0.$$

Chứng minh rằng $(P_1) \perp (P_2)$.

Giải

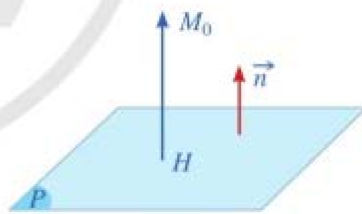
Hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n_1} = (1 ; -1 ; -2)$, $\vec{n_2} = (1 ; -1 ; 1)$.

Vì $\vec{n_1} . \vec{n_2} = 1 . 1 + (-1) . (-1) + (-2) . 1 = 0$ nên $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$. Vậy $(P_1) \perp (P_2)$.

10 Chứng minh rằng hai mặt phẳng (Ozx) và (P): $x + 2z - 3 = 0$ vuông góc với nhau.

V. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

10 Cho mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ với $\vec{n} = (A ; B ; C)$ là vectơ pháp tuyến. Cho điểm $M_0(2 ; 3 ; 4)$. Gọi $H(x_H ; y_H ; z_H)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M_0 trên mặt phẳng (P) (*Hình 16*).



Hình 16

a) Tính toạ độ của $\overrightarrow{HM_0}$ theo x_H, y_H, z_H.

b) Nêu nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{n} = (A ; B ; C)$, $\overrightarrow{HM_0}$.

Từ đó, hãy suy ra rằng

$$\left|\vec{n} . \overrightarrow{HM_0}\right| = |\vec{n}| . \left|\overrightarrow{HM_0}\right| = |A . 2 + B . 3 + C . 4 + D|.$$

c) Tính các độ dài $|\vec{n}|$, $\left|\overrightarrow{HM_0}\right|$ theo A, B, C, D. Từ đó, hãy nêu công thức tính khoảng cách từ điểm $M_0(2 ; 3 ; 4)$ đến mặt phẳng (P).

Một cách tổng quát, ta có:

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đến mặt phẳng (P):

$$Ax + By + Cz + D = 0\ (A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

được tính theo công thức: $d(M_0, (P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Ví dụ 13 Cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z + 3 = 0$ và điểm $M_0(3 ; 1 ; -5)$. Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P).

Giải

Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P) là:

$$d(M_0, (P)) = \frac{|2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 4.$$

11 Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm $M(a ; b ; c)$ đến các mặt phẳng (Oyz), (Ozx), (Oxy) lần lượt bằng $|a|$, $|b|$, $|c|$.

Ví dụ 14 Cho mặt phẳng

$$(P_1): 2x - 4y - 4z + 3 = 0$$

và mặt phẳng (P_2): $x - 2y - 2z + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng $(P_1) // (P_2)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P_1), (P_2).

Giải

a) Ta có $\vec{n}_1 = (2 ; -4 ; -4)$, $\vec{n}_2 = (1 ; -2 ; -2)$ lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P_1), (P_2). Do $\vec{n}_1 = 2\vec{n}_2$, $D_1 = 3 \neq 2 = 2D_2$ nên $(P_1) // (P_2)$.

b) Chọn điểm $M_0\left(-\dfrac{3}{2} ; 0 ; 0\right) \in (P_1)$. Suy ra khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P_2) là:

$$d(M_0, (P_2)) = \frac{\left|-\dfrac{3}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{6}.$$

Do khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P_1), (P_2) bằng $d(M_0, (P_2))$ nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P_1), (P_2) bằng $\dfrac{1}{6}$.

12 Cho mặt phẳng

(P_1): $6x - 8y - 3 = 0$

và mặt phẳng

(P_2): $3x - 4y + 2 = 0$.

a) Chứng minh rằng $(P_1) // (P_2)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P_1), (P_2).

VI. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG THỰC TIỄN

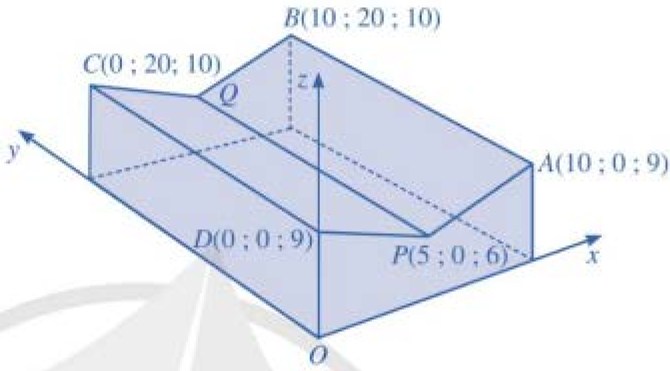
Phương trình mặt phẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn như trong thiết kế xây dựng, tính toán các yếu tố kĩ thuật, ... Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 15 *Hình 17* minh hoạ hình ảnh hai mái nhà của một nhà kho trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất.

a) Lập phương trình của hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà.

b) Tìm toạ độ của điểm Q.

c) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{PQ}$.



Hình 17

Giải

a) Hai mặt phẳng tương ứng mỗi mái nhà là (ABP) và (CDP).

• Do mặt phẳng (ABP) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0\,;20\,;1)$, $\overrightarrow{AP} = (-5\,;0\,;-3)$ nên có một vectơ pháp tuyến là:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}\right] = \left(\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 20 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-60\,;-5\,;100).$$

Mà mặt phẳng (ABP) đi qua điểm $A(10\,;0\,;9)$ nên có phương trình là:

$$-60(x-10) - 5(y-0) + 100(z-9) = 0 \Leftrightarrow 12x + y - 20z + 60 = 0.$$

• Do mặt phẳng (CDP) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{DP} = (5\,;0\,;-3)$, $\overrightarrow{DC} = (0\,;20\,;1)$ nên có một vectơ pháp tuyến là:

$$\left[\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{DC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 20 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix}\right) = (60\,;-5\,;100).$$

Mà mặt phẳng (CDP) đi qua điểm $D(0\,;0\,;9)$ nên có phương trình là:

$$60(x-0) - 5(y-0) + 100(z-9) = 0 \Leftrightarrow 12x - y + 20z - 180 = 0.$$

b) Vì các bức tường của nhà kho đều được xây vuông góc với mặt đất nên với hệ toạ độ trên ta có $Q(x\,;20\,;z)$.

Do điểm Q thuộc mặt phẳng (ABP) nên toạ độ của điểm Q thoả mãn:

$$12x + 20 - 20z + 60 = 0, \text{ tức là } 3x - 5z = -20.$$

Do điểm Q thuộc mặt phẳng (CDP) nên toạ độ của điểm Q thoả mãn

$$12x - 20 + 20z - 180 = 0, \text{ tức là } 3x + 5z = 50.$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - 5z = -20 \\ 3x + 5z = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ z = 7 \end{cases}$.

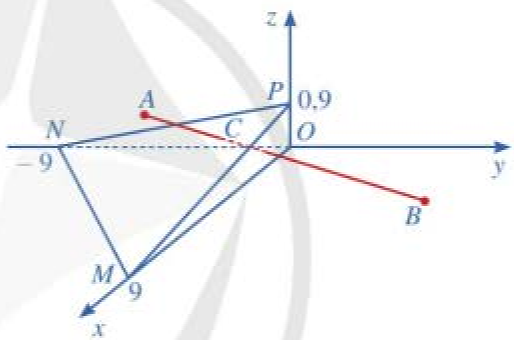
Vậy $Q(5 ; 20 ; 7)$.

c) Với $P(5 ; 0 ; 6)$ và $Q(5 ; 20 ; 7)$ ta có: $\overrightarrow{PQ} = (0 ; 20 ; 1)$.

Ví dụ 16 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3 ; -2,5 ; 0,5)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3 ; 7,5 ; 0)$ trên đường băng (*Hình 18*).

a) Sau bao nhiêu phút máy bay từ vị trí A hạ cánh tại vị trí B? Biết tốc độ của máy bay là 300 km/h trên quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

(Nguồn: https://shutterstock.com)



Hình 18

b) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(9 ; 0 ; 0)$, $N(0 ; -9 ; 0)$, $P(0 ; 0; 0,9)$. Tính độ cao của máy bay khi máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

Giải

a) Ta có: $AB = \sqrt{(3-3)^2 + (7,5+2,5)^2 + (0-0,5)^2} = \sqrt{100,25}$ (km).

Do đó, thời gian để máy bay từ vị trí A hạ cánh tại vị trí B là:

$$\frac{\sqrt{100,25}}{300} \text{ (h)} = \frac{\sqrt{100,25}}{300} . 60 \text{ (phút)} = \frac{\sqrt{100,25}}{5} \text{ (phút)} = \sqrt{4,01} \text{ (phút)} \approx 2 \text{ (phút)}.$$

b) Giả sử điểm $C(x_C ; y_C ; z_C)$ là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh, suy ra $C \in (\alpha)$. Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta thấy mặt phẳng (α) có phương trình là:

$$\frac{x}{9} - \frac{y}{9} + \frac{z}{0,9} = 1 \Leftrightarrow x - y + 10z = 9. \text{ Suy ra } x_C - y_C + 10z_C = 9.$$

Mặt khác, vì $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng hướng nên tồn tại số thực $t > 0$ sao cho $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$. Do

$\overrightarrow{AC} = (x_C - 3 ; y_C + 2,5 ; z_C - 0,5)$;

$\overrightarrow{AB} = (3 - 3 ; 7,5 + 2,5 ; 0 - 0,5) = (0 ; 10 ; -0,5)$

nên $\begin{cases} x_C - 3 = 0t \\ y_C + 2,5 = 10t \\ z_C - 0,5 = -0,5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 10t - 2,5 \\ z_C = -0,5t + 0,5. \end{cases}$

Vì $C \in (\alpha)$ nên $3 - (10t - 2,5) + 10(-0,5t + 0,5) = 9 \Leftrightarrow t = 0,1$. Suy ra $C(3 ; -1,5 ; 0,45)$.

Vậy tại vị trí C, độ cao của máy bay là 0,45 km.

BÀI TẬP

1. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $-x^2 + 2y + 3z + 4 = 0$.
B. $2x - y^2 + z + 5 = 0$.
C. $x + y - z^2 + 6 = 0$.
D. $3x - 4y - 5z + 1 = 0$.

2. Mặt phẳng $x + 2y - 3z + 4 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}_1 = (2 ; -3 ; 4)$.
B. $\vec{n}_2 = (1 ; 2 ; 3)$.
C. $\vec{n}_3 = (1 ; 2 ; -3)$.
D. $\vec{n}_4 = (1 ; 2 ; 4)$.

3. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $I(3 ; -4 ; 5)$ và nhận $\vec{n} = (2 ; 7 ; -1)$ làm vectơ pháp tuyến.

4. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $K(-1 ; 2 ; 3)$ và nhận hai vectơ $\vec{u} = (1 ; 2 ; 3)$, $\vec{v} = (4 ; 5 ; 6)$ làm cặp vectơ chỉ phương.

5. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua:

a) Điểm $I(3 ; -4 ; 1)$ và vuông góc với trục Ox;

b) Điểm $K(-2 ; 4 ; -1)$ và song song với mặt phẳng (Ozx);

c) Điểm $K(-2 ; 4 ; -1)$ và song song với mặt phẳng (Q): $3x + 7y + 10z + 1 = 0$.

6. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(0 ; 4 ; 0)$, $C(2 ; 2 ; 0)$.

7. Lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P), biết (P) đi qua ba điểm $A(5 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 3 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 6)$.

8. Cho hai mặt phẳng (P_1): $4x - y - z + 1 = 0$, (P_2): $8x - 2y - 2z + 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng $(P_1) // (P_2)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P_1), (P_2).

9. a) Cho hai mặt phẳng (P_1): $x + 2y + 3z + 4 = 0$, (P_2): $x + y - z + 5 = 0$. Chứng minh rằng $(P_1) \perp (P_2)$.

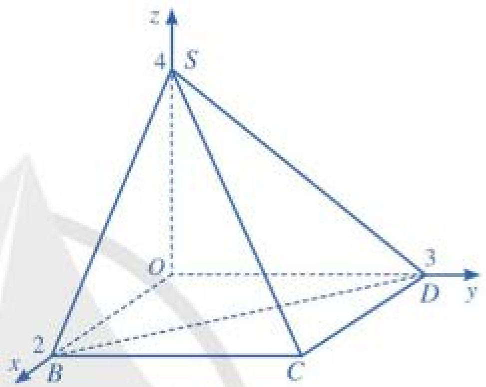
b) Cho mặt phẳng (P): $x - 2y - 2z + 1 = 0$ và điểm $M(1 ; 1 ; - 6)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

10. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.OBCD$ có đáy là hình chữ nhật và các điểm $O(0 ; 0 ; 0)$, $B(2 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 3 ; 0)$, $S(0 ; 0 ; 4)$ (*Hình 19*).

a) Tìm toạ độ điểm C.

b) Viết phương trình mặt phẳng (SBD).

c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).



Hình 19

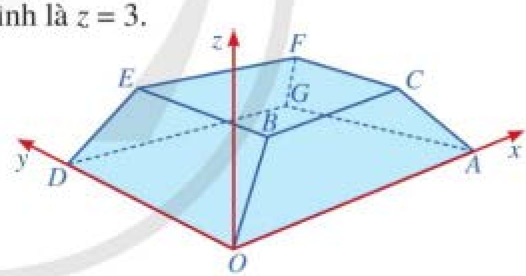
11. *Hình 20* minh hoạ hình ảnh một toà nhà trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét). Biết $A(50 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 20 ; 0)$, $B(4k ; 3k ; 2k)$ với $k > 0$ và mặt phẳng $(CBEF)$ có phương trình là $z = 3$.

a) Tìm toạ độ của điểm B.

b) Lập phương trình mặt phẳng $(AOBC)$.

c) Lập phương trình mặt phẳng $(DOBE)$.

d) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng $(AOBC)$ và $(DOBE)$.

