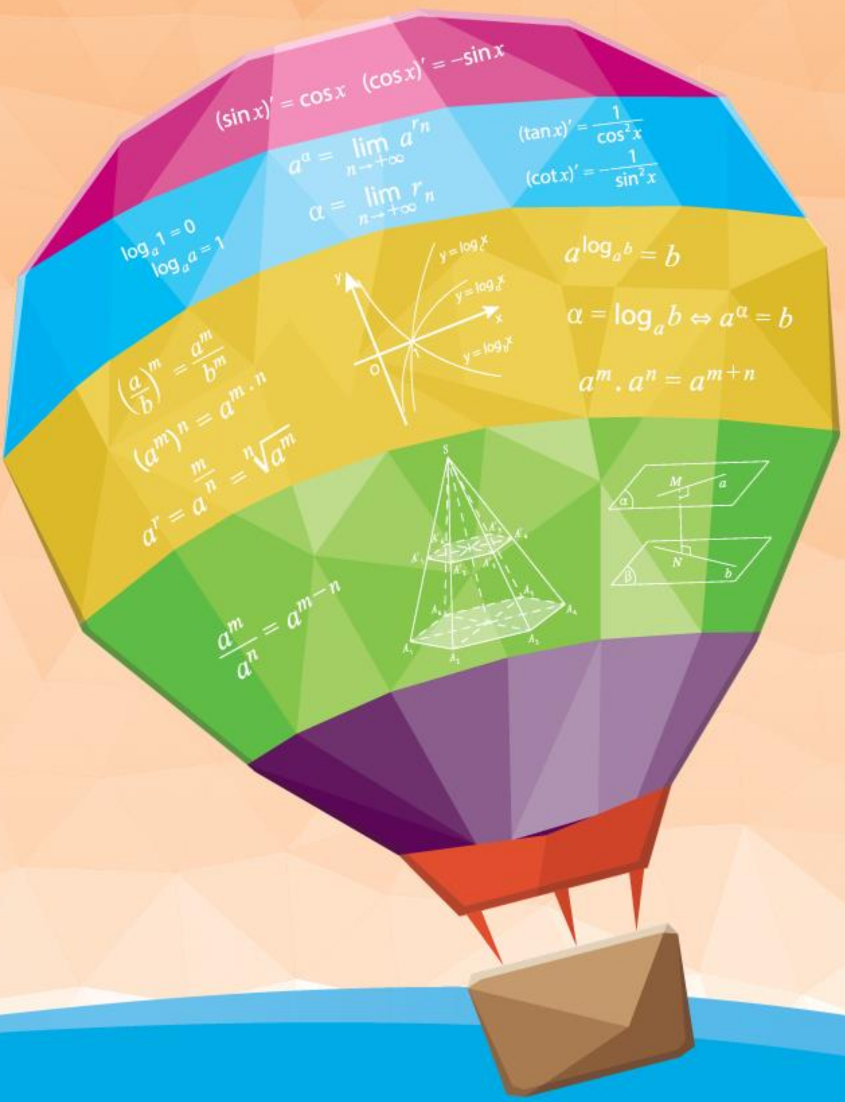
Cùng Khám Phá

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

TOÁN 11

Tập 2



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC HUẾ

DTP
Education Solutions

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA
THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 11

Họ và Tên	Chức vụ Hội đồng
Ông LÊ MẬU HẢI	Chủ tịch
Bà CAO THỊ HÀ	Phó Chủ tịch
Ông PHẠM ĐỨC TÀI	Uỷ viên, Thư kí
Ông PHẠM KHẮC BAN	Uỷ viên
Ông NGUYỄN HẮC HẢI	Uỷ viên
Ông NGUYỄN DOÃN PHÚ	Uỷ viên
Ông NGUYỄN CHIẾN THẮNG	Uỷ viên
Bà NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN	Uỷ viên
Ông ĐINH CAO THƯỢNG	Uỷ viên
Bà VŨ THỊ NHƯ TRANG	Uỷ viên
Ông PHẠM ĐÌNH TÙNG	Uỷ viên

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

TOÁN 11

Tập 2

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ

DTP Education Solutions

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy, cô giáo và phụ huynh thân mến!

Toán 11 – Cùng khám phá là một sự tiếp nối các cuốn sách giáo khoa Toán cùng bộ đã có ở các lớp dưới, được biên soạn nhằm đáp ứng yêu cầu đổi mới nội dung và phương pháp dạy – học, hướng tới mục tiêu chuẩn bị cho học sinh hoà nhập tốt với xã hội hôm nay và ngày mai. Sách được biên soạn theo tinh thần kế thừa những yếu tố tích cực của các bộ sách giáo khoa Việt Nam thời kì trước đây, đồng thời khai thác có chọn lọc kinh nghiệm quốc tế về phát triển sách giáo khoa hiện đại và vận dụng những lí thuyết dạy học đang được thừa nhận rộng rãi trên thế giới.

Thông qua các mục *Mở đầu chương*, *Khởi động*, *Hoạt động*, *Luyện tập – Vận dụng* hay *Em có biết*, sách giáo khoa ***Toán 11 – Cùng khám phá*** xây dựng mối liên kết giữa Toán học với cuộc sống cũng như các môn học khác, giúp đỡ và khuyến khích học sinh ứng dụng kiến thức thu nhận được không chỉ trong lĩnh vực Toán học mà còn cả trong việc giải quyết nhiều vấn đề ngoài Toán học. Các hoạt động xuyên suốt ***Toán 11 – Cùng khám phá*** với phương thức trình bày đa dạng vừa tạo điều kiện để học sinh trải nghiệm, khám phá, tự học, tự đánh giá, vừa thuận lợi cho giáo viên tổ chức các hoạt động dạy học, vừa giúp phụ huynh kiểm tra kiến thức của các em.

Đúng như tên gọi của nó, sách giáo khoa ***Toán 11 – Cùng khám phá*** giúp các em khám phá kiến thức và có thể vận dụng được những khái niệm tưởng chừng như trừu tượng vào việc giải quyết nhiều vấn đề của khoa học và thực tiễn.

Ban biên soạn mong rằng bộ sách sẽ khơi gợi niềm vui và hứng thú cho các em học sinh trong quá trình tìm hiểu toán học. Chúc các em khám phá được nhiều điều thú vị của thế giới và nhận ra sự hiện diện khắp nơi của toán học trong cuộc sống quanh ta.

Em hãy giữ gìn sách cẩn thận để sử dụng được lâu dài nhé!

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Các chương, bài của **Toán 11 Tập 2** được trình bày theo một cấu trúc thống nhất, gồm các mục:

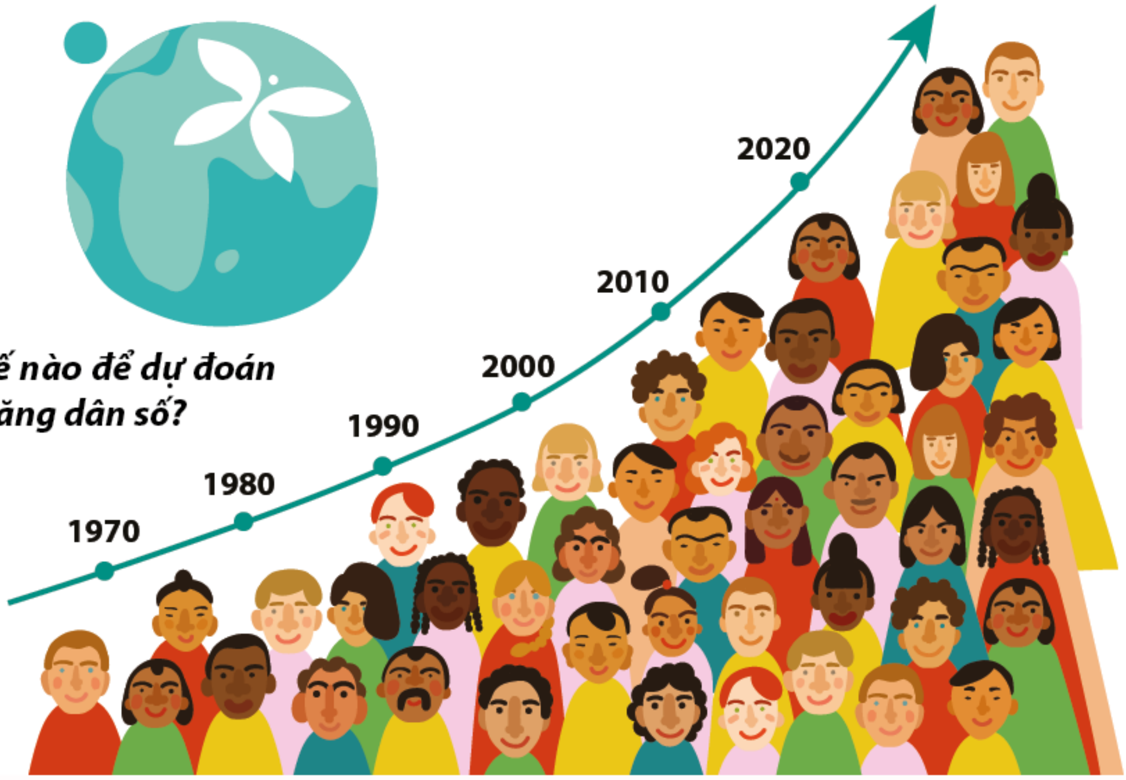
1. Mở đầu chương	Giới thiệu chương thông qua việc thiết lập sự liên hệ giữa chủ đề của chương với các tình huống thực tiễn. Mục tiêu học tập cũng được nêu trong đề mục này.
2. Các bài học: Mỗi bài học thường được thiết kế với các phần:	
HOẠT ĐỘNG	Thông qua trải nghiệm, khám phá, học sinh tham gia vào việc hình thành kiến thức mới, nhận ra ứng dụng của kiến thức đó trong những ngữ cảnh cụ thể.
KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	Được đặt trong khung màu với biểu tượng bóng đèn, trình bày những kiến thức trọng tâm của bài học.
VÍ DỤ	Cung cấp ví dụ có lời giải để minh hoạ, giúp học sinh nhận thấy các ý tưởng hay lập luận toán học được diễn đạt rõ ràng và chính xác bằng ngôn ngữ toán học như thế nào, kiến thức vừa học có thể được sử dụng ra sao.
LUYỆN TẬP **VẬN DỤNG**	Tạo cơ hội cho học sinh sử dụng kiến thức vừa học vào việc giải quyết những vấn đề cụ thể của toán học hay của thực tiễn, qua đó hình thành và phát triển các kĩ năng gắn với kiến thức đang bàn đến.
BÀI TẬP	Gồm một hệ thống bài tập từ đơn giản - áp dụng trực tiếp các khái niệm toán học vừa được nghiên cứu, đến những bài đòi hỏi việc vận dụng kiến thức Toán học ở mức độ cao hơn về lập luận, kĩ năng. Nhiều vấn đề thực tiễn được đưa vào, giúp học sinh nhận ra ý nghĩa của kiến thức vừa học.
3. Ôn tập chương	Qua hệ thống bài tập ôn tập (tự luận và trắc nghiệm), học sinh có thể kiểm tra lại hiểu biết của mình về các khái niệm và ý tưởng quan trọng được nghiên cứu trong chương, kết nối chúng với nhau trong việc giải quyết những vấn đề đa dạng.

Bên cạnh đó, trong các bài còn có thêm một số đề mục bổ trợ sau đây:

Ghi chú / Lưu ý	**NHẮC LẠI**	**THẢO LUẬN**	**?EM CÓ BIẾT**
Nhấn mạnh hoặc mở rộng kiến thức, chú thích những thông tin quan trọng liên quan đến các khái niệm cốt lõi.	Nhắc lại những khái niệm hoặc định nghĩa mà học sinh đã học trước đó, từ đó tạo mối liên hệ giữa chúng với các chủ đề đang được nghiên cứu.	Đặt một số câu hỏi liên quan đến các khái niệm mà học sinh đang học nhằm thúc đẩy sự tương tác tích cực, chủ động giữa giáo viên với học sinh và giữa học sinh với nhau.	Giới thiệu một số câu chuyện thú vị về toán học, lịch sử toán học và các nhà toán học.

MỤC LỤC

Phần GIẢI TÍCH



CHƯƠNG 6 Hàm số mũ và hàm số lôgarit

Thực tế cuộc sống đặt ra những vấn đề mà việc sử dụng các hàm số đa thức, phân thức, lượng giác không thể giải quyết thoả đáng. Chẳng hạn dự báo dân số trong tương lai; tính toán số tiền đầu tư có được từ việc gửi tiết kiệm, tính toán phương án trả góp tiền vay phù hợp; xác định độ mạnh của trận động đất hay xác định độ pH của đất trồng;... Hàm số mũ và hàm số lôgarit là các công cụ toán học được sử dụng phổ biến nhất để mô hình hoá những vấn đề như trên, nhất là về dự báo.

- Nhận biết được khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ và số mũ thực; khái niệm lôgarit cơ số *a* của một số thực dương;
- Giải thích và sử dụng được các tính chất của các phép tính luỹ thừa, phép tính lôgarit trong tính toán;
- Nhận biết được khái niệm và nhận dạng được đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit; giải thích được các tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit thông qua đồ thị của chúng;
- Giải được các phương trình, bất phương trình mũ, lôgarit ở dạng đơn giản;
- Giải quyết được một số vấn đề liên môn hoặc liên quan đến thực tiễn gắn với các kiến thức về mũ và lôgarit.

BÀI 1 LUỸ THỪA

Chúng ta đã biết có nhiều số thực được viết ở dạng luỹ thừa, chẳng hạn như $9 = 3^2$, $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ hay số 1 000 000 000 (1 tỉ) được viết gọn là 10^9. Có hay không những số thực được biểu diễn ở dạng 3^{-2}, $3^{\frac{2}{5}}$? Hay có cách nào biểu diễn ngắn gọn số 0,000000001 (1 phần 1 tỉ) không?

I Luỹ thừa với số mũ nguyên

HOẠT ĐỘNG 1

Hai bạn đã suy luận cách tính a^{-n} như thế nào? Có hay không số 0^{-2}?

Cho n là một số nguyên dương.

- Với a là số thực tuỳ ý, luỹ thừa bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,. \ldots .\, a}_{n \text{ thừa số } a}$$

- Với $a \neq 0$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Trong biểu thức a^n, ta gọi a là cơ số, số nguyên n là số mũ.

Lưu ý:

- Với $a \neq 0$ thì $a^0 = 1$.
- 0^0 và 0^{-n} với $n \in \mathbb{N}$ không có nghĩa.
- Người ta thường dùng các luỹ thừa của 10 với số mũ nguyên để biểu thị những số rất lớn và những số rất nhỏ. Chẳng hạn:
  – Khối lượng của Trái Đất là $5{,}972.10^{24}$ kg (nguồn: *https://khoahoc.tv/trai-dat-nang-bao-nhieu-kg-va-lam-cach-nao-de-can-duoc-no-95908*);
  – Khối lượng của nguyên tử hydrogen là $1{,}66.10^{-24}$ g (nguồn: *https://www.ciaaw.org/hydrogen.htm*).

Người ta chứng minh được rằng: Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Cho a, b là các số thực khác 0 và với các số nguyên m, n, ta có:

$$a^m . a^n = a^{m+n} \qquad (a . b)^m = a^m . b^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

VÍ DỤ 1

a) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} . 25^{-2} + 128^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-9}.$$

b) Rút gọn biểu thức:

$$B = \left[\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right] \cdot \frac{a^{-3}}{1-a^{-2}} \; (a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1).$$

Giải

a) $A = (3^{-1})^{-10} . (3^3)^{-3} + (5^{-1})^{-4} . (5^2)^{-2} + (2^7)^{-1} . (2^{-1})^{-9}$

$= 3^{10} . 3^{-9} + 5^4 . 5^{-4} + 2^{-7} . 2^9 = 3^1 + 5^0 + 2^2 = 8.$

b) Ta có $B = [a\sqrt{2}(1+a^2) - 2\sqrt{2}a] \cdot \dfrac{1}{a^3(1-a^{-2})}$

$= (a\sqrt{2} + a^3\sqrt{2} - 2a\sqrt{2}) \cdot \dfrac{1}{a^3 - a}$

$= a\sqrt{2}(a^2-1) \cdot \dfrac{1}{a(a^2-1)} = \sqrt{2}.$

LUYỆN TẬP 1

Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức $K = \dfrac{2 : 4^{-2} + (3^{-2})^{-3}\left(\frac{1}{9}\right)^3}{5^{-3} . 25^2 + (0,7)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$.

VẬN DỤNG 1

Nguyên tử của một nguyên tố gồm có proton, neutron và electron. Một electron có khối lượng $9,1083.10^{-31}$ kg và bằng 5.10^{-4} lần khối lượng của một proton (nguồn: *http://bachkhoatoanthu.vass.gov.vn/noidung/tudien/Lists/GiaiNghia/View_Detail.aspx?ItemID=34760*). Tính khối lượng một proton.

VẬN DỤNG 2

Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất kép r mỗi kì thì sau n kì, số tiền T người ấy thu được cả vốn lẫn lãi được cho bởi công thức $T_n = A(1+r)^n$.

Một người gửi 150 triệu đồng vào một ngân hàng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất cố định là 8,4%/năm. Nếu theo kì hạn là 1 năm thì sau 3 năm, người đó thu được cả vốn và tiền lãi là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

II Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

HOẠT ĐỘNG 2

Tìm một số thực a cho mỗi dấu "?" trong bảng sau:

	$a^2 = 7$	$a^4 = -16$	$a^3 = -8$	$a^3 = 10$	$a^5 = 32$
a	?	?	?	?	?

Ở lớp 9, ta đã biết căn bậc hai của một số thực không âm b là số a sao cho $a^2 = b$ và căn bậc ba của một số thực b là số thực a sao cho $a^3 = b$.
Một cách tổng quát, ta có khái niệm căn bậc n của một số thực b như sau:

Cho số thực b và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

Lưu ý:
- Với n lẻ và $b \in \mathbb{R}$, có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$.
- Với n chẵn và:
  $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b;
  $b = 0$: Có một căn bậc n của b là số 0;
  $b > 0$: Có hai căn bậc n trái dấu, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{b}$.

HOẠT ĐỘNG 3

a) Hãy dùng máy tính cầm tay để tìm kết quả cho mỗi dấu "?" (với 9 chữ số thập phân).

b) Từ các kết quả ở câu a), hãy dự đoán mối quan hệ giữa hai số $a^{\frac{m}{n}}$ và $\sqrt[n]{a^m}$ với $a > 0$ và m, n là số tự nhiên, $n \geq 2$.

$3^{\frac{1}{2}} \approx ?$	$\sqrt{3} \approx ?$
$5^{\frac{2}{3}} \approx ?$	$\sqrt[3]{5^2} \approx ?$
$7^{\frac{5}{4}} \approx ?$	$\sqrt[4]{7^5} \approx ?$

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Luỹ thừa của số a với số mũ r, kí hiệu a^r xác định bởi:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Lưu ý: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ với $a > 0$ và $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Người ta chứng minh được rằng:

Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của số thực dương có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên.

VÍ DỤ 2

a) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 9^{-\frac{3}{2}}$.

b) Rút gọn biểu thức $C = \dfrac{x^{\frac{6}{5}}y + xy^{\frac{6}{5}}}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Giải

a) Ta có $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$; $9^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{9^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{9^3}} = \left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Vậy $A = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{27} = \frac{10}{27}$.

b) Với x, y là những số dương, theo định nghĩa, ta có $C = \dfrac{xy\left(x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}\right)}{x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}}} = xy$.

LUYỆN TẬP 2

Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức $B = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$.

III Luỹ thừa với số mũ thực

HOẠT ĐỘNG 4

Ở lớp dưới, ta đã biết số $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ được biểu diễn dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn:

$$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$$

Gọi r_n là số hữu tỉ được tạo thành từ n chữ số đầu tiên dùng để viết $\sqrt{2}$ ở dạng thập phân, $n = 1, 2, \ldots, 10, \ldots$

a) Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tìm các số 5^{r_n} tương ứng (với 9 chữ số thập phân) cho mỗi dấu "?" trong bảng bên phải.
Người ta chứng minh được rằng khi $n \to +\infty$ thì dãy số (5^{r_n}) dần đến một giới hạn mà ta kí hiệu là $5^{\sqrt{2}}$.

b) Sử dụng máy tính cầm tay, tính $5^{\sqrt{2}}$ (với 9 chữ số thập phân).

n	r_n	5^{r_n}
1	1	?
2	1,4	?
3	1,41	?
4	1,414	?
5	1,4142	?
6	1,41421	?
7	1,414213	?
8	1,4142135	?
9	1,41421356	?
10	1,414213562	?

Cho a là một số dương, α là một số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn có một dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn là α và dãy số tương ứng a^{r_n} có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (r_n).

Cho số thực a dương và số vô tỉ α, trong đó $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ với (r_n) là một dãy số hữu tỉ. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là **luỹ thừa của số a với số mũ α**, kí hiệu a^α.

$$a^\alpha = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n\to+\infty} r_n.$$

Lưu ý:

- Từ định nghĩa, ta có $1^{\alpha} = 1 (\alpha \in \mathbb{R})$.
- Khi xét luỹ thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số khác 0.
- Khi xét luỹ thừa với số mũ không nguyên thì cơ số phải dương.

Người ta chứng minh được rằng:

> Luỹ thừa với số mũ thực của một số thực dương có các tính chất tương tự luỹ thừa với số mũ nguyên.

VÍ DỤ 3

Rút gọn biểu thức $E = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1} . a^{2-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{7}-3})^{\sqrt{7}+3}}$ $(a > 0)$.

Giải

Ta có $E = \dfrac{a^{\sqrt{5}+1+2-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)}} = \dfrac{a^3}{a^{-2}} = a^5$.

LUYỆN TẬP 3

Rút gọn biểu thức $\dfrac{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} . a^{4-\sqrt{5}}}$ $(a > 0)$.

BÀI TẬP

6.1. Hãy tính:

a) $9^{\frac{2}{5}} . 27^{\frac{2}{5}} - 144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$;

b) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}}$.

6.2. Cho số thực dương a. Hãy viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{3}} . \sqrt[6]{a}$;

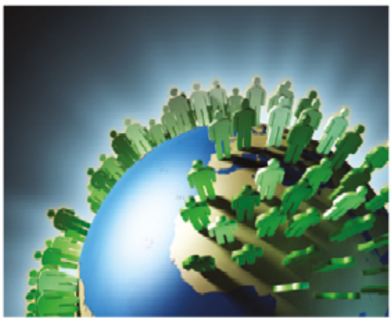
b) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$.

6.3. Cho số thực dương a. Hãy rút gọn các biểu thức sau (giả sử mỗi biểu thức đều có nghĩa):

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$;

b) $\dfrac{a^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^{-1}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^{-2}}\right)}$.

6.4. Dân số sau n năm được ước tính theo công thức $P_n = P_0 e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc tính, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm, e là một số vô tỉ xấp xỉ 2,71828 (xem thêm mục Em có biết?). Biết rằng năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người (nguồn: *https://danso.org/dan-so-the-gioi-theo-nam*). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của thế giới là 1,05%. Hỏi dân số thế giới vào năm 2035 khoảng bao nhiêu tỉ người (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?



Hình 6.1

EM CÓ BIẾT

1. Lãi suất kép

Người ta có thể gửi tiền vào ngân hàng với thể thức lãi suất kép theo định kì. Theo thể thức này, nếu đến cuối kì hạn người gửi không rút tiền lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn để tính lãi suất cho kì hạn kế tiếp. Như vậy, nếu một người gửi số tiền A với lãi suất r cho mỗi kì hạn thì sau n kì hạn, số tiền người ấy thu được cả vốn lẫn lãi là:

$$T = A(1+r)^n.$$

Hình 6.2

2. Lãi suất kép liên tục và số e

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì để tính lãi và giữ nguyên lãi suất mỗi năm là r thì lãi suất mỗi kì là $\frac{r}{m}$ và số tiền thu được sau n năm (hay sau $n.m$ kì) là $A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n.m}$ (*).

Theo thể thức lãi suất kép, một người gửi $A = 10$ triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $r = 7{,}56\%$ mỗi năm. Áp dụng công thức (*), ta có bảng dưới đây cho biết số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau $n = 2$ năm theo các định kì:

Định kì	Số tiền thu được cả vốn lẫn lãi
Định kì năm $(m = 1)$	11,5691536
Định kì quý $(m = 4)$	11,61589019
Định kì tháng $(m = 12)$	11,62677705
Định kì ngày $(m = 365)$	11,63211069

Từ kết quả trên, rõ ràng khi tăng số kì m trong một năm thì số tiền thu được sau n năm (tức $n.m$ kì) cũng tăng theo. Hỏi ta có thể tăng số kì m (theo giờ, giây,...) để số tiền thu được là vô hạn không?

Câu hỏi trên dẫn ta đến bài toán tính giới hạn của dãy số sau: $S_m = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n.m}$, với A, r, n cố định.

Ta có $S_m = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n.m} = A.\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{n.r}$ (1).

Để xét giới hạn của dãy (1), ta cần xét giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}$.

Một cách tổng quát, ta xét giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Người ta chứng minh được giới hạn ở trên tồn tại, là một số vô tỉ có giá trị xấp xỉ 2,718281828 và được kí hiệu là e. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2{,}718281828\ldots$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\lim S_m = A.e^{nr}$.

Thể thức tính lãi kép khi $m \to +\infty$ gọi là thể thức lãi suất kép liên tục.

Như vậy, với số vốn ban đầu là A, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất r mỗi năm thì sau n năm gửi số tiền thu về cả vốn lẫn lãi là

$$S = A.e^{n.r} \quad (3)$$

Công thức (3) được gọi là công thức lãi suất kép liên tục.

Nhiều hiện tượng tăng trưởng (hoặc suy giảm) của tự nhiên và xã hội, chẳng hạn sự gia tăng dân số, cũng được tính theo công thức (3). Vì vậy, công thức (3) còn được gọi là công thức tăng trưởng mũ.

BÀI 2

LÔGARIT

Biết $2^3 = 8$; $2^4 = 16$. Hỏi có tồn tại số thực x sao cho $2^x = 10$ không?

I Khái niệm lôgarit

HOẠT ĐỘNG 1

Tìm một số thích hợp cho mỗi dấu "?" trong bảng sau, biết $b = 2^\alpha$:

α	-2	-3	?	?	?
b	?	?	16	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$

Cho a là một số thực dương, $a^\alpha = b$ đưa đến hai bài toán ngược nhau:

1. Biết α, tính b;
2. Biết b, tính α.

Bài toán 1 là tính luỹ thừa với số mũ thực của một số.

Đối với bài toán 2, người ta chứng minh được rằng với hai số thực dương a, b và $a \neq 1$, luôn tồn tại duy nhất số α sao cho $a^\alpha = b$. Từ kết quả này, hình thành khái niệm lấy lôgarit của một số.

1. Định nghĩa

Cho hai số thực dương a, b và a khác 1. Số thực α thoả mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b, kí hiệu $\log_a b$, nghĩa là

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Lưu ý:

- Không tồn tại lôgarit của số âm và số 0.
- Lôgarit cơ số 10 của một số dương b là lôgarit thập phân của b, kí hiệu $\log b$ hay $\lg b$.
- Lôgarit cơ số e của một số dương b là lôgarit tự nhiên (hay lôgarit Nê-pe) của b, kí hiệu $\ln b$.

VÍ DỤ 1

Tính:

a) $\log_2 8$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} 4$;

c) $\log_3 \frac{1}{27}$.

Giải

a) $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$.

b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ vì $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$.

c) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ vì $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

Hướng dẫn sử dụng máy tính cầm tay

	Thứ tự bấm phím	Kết quả
a)	log 2 ▶ 8 =	$\log_2(8)$ — 3
b)	log 1 ▭ 2 ▶ ▶ 4 =	$\log_{\frac{1}{2}}(4)$ — -2
c)	log 3 ▶ 1 ▭ 2 7 =	$\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ — -3

2. Tính chất

HOẠT ĐỘNG 2

Từ Định nghĩa, với $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$, ta có:

$$\alpha = \log_a b \text{ (1)} \Leftrightarrow a^\alpha = b \text{ (2)}.$$

Tìm một số hoặc biểu thức thích hợp cho mỗi ô ?:

a) Từ (1), khi $b = 1$ thì $\alpha =$?;

b) Từ (1), khi $b = a$ thì $\alpha =$?;

c) Thay b từ (2) vào (1), ta được ?;

d) Thay α từ (1) vào (2), ta được ?.

Cho a là một số dương khác 1, b là một số dương và số thực α.

$$\log_a 1 = 0 \qquad a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a(a^\alpha) = \alpha$$

VÍ DỤ 2

Tính:

a) $3^{2\log_3 5}$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{8}}$.

Giải

a) $3^{2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25.$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{8}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$

LUYỆN TẬP 1

Tính $\log 1\,000$; $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 9$; $\log_2 4^{\frac{1}{7}}$ và $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$.

II Quy tắc tính lôgarit

1. Lôgarit của một tích và lôgarit của một thương

HOẠT ĐỘNG 3

Cho ba số dương a, b_1, b_2 và $a \neq 1$. Đặt $x = \log_a b_1$; $y = \log_a b_2$.

a) Tính b_1, b_2 theo a, x, y.

b) Tính $\log_a(b_1 b_2)$, $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$ theo x, y.

Cho ba số dương a, b_1, b_2 và $a \neq 1$. Khi đó:

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

$$\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

Lưu ý: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

VÍ DỤ 3

Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \log_6 3 + \log_6 12$;

b) $B = \log_7 21 - \log_7 147$.

Giải

a) $A = \log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3\,.\,12) = \log_6 36 = 2$.

b) $B = \log_7 21 - \log_7 147 = \log_7 \dfrac{21}{147} = \log_7 \dfrac{1}{7} = \log_7 (7)^{-1} = -1$.

LUYỆN TẬP 2

Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau:

a) $M = \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3}{8}$;

b) $N = \log_5 15 - \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{75}$.

2. Lôgarit của một luỹ thừa

HOẠT ĐỘNG 4

Cho hai số dương a, b và $a \neq 1$. Đặt $x = \log_a b$. Tính $\log_a (b^\alpha)$ theo x ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Cho hai số dương a, b và $a \neq 1$. Với mọi α, ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

Lưu ý: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

VÍ DỤ 4

Cho $a = \log_3 x$; $b = \log_3 y$; $c = \log_3 z$. Tính $\log_3 \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{y^2\,.\,z^4} \right)$ theo a, b, c.

Giải

$\log_3 \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{y^2\,.\,z^4} \right) = \log_3 \sqrt[3]{x} - (\log_3 y^2 + \log_3 z^4) = \dfrac{1}{3} \log_3 x - (2\log_3 y + 4\log_3 z) = \dfrac{1}{3} a - 2b - 4c$.

LUYỆN TẬP 3

Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức:

$$A = \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + 3\log_5 \sqrt[3]{50}.$$

3. Đổi cơ số

HOẠT ĐỘNG 5

Cho ba số dương a, b, c; $a \neq 1, c \neq 1$. Đặt $x = \log_c a$; $y = \log_a b$.

a) Tính a, b và $\log_c b$ theo c, x, y.

b) Suy ra hệ thức liên hệ giữa $\log_a b, \log_c a$ và $\log_c b$.

