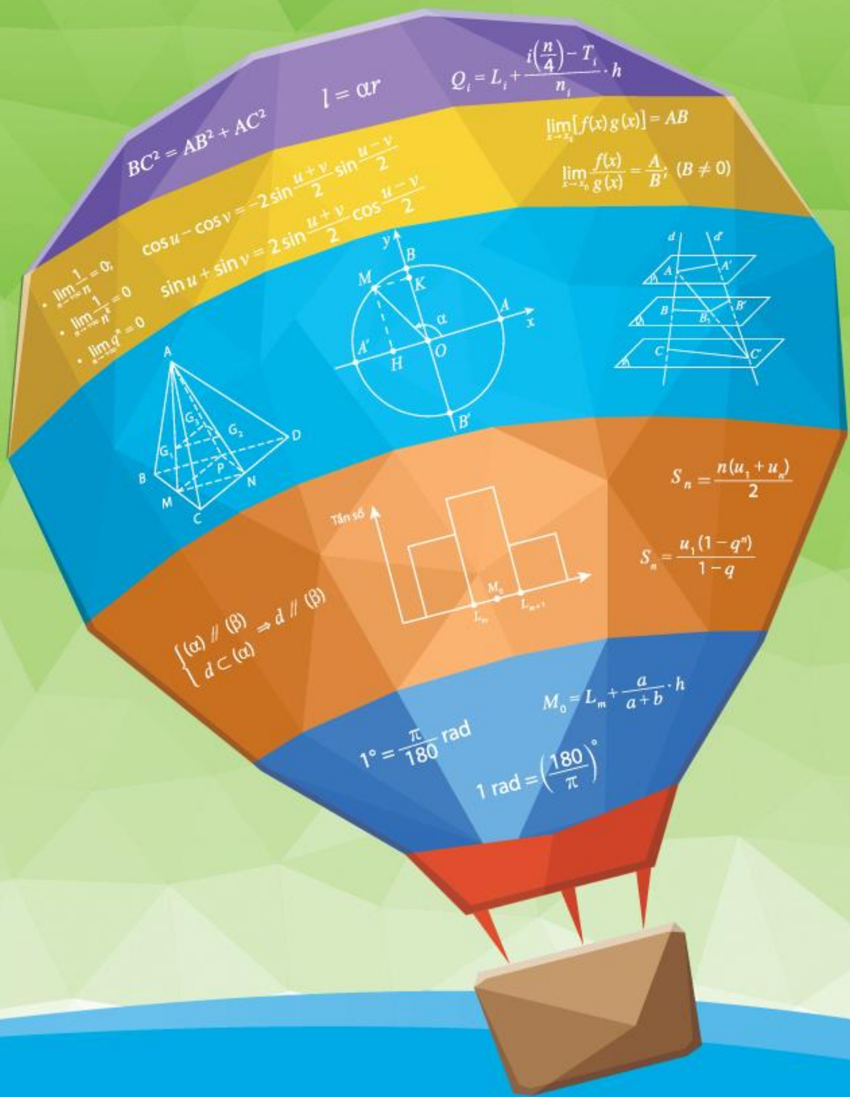
Cùng Khám Phá

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

TOÁN 11

Tập 1



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC HUẾ

DTP
Education Solutions

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA
THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 11

Họ và Tên	Chức vụ Hội đồng
Ông LÊ MẬU HẢI	Chủ tịch
Bà CAO THỊ HÀ	Phó Chủ tịch
Ông PHẠM ĐỨC TÀI	Uỷ viên, Thư kí
Ông PHẠM KHẮC BAN	Uỷ viên
Ông NGUYỄN HẮC HẢI	Uỷ viên
Ông NGUYỄN DOÃN PHÚ	Uỷ viên
Ông NGUYỄN CHIẾN THẮNG	Uỷ viên
Bà NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN	Uỷ viên
Ông ĐINH CAO THƯỢNG	Uỷ viên
Bà VŨ THỊ NHƯ TRANG	Uỷ viên
Ông PHẠM ĐÌNH TÙNG	Uỷ viên

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

TOÁN 11

Tập 1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ

DTP Education Solutions

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy, cô giáo và phụ huynh thân mến!