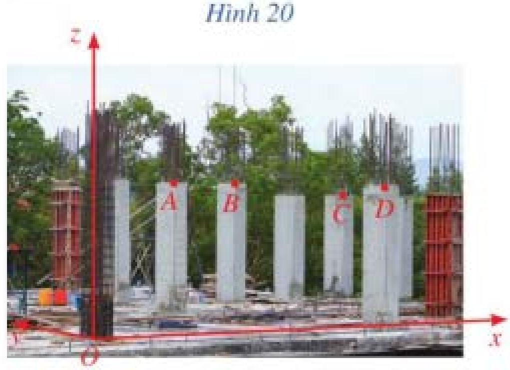


Hình 20

12. *Hình 21* minh hoạ một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2 ; 1 ; 3)$, $B(4 ; 3 ; 3)$, $C(6 ; 3 ; 2,5)$, $D(4 ; 0 ; 2,8)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng không?



(*Nguồn: https://www.shutterstock.com*)

Hình 21

§2 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Cầu Bãi Cháy nối Hòn Gai và Bãi Cháy (Quảng Ninh). Dây cáp của cầu gợi nên hình ảnh đường thẳng trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz* (*Hình 22*).

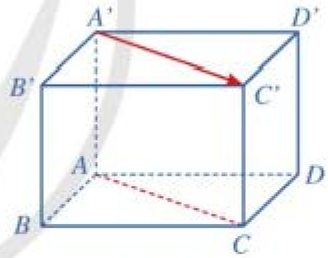
Trong hệ toạ độ Oxyz, phương trình của đường thẳng là gì? Làm thế nào để lập được phương trình của đường thẳng?

Cầu Bãi cháy
(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 22

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

1 Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* (*Hình 23*). Giá của vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ và đường thẳng AC có vị trí tương đối như thế nào?



Hình 23

Cho đường thẳng Δ và vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét: Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của một đường thẳng thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng đó.

Ví dụ 1 Trong *Hình 23*, các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB hay không? Vì sao?

Giải

Do vectơ $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và có giá là đường thẳng AB nên vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

1 Trong *Hình 23*, vectơ $\overrightarrow{B'D'}$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng BD hay không? Vì sao?

Do các vectơ $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{A'B'}$ khác $\vec{0}$ và có giá lần lượt là các đường thẳng CD, $A'B'$ song song với đường thẳng AB nên hai vectơ đó đều là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

2 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2\ ;\ -3\ ;\ 5)$. Xét điểm $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ nằm trên Δ (*Hình 24*).

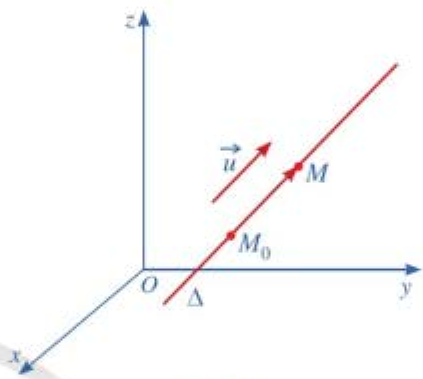
a) Nêu nhận xét về phương của hai vectơ $\vec{u}$ và $\overrightarrow{M_0M}$.

b) Có hay không số thực t sao cho $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{u}$?

d) Hãy biểu diễn x, y, z qua t.

d) Toạ độ $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ của điểm M (nằm trên Δ) có thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=3+5t \end{cases} \text{ hay không?}$$



Hình 24

Nhận xét: Ta nói đường thẳng Δ có *phương trình tham số* là:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=3+5t \end{cases} (t \text{ là tham số}).$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

• Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, nếu Δ là đường thẳng đi qua $M_0(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a\ ;\ b\ ;\ c)$ thì Δ có phương trình dạng

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} (t \text{ là tham số}).$$

• Ngược lại, mỗi hệ phương trình $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0 và t là tham số, xác định đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

Hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0, t là tham số, được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b ; c)$.

Trong các ví dụ, bài tập sau đây, nếu không chú ý gì thêm thì ta hiểu là xét trong không gian với hệ toạ độ Oxyz.

Ví dụ 2

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2 ; -1 ; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; 4 ; -5)$.

b) Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 7t \\ z = 9t \end{cases}$ (t là tham số).

Chỉ ra toạ độ một vectơ chỉ phương của Δ và một điểm thuộc đường thẳng Δ.

Giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 - 5t \end{cases} \text{ (t là tham số).}$$

b) Toạ độ của một vectơ chỉ phương của Δ là

$$\vec{u} = (2 ; -7 ; 9).$$

Ứng với $t = 0$ ta có: $\begin{cases} x = -1 + 2 \,.\, 0 = -1 \\ y = 5 - 7 \,.\, 0 = 5 \\ z = 9 \,.\, 0 = 0. \end{cases}$

Suy ra điểm $B(-1 ; 5 ; 0)$ thuộc đường thẳng Δ.

2 Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ, biết Δ đi qua điểm $C(1 ; 2 ; -4)$ và vuông góc với mặt phẳng (P):

$$3x - y + 2z - 1 = 0.$$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

3 Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 7t \\ z = 5 + 8t \end{cases} \text{ (t là tham số).}$$

Toạ độ $(x ; y ; z)$ của điểm M (nằm trên Δ) có thoả mãn hệ phương trình

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-5}{8} \text{ hay không?}$$

Nhận xét: Ta nói đường thẳng Δ có *phương trình chính tắc* là: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-5}{8}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

• Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, nếu Δ là đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a ; b ; c)$ (với $abc \neq 0$) thì Δ có phương trình dạng:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

• Ngược lại, với $abc \neq 0$, mỗi hệ phương trình $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ xác định đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a ; b ; c)$.

Nếu $abc \neq 0$ thì hệ phương trình $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a ; b ; c)$.

Ví dụ 3 Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1 ; 3 ; 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(9 ; 2 ; 13)$.

Giải

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1 ; 3 ; 6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(9 ; 2 ; 13)$ là:

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{13}.$$

3 Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ, biết phương trình tham số của Δ là:

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-5t \\ z=6+9t \end{cases}$$

(t là tham số).

4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

4 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1 ; 2 ; 3)$ và $B(3 ; 5 ; 9)$.

a) Hãy chỉ ra một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng AB.

c) Viết phương trình chính tắc của đường thẳng AB.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$, $B(x_1 ; y_1 ; z_1)$ có:

• Phương trình tham số là: $\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$ (t là tham số).

• Phương trình chính tắc là: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ (với $x_0 \neq x_1, y_0 \neq y_1, z_0 \neq z_1$).

Ví dụ 4 Lập phương trình chính tắc và phương trình tham số của đường thẳng AB biết $A(4 ; 1 ; 2)$ và $B(5 ; 8 ; 6)$.

Giải

• Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là:

$$\frac{x-4}{5-4} = \frac{y-1}{8-1} = \frac{z-2}{6-2} \Leftrightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-2}{4}.$$

• Phương trình tham số của đường thẳng AB là:

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 7t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \text{ (t là tham số).}$$

4 Viết phương trình chính tắc của đường thẳng OM biết $M(a ; b ; c)$ với $abc \neq 0$.

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trước hết, ta có định nghĩa sau: Trong không gian, hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu các giá của chúng cùng song song với một đường thẳng, ba vectơ được gọi là *đồng phẳng* nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Người ta cũng chứng minh được những điều kiện sau.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ

$$\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1 ; c_1);\ \vec{u}_2 = (a_2 ; b_2 ; c_2);\ \vec{u}_3 = (a_3 ; b_3 ; c_3).$$

• Hai vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ là cùng phương khi và chỉ khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$.

• Ba vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ là đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] . \vec{u}_3 = 0$.

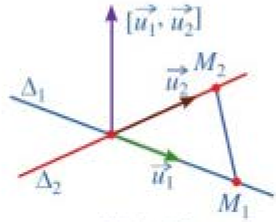
5 Cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$.

a) Giả sử Δ_1 song song với Δ_2 (*Hình 25*). Các cặp vectơ sau có cùng phương hay không: $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$; $\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$?

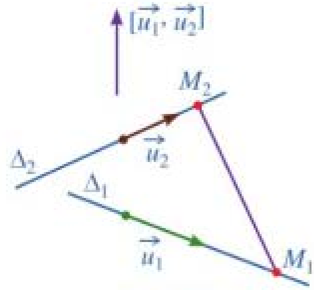
Hình 25

b) Giả sử Δ_1 và Δ_2 cắt nhau (*Hình 26*). Hai vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ có cùng phương hay không? Ba vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ có đồng phẳng hay không?

c) Giả sử Δ_1 và Δ_2 chéo nhau (*Hình 27*). Hai vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ có cùng phương hay không? Ba vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ có đồng phẳng hay không?



Hình 26



Hình 27

Ta có định lí sau:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

$$\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}. \end{cases}$$

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] . \overrightarrow{M_1M_2} = 0. \end{cases}$$

$$\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] . \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0.$$

Chú ý: Trong một số trường hợp, để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta có thể giải hệ phương trình được lập từ những phương trình xác định hai đường thẳng đó, sau đó xét cặp vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó có cùng phương hay không (nếu cần thiết).

Ví dụ 5 Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 5t_1 \\ y = 2 - t_1 \\ z = 3 + 2t_1 \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + 10t_2 \\ y = 4 - 2t_2 \\ z = 1 + 4t_2 \end{cases}$;

b) $\Delta_1: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+4}{1}$, $\Delta_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$;

c) $\Delta_1: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 8 + 2t \\ z = -1 - t. \end{cases}$

5 Bằng cách giải hệ phương trình, xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = t_1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = t_2 \\ z = 0. \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(1 ; 2 ; 3)$ và có $\vec{u}_1 = (5 ; -1 ; 2)$ là vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(2 ; 4 ; 1)$ và có $\vec{u}_2 = (10 ; -2 ; 4)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $2\vec{u}_1 = (10 ; -2 ; 4) = \vec{u}_2$, suy ra $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ cùng phương;

$\overrightarrow{M_1M_2} = (1 ; 2 ; -2)$ và $\dfrac{1}{5} \neq \dfrac{2}{-1}$ nên $\vec{u}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không cùng phương.

Vậy $\Delta_1 \,//\, \Delta_2$.

b) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(2 ; 3 ; -4)$ và có $\vec{u}_1 = (3 ; 2 ; 1)$ là vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(-2 ; 1 ; 2)$ và có $\vec{u}_2 = (2 ; 1 ; -3)$ là vectơ chỉ phương.

Ta có: $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{1}{2}$, suy ra $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương;

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-4 ; -2 ; 6),\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-7 ; 11 ; -1).$$

Do $\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] . \overrightarrow{M_1M_2} = (-7) . (-4) + 11 . (-2) + (-1) . 6 = 0$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

c) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(-3 ; 1 ; 2)$ và có $\vec{u}_1 = (1 ; -1 ; 2)$ là vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(6 ; 8 ; -1)$ và có $\vec{u}_2 = (3 ; 2 ; -1)$ là vectơ chỉ phương. Ta có:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (9 ; 7 ; -3),\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-3 ; 7 ; 5).$$

Do $\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] . \overrightarrow{M_1M_2} = (-3) . 9 + 7 . 7 + 5 . (-3) = 7 \neq 0$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng.

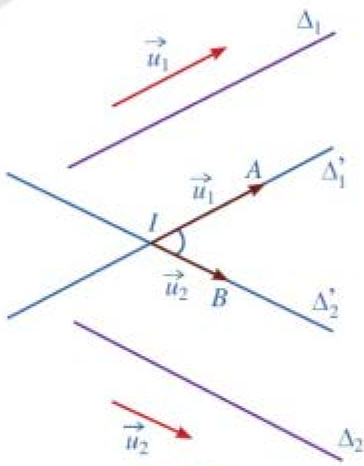
Vậy Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

III. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng

6 Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong không gian có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Giả sử Δ_1', Δ_2' là hai đường thẳng cùng đi qua điểm I và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1, Δ_2 (*Hình 28*).

a) Nêu mối liên hệ giữa hai góc (Δ_1, Δ_2) và (Δ_1', Δ_2').



Hình 28

b) Gọi A và B là các điểm lần lượt thuộc hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sao cho $\overrightarrow{IA} = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{IB} = \vec{u}_2$. So sánh:

$$\cos(\Delta_1', \Delta_2'),\ \left|\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})\right|,\ \left|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right|.$$

c) So sánh $\cos(\Delta_1, \Delta_2)$ và $\dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (a_1 ; b_1 ; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2 ; b_2 ; c_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Nhận xét: $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Ví dụ 6 Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 biết:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 2 - \sqrt{3}t_1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ và } \Delta_2 : \begin{cases} x = 4 - \sqrt{3}t_2 \\ y = 5 + t_2 \\ z = 6 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \text{ là tham số}).$$

Giải

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (1 ; -\sqrt{3} ; 0)$, $\vec{u}_2 = (-\sqrt{3} ; 1 ; 0)$. Ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left|1 \cdot (-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) \cdot 1 + 0 \cdot 0\right|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) = 30^{\circ}$.