Cho ba số thực dương a, b, c với $a \neq 1$ và $c \neq 1$. Khi đó:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ hay } \log_c b = \log_c a \cdot \log_a b.$$

Lưu ý:

- Với a, b là hai số thực dương khác 1, ta có $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
- Với a là một số dương khác 1, b là số thực dương và $\alpha \neq 0$, ta có $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$.

VÍ DỤ 5

a) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

b) Cho $\alpha = \log_3 45$. Hãy tính $\log_{45} 5$ theo α.

Giải

a) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}}(2\log_3 2 \cdot \log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2}$.

b) Ta có $\alpha = \log_3 45 = \log_3(3^2 \cdot 5) = 2\log_3 3 + \log_3 5 = 2 + \log_3 5$.

Suy ra $\log_3 5 = \alpha - 2$. Vậy $\log_{45} 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 45} = \frac{\alpha - 2}{\alpha}$.

LUYỆN TẬP 4

a) Tính giá trị biểu thức $A = \log_2 3 . \log_5 4 . \log_{\sqrt{3}} 5$.

b) Cho $a = \log_2 5; b = \log_2 3$. Tính $\log_3 60$ theo a và b.

III Một số ứng dụng trong thực tế

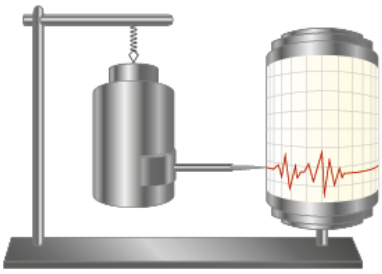
1. Độ mạnh của trận động đất

Năm 1935, nhà địa vật lí Charles Francis Richter (1900 – 1985) người Mỹ đã định nghĩa độ mạnh của một trận động đất là

$$R = \log\frac{A}{A_0} \text{ (độ Richter).}$$

Trong đó, A là biên độ tối đa (được đo bằng biên độ của máy đo địa chấn (địa chấn kế) cách tâm động đất 100 km) và A_0 là biên độ "chuẩn" ($A_0 = 1$ micron $= 10^{-3}$ mm).

(Nguồn: *https://www.britannica.com/science/Richter-scale*)



Hình 6.3. Máy đo địa chấn ngang

VÍ DỤ 6

Trận động đất ở Loma Prieta năm 1989 làm rung chuyển thành phố San Francisco (Mỹ) mạnh 7,1 độ Richter. Trận động đất ở thành phố này năm 1906 có biên độ gấp 5 lần trận động đất năm 1989. Hỏi trận động đất năm 1906 mạnh bao nhiêu độ Richter?

(Nguồn: *https://thanhnien.vn/hiem-hoa-dong-dat-tai-viet-nam-post208415.html*)

Giải

Trận động đất năm 1989 mạnh 7,1 độ Richter, giả sử có biên độ bằng A, vậy ta có $7,1 = \log\frac{A}{A_0}$.

Trận động đất năm 1906 có biên độ mạnh gấp 5 lần năm 1989, tức biên độ bằng $5.A$. Vậy nó có độ mạnh bằng $\log\frac{5.A}{A_0} = \log\frac{A}{A_0} + \log 5 \approx 7,1 + 0,7 = 7,8$ độ Richter.

LUYỆN TẬP 5

Ở Chile, vào năm 1960 có một trận động đất mạnh 9,5 độ Richter và vào năm 2010 có một trận động đất mạnh 8,8 độ Richter (nguồn: *https://tuoitre.vn/chile-hung-hon-8000-tran-dong-dat-chi-1-nam-20180105095629112.htm*). Hỏi biên độ của trận động đất ở Chile vào năm 1960 gấp bao nhiêu lần trận động đất xảy ra vào năm 2010?

2. Độ pH trong hoá học

Trong mỗi dung dịch, nồng độ ion hydrogen $[H^+]$ đặc trưng cho tính acid, nồng độ ion hydroxyl $[OH^-]$ đặc trưng cho tính base (kiềm), nồng độ tính bằng mol/l (kí hiệu M).

Ở 25°C, đối với mọi dung dịch, tích $[H^+].[OH^-]$ là một hằng số và bằng 10^{-14}.

Nước tinh khiết ở 25°C có $[H^+] = [OH^-] = 10^{-7}$. Nếu nồng độ $[H^+]$ lớn hơn 10^{-7} thì dung dịch có tính acid, nồng độ $[H^+]$ nhỏ hơn 10^{-7} thì dung dịch có tính kiềm.

Vì các nồng độ này là những số rất nhỏ nên để xác định tính acid (tính base) của một dung dịch, người ta xét chỉ số (hay độ) pH (potential of hydrogen, Soren Peter Lauritz Sorensen, 1909)

$$pH = -\log[H^+].$$

Chất	pH
Nước thoát từ các mỏ	–3,6 - 1,0
Acid ắc quy	< 1,0
Dịch vị dạ dày	2,0
Nước chanh	2,4
Thức uống có ga	2,5
Giấm	2,9
Nước cam hay táo	3,5
Cà phê	5,0
Nước chè	5,5
Mưa acid	< 5,6
Sữa	6,5
Nước tinh khiết	7,0
Nước bọt của người khoẻ mạnh	6,5 - 7,4
Máu	7,34 - 7,45
Nước biển	8,0
Xà phòng	9,0 - 10,0
Ammonia dùng trong gia đình	11,5
Chất tẩy	12,5
Thuốc giặt quần áo	13,5

Hình 6.4

Như vậy, dung dịch với độ pH bằng 7 sẽ được coi là trung hoà, độ pH < 7 là acid, độ pH > 7 là base.
(Nguồn: *https://web.archive.org/web/20031231103335/http://encarta.msn.com/encyclopedia_761552883/pH.html*)

VÍ DỤ 7

Biết bia có $[H^+] = 0,00008$ và rượu có $[H^+] = 0,0004$. Hỏi bia và rượu có tính acid, base hay trung hoà?

Giải

Bia có $[H^+] = 0,00008 = 8.10^{-5}$ nên độ pH của bia là $-\log(8.10^{-5}) = -(\log 8 - 5) \approx 4,1$.
Rượu có $[H^+] = 0,0004 = 4.10^{-4}$ nên độ pH của rượu là $-\log(4.10^{-4}) = -(\log 4 - 4) \approx 3,4$.
Vậy độ pH của bia và rượu nhỏ hơn 7 nên bia và rượu đều có tính acid.

LUYỆN TẬP 6

Lượng mưa có tính acid lớn nhất từng đo được xảy ra ở Scotland vào năm 1974; độ pH của nó là 2,4 (nguồn: *http://www.vacne.org.vn/mat-an-ninh-moi-truong-do-thien-tai/212198.html*). Tìm nồng độ ion hydrogen.

BÀI TẬP

6.5. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

a) $\log_3 \sqrt[4]{3}$; b) $4^{\log_2 3}$; c) $27^{\log_9 2}$; d) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$.

6.6. Rút gọn biểu thức:

a) $\log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$; b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$.

6.7. a) Cho $a = \log_{30} 3$; $b = \log_{30} 5$. Hãy tính $\log_{30} 1350$ theo a, b.

b) Cho $c = \log_{15} 3$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c.

6.8. Một quả nho có độ pH bằng 3,5 và muối nở (baking soda) có độ pH là 8,0. Hỏi nồng độ ion hydrogen của nho gấp khoảng bao nhiêu lần so với nồng độ ion hydrogen của muối nở?

6.9. Tính độ mạnh (R – độ Richter) của các trận động đất khi biết biên độ A sau đây (cho $A_0 = 1$):

a) $A = 39\ 811\ 000$; b) $A = 12\ 589\ 000$; c) $A = 251\ 200$.

EM CÓ BIẾT

Vài nét về lịch sử của khái niệm lôgarit

John Napier (1550 – 1617), người phát minh lôgarit

Từ thế kỉ III TCN, Archimedes đã quan sát và đưa ra khái niệm rằng "bậc" của một số tương đương với số mũ của luỹ thừa cơ số $10^8 = 100\ 000\ 000$. Ông cũng nhắc đến quy tắc nhân hai số với nhau bằng cách cộng "bậc" của chúng lại với nhau. Nguyên lí này về sau là một cơ sở dẫn đến sự ra đời khái niệm lôgarit. Khoảng 1 000 năm sau đó, Virasena, một nhà toán học người Ấn Độ, tìm ra khái niệm *ardhacheda*: Số lần một số có thể chia hết cho 2. Với luỹ thừa của 2, đó chính là giá trị nguyên của lôgarit cơ số 2. Ông cũng đã phát hiện và giới thiệu thêm hai khái niệm tương tự là *trakacheda* (cơ số 3) và *caturthacheda* (cơ số 4). Năm 1544, Michael Stifel, nhà toán học người Đức, cho xuất bản cuốn *Arithmetica Integra* có chứa một bảng số nguyên và luỹ thừa của 2 tương ứng, mà khi đảo ngược các hàng lại thì có thể được xem là dạng ban đầu của bảng lôgarit.

Khái niệm lôgarit do John Napier (1550 – 1617), nhà toán học người Scotland, công bố lần đầu tiên vào năm 1614 trong một cuốn sách có tựa đề là *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Nó có liên quan đến các điểm chuyển động thẳng: Napier đã tưởng tượng một điểm thứ nhất P chuyển động đến điểm cuối của một đoạn thẳng với vận tốc giảm dần và điểm thứ hai L chuyển động đều trên một nửa đường thẳng với độ dài vô hạn, sau đó liên hệ khoảng cách giữa P với điểm cuối của đoạn thẳng và giữa L với điểm đầu của nửa đường thẳng để nêu ra định nghĩa lôgarit. Phát hiện này được đánh giá cao và nhanh chóng lan rộng sang nhiều quốc gia khác, bao gồm Trung Quốc và một số nước ở châu Âu trong những năm sau đó. Jost Bürgi cũng tìm ra lôgarit một cách độc lập nhưng xuất bản công trình của mình sáu năm sau Napier. Từ *logarithmorum* của Napier trong tiếng Latinh có nguồn gốc từ tiếng Hy Lạp, chỉ một số biểu thị tỉ số: λόγος (*logos*) có nghĩa là "tỉ số" và ἀριθμός (*arithmos*) có nghĩa là "số".

(Nguồn: https://archive.org/details/johnnapierinvent00hobsiala/page/n3/mode/2up; https://archive.org/details/historyofmathema00boye/page/125/mode/2up)

BÀI 3

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Biết rằng năm 2020, dân số Việt Nam là 97,853 triệu người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,14% (nguồn: *https://gso.gov.vn/dan-so/*). Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi trong thời gian tới.

– Vào năm 2030, dân số Việt Nam đạt bao nhiêu triệu người?

– Vào năm bao nhiêu thì dân số Việt Nam đạt 120 triệu người?

Hai câu hỏi trên liên quan đến những hàm số nào?

I Hàm số mũ

1. Định nghĩa

HOẠT ĐỘNG 1

Cho biểu thức $y = 2^x$, trong đó x là một số thực lấy giá trị tuỳ ý.

a) Hãy tính giá trị của y tương ứng với mỗi giá trị của x được cho trong bảng sau:

x	3	0,5	$-\frac{3}{7}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$
y	?	?	?	?	?

b) Với mỗi giá trị của x, ta tính được bao nhiêu giá trị của y? y có phải là hàm số của x không? Vì sao?

c) Biểu thức $y = (-3)^x$ có xác định một hàm số khi x lấy giá trị trong tập số thực $\mathbb{R}$ không? Vì sao?

Tổng quát, ta có định nghĩa:

Cho a là một số thực dương và khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

Lưu ý:

- Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = a^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Với $a = 1$ thì $y = 1^x = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

VÍ DỤ 1

Hàm số nào sau đây là hàm số mũ? Tìm cơ số của hàm số mũ đó.

a) $y = 2^x$; b) $y = (\sqrt{2} - 1)^x$; c) $y = e^x$; d) $y = x^e$.

Giải

a) Hàm số $y = 2^x$ là hàm số mũ với cơ số bằng 2.

b) Hàm số $y = (\sqrt{2} - 1)^x$ là hàm số mũ với cơ số bằng $\sqrt{2} - 1$.

c) Hàm số $y = e^x$ là hàm số mũ với cơ số bằng e.

d) Hàm số $y = x^e$ không phải là hàm số mũ, vì cơ số không phải là hằng số.

LUYỆN TẬP 1

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số mũ, với cơ số bao nhiêu? Vì sao?

a) $y = 3^{2x}$; b) $y = (-\pi)^x$; c) $y = x^{-4}$; d) $y = 4^{-x}$.

2. Đồ thị của hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

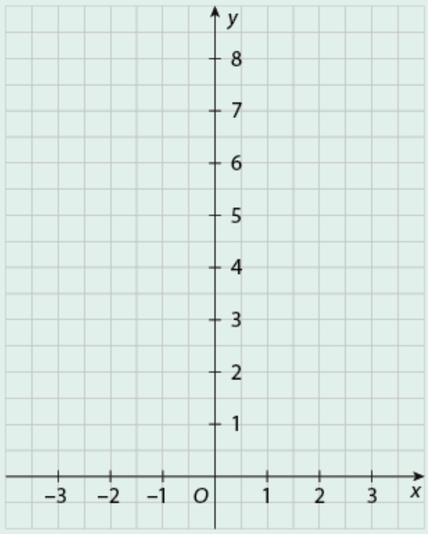
HOẠT ĐỘNG 2

Cho hàm số $y = 2^x$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ có đồ thị (C_2).

a) Hoàn thành bảng giá trị sau và biểu diễn trong mặt phẳng Oxy:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	?	?	?	?	?	?	?
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	?	?	?	?	?	?	?

b) Vẽ đường cong nối các điểm thuộc (C_1) (theo thứ tự hoành độ tăng dần) và một đường cong khác nối các điểm thuộc (C_2) (theo thứ tự hoành độ tăng dần).

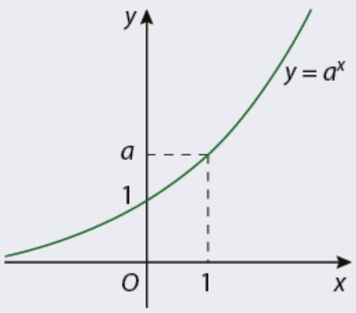
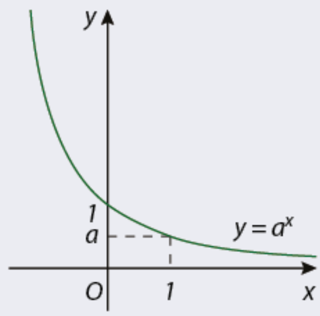


Hình 6.5

Hình ảnh thu được ở Hoạt động 2 chính là hai dạng đồ thị của hàm số mũ.

Hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$.

Đồ thị của hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có dạng như sau:

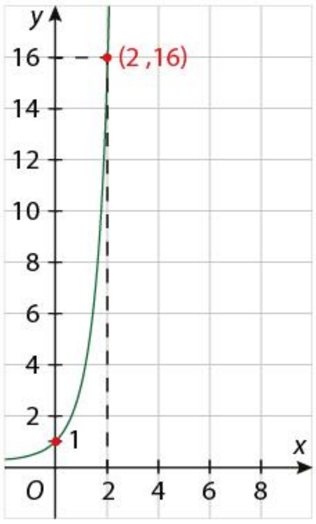
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

- Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.
- Với $a > 1$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
- Với $0 < a < 1$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.
- Đồ thị (C) của hàm số $y = a^x$ luôn nằm phía trên trục hoành; luôn đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$.

VÍ DỤ 2

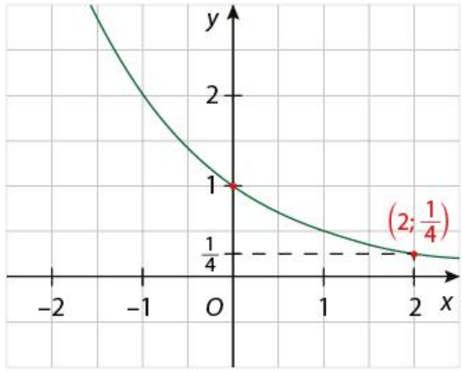
Tìm hàm số mũ $f(x) = a^x$ mà đồ thị của nó được cho bên dưới:

a)



Hình 6.6

b)



Hình 6.7

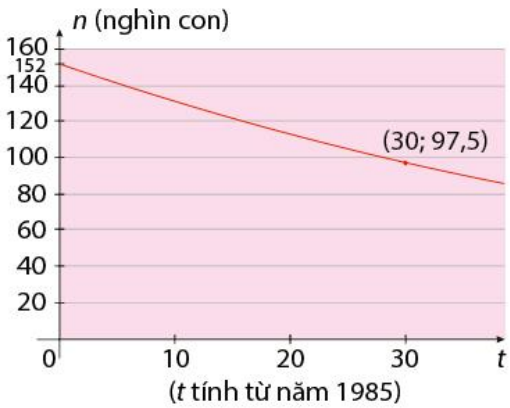
Giải

a) Vì $f(2) = a^2 = 16$ nên $a = 4$. Do đó $f(x) = 4^x$.

b) Vì $f(2) = a^2 = \frac{1}{4}$ nên $a = \frac{1}{2}$. Do đó $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

LUYỆN TẬP 2

Đồ thị *Hình 6.8* cho thấy số lượng hươu cao cổ trên thế giới suy giảm nghiêm trọng trong 30 năm qua (từ năm 1985 đến 2015) (nguồn: *https://tuoitre.vn/huou-cao-co-sap-vao-danh-sach-loai-gap-nguy-hiem-20190428162017473.htm*). Giả sử rằng số lượng hươu ở đây giảm theo hàm số $n(t) = C.a^t$.



Hình 6.8

a) Tìm số lượng hươu vào năm 1985.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng hươu sau t năm kể từ năm 1985.

c) Dự đoán số lượng hươu vào năm 2025.

II Hàm số lôgarit

1. Định nghĩa

HOẠT ĐỘNG 3

Một thí nghiệm cho thấy trong điều kiện môi trường sống lí tưởng và thức ăn dồi dào thì số lượng của một đàn chuột sẽ gấp đôi sau 55 ngày (nguồn: *https://baotintuc.vn/ho-so/ky-la-thi-nghiem-xay-dung-xa-hoi-khong-tuong-cho-chuot-20181226104302132.htm*).

Hình 6.9

Giả sử lúc đầu, đàn chuột có 100 con. Như vậy, sau thời gian t ngày, số lượng chuột là $P = 100.2^{\frac{t}{55}}$ con.

a) Mất bao lâu để đàn chuột đạt số lượng 2 000 con?

b) Tìm một hàm số t theo P để xác định thời gian t mà số lượng chuột đạt tới P (nếu có).

Những bài toán thực tế tương tự như tình huống ở Hoạt động 3 đưa đến việc xét các hàm số có dạng $y = \log_a x$.

Cho số thực dương a khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

Lưu ý:

- Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có tập xác định là $D = (0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Hàm số $y = \log_a(u(x))$ $(a > 0, a \neq 1)$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) > 0$.

VÍ DỤ 3

Xác định cơ số của các hàm số lôgarit sau:

a) $y = \log_3 x$;

b) $y = \ln x$;

c) $y = \log x$.

Giải

a) Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số bằng 3.

b) Hàm số $y = \ln x$ có cơ số bằng e.

c) Hàm số $y = \log x$ có cơ số bằng 10.

LUYỆN TẬP 3

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log(2x - 3)$;

b) $y = 2 + \log_{0,5}(x^2 - 1)$;

c) $y = \ln\dfrac{3x + 2}{1 - x}$.

2. Đồ thị của hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

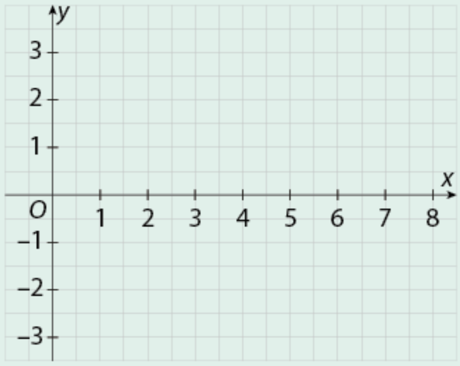
HOẠT ĐỘNG 4

Cho hàm số $y = \log_2 x$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = \log_{0,5} x$ có đồ thị (C_2).

a) Hoàn thành bảng giá trị sau và biểu diễn trên hệ trục Oxy:

x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3
$y = \log_2 x$	?	?	?	?	?	?	?
$y = \log_{0,5} x$	?	?	?	?	?	?	?

b) Vẽ đường cong nối các điểm thuộc (C_1) (theo thứ tự hoành độ tăng dần) và một đường cong khác nối các điểm thuộc (C_2) (theo thứ tự hoành độ tăng dần).

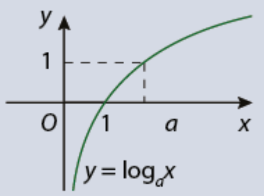
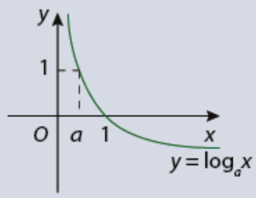


Hình 6.10

Hình ảnh thu được ở Hoạt động 4 chính là hai dạng đồ thị của hàm số lôgarit.

Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có dạng như sau:

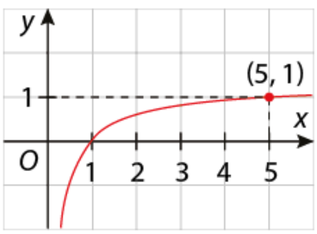
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

- Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$.
- Với $a > 1$ thì $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty$.
- Với $0 < a < 1$ thì $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = -\infty$.
- Đồ thị (C) của hàm số $y = \log_a x$ luôn nằm bên phải trục tung, luôn đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$.

VÍ DỤ 4

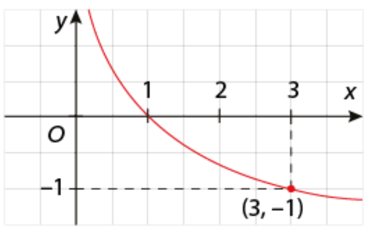
Tìm hàm số lôgarit $f(x) = \log_a x$ mà đồ thị của nó được cho bên dưới:

a)



Hình 6.11

b)



Hình 6.12

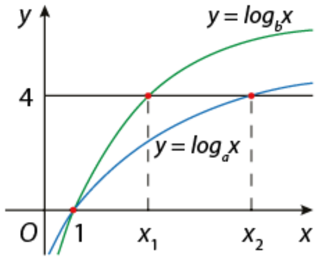
Giải

a) Vì $f(5) = 1$ nên $\log_a 5 = 1 \Leftrightarrow a = 5$. Do đó $y = \log_5 x$.

b) Vì $f(3) = -1$ nên $\log_a 3 = -1 \Leftrightarrow 3 = a^{-1} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$. Do đó $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

LUYỆN TẬP 4

Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như *Hình 6.13*. Đường thẳng $y = 4$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ x_1, x_2. Biết rằng $x_2 = 2x_1$. Tính giá trị của $\frac{a}{b}$.

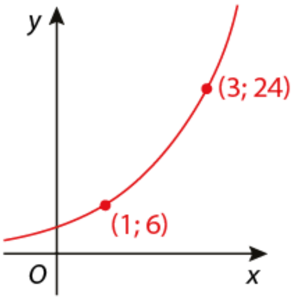


Hình 6.13

BÀI TẬP

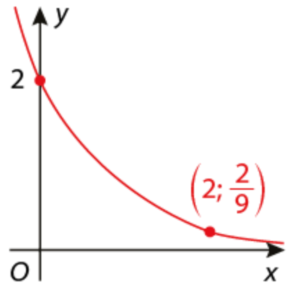
6.10. Tìm hàm số $y = C.a^x$ mà đồ thị của nó được biểu diễn dưới đây:

a)



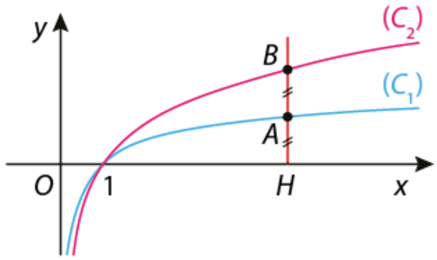
Hình 6.14

b)



Hình 6.15

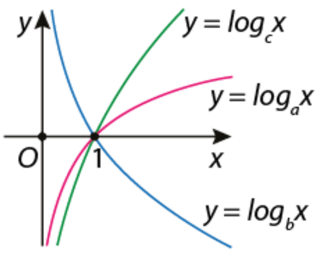
6.11. Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$; $y = \log_b x$ lần lượt là (C_1) và (C_2) (*Hình 6.16*). Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b, biết mọi đường thẳng song song với trục tung, cắt trục hoành, (C_1), (C_2) lần lượt tại H, A, B thì A là trung điểm của BH.



Hình 6.16

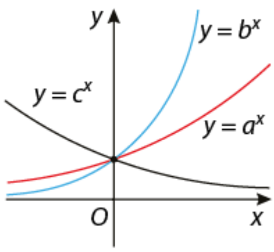
6.12. Cho a, b, c là các số thực dương và khác 1. So sánh a, b, c và 1 trong mỗi trường hợp sau:

a)



Hình 6.17

b)



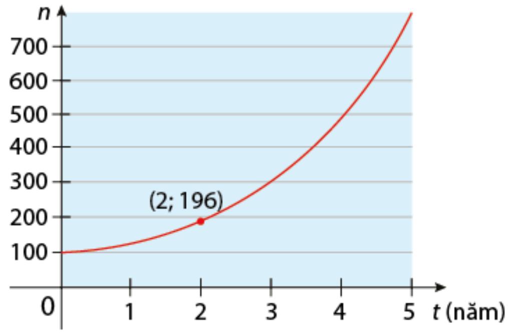
Hình 6.18

6.13. Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như *Hình 6.19*. Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t) = C.a^t$.

a) Tính số lượng ếch lúc ban đầu.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.

c) Dự đoán số lượng ếch sau 15 năm.



Hình 6.19

TÌM TÒI MỞ RỘNG: HÀM SỐ LUỸ THỪA

(BÀI ĐỌC THÊM)

Ta đã biết các hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Đó là những trường hợp riêng của hàm số luỹ thừa.

1. Khái niệm hàm số luỹ thừa

Hàm số luỹ thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha$, trong đó α là một hằng số tuỳ ý.

Từ các định nghĩa về luỹ thừa, ta thấy tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ tuỳ thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:

- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

Người ta chứng minh được rằng hàm số luỹ thừa liên tục trên các khoảng xác định của nó.

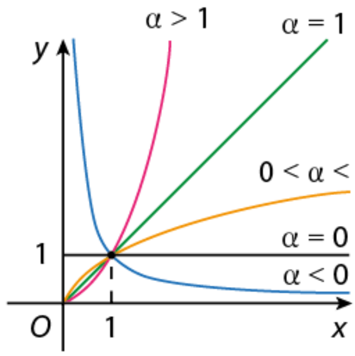
Lưu ý: Đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$. Do đó hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Chẳng hạn, hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc ba, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; còn hàm số luỹ thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định với mọi $x > 0$.

2. Đồ thị của hàm số luỹ thừa

Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta xét hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

Đồ thị của hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $A(1; 1)$.

Trên *Hình 6.20* là đồ thị của hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0; +\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của α.



Hình 6.20

BÀI 4 PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Ta đã biết trong bài toán lãi suất kép, ông A gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi suất kép với lãi suất 8% một năm. Ta có, với kì hạn 1 năm, sau n năm, ông A nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là $T = 100(1,08)^n$. Có hai câu hỏi đặt ra:

1. Ông A phải gửi bao nhiêu năm để thu về cả vốn lẫn lãi được 200 triệu đồng?
2. Ông A phải gửi ít nhất bao nhiêu năm để thu về cả vốn lẫn lãi được hơn 150 triệu đồng?

Câu hỏi 1 dẫn ta đến việc giải phương trình $200 = 100(1,08)^n$;

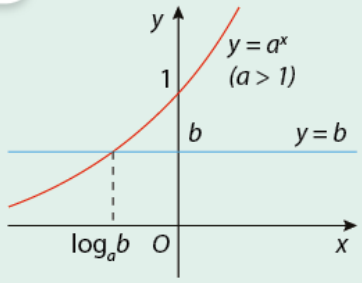
Câu hỏi 2 dẫn ta đến việc giải bất phương trình $150 < 100(1,08)^n$.

Những bài toán thực tế như trên đưa đến việc giải các phương trình (bất phương trình) có chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa. Ta gọi đó là các phương trình (bất phương trình) mũ.

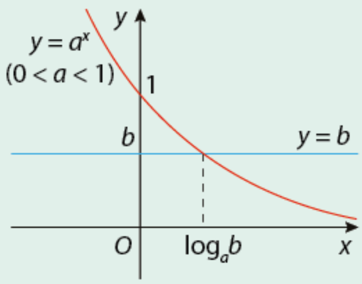
I Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

HOẠT ĐỘNG 1



Hình 6.21



Hình 6.22

Quan sát các đồ thị ở trên và hãy biện luận theo b số giao điểm của đồ thị hàm số $y = a^x$ và đường thẳng $y = b$.

Ta biết hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = b$ là nghiệm của phương trình $a^x = b$. Số nghiệm là số giao điểm của hai đồ thị.

Từ Hoạt động 1, ta có kết quả sau:

Cho phương trình $a^x = b (a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Lưu ý: Với $a > 0$ và $a \neq 1$ và $b = a^\alpha$ thì phương trình $a^x = b$ trở thành $a^x = a^\alpha$. Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = \alpha$. Một cách tổng quát, với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có:

$$a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x).$$

VÍ DỤ 1

Giải các phương trình:

a) $3^{x+1} = \frac{1}{9}$;

b) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 5$.

Giải

a) Cách 1: Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế, ta được:

$3^{x+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x + 1 = \log_3\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -3.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$.

Cách 2: Biến đổi hai vế phương trình về cùng cơ số 3, ta được:

$3^{x+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{-2} \Leftrightarrow x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -3.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$.

b) Biến đổi vế trái về cơ số 4, ta được:

$2^{2x-1} + 4^{x+1} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4^x + 4 \,.\, 4^x = 5 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 4^x = 5 \Leftrightarrow 4^x = \frac{10}{9} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{10}{9}.$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \log_4 \frac{10}{9}$.

LUYỆN TẬP 1

Giải các phương trình:

a) $2.3^{x+1} - 6.3^{x-1} - 3^x = 9$;

b) $1,5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$.

II Bất phương trình mũ cơ bản

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

HOẠT ĐỘNG 2

Ta biết: Với (C_1) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y = g(x)$ thì tập hợp giá trị của x để (C_1) nằm phía trên (C_2) là tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > g(x)$.

Quan sát các đồ thị (*Hình 6.21* và *6.22*) trong Hoạt động 1 và trong mỗi trường hợp, hãy tìm các tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$:

a) Khi $b > 0$;

b) Khi $b \leq 0$.

Từ Hoạt động 2, ta có kết quả sau:

Cho bất phương trình $a^x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$

- Nếu $b \leq 0$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$ và:

  $a > 1$: ta có $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

  $0 < a < 1$: ta có $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

Lưu ý:

Giải tương tự cho các trường hợp còn lại: $a^x < b, a^x \leq b, a^x \geq b$.