Toán 11 – Cùng khám phá là một sự tiếp nối các cuốn sách giáo khoa Toán cùng bộ đã có ở các lớp dưới, được biên soạn nhằm đáp ứng yêu cầu đổi mới nội dung và phương pháp dạy – học, hướng tới mục tiêu chuẩn bị cho học sinh hoà nhập tốt với xã hội hôm nay và ngày mai. Sách được biên soạn theo tinh thần kế thừa những yếu tố tích cực của các bộ sách giáo khoa Việt Nam thời kì trước đây, đồng thời khai thác có chọn lọc kinh nghiệm quốc tế về phát triển sách giáo khoa hiện đại và vận dụng những lí thuyết dạy học đang được thừa nhận rộng rãi trên thế giới.

Thông qua các mục *Mở đầu chương*, *Khởi động*, *Hoạt động*, *Luyện tập – Vận dụng* hay *Em có biết*, sách giáo khoa ***Toán 11 – Cùng khám phá*** xây dựng mối liên kết giữa Toán học với cuộc sống cũng như các môn học khác, giúp đỡ và khuyến khích học sinh ứng dụng kiến thức thu nhận được không chỉ trong lĩnh vực Toán học mà còn cả trong việc giải quyết nhiều vấn đề ngoài Toán học. Các hoạt động xuyên suốt ***Toán 11 – Cùng khám phá*** với phương thức trình bày đa dạng vừa tạo điều kiện để học sinh trải nghiệm, khám phá, tự học, tự đánh giá, vừa thuận lợi cho giáo viên tổ chức các hoạt động dạy học, vừa giúp phụ huynh kiểm tra kiến thức của các em.

Đúng như tên gọi của nó, sách giáo khoa ***Toán 11 – Cùng khám phá*** giúp các em khám phá kiến thức và có thể vận dụng được những khái niệm tưởng chừng như trừu tượng vào việc giải quyết nhiều vấn đề của khoa học và thực tiễn.

Ban biên soạn mong rằng bộ sách sẽ khơi gợi niềm vui và hứng thú cho các em học sinh trong quá trình tìm hiểu toán học. Chúc các em khám phá được nhiều điều thú vị của thế giới và nhận ra sự hiện diện khắp nơi của toán học trong cuộc sống quanh ta.

Em hãy giữ gìn sách cẩn thận để sử dụng được lâu dài nhé!

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Các chương, bài của **Toán 11 Tập 1** được trình bày theo một cấu trúc thống nhất, gồm các mục:

1. Mở đầu chương	Giới thiệu chương thông qua việc thiết lập sự liên hệ giữa chủ đề của chương với các tình huống thực tiễn. Mục tiêu học tập cũng được nêu trong đề mục này.
2. Các bài học: Mỗi bài học thường được thiết kế với các phần:	
HOẠT ĐỘNG	Thông qua trải nghiệm, khám phá, học sinh tham gia vào việc hình thành kiến thức mới, nhận ra ứng dụng của kiến thức đó trong những ngữ cảnh cụ thể.
KIẾN THỨC TRỌNG TÂM	Được đặt trong khung màu với biểu tượng bóng đèn, trình bày những kiến thức trọng tâm của bài học.
VÍ DỤ	Cung cấp ví dụ có lời giải để minh hoạ, giúp học sinh nhận thấy các ý tưởng hay lập luận toán học được diễn đạt rõ ràng và chính xác bằng ngôn ngữ toán học như thế nào, kiến thức vừa học có thể được sử dụng ra sao.
LUYỆN TẬP **VẬN DỤNG**	Tạo cơ hội cho học sinh sử dụng kiến thức vừa học vào việc giải quyết những vấn đề cụ thể của toán học hay của thực tiễn, qua đó hình thành và phát triển các kĩ năng gắn với kiến thức đang bàn đến.
BÀI TẬP	Gồm một hệ thống bài tập từ đơn giản - áp dụng trực tiếp các khái niệm toán học vừa được nghiên cứu, đến những bài đòi hỏi việc vận dụng kiến thức Toán học ở mức độ cao hơn về lập luận, kĩ năng. Nhiều vấn đề thực tiễn được đưa vào, giúp học sinh nhận ra ý nghĩa của kiến thức vừa học.
3. Ôn tập chương	Qua hệ thống bài tập ôn tập (tự luận và trắc nghiệm), học sinh có thể kiểm tra lại hiểu biết của mình về các khái niệm và ý tưởng quan trọng được nghiên cứu trong chương, kết nối chúng với nhau trong việc giải quyết những vấn đề đa dạng.