Ví dụ 7 Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1},\ \Delta_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Chứng minh rằng $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Giải

Đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (3 ; 2 ; 1)$, $\vec{u}_2 = (-1 ; 2 ; -1)$.

Ta có: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$.

Suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

6 Cho đường thẳng

$$\Delta : \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$$

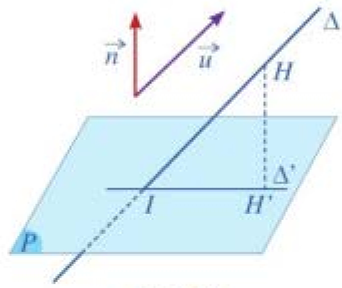
Tính côsin của góc giữa đường thẳng Δ và các trục toạ độ.

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

7 Cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$, đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại I. Gọi Δ' là hình chiếu của Δ trên mặt phẳng (P) (*Hình 29*).

a) Hãy xác định góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Ta kí hiệu góc đó là $(\Delta, (P))$.

b) So sánh $\sin(\Delta, (P))$ và $|\cos(\vec{u}, \vec{n})|$.



Hình 29

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1 ; b_1 ; c_1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a_2 ; b_2 ; c_2)$. Gọi $(\Delta, (P))$ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Khi đó,

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Ví dụ 8 Cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1 ; 2 ; 2)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2 ; 2 ; -1)$. Tính sin của góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Ta có: $\sin(\Delta, (P)) = \dfrac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{9}$. Suy ra $(\Delta, (P)) \approx 26^\circ$.

7 Cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A ; B ; C)$. Tính sin của góc giữa mặt phẳng (P) và các trục toạ độ.

Ví dụ 9 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $OBC.O'B'C'$ với $O(0 ; 0 ; 0)$, $B(2a ; 0 ; 0)$, $C(0 ; a ; 0)$, $O'(0 ; 0 ; 3a)$, $a > 0$.

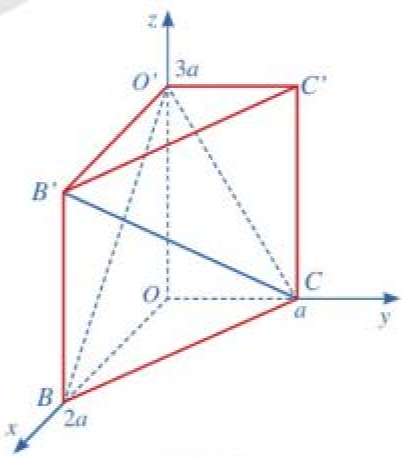
a) Xác định toạ độ của điểm B'.

b) Viết phương trình mặt phẳng $(O'BC)$.

c) Tính sin của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.

Giải. (*Hình 30*)

a) Ta có: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'} = (0 ; 0 ; 3a)$. Suy ra $x_{B'} = x_B = 2a$, $y_{B'} = y_B = 0$, $z_{B'} - 0 = 3a$, tức là $B'(2a ; 0 ; 3a)$.



Hình 30

b) Vì $B(2a ; 0 ; 0)$, $C(0 ; a ; 0)$, $O'(0 ; 0 ; 3a)$ nên mặt phẳng $(O'BC)$ có phương trình là

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{3a}=1 \Leftrightarrow 3x+6y+2z-6a=0.$$

c) Mặt phẳng $(O'BC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3 ; 6 ; 2)$.

Do $B'(2a ; 0 ; 3a)$, $C(0 ; a ; 0)$ nên $\overrightarrow{B'C}=(-2a ; a ; -3a)$, suy ra vectơ $\overrightarrow{B'C}=(-2a ; a ; -3a)$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(-2 ; 1 ; -3)$. Vì thế vectơ $\vec{u}=(-2 ; 1 ; -3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $B'C$. Suy ra sin của góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$ bằng:

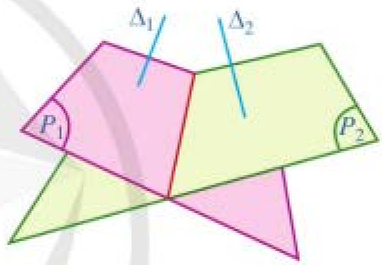
$$\frac{|3.(-2)+6.1+2.(-3)|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}.\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{6}{7\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{49}.$$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

8 Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2). Lấy hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 sao cho $\Delta_1 \perp (P_1)$, $\Delta_2 \perp (P_2)$ (*Hình 31*).

a) Nêu cách xác định góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2.

b) Góc đó có phụ thuộc vào việc chọn hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 như trên hay không?



Hình 31

Góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó, kí hiệu là $((P_1), (P_2))$.

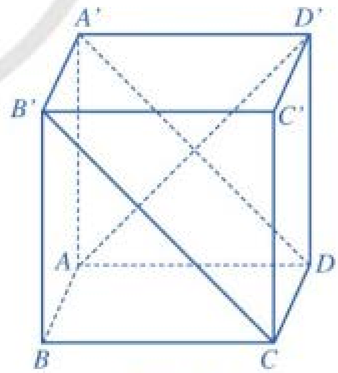
Ví dụ 10 Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDA'B')$.

Giải. (*Hình 32*)

Trong hình vuông $ADD'A'$, ta có: $AD' \perp DA'$.

Do $CD \perp (ADD'A')$ nên $AD' \perp CD$. Suy ra $AD' \perp (CDA'B')$.

Mặt khác, ta có: $AA' \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(CDA'B')$ là góc giữa hai đường thẳng AA' và AD', đó là góc $A'AD'$. Vì tam giác $A'AD'$ vuông cân tại A' nên $\widehat{A'AD'}=45^\circ$. Vậy $((ABCD),(CDA'B'))=\widehat{A'AD'}=45^\circ$.



Hình 32

8 Trong *Ví dụ 10*, tính góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(CDA'B')$.

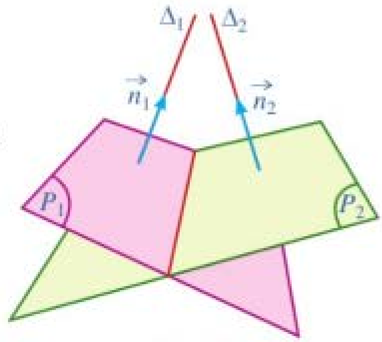
9 Cho hai mặt phẳng (P_1) và (P_2). Gọi

$$\vec{n}_1 = (A_1 ; B_1 ; C_1),\ \vec{n}_2 = (A_2 ; B_2 ; C_2).$$

lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của (P_1), (P_2); Δ_1, Δ_2 lần lượt là giá của hai vectơ $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ (*Hình 33*). So sánh:

a) $\cos((P_1), (P_2))$ và $\cos(\Delta_1, \Delta_2)$;

b) $\cos(\Delta_1, \Delta_2)$ và $|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$.



Hình 33

Ta có định lí sau:

Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1 ; B_1 ; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2 ; B_2 ; C_2)$.

Khi đó, ta có:

$$\cos\left((P_1), (P_2)\right) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Ví dụ 11 Cho hai mặt phẳng (P_1): $\sqrt{3}x + z + 5 = 0$ và (P_2): $-\sqrt{3}x + z - 7 = 0$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Giải

Do (P_1), (P_2) có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (\sqrt{3} ; 0 ; 1),\ \vec{n}_2 = (-\sqrt{3} ; 0 ; 1)$$

nên

$$\cos\left((P_1), (P_2)\right) = \frac{|\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $((P_1), (P_2)) = 60^\circ$.

9 Cho mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến

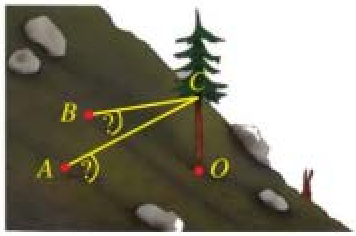
$$\vec{n} = (A ; B ; C).$$

Tính côsin của góc giữa mặt phẳng (P) và các mặt phẳng toạ độ.

IV. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG THỰC TIỄN

Tương tự như phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Ví dụ 12 Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như *Hình 34*. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ toạ độ phù hợp, các điểm O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có toạ độ tương ứng là $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A(3\ ;\ -4\ ;\ 2)$, $B(-5\ ;\ -2\ ;\ 1)$, đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $(0\ ;\ 0\ ;\ 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng.



Hình 34

a) Tính độ dài của mỗi dây neo được sử dụng.

b) Tính góc tạo bởi mỗi dây neo và mặt phẳng sườn núi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

Giải

a) Do điểm $C(0\ ;\ 0\ ;\ 5)$ nên $AC = \sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2+(2-5)^2} = \sqrt{34}$ (m);

$$BC = \sqrt{(-5-0)^2+(-2-0)^2+(1-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ (m)}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{OA} = (3\ ;\ -4\ ;\ 2)$, $\overrightarrow{OB} = (-5\ ;\ -2\ ;\ 1)$ nên

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = \left(\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix} ; \begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -5\end{vmatrix} ; \begin{vmatrix}3 & -4\\ -5 & -2\end{vmatrix}\right) = (0\ ;\ -13\ ;\ -26).$$

Vì thế, vectơ $\vec{n} = (0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB).

Mặt khác, do $\overrightarrow{CA} = (3\ ;\ -4\ ;\ -3)$, $\overrightarrow{BC} = (5\ ;\ 2\ ;\ 4)$ nên ta có:

- $\sin(CA, (OAB)) = \left|\cos(\overrightarrow{CA}, \vec{n})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{\left|3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 2\right|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{170}}$,

suy ra $(CA, (OAB)) \approx 50^{\circ}$. Vậy góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là khoảng 50°.

- $\sin(BC, (OAB)) = \left|\cos(\overrightarrow{BC}, \vec{n})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{\left|5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2\right|}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{2}{3}$,

suy ra $(BC, (OAB)) \approx 42^{\circ}$. Vậy góc tạo bởi dây neo BC và mặt phẳng sườn núi là khoảng 42°.

Ví dụ 13 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10\ ;\ 3\ ;\ 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2\ ;\ -2\ ;\ 1)$ với tốc độ là 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét) (*Hình 35*).

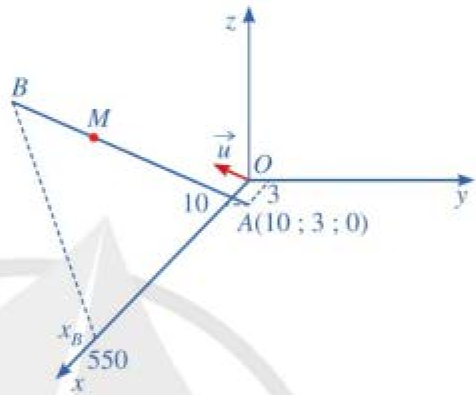
a) Viết phương trình đường cáp.

b) Giả sử sau t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$), cabin đến điểm M. Tìm toạ độ của điểm M.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Tìm độ dài quãng đường AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) góc bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?

(Nguồn: https://shutterstock.com)



Hình 35

Giải

a) Phương trình chính tắc của đường cáp là: $\dfrac{x-10}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

b) Do tốc độ chuyển động của cabin là 4,5 m/s nên độ dài AM bằng $4{,}5t$ (m). Vì vậy $|\overrightarrow{AM}| = 4{,}5t$ ($t \geq 0$).

Do hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{u}$ là cùng phương và cùng hướng nên $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ với k là số thực dương nào đó. Suy ra: $|\overrightarrow{AM}| = k|\vec{u}| = k \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3k$. Do đó $3k = 4{,}5t$. Suy ra $k = \dfrac{3t}{2}$. Vì thế, ta có: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3t}{2}\vec{u} = \left(3t\,;\, -3t\,;\, \dfrac{3t}{2}\right)$.

Gọi toạ độ của điểm M là $(x_M\,;\, y_M\,;\, z_M)$.

Do $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A\,;\, y_M - y_A\,;\, z_M - z_A) = \left(3t\,;\, -3t\,;\, \dfrac{3t}{2}\right)$

nên $\begin{cases} x_M = 3t + x_A \\ y_M = -3t + y_A \\ z_M = \dfrac{3t}{2} + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3t + 10 \\ y_M = -3t + 3 \\ z_M = \dfrac{3t}{2}. \end{cases}$

Vậy điểm M có toạ độ là $\left(3t + 10\,;\, -3t + 3\,;\, \dfrac{3t}{2}\right)$.

c) Do $x_B = 550$ nên $3t + 10 = 550$, tức là $t = 180$ (s). Do đó, ta có điểm $B(550\ ;-537\ ;270)$.

Vậy $AB = \sqrt{(550-10)^2 + (-537-3)^2 + (270-0)^2} = \sqrt{656\,100} = 810$ (m).

d) Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2\ ;-2\ ;1)$ và mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0\ ;0\ ;1)$. Do đó, ta có:

$$\sin\left(\Delta, (Oxy)\right) = \left|\cos(\vec{u}, \vec{k})\right| = \frac{\left|\vec{u}\ .\ \vec{k}\right|}{\left|\vec{u}\right|\ .\ \left|\vec{k}\right|} = \frac{1}{3\ .\ 1} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $(\Delta, (Oxy)) \approx 19^o$.