Với $a > 0, a \neq 1$ và $b = a^\alpha$ thì bất phương trình $a^x > b$ trở thành $a^x > a^\alpha$ (1). Khi đó:

- Nếu $a > 1$ thì (1) $\Leftrightarrow x > \alpha$;
- Nếu $0 < a < 1$ thì (1) $\Leftrightarrow x < \alpha$.

Một cách tổng quát, ta có:

- Khi $a > 1$ thì $a^{A(x)} > a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) > B(x)$;
- Khi $0 < a < 1$ thì $a^{A(x)} > a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) < B(x)$.

VÍ DỤ 2

Giải các bất phương trình:

a) $2^x \geq \frac{1}{32}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 15$.

Giải

a) Cách 1: Lấy lôgarit hai vế theo cùng cơ số 2:

Vì cơ số 2 lớn hơn 1 nên $2^x \geq \frac{1}{32} \Leftrightarrow x \geq \log_2 \frac{1}{32} \Leftrightarrow x \geq -5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-5; +\infty)$.

Cách 2: Biến đổi hai vế về cùng cơ số 2:

$2^x \geq \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^x \geq 2^{-5} \Leftrightarrow x \geq -5$ (do cơ số 2 lớn hơn 1).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-5; +\infty)$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 15 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 15$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 6 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 6$ (do cơ số $\frac{1}{2}$ nhỏ hơn 1).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(-\infty; \log_{\frac{1}{2}} 6)$.

LUYỆN TẬP 2

Giải các bất phương trình:

a) $2^{x+1} > 2^{3x+5}$;

b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \leq \frac{9}{7}$.

BÀI TẬP

6.14. Giải các phương trình:

a) $(0,3)^{3x-2} = 1$;

b) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$;

c) $(0,5)^{x+7} . (0,5)^{1-2x} = 2$;

d) $2^{x^2-3x+2} = 4^{x+1}$.

6.15. Giải các bất phương trình:

a) $2^{x+3} < 4$;

b) $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28$;

c) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x-3} \geq \left(\frac{9}{7}\right)^{x+1}$;

d) $e^{x^2-2x} > e^x$.

6.16. Sự tăng trưởng của một quần thể vi khuẩn được tính theo công thức $S = a.5^{rt}$, trong đó a là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 21 con, sau 24 giờ là 525 con. Hỏi tỉ lệ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn là bao nhiêu?

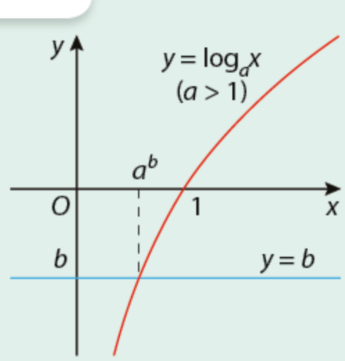
BÀI 5 PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Trong thực tế, có nhiều bài toán dẫn ta đến việc giải một phương trình (bất phương trình) có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit. Chẳng hạn như ta cần tính biên độ A của một trận động đất khi biết độ mạnh R (độ Richter) hay tính nồng độ của ion H^+ khi biết độ pH của một dung dịch,...
Những phương trình (bất phương trình) có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit được gọi là phương trình (bất phương trình) lôgarit.

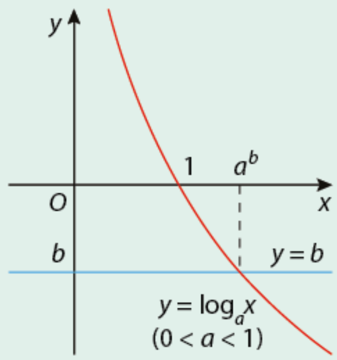
I Phương trình lôgarit cơ bản

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

HOẠT ĐỘNG 1



Hình 6.23



Hình 6.24

Quan sát các đồ thị ở trên và hãy biện luận theo b số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và đường thẳng $y = b$.

Ta biết hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = b$ là nghiệm của phương trình $\log_a x = b$. Số nghiệm là số giao điểm của hai đồ thị.
Ta có kết quả sau:

Phương trình $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$ luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b.

Lưu ý:
Nếu $b = \log_a \alpha$ $(\alpha > 0)$ thì phương trình $\log_a x = b$ trở thành $\log_a x = \log_a \alpha$. Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = \alpha$.
Một cách tổng quát, với $a > 0, a \neq 1$, ta có:

$$\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ A = B. \end{cases}$$

VÍ DỤ 1

Giải các phương trình:

a) $\log_2(x+1) = 3$;   b) $\ln(x+1) = \ln(x^2-1)$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Ta có $\log_2(x+1) = 3 \Leftrightarrow x+1 = 2^3 \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 7$.

b) Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<-1 \text{ hay } x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có $\ln(x+1) = \ln(x^2-1) \Rightarrow x+1 = x^2-1$

$$x+1 = x^2-1 \Leftrightarrow x^2-x-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện của phương trình, ta loại $x = -1$ và nhận $x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

LUYỆN TẬP 1

Giải các phương trình:

a) $\log_2(2x+6) + \log_2 x = 3$;   b) $\log x = \log(x^2+x-1)$.

II Bất phương trình lôgarit cơ bản

Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

HOẠT ĐỘNG 2

Ta biết: Với (C_1) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và (C_2) là đồ thị của hàm số $y = g(x)$ thì tập hợp giá trị của x để (C_1) nằm phía trên (C_2) là tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > g(x)$.

Quan sát các đồ thị (*Hình 6.23* và *6.24*) ở Hoạt động 1 và trong mỗi trường hợp, hãy tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_a x > b$.

Từ Hoạt động 2, ta có kết quả sau:

Cho bất phương trình $\log_a x > b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $a > 1$: ta có $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.
- Nếu $0 < a < 1$: ta có $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

Lưu ý:

Giải tương tự cho các trường hợp còn lại: $\log_a x < b, \log_a x \leq b, \log_a x \geq b$.

Nếu $b = \log_a \alpha$ ($\alpha > 0$) thì bất phương trình $\log_a x > b$ trở thành $\log_a x > \log_a \alpha$ (1). Khi đó:

- Nếu $a > 1$ thì (1) $\Leftrightarrow x > \alpha$;
- Nếu $0 < a < 1$ thì (1) $\Leftrightarrow x < \alpha$.

Một cách tổng quát, ta có:

- Khi $a > 1$ thì $\log_a A > \log_a B \Leftrightarrow A > B > 0$;
- Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a A > \log_a B \Leftrightarrow 0 < A < B$.

VÍ DỤ 2

Giải các bất phương trình:

a) $\log_2 x > 7$;

b) $\log_{0,5}(6x + 12) < \log_{0,5}(x^2 + 7x + 10)$.

Giải

a) Vì cơ số 2 lớn hơn 1 nên ta có $\log_2 x > 7 \Leftrightarrow x > 2^7 \Leftrightarrow x > 128$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(128; +\infty)$.

b) Điều kiện của bất phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} 6x + 12 > 0 \\ x^2 + 7x + 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -5 \text{ hay } x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$$

Vì cơ số 0,5 nhỏ hơn 1 nên với điều kiện đó, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $6x + 12 > x^2 + 7x + 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.
Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(-2; 1)$.

LUYỆN TẬP 2

Giải các bất phương trình:

a) $\log_{0,2}(2x - 3) \le 1$;

b) $\ln(2x + 3) \le \ln(3x + 1)$.

BÀI TẬP

6.17. Giải các phương trình:

a) $\log_{\sqrt{2}}(6x + 1) = 4$;

b) $\log_3(x + 2) = \log_3(x^2 - 4)$;

c) $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$;

d) $\ln(x - 1) + \ln(2x - 11) = \ln 2$.

6.18. Giải các bất phương trình:

a) $\log_8(4 - 2x) \ge 2$;

b) $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$;

c) $\ln(x + 1) \le \ln(x^2 - 1)$.

6.19. Tính biên độ rung chấn tối đa A của những cơn động đất (cho $A_0 = 1$) có độ mạnh R (độ Richter) sau:

a) Đảo Haiti vào năm 2010, $R = 7,0$ (nguồn: *https://tuoitre.vn/dong-dat-7-2-do-rung-chuyen-haiti-nha-cua-do-sap-20210814222841734.htm*);

b) Đảo Samoa vào năm 2009, $R = 8,1$ (nguồn: *https://dangcongsan.vn/the-gioi/nhung-van-de-toan-cau/cong-bo-cua-my-ve-tham-hoa-thien-nhien-nam-2009-1914.html*).

BÀI 6

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chọn một trong hai mục để thực hành trải nghiệm.

I Thực hành giải phương trình mũ và lôgarit bằng đồ thị

Mục tiêu: Sử dụng phần mềm GeoGebra để:

1. Vẽ đồ thị các hàm số mũ, hàm số lôgarit;
2. Tìm giá trị của hàm số tại 1 điểm;
3. Tìm nghiệm của phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

Yêu cầu chuẩn bị: Phần mềm GeoGebra (phiên bản trực tuyến *https://www.geogebra.org/classic* hoặc phiên bản cài đặt trên máy tính *https://www.geogebra.org/download*).

Tổ chức hoạt động: Chia lớp thành 4 đến 6 nhóm.

HOẠT ĐỘNG 1

Vẽ đồ thị hàm số mũ và lôgarit với GeoGebra (dành cho tất cả các nhóm)

Vẽ đồ thị hàm số mũ $y = a^x$: Nhập lệnh **a^x** vào khung nhập lệnh.

Vẽ đồ thị hàm số lôgarit $y = \log_a x$: Nhập lệnh **log(a, x)** vào khung nhập lệnh.

Chú ý: x viết thường.

Áp dụng:

a) Vẽ một đồ thị hàm số mũ với các cơ số lớn hơn 1;

c) Vẽ một đồ thị hàm số lôgarit với các cơ số lớn hơn 1;

b) Vẽ một đồ thị hàm số mũ với các cơ số nhỏ hơn 1;

d) Vẽ một đồ thị hàm số lôgarit với các cơ số nhỏ hơn 1.

HOẠT ĐỘNG 2

Thực hành giải phương trình mũ và lôgarit bằng đồ thị

(2-3 nhóm thực hiện Bài 1; 2-3 nhóm thực hiện Bài 2)

Bài 1

Biết rằng năm 2021, dân số Việt Nam là 98,56 triệu người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 0,95% (nguồn: *https://danso.org/viet-nam/*). Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{N.r}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi.

a) Vẽ đồ thị hàm số $S = A.e^{N.r}$.

b) Dựa vào đồ thị vừa vẽ, hãy ước đoán dân số Việt Nam năm 2030, 2040, 2045.

c) Dựa vào đồ thị vừa vẽ, dự đoán đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

d) Tìm hàm số của N theo S. Vẽ đồ thị hàm số này và ước tính năm nào dân số nước ta đạt mức 120 triệu người. So sánh với kết quả câu c.

Hướng dẫn:

a) Nhập lệnh **f(x) = 98.56*e^(0.95%x)** để vẽ đồ thị hàm số với x là số năm.

b) Xét trường hợp năm 2030, khi đó $N = 2030 - 2021 = 9$.

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhập lệnh **x = 9** để vẽ đường thẳng $x = 9$;

Bước 2: Dùng lệnh Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm A của đường thẳng $x = 9$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$;

Bước 3: Tung độ điểm A cho ta kết quả dân số Việt Nam vào năm 2030;

Cách 2: Nhập **f(9)** trên khung nhập lệnh, kết quả cho ta dân số Việt Nam vào năm 2030.

Các trường hợp năm 2040, 2045 làm tương tự.

c) Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhập lệnh **g(x) = 120** để vẽ đường thẳng $y = 120$;

Bước 2: Dùng lệnh Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm A của đường thẳng $y = 120$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$;

Bước 3: Hoành độ x_0 của giao điểm A cho biết sau x_0 năm kể từ 2021, dân số sẽ đạt 120 triệu người. Suy ra đó là năm $2021 + x_0$;

d) $N = \frac{1}{r}\ln\frac{S}{A}$; $N = \frac{1}{0,0095}\ln\frac{S}{98,56}$; nhập lệnh **f(x)=1/0.0095*ln(x/98.56)** để vẽ đồ thị hàm số.

Cách tìm năm mà dân số nước ta đạt mức 120 triệu người tương tự câu b.

Bài 2

Ông An gửi tiết kiệm với số tiền gửi ban đầu là 100 triệu, lãi suất 8,4%/năm theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm. Giả định lãi suất ngân hàng không thay đổi trong những năm ông An gửi.

a) Sau n năm thì số tiền ông An thu được cả vốn lẫn lãi là A. Tìm hàm số A theo n. Vẽ đồ thị (C) của hàm số này.

b) Dựa vào đồ thị (C), tìm số tiền ông An thu được sau 3 năm, 5 năm.

c) Dựa vào đồ thị (C), hỏi ông An phải gửi ít nhất bao nhiêu năm để số tiền thu được hơn 200 triệu đồng?

d) Tìm một hàm số của n theo A. Vẽ đồ thị (C') của hàm số này, tính xem ông An phải gửi ít nhất bao nhiêu năm để số tiền thu được hơn 200 triệu đồng. So sánh kết quả với câu c.

Hướng dẫn:

a) $A = 100(1,084)^n$. Nhập lệnh **f(x) = 100*(1.084)^x** để vẽ đồ thị hàm số với x là số năm.

b) Với $n = 3$:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhập lệnh **x = 3** để vẽ đường thẳng $x = 3$;

Bước 2: Dùng lệnh Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm A của đường thẳng $x = 3$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$;

Bước 3: Tung độ điểm A cho ta kết quả số tiền ông An nhận được sau 3 năm.

Trường hợp $n = 5$ làm tương tự.

c) Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhập lệnh **g(x) = 200** để vẽ đường thẳng $y = 200$;

Bước 2: Dùng lệnh Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm A của đường thẳng $y = 200$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$;

Bước 3: Hoành độ x_0 của giao điểm A cho biết thời gian mà ông An cần gửi để số tiền thu được là 200 triệu đồng;

Suy ra số năm mà ông An cần gửi là $[x_0] + 1$ ($[x_0]$ là phần nguyên của x_0).

d) $n = \log_{1,084}\frac{A}{100}$; nhập lệnh **log(1.084, x/100)** để vẽ đồ thị hàm số.

Cách tìm số năm để ông An thu được hơn 200 triệu đồng tương tự câu b.

II Lập kế hoạch tài chính

Mục tiêu: Vận dụng hàm số mũ, hàm số lôgarit trong một số bài toán kinh tế cơ bản:
- Lập kế hoạch tích luỹ từ việc gửi tiền vào ngân hàng;
- Lập kế hoạch trả góp phù hợp.

Yêu cầu chuẩn bị: Máy tính cầm tay (hoặc phần mềm bảng tính Excel).

Tổ chức hoạt động:
- Chia lớp thành 4 đến 6 nhóm;
- Một nửa số nhóm thực hiện Bài 1; các nhóm còn lại thực hiện Bài 2;
- Các nhóm nghiên cứu nhiệm vụ được giao (ở nhà) và tổ chức báo cáo (tại lớp học).

Bài 1: Gửi tiết kiệm

Bạn An muốn gửi tiết kiệm 15 triệu đồng trong thời gian 3 năm. Hãy giúp bạn lựa chọn ngân hàng và kì hạn gửi sao cho có lợi nhất, biết bạn An đã tìm hiểu được bảng lãi suất kép tiền gửi của các ngân hàng mà bạn muốn gửi như sau:

Giả sử lãi suất tiền gửi VND dành cho khách hàng cá nhân gửi tại quầy

Lãi suất: %/năm

Ngân hàng	Kì hạn gửi tiết kiệm (tháng)									
	Không kì hạn	01 tháng	03 tháng	06 tháng	09 tháng	12 tháng	13 tháng	18 tháng	24 tháng	36 tháng
X	0,10	3,10	3,40	4,00	4,00	5,50	5,50	5,50	5,50	-
Y	0,20	3,90	3,90	6,25	6,30	6,70	6,80	6,80	6,90	6,90
Z	0,20	3,35	3,45	5,90	5,80	6,35	6,50	6,50	6,50	6,50

Hướng dẫn:

Hãy dùng máy tính cầm tay hoặc phần mềm Excel để lập một bảng giá trị tiền nhận được theo từng loại kì hạn của các ngân hàng, từ đó sẽ lựa chọn loại kì hạn và ngân hàng có lợi nhất.

Bài 2: Trả góp

Bạn Bình có 2 triệu đồng và bạn muốn mua một máy tính xách tay giá 13 490 000 đồng với hình thức trả góp. Cửa hàng bán máy tính xách tay có chương trình trả góp như sau:
- Bạn có thể trả trước 10%, 20%, 30%,… giá trị của món hàng;
- Giá trị còn lại của món hàng sẽ trả góp hàng tháng với lãi suất 2,8%/tháng dựa trên dư nợ giảm dần (tiền lãi được tính trên tiền nợ thực tế tại thời điểm tính lãi) trong thời gian 6 tháng, 8 tháng, 9 tháng, 10 tháng và 12 tháng;
- Số tiền trả góp hàng tháng bao gồm tiền gốc và lãi cùng với 11 000 đồng phí thu hộ.

Biết rằng mỗi tháng, bạn Bình có thể tiết kiệm được 1 triệu đồng để trả góp. Hãy tư vấn cho bạn Bình kì hạn trả góp phù hợp nhất.

Hướng dẫn:

Hãy dùng máy tính cầm tay hoặc phần mềm Excel để lập một bảng giá trị số tiền trả góp hàng tháng theo số tiền trả trước cùng với kì hạn trả góp, từ đó lựa chọn kì hạn trả góp phù hợp.

ÔN TẬP CHƯƠNG 6

BÀI TẬP TỰ LUẬN

6.20. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{3^x - 3}$;

b) $y = \log(2x - 3)$.

6.21. Cho $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Hãy tính $\log_a x$ với:

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$;

b) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

6.22. Giải các phương trình:

a) $2^{2x^2+5x+4} = 4$;

b) $3^{x+4} + 3 . 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$;

c) $\log \frac{x+8}{x-1} = \log x$;

d) $\log_7(x-1) . \log_7 x = \log_7 x$.

6.23. Giải các bất phương trình:

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} > 3^{x^2+2x}$;

c) $\log(x^2 + x - 2) \geq \log(x - 1)$;

d) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) > 1$.

6.24. Vi khuẩn *Escherichia coli* (thường được viết tắt là E.coli) là một trong những loài vi khuẩn chính kí sinh trong đường ruột của động vật máu nóng, gây tiêu chảy và các bệnh đường ruột (nguồn: *https://ylamsang.net/vi-khuan-e-co-li-gay-benh-escherichia-coli/*). Khi nuôi cấy vi khuẩn E.coli trong môi trường nước thịt ở nhiệt độ 37 độ C, cứ sau 20 phút thì một tế bào vi khuẩn phân chia thành hai tế bào. Biết số lượng tế bào nuôi cấy ban đầu là 60.

Hình 6.25

a) Tìm số lượng tế bào sau 8 giờ.

b) Khi nào quần thể vi khuẩn sẽ nhiều hơn 20 000 tế bào?

6.25. Dân số của Việt Nam năm 2009 là 85 846 997 người và năm 2019 là 96 208 984 người (nguồn: *https://dangcongsan.vn/xa-hoi/infographic-dan-so-viet-nam-qua-5-lan-tong-dieu-tra-dan-so-545359.html*).

a) Sử dụng mô hình tăng trưởng mũ $S = A.e^{nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm) và các số liệu dân số trong 2 năm 2009, 2019 để dự đoán dân số năm 2039 và 2049.

b) Sử dụng mô hình ở câu a, dự đoán xem vào năm bao nhiêu dân số Việt Nam vượt ngưỡng 150 triệu người.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

6.26. Tập xác định của hàm số $y = \log\dfrac{x-2}{1-x}$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $(1; 2)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

6.27. Với các số thực dương *a*, *b* bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b$.

B. $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

C. $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$.

D. $\log_2 \dfrac{2a^3}{b} = 1 + \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b$.

6.28. Tập nghiệm *S* của bất phương trình $\log_{0,5}(x+1) < \log_{0,5}(2x-1)$ là

A. $S = \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

B. $S = (-1; 2)$.

C. $S = (-\infty; 2)$.

D. $S = (2; +\infty)$.

6.29. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) = 2$ là

A. $x = \dfrac{5}{2}$.

B. $x = 2$.

C. $x = \dfrac{7}{2}$.

D. $x = 4$.

6.30. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-3} > 8$ là

A. $(3; +\infty)$.

B. $(-\infty; 6)$.

C. $(6; +\infty)$.

D. $(3; 6)$.

6.31. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(25 - x^2) \leq 2$ là

A. $(-5; -4] \cup [4; 5)$.

B. $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

C. $(4; 5)$.

D. $[4; +\infty)$.

CHƯƠNG 7 Đạo hàm

Đạo hàm được các nhà khoa học phát minh trong nỗ lực giải quyết hai vấn đề quan trọng của Toán học và Vật lí: bài toán xác định tiếp tuyến của một đường cong và xác định vận tốc của một vật thể. Sự ra đời của đạo hàm mang lại một công cụ mạnh mẽ để nghiên cứu các tính chất của hàm số cũng như được ứng dụng trong nhiều vấn đề thực tiễn và trong các ngành khoa học khác.

- Nhận biết được một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm, định nghĩa đạo hàm, ý nghĩa hình học của đạo hàm;
- Tính được đạo hàm của các hàm số bằng định nghĩa và bằng cách áp dụng quy tắc;
- Thiết lập được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị;
- Nhận biết được khái niệm đạo hàm cấp hai của một hàm số;
- Tính được đạo hàm cấp hai của một số hàm số đơn giản;
- Giải quyết được một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc có liên quan đến thực tiễn gắn với đạo hàm và đạo hàm cấp hai.

BÀI 1

ĐẠO HÀM

Một vận động viên nhảy dù nhảy ra từ một máy bay và rơi tự do một quãng đường trước khi bung dù. Biết rằng khi chưa bung dù, quãng đường vận động viên ấy rơi được sau t giây được tính bởi $s(t) = 4,9t^2$ mét (bỏ qua lực cản của không khí).
Trên thực tế, vận tốc chuyển động của vận động viên này sẽ tăng dần theo thời gian. Có cách nào xác định được vận tốc của vận động viên ngay tại một thời điểm t_0 nào đó hay không (vận tốc tức thời tại t_0)?

Hình 7.1

I. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

1. Một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm

a) Bài toán xác định vận tốc tức thời

HOẠT ĐỘNG 1

Một vật bắt đầu chuyển động theo đường thẳng và quãng đường đi được sau t giây được tính bởi $s(t) = 2t^2$, $s(t)$ tính bằng mét.

a) Cho biết vận tốc trung bình (đơn vị m/s) của vật trong khoảng thời gian $[t_0; t]$ được tính bởi công thức $v_{tb} = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$. Hãy tính vận tốc trung bình trong các khoảng thời gian $[t_0; t]$ với $t_0 = 3$ và t lần lượt là 3,1; 3,01; 3,001. Sau đó, hoàn thành *Bảng 7.1*.

Bảng 7.1

t	v_{tb} trong khoảng thời gian $[t_0; t]$
3,1	?
3,01	?
3,001	?

b) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian nào ở *Bảng 7.1* gần nhất với vận tốc tại thời điểm $t_0 = 3$?

c) Để vận tốc trung bình trong khoảng thời gian $[t_0; t]$ càng gần với vận tốc tại thời điểm t_0 thì ta cần chọn giá trị của t như thế nào?

Nhận xét:

Xét chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $s = s(t)$.

Tỉ số $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho biết vận tốc trung bình trên khoảng thời gian $[t_0; t]$. Khi t dần đến t_0 thì giá trị của tỉ số trên càng phản ánh chính xác mức độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0. Theo đó, giới hạn hữu hạn (nếu có) $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ được gọi là vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0, kí hiệu $v(t_0)$.

b) Bài toán xác định tốc độ thay đổi của nhiệt độ

Nhiệt độ của một bình nuôi cấy vi sinh vật tại thời điểm t (giây) được tính bởi hàm số $f(t)$ (°C). Khi thời gian thay đổi từ thời điểm t_0 đến t thì nhiệt độ bình nuôi cấy sẽ thay đổi từ $f(t_0)$ đến $f(t)$. Tỉ số $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ cho ta biết tốc độ thay đổi trung bình của nhiệt độ trong khoảng thời gian $[t_0; t]$. Khi t dần đến t_0 thì giá trị của tỉ số trên sẽ càng biểu thị chính xác hơn tốc độ thay đổi nhiệt độ tại thời điểm t_0. Theo đó, giới hạn hữu hạn (nếu có) $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ được gọi là tốc độ thay đổi nhiệt độ của bình nuôi cấy tại thời điểm t_0.

Nhận xét:

Nhiều vấn đề trong khoa học và trong thực tiễn đưa đến việc xác định những giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Giới hạn này dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2. Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Giới hạn hữu hạn (nếu có) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

VÍ DỤ 1

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$

Vậy $f'(1) = 3$.

LUYỆN TẬP 1

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Nhận xét: Từ những bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm ở trên, ta có các nhận xét sau:

1. Nếu một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s = s(t)$ thì vận tốc tức thời của nó tại thời điểm t_0 bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại t_0, tức là:
$$v(t_0) = s'(t_0).$$
2. Nếu nhiệt độ của một vật thay đổi theo thời gian bởi hàm số $y = f(t)$ thì tốc độ thay đổi nhiệt độ của vật đó tại thời điểm t_0 bằng đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ tại t_0.

VẬN DỤNG

Xét tình huống vận động viên nhảy dù trong bài toán khởi động.

a) Tìm vận tốc của vận động viên nhảy dù sau 2 giây kể từ khi bắt đầu rơi tự do.

b) Sau khi rơi tự do được 490 mét, vận động viên đó bung dù để chuẩn bị đáp xuống mặt đất. Tìm vận tốc của vận động viên tại thời điểm bung dù.

II Ý nghĩa hình học của đạo hàm và bài toán tiếp tuyến

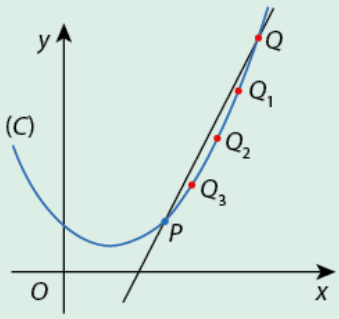
1. Tiếp tuyến của đường cong

HOẠT ĐỘNG 2

Xét đường cong (C) và P là điểm cố định trên (C). Với mỗi điểm Q di chuyển trên (C), đường thẳng PQ được gọi là cát tuyến của đường cong (C).

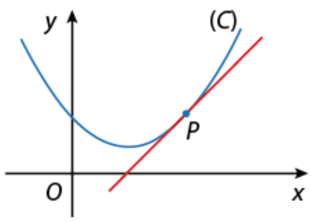
a) Trên (C) lần lượt lấy các điểm Q_1, Q_2, Q_3 càng lúc càng gần P (tham khảo *Hình 7.2*). Hãy vẽ các cát tuyến PQ_1, PQ_2, PQ_3.

b) Cho biết: Khi điểm Q tiến dần đến P thì cát tuyến PQ sẽ tiến dần về một vị trí giới hạn là đường thẳng PT nào đó. Hãy dự đoán và vẽ (ước lượng) đường thẳng PT này.



Hình 7.2

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường cong (C). Vị trí giới hạn (nếu có) của cát tuyến PQ khi điểm Q dần tiến về điểm P được gọi là **tiếp tuyến** với (C) tại P. Điểm P còn được gọi là **tiếp điểm**.



Hình 7.3

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

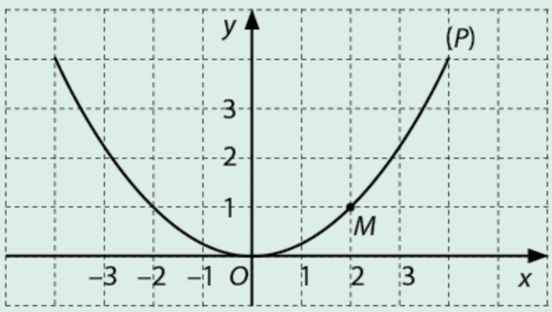
HOẠT ĐỘNG 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2}{4}$ có đồ thị là đường parabol (P) như *Hình 7.4*. Gọi M là điểm thuộc (P) có hoành độ $x_0 = 2$.

a) Tính $f'(2)$.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và có hệ số góc bằng $f'(2)$.

c) Vẽ đường thẳng Δ và (P) trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Có nhận xét gì về vị trí giữa Δ và (P)?



Hình 7.4

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đó tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

VÍ DỤ 2

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = 2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 2) = 4$.

Suy ra $f'(1) = 4$.

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4.

LUYỆN TẬP 2

Cho hàm số $y = -3x^3$ có đồ thị (C). Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; 3)$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường cong

HOẠT ĐỘNG 4

Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1$ có đồ thị là parabol (P) và điểm $M(1; 2)$ thuộc (P). Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) tại điểm M. Hãy viết phương trình Δ.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Nếu hàm số có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có phương trình là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

VÍ DỤ 3

Viết phương trình của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = 2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Giải

Theo kết quả của Ví dụ 2, ta có hệ số góc của tiếp tuyến bằng $f'(1) = 4$.

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = 2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ có phương trình là $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ hay $y = 4(x - 1) + 2$ hay $y = 4x - 2$.

LUYỆN TẬP 3

Cho parabol (P): $y = x^2 + 2x - 3$ và điểm M thuộc (P) có hoành độ $x_0 = -2$.

a) Tính $y'(-2)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M.

III Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

HOẠT ĐỘNG 5

Cho hàm số $f(x) = x^2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 bất kì.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên $(a; b)$, kí hiệu $y' = f'(x)$.

VÍ DỤ 4

Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2 + x$ trên $\mathbb{R}$.

Giải

Với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - x_0^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 - x_0^2) + (x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + (x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 1)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0 + 1) = 2x_0 + 1.$$

Suy ra $y'(x_0) = 2x_0 + 1$.

Vậy đạo hàm của hàm số $y = x^2 + x$ trên $\mathbb{R}$ là $y' = 2x + 1$.

Ghi chú: Ta có thể viết gọn lại kết quả trên là $(x^2 + x)' = 2x + 1$.

LUYỆN TẬP 4

Chứng minh rằng đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

BÀI TẬP

7.1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 với:

a) $f(x) = x^3 - x$ và $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x}$ và $x_0 = 2$.

7.2. Cho hàm số $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

7.3. Cho hàm số $f(x) = (x - 1)^3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

7.4. Một bình nuôi cấy vi sinh vật được truyền nhiệt đến một nhiệt độ thích hợp. Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t phút được tính bởi hàm số $f(t) = t^3$ (°C).

a) Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ của bình tại thời điểm $t = 2$ phút.

b) Sau bao lâu thì nhiệt độ của bình đạt 27°C? Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ của bình tại thời điểm đó.

7.5. Tính đạo hàm của hàm số $y = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

BÀI 2

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Chúng ta đã tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2$ bằng định nghĩa. Với những hàm số như $y = (2x^2 + x)^8$ hay $y = \sqrt{4x^3 - 2x + 1}$, việc tính đạo hàm bằng định nghĩa sẽ phức tạp hơn. Trong bài học này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu những công thức và quy tắc để tính đạo hàm của các hàm số như vậy một cách nhanh chóng và thuận tiện.

I Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

HOẠT ĐỘNG 1

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$ trên $\mathbb{R}$.

b) Dự đoán đạo hàm của hàm số $y = x^4$, $y = x^5$.

Công thức tổng quát để tính đạo hàm của các hàm số xuất hiện trong Hoạt động 1 được giới thiệu trong định lí sau đây:

Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ghi chú:

1. Bằng định nghĩa, ta chứng minh được rằng: $(c)' = 0$ và $(x)' = 1$, trong đó c là một hằng số.
2. Người ta chứng minh được công thức $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ đúng cho mọi số thực α và $x > 0$.

VÍ DỤ 1

Tính đạo hàm của hàm số $y = x^6$. Tính $y'(-1)$ và $y'(1)$.

Giải

Ta có $y' = 6x^5$.

$y'(-1) = 6.(-1)^5 = -6$.

$y'(1) = 6.1^5 = 6$.

VÍ DỤ 2

Cho các hàm số sau: $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{x}$.

a) Biểu diễn các hàm số trên dưới dạng $y = x^\alpha$.

b) Áp dụng công thức $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ để tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Giải

a) Ta có: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

b) $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \,.\, x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Ghi chú: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ và $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

LUYỆN TẬP 1

Tính đạo hàm của các hàm số $f(x) = x^{10}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

II Các quy tắc tính đạo hàm

1. Đạo hàm của tổng, hiệu hai hàm số

HOẠT ĐỘNG 2

Cho các hàm số $u(x) = x^2$ và $v(x) = x$.

a) Tính $u'(x)$ và $v'(x)$.

b) Ở Ví dụ 4 của Bài 1, ta đã biết $(x^2 + x)' = 2x + 1$. Có nhận xét gì về mối liên hệ giữa $[u(x) + v(x)]'$ với các đạo hàm $u'(x)$ và $v'(x)$?

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(u - v)' = u' - v'.$$

Ghi chú: Quy tắc trên cũng đúng cho trường hợp tổng hoặc hiệu của nhiều hàm số.

VÍ DỤ 3

Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5 - x^3 + x - 10$.

Giải

Ta có: $y' = (x^5)' - (x^3)' + (x)' - (10)' = 5x^4 - 3x^2 + 1$.

LUYỆN TẬP 2

Tính $f'(1)$ và $f'(4)$, biết $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - \frac{1}{x}$.

2. Đạo hàm của tích, thương hai hàm số

HOẠT ĐỘNG 3

Cho các hàm số $u(x) = x^3$ và $v(x) = x^2$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = u(x).v(x)$.

b) Hoàn thành *Bảng 7.2*.

Bảng 7.2

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$	$u'(x).v'(x)$	$u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$
?	?	?	?	?	?

c) So sánh kết quả ở câu a và b rồi rút ra nhận xét.

Các quy tắc tính đạo hàm của tích, thương hai hàm số được cho trong định lí sau:

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng xác định thì

$$(u.v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v = v(x) \neq 0).$$

Lưu ý:

- $(k.u)' = k.u'$ với $k \in \mathbb{R}$.
- $\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{k.v'}{v^2}$ với $k \in \mathbb{R}$.

VÍ DỤ 4

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 4x^2 - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{x}$;　　b) $y = (2x^3+1)(\sqrt{x}-3)$;　　c) $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Giải

a) Với $x > 0$, ta có $y' = 4(x^2)' - \frac{1}{2}(\sqrt{x})' + 5\left(\frac{1}{x}\right)' = 8x - \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$.

b) Với $x > 0$, ta có $y' = (2x^3+1)'(\sqrt{x}-3) + (2x^3+1)(\sqrt{x}-3)' = 6x^2(\sqrt{x}-3) + (2x^3+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

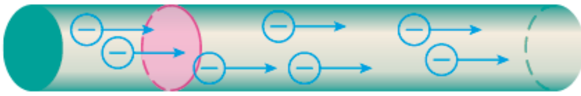
c) Với $x \neq -1$, ta có $y' = \frac{(2x-1)'(x+1) - (2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$.

LUYỆN TẬP 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (-2x^2+3x+1)\sqrt{x}$;　　b) $y = \frac{2x^2-1}{1-3x}$.

VẬN DỤNG 1


Hình 7.5

Điện lượng Q (đơn vị: C) truyền trong một dây dẫn tại thời điểm t (giây) được tính bởi $Q(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$. Biết rằng cường độ dòng điện tại thời điểm t là $I(t)$ (đơn vị: A) có giá trị bằng với $Q'(t)$.

a) Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = \frac{1}{2}$ giây và $t = 2$ giây. Tại thời điểm nào thì cường độ dòng điện lớn hơn?

b) Tìm thời điểm mà cường độ dòng điện đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Đạo hàm của hàm hợp

a) Hàm hợp

HOẠT ĐỘNG 4

Cho hai hàm số $f(u) = u^4$ và $u(x) = 2x^2 + 1$.

a) Tính giá trị của $u(1)$ và $f(u(1))$.

b) Trong biểu thức của $f(u)$, nếu ta thay biến u bởi $u(x)$ thì ta thu được một biểu thức theo biến x. Hãy viết ra biểu thức này.

Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Hàm số $y = f(u(x))$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $f(u)$ và $u(x)$.

Lưu ý: Tập giá trị của hàm số $u = u(x)$ là tập con của tập xác định của hàm số $y = f(u)$.

VÍ DỤ 5

Cho $f(u) = \sqrt{u}$ và $u(x) = 2x^2 - x + 4$. Tìm hàm số hợp $y = f(u(x))$. Tính $y(-1)$ và $y(2)$.

Giải

Ta có $y = f(u(x)) = \sqrt{2x^2 - x + 4}$.

$y(-1) = \sqrt{7}$ và $y(2) = \sqrt{10}$.

LUYỆN TẬP 4

Hàm số $y = e^{3x - x^2}$ là hàm hợp của hai hàm số nào?

b) Đạo hàm của hàm hợp

HOẠT ĐỘNG 5

Cho hai hàm số $f(u) = u^2$ và $u(x) = x^2 + 1$. Hàm hợp của hai hàm số f và u là $y = f(u(x)) = (x^2 + 1)^2$.

a) Tính y' bằng cách khai triển biểu thức $(x^2 + 1)^2$ và áp dụng quy tắc tính đạo hàm của tổng.

b) Một học sinh cho rằng: Vì $(u^2)' = 2u$ nên $y' = \left[(x^2 + 1)^2\right]' = 2(x^2 + 1)$. Kết quả này đúng hay sai?

c) Tính $f'(u).u'(x)$ và so sánh với kết quả của y' ở câu a, sau đó rút ra nhận xét.

Ta có công thức sau đây để tính đạo hàm của hàm hợp:

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại x là $u'(x)$ và $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là $f'(u)$ thì hàm hợp $g(x) = f(u(x))$ có đạo hàm tại x là

$$g'(x) = f'(u).u'(x).$$

Ghi chú: Công thức đạo hàm của hàm hợp có thể viết gọn là $g_x' = f_u'.u_x'$.

VÍ DỤ 6

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + x)^8$;

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Giải

a) Ta có $y = (x^2 + x)^8$ là hàm hợp của hai hàm số $f(u) = u^8$ và $u(x) = x^2 + x$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp thì $y' = 8u^7.u'(x) = 8(x^2 + x)^7(2x + 1)$.

b) Với $x > 0$, ta có $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$ là hàm hợp của hai hàm số $f(u) = \dfrac{1}{u}$ và $u(x) = \sqrt{x} + 1$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp thì $y' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'(x) = -\dfrac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nhận xét: Với $u = u(x)$, ta có các công thức tính đạo hàm của hàm hợp sau:

$$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'; \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

LUYỆN TẬP 5

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{7 - 3x}$;

b) $y = \left(2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^3$.

III Đạo hàm của một số hàm số khác

1. Đạo hàm của hàm số lượng giác

HOẠT ĐỘNG 6

Xét hàm số $y = \sin x$.

Cho biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm x_0 bất kì.

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

HOẠT ĐỘNG 7

a) Từ công thức $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ và quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, chứng minh rằng: $(\cos x)' = -\sin x$.

b) Từ các công thức $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ và quy tắc tính đạo hàm của thương, chứng minh rằng: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z});$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Nhận xét: Với $u = u(x)$, ta có các công thức tính đạo hàm của hàm số lượng giác sau:

$(\sin u)' = u'.\cos u$; $\quad(\cos u)' = -u'.\sin u$; $\quad(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; $\quad(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

VÍ DỤ 7

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x - 3\cos x$;

b) $y = x\tan x$;

c) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

d) $y = \cos^3 3x$.

Giải

a) $y' = 2(\sin x)' - 3(\cos x)' = 2\cos x + 3\sin x$.

b) Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, ta có $y' = (x)'.\tan x + (\tan x)'.x = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$.

c) $y' = \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)'.\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

d) $y' = 3\cos^2 3x.(\cos 3x)' = -3\cos^2 3x.(3x)'.\sin 3x = -9\cos^2 3x.\sin 3x$.

LUYỆN TẬP 6

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3\cot x - \frac{\tan x}{2} + 1$;

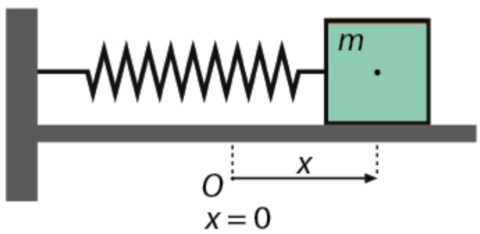
b) $y = \frac{\sin x}{x}$.

VẬN DỤNG 2

Phương trình chuyển động của một con lắc lò xo dao động quanh vị trí cân bằng O là $x = 4\cos 2t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng cm. Biết rằng vận tốc của con lắc ở thời điểm t được tính bởi $v(t) = x'(t)$:

a) Tính vận tốc của con lắc tại thời điểm $t = \frac{7\pi}{12}$;

b) Tìm thời điểm đầu tiên con lắc đạt vận tốc lớn nhất.



Hình 7.6

2. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

HOẠT ĐỘNG 8

Xét hàm số $y = e^x$.

Cho biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Bằng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = e^x$ tại điểm x_0 bất kì.

Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.

Ngoài ra, bằng định nghĩa ta cũng chứng minh được $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$.

HOẠT ĐỘNG 9

a) Từ công thức $a^x = e^{x\ln a}$ và quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, hãy tìm công thức tính đạo hàm của hàm số $y = a^x$.

b) Từ công thức $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ và các quy tắc tính đạo hàm đã biết, hãy tìm công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \log_a x$.

Cho $a > 0, a \neq 1$.

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, x > 0; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Nhận xét: Với $u = u(x)$, ta có các công thức tính đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

$(e^u)' = u'e^u$; $\quad (a^u)' = u'a^u \ln a$; $\quad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $\quad (\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$.

VÍ DỤ 8

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3^{2x^2 - x}$; b) $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$; c) $y = xe^x$.

Giải

a) $y' = (2x^2 - x)'.3^{2x^2-x}.\ln 3 = (4x - 1).3^{2x^2-x}.\ln 3$.

b) $y' = \dfrac{(x^2 + 2x + 3)'}{(x^2 + 2x + 3)\ln 2} = \dfrac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 3)\ln 2}$.

c) $y' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$.

LUYỆN TẬP 7

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 4^{\sin x + \cos x}$; b) $y = \ln(1 + \sqrt{x})$; c) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

VẬN DỤNG 3

Nồng độ C (đơn vị µg/l) của loại thuốc A một người uống vào cơ thể sau t giờ cho bởi hàm số sau: $C(t) = 6,2.t^4 e^{-0,5t}$ (nguồn: Tarko, O. (2021). Surge Functions and Drug Interactions. *Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two, 12*(1), 7). Biết rằng nồng độ C sẽ tăng lên trong 8 giờ đầu tiên và tốc độ tăng của nồng độ C tại thời điểm t được tính bởi $C'(t)$:

a) Tính tốc độ tăng nồng độ của thuốc A tại thời điểm $t_0 = 1$;

b) Trong hai thời điểm $t_0 = 1$ và $t_1 = 5$, thời điểm nào nồng độ thuốc A tăng nhanh hơn?

BÀI TẬP

7.6. Tính đạo hàm của của các hàm số sau:

a) $y = x^4 + 3x^3 - 2\sqrt{x}$;

b) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$;

c) $y = (x^2 + 1)\cot x$;

d) $y = e^x \log_2 x$;

e) $y = \sqrt{2^x + 1}$.

7.7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

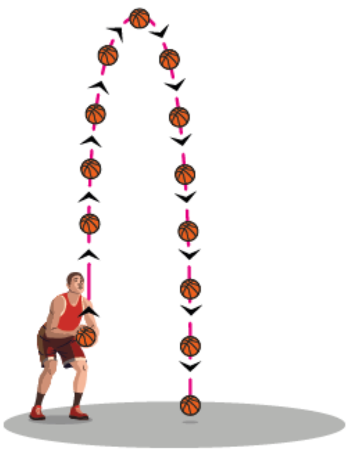
a) $y = e^{\tan x}$; b) $y = \ln^2(2x + 1)$.

7.8. Cho parabol (P): $y = 2x^2 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (P), biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng 5.

7.9. Nếu một quả bóng được ném lên từ vị trí cách mặt đất 1 mét với vận tốc đầu là 24,5 m/s thì chiều cao của quả bóng sau t giây (trước khi bóng chạm đất) được tính bởi $h(t) = 1 + 24,5t - 4,9t^2$. Biết rằng vận tốc của quả bóng tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = h'(t)$:

a) Tìm vận tốc của quả bóng sau 1 giây và sau 3 giây;

b) Tại thời điểm quả bóng rơi xuống còn cách mặt đất 1 m thì vận tốc của nó bằng bao nhiêu?



Hình 7.7

BÀI 3

ĐẠO HÀM CẤP HAI

Trong cơ học, gia tốc là đại lượng đặc trưng cho mức độ thay đổi vận tốc của một vật chuyển động.

Ta đã biết vận tốc của vật tại một thời điểm t nào đó được tính bởi $v(t) = s'(t)$ (với $s = s(t)$ là phương trình chuyển động), vậy làm thế nào để tính được gia tốc của vật tại thời điểm t?

Hình 7.8

I Đạo hàm cấp hai

HOẠT ĐỘNG 1

Xét hàm số $y = 3x^4 - 2x^2 + x$.

a) Tính y'.

b) Tính đạo hàm của y'.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

VÍ DỤ 1

Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^4 + \ln x$;

b) $y = \sin^2 x$.

Giải

a) Với $x > 0$, ta có $y' = 4x^3 + \frac{1}{x}$; $y'' = \left(4x^3 + \frac{1}{x}\right)' = 12x^2 - \frac{1}{x^2}$;

b) $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$; $y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$.

LUYỆN TẬP 1

Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 1 - 3\cos 3x$;

b) $y = e^{3x^2+x}$.

II Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

HOẠT ĐỘNG 2

Một vật chuyển động thẳng với phương trình $s(t) = t^3 + t$, với s tính bằng mét và t tính bằng giây.

a) Tính vận tốc của vật tại thời điểm t.

b) Cho biết gia tốc trung bình (đơn vị m/s^2) của vật trong khoảng thời gian $[t_0; t]$ được tính bởi công thức $a_{tb} = \dfrac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$. Hãy tính gia tốc trung bình trong các khoảng thời gian $[t_0; t]$ với $t_0 = 2$ và t lần lượt là 2,1; 2,01; 2,001. Sau đó, hoàn thành *Bảng 7.3*.

Bảng 7.3

t	a_{tb} trong khoảng thời gian $[t_0; t]$
2,1	?
2,01	?
2,001	?

Trong cơ học, giới hạn hữu hạn (nếu có) $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ được gọi là gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 (hay gia tốc tại thời điểm t_0), kí hiệu là $a(t_0)$. Ta có: $a(t_0) = v'(t_0)$.

Gia tốc tại thời điểm t_0 đặc trưng cho mức độ thay đổi vận tốc của vật tại thời điểm đó. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t, kí hiệu là $a(t)$.

Vì $v(t_0) = s'(t_0)$, ta rút ra được ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai như sau:

Đạo hàm cấp hai $s''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$, tức là $a(t) = s''(t)$.

VÍ DỤ 2

Tính gia tốc của vật chuyển động thẳng trong Hoạt động 2 tại các thời điểm $t_1 = 2$ giây và $t_2 = 3$ giây. Ở thời điểm nào trong hai thời điểm trên, vật tăng tốc nhanh hơn?

Giải

Ta có: $s'(t) = 3t^2 + 1$, $a(t) = s''(t) = 6t$.

$a(t_1) = a(2) = 12$ (m/s); $a(t_2) = a(3) = 18$ (m/s).

Vì $a(t_2) > a(t_1) > 0$ nên tại thời điểm $t_2 = 3$ vật tăng tốc nhanh hơn.

LUYỆN TẬP 2

Phương trình chuyển động của một con lắc lò xo dao động quanh vị trí cân bằng O là $x = 4\cos 2t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng cm. Tính gia tốc của con lắc tại thời điểm t.

BÀI TẬP

7.10. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 với:

a) $f(x) = (x - 2)^7$ và $x_0 = 4$;

b) $f(x) = \sin 2x$ và $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

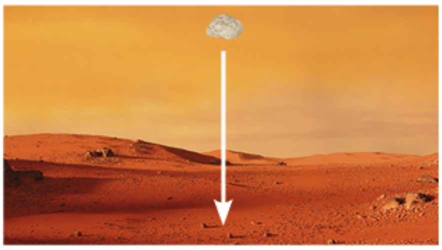
7.11. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = 2^x - 5^x$;

b) $y = \sqrt{x + 3}$;

c) $y = x\ln x$.

7.12. Một hòn đá được thả rơi tự do trên Sao Hoả. Quãng đường rơi sau t giây được tính bởi $s(t) = 1{,}86t^2$ (nguồn: Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning). Tính gia tốc của hòn đá khi rơi tự do trên Sao Hoả. So sánh với gia tốc rơi tự do trên Trái Đất vào khoảng $g = 9{,}8$ (m/s^2), có nhận xét gì?



Hình 7.9

BÀI 4 HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Đạo hàm được sử dụng để xác định tốc độ thay đổi của một số đại lượng trong thực tiễn như thế nào?

Gợi ý tổ chức hoạt động: Lớp học được chia thành 4 nhóm. Giáo viên có thể tổ chức giờ học hoạt động trải nghiệm "Tìm hiểu ứng dụng của đạo hàm trong thực tiễn" thông qua các hoạt động sau:

HOẠT ĐỘNG 1

Giới thiệu ý nghĩa "tốc độ thay đổi" của đạo hàm

1. Học sinh đọc thông tin sau về ý nghĩa của đạo hàm trong một số vấn đề thực tiễn liên quan đến "tốc độ thay đổi của một đại lượng":

Trong thực tiễn, ta bắt gặp rất nhiều đại lượng thay đổi theo thời gian hoặc theo một biến nào đó. Ví dụ:

- *Dân số của một địa phương thay đổi theo từng năm;*
- *Chi phí sản xuất thay đổi theo số lượng hàng hoá được làm ra;*
- *Chiều cao của một cái cây thay đổi theo thời gian khi nó lớn lên.*

Nếu các đại lượng thay đổi nêu trên biểu diễn bởi hàm số $y = f(x)$ thì đạo hàm $f'(x)$ có thể được hiểu là tốc độ thay đổi của y theo x.

Chẳng hạn, nếu dân số của một thành phố được ước tính bởi hàm số $y = f(t)$ thì $f'(t)$ là tốc độ thay đổi dân số của thành phố tại thời điểm t. Trong trường hợp $y = f(t)$ là hàm đồng biến (hàm tăng) thì $f'(t)$ giúp ta tính được tốc độ tăng dân số ở thời điểm t cần xét.

Từ ý nghĩa trên, đạo hàm của một hàm số sẽ cho biết tốc độ (mức độ nhanh, chậm) mà một đại lượng nào đó đang thay đổi. Vì sự thay đổi là tính chất chung của nhiều đại lượng trong thực tiễn nên đạo hàm là một công cụ toán học quan trọng và có nhiều ứng dụng.

2. Các nhóm thảo luận tìm kiếm các đại lượng trong thực tế hoặc trong các môn học khác có liên quan đến "tốc độ thay đổi".
3. Đại diện mỗi nhóm lên báo cáo kết quả thảo luận của mình. Giáo viên nhận xét và liên hệ với ý nghĩa của đạo hàm, từ đó chỉ ra được ý nghĩa quan trọng của đạo hàm trong nhiều vấn đề của thực tiễn.

HOẠT ĐỘNG 2

Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề thực tiễn liên quan đến tốc độ thay đổi của một đại lượng

1. Giáo viên tổ chức cho 4 nhóm học sinh giải quyết 4 bài toán có ngữ cảnh thực tế dưới đây (mỗi nhóm giải quyết 1 bài toán).
2. Mỗi nhóm giải quyết bài toán được giao, trình bày lời giải trên giấy A0 và thuyết trình trước lớp.

Bài toán 1: Dân số của thành phố A tăng theo từng năm kể từ năm 2000 đến nay. Giả sử số dân của thành phố trên được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{30t + 18}{t + 6}$ (nghìn người), trong đó t là số năm kể từ năm 2000. Chẳng hạn, ở thời điểm năm 2020 thì $t = 2\,020 - 2\,000 = 20$.

a) Nếu xem $y = f(t)$ là hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thì đạo hàm của nó biểu thị cho đại lượng nào?

b) Tính tốc độ tăng dân số của thành phố A vào năm 2005 và 2010 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Vào năm nào trong hai năm nêu trên, dân số của thành phố A tăng nhanh hơn?

c) Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số đạt mức 0,5 nghìn người/năm?

Bài toán 2: Một bể chứa nước đang chứa 20 m³ nước. Một người cần lấy nước để sử dụng nên đã mở van ở đáy bể để nước chảy vào thùng chứa. Giả sử thể tích nước trong thùng chứa tăng dần theo thời gian và được ước tính bởi hàm số $V(t) = t - \frac{1}{80}t^2$ $(0 \leq t \leq 40)$.

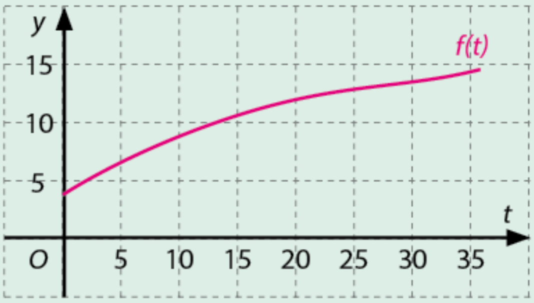
a) Có thể xem tốc độ nước chảy vào thùng bằng với tốc độ tăng của thể tích nước trong thùng. Tính tốc độ nước chảy vào thùng chứa tại thời điểm $t = 5$ phút và $t = 15$ phút.

b) Nước chảy vào thùng chứa nhanh nhất tại thời điểm nào?

Bài toán 3: Để đo lường khả năng nắm vững kiến thức của sinh viên sau khi kết thúc khoá học, một nhà nghiên cứu tiến hành cho sinh viên làm bài kiểm tra mỗi tháng trong vòng 12 tháng kể từ ngày kết thúc khoá học. Giả sử điểm số trung bình $s(t)$ của các sinh viên đạt được trong bài kiểm tra ở tháng thứ t được tính bởi $s(t) = 7e^{-0,2t} + 1$ với $s(t)$ tính bằng điểm, $0 \leq t \leq 12$. Nếu xem $y = s(t)$ là hàm số xác định trên [0; 12] thì $|s'(t)|$ biểu thị tốc độ giảm điểm số tại tháng thứ t trong đợt khảo sát.

Tính tốc độ giảm điểm số tại $t = 2$ và $t = 6$. Tại thời điểm nào trong hai thời điểm trên, điểm số của các sinh viên được khảo sát giảm nhanh hơn?

Bài toán 4: Cân nặng của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng được ước tính bởi hàm số $y = f(t) = 0,00031t^3 - 0,02396t^2 + 0,76806t + 3,3$ và có đồ thị như sau (nguồn: *https://www.vinmec.com*):



Hình 7.10

a) Tính tốc độ tăng cân nặng của bé gái tại thời điểm 5 tháng tuổi.

b) Trong ba thời điểm $t = 5$; $t = 10$; $t = 15$, thời điểm nào cân nặng của bé gái tăng nhanh nhất?

HOẠT ĐỘNG 3

Giáo viên giao nhiệm vụ cho các nhóm về nhà tìm hiểu thêm các ứng dụng khác của đạo hàm trong thực tiễn cuộc sống hoặc trong các ngành khoa học khác và trình bày trước lớp vào buổi học tiếp theo.

ÔN TẬP CHƯƠNG 7

BÀI TẬP TỰ LUẬN

7.13. Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa:

a) $y = -x^2$ tại $x_0 = 2$;

b) $y = \dfrac{1}{x+2}$ tại $x_0 = -3$.

7.14. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3^x + \log_3 x$;

b) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x+2}$;

c) $y = (3x^2 - x)^5$;

d) $y = e^{\sqrt{x^2+2}}$.

7.15. Chứng minh rằng $[\ln(-x)]' = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x < 0$.

7.16. Cho đường cong (C): $y = \dfrac{x-3}{x+1}$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; -1)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

7.17. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2\sin 3x$;

b) $y = xe^x$.

7.18. Một vật dao động điều hoà có phương trình $x = 4\cos \pi t$ (x tính bằng cm, t tính bằng giây).

a) Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 0{,}75$ giây.

b) Tìm thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

7.19. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 2$ (nếu có) là giới hạn nào dưới đây?

A. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

B. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) + f(2)}{x + 2}$.

C. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x + 2}$.

D. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) + f(2)}{x - 2}$.

7.20. Đạo hàm của hàm số $y = e^{\sin x}$ là

A. $y' = e^{\sin x}$.

B. $y' = e^{\cos x}$.

C. $y' = \sin x . e^{\sin x - 1}$.

D. $y' = e^{\sin x} . \cos x$.

7.21. Biết rằng hàm số $y = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x + 2}$ có đạo hàm là $y' = \dfrac{ax^2 + bx + c}{(x+2)^2}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 13.

B. 5.

C. 15.

D. –5.

7.22. Cho parabol (P): $y = x^2 + 2x + 3$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) tại điểm M và có hệ số góc bằng –2. Phương trình của Δ là

A. $y = -2x + 3$.

B. $y = 2x - 3$.

C. $y = 2x + 3$.

D. $y = -2x - 3$.

7.23. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{x}\cdot$ Khi đó $y''\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

A. –16.

B. –8.

C. 8.

D. 16.

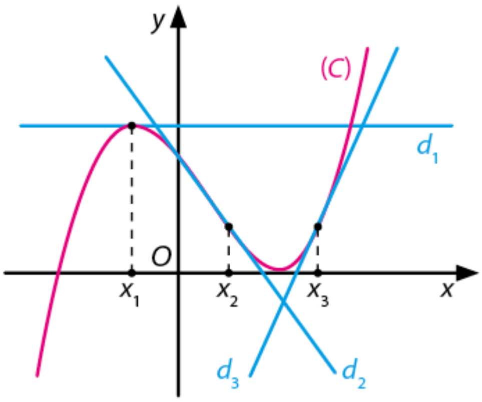
7.24. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong *Hình 7.11*. Biết d_1, d_2, d_3 là các tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 và x_3. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f'(x_3) < f'(x_2) < f'(x_1)$.

B. $f'(x_3) < f'(x_1) < f'(x_2)$.

C. $f'(x_2) < f'(x_1) < f'(x_3)$.

D. $f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3)$.



Hình 7.11

7.25. Nếu một phi hành gia đứng trên Mặt Trăng và ném một viên đá từ độ cao 1 mét với vận tốc đầu 7,9 m/s thì chiều cao của viên đá sau t giây được tính bởi công thức $h(t) = 1 + 7,9t - 0,8t^2$ (m) (nguồn: *https://www.physicsforums.com*). Tính vận tốc của viên đá đó khi chạm bề mặt Mặt Trăng.

A. –7,5 m/s.

B. 8,1 m/s.

C. 7,5 m/s.

D. –8,1 m/s.

Phần HÌNH HỌC

CHƯƠNG 8 Quan hệ vuông góc trong không gian

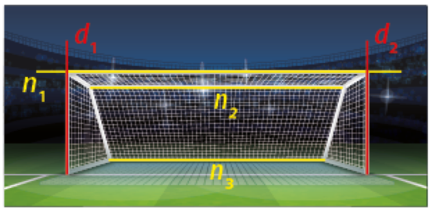
Đền Parthenon – toạ lạc trên đỉnh đồi của thành cổ Acropolis ở Athens (Hy Lạp), là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại – gồm nhiều cột thẳng đứng ở phía mặt trước và hành lang xung quanh. Người ta ngưỡng mộ kiến trúc của đền đến mức đã có nhiều toà nhà nổi tiếng ngày nay được thiết kế với một số chi tiết tương tự như mặt tiền của Nhà Trắng, Sở Giao dịch Chứng khoán New York, toà nhà Reichstag ở Berlin,... Phía sau những công trình kiến trúc đó là nhiều khái niệm hình học không gian sẽ được chúng ta nghiên cứu.

- Nhận biết được các khái niệm và tính được góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc nhị diện, góc phẳng nhị diện;
- Xác định được điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc;
- Xác định và tính được các khoảng cách trong không gian;
- Nhận biết được các công thức và tính được thể tích của khối lăng trụ, khối chóp và khối chóp cụt đều;
- Sử dụng được các kiến thức về quan hệ vuông góc trong không gian để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

BÀI 1

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

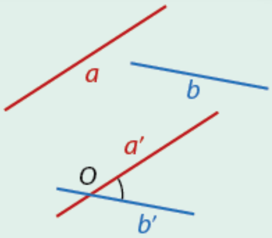
Ta biết, với khung thành bóng đá thì các cột dọc d_1, d_2 vuông góc với thanh xà ngang n_1. Làm thế nào để xác định được góc của các đường thẳng d_1, d_2 với các đường thẳng n_2, n_3?



I Góc giữa hai đường thẳng

HOẠT ĐỘNG 1

Trong không gian, cho hai đường thẳng a, b. Từ một điểm O lấy tuỳ ý, vẽ hai đường thẳng a', b' lần lượt song song (hoặc trùng) với a, b (*Hình 8.1*). Có nhận xét gì về góc giữa a' và b' khi O thay đổi?



Hình 8.1

Từ nhận xét ở Hoạt động 1, người ta định nghĩa góc giữa hai đường thẳng trong không gian như sau:

Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a, b, kí hiệu (a, b).

Nhận xét:

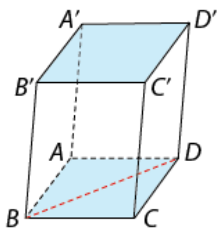
- Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b, ta có thể lấy điểm O trong Hoạt động 1 thuộc một trong hai đường thẳng đó.
- $0° \le (a, b) \le 90°$.
- Nếu a, b song song hoặc trùng nhau thì $(a, b) = 0°$.

VÍ DỤ 1

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $A'B'$ và BC; b) $A'D'$ và BD; c) $B'C'$ và AD.