Bên cạnh đó, trong các bài còn có thêm một số đề mục bổ trợ sau đây:

Ghi chú / Lưu ý	**NHẮC LẠI**	**THẢO LUẬN**	**EM CÓ BIẾT**
Nhấn mạnh hoặc mở rộng kiến thức, chú thích những thông tin quan trọng liên quan đến các khái niệm cốt lõi.	Nhắc lại những khái niệm hoặc định nghĩa mà học sinh đã học trước đó, từ đó tạo mối liên hệ giữa chúng với các chủ đề đang được nghiên cứu.	Đặt một số câu hỏi liên quan đến các khái niệm mà học sinh đang học nhằm thúc đẩy sự tương tác tích cực, chủ động giữa giáo viên với học sinh và giữa học sinh với nhau.	Giới thiệu một số câu chuyện thú vị về toán học, lịch sử toán học và các nhà toán học.

MỤC LỤC

Phần ĐẠI SỐ

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Góc lượng giác 2
Bài 2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác 8
Bài 3. Các phép biến đổi lượng giác 16
Bài 4. Hàm số lượng giác và đồ thị 20
Bài 5. Phương trình lượng giác cơ bản 31
Ôn tập chương 41

Chương 2. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

Bài 1. Dãy số 44
Bài 2. Cấp số cộng 50
Bài 3. Cấp số nhân 53
Ôn tập chương 56

Chương 3. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 1. Giới hạn của dãy số 59
Bài 2. Giới hạn của hàm số 65
Bài 3. Hàm số liên tục 75
Ôn tập chương 80

Phần HÌNH HỌC

Chương 4. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

Bài 1. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian 83
Bài 2. Hai đường thẳng song song 95
Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song 101
Bài 4. Hai mặt phẳng song song 106
Bài 5. Phép chiếu song song 115
Bài 6. Hoạt động thực hành và trải nghiệm 120
Ôn tập chương 124

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

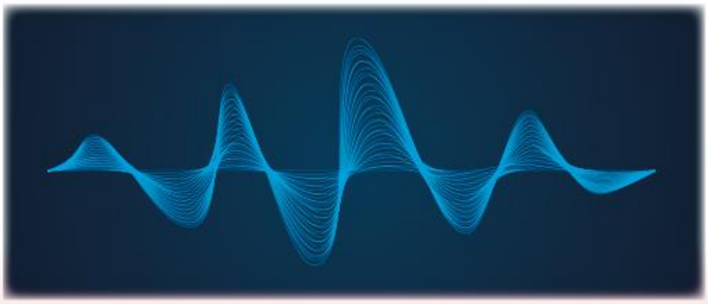
Chương 5. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 1. Mẫu số liệu ghép nhóm 127
Bài 2. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm 131
Bài 3. Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm 135
Bài 4. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm 142
Bài 5. Hoạt động thực hành và trải nghiệm