BÀI TẬP

1. Đường thẳng đi qua điểm $A(3\ ;2\ ;5)$ nhận $\vec{u} = (-2\ ;8\ ;-7)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 8+2t \\ z = -7+5t. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2-8t \\ z = 5-7t. \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2+8t \\ z = 5+7t. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2+8t \\ z = 5-7t. \end{cases}$

2. Đường thẳng đi qua điểm $B(-1\ ;3\ ;6)$ nhận $\vec{u} = (2\ ;-3\ ;8)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là:

A. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+6}{8}.$ B. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-6}{8}.$

C. $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-6}{8}.$ D. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-6}{8}.$

3. Mặt phẳng (P): $x - 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (P_1): $x + 2 = 0$. B. (P_2): $x + y - 2 = 0$.

C. (P_3): $z - 2 = 0$. D. (P_4): $x + z - 2 = 0$.

4. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+2t \\ z = -1+3t \end{cases}$ (t là tham số).

a) Chỉ ra toạ độ hai điểm thuộc đường thẳng Δ.

b) Điểm nào trong các điểm $C(6\ ;-7\ ;-16)$, $D(-3\ ;11\ ;-11)$ thuộc đường thẳng Δ?

5. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua điểm $A(-1 ; 3 ; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2 ; 3 ; 4)$;

b) Δ đi qua hai điểm $M(2 ; -1 ; 3)$ và $N(3 ; 0 ; 4)$.

6. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -11 - 6t \\ y = -6 - 3t \\ z = 10 + 3t \end{cases}$ (t là tham số);

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ (t là tham số) và $\Delta_2: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+6}{2} = \dfrac{z-15}{-3}$;

c) $\Delta_1: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{1}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{2}$.

7. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + t_1 \\ y = 4 + \sqrt{3}t_1 \\ z = 0 \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t_2 \\ y = 4 + t_2 \\ z = 5 \end{cases}$ (t_1, t_2 là tham số);

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ (t là tham số) và $\Delta_2: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$;

c) $\Delta_1: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và $\Delta_2: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-4}{1}$.

8. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ):

a) $\Delta: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3}t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ (t là tham số) và $(P): \sqrt{3}x + z - 2 = 0$;

b) $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ (t là tham số) và $(P): x + y + z - 4 = 0$.

9. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(P_1): x + y + 2z - 1 = 0$ và $(P_2): 2x - y + z - 2 = 0$.

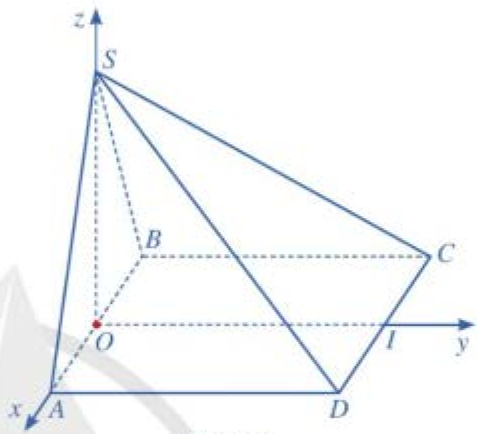
10. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có các đỉnh lần lượt là

$$S\left(0\,;0\,;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),\ A\left(\frac{a}{2}\,;0\,;0\right),\ B\left(-\frac{a}{2}\,;0\,;0\right),\ C\left(-\frac{a}{2}\,;a\,;0\right),\ D\left(\frac{a}{2}\,;a\,;0\right)$$

với $a > 0$ (*Hình 36*).

a) Xác định toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{CD}$. Từ đó tính góc giữa hai đường thẳng SA và CD (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

b) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC). Từ đó tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

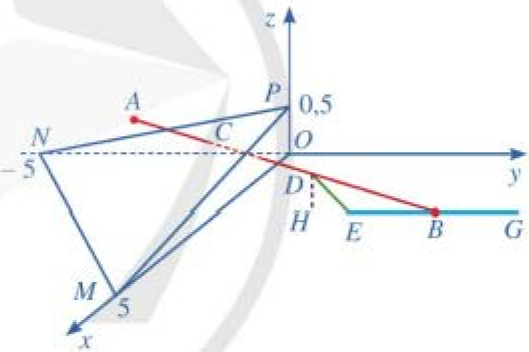


Hình 36

11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3,5\,;-2\,;0,4)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(3,5\,;5,5\,;0)$ trên đường băng EG (*Hình 37*).

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Hãy cho biết góc trượt (góc giữa đường bay AB và mặt phẳng nằm ngang (Oxy)) có nằm trong phạm vi cho phép từ $2,5^\circ$ đến $3,5^\circ$ hay không.



Hình 37

c) Có một lớp mây được mô phỏng bởi một mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5\,;0\,;0)$, $N(0\,;-5\,;0)$, $P(0\,;0\,;0,5)$. Tìm toạ độ của điểm C là vị trí mà máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh.

d) Tìm toạ độ của điểm D trên đoạn thẳng AB là vị trí mà máy bay ở độ cao 120 m.

e) Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm đầu $E(3,5\,;6,5\,;0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Hỏi sau khi ra khỏi đám mây, người phi công có đạt được quy định an toàn đó hay không? Biết rằng tầm nhìn của người phi công sau khi ra khỏi đám mây là 900 m (*Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e, Cengage, 2014*).

§3 PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

(*Nguồn:https://shutterstock.com*)

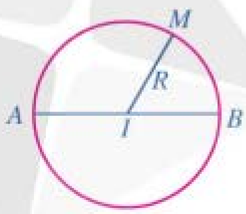
Hình 38

Hình 38 mô tả một mặt cầu trong không gian.

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, phương trình của mặt cầu được lập như thế nào?

I. ĐỊNH NGHĨA MẶT CẦU

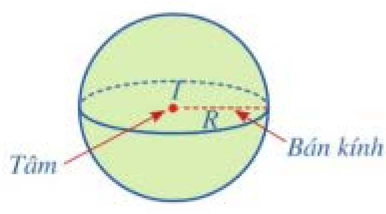
1 Nếu quay đường tròn tâm I bán kính R quanh đường kính AB một vòng (*Hình 39*) thì hình tạo thành được gọi là mặt cầu. Những điểm thuộc mặt cầu đó cách I một khoảng bằng bao nhiêu?

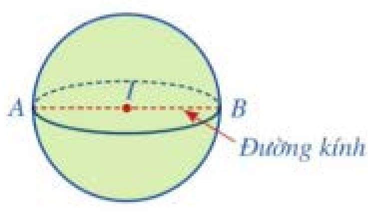


Hình 39

(*Nguồn: https://www.shutterstock.com*)

Cho trước điểm I và số dương R. Mặt cầu tâm I bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm I một khoảng bằng R.





Nhận xét

- Điểm M thuộc mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM = R$.
- Điểm M nằm trong mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM < R$.
- Điểm M nằm ngoài mặt cầu tâm I bán kính R khi và chỉ khi $IM > R$.

Ví dụ 1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(-2 ; 1 ; 5)$ bán kính 3. Các điểm $A(10 ; 1 ; 2)$, $B(0 ; 1 ; 4)$ và $C(0 ; 3 ; 4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu đó?

Giải

Do $IA = \sqrt{(10-(-2))^2+(1-1)^2+(2-5)^2} = \sqrt{153} > 3$ nên điểm $A(10 ; 1 ; 2)$ nằm ngoài mặt cầu đó.

Vì $IB = \sqrt{(0-(-2))^2+(1-1)^2+(4-5)^2} = \sqrt{5} < 3$ nên điểm $B(0 ; 1 ; 4)$ nằm trong mặt cầu đó.

Do $IC = \sqrt{(0-(-2))^2+(3-1)^2+(4-5)^2} = \sqrt{9} = 3$ nên điểm $C(0 ; 3 ; 4)$ nằm trên mặt cầu đó.

1 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1 ; 2 ; 3)$ và mặt cầu tâm I đi qua điểm $A(0 ; 4 ; 5)$. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

Trong bài học này, nếu không có chú ý gì thêm thì ta hiểu các bài toán được xét trong không gian với hệ toạ độ Oxyz.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Cho hai điểm $M(x ; y ; z)$ và $I(a ; b ; c)$.

a) Viết công thức tính khoảng cách giữa hai điểm M và I.

b) Nêu mối liên hệ giữa x, y và z để điểm M nằm trên mặt cầu tâm I bán kính R.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(a ; b ; c)$ bán kính R là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2.$$

Ví dụ 2 Viết phương trình của mặt cầu, biết:

a) Tâm $I(1 ; 2 ; 3)$ bán kính $R = 10$;

b) Tâm $I(3 ; -1 ; -5)$ và đi qua điểm $B(0 ; 2 ; 1)$.

Giải

a) Phương trình của mặt cầu tâm $I(1 ; 2 ; 3)$ bán kính $R = 10$ là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 100$.

b) Bán kính mặt cầu là:

$$R = IB = \sqrt{(0-3)^2+(2+1)^2+(1+5)^2} = \sqrt{54}.$$

Phương trình của mặt cầu tâm $I(3 ; -1 ; -5)$ bán kính $R = \sqrt{54}$ là: $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+5)^2 = 54$.

2 Tìm tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình: $x^2+(y+5)^2+(z+1)^2 = 2$.

3 Viết phương trình của mặt cầu, biết:

a) Tâm O bán kính R với O là gốc toạ độ;

b) Đường kính AB với $A(1 ; 2 ; 1)$, $B(3 ; 4 ; 7)$.

Nhận xét

• Cho mặt cầu tâm $I(a ; b ; c)$ bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ta có thể viết phương trình đó về dạng:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \text{ với } d=a^2+b^2+c^2-R^2.$$

Vậy mỗi mặt cầu đều có phương trình dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

• Ngược lại, xét phương trình có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Ta có: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+z^2-2cz+c^2=a^2+b^2+c^2-d$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d.$

Do đó, phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ xác định một mặt cầu khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2-d>0$. Ngoài ra, nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình đó xác định mặt cầu tâm $I(a ; b ; c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ví dụ 3 Mỗi phương trình sau có là phương trình mặt cầu hay không? Vì sao?

a) $2x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$;

b) $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$.

Giải

a) Phương trình $2x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z+1=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì các hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

b) Phương trình $x^2+y^2-2x+6y-8z-3=0$ không phải là phương trình của một mặt cầu vì không có biểu thức z^2.

Ví dụ 4 Phương trình nào sau đây là phương trình của một mặt cầu? Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (nếu có).

a) $x^2+y^2+z^2-4x+10y-2z+14=0$;

b) $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+20=0$.

4 Chứng minh rằng phương trình $x^2+y^2+z^2-6x-2y-4z-11=0$ là phương trình của một mặt cầu. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

Giải

a) Ta có: $x^2+y^2+z^2-4x+10y-2z+14=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\,.\,2\,.\,x+2\,.\,5\,.\,y-2\,.\,1\,.\,z+14=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=16.$

Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm $I(2 ; -5 ; 1)$ bán kính $R = \sqrt{16} = 4$.

b) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2 . 1 . x + 2 . 2 . y - 2 . 3 . z + 20 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = -6 < 0.$

Vậy phương trình đã cho không là phương trình mặt cầu.

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU TRONG THỰC TIỄN

Phương trình mặt cầu có nhiều ứng dụng trong thực tiễn như trong thiết kế xây dựng, tính toán các yếu tố kĩ thuật,... Ta sẽ tìm hiểu qua một số ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (*Hình 40*) được đặt ở vị trí $I(-3 ; 2 ; 7)$.

(*Nguồn:https://shutterstock.com*)

Hình 40

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

b) Điểm $A(-2 ; 1 ; 8)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $A(-2 ; 1 ; 8)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

c) Điểm $B(2 ; 3 ; 4)$ nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu đó? Nếu người dùng điện thoại ở điểm $B(2 ; 3 ; 4)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này hay không?

Giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 7)^2 = 9.$$

b) Ta có: $IA = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + (1-2)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{3} < 3$.

Vì $IA < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở điểm $A(-2 ; 1 ; 8)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

c) Ta có: $IB = \sqrt{[2-(-3)]^2 + (3-2)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{35} > 3$.

Vì $IB > R$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở điểm $B(2 ; 3 ; 4)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Ví dụ 6 Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (*Hình 41*) được đặt ở vị trí $I(21 ; 35 ; 50)$.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4 km.

b) Nếu người đi biển ở vị trí $C(42 ; 37 ; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng hay không?

(*Nguồn:https://shutterstock.com*)

Hình 41

c) Nếu người đi biển ở vị trí $D(5\,121 ; 658 ; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng hay không?

Giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là:

$$(x-21)^2+(y-35)^2+(z-50)^2=4\,000^2.$$

b) Ta có: $IC=\sqrt{(42-21)^2+(37-35)^2+(0-50)^2}$

$=\sqrt{2\,945}<4000.$

Vì $IC < R$ nên điểm C nằm trong mặt cầu. Vậy người đi biển ở điểm $C(42 ; 37 ; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Ta có: $ID=\sqrt{(5\,121-21)^2+(658-35)^2+(0-50)^2}$

$=\sqrt{26\,400\,629}>4\,000.$

Vì $ID > R$ nên điểm D nằm ngoài mặt cầu.Vậy người đi biển ở điểm $D(5\,121 ; 658 ; 0)$ không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

5 Trong *Ví dụ 6*, giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí $I(21 ; 35 ; 50)$ đến vị trí $D(5\,121 ; 658 ; 0)$. Tìm vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển còn có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

BÀI TẬP

1. Tâm của mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=16$ có toạ độ là:

A. $(-2 ; -3 ; 4)$. B. $(2 ; 3 ; -4)$. C. $(2 ; -3 ; -4)$. D. $(2 ; -3 ; 4)$.

2. Bán kính của mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ bằng:

A. 3 B. 9. C. 81. D. $\sqrt{3}$.

3. Mặt cầu (S) tâm $I(-5 ; -2 ; 3)$ bán kính 4 có phương trình là:

A. $(x-5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$.
B. $(x-5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=16$.
C. $(x+5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.
D. $(x+5)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

4. Cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-7)^2=100$.

a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu.

b) Mỗi điểm $A(1 ; 1 ; 1)$, $B(9 ; 4 ; 7)$, $C(9 ; 9 ; 10)$ nằm trong, nằm ngoài hay nằm trên mặt cầu đó?

5. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-2y-10z+2=0$.

Chứng minh rằng phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.

6. Lập phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(3 ; -7 ; 1)$ và bán kính $R=2$;

b) (S) có tâm $I(-1 ; 4 ; -5)$ và đi qua điểm $M(3 ; 1 ; 2)$;

c) (S) có đường kính là đoạn thẳng CD với $C(1 ; -3 ; -1)$ và $D(-3 ; 1 ; 2)$.

7. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (*Hình 42*).

Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)
Hình 42

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm toạ độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Ta xét một ví dụ cụ thể như sau:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(3 ; -1 ; 6)$, $B(1 ; 4 ; 8)$, $C(7 ; 9 ; 6)$, $D(7 ; -15 ; 18)$. Tìm toạ độ của điểm M trong không gian biết khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA=6$, $MB=7$, $MC=12$, $MD=24$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

Các bài toán dưới đây, nếu không có chú ý gì thêm thì ta hiểu xét trong không gian với hệ toạ độ Oxyz.

1. Mặt phẳng (P): $3x - 4y + 5z - 6 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}_1 = (3 ; 4 ; 5)$. B. $\vec{n}_2 = (3 ; -4 ; 5)$.

C. $\vec{n}_3 = (-3 ; 4 ; 5)$. D. $\vec{n}_4 = (3 ; 4 ; -5)$.

2. Đường thẳng d: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-1}{9}$ có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (2 ; 3 ; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (6 ; 3 ; 9)$.

C. $\vec{u}_3 = (3 ; 9 ; 6)$. D. $\vec{u}_4 = (1 ; 2 ; 3)$.

3. a) Mặt cầu (S): $(x - 11)^2 + (y - 12)^2 + (z - 13)^2 = 100$ có bán kính là:

A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

b) Toạ độ tâm của mặt cầu (S): $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = 8$ là:

A. $(-5 ; 6 ; 7)$. B. $(5 ; 6 ; -7)$. C. $(5 ; -6 ; 7)$. D. $(-5 ; 6 ; 7)$.

4. Khoảng cách từ điểm $M(a ; b ; c)$ đến mặt phẳng $x - a - b - c = 0$ là:

A. $|a + b|$. B. $|b + c|$. C. $|c + a|$. D. $\frac{|b+c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

5. Cho bốn điểm $A(0 ; 1 ; 3)$, $B(-1 ; 0 ; 5)$, $C(2 ; 0 ; 2)$ và $D(1 ; 1 ; -2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và một vectơ vuông góc với cả hai vectơ đó.

b) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của các đường thẳng AB và AC.

c) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (ABC).

d) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

e) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC).

6. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm $M(-3 ; 1 ; 4)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2 ; -4 ; 1)$;

b) (P) đi qua điểm $N(2 ; -1 ; 5)$ và có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1 ; -3; -2)$ và $\vec{u}_2 = (-3 ; 4 ; 1)$;

c) (P) đi qua điểm $I(4 ; 0 ; -7)$ và song song với mặt phẳng (Q): $2x + y - z - 3 = 0$;

d) (P) đi qua điểm $K(-4 ; 9 ; 2)$ và vuông góc với đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{5}$.

7. Viết phương trình của mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau:

a) (S) có tâm $I(4 ; -2 ; 1)$ và bán kính $R = 9$;

b) (S) có tâm $I(3 ; 2 ; 0)$ và đi qua điểm $M(2 ; 4 ; -1)$;

c) (S) có đường kính là đoạn thẳng AB với $A(1 ; 2 ; 0)$ và $B(-1 ; 0 ; 4)$.

8. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ_1: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$ và Δ_2: $\dfrac{x+13}{5} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z+17}{7}$;

b) Δ_1: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-4}{-7}$ và Δ_2: $\dfrac{x+10}{-6} = \dfrac{y+19}{-9} = \dfrac{z-45}{21}$;

c) Δ_1: $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-2}{3}$ và Δ_2: $\dfrac{x+13}{5} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z+13}{7}$.

9. Tính góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, biết Δ_1: $\begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = 2 - \sqrt{2}t_1 \\ z = 3 + t_1 \end{cases}$ và Δ_2: $\begin{cases} x = -3 + t_2 \\ y = 1 + t_2 \\ z = 5 - \sqrt{2}t_2 \end{cases}$

(t_1, t_2 là tham số) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).

10. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ), biết Δ: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ (t là tham số) và (P): $x + y + z + 3 = 0$.

11. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ), biết (P_1): $2x + 2y - z - 1 = 0$ và (P_2): $x - 2y - 2z + 3 = 0$.

12. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hình lập phương $OBCD.O'B'C'D'$ có $O(0 ; 0 ; 0)$, $B(a ; 0 ; 0)$, $D(0 ; a ; 0)$, $O'(0 ; 0 ; a)$ với $a > 0$.

a) Chứng minh rằng đường chéo $O'C$ vuông góc với mặt phẳng $(OB'D')$.

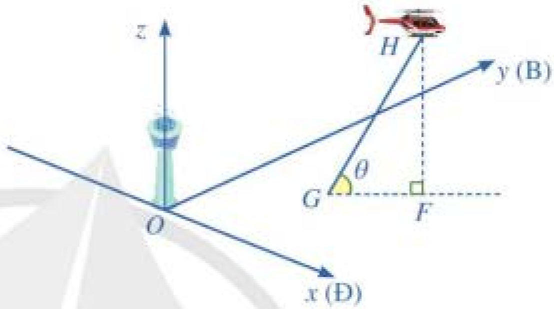
b) Chứng minh rằng giao điểm của đường chéo $O'C$ và mặt phẳng $(OB'D')$ là trọng tâm của tam giác $OB'D'$.

c) Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(C'BD)$.

d) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(CO'D)$ và $(C'BD)$.

13. *Hình 43* minh hoạ đường bay của một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc toạ độ O là chân tháp điều khiển của sân bay; trục Ox là hướng đông, trục Oy là hướng bắc và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét.

Trực thăng cất cánh từ điểm G. Vectơ $\vec{r}$ chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh ($t \geq 0$) có toạ độ là: $\vec{r} = (1 + t ; 0,5 + 2t ; 2t)$.



Hình 43

a) Tìm góc θ mà đường bay tạo với phương ngang.

b) Lập phương trình đường thẳng GF, trong đó F là hình chiếu của điểm H lên mặt phẳng (Oxy).

c) Trực thăng bay vào mây ở độ cao 2 km. Tìm toạ độ điểm mà máy bay trực thăng bắt đầu đi vào đám mây.

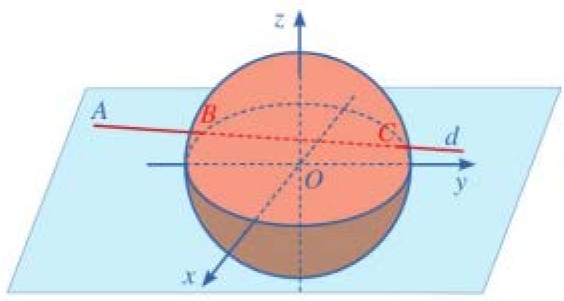
d) Giả sử một đỉnh núi nằm ở điểm $M(5 ; 4,5 ; 3)$. Tìm giá trị của t khi HM vuông góc với đường bay GH. Tìm khoảng cách từ máy bay trực thăng đến đỉnh núi tại thời điểm đó.

14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có toạ độ $O(0 ; 0 ; 0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688 ; -185 ; 8)$, chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (91 ; 75 ; 0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (*Hình 44*).

a) Xác định toạ độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.

b) Xác định toạ độ của vị trí mà máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất. Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.

c) Xác định toạ độ của vị trí mà máy bay ra khỏi màn hình ra đa.



Hình 44

CHƯƠNG VI MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: xác suất có điều kiện; công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes.

§1 XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Một lớp học có 17 học sinh nữ và 13 học sinh nam. Ở lớp học đó, có 3 học sinh tên là Thanh, trong đó có 1 học sinh nữ và 2 học sinh nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên một học sinh lên bảng. Xét hai biến cố sau:

A: "Học sinh được gọi lên bảng có tên là Thanh";

B: "Học sinh được gọi lên bảng là học sinh nữ".

Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được tính như thế nào?

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

I. ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1 Trong bài toán ở phần mở đầu, hãy tính:

a) Xác suất để học sinh được gọi lên bảng có tên là Thanh, biết rằng học sinh đó là nữ;

b) Tỉ số $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Từ đó, hãy so sánh xác suất tính được ở câu a) với tỉ số $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là *xác suất của A với điều kiện B*, kí hiệu là $P(A \mid B)$.

Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Nhận xét

• Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra: Nếu $P(B) > 0$ thì

$$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A \mid B).$$

• Người ta chứng minh được rằng: Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) = P(B) \,.\, P(A \mid B).$$

Công thức trên được gọi là *công thức nhân xác suất*.

Ví dụ 1 Cho hai biến cố A, B có $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cap B) = 0{,}2$. Tính các xác suất sau: $P(A \mid B)$; $P(B \mid A)$.

Giải

Ta có: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$; $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$.

Ví dụ 2 Trong kì kiểm tra môn Toán của một trường trung học phổ thông có 200 học sinh tham gia, trong đó có 95 học sinh nam và 105 học sinh nữ. Khi công bố kết quả của kì kiểm tra đó, có 50 học sinh đạt điểm giỏi, trong đó có 24 học sinh nam và 26 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên một học sinh trong số 200 học sinh đó. Tính xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải

Xét hai biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi";

B: "Học sinh được chọn ra là học sinh nữ".

Khi đó, xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ, chính là xác suất của A với điều kiện B.

Do có 26 học sinh nữ đạt điểm giỏi nên

$$P(A \cap B) = \frac{26}{200} = 0{,}13.$$

Do có 105 học sinh nữ nên $P(B) = \dfrac{105}{200} = 0{,}525$. Vì thế, ta có:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}13}{0{,}525} \approx 0{,}25.$$

Vậy xác suất để học sinh được chọn ra đạt điểm giỏi, biết rằng học sinh đó là nữ, là 0,25.

> **1** Một hộp có 6 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng trong hộp, lấy không hoàn lại. Tìm xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh.

Nhận xét: Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có: $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$ (*).

Ví dụ 3 Trong 10 000 áo sơ mi xuất khẩu của một doanh nghiệp dệt may có 1 000 áo sơ mi trắng. Các áo sơ mi trắng đó gồm ba cỡ: 40, 41, 42, trong đó có 200 áo cỡ 40. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc áo trong 10 000 áo sơ mi xuất khẩu. Giả sử chiếc áo sơ mi được chọn ra là áo sơ mi trắng. Tính xác suất để chiếc áo sơ mi đó có cỡ 40.

Giải

Xét hai biến cố sau:

A: "Áo được chọn ra có cỡ 40";

B: "Áo được chọn ra là áo sơ mi trắng".

Khi đó, xác suất để chiếc áo sơ mi được chọn ra có cỡ 40, biết rằng chiếc áo sơ mi đó là áo sơ mi trắng, chính là xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Áp dụng công thức (*), ta có:

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{n(A \cap B)}{n(B)}=\frac{200}{1000}=0,2.$$

Vậy xác suất để chiếc áo sơ mi được chọn ra có cỡ 40, biết rằng chiếc áo sơ mi đó là áo sơ mi trắng, là 0,2.

2 Trong hộp đựng 500 chiếc thẻ cùng loại có 200 chiếc thẻ màu vàng. Trên mỗi chiếc thẻ màu vàng có ghi một trong năm số: 1, 2, 3, 4, 5. Có 40 chiếc thẻ màu vàng ghi số 5. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp đựng thẻ. Giả sử chiếc thẻ được chọn ra có màu vàng. Tính xác suất để chiếc thẻ đó ghi số 5.

Xác suất có điều kiện có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Chẳng hạn, ta có thể làm quen với ứng dụng của xác suất có điều kiện trong Y học, Kinh tế qua những ví dụ sau.

Ví dụ 4 Một công ty dược phẩm giới thiệu một dụng cụ kiểm tra sớm bệnh sốt xuất huyết. Về kiểm định chất lượng của sản phẩm, họ cho biết như sau: Số người được thử là 9 000, trong số đó có 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết và có 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết. Khi thử bằng dụng cụ của công ty, trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 76% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính. Mặt khác, trong 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, có 7% số người đó cho kết quả dương tính, còn lại cho kết quả âm tính khi kiểm tra.

a) Chọn số thích hợp cho ? trong *Bảng 1* (đơn vị: người). So sánh số người có kết quả dương tính khi thử nghiệm với số người bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết.