Giải



Hình 8.2

a) Ta có $A'B' \parallel AB$, suy ra $(A'B', BC) = (AB, BC)$. Mà $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{ABC} = 90°$. Vậy $(A'B', BC) = 90°$.

b) Ta có $A'D' \parallel AD$, suy ra $(A'D', BD) = (AD, BD)$. Mà $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{ADB} = 45°$. Vậy $(A'D', BD) = 45°$.

c) Ta có $B'C' \parallel BC$ và $BC \parallel AD$ nên $B'C' \parallel AD$. Vậy $(B'C', AD) = 0°$.

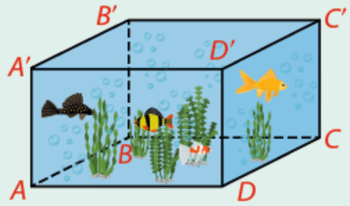
LUYỆN TẬP 1

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, biết tam giác ABC vuông cân tại A. Tính các góc $(A'C', BC)$, $(A'B', AC)$, $(A'A, B'B)$.

II Hai đường thẳng vuông góc

HOẠT ĐỘNG 2

Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật (*Hình 8.3*). Xem mỗi cạnh của bể nuôi cá là hình ảnh thể hiện một đường thẳng. Hãy chỉ ra những đường thẳng tạo với AA' một góc $90°$. Trong mỗi trường hợp, hãy cho biết vị trí tương đối của AA' và đường thẳng đã chỉ ra.



Hình 8.3

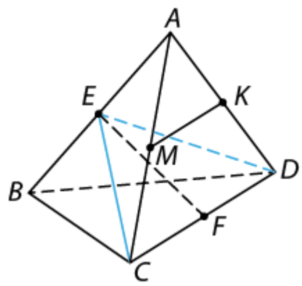
Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

Lưu ý:

- Khi hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau thì ta kí hiệu $a \perp b$.
- Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau thì hoặc cắt nhau, hoặc chéo nhau.

VÍ DỤ 2

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi E, F, M, K lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC và AD. Chứng minh rằng $EF \perp MK$.



Hình 8.4

Giải

Ta có M và K lần lượt là trung điểm của AC và AD, do đó $MK \parallel CD$.

Suy ra, góc giữa EF và MK bằng góc giữa EF và CD.

Do $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a nên ΔABC và ΔABD là các tam giác đều cạnh a.

CE và DE là đường trung tuyến đồng thời là đường cao của các tam giác đều cạnh a. Ta tính được $CE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Vậy ΔCED cân tại E.

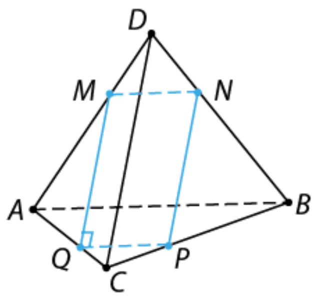
Do F là trung điểm cạnh đáy CD của tam giác cân CED nên $EF \perp CD$.

Suy ra $(EF, MK) = (EF, CD) = 90°$.

Vậy $EF \perp MK$.

LUYỆN TẬP 2

Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AD. Mặt phẳng (α) đi qua M, song song với AB và CD. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh BD, CB, AC lần lượt tại N, P, Q (*Hình 8.5*). Biết $MNPQ$ là một hình chữ nhật. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.



Hình 8.5

BÀI TẬP

8.1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\cos(AB, DM)$.

8.2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng $AC \perp B'D'$, $AB' \perp CD'$ và $AD' \perp CB'$.

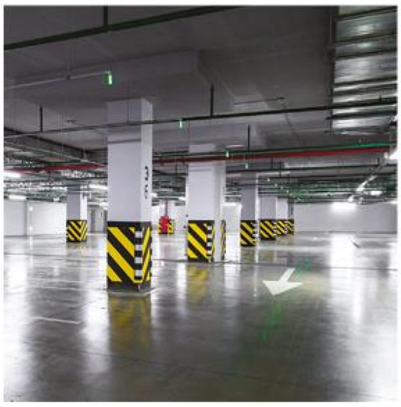
8.3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Chứng minh $MN \perp SC$.

8.4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD, tính MN.

BÀI 2

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Trong cuộc sống, ta vẫn nói "dây dọi vuông góc với mặt đất", "cột nhà vuông góc với nền nhà", hay "chân bàn vuông góc với mặt bàn",... Ta xem mặt đất, nền nhà, mặt bàn là hình ảnh của mặt phẳng và dây dọi, cột nhà, chân bàn là hình ảnh của các đường thẳng.
Như vậy, ta có hình ảnh "đường thẳng vuông góc với mặt phẳng".



Hình ảnh dây dọi của thợ xây và nền nhà

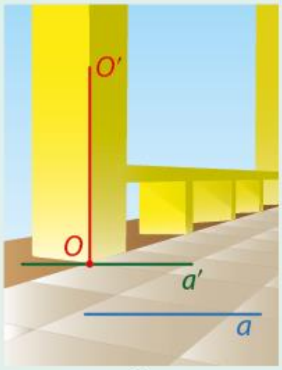
I Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

HOẠT ĐỘNG 1

Quan sát hình ảnh cây cột và nền nhà (*Hình 8.6*). Xem nền nhà là hình ảnh của mặt phẳng (α). Ta có cạnh OO' của cây cột tượng trưng cho một đường thẳng với O tượng trưng cho một điểm thuộc (α).

a) Vẽ một đường thẳng a nằm trong (α) và a không qua O. Vẽ đường thẳng a' qua O và song song với a. Dùng ê ke kiểm tra OO' có vuông góc với a' hay không? Từ đó hãy tính góc giữa OO' và a.

b) Gọi d là đường thẳng bất kì nằm trong (α). Hỏi OO' có vuông góc với d không? Vì sao?



Hình 8.6

Từ Hoạt động 1, ta có thể thấy rằng đường thẳng OO' vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α).

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α), kí hiệu $d \perp (\alpha)$.

ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG

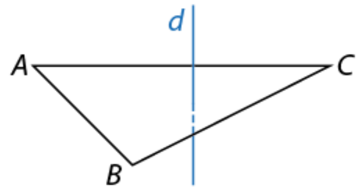
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

VÍ DỤ 1

Trong không gian, cho tam giác ABC và đường thẳng d vuông góc với AB và AC. Chứng minh d vuông góc với BC.

Giải

Theo giả thiết: $d \perp AB$; $d \perp AC$. Hai đường thẳng AB và AC cắt nhau, tạo nên mặt phẳng (ABC) (*Hình 8.7*). Áp dụng định lí trên, ta có $d \perp (ABC)$. Mà $BC \subset (ABC)$, nên $d \perp BC$.



Hình 8.7

Nhận xét:

Theo Ví dụ 1, một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

LUYỆN TẬP 1

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB).

b) Biết AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh AH vuông góc với SC.

II Tính chất của quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

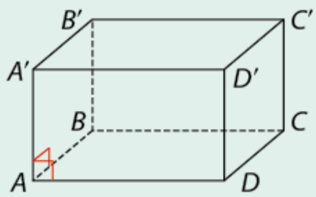
1. Sự tồn tại của các đường thẳng và mặt phẳng vuông góc với nhau

HOẠT ĐỘNG 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp AB$ và $A'A \perp AD$ (*Hình 8.8*).

a) Mặt phẳng $(ABCD)$ có vuông góc với $A'A$ không? Vì sao?

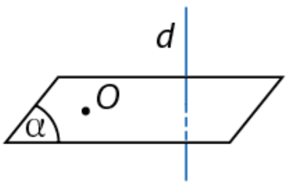
b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $A'A$. Hãy tìm giao tuyến của (α) với các mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'D'D)$. Từ đó tìm mối quan hệ giữa (α) và mặt phẳng $(ABCD)$.



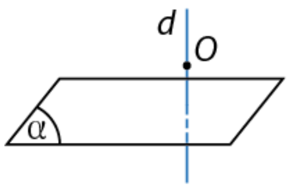
Hình 8.8

Ta có các tính chất sau:

- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



Hình 8.9

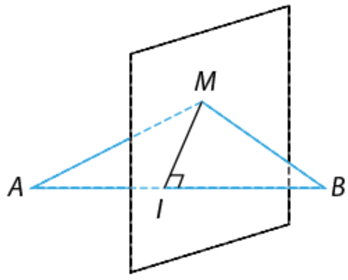


Hình 8.10

VÍ DỤ 2

Cho đoạn thẳng AB, mặt phẳng (α) qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB. Chứng minh M là một điểm thuộc (α) khi và chỉ khi $MA = MB$.

Giải



Hình 8.11

- Ta chứng minh $M \in (\alpha)$ thì $MA = MB$. Thật vậy, với $M \in (\alpha)$:
  – Nếu $M \equiv I$ thì $MA = MB$ (do I là trung điểm của AB);
  – Nếu M khác I thì $MI \perp AB$ (do $AB \perp (\alpha)$). Vậy MI là đường trung trực của đoạn AB nên $MA = MB$.
- Ta chứng minh $MA = MB$ thì $M \in (\alpha)$. Thật vậy, $MA = MB$ suy ra M thuộc đường trung trực của đoạn AB. Vậy có hai trường hợp:
  – $M \equiv I$ nên $M \in (\alpha)$;
  – Hoặc $MI \perp AB$, MI thuộc mặt phẳng qua I và vuông góc với AB. Vậy $MI \subset (\alpha)$ nên $M \in (\alpha)$.

Lưu ý:

- Mặt phẳng qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.
- Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng này.

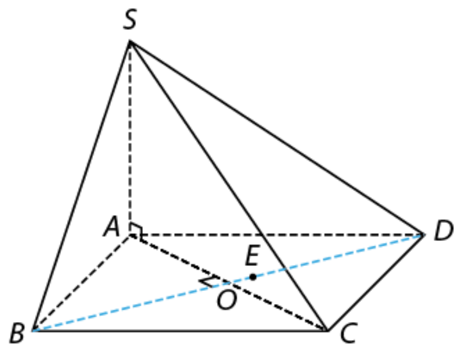
VÍ DỤ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông có O là giao điểm hai đường chéo.

a) Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD.

b) Gọi E là một điểm trong không gian sao cho $DE \perp (SAC)$. Chứng minh B, D, E thẳng hàng.

c) Giả sử (α) là mặt phẳng qua S và vuông góc với BD. Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$.



Hình 8.12

Giải

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$ (*Hình 8.12*).
Ta lại có: $BD \perp AC$ (do $ABCD$ là hình vuông). Suy ra $BD \perp (SAC)$.
(SAC) cắt BD tại trung điểm O của BD nên (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

b) Ta có: BD và DE cùng vuông góc với (SAC).
Do qua D có duy nhất một đường thẳng vuông góc với (SAC) nên các đường thẳng BD và DE phải trùng nhau. Điều đó có nghĩa là B, D, E thẳng hàng.

c) Ta đã chứng minh được $BD \perp (SAC)$. Mặt khác, chỉ có một mặt phẳng qua S và vuông góc với BD, đó là mặt phẳng (SAC). Vậy mặt phẳng (α) chính là (SAC).
Suy ra giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là AC.

LUYỆN TẬP 2

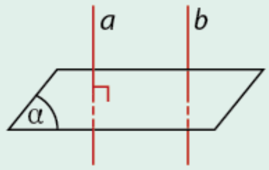
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với đáy. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SC, SD. Chứng minh $SC \perp (AB'D')$ và AB', AC', AD' cùng nằm trong một mặt phẳng.

2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Vì sao người thợ xây có thể dùng dây dọi để kiểm tra xem các cột nhà có song song với nhau hay không?

HOẠT ĐỘNG 3

Cho hai đường thẳng a, b song song với nhau và mặt phẳng (α) vuông góc với a (*Hình 8.13*). Hỏi (α) có vuông góc với b không? Vì sao?



Hình 8.13

Từ Hoạt động 3, ta suy ra: Nếu một mặt phẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia. Đây là một tính chất nói về quan hệ giữa tính song song và tính vuông góc của các đường thẳng, mặt phẳng. Ta còn có một số kết quả sau:

- Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

VÍ DỤ 4

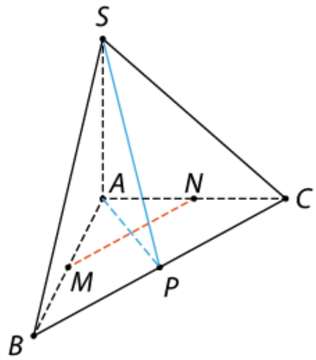
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Chứng minh MN và BC cùng vuông góc với mặt phẳng (SAP).

Giải

ΔABC cân tại A, P là trung điểm của BC, do đó $BC \perp AP$.

$SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Suy ra $BC \perp (SAP)$.

Mà $MN \parallel BC$ (đường trung bình của tam giác BAC) nên hai đường thẳng BC, MN cùng vuông góc với mặt phẳng (SAP).

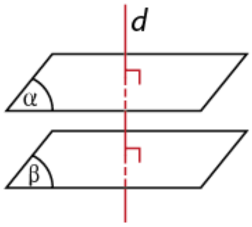


Hình 8.14

LUYỆN TẬP 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh $HK \perp (SAC)$.

- Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Hình 8.15

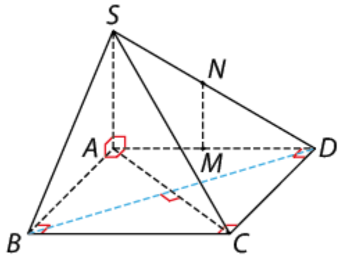
VÍ DỤ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi N, M lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, AD. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với AC. Chứng minh BD vuông góc mặt phẳng (α).

Giải

Ta có $MN \parallel SA$ (đường trung bình trong tam giác SAD) $\Rightarrow (\alpha) \parallel SA$, mà $(\alpha) \parallel AC$ nên $(\alpha) \parallel (SAC)$.

Ta có $BD \perp SA$ ($SA \perp (ABCD)$) và $BD \perp AC$ (hai đường chéo hình vuông) nên $BD \perp (SAC)$. Vậy $BD \perp (\alpha)$.

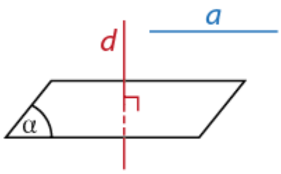


Hình 8.16

LUYỆN TẬP 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, O là giao điểm của AC và BD, $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và BC. Mặt phẳng (α) chứa IK và song song với SO. Chứng minh $(\alpha) \perp BD$.

- Đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.
- Một đường thẳng và một mặt phẳng không chứa đường thẳng đó, cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì song song với nhau.



Hình 8.17

VÍ DỤ 6

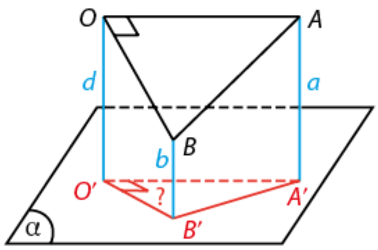
Cho mặt phẳng (α) và tam giác OAB vuông tại O có cạnh $OA \parallel (\alpha)$, cạnh OB không vuông góc với (α). Qua O, A, B lần lượt vẽ đường thẳng d, a, b vuông góc với (α) và cắt (α) lần lượt tại O', A', B'. Chứng minh tam giác $O'A'B'$ vuông tại O'.

Giải

Ta có: $OA \parallel (\alpha)$, $OO' \perp (\alpha)$ nên $OO' \perp OA$. Mà $OA \perp OB$ nên $OA \perp (OO'B'B)$ ($OO' \parallel BB'$ vì cùng vuông góc với (α)).

Do $OA \parallel (\alpha)$, $(OO'A'A) \cap (\alpha) = O'A'$ nên $O'A' \parallel OA$.

Vậy $O'A' \perp (OO'B'B)$ nên $O'A' \perp O'B'$ hay tam giác $O'A'B'$ vuông tại O'.



Hình 8.18

LUYỆN TẬP 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, B' là hình chiếu của A trên SB, O' là hình chiếu của O trên SC. Chứng minh $AB' \parallel (O'BD)$.

VẬN DỤNG

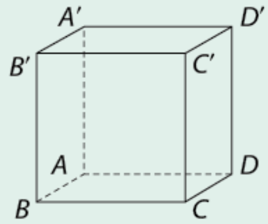
Hãy trả lời câu hỏi nêu ở đầu Mục II, Phần 2 trong bài này: Vì sao người thợ xây có thể dùng dây dọi để kiểm tra sự song song của các cột nhà với nhau?

III Phép chiếu vuông góc. Định lí ba đường vuông góc

1. Phép chiếu vuông góc

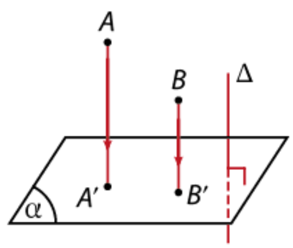
HOẠT ĐỘNG 4

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'A \perp (ABCD)$. Tìm hình chiếu của các điểm A', C', D' lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng BB'.



Hình 8.19

Nếu $\Delta \perp (\alpha)$ thì phép chiếu song song theo phương Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là **phép chiếu vuông góc** lên mặt phẳng (α).



Hình 8.20. A', B' là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (α)

Nhận xét:

- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α) còn được gọi đơn giản là **phép chiếu lên mặt phẳng (α)**. Nếu H' là hình chiếu vuông góc của H lên mặt phẳng (α) thì ta cũng nói H' là **hình chiếu** của H trên mặt phẳng (α).
- Phép chiếu vuông góc cũng có mọi tính chất của phép chiếu song song.

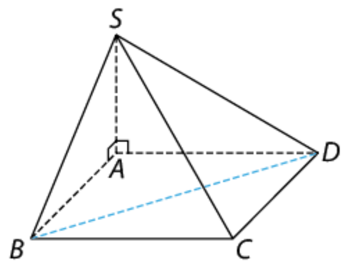
VÍ DỤ 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Xác định hình chiếu của:

a) Đường thẳng SA trên mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Cạnh SC trên mặt phẳng $(ABCD)$;

c) Tam giác SBD trên mặt phẳng $(ABCD)$.



Hình 8.21

Giải

a) Theo giả thiết, $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm A.

b) $C \in (ABCD)$ nên hình chiếu của C trên mặt phẳng $(ABCD)$ chính là C. Mặt khác, hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là điểm A. Suy ra, hình chiếu của cạnh SC trên $(ABCD)$ là AC.

c) Hình chiếu của B, D trên $(ABCD)$ lần lượt là chính B, D. Hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là A. Suy ra, hình chiếu của ΔSBD trên $(ABCD)$ là ΔABD.

LUYỆN TẬP 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Biết rằng hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AD. Xác định hình chiếu của:

a) Tam giác SBC trên mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Các cạnh SB và SC trên mặt phẳng (SAD).

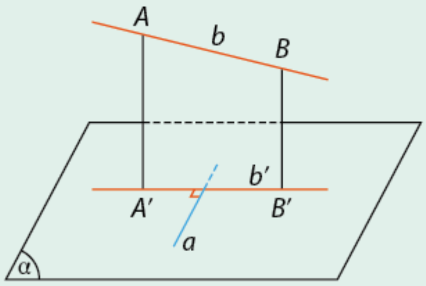
2. Định lí ba đường vuông góc

HOẠT ĐỘNG 5

Cho đường thẳng b không nằm trong mặt phẳng (α) và không vuông góc với (α). Gọi A, B là hai điểm phân biệt trên b và A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên (α). Gọi b' là đường thẳng đi qua A', B' thì b' là hình chiếu của b trên mặt phẳng (α). Xét a là một đường thẳng nằm trong (α).

a) Nếu $a \perp b'$ thì a có vuông góc với b không? Vì sao?

b) Nếu $a \perp b$ thì a có vuông góc với b' không? Vì sao?



Hình 8.22

Với Hoạt động 5, ta đã chứng minh được định lí sau, gọi là định lí ba đường vuông góc:

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không nằm trong (α), đồng thời không vuông góc với (α). Hình chiếu của b trên mặt phẳng (α) là đường thẳng b'. Khi đó, a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

VÍ DỤ 8

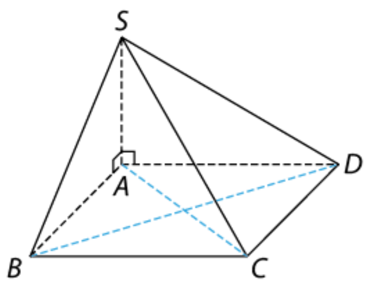
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thoi khi và chỉ khi BD vuông góc với SC.

Giải

Theo giả thiết, $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là A. Vì $C \in (ABCD)$ nên hình chiếu của C là chính nó. Vậy hình chiếu của cạnh SC là AC (*Hình 8.23*).

Từ đó suy ra:

- Nếu $ABCD$ là hình thoi thì $BD \perp AC$. Do đó, $BD \perp SC$;
- Ngược lại, nếu $BD \perp SC$ thì BD vuông góc với hình chiếu của SC, nghĩa là $BD \perp AC$. Khi đó, hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Suy ra $ABCD$ là hình thoi.



Hình 8.23

LUYỆN TẬP 7

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân đỉnh B và hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AC và SB vuông góc với nhau.

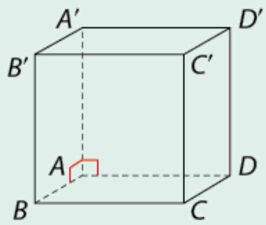
IV Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

HOẠT ĐỘNG 6

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$.

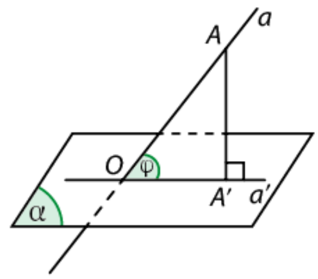
a) Tìm hình chiếu d của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định góc giữa $A'C$ và d.

b) Tìm hình chiếu a của $A'C'$ trên mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định góc giữa $A'C'$ và a.



Hình 8.24

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α).
Nếu a vuông góc với (α) thì **góc giữa a và (α)** bằng $90°$.
Nếu a không vuông góc với (α) thì **góc giữa a và (α)** là góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (α).



Hình 8.25

Lưu ý:
Gọi φ là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α), ta có:
- $0° \le \varphi \le 90°$;
- $a \,/\!/\, (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$ thì $\varphi = 0°$;
- $a \perp (\alpha) \Leftrightarrow \varphi = 90°$.

VÍ DỤ 9

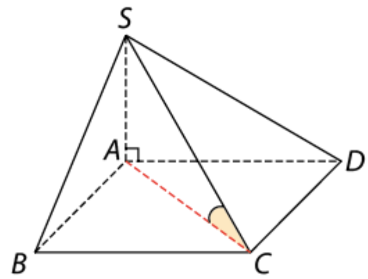
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = \sqrt{2}a$. Xác định và tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải

Ta có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A, nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Vậy góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC. Đó là $\widehat{SCA}$.

Ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = 1$. Suy ra $\widehat{SCA} = 45°$.

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA} = 45°$.



Hình 8.26

LUYỆN TẬP 8

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = \sqrt{3}a$. Xác định và tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB).

BÀI TẬP

8.5. Mỗi mệnh đề sau đây đúng hay sai? Vì sao?

a) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song hoặc trùng nhau.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

c) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

8.6. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α), trong đó $a \perp (\alpha)$. Mỗi mệnh đề sau đây đúng hay sai? Vì sao?

a) Nếu $b \,/\!/\, a$ thì $b \perp (\alpha)$.

b) Nếu $b \perp (\alpha)$ thì $b \,/\!/\, a$.

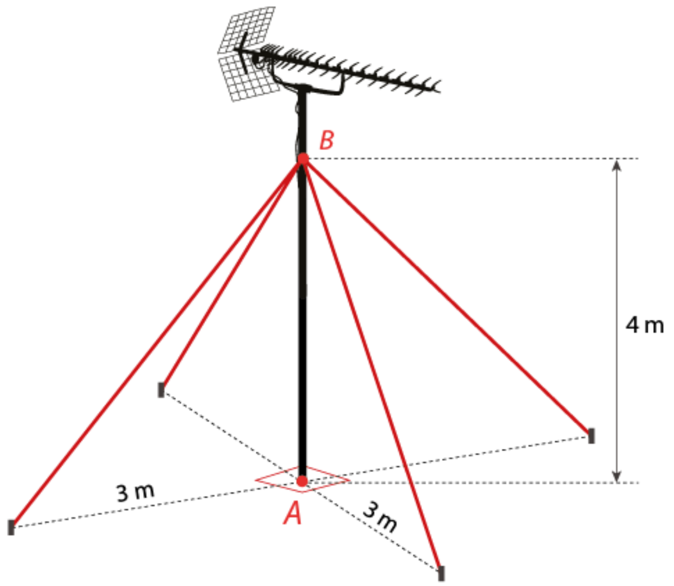
c) Nếu $b \,/\!/\, (\alpha)$ thì $b \perp a$.

8.7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy là hình vuông. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh $AM \perp (SBC)$ và $BD \perp SC$.

8.8. Cho tứ diện $ABCD$, biết ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

8.9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, O là giao điểm của AC và BD và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh $BC \perp SO$ và $SC \perp BD$.

8.10. Một cây ăng-ten thẳng đứng với mặt đất và được buộc giằng bởi 4 dây cáp từ một điểm B cách chân A của ăng-ten 4 m. Khoảng cách từ A đến các chân buộc dây giằng bằng 3 m (*Hình 8.27*). Tính tổng chiều dài dây cáp dùng để giằng cột ăng-ten (không tính các mối nối).



Hình 8.27

8.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC và SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

8.12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính số đo của góc giữa SC và (SAB).

BÀI 3

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Trong nhiều kiến trúc hiện đại hoặc cổ điển, "góc" vừa có ý nghĩa mĩ thuật vừa đảm bảo tính bền vững của công trình. Bài học này giới thiệu một số khái niệm cơ bản về góc giữa các mặt phẳng.

I Góc nhị diện

HOẠT ĐỘNG 1

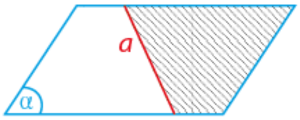
Quan sát *Hình 8.28*, trả lời các câu hỏi:

a) Bốn cánh cửa kính 1, 2, 3, 4 (*Hình 8.28*) chia không gian thành bao nhiêu phần?

b) Bạn An (nữ, áo vàng) và bạn Bình (nam, áo xanh) ở phần không gian nào?

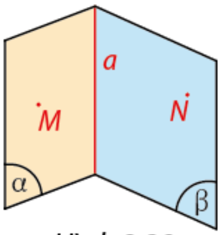
Hình 8.28

Ta biết mỗi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) chia mặt phẳng đó thành hai phần, mỗi phần cùng với đường thẳng a gọi là một nửa mặt phẳng. Đường thẳng a gọi là bờ của các nửa mặt phẳng đó.



Hình 8.29

Hình tạo bởi hai nửa mặt phẳng (α) và (β) có chung bờ a gọi là góc nhị diện (hay nhị diện), kí hiệu là $[\alpha, a, \beta]$ hay $[\alpha, \beta]$.
Mỗi nửa mặt phẳng (α) và (β) gọi là một mặt của nhị diện.
Đường thẳng a gọi là cạnh của nhị diện.

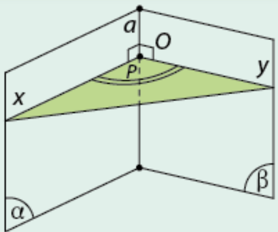


Hình 8.30

Lưu ý:
Nếu trên (α) ta lấy điểm M, trên (β) ta lấy điểm N (M và N đều không nằm trên a) thì nhị diện đó còn được kí hiệu là $[M, a, N]$.

HOẠT ĐỘNG 2

Cho nhị diện $[\alpha, a, \beta]$ và điểm O thuộc a. Vẽ mặt phẳng (P) qua O và vuông góc a. Gọi giao tuyến của (P) với các nửa mặt phẳng (α) và (β) lần lượt là các tia Ox, Oy. Hỏi số đo góc xOy thay đổi như thế nào khi điểm O thay đổi trên a?



Hình 8.31

Trong Hoạt động 2, góc xOy xác định như trên được gọi là góc phẳng của nhị diện $[\alpha, a, \beta]$.

Góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện còn hai cạnh nằm trong hai mặt và vuông góc với cạnh của nhị diện được gọi là góc phẳng nhị diện.
Số đo của góc phẳng nhị diện được gọi là số đo của góc nhị diện.

Lưu ý:

a) Nếu φ là số đo của góc nhị diện thì $0° \le \varphi \le 180°$.

b) Nếu số đo của góc nhị diện bằng $90°$ thì hai mặt của nhị diện đó vuông góc nhau, ta có nhị diện vuông.

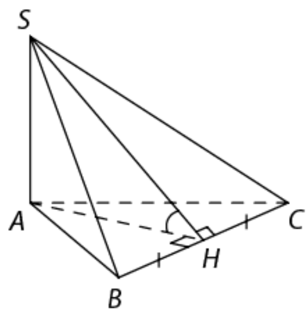
c) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn nhị diện, nếu một nhị diện vuông thì ba nhị diện còn lại cũng vuông.

VÍ DỤ 1

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = \frac{a}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với BC. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Giải

Gọi H là trung điểm BC. Ta có $BC \perp AH$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAH)$.
Vậy mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (SAH).
Ta có giao tuyến của mặt phẳng (SAH) với các mặt phẳng (SBC) và (ABC) lần lượt là SH và AH.
Vậy góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là $\widehat{SHA}$.
Ta có $SA \perp AH$ (do $SA \perp (ABC)$) nên tam giác SAH vuông tại A.
Suy ra $\tan\widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SHA} = 30°$. Vậy số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng $30°$.



Hình 8.32

LUYỆN TẬP 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Tính số đo của các góc nhị diện $[S, BD, A]$, $[S, BD, C]$.

II Hai mặt phẳng vuông góc

HOẠT ĐỘNG 3

Quan sát khối rubik hình lập phương (*Hình 8.33*).

a) Hãy tính số đo của các góc nhị diện tạo bởi mặt đỏ và mặt xanh; mặt trắng và mặt xanh; mặt trắng và mặt đỏ.

b) Có hay không một đường thẳng a nằm trong mặt xanh và vuông góc với mặt đỏ?

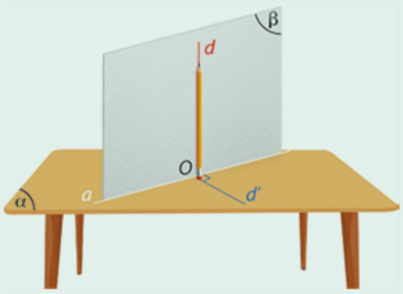

Hình 8.33

Hai mặt kề nhau của khối rubik nói trên cho ta hình ảnh của hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tổng quát, khái niệm hai mặt phẳng vuông góc được định nghĩa như sau:

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là vuông góc với nhau nếu một trong bốn nhị diện được tạo bởi (α) và (β) là nhị diện vuông, kí hiệu $(\alpha) \perp (\beta)$.

HOẠT ĐỘNG 4

Đặt cây bút chì d vuông góc với mặt bàn (α) và đặt một tấm bìa cứng hình chữ nhật (β) sao cho thân bút chì nằm trong tấm bìa (*Hình 8.34*). Ta có hình ảnh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) chứa d. Gọi a là giao tuyến của (α) và (β). Qua giao điểm O của a và d, vẽ một đường thẳng d' nằm trong (α) và vuông góc với a. Hai mặt phẳng (α) và (β) có vuông góc nhau không? Vì sao?