Kết quả thử nghiệm / Tình trạng bệnh	Dương tính	Âm tính
Nhiễm bệnh	?	?
Không nhiễm bệnh	?	?

Bảng 1

b) Chọn ngẫu nhiên một người trong số những người thử nghiệm. Tính xác suất để người được chọn ra bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm dương tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

c) Nhà sản xuất khẳng định dụng cụ cho kết quả đúng với hơn 90% số trường hợp có kết quả dương tính. Khẳng định đó có đúng không?

Giải

a) • Trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, số người cho kết quả dương tính (khi kiểm tra) là: 76% . 1 500 = 1 140 (người).

Trong 1 500 người đã bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, số người cho kết quả âm tính (khi kiểm tra) là: 1 500 – 1 140 = 360 (người).

• Trong 7 500 người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, số người cho kết quả dương tính (khi kiểm tra) là: 7% . 7 500 = 525 (người). Do đó, số người không bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết cho kết quả âm tính (khi kiểm tra) là: 7 500 – 525 = 6 975 (người).

Từ đó, *Bảng 1* được hoàn thiện bởi *Bảng 2* (đơn vị: người).

Kết quả thử nghiệm / Tình trạng bệnh	Dương tính	Âm tính
Nhiễm bệnh	1 140	360
Không nhiễm bệnh	525	6 975

Bảng 2

Từ *Bảng 2* ta thấy số người có kết quả dương tính khi thử nghiệm là:

$$525 + 1\,140 = 1\,665 > 1\,500.$$

b) Xét các biến cố sau:

A: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm là bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết";

B: "Người được chọn ra trong số những người thử nghiệm cho kết quả dương tính (khi kiểm tra)".

Từ các dữ liệu thống kê ở *Bảng 2*, ta có:

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1\,665}{9\,000} = \frac{37}{200};$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1\,140}{9\,000} = \frac{19}{150}.$$

Vậy $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{19}{150} : \frac{37}{200} = \frac{76}{111} \approx 68{,}5\%$.

c) Do 68,5% < 90% nên khẳng định của nhà sản xuất là không đúng.

3 Với các giả thiết như ở *Ví dụ 4*, chọn ngẫu nhiên một người trong số những người thử nghiệm. Tính xác suất để người được chọn ra bị nhiễm bệnh sốt xuất huyết, biết rằng người đó có kết quả thử nghiệm âm tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Chú ý: Người ta chứng minh được tính chất sau chỉ ra mối liên hệ giữa xác suất có điều kiện và biến cố độc lập:

Cho A và B là hai biến cố với $0 < \mathrm{P}(A) < 1$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \mid \overline{B}) \text{ và } \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B \mid \overline{A}).$$

Nhận xét: Tính chất trên giải thích vì sao hai biến cố là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

II. SỬ DỤNG SƠ ĐỒ HÌNH CÂY ĐỂ TÍNH XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

2 Bác An cưa một khúc gỗ thành ba khối nhỏ. Mỗi khối nhỏ được sơn bằng một trong hai màu xanh hoặc vàng. Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị các khả năng mà bác An có thể sơn màu cho khúc gỗ đó.

Ví dụ 5 Một hộp có 8 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Có 5 viên bi trong hộp được đánh số, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để viên bi được lấy ra có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số.

Giải

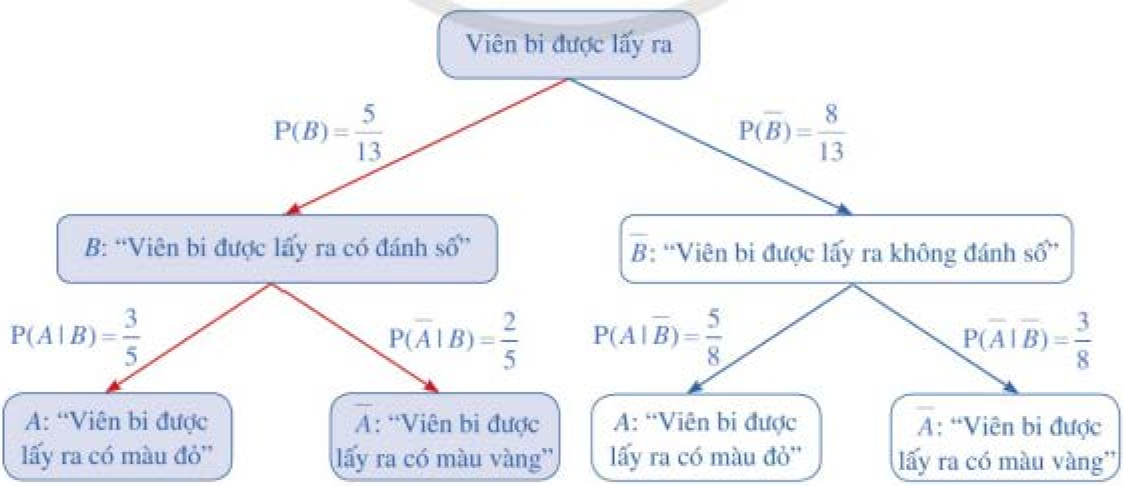
Xét hai biến cố sau:

A: "Viên bi được lấy ra có màu đỏ";

B: "Viên bi được lấy ra có đánh số".

Khi đó, xác suất để viên bi được lấy ra có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số, chính là xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Sơ đồ hình cây biểu thị cách tính xác suất có điều kiện $\mathrm{P}(A \mid B)$, được vẽ như sau:



Vậy xác suất để viên bi được lấy ra có màu đỏ, biết rằng viên bi đó có đánh số, là 0,6.

Chú ý: Áp dụng công thức (*), ta có thể tính:

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

4 Một túi có 10 hộp sữa chua dâu và 10 hộp sữa chua nha đam; các hộp sữa chua có kích thước và khối lượng như nhau. Có 12 hộp sữa chua trong túi là sữa chua không đường, trong đó có 6 hộp sữa chua dâu và 6 hộp sữa chua nha đam. Lấy ngẫu nhiên một hộp sữa chua trong túi. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để hộp sữa chua được lấy ra là hộp sữa chua dâu, biết rằng hộp sữa chua đó là sữa chua không đường.

BÀI TẬP

1. Cho hai biến cố độc lập A, B với $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}25$. Khi đó, $\mathrm{P}(A \mid B)$ bằng:

A. 0,2. B. 0,8. C. 0,25. D. 0,75.

2. Cho hai biến cố A, B có $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}4$. Tính các xác suất sau:

a) $\mathrm{P}(B \mid A)$; $\mathrm{P}(\overline{B} \mid A)$. b) $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$.

3. Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét các biến cố:

A: "Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất";

B: "Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai".

Chứng minh rằng A, B là hai biến cố độc lập.

4. Cho hai xúc xắc cân đối và đồng chất. Gieo lần lượt từng xúc xắc trong hai xúc xắc đó. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 6, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

5. Một doanh nghiệp trước khi xuất khẩu áo sơ mi phải qua hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để một chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu.

6. Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

7. Trên giá sách có 10 quyển sách Khoa học và 15 quyển sách Nghệ thuật. Có 9 quyển sách viết bằng tiếng Anh, trong đó 3 quyển sách Khoa học và 6 quyển sách Nghệ thuật, các quyển sách còn lại viết bằng tiếng Việt. Lấy ngẫu nhiên một quyển sách. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để quyển sách được lấy ra là sách viết bằng tiếng Việt, biết rằng quyển sách đó là sách Khoa học.

8. Có 2 linh kiện điện tử, xác suất để mỗi linh kiện hỏng trong một thời điểm bất kì lần lượt là: 0,01; 0,02. Hai linh kiện đó được lắp vào một mạch điện theo sơ đồ ở *Hình 1a, 1b*. Trong mỗi trường hợp, hãy tính xác suất để trong mạch điện có dòng điện chạy qua.

Hình 1

§2 CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN. CÔNG THỨC BAYES

(*Nguồn: https://shutterstock.com*)

Dây chuyền lắp ráp ô tô điện gồm các linh kiện là sản phẩm do hai nhà máy sản xuất ra. Số linh kiện nhà máy I sản xuất ra chiếm 55% tổng số linh kiện, số linh kiện nhà máy II sản xuất ra chiếm 45% tổng số linh kiện; tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của nhà máy I là 90%, của nhà máy II là 87%. Lấy ra ngẫu nhiên một linh kiện từ dây chuyền lắp ráp đó để kiểm tra.

Xác suất để linh kiện được lấy ra đạt tiêu chuẩn là bao nhiêu?

Trong mục này, ta luôn giả thiết phép thử T có không gian mẫu là tập hợp Ω gồm hữu hạn phần tử và các kết quả của phép thử là đồng khả năng, các biến cố đều liên quan đến phép thử đó.

I. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN

1 Một hộp có 24 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 24; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3" và biến cố B: "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 4".

a) Viết các tập con của không gian mẫu tương ứng với các biến cố A, B, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ (*Hình 2*).

b) So sánh:

$$n(A) \text{ và } n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}).$$

Từ đó, hãy chứng tỏ rằng:

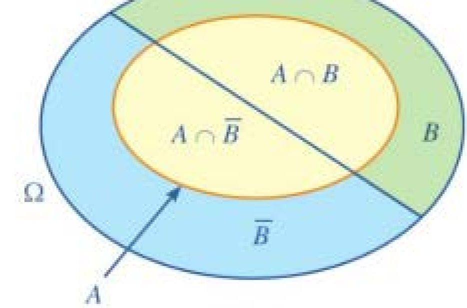
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}).$$

c) So sánh: $\mathrm{P}(A \cap B)$ và $\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B)$;

$\mathrm{P}(A \cap \overline{B})$ và $\mathrm{P}(\overline{B}) \,.\, \mathrm{P}(A \mid \overline{B})$.

Từ đó, hãy chứng tỏ rằng:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \,.\, \mathrm{P}(A \mid \overline{B}).$$



Hình 2

Ta có công thức sau (gọi là *công thức xác suất toàn phần*):

Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B}).$$

Ví dụ 1 Theo một số liệu thống kê, năm 2004 ở Canada có 65% nam giới là thừa cân và 53,4% nữ giới là thừa cân. Nam giới và nữ giới ở Canada đều chiếm 50% dân số cả nước (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005*). Hỏi rằng, trong năm 2004, xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là người thừa cân bằng bao nhiêu?

Giải

Xét hai biến cố sau:

A: "Người được chọn ra là người thừa cân";

B: "Người được chọn ra là nam giới" (biến cố $\overline{B}$: "Người được chọn ra là nữ giới").

Từ giả thiết ta có:

$$P(B) = P(\overline{B}) = 50\% = 0,5; \;\; P(A \mid B) = 65\% = 0,65; \;\; P(A \mid \overline{B}) = 53,4\% = 0,534.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A) = P(B) \,.\, P(A \mid B) + P(\overline{B}) \,.\, P(A \mid \overline{B}) = 0,5 \,.\, 0,65 + 0,5 \,.\, 0,534 = 0,592.$$

Vậy xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là người thừa cân bằng 0,592.

Nói cách khác, tỉ lệ người Canada thừa cân là 59,2%.

Ví dụ 2 Một hộp có 60 viên bi màu xanh và 40 viên bi màu đỏ; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi thống kê, người ta thấy: có 50% số viên bi màu xanh có dán nhãn và 75% số viên bi màu đỏ có dán nhãn; những viên bi còn lại không dán nhãn.

a) Chọn số thích hợp cho ? trong *Bảng 3* (đơn vị: viên bi).

Dán nhãn / **Màu bi**	**Có dán nhãn**	**Không dán nhãn**
Đỏ	?	?
Xanh	?	?

Bảng 3

b) Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Sử dụng công thức xác suất toàn phần, tính xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn.

Giải

a) Số viên bi màu đỏ có dán nhãn là: 75% . 40 = 30 (viên bi).

Số viên bi màu xanh có dán nhãn là: 50% . 60 = 30 (viên bi).

Màu bi \ Dán nhãn	Có dán nhãn	Không dán nhãn
Đỏ	30	10
Xanh	30	30

Bảng 4

Sau khi hoàn thiện *Bảng 3*, ta nhận được *Bảng 4* (đơn vị: viên bi).

b) Xét hai biến cố sau:

A: "Viên bi được chọn ra có dán nhãn";

B: "Viên bi được chọn ra có màu đỏ".

Khi đó, ta có:

$$\mathrm{P}(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}; \qquad \mathrm{P}(\overline{B})=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5};$$

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}; \qquad \mathrm{P}(A \mid \overline{B})=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\,.\,\mathrm{P}(A \mid B)+\mathrm{P}(\overline{B})\,.\,\mathrm{P}(A \mid \overline{B})=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{5}.$$

Vậy xác suất để viên bi được lấy ra có dán nhãn bằng $\frac{3}{5}$.

1 Hãy giải bài toán trong phần mở đầu bằng cách lập bảng thống kê như trong *Ví dụ 2*, biết rằng cả hai nhà máy sản xuất được 10 000 linh kiện.

Ví dụ 3 Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 12A, cô giáo treo 10 bông hoa trên cành cây, trong đó có 5 bông hoa chứa phiếu có thưởng. Bạn Bình hái bông hoa đầu tiên, sau đó bạn An hái bông hoa thứ hai.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Từ đó, tính xác suất bạn An hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.

Giải

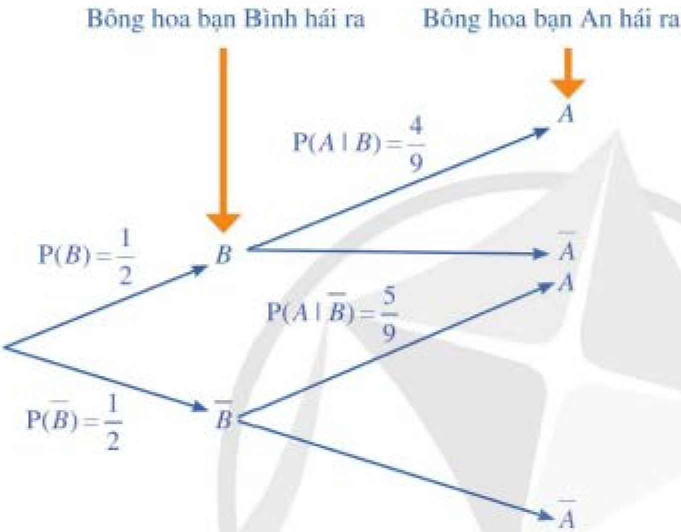
Xét hai biến cố: A: "Bông hoa bạn An hái được chứa phiếu có thưởng";

B: "Bông hoa bạn Bình hái được chứa phiếu có thưởng".

Khi đó, ta có:

$$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ \ \mathrm{P}(\overline{B})=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \ \mathrm{P}(A \mid B)=\frac{4}{9},\ \ \mathrm{P}(A \mid \overline{B})=\frac{5}{9}.$$

a) Sơ đồ hình cây biểu thị tình huống đã cho là:



> **2** Hãy giải bài toán trong phần mở đầu bằng phương pháp sử dụng sơ đồ hình cây như trong *Ví dụ 3*.

b) Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\,.\,\mathrm{P}(A \mid B)+\mathrm{P}(\overline{B})\,.\,\mathrm{P}(A \mid \overline{B})=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{2}.$$

Vậy xác suất bạn An hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng bằng $\frac{1}{2}$.

II. CÔNG THỨC BAYES

2 Xét hai biến cố A, B trong Hoạt động 1.

a) Tính: $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \mid B)$ và $\mathrm{P}(B \mid A)$.

b) So sánh: $\mathrm{P}(B \mid A)$ và $\dfrac{\mathrm{P}(B)\,.\,\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}$

Ta có công thức sau (gọi là *công thức Bayes*):

> Với hai biến cố A, B mà $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$, ta có: $\mathrm{P}(B \mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(B)\,.\,\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Nhận xét: Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(A) > 0$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$. Do

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \,.\, \mathrm{P}(A \mid \overline{B})$$

nên công thức Bayes còn có dạng: $\mathrm{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\overline{B}) \,.\, \mathrm{P}(A \mid \overline{B})}$.

Ví dụ 4 Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$; $\mathrm{P}(B) = 0{,}4$; $\mathrm{P}(A \mid B) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(B \mid A)$.

Giải

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B) \,.\, \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{0{,}4 \,.\, 0{,}3}{0{,}6} = 0{,}2.$$

3 Cho hai biến cố A, B sao cho $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$ $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$; $\mathrm{P}(B \mid A) = 0{,}3$. Tính $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Ví dụ 5 Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,1%. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính).

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Giải

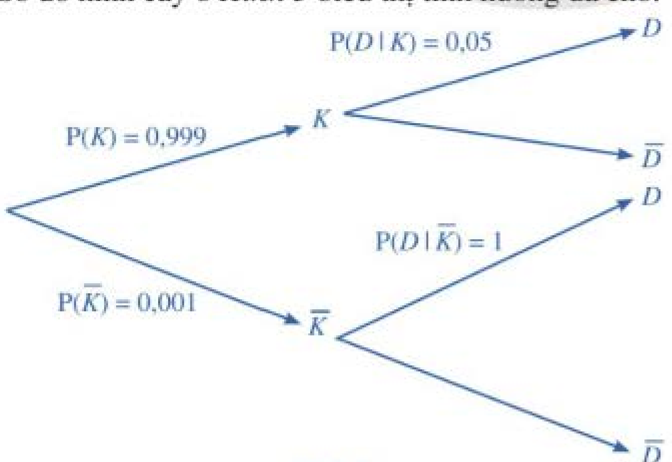
a) Xét hai biến cố: K: "Người được chọn ra không mắc bệnh";

D: "Người được chọn ra có phản ứng dương tính".

Do tỉ lệ người mắc bệnh là $0{,}1\% = 0{,}001$ nên $\mathrm{P}(K) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$.

Trong số những người không mắc bệnh có 5% số người có phản ứng dương tính nên $\mathrm{P}(D \mid K) = 5\% = 0{,}05$. Vì ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính nên $\mathrm{P}(D \mid \overline{K}) = 1$.

Sơ đồ hình cây ở *Hình 3* biểu thị tình huống đã cho.



Hình 3

4 Được biết có 5% đàn ông bị mù màu, và 0,25% phụ nữ bị mù màu (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics - Understanding why and how, Springer, 2005*). Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chọn một người bị mù màu một cách ngẫu nhiên. Hỏi xác suất để người đó là đàn ông là bao nhiêu?

b) Ta thấy: Khả năng mắc bệnh của một người xét nghiệm có phản ứng dương tính chính là $P(\overline{K} \mid D)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(\overline{K} \mid D) = \frac{P(\overline{K}) \,.\, P(D \mid \overline{K})}{P(\overline{K}) \,.\, P(D \mid \overline{K}) + P(K) \,.\, P(D \mid K)} = \frac{0{,}001}{0{,}001 + 0{,}999 \,.\, 0{,}05} \approx 1{,}96\%.$$

Vậy xác suất mắc bệnh của một người xét nghiệm có phản ứng dương tính là 1,96%.

BÀI TẬP

1. Cho hai biến cố A, B với $P(B) = 0{,}6$; $P(A \mid B) = 0{,}7$ và $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}4$. Khi đó, $P(A)$ bằng:

A. 0,7. B. 0,4. C. 0,58. D. 0,52.

2. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 viên bi màu trắng và 5 viên bi màu đen, hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II.

a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng.

b) Giả sử viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.

3. Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là: 4%; 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.

a) Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.

b) Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao nhất?

4. Một chiếc hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, trong đó có 2 chiếc thẻ màu xanh và 18 chiếc thẻ màu trắng. Bạn Châu rút thẻ hai lần một cách ngẫu nhiên, mỗi lần rút một thẻ và thẻ được rút ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Châu đều rút được thẻ màu xanh.

5. Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm A, cho kết quả như sau: khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 70%, còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm A là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1 000 000 con (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005*). Hỏi khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm A thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là bao nhiêu?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

1. Cho hai biến cố xung khắc A, B với $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,4$. Khi đó, $P(A \mid B)$ bằng:

A. 0,5. B. 0,2. C. 0,4. D. 0.

2. Một cửa hàng kinh doanh tổ chức rút thăm trúng thưởng cho hai loại sản phẩm. Tỉ lệ trúng thưởng của các loại sản phẩm I, II lần lượt là: 6%; 4%. Trong một hộp kín gồm các thăm cùng loại, người ta để lẫn lộn 200 chiếc thăm cho sản phẩm loại I và 300 chiếc thăm cho sản phẩm loại II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên 1 chiếc thăm từ chiếc hộp đó.

a) Tính xác suất để chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng.

b) Giả sử chiếc thăm được lấy ra là trúng thưởng. Xác suất chiếc thăm đó thuộc loại sản phẩm nào là cao nhất?

3. Một xạ thủ bắn vào bia số 1 và bia số 2. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, bia số 2 lần lượt là 0,8; 0,9. Xác suất để xạ thủ đó bắn trúng cả hai bia là 0,8. Xét hai biến cố sau:

A: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 1";

B: "Xạ thủ đó bắn trúng bia số 2".

a) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

b) Biết xạ thủ đó bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.

c) Biết xạ thủ đó không bắn trúng bia số 1, tính xác suất xạ thủ đó bắn trúng bia số 2.

4. Một chiếc hộp có 40 viên bi, trong đó có 12 viên bi màu đỏ và 28 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân lấy ngẫu nhiên viên bi từ chiếc hộp đó hai lần, mỗi lần lấy ra một viên bi và viên bi được lấy ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất để cả hai lần bạn Ngân đều lấy ra được viên bi màu vàng.

5. Giả sử trong một nhóm người có 2 người nhiễm bệnh, 58 người còn lại là không nhiễm bệnh. Để phát hiện ra người nhiễm bệnh, người ta tiến hành xét nghiệm tất cả mọi người của nhóm đó. Biết rằng đối với người nhiễm bệnh, xác suất xét nghiệm có kết quả dương tính là 85%, nhưng đối với người không nhiễm bệnh thì xác suất để bị xét nghiệm có phản ứng dương tính là 7%.

a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.

b) Giả sử X là một người trong nhóm bị xét nghiệm có kết quả dương tính. Tính xác suất để X là người nhiễm bệnh.

THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA
(NẾU NHÀ TRƯỜNG CÓ ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN)

I. GIỚI THIỆU VỀ PHẦN MỀM GEOGEBRA

GeoGebra có nhiều ứng dụng phù hợp với những nhu cầu sử dụng riêng biệt, phạm vi áp dụng rộng rãi trong các lĩnh vực toán học, có thể được thực hiện trên phần mềm tải về máy tính hoặc điện thoại thông minh, hay sử dụng trực tiếp trên trang web. Khi sử dụng, ta cài đặt ngôn ngữ tiếng Việt.

II. THỰC HÀNH PHẦN MỀM GEOGEBRA

1. Thực hành vẽ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và tính tích phân

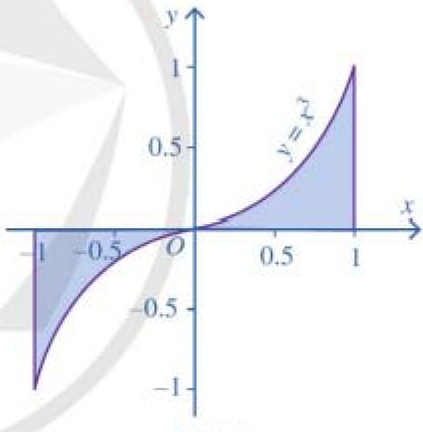
a) Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị

Ví dụ 1 Vẽ hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ và tính $\int_{-1}^{1} x^3 dx$.

Hướng dẫn

Tại ô nhập lệnh, nhập: TíchPhân(x^3,-1,1) rồi bấm enter.

Ta được kết quả như *Hình 1* và $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$.



Hình 1

b) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị

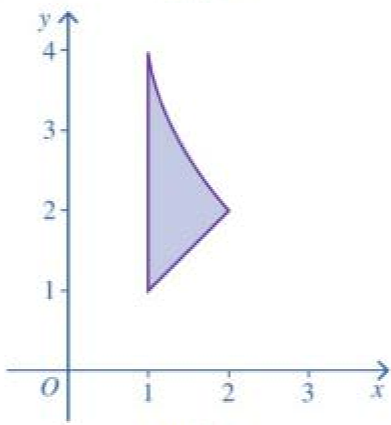
Ví dụ 2 Vẽ hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = \frac{4}{x}$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Hướng dẫn

Tại ô nhập lệnh, nhập:

TíchPhânGiữaHaiHàmSố(4/x,x,1,2) rồi bấm enter.

Ta được kết quả như *Hình 2*.



Hình 2

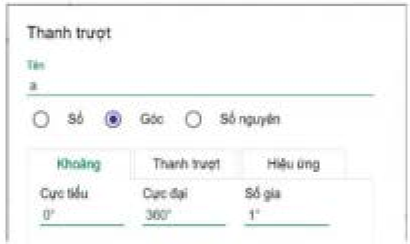
2. Thực hành vẽ mặt tròn xoay

Để vẽ mặt tròn xoay ta dùng lệnh: BeMat(Đường cong, Góc, Đường thẳng)

Ví dụ 3 Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Vẽ mặt tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox.

Hướng dẫn

Bước 1. Tạo thanh trượt góc: Nhấp vào a=2 và nhấp lên giao diện và điền các dữ liệu như *Hình 3* để tạo tham số góc. Bấm OK.



Hình 3

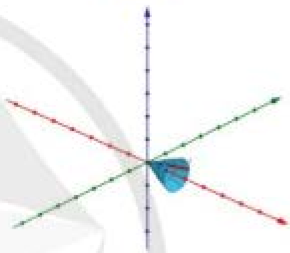
Bước 2. Nhập hàm số bằng lệnh:

Neu(0<=x<=pi/2, sin(x/2)), rồi bấm enter. Ta được hàm số có tên f.

Bước 3. Nhập lệnh BeMat(f,a,TrucHoanh), rồi bấm enter.

Bước 4. Kéo thanh trượt 

để tạo mặt tròn xoay như *Hình 4*.



Hình 4

3. Thực hành vẽ hình trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*

a) Vẽ đường thẳng

CÁCH 1. Sử dụng lệnh: "DuongThang(A, B)": Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm A, B có toạ độ cho trước.

CÁCH 2. Sử dụng lệnh: "DuongThang(A, d)": Vẽ đường thẳng đi qua điểm A có toạ độ cho trước và song song với đường thẳng d cho trước.

CÁCH 3. Sử dụng lệnh: "DuongThang(A, (a,b,c))": Vẽ đường thẳng đi qua điểm A cho trước và nhận vectơ có toạ độ (a ; b ; c) làm vectơ chỉ phương.