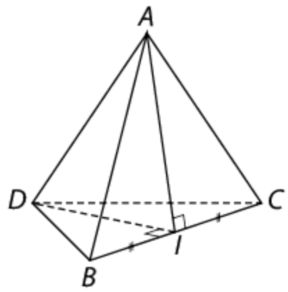
Hình 8.34

ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

VÍ DỤ 2

Cho tứ diện $ABCD$, biết ABC và DBC là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $(DBC) \perp (ADI)$.



Hình 8.35

Giải

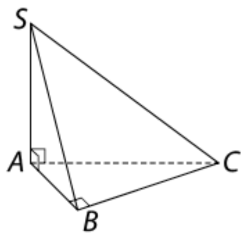
Ta có: $BC \perp AI$ (do tam giác ABC cân tại A) và $BC \perp DI$ (do tam giác DBC cân tại D).

Mà hai đường thẳng AI và DI cắt nhau cùng thuộc (ADI) nên $BC \perp (ADI)$.

Mặt phẳng (BDC) chứa BC, nên $(DBC) \perp (ADI)$.

LUYỆN TẬP 2

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Tìm các cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.



Hình 8.36

HOẠT ĐỘNG 5

Trong phòng khách của một căn nhà, bức tường và nền nhà vuông góc nhau. Hoạ sĩ vẽ một hàng cây trên bức tường với thân cây vuông góc với gờ của mảng gỗ ép sát bức tường (*Hình 8.37*). Các cây này có vuông góc với nền nhà không? Vì sao?


Hình 8.37

Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau, mỗi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến đều vuông góc với mặt phẳng kia.

Lưu ý:

Nếu hai mặt phẳng (α), (β) vuông góc với nhau và A là một điểm thuộc mặt phẳng (α), đường thẳng a qua A và vuông góc với (β) thì a nằm trong mặt phẳng (α).

VÍ DỤ 3

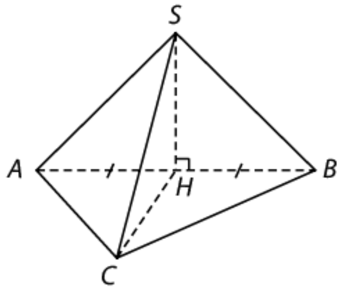
Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABC; H là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.

Giải

Theo giả thiết, ta có: (SAB) và (ABC) vuông góc nhau và có giao tuyến là AB.

Tam giác SAB vuông cân tại S, H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

SH nằm trong mặt phẳng (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB nên $SH \perp (ABC)$.



Hình 8.38

LUYỆN TẬP 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Chứng minh tam giác SCD cân tại S.

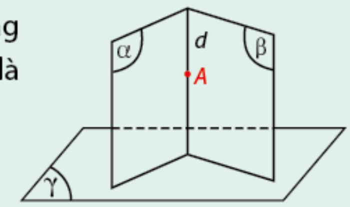
HOẠT ĐỘNG 6

Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau theo giao tuyến d và cùng vuông góc với mặt phẳng (γ). A là một điểm chung của (α) và (β). Gọi a là đường thẳng qua A và vuông góc (γ).

a) a có thuộc mặt phẳng (α) không? Vì sao?

b) a có thuộc mặt phẳng (β) không? Vì sao?

c) Từ đó, có kết luận gì về quan hệ giữa d và (γ)?



Hình 8.39

Từ kết quả Hoạt động 6, ta có định lí:

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc mặt phẳng thứ ba.

VÍ DỤ 4

Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Chứng minh SA vuông góc với BC.

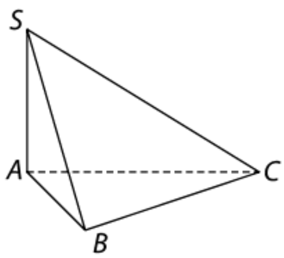
Giải

Theo giả thiết, ta có $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAC) \perp (ABC)$.

Mà $(SAB) \cap (SAC) = SA$.

Áp dụng định lí trên, suy ra $SA \perp (ABC)$.

Do đó $SA \perp BC$.



Hình 8.40

LUYỆN TẬP 4

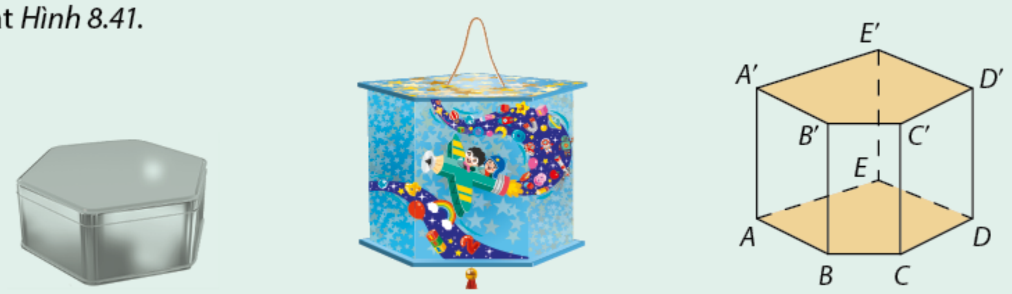
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

III Hình lăng trụ đứng. Hình lăng trụ đều

Trong chương Quan hệ song song, ta đã xem xét các hình lăng trụ. Ở đây, ta sẽ xét một loại hình lăng trụ đặc biệt, được gọi là hình lăng trụ đứng.

HOẠT ĐỘNG 7

Quan sát *Hình 8.41*.



(1) (2) (3)

Hình 8.41

Xét hình lăng trụ (3). Biết rằng lăng trụ này có hai mặt bên chung cạnh AA' là hai hình chữ nhật.

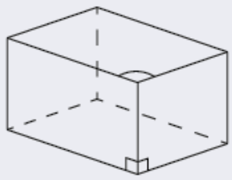
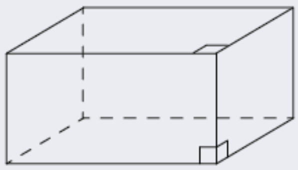
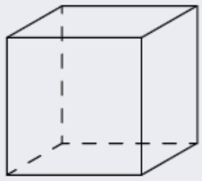
a) Cạnh AA' có vuông góc với mặt đáy không? Vì sao?

b) Các mặt bên còn lại là những hình gì? Vì sao?

- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều.

Ghi chú: Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,… được gọi là lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác, lăng trụ đứng ngũ giác,…

Bảng dưới đây giới thiệu một số loại hình lăng trụ đứng đặc biệt:

Hình hộp đứng	Hình hộp chữ nhật	Hình lập phương
Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.	Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.	Là hình hộp chữ nhật mà tất cả các cạnh đều bằng nhau.
		

VÍ DỤ 5

Cho một hình lăng trụ đứng. Trả lời và giải thích cho các câu hỏi sau:

a) Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình gì?

b) Các mặt bên của hình lăng trụ đứng có vuông góc với mặt đáy không?

Giải

a) Trong hình lăng trụ đứng, các cạnh bên vuông góc với đáy. Do đó, chúng vuông góc với các cạnh của đa giác đáy. Suy ra các mặt bên đều là hình chữ nhật.

b) Mỗi mặt bên của hình lăng trụ đứng đều chứa một đường thẳng vuông góc với đáy (là cạnh bên của lăng trụ đứng) nên mặt bên vuông góc với đáy.

Một số tính chất cơ bản

- Trong hình lăng trụ đứng, các mặt bên là các hình chữ nhật và chúng vuông góc với mặt đáy.
- Trong hình lăng trụ đều, các mặt bên là các hình chữ nhật có kích thước bằng nhau.
- Trong hình hộp đứng, bốn mặt bên là các hình chữ nhật.
- Trong hình hộp chữ nhật, hai mặt bên kề nhau vuông góc nhau; sáu mặt là sáu hình chữ nhật. Ngược lại, nếu sáu mặt của hình hộp là các hình chữ nhật thì hình hộp đó là hình hộp chữ nhật.
- Trong hình lập phương, sáu mặt là các hình vuông.

LUYỆN TẬP 5

Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AA' = 6a$, $AD = 3a$, $AB = 2a$.

IV Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

1. Hình chóp đều


Toà nhà bằng kính trước bảo tàng Louvre (Paris – Pháp)


Kim tự pháp Giza (sa mạc Al Giza, Ai Cập)


Rubik tam giác (Rubik Pyraminx)

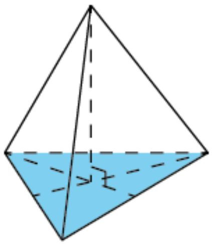
HOẠT ĐỘNG 8

- Trong mặt phẳng (α), vẽ một hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD.
- Qua O, vẽ đường thẳng a vuông góc với (α).
- Trên đường thẳng a lấy điểm S khác O. So sánh độ dài các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD và rút ra nhận xét về hình dạng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$.

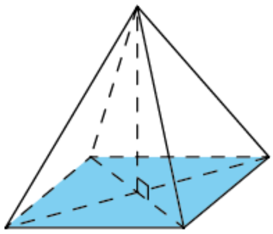
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau.

Lưu ý:

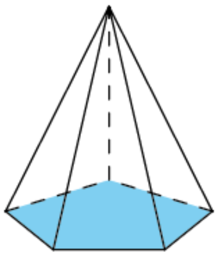
- Các mặt bên của hình chóp đều là những tam giác cân bằng nhau.
- Đường cao của hình chóp đều đi qua đỉnh và tâm của đáy.
- Độ dài đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy là chiều cao của hình chóp đều.
- Tên của hình chóp đều được gọi theo tên của đa giác đáy. Ví dụ: hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều, hình chóp ngũ giác đều, hình chóp lục giác đều,...



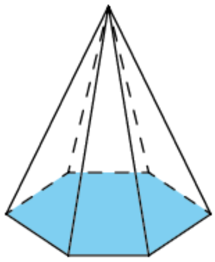
Hình chóp tam giác đều



Hình chóp tứ giác đều



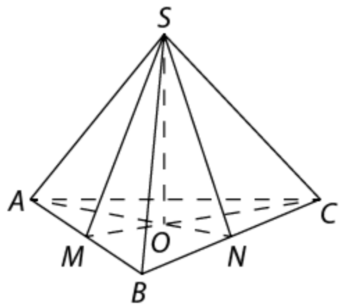
Hình chóp ngũ giác đều



Hình chóp lục giác đều

VÍ DỤ 6

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh $SO \perp (ABC)$.



Hình 8.42

Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Do O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên O là giao điểm của AN và CM.

Ta có:

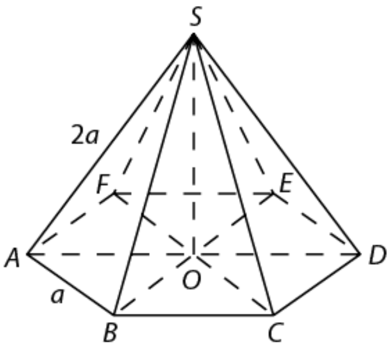
Tam giác SBC cân tại S, suy ra $BC \perp SN$. Mặt khác, tam giác ABC đều, suy ra $BC \perp AN$. Vậy $BC \perp (SAN)$. Mà (SAN) chứa SO nên $BC \perp SO$ (1).

Tam giác SBA cân tại S, suy ra $AB \perp SM$. Mặt khác, tam giác ABC đều, suy ra $AB \perp CM$. Vậy $AB \perp (SCM)$. Mà (SCM) chứa SO nên $AB \perp SO$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABC)$.

LUYỆN TẬP 6

Cho hình chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có cạnh bên bằng $2a$ và cạnh đáy bằng a (*Hình 8.43*). Gọi O là tâm của đáy. Tính SO.



Hình 8.43

2. Hình chóp cụt đều

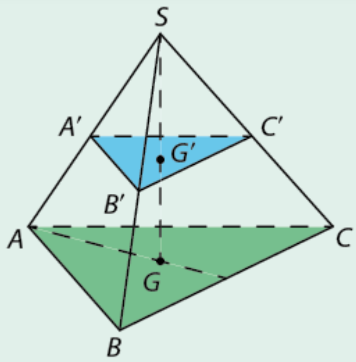
HOẠT ĐỘNG 9

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC (*Hình 8.44*).

a) Mặt phẳng $(A'B'C')$ có song song với mặt phẳng (ABC) không? Vì sao?

b) Tam giác $A'B'C'$ có phải là tam giác đều không? Vì sao?

c) Các tứ giác $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ có hình dạng đặc biệt gì?



Hình 8.44

Phần hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy, cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

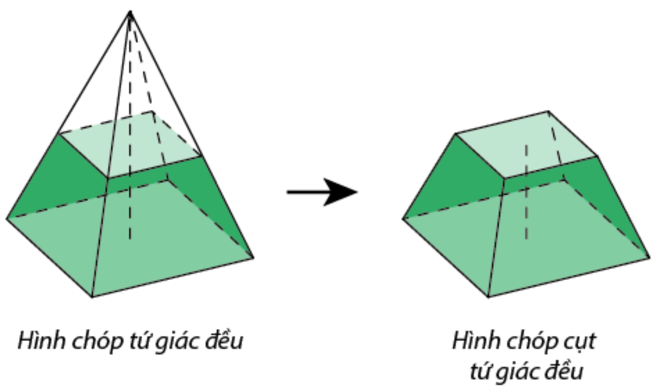
Đáy của hình chóp đều gọi là đáy lớn của hình chóp cụt đều, còn đa giác tạo bởi mặt phẳng với các cạnh của hình chóp gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt đều đó.

Các mặt còn lại gọi là mặt bên của hình chóp cụt đều đó.

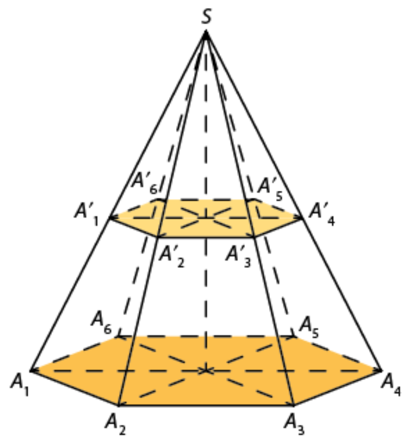
Cạnh chung của hai mặt kề nhau gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều.

Lưu ý:

- Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều.
- Đường thẳng nối tâm của hai đáy là đường cao của hình chóp cụt đều.
- Độ dài đoạn thẳng nối tâm của hai đáy là chiều cao của hình chóp cụt đều.
- Các mặt bên của hình chóp cụt đều là các hình thang cân.
- Tên của hình chóp cụt đều được gọi theo hình dạng đáy của nó. Ví dụ: hình chóp cụt tứ giác đều, hình chóp cụt lục giác đều,...



Hình 8.45. Hình chóp cụt tứ giác đều



Hình 8.46. Hình chóp cụt lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6.A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5A'_6$

VÍ DỤ 7

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng $2a$, mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) và cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại các trung điểm A', B', C' của chúng. Tính chiều cao của hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$.

Giải

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác đều ABC và $A'B'C'$.

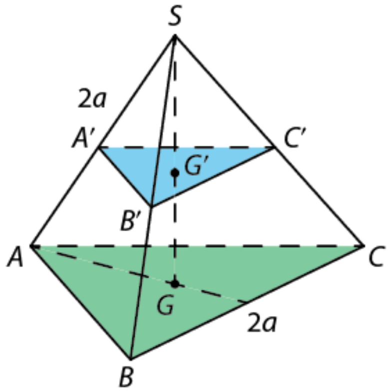
Ta có $\frac{SG'}{SG} = \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{2}$. Suy ra G' là trung điểm của SG.

Chiều cao của hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ là GG'.

Tam giác ABC đều cạnh $2a$, nên $AG = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Ta có $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Vậy chiều cao của hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ là $G'G = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.



Hình 8.47

LUYỆN TẬP 7

Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy lớn bằng $3a$, cạnh đáy nhỏ bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Tính chiều cao của hình chóp cụt đều này.

BÀI TẬP

8.13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = \sqrt{3}a$, $SA \perp (ABCD)$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$.

8.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$. Biết số đo của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng 45°, tính chiều cao của hình chóp.

8.15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tìm các cặp mặt phẳng vuông góc nhau.

8.16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy. Chứng minh: $(SCD) \perp (SAD)$, $(SBC) \perp (SAB)$ và $(SBD) \perp (SAC)$.

8.17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh $(MBD) \perp (SAC)$.

8.18. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Chứng minh $(AB'C) \perp (B'BD)$.

8.19. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy lớn bằng $5\sqrt{2}a$, cạnh đáy nhỏ bằng $2\sqrt{2}a$ và chiều cao bằng $4a$. Tính độ dài cạnh bên của hình chóp cụt đều này.

8.20. Kim tự tháp Cheops của Ai Cập (còn gọi là kim tự tháp Khufu, được xây dựng vào khoảng 2 500 năm trước Công nguyên) có dạng là một hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy dài khoảng 230 m và chiều cao khoảng 147 m (*Hình 8.48*).


Hình 8.48

a) Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp này.

b) Tính số đo của các góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp.

(Nguồn: *https://www.congluan.vn/dai-kim-tu-thap-giza-van-ky-la-va-bi-an-voi-cac-nha-khoa-hoc-post203156.html*)

BÀI 4

KHOẢNG CÁCH

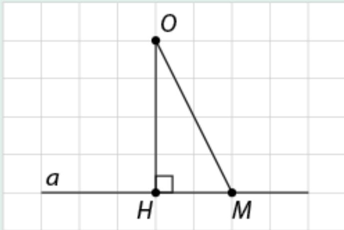
Khoảng cách đóng vai trò quan trọng trong thực tiễn, đặc biệt là trong đo đạc. Ở bài học này, chúng ta nghiên cứu các khái niệm cơ bản về khoảng cách.

I Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

HOẠT ĐỘNG 1

Cho đường thẳng *a* và một điểm *O* không thuộc *a*. *H* là hình chiếu của *O* trên đường thẳng *a* và *M* là một điểm bất kì thuộc *a* (*Hình 8.49*). Trong hai điểm *H* và *M*, điểm nào có khoảng cách đến *O* ngắn hơn? Vì sao?

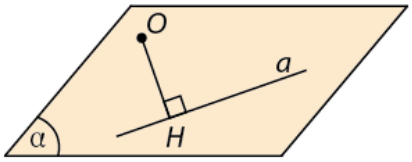


Hình 8.49

Cho điểm *O* không thuộc đường thẳng *a*. *H* là hình chiếu của *O* trên *a*. Độ dài *OH* được gọi là khoảng cách từ điểm *O* đến đường thẳng *a*, kí hiệu $d(O, a)$.

Lưu ý:

- $d(O, a)$ là nhỏ nhất so với khoảng cách từ *O* đến mọi điểm thuộc *a*.
- $d(O, a) = 0$ khi và chỉ khi *O* thuộc *a*.



Hình 8.50

VÍ DỤ 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh *a*. Tính khoảng cách từ điểm *B* đến đường chéo AC'.

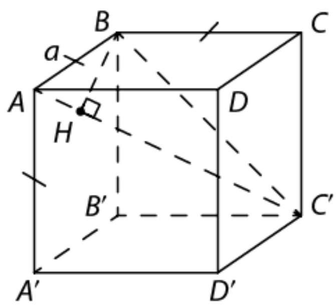
Giải

Khoảng cách từ *B* đến AC' là chiều cao *BH* của tam giác BAC'.

Ta có:

- $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương, nên $AB \perp (BB'C'C) \Rightarrow AB \perp BC'$; hay tam giác ABC' vuông tại *B*.
- $AB = a$, $BC' = \sqrt{2}a$ ($BB'C'C$ là hình vuông cạnh *a*), nên $AC' = \sqrt{3}a$ (đường chéo hình lập phương cạnh *a*).
- $BA.BC' = BH.AC' = 2S_{\Delta BAC'}$. Suy ra $BH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Vậy $d(B; AC') = BH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.



Hình 8.51

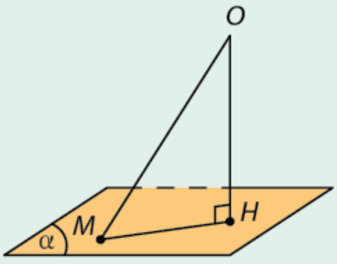
LUYỆN TẬP 1

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên bằng 2*a*. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Tính khoảng cách từ *G* đến đường thẳng $A'C'$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

HOẠT ĐỘNG 2

Cho mặt phẳng (α) và O là một điểm không thuộc (α). H là hình chiếu của O trên (α). Lấy tuỳ ý điểm $M \in (\alpha)$. Trong các điểm H và M, điểm nào có khoảng cách đến O ngắn hơn? Vì sao?



Hình 8.52

Cho điểm O không thuộc mặt phẳng (α). H là hình chiếu của O trên (α). Độ dài OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α), kí hiệu $d(O, (\alpha))$.

Lưu ý:

- $d(O, (\alpha))$ là khoảng cách nhỏ nhất so với khoảng cách từ điểm O đến mọi điểm thuộc (α).
- $d(O, (\alpha)) = 0$ khi và chỉ khi O thuộc (α).

VÍ DỤ 2

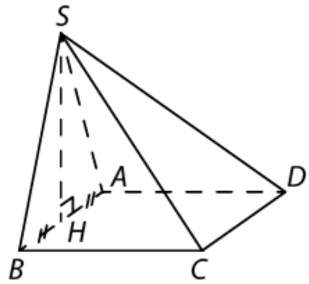
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải

Hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ vuông góc nhau theo giao tuyến AB.

Gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp AB$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$ tại H.

Vậy $d(S, (ABCD)) = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (chiều cao của tam giác đều cạnh a).



Hình 8.53

LUYỆN TẬP 2

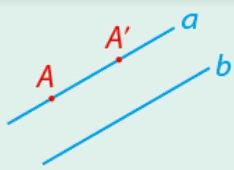
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$; tam giác ABC đều cạnh a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

II Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song, giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

HOẠT ĐỘNG 3

- Vẽ hai đường thẳng song song a và b.
- Trên a, lấy hai điểm phân biệt tuỳ ý A và A'.
- Hãy xác định $d(A, b)$ và $d(A', b)$ rồi so sánh hai khoảng cách này.



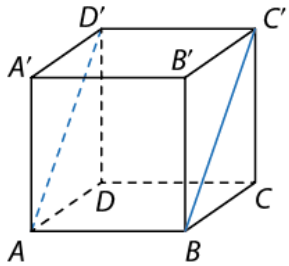
Hình 8.54

Theo Hoạt động 3, nếu $a \parallel b$ thì $d(A, b)$ không phụ thuộc vào vị trí của A trên a.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a, b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng a đến đường thẳng b, kí hiệu là $d(a, b)$.

VÍ DỤ 3

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và AD'.



Hình 8.55

Giải

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $ABC'D'$ là hình chữ nhật.

Do đó $BC' \parallel AD'$.

Vậy $d(BC', AD') = d(A, BC') = AB = a$.

LUYỆN TẬP 3

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng $(GA'C')$ cắt AB, BC lần lượt tại M, N. Tính diện tích tứ giác $A'C'NM$.

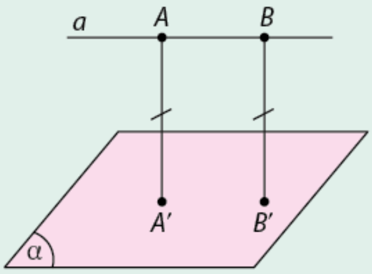
2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

HOẠT ĐỘNG 4

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Trên a, lấy hai điểm tuỳ ý A, B. Gọi A', B' lần lượt là các hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (α) (*Hình 8.56*).

a) Hỏi $ABB'A'$ là hình gì? Vì sao?

b) Hãy xác định các khoảng cách $d(A, (\alpha))$ và $d(B, (\alpha))$. So sánh các khoảng cách đó.



Hình 8.56

Từ Hoạt động 4, ta thấy nếu $a \parallel (\alpha)$ thì $d(A, (\alpha))$ không phụ thuộc vào vị trí của A khi A thay đổi trên a.

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm A bất kì thuộc a đến (α). Khoảng cách giữa a và (α) được kí hiệu là $d(a, (\alpha))$.

VÍ DỤ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD).

Giải

$AB \parallel CD, CD \subset (SCD)$ nên $AB \parallel (SCD)$.

Vậy $d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

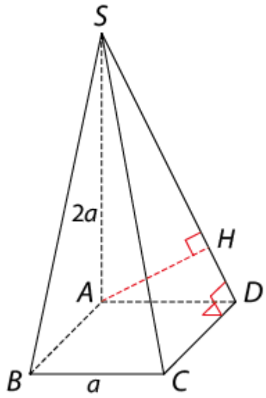
Ta có $CD \perp SA$ và $CD \perp AD$ nên $CD \perp (SAD)$. Vậy $(SAD) \perp (SCD)$.

Mà $(SAD) \cap (SCD) = SD$ nên gọi H là hình chiếu của A trên SD thì $AH \perp (SCD)$ và $d(A, (SCD)) = AH$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $SA = 2a$, $AD = a$ nên $SD^2 = AD^2 + SA^2 = 5a^2$ hay $SD = \sqrt{5}\,a$.

Suy ra $AH.SD = SA.AD \Rightarrow AH = \dfrac{SA.AD}{SD} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Vậy $d(AB, (SCD)) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$.



Hình 8.57

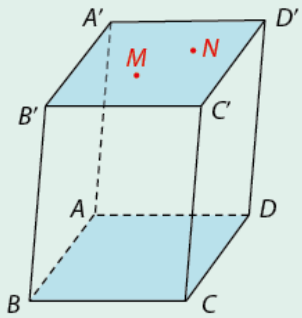
LUYỆN TẬP 4

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Các cạnh bên của hình lăng trụ tạo với đáy một góc 60° và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính $d(B'C', (ABC))$.

3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

HOẠT ĐỘNG 5

Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N là 2 điểm bất kì thuộc đáy $(A'B'C'D')$ và M', N' lần lượt là hình chiếu của M, N trên $(ABCD)$. Hỏi $MNN'M'$ là hình gì? Vì sao? Có nhận xét gì về $d(M, (ABCD))$ và $d(N, (ABCD))$?



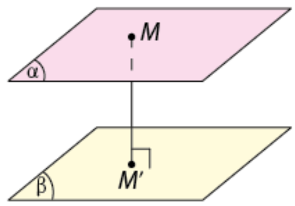
Hình 8.58

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) được kí hiệu là $d((\alpha), (\beta))$.

Lưu ý:

$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$ với $M \in (\alpha)$ và $d((\alpha), (\beta)) = d(M', (\alpha))$, với $M' \in (\beta)$.



Hình 8.59

VÍ DỤ 5

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, A' cách đều A, B, C và $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ này.

Giải

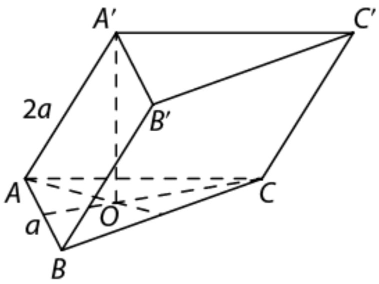
Do $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $d((ABC), (A'B'C')) = d(A', (ABC))$.

Vì tam giác ABC đều và $A'A = A'B = A'C$ nên $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có: $A'.ABC$ là hình chóp đều nên $A'O$ vuông góc với (ABC) tại O. Vậy $d(A', (ABC)) = A'O$.

Ta có $A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}a$.

Vậy $d((ABC); (A'B'C')) = \dfrac{\sqrt{33}}{3}a$.



Hình 8.60

LUYỆN TẬP 5

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$, $AA' = \sqrt{2}a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ này.

VẬN DỤNG

Trong một tiết học bơi, thầy giáo dạy bơi chỉ về phía bục nhảy và hỏi học sinh của mình: "Làm sao để tính được khoảng cách từ mặt sàn của bục nhảy đến mặt nước?". Trong lúc các học sinh khác đang suy nghĩ thì có một bạn đã đưa ra câu trả lời như sau: "Em sẽ cầm một sợi dây thừng dài, leo lên bục nhảy, thả một đầu dây xuống cho đến khi nào đầu dây chạm mặt nước thì đánh dấu vị trí của dây tại vị trí mặt sàn của bục nhảy. Sau đó, thu dây lại và đo chiều dài của đoạn dây (từ đầu dây đến vị trí đã đánh dấu) thì đó chính là khoảng cách cần tìm". Cách làm của bạn ấy có đúng không? Vì sao?


Hình 8.61

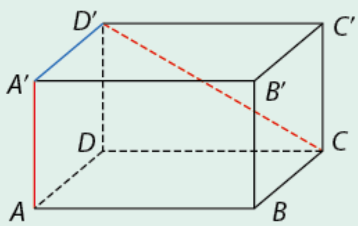
III Đường vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

HOẠT ĐỘNG 6

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Xét hai đường thẳng chéo nhau AA' và $D'C$.

a) Đường thẳng $A'D'$ có đồng thời cắt và vuông góc với hai đường thẳng AA' và $D'C$ không? Vì sao?

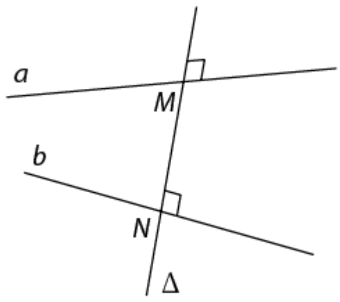
b) Tìm mặt phẳng (α) chứa đường thẳng AA' và song song với $D'C$. So sánh $d(D'C, (\alpha))$ và $A'D'$.



Hình 8.62

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là **đường vuông góc chung** của a và b.

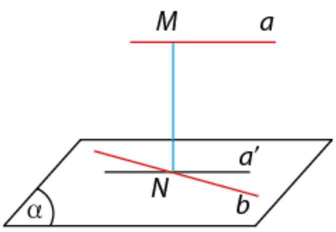
b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn MN gọi là **khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau** a và b, kí hiệu $d(a, b)$.



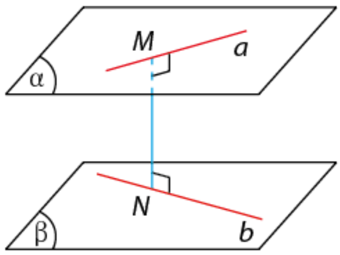
Hình 8.63

Ta thừa nhận các tính chất sau:

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 8.64



Hình 8.65

Lưu ý:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách nhỏ nhất trong các khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng đó.

VÍ DỤ 6

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau:

a) BB' và AC; b) BB' và $A'C$; c) AC và $B'D'$.

Giải

a) Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Ta có:

$BO \perp AC$ ($ABCD$ là hình vuông);

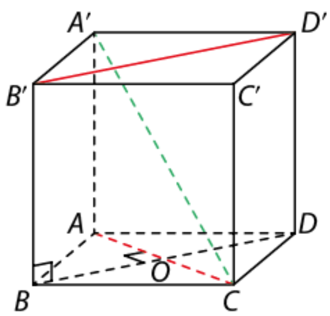
$BO \perp BB'$ (do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD)$);

BO cắt AC, BB' lần lượt tại O, B.

Suy ra BO là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BB' và AC.

Mà $ABCD$ là hình vuông cạnh a, nên $BO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BB' và AC là $BO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.



Hình 8.66

b) Ta có: $BB' \parallel AA'$, suy ra (ACA') chứa AC và song song với BB'.

Suy ra $d(BB'; AC) = d(BB'; (ACA')) = d(B; ACA') = BO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

c) Ta có AC và $B'D'$ lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song nhau là $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên $d(AC, B'D') = d((ABCD), (A'B'C'D')) = AA' = a$.

LUYỆN TẬP 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 3a$; $ABCD$ là hình vuông cạnh a, O là giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách giữa:

a) BD và SC;

b) AB và SC.

BÀI TẬP

8.21. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $4a$ và cạnh đáy bằng $6a$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) và khoảng cách từ S đến mỗi đường thẳng chứa các cạnh AB, AC, BC.

8.22. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

8.23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ B đến (SCD).

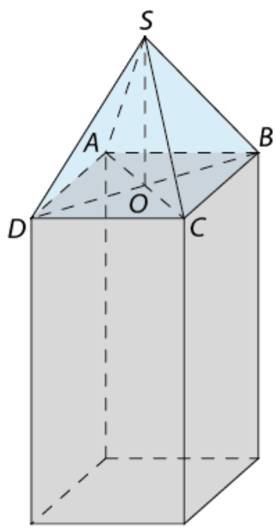
8.24. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, có $BC = 2a$, $AB = \sqrt{3}a$. Tính khoảng cách giữa AA' và mặt phẳng $(BCC'B')$.

8.25. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, A' cách đều A, B, C và $AA' = AB = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

8.26. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC').

8.27. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

8.28. Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác như *Hình 8.67* và đặt trên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật có độ cao 1 m, đáy là hình vuông cạnh 50 cm. Ban tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 cm để ráp lại thành khối chóp nói trên. Tính khoảng cách từ đỉnh hình chóp đến mặt sàn nơi diễn ra buổi triển lãm.



Hình 8.67

BÀI 5

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ, KHỐI CHÓP VÀ KHỐI CHÓP CỤT ĐỀU

Muốn biết có thể xếp tất cả vali vào chỗ chứa hành lí của ô tô hay không, người ta làm cách nào?

I Thể tích khối lăng trụ

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Lưu ý: Tên của khối lăng trụ được đặt theo tên của hình lăng trụ giới hạn nó.

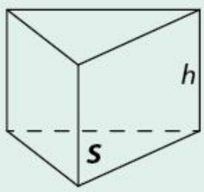
Khối rubik
Khối lập phương

Viên gạch nung
Khối lăng trụ lục giác

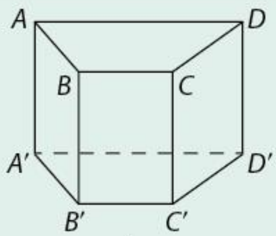
Hộp sữa
Khối hộp chữ nhật

HOẠT ĐỘNG 1

Viết công thức tính thể tích khối lăng trụ đứng tam giác (*Hình 8.68*) và khối lăng trụ đứng tứ giác (*Hình 8.69*) theo diện tích đáy S và đường cao h của nó.



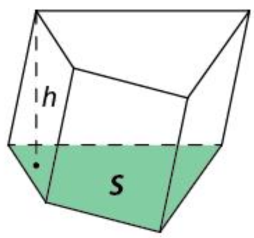
Hình 8.68



Hình 8.69

Hơn thế, người ta còn chứng minh được công thức đó cũng đúng với mọi khối lăng trụ. Cụ thể, ta có định lí sau:

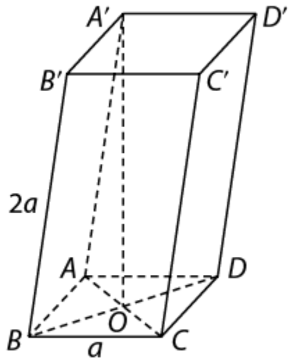
Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = Sh$.



Hình 8.70

VÍ DỤ 1

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$, đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm O của AC và BD. Tính thể tích khối lăng trụ này.



Hình 8.71

Giải

$ABCD$ là hình vuông cạnh a nên diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ là O nên chiều cao hình lăng trụ là $A'O$.

Ta có: $A'O^2 = A'A^2 - AO^2 = 4a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{14a^2}{4} \Rightarrow A'O = \frac{\sqrt{14}}{2}a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = A'O.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{14}}{2}a^3$.

LUYỆN TẬP 1

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $30°$. Hình chiếu của A' trên (ABC) là trung điểm I của cạnh BC. Tính thể tích khối lăng trụ này.

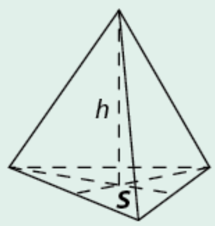
II Thể tích khối chóp

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

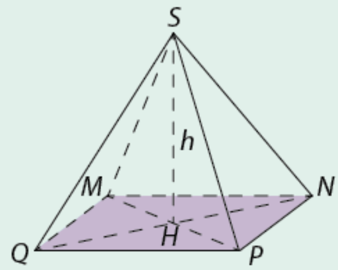
Lưu ý: Tên của khối chóp được đặt theo tên của hình chóp giới hạn nó.

HOẠT ĐỘNG 2

Viết công thức tính thể tích khối chóp tam giác đều (*Hình 8.72*) và khối chóp tứ giác đều (*Hình 8.73*) theo diện tích đáy $\boldsymbol{S}$ và chiều cao h của chúng.



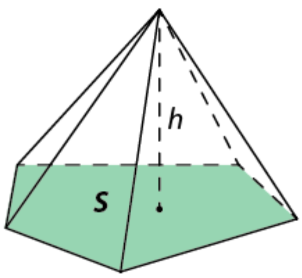
Hình 8.72



Hình 8.73

Người ta chứng minh được rằng công thức đó đúng cho mọi khối chóp. Cụ thể, ta có định lí sau:

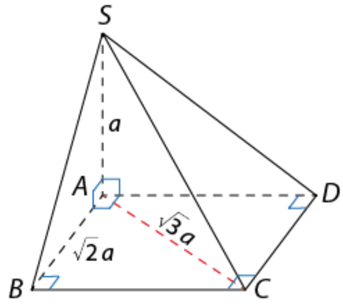
Thể tích khối chóp có diện tích đáy $\boldsymbol{S}$ và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}\boldsymbol{S}h$.



Hình 8.74

VÍ DỤ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Biết rằng $AB = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{3}a$. Tính thể tích khối chóp này.



Hình 8.75

Giải

Ta có A là hình chiếu của S trên mặt đáy $(ABCD)$ nên chiều cao của hình chóp $S.ABCD$ là $SA = a$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$BC^2 = AC^2 - AB^2 = a^2 \Rightarrow BC = a$ nên diện tích $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.BC = \sqrt{2}a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

LUYỆN TẬP 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$, $SB = a$. Hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là giao điểm hai đường chéo của hình thoi $ABCD$. Tính thể tích khối chóp này.

III Thể tích khối chóp cụt đều

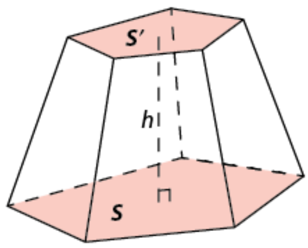
Khối chóp cụt đều là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt đều kể cả hình chóp cụt đều ấy.

Lưu ý: Tên của khối chóp cụt đều được đặt theo tên của hình chóp cụt đều giới hạn nó.

Người ta chứng minh được:

Thể tích khối chóp cụt đều có chiều cao h và có diện tích hai đáy lần lượt là $\boldsymbol{S}$ và $\boldsymbol{S}'$:

$$V = \frac{1}{3}h\left(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}' + \sqrt{\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}'}\right).$$



Hình 8.76

VÍ DỤ 3

Một phòng ngủ ngoài trời (*Hình 8.77*) có hình dạng hình chóp cụt tứ giác đều, cạnh đáy lớn bằng 150 cm, cạnh đáy nhỏ bằng 120 cm, chiều cao 180 cm. Tính thể tích phần không gian bên trong phòng ngủ.

Hình 8.77

Giải

Cạnh đáy lớn bằng 150 cm nên diện tích đáy lớn là $\boldsymbol{S} = 150^2 = 22\,500$ (cm²).

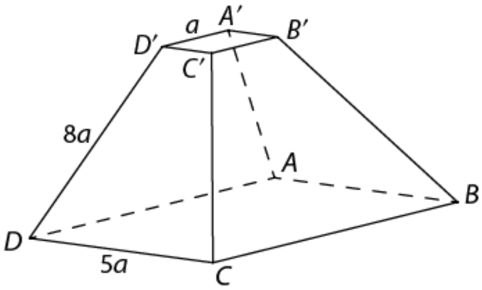
Cạnh đáy nhỏ bằng 120 cm nên diện tích đáy nhỏ là $\boldsymbol{S}' = 120^2 = 14\,400$ (cm²).

Chiều cao chóp cụt là $h = 180$ cm.

Thể tích phòng ngủ là $V = \frac{1}{3}h\left(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}' + \sqrt{\boldsymbol{SS}'}\right) = 3\,294\,000\ (\text{cm}^3)$.

LUYỆN TẬP 3

Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bên bằng $8a$, cạnh đáy lớn bằng $5a$, cạnh đáy nhỏ bằng a. Tính thể tích hình chóp cụt đều này.



Hình 8.78

VẬN DỤNG

Bạn An muốn làm các viên nước đá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều có đáy lớn bằng 3 cm, đáy nhỏ bằng 1,5 cm và cao 3 cm bằng cách dùng khay đá, mỗi khay sẽ tạo được 6 viên đá. Hỏi bạn An cần ít nhất bao nhiêu khay để chứa đồng thời 2 lít nước?


Hình 8.79

BÀI TẬP

8.29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB và tam giác SAB vuông tại S. Tính thể tích khối chóp này.

8.30. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm A, B, C. Biết $AA' = 2a$, tính thể tích khối lăng trụ này.

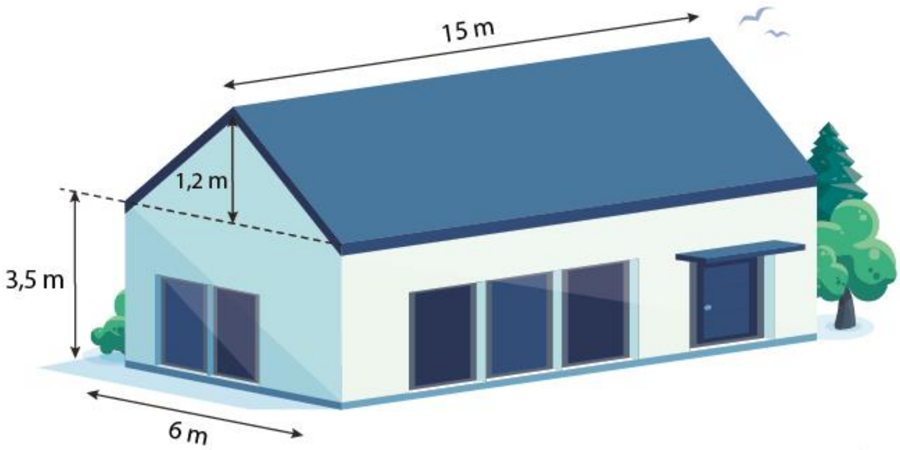
8.31. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của AD và $AA' = 4a$. Tính thể tích khối hộp này.

8.32. Một khối hộp chữ nhật làm từ kim loại rắn có đáy hình chữ nhật kích thước 48 cm × 25 cm. Khối kim loại này sau đó được nung chảy và đúc lại thành khối chóp đáy hình vuông với độ cao không đổi. Tìm độ dài cạnh đáy của khối chóp này.

8.33. Một chiếc bút chì màu vỏ gỗ, chưa gọt, dài 20 cm, có dạng hình lăng trụ đứng với đáy là lục giác đều cạnh 3 mm. Tính thể tích của chiếc bút chì màu này.

Hình 8.80 (Hình vẽ có thể không đúng tỉ lệ)

8.34. Tính thể tích phần không gian bên trong ngôi nhà có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là ngũ giác (các kích thước như *Hình 8.81*).



Hình 8.81

8.35. Một li đựng bắp rang bơ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với cạnh đáy lớn bằng 10 cm, cạnh đáy nhỏ bằng 6 cm, chiều cao bằng 14 cm (*Hình 8.82*). Tính thể tích li này.

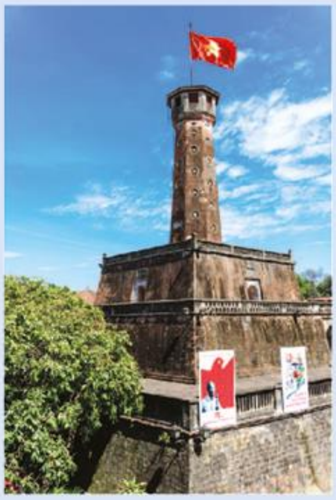
Hình 8.82

8.36. Một chụp đèn hình chóp cụt đều (*Hình 8.83*) có chiều cao bằng 24 cm, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng 17,5 cm và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng 10,5 cm. Tính thể tích phần không gian bên trong của chụp đèn này.

Hình 8.83

EM CÓ BIẾT

Tham quan Cột cờ Hà Nội (Kỳ đài)



Một trong những biểu tượng đặc trưng của Thủ đô Hà Nội uy nghiêm là Kỳ đài Hà Nội (hay còn gọi là Cột cờ Hà Nội), được xây dựng từ năm 1805 đến năm 1812 dưới triều vua Gia Long nhà Nguyễn.

Cấu trúc của Kỳ đài gồm ba tầng đế và một thân cột. Các tầng đế có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, nhỏ dần, được đặt chồng lên nhau và có ốp gạch xung quanh. Đỉnh Cột cờ được cấu tạo thành một lầu (vọng canh) hình lăng trụ bát giác đều. Tại đây có thể quan sát qua 8 cửa sổ để nhìn thấy toàn bộ nội ngoại thành Hà Nội.

Toàn phần xây từ đế đến trụ này cao 33,4 m gồm: 3 tầng đế cao 11,9 m; cột cao 18,2 m; lầu 3,3 m. Nếu kể cả trụ treo cờ thì cao trên 40 m.

Năm 1989, Kỳ đài được công nhận là di tích lịch sử, trở thành biểu tượng của Thủ đô Hà Nội.

(Nguồn: *https://haufo.hanoi.gov.vn/tin-tuc-su-kien/-/view_content/3892054-cot-co-ha-noi.html*)

BÀI 6

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chọn một trong hai mục để thực hành trải nghiệm.

I Thực hành dựng hình với GeoGebra 3D

Mục tiêu: Sử dụng phần mềm GeoGebra để:

1. Vẽ điểm, đoạn thẳng, mặt phẳng, hình chóp, giao điểm, giao tuyến;
2. Vẽ đường cao của hình chóp, góc phẳng nhị diện;
3. Tính khoảng cách, góc, thể tích.

Yêu cầu chuẩn bị:

Phần mềm GeoGebra (phiên bản trên trình duyệt *https://www.geogebra.org/classic* hoặc cài đặt trên máy tính *https://www.geogebra.org/download*).

Tổ chức hoạt động: Hoạt động nhóm 4 học sinh.

HOẠT ĐỘNG 1

Vẽ hình với độ dài cho trước

1. Vẽ hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông tâm I, cạnh đáy bằng 7 cm, chiều cao hình chóp bằng 10 cm.
2. Vẽ hình chiếu của I trên mặt phẳng (SBC) và tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC).
3. Vẽ một góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy. Tính số đo của góc nhị diện này.
4. Vẽ đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và SC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.
5. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn thực hiện:

1. Vẽ hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy là hình vuông tâm I, cạnh đáy bằng 7 cm, chiều cao hình chóp bằng 10 cm.

Bước 1 Dùng công cụ để chọn hai điểm A, B thuộc mặt phẳng.

Bước 2 Dùng công cụ để đo khoảng cách giữa hai điểm A, B và canh vị trí điểm B trên mặt phẳng sao cho độ dài $AB = 7$ cm.

Bước 3 Dùng công cụ Đa giác đều để dựng tứ giác đều (hình vuông) $ABCD$.

Bước 4 Dùng công cụ Trung điểm hoặc tâm để dựng trung điểm của AC, đặt tên điểm vừa dựng là I.

Bước 5 Dùng công cụ Đường vuông góc để dựng đường thẳng d qua I, vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Bước 6 Dùng công cụ để dựng điểm S thuộc đường thẳng d và dùng công cụ để đo đạc sao cho $SI = 10$ cm.

Bước 7 Dùng công cụ Hình chóp để dựng hình chóp $S.ABCD$.

2. Vẽ hình chiếu của *I* trên mặt phẳng (*SBC*) và tính khoảng cách từ *I* đến mặt phẳng (*SBC*).

Bước 1 Dùng công cụ Đường vuông góc để dựng đường thẳng d_1 qua *I*, vuông góc với mặt phẳng (*SBC*).

Bước 2 Dùng công cụ Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm *H* của d_1 và (*SBC*).

Bước 3 Dùng công cụ để đo khoảng cách giữa *I* và *H*.

3. Vẽ một góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy. Tính số đo góc nhị diện này.

Bước 1 Giả sử ta dựng góc phẳng nhị diện [*S*, *BC*, *A*]. Dùng công cụ Mặt phẳng vuông góc để dựng mặt phẳng qua *I*, vuông góc với cạnh *BC*.

Bước 2 Dùng công cụ Giao của 2 mặt để dựng giao tuyến của mặt phẳng vừa dựng với hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABCD*).

Bước 3 Dùng công cụ Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm *F* của hai giao tuyến vừa dựng.

Bước 4 Dùng công cụ Góc để tính số đo góc *SFI*. Đó cũng là góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

Bước 5 Quan sát số đo góc và kiểm tra lại bằng tính toán.

4. Vẽ đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng *BD* và *SC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *BD* và *SC*.

Bước 1 Dễ dàng chứng minh được $BD \perp (SAC)$ tại *I*. Dùng công cụ Đường vuông góc để dựng đường thẳng d_2 qua *I*, vuông góc với *SC*.

Bước 2 Dùng công cụ Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm *K* của d_2 và *SC*. Suy ra đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng *BD* và *SC* là *IK*.

Bước 3 Dùng công cụ để đo khoảng cách giữa *I* và *K*.

5. Đọc thông tin hiển thị trên phần mềm ở cột trái và kiểm tra lại bằng phép tính.

HOẠT ĐỘNG 2

Vẽ hình với góc cho trước

1. Vẽ hình chóp *S.ABCD* với *ABCD* là hình vuông tâm *I* cạnh 6 cm, *H* là trung điểm của *AB*, tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, số đo của góc nhị diện [*S*, *CD*, *A*] bằng 45°.
2. Tìm thể tích của khối chóp *S.ABCD* (đọc trên hiển thị của phần mềm, kiểm tra lại bằng phép tính).
3. Vẽ hình chiếu của *I* trên mặt phẳng (*SBC*) và tính khoảng cách từ *I* đến mặt phẳng (*SBC*).
4. Vẽ một góc phẳng nhị diện [*B*, *SC*, *D*] và tìm số đo của góc nhị diện này.

Hướng dẫn thực hiện:

1. Vẽ hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình vuông tâm I cạnh 6 cm, H là trung điểm của AB, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 45°.

Bước 1 Dùng công cụ để chọn hai điểm A, B thuộc mặt phẳng.

Bước 2 Dùng công cụ để đo khoảng cách giữa hai điểm A, B và canh vị trí điểm B trên mặt phẳng sao cho độ dài $AB = 6$ cm.

Bước 3 Dùng công cụ Đa giác đều để dựng tứ giác đều (hình vuông) $ABCD$.

Bước 4 Dùng công cụ Trung điểm hoặc tâm để dựng trung điểm H của AB.

Bước 5 Dùng công cụ Đường vuông góc để dựng đường thẳng d_1 qua H và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

Bước 6 Do số đo góc nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 45° nên ta tính được $SH = 6$ cm. Dùng công cụ để dựng điểm S thuộc đường thẳng d_1 và dùng công cụ để đo đạc sao cho $SH = 6$ cm.

Bước 7 Dùng công cụ Hình chóp để dựng hình chóp $S.ABCD$.

2. Đọc thông tin hiển thị ở cột trái và kiểm tra lại bằng phép tính.

3. Vẽ hình chiếu của I trên mặt phẳng (SBC) và tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC)

Bước 1 Dùng công cụ Đường vuông góc để dựng đường thẳng d_2 qua I, vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Bước 2 Dùng công cụ Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm K của d_2 và (SBC).

Bước 3 Dùng công cụ để đo khoảng cách giữa I và K.

4. Vẽ một góc phẳng nhị diện $[B, SC, D]$ và tìm số đo góc nhị diện này.

Bước 1 Dùng công cụ Mặt phẳng vuông góc để dựng mặt phẳng qua D, vuông góc với cạnh SC.

Bước 2 Dùng công cụ Giao của 2 mặt để dựng giao tuyến d_3, d_4 của mặt phẳng vừa dựng lần lượt với hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

Bước 3 Dùng công cụ Giao điểm của 2 đối tượng để dựng giao điểm N của d_3 với SC, giao điểm M của d_4 với BC.

Bước 4 Dùng công cụ Góc để tính số đo góc MND. Đó cũng là góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

VẬN DỤNG

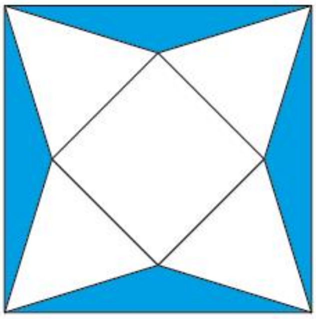
1. Vẽ hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 6$ cm và $AD = 10$ cm, H là trung điểm của AB, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
2. Tìm thể tích của khối chóp $S.ABCD$ (đọc trên hiển thị của phần mềm, kiểm tra lại bằng phép tính).
3. Vẽ hình chiếu của H trên mặt phẳng (SBC) và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC).
4. Vẽ một góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ và tìm số đo của góc nhị diện này.
5. Vẽ một góc phẳng nhị diện $[B, SC, D]$ và tìm số đo của góc nhị diện này.

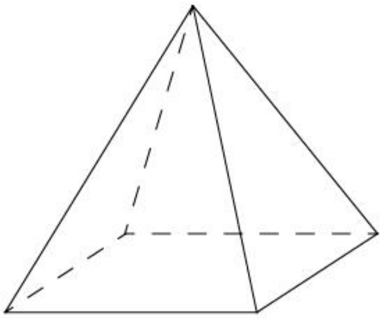
II Thiết kế hộp quà

Mục tiêu:
Vận dụng kiến thức quan hệ vuông góc trong không gian vào việc thiết kế hộp quà theo yêu cầu.

Yêu cầu chuẩn bị:
Kéo, thước thẳng, các tấm bìa hình vuông cạnh 30 cm, keo dán.

Tổ chức hoạt động:
- Tạo một hộp quà hình chóp tứ giác đều (*Hình 8.86*) từ một tấm bìa hình vuông cạnh 30 cm.
- Hoạt động nhóm 4 học sinh.
- Mỗi nhóm chuẩn bị 2 tấm bìa hình vuông cạnh 30 cm.


Hình 8.84


Hình 8.85


Hình 8.86

HOẠT ĐỘNG 3

Từ tấm bìa hình vuông thứ nhất:

1. Cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau (màu xanh) bên ngoài của tấm bìa (*Hình 8.84*) (với kích thước tuỳ ý), phần còn lại gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông gấp lại thành đỉnh của hình chóp (*Hình 8.85*);
2. Tính chiều cao, cạnh đáy và thể tích của hộp quà này.

HOẠT ĐỘNG 4

Từ tấm bìa hình vuông thứ hai:

1. Tương tự Hoạt động 3, em hãy gấp một hộp quà là hình chóp tứ giác đều có chiều cao bằng 10 cm;
2. Tính thể tích hộp quà vừa được tạo thành.

ÔN TẬP CHƯƠNG 8

BÀI TẬP TỰ LUẬN

8.37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh $B'D'$ song song với BD và AB' vuông góc với SB.

8.38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có góc $BAD = 60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC và F là trung điểm của đoạn BE.

a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

8.39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng $(A'B'CD)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC'.

8.40. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm H của cạnh $B'C'$.

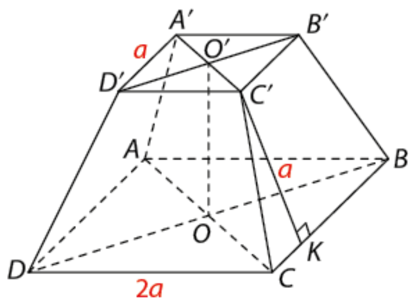
a) Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình lăng trụ này.

b) Tính số đo của góc nhị diện tạo bởi mặt bên $(ABB'A')$ và mặt đáy $(A'B'C')$.

8.41. Cho hình chóp cụt đều (*Hình 8.87*) có hai đáy là các hình vuông cạnh $2a$ và a. Chiều cao của mặt bên bằng a. Tính:

a) Thể tích của khối chóp cụt đều này;

b) Số đo của các góc nhị diện tạo bởi mặt bên và các mặt đáy của hình chóp cụt đều này.



Hình 8.87

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

8.42. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) cùng vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

D. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β), ta có đường thẳng AB vuông góc với d.

8.43. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Mặt phẳng (α) và đường thẳng a cùng vuông góc với đường thẳng b thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

8.44. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và DBC là hai tam giác cân chung đáy BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $AB \perp CD$. B. $AC \perp BD$. C. $AD \perp BC$. D. $AB \perp AD$.

8.45. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC. Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $90°$. B. $30°$. C. $60°$. D. $45°$.

8.46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$. B. $90°$. C. $30°$. D. $45°$.

8.47. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC = a$. Khi đó khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. C. $\dfrac{a}{2}$. D. $\dfrac{a}{3}$.

8.48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD, SC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{6}a$. B. $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}a$. D. $\dfrac{\sqrt{30}}{12}a$.

8.49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ có số đo bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = 3a^3$. B. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $V = a^3$. D. $V = \dfrac{a^3}{3}$.

8.50. Một nhà kho có dạng hình lăng trụ đứng ngũ giác có các kích thước được cho trong *Hình 8.88* (đơn vị đo là mét). Thể tích nhà kho này (theo m^3) là

A. 1 280. B. 1 040.

C. 960. D. 880.

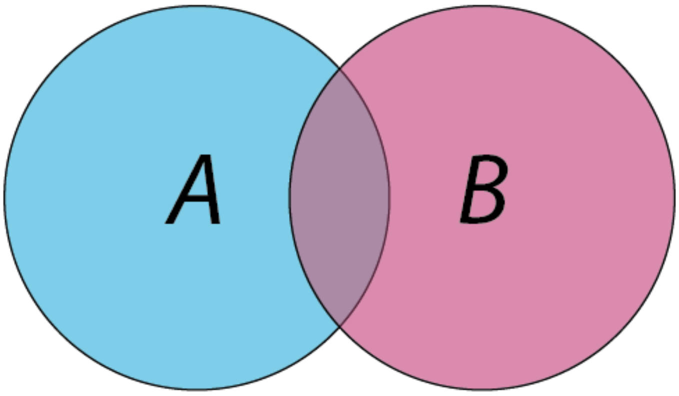
Hình 8.88

8.51. Cho một chậu nước hình chóp cụt đều có chiều cao bằng 3 dm, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng 2 dm và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng 1 dm. Thể tích của chậu nước là

A. $V = \dfrac{21\sqrt{3}}{2}$ dm^3. B. $V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ dm^3.

C. $V = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ dm^3. D. $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ dm^3.

Phần
THỐNG KÊ và XÁC SUẤT



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

CHƯƠNG 9

Một số bài toán tính xác suất của các biến cố phức tạp có thể được quy về các bài toán tính xác suất của các biến cố đơn giản hơn thông qua các phép toán trên biến cố và các quy tắc tính xác suất. Chương này tiếp nối và mở rộng các nội dung về xác suất đã học ở lớp 10.

Công thức cộng và công thức nhân xác suất

- Nhận biết được biến cố hợp, biến cố giao và biến cố độc lập;
- Tính được xác suất của biến cố hợp và biến cố giao thông qua công thức cộng và công thức nhân xác suất;
- Tính được xác suất trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp tổ hợp và bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây.

BÀI 1 CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

I Biến cố hợp và biến cố giao

HOẠT ĐỘNG 1

Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Quan sát số chấm xuất hiện. Xét các biến cố:

- A: "Số chấm xuất hiện là số chia hết cho 2";
- B: "Số chấm xuất hiện là số chia hết cho 3";
- C: "Số chấm xuất hiện là một số chia hết cho 6";
- D: "Số chấm xuất hiện là một số chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 3".

a) Biểu diễn các biến cố A, B, C, D bởi các tập hợp.

b) So sánh C và $A \cap B$.

c) So sánh D và $A \cup B$.

Trong Hoạt động 1, các biến cố C, D được biểu diễn qua hai biến cố A, B đơn giản hơn.

Cho A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử.

- Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố "A xảy ra hoặc B xảy ra", kí hiệu $A \cup B$.
- Biến cố giao của hai biến cố A và B là biến cố "A và B đồng thời xảy ra", kí hiệu $A \cap B$ hoặc AB.

Lưu ý:

- Nếu mô tả các biến cố qua các tập con của không gian mẫu sẽ tạo thuận lợi cho việc tìm các biến cố hợp và giao.
- Trong toàn bộ chương này, ta xét các phép thử mà không gian mẫu có hữu hạn phần tử và đồng khả năng.

VÍ DỤ 1

Chọn ngẫu nhiên lần lượt hai nhân viên của một công ty và ghi lại giới tính của họ. Xét các biến cố:

- A: "Giới tính của một trong hai nhân viên là nam";
- B: "Giới tính của hai nhân viên là khác nhau";
- C: "Giới tính của hai nhân viên là giống nhau".

Xác định các biến cố hợp và biến cố giao của:

a) A và B;

b) A và C.

Giải

Kí hiệu giới tính nữ là F, giới tính nam là M. Không gian mẫu Ω và các biến cố A, B và C được cho bởi:

$\Omega = \{(F; F); (F; M); (M; F); (M; M)\}$;

$A = \{(F; M); (M; F); (M; M)\}$;

$B = \{(F; M); (M; F)\}$;

$C = \{(M; M); (F; F)\}$.

Ta có:

- $A \cup B = A$;
- $A \cap B = B$;

- $A \cup C = \Omega$;
- $A \cap C = \{(M; M)\}$

Biến cố giao của A và C là hai nhân viên (được chọn ngẫu nhiên) đều có giới tính nam.

LUYỆN TẬP 1

Một hộp chứa 10 quả bóng được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp và xem số được ghi trên quả bóng. Xét các biến cố:

- A: "Số ghi trên quả bóng là số chẵn";
- B: "Số ghi trên quả bóng chia hết cho 3";
- C: "Số ghi trên quả bóng là số nguyên tố".

Xác định các biến cố $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$ và $A \cap C$.

II Công thức cộng xác suất

1. Biến cố xung khắc

HOẠT ĐỘNG 2

Khánh và Hà mỗi người ném một quả bóng vào rổ. Xét các biến cố:

- M: "Không bạn nào ném bóng trúng vào rổ";
- N: "Cả hai bạn đều ném bóng trúng vào rổ";
- P: "Có đúng một bạn ném bóng trúng vào rổ";
- Q: "Có ít nhất một bạn ném bóng trúng vào rổ".

a) Q có là biến cố đối của M không?

b) Xác định biến cố $N \cap P$.

c) N có là biến cố đối của P hay không?

Hai biến cố N, P trong Hoạt động 2 được gọi là hai biến cố xung khắc.

Hai biến cố gọi là xung khắc nếu chúng không đồng thời xảy ra.

Lưu ý:

- Nếu A và B xung khắc thì $A \cap B$ là biến cố không thể, nghĩa là $A \cap B = \varnothing$.
- Hai biến cố đối nhau thì xung khắc. Điều ngược lại là không đúng.

VÍ DỤ 2

Xét phép thử gieo một đồng xu hai lần và các biến cố sau:

- A: "Kết quả gieo hai lần như nhau";
- B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp";
- C: "Lần thứ hai mới xuất hiện mặt sấp";
- D: "Lần đầu xuất hiện mặt sấp".

Hãy chỉ ra các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố đã cho.

Giải

Ta có $A = \{SS; NN\}$; $B = \{SN; NS; SS\}$; $C = \{NS\}$; $D = \{SS; SN\}$.

Do $A \cap C = \varnothing$ và $C \cap D = \varnothing$ nên các cặp biến cố xung khắc là A và C, C và D. Ngoài ra, trong các biến cố đã cho không có cặp biến cố xung khắc nào khác.

LUYỆN TẬP 2

Một hộp chứa bốn thẻ được đánh số 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Xét các biến cố:

- A: "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn";
- B: "Tích hai số trên hai thẻ là số chẵn";
- C: "Tổng các số trên hai thẻ là số lẻ";
- D: "Tích các số trên hai thẻ là số lẻ".

Hãy chỉ ra các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố đã cho.

2. Công thức cộng xác suất của hai biến cố xung khắc

HOẠT ĐỘNG 3

Cho A và B là hai biến cố xung khắc liên quan đến một phép thử với không gian mẫu là Ω. Gọi $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cup B)$ và $n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của các biến cố A, B, $A \cup B$ và không gian mẫu Ω.

a) Tìm $n(A \cup B)$ theo $n(A)$ và $n(B)$.

b) Viết công thức tính các xác suất $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ theo $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cup B)$ và $n(\Omega)$.

c) Rút ra mối liên hệ giữa $P(A \cup B)$ và $P(A) + P(B)$.

Trong Hoạt động 3, ta thiết lập được công thức tính xác suất của hợp hai biến cố xung khắc.

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc bất kì liên quan đến một phép thử thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Lưu ý:

Nếu $\overline{A}$ là biến cố đối của A thì A, $\overline{A}$ là hai biến cố xung khắc và $A \cup \overline{A} = \Omega$. Theo công thức cộng xác suất, ta có:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Do đó $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Vậy công thức tính xác suất biến cố đối là trường hợp đặc biệt của công thức cộng hai biến cố xung khắc.

VÍ DỤ 3

Một lọ có chứa 1 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh lá cây, 4 viên bi đen và 2 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong lọ. Tính xác suất để viên bi lấy được không phải màu đỏ và không phải màu đen.

Hình 9.1

Giải

Gọi X là biến cố "viên bi lấy được không phải màu đỏ và không phải màu đen". Biến cố X xảy ra khi viên bi lấy được có màu xanh lá cây hoặc có màu vàng.

Gọi A, B lần lượt là các biến cố "viên bi lấy được có màu xanh lá cây" và "viên bi lấy được có màu vàng". Khi đó, $X = A \cup B$ và $n(A) = 3$, $n(B) = 2$. Hơn nữa, tổng số viên bi trong lọ là:

$$n(\Omega) = 1 + 3 + 4 + 2 = 10.$$

Do A, B là các biến cố xung khắc nên:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = 0{,}5.$$

Vậy $P(X) = P(A \cup B) = 0{,}5$.

LUYỆN TẬP 3

Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất, có sáu mặt và quan sát tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện ở hai mặt lớn hơn 5 và nhỏ hơn 8.

3. Công thức cộng xác suất

HOẠT ĐỘNG 4

Khánh chọn ngẫu nhiên một số từ 1 đến 10. Xét các biến cố:

- A: "Số được chọn chia hết cho 2";
- B: "Số được chọn chia hết cho 3".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ và $P(A \cap B)$.

b) So sánh $P(A \cup B) + P(A \cap B)$ và $P(A) + P(B)$.

Nếu A và B là hai biến cố bất kì liên quan đến một phép thử thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

VÍ DỤ 4

Trong một buổi tiệc, có:

- 5 người đàn ông có số tuổi không nhỏ hơn 21;
- 4 người đàn ông có số tuổi nhỏ hơn 21;
- 6 người phụ nữ có số tuổi không nhỏ hơn 21;
- 3 người phụ nữ có số tuổi nhỏ hơn 21.

Nếu chọn ngẫu nhiên một người trong buổi tiệc để trao quà thì xác suất để người đó là phụ nữ hoặc có số tuổi nhỏ hơn 21 là bao nhiêu?

Giải

Tổng số người trong buổi tiệc là $n(\Omega) = 5 + 4 + 6 + 3 = 18$.

Gọi A là biến cố "người được chọn có số tuổi nhỏ hơn 21" và B là biến cố "người được chọn là phụ nữ". Khi đó $A \cap B$ là biến cố "người được chọn là phụ nữ và có số tuổi nhỏ hơn 21" và $A \cup B$ là biến cố "người được chọn có số tuổi nhỏ hơn 21 hoặc là phụ nữ". Theo định nghĩa trên, ta có:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3+4}{18} = \frac{7}{18};\ P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3+6}{18} = \frac{1}{2};\ P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

Theo công thức cộng xác suất, ta có $P(A \cup B) = \frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$.

LUYỆN TẬP 4

Bảng bên dưới cho kết quả khảo sát một nhóm gồm 150 người liên quan đến mức thu nhập (hàng năm) và loại hình giải trí mà họ yêu thích.

Thu nhập (hàng năm)	Loại hình giải trí			Tổng
	Xem ti vi	Xem phim ở rạp	Xem kịch ở các sân khấu	
Dưới 100 triệu đồng	35	20	5	60
100 triệu đồng đến 200 triệu đồng	25	18	7	50
Trên 200 triệu đồng	12	14	14	40
Tổng	72	52	26	150

Chọn một người ngẫu nhiên trong nhóm khảo sát. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Người được chọn thích xem kịch ở các sân khấu";

b) "Người được chọn có thu nhập trên 200 triệu";

c) "Người được chọn có thu nhập trên 200 triệu và thích xem kịch ở các sân khấu";

d) "Người được chọn có thu nhập trên 200 triệu hoặc thích xem kịch ở các sân khấu".

BÀI TẬP

9.1. Chọn ngẫu nhiên hai con số bất kì từ tập hợp có ba con số 1, 2 và 3 để tạo thành một số có hai chữ số khác nhau. Xét các biến cố sau:

- A: "Số tạo thành là số chẵn";
- B: "Số tạo thành chia hết cho 3".

Xác định các biến cố $A \cap B$ và $A \cup B$.

9.2. Một trường trung học phổ thông có 300 học sinh khối 10; 275 học sinh khối 11 và 250 học sinh khối 12. Nhà trường chọn một học sinh bất kì. Tính xác suất để học sinh đó không phải là học sinh khối 10.

9.3. Một chiếc hộp có 5 thẻ được đánh số từ 2 đến 6. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và cộng hai số ghi trên thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là số chẵn.

9.4. Cho hai biến cố A và B với $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$ và $P(A \cup B) = 0,6$.

a) Tính $P(A \cap B)$.

b) Chứng minh A và B không là hai biến cố xung khắc.

9.5. Chọn một số tự nhiên bất kì trong 140 số tự nhiên đầu tiên. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 4 hoặc chia hết cho 6.

BÀI 2

CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

I. Biến cố độc lập

HOẠT ĐỘNG 1

Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối đồng chất, một màu đỏ một màu xanh và quan sát số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc. Gọi A là biến cố "Số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc màu đỏ là chẵn" và B là biến cố "Số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc màu xanh là lẻ". Hỏi biến cố A xuất hiện có ảnh hưởng đến xác suất xảy ra biến cố B không?

Hình 9.2

Hai biến cố được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì:

- A và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập;
- $\overline{A}$ và B là hai biến cố độc lập;
- $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập.

VÍ DỤ 1

Chỉ ra một cặp biến cố độc lập của phép thử trong Hoạt động 1 và tính xác suất của các biến cố đó.

Giải

Xét cặp biến cố sau:

- A: "Xúc xắc màu đỏ xuất hiện mặt 6 chấm";
- B: "Xúc xắc màu xanh xuất hiện mặt một chấm";

Số phần tử của không gian mẫu, biến cố A và biến cố B lần lượt là:

$$n(\Omega) = 6.6 = 36; n(A) = 6; n(B) = 6.$$

Do số chấm xuất hiện trên con xúc xắc màu đỏ không phụ thuộc vào số chấm xuất hiện trên con xúc xắc màu xanh và ngược lại nên việc xảy ra hay không xảy ra biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất của biến cố B và ngược lại. Do đó biến cố A và B là độc lập. Xác suất của biến cố A và B lần lượt là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

LUYỆN TẬP 1

Lớp 11A có 20 học sinh nam và 25 học sinh nữ. Lớp 11B có 15 học sinh nam và 30 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi lớp một bạn tham dự cuộc thi viết báo tường của trường. Chỉ ra một cặp biến cố độc lập của phép thử trên và tính xác suất của các biến cố đó.

II Công thức nhân xác suất của hai biến cố độc lập

HOẠT ĐỘNG 2

Xét phép thử gieo một đồng xu và con xúc xắc (đều cân đối và đồng chất).

a) Tính xác suất của các biến cố:
- A: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa";
- B: "Con xúc xắc xuất hiện mặt lẻ".

b) So sánh $P(AB)$ và $P(A).P(B)$.

Hai biến cố trong Hoạt động 2 là độc lập. Từ hoạt động này, ta thu được công thức tính xác suất giao của hai biến cố độc lập hay còn gọi là công thức nhân xác suất.

Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A).P(B)$$

Lưu ý:

Nếu $P(AB) \neq P(A).P(B)$ thì A và B không độc lập.

VÍ DỤ 2

Có hai giỏ trái cây chứa hai loại táo xanh và táo đỏ. Giỏ thứ nhất chứa 5 quả táo xanh và 5 quả táo đỏ. Giỏ thứ hai chứa 4 quả táo xanh và 6 quả táo đỏ. Từ mỗi giỏ lấy ngẫu nhiên một quả táo. Xét các biến cố:
- A: "Quả táo lấy ra từ giỏ thứ nhất màu đỏ";
- B: "Quả táo lấy ra từ giỏ thứ hai màu đỏ".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$ và $P(AB)$;

b) Tính xác suất để trong hai quả táo lấy ra có ít nhất một quả màu xanh.

Giải

a) Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 10.10 = 100$.

Số phần tử của biến cố A và B lần lượt là $n(A) = 5.10 = 50$; $n(B) = 6.10 = 60$.

Xác suất của các biến cố A và B lần lượt là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{50}{100} = 0,5;\ P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{60}{100} = 0,6.$$

Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB) = P(A).P(B) = 0,5.0,6 = 0,3$.

b) Gọi C là biến cố "Hai quả táo lấy ra có ít nhất một quả màu xanh". Khi đó, C là biến cố đối của biến cố AB. Xác suất trong hai quả táo lấy ra có ít nhất một quả màu xanh là:

$$P(C) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

LUYỆN TẬP 2

Có hai hộp chứa các viên bi. Hộp thứ nhất chứa 7 viên bi màu vàng, 3 viên bi màu đỏ. Hộp thứ hai chứa 3 viên bi màu vàng, 7 viên bi màu đỏ. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một viên bi.

a) Tính xác suất sao cho hai viên bi lấy ra cùng màu.

b) Tính xác suất sao cho hai viên bi lấy ra khác màu.

VÍ DỤ 3

Khánh và Hà được cử tham gia cuộc thi "Nét đẹp tuổi học trò" của trường. Khánh tham gia cuộc thi dành cho nam, Hà tham gia cuộc thi dành cho nữ. Xác suất để Khánh và Hà đậu vào vòng chung kết cuộc thi lần lượt là 0,5 và 0,8. Hãy tính xác suất để:

a) Cả hai bạn đều đỗ vào vòng chung kết;

b) Cả hai bạn đều không đỗ vào vòng chung kết;

c) Có ít nhất một bạn đỗ vào vòng chung kết.

Giải

Xét các biến cố sau:

- A: "Khánh đỗ vào vòng chung kết";
- B: "Hà đỗ vào vòng chung kết";
- C: "Cả hai bạn đều đỗ vào vòng chung kết";
- D: "Cả hai bạn đều không đỗ vào vòng chung kết";
- E: "Có ít nhất một bạn đỗ vào vòng chung kết".

Ta thấy A và B là hai biến cố độc lập. Theo công thức nhân xác suất, ta có:

$$P(C) = P(AB) = P(A).P(B) = 0{,}5.0{,}8 = 0{,}4.$$

Do $\overline{A}$ và $\overline{B}$ là hai biến cố độc lập nên

$$P(D) = P(\overline{A}\ \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0{,}5.0{,}2 = 0{,}1.$$

Do đó, $P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

LUYỆN TẬP 3

Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,85 và 0,9. Hãy tính các xác suất để:

a) Cả hai động cơ đều chạy tốt;

b) Cả hai động cơ đều chạy không tốt;

c) Có ít nhất một động cơ chạy tốt.

III Sử dụng công thức tổ hợp và sơ đồ hình cây tính xác suất

VÍ DỤ 4

Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 4 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng. Hộp thứ hai chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 5 quả cầu vàng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 3 quả cầu. Tính xác suất để lấy được 6 quả cầu đỏ.

Giải

Xét các biến cố:

- A: "Ba quả cầu trong hộp thứ nhất là màu đỏ";
- B: "Ba quả cầu trong hộp thứ hai là màu đỏ".

Số phần tử của không gian mẫu Ω và các biến cố A, B lần lượt là:

$$n(\Omega) = C_{12}^3.C_{15}^3;\ n(A) = C_4^3.C_{15}^3;\ n(B) = C_5^3.C_{12}^3.$$

Xác suất của các biến cố A, B lần lượt là $P(A) = \dfrac{C_4^3.C_{15}^3}{C_{12}^3.C_{15}^3} = \dfrac{4}{220} = \dfrac{1}{55}; P(B) = \dfrac{C_5^3.C_{12}^3}{C_{12}^3.C_{15}^3} = \dfrac{10}{455} = \dfrac{2}{91}$.

Do A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất để lấy được 6 quả cầu đỏ là:

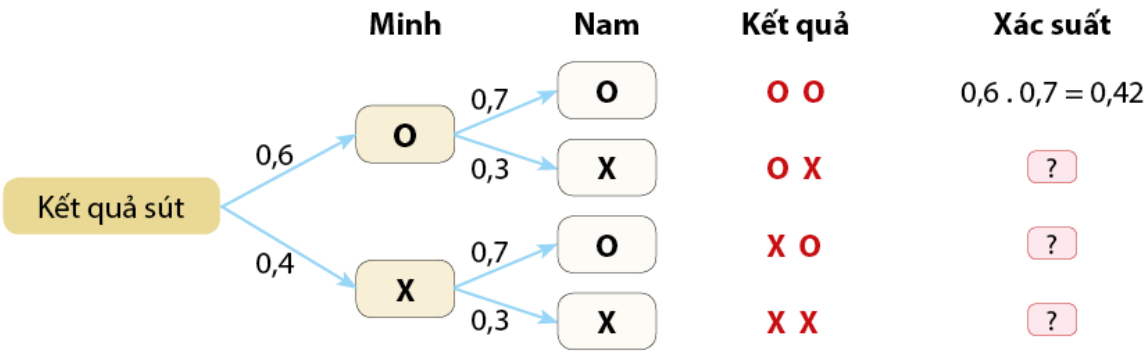
$$P(AB) = P(A).P(B) = \frac{1}{55}\cdot\frac{2}{91} = \frac{2}{5005}.$$

LUYỆN TẬP 4

Có hai lọ chứa bi. Lọ thứ nhất chứa 3 bi trắng, 4 bi đen và 5 bi nâu. Lọ thứ hai chứa 2 bi trắng, 2 bi đen và 4 bi nâu. Lấy ngẫu nhiên mỗi lọ hai viên bi. Tính xác suất để lấy được 4 bi cùng màu.

VÍ DỤ 5

Minh và Nam lần lượt thực hiện một cú sút vào khung thành. Xác suất để Minh sút thành công vào khung thành là 0,6 và Nam sút thành công vào khung thành là 0,7. Sơ đồ cây chưa hoàn thiện bên dưới mô tả các khả năng xảy ra và xác suất tương ứng khi hai bạn lần lượt thực hiện cú sút.



O: sút thành công; **X**: sút không thành công.

a) Hoàn thiện ba dòng trong cột cuối cùng của sơ đồ hình cây.

b) Tính xác suất để cả hai bạn không sút thành công.

c) Tính xác suất để ít nhất một bạn sút thành công.

Giải

a) Các phép tính trên ba dòng trong cột cuối cùng của sơ đồ hình cây theo thứ tự là:

$$0,6.0,3 = 0,18;$$
$$0,4.0,7 = 0,28;$$
$$0,4.0,3 = 0,12.$$

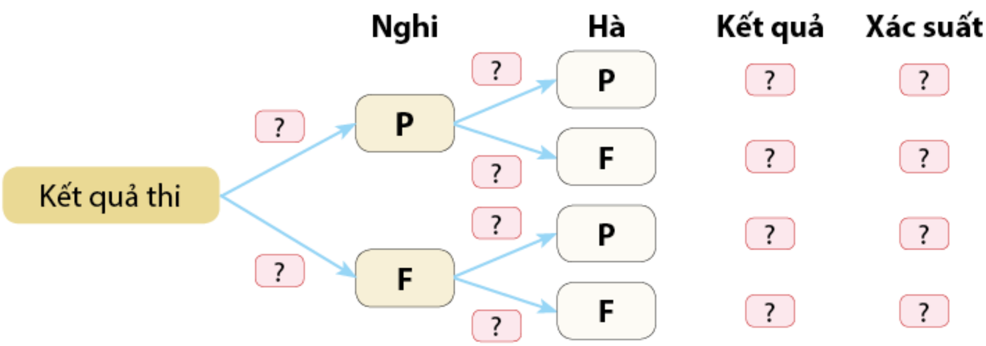
b) Xác suất để cả hai bạn không sút thành công là 0,12.

c) Xác suất để có ít nhất một bạn sút thành công là:

$$0,42 + 0,18 + 0,28 = 0,88.$$

LUYỆN TẬP 5

Nghi và Hà độc lập với nhau tham gia thi lí thuyết bằng lái xe hạng A1. Xác suất để Nghi đỗ kì thi là 0,8 và xác suất để Hà đỗ kì thi là 0,9. Sơ đồ hình cây chưa hoàn thiện bên dưới mô tả các khả năng xảy ra và xác suất tương ứng khi hai bạn tham gia kì thi.



P: đỗ; **F**: trượt.

a) Vẽ lại sơ đồ hình cây trên và bổ sung các thông tin còn thiếu.

b) Sử dụng sơ đồ hình cây vừa vẽ, tính xác suất các biến cố sau:

- A: "Hai bạn đỗ kì thi";
- B: "Nghi đỗ và Hà trượt";
- C: "Ít nhất một trong hai bạn đỗ".

BÀI TẬP

9.6. Cho A và B là hai biến cố xung khắc.

a) Chứng minh $P(AB) = 0$.

b) Nếu $P(A) > 0$ và $P(B) > 0$ thì hai biến cố A và B có độc lập với nhau không?

9.7. Gieo hai đồng xu A và B một cách độc lập. Đồng xu A được chế tạo cân đối. Đồng xu B được chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp ba lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Tính xác suất để:

a) Khi gieo hai đồng xu một lần, cả hai đồng xu đều ngửa;

b) Khi gieo hai đồng xu hai lần, cả hai đồng xu đều ngửa trong cả hai lần.

9.8. Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Vận động viên đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Tính xác suất để một viên đạn trúng mục tiêu và một viên đạn trượt mục tiêu.

9.9. Vi và Quân chơi cờ tướng cùng nhau. Trong một ván cờ, xác suất để Vi thắng Quân là 0,2 và xác suất để Quân thắng Vi là 0,3. Hai bạn dừng chơi cờ khi có người thắng, người thua. Tính xác suất để hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ.

9.10. Xác suất bắn trúng bia của một người bắn cung là 0,3.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các khả năng xảy ra và xác suất tương ứng khi người bắn cung thực hiện hai lần bắn liên tiếp nhau.

b) Tính xác suất người đó bắn trúng bia đúng một lần.

c) Tính xác suất người đó bắn trúng bia ít nhất một lần.

ÔN TẬP CHƯƠNG 9

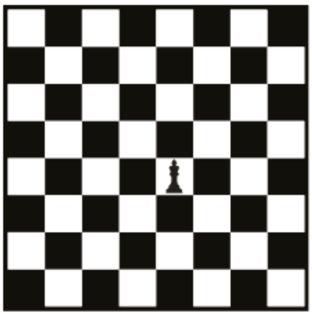
BÀI TẬP TỰ LUẬN

9.11. Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp ba lần. Gọi A là biến cố "có ít nhất hai mặt sấp xuất hiện liên tiếp" và B là biến cố "kết quả ba lần gieo là như nhau". Xác định biến cố $A \cup B$ và $A \cap B$.

9.12. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,3$. Tính $P(A \cup B)$.

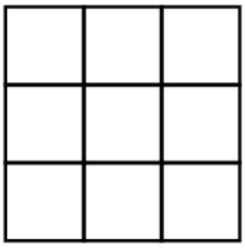
9.13. Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có ít nhất 1 bóng hỏng.

9.14. Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vua. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng (*Hình 9.3*). Bạn An di chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bước. Tính xác suất sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát.



Hình 9.3

9.15. Cho một bảng ô vuông 3×3. Điền ngẫu nhiên các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào bảng trên (mỗi ô chỉ điền một số). Gọi A là biến cố "mỗi hàng, mỗi cột bất kì đều có ít nhất một số lẻ". Tính xác suất của biến cố A.



Hình 9.4

9.16. Hai bạn Nam và Tuấn cùng tham gia một kì thi thử một cách độc lập, trong đó có hai môn thi trắc nghiệm là Toán và Tiếng Anh. Đề thi của mỗi môn gồm 6 mã đề khác nhau và các môn khác nhau thì mã đề cũng khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho học sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để trong hai môn Toán và Tiếng Anh thì hai bạn Nam và Tuấn có chung đúng một mã đề.

9.17. Một người gọi điện thoại nhưng quên mất chữ số cuối. Tính xác suất để người đó gọi đúng số điện thoại mà không phải thử quá hai lần.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

9.18. Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. B. $P(A \cup B) = P(A).P(B)$.

C. $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$. D. $P(A \cup B) = P(B) - P(A)$.

9.19. Cho A, B là hai biến cố độc lập. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $P(AB) = P(A) + P(B)$. B. $P(AB) = P(A) - P(B)$.

C. $P(AB) = P(A).P(B)$. D. $P(AB) = P(B) - P(A)$.

9.20. Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau có $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,4$. Khi đó $P(AB)$ bằng

A. 0,58. B. 0,7. C. 0,1. D. 0,12.

9.21. Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,3. Người đó bắn hai viên một cách độc lập. Xác suất để một viên trúng và một viên trượt mục tiêu là

A. 0,21. B. 0,09. C. 0,49. D. 0,42.

9.22. Hai người ngang tài ngang sức tranh chức vô địch của một cuộc thi cờ tướng. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được năm ván cờ. Tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng 4 ván và người chơi thứ hai mới thắng 2 ván, tính xác suất để người chơi thứ nhất giành chiến thắng.

A. 0,8. B. 0,875. C. 0,5. D. 0,75.

9.23. Xác suất sút bóng thành công tại chấm 11 mét của hai cầu thủ A và B lần lượt là 0,8 và 0,7. Biết mỗi cầu thủ sút một quả tại chấm 11 mét và hai người sút độc lập. Tính xác suất để ít nhất một người sút bóng thành công.

A. 0,44. B. 0,94. C. 0,38. D. 0,56.

9.24. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Chọn ngẫu nhiên hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau từ tập E. Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5.

A. $\frac{6}{25}$. B. $\frac{144}{295}$. C. $\frac{72}{295}$. D. $\frac{12}{25}$.

9.25. Có hai hộp. Hộp I chứa 4 gói quà màu đỏ và 6 gói quà màu xanh, hộp II chứa 2 gói quà màu đỏ và 8 gói quà màu xanh. Gieo một con xúc xắc, nếu được mặt 6 chấm thì lấy một gói quà từ hộp I, nếu được mặt khác thì lấy một gói quà từ hộp II. Tính xác suất để lấy được gói quà màu đỏ.

A. $\frac{7}{30}$. B. $\frac{23}{30}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Bất phương trình lôgarit cơ bản	Là bất phương trình có 1 trong 4 dạng sau: $\log_a x > b, \log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$ với $a > 0, a \neq 1$.
Bất phương trình mũ cơ bản	Là bất phương trình có 1 trong 4 dạng sau: $a^x > b, a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$ với $a > 0, a \neq 1$.
Biến cố độc lập	Hai biến cố A và B được gọi là hai biến cố độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra biến cố kia.
Biến cố giao	Biến cố giao của hai biến cố A và B là biến cố "A và B đồng thời xảy ra", kí hiệu $A \cap B$ hoặc AB.
Biến cố hợp	Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố "A xảy ra hoặc B xảy ra", kí hiệu $A \cup B$.
Biến cố xung khắc	Hai biến cố A và B gọi là xung khắc nếu $A \cap B = \varnothing$.
Căn bậc n của a	Là số thực b mà lũy thừa n của b bằng a ($b^n = a$).
Công thức cộng xác suất	Nếu A và B là hai biến cố bất kì liên quan đến một phép thử thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Đạo hàm cấp hai	Đạo hàm của hàm số $y' = f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.
Đạo hàm của hàm số tại một điểm	Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Đạo hàm của hàm số trên một khoảng	Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên $(a; b)$.
Định lí ba đường vuông góc	Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không nằm trong (α), đồng thời không vuông góc với (α). Hình chiếu của b lên mặt phẳng (α) là đường thẳng b'. Khi đó, a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	Đường thẳng d được gọi là vuông góc mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α).
Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b	Là đường thẳng đồng thời vừa cắt vừa vuông góc với cả hai đường thẳng a và b.
Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α)	Là góc tạo bởi đường thẳng a và hình chiếu a' của a lên mặt phẳng (α).
Góc giữa hai đường thẳng	Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a, b.
Góc nhị diện	Hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng có chung bờ a.

Góc phẳng nhị diện	Góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện còn hai cạnh nằm trong hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.
Hai đường thẳng vuông góc	Là hai đường thẳng có góc giữa chúng bằng $90°$.
Hai mặt phẳng vuông góc	Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Hàm số hợp	Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Hàm số $y = f(u(x))$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $f(u)$ và $u(x)$.
Hàm số lôgarit	Là hàm số có dạng $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$.
Hàm số mũ	Là hàm số có dạng $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$.
Hình chiếu của một điểm lên một mặt phẳng	Là hình chiếu vuông góc của điểm đó lên mặt phẳng.
Hình chóp cụt đều	Là phần hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy, cắt các cạnh bên của hình chóp đều.
Hình chóp đều	Là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
Hình lăng trụ đều	Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
Hình lăng trụ đứng	Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song	Là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	Là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.
Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song	Là khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song	Là khoảng cách giữa một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng	Là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên đường thẳng.
Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	Là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên mặt phẳng.
Khối chóp	Là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.
Khối chóp cụt đều	Là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt đều kể cả hình chóp cụt đều ấy.
Khối lăng trụ	Là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.
Lôgarit cơ số a của b	Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ thì $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow b = a^\alpha$.
Lôgarit của một luỹ thừa	Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ thì $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.
Lôgarit của một thương	Với $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ thì $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

Lôgarit của một tích	Với $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ thì $\log_a(x \,.\, y) = \log_a x + \log_a y$.
Lôgarit thập phân	Là lôgarit cơ số 10, kí hiệu là log hay lg. Lôgarit thập phân của b viết là $\log b$ hay $\lg b$.
Lôgarit tự nhiên	Là lôgarit cơ số e, kí hiệu là ln. Lôgarit tự nhiên của b viết là $\ln b$.
Luỹ thừa bậc n của a	Với số nguyên dương n, luỹ thừa bậc n của a là tích của n thừa số a.
Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng	Là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó.
Phép chiếu vuông góc	Là phép chiếu có phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu.
Phương trình lôgarit cơ bản	Phương trình có chứa ẩn ở biểu thức của lôgarit, có dạng $\log_a x = b$ với $a > 0, a \neq 1$.
Phương trình mũ cơ bản	Phương trình có chứa ẩn ở mũ, có dạng $a^x = b$ với $a > 0, a \neq 1$.
Số đo của góc nhị diện	Số đo của góc phẳng nhị diện.
Thể tích khối chóp	Thể tích hình chóp có diện tích đáy $\boldsymbol{S}$ và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}\boldsymbol{S}h$.
Thể tích khối lăng trụ	Thể tích hình lăng trụ có diện tích đáy $\boldsymbol{S}$ và chiều cao h là $V = \boldsymbol{S}h$.
Thể tích khối chóp cụt đều	Thể tích khối chóp cụt đều có diện tích hai đáy là $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}'$ và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}h(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}' + \sqrt{\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}'})$.
Tiếp tuyến của đường cong	Vị trí giới hạn của cát tuyến PQ khi điểm Q tiến dần đến điểm P trên đường cong.
Xác suất của hợp hai biến cố xung khắc	Nếu A và B là hai biến cố xung khắc bất kì liên quan đến một phép thử thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ
Số 07 đường Hà Nội, phường Vĩnh Ninh, thành phố Huế
Điện thoại: 0234.3834486
Email: nxbdhhue@hue.uni.edu.vn - Website: htth://huph.hueuni.edu.vn

---

TOÁN 11_Tập 2

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: TRẦN BÌNH TUYÊN

Chịu trách nhiệm nội dung:
Quyền Tổng biên tập: NGUYỄN CHÍ BẢO

Biên tập:
TRƯƠNG THỊ MỸ VÂN

Trình bày bìa, minh hoạ:
NGUYỄN DIỄM QUỲNH

Trình bày sách, sửa bản in:
NGUYỄN ĐỖ MINH QUÂN, TRỊNH THÁI PHƯỢNG
TRẦN NGỌC BẢO KIM, LẠI THỊ KIỀU VI, ĐÀM HUỲNH PHƯƠNG THẢO
NGUYỄN ĐOAN TRANG, NGUYỄN VĂN VĨNH
NGUYỄN VŨ KHÁNH LINH, TRẦN THỊ THU NGUYỆT

Liên kết xuất bản:
Công ty TNHH Education Solutions Việt Nam
Tầng 1, Toà nhà Vietphone Building
Số 64 Nguyễn Đình Chiểu, Phường Đa Kao, Quận 1, Tp.HCM