Ví dụ 4 Vẽ đường thẳng trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm A(1 ; 2 ; 5) và B(– 1 ; – 4 ; 2);

b) Đi qua điểm C(– 1 ; 2 ; – 2) và song song với đường thẳng AB ở câu a;

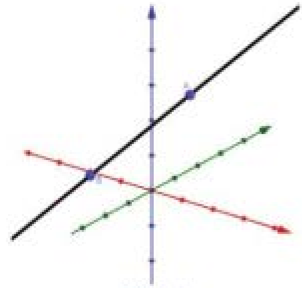
c) Đi qua điểm D(1 ; 0 ; – 2) và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; 2 ; 3)$.

Hướng dẫn

Bước 1. Vào phần mềm 3D Calculator.

Bước 2.

a) Tại ô nhập lệnh, nhập: A(1,2,5) rồi bấm enter; B(-1,-4,2) rồi bấm enter; DuongThang(A,B) rồi bấm enter. Ta được kết quả như *Hình 5*.



Hình 5

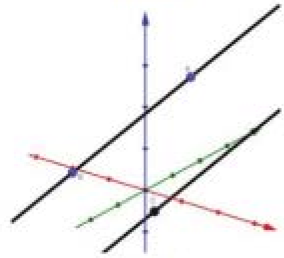
b) – Tại ô nhập lệnh, nhập: C(-1,2,-2) rồi bấm enter.

– Từ câu a, trong khung nhập lệnh xuất hiện

f : DuongThang(A, B)

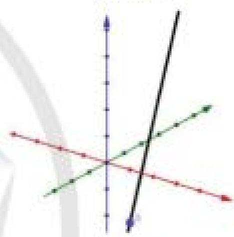
$= X = (1, 2, 5) + \lambda\,(-2, -6, -3)$

suy ra tên đường thẳng AB là f. Nhập lệnh: DuongThang(C,f) rồi bấm enter. Ta được kết quả như *Hình 6*.



Hình 6

c) Tại ô nhập lệnh, nhập: D(1,0,-2) rồi bấm enter; DuongThang(D,(1,2,3)) rồi bấm enter. Ta được kết quả như *Hình 7*.



Hình 7

b) Vẽ mặt phẳng

CÁCH 1. Nhập phương trình mặt phẳng vào ô nhập lệnh.

CÁCH 2. Sử dụng lệnh: "MatPhang(A, P)": Để vẽ mặt phẳng đi qua điểm A có toạ độ cho trước và song song với mặt phẳng P cho trước.

CÁCH 3. Sử dụng lệnh: "MatPhang(A, d)": Để vẽ mặt phẳng đi qua điểm A có toạ độ cho trước và đường thẳng d cho trước.

CÁCH 4. Sử dụng lệnh: "MatPhang(A, B, C)": Để vẽ mặt phẳng chứa đi qua ba điểm A, B, C có toạ độ cho trước.

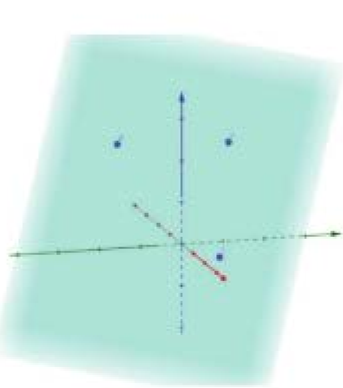
Ví dụ 5 Vẽ mặt phẳng đi qua ba điểm:

A(1 ; 2 ; 5), B(– 4 ; – 2 ; 4) và C(3 ; 1 ; 0).

Hướng dẫn

Bước 1. Vào phần mềm 3D Calculator.

Bước 2. Tại ô nhập lệnh, nhập: A(1,2,5) rồi bấm enter; B(-4,-2,4) rồi bấm enter; C(3,1,0) rồi bấm enter; MatPhang(A,B,C) rồi bấm enter. Ta được kết quả mặt phẳng màu xanh như *Hình 8*.



Hình 8

c) Vẽ mặt cầu

CÁCH 1. Nhập phương trình mặt cầu vào ô nhập lệnh.

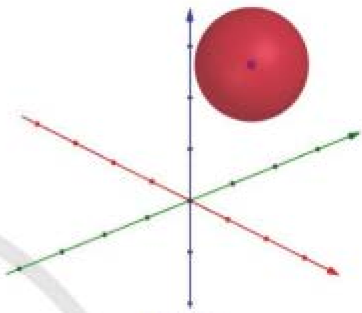
CÁCH 2. Sử dụng lênh: “MatCau(A, r)”: Vẽ mặt cầu tâm A có toạ độ cho trước và bán kính r cho trước.

CÁCH 3. Sử dụng lệnh: “MatCau(I, A)”: Vẽ mặt cầu tâm I có toạ độ cho trước và đi qua điểm A có toạ độ cho trước.

Ví dụ 6 Vẽ mặt cầu trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm A(1 ; 2 ; 5) và bán kính bằng 2;

b) Tâm B(– 1 ; 2 ; – 2) và đi qua điểm C(1 ; 1 ; 1).



Hình 9

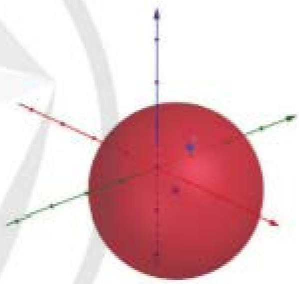
Hướng dẫn

Bước 1. Vào phần mềm 3D Calculator.

Bước 2.

a) Tại ô nhập lệnh, nhập: A(1, 2, 5) rồi bấm enter; MatCau(A,2) rồi bấm enter. Ta được kết quả như *Hình 9*.

b) Tại ô nhập lệnh, nhập: B(-1,2,-2) rồi bấm enter; C(1,1,1) rồi bấm enter; MatCau(B,C) rồi bấm enter. Ta được kết quả như *Hình 10*.



Hình 10

3. Tạo mô hình mặt tròn xoay sử dụng công nghệ thực tế ảo tăng cường

Trước hết, ta cần tải phần mềm GeoGebra 3D Calculator trên điện thoại thông minh hoặc máy tính bảng.

Ví dụ 7 **Tạo mô hình cốc nước**

Hãy mô phỏng cốc nước có dạng hình nón cụt với các kích thước sau: Chiều cao 12,5 cm, bán kính đáy cốc 3,55cm, bán kính miệng cốc 4,75 cm.

Hướng dẫn

Bước 1. Vào phần mềm GeoGebra 3D Calculator và nhập các toạ độ các điểm sau:

A(0,0,0); B(3.55,0,0); C(0,0,12.5); D(4.75,0,12.5)

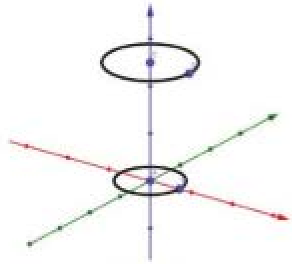
Bước 2. Nhập các lệnh vẽ đường tròn đáy cốc và miệng cốc.

Tại ô nhập lệnh, nhập:

ĐườngTròn(A,B) rồi bấm enter;

ĐườngTròn(C,D) rồi bấm enter.

Ta được kết quả như *Hình 11*.



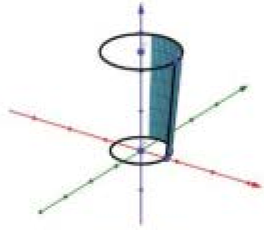
Hình 11

Bước 3. Nhập lệnh tạo đường sinh của hình nón cụt.

Tại ô nhập lệnh, nhập: ĐoạnThẳng(B,D) rồi bấm enter. Ta nhận được đoạn thẳng BD có tên là f.

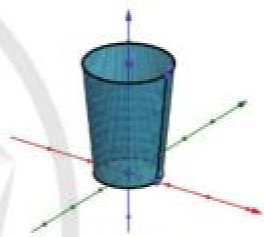
Bước 4. Tạo thanh trượt a từ để tạo tham số góc a từ 0^o đến 360^o với số gia là 1^o.

Nhập lệnh tạo bề mặt với thanh trượt a: BeMat(f,a,TrucZ) (*Hình 12*).



Hình 12

Bước 5. Kéo thanh trượt để tạo mặt xung quanh chiếc cốc (*Hình 13*).



Hình 13

Bước 6. Ẩn các đối tượng không cần thiết. Bật chế độ AR ở góc phải giao diện. Sau đó chọn vị trí đặt chiếc cốc trên màn hình thiết bị (*Hình 14*).

Hình 14

4. Thực hành tính phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 8 Tìm phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu ghép nhóm trong *Ví dụ 4* trang 7.

Hướng dẫn

• Nhấp vào Hiển thị Spreadsheet để hiển thị bảng tính. Tại ô A1, nhập tên là "Bắt đầu".

Tại ô A2 nhập “20”. Tại ô B1, nhập tên là “Độ dài”. Tại ô B2, nhập “10”. Nhập công thức cho ô A3: “=A2 + B$2”. Sao chép công thức cho các ô A4:A8.

• Tại ô C1, nhập tên là “Nhóm”. Nhập công thức cho ô C2: “"[“ + A2 + ";" + A3 + ")"” rồi bấm enter. Sao chép công thức cho các ô C3:C7.

• Tại ô D1, nhập tên là “Giá trị đại diện”. Nhập công thức cho ô D2: “=A2 + B$2 / 2” rồi bấm enter. Sao chép công thức cho các ô D3:D7.

• Tại ô E1, nhập tên là “Tần số”. Nhập các giá trị tần số của từng nhóm cho các ô E2:E7. Nhập kích thước mẫu vào ô E8 hoặc sử dụng lệnh tính tổng.

• Tại ô F1, nhập tên là “Tích”. Nhập công thức cho ô F2: “=D2 * E2” rồi bấm enter. Sao chép công thức cho các ô F3:F7. Chọn tất cả các ô F2:F7, bấm vào nút Σ rồi chọn Σ Tổng. Kết quả tính hiển thị ở ô F8 là tổng giá trị của các ô F2:F7.

• Tại ô A10, nhập tên là “Số trung bình”. Nhập công thức cho ô A11: “=F8/E8” rồi bấm enter để tính số trung bình cộng.

• Tại ô G1, nhập tên là “Tích-độ lệch”. Nhập công thức cho ô G2: “=E2*(D2-A$11)^2” rồi bấm enter. Sao chép công thức cho các ô G3:G7. Chọn tất cả các ô G2:G7, bấm vào nút Σ rồi chọn Σ Tổng. Kết quả tính hiển thị ở ô G8 là tổng giá trị của các ô G2:G7.

• Tại ô A12, nhập tên là “Phương sai”. Nhập công thức cho ô A13: “=G8/E8” rồi bấm enter để tính phương sai.

• Tại ô A14, nhập tên là “Độ lệch chuẩn”. Nhập công thức cho ô A15: “=sqrt(A13)” rồi bấm enter để tính độ lệch chuẩn (*Hình 15a, b*).

Trang trống trong Excel - GeoGebra

{1,2} Σ

	A	B	C	D	E	F	G
1	Bắt đầu	Độ dài	Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tích	Tích-độ lệch
2	20	10	[20;30)	25	25	625	9120.25
3	30		[30;40)	35	20	700	1656.2
4	40		[40;50)	45	20	900	16.2
5	50		[50;60)	55	15	825	1782.15
6	60		[60;70)	65	14	910	6115.34
7	70		[70;80)	75	6	450	5728.86
8					100	4410	24419

a)

10	Số trung bình
11	44.1
12	Phương sai
13	244.19
14	Độ lệch chuẩn
15	15.63

b)

Hình 15

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng	hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng	51
công thức Bayes	$P(B\mid A)=\dfrac{P(B).P(A\mid B)}{P(A)}$, với A, B là hai biến cố thoả mãn $P(A)>0$, $P(B)>0$	100
góc giữa hai mặt phẳng	góc giữa hai giá của hai vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng	74
mặt cầu	tập hợp các điểm trong không gian cách đều một điểm cho trước	81
nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K	hàm số $F(x)$ nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$	3
phương trình chính tắc của đường thẳng trong không gian	phương trình có dạng $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ $(abc\neq 0)$	68
phương trình mặt cầu	phương trình có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	82
phương trình tham số của đường thẳng trong không gian	phương trình có dạng $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ (a, b, c không đồng thời bằng 0 và t là tham số)	67
phương trình tổng quát của mặt phẳng	phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ (A, B, C không đồng thời bằng 0)	53
tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$	hiệu số $F(b)-F(a)$, với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$	19
vectơ pháp tuyến của mặt phẳng	vectơ có giá vuông góc với mặt phẳng	51
vi phân của nguyên hàm $F(x)$	biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$, ở đó $F'(x)=f(x)$	5
xác suất của A với điều kiện B	xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra	90

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập:

LÊ HUY ĐAN

Thiết kế sách:

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG YÊN

Trình bày bìa:

NGUYỄN MẠNH HÙNG

Sửa bản in:

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

Trong sách có sử dụng một số hình ảnh trên internet. Trân trọng cảm ơn các tác giả.

TOÁN 12 - TẬP HAI

Mã số:

ISBN: ....

In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ......

Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ...-.../... /...-.../...

Quyết định xuất bản số: .... /....-... ngày ... /... /....

In xong và nộp lưu chiểu

Mang cuộc sống vào bài học
Đưa bài học vào cuộc sống

Toán 12 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 12, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018".

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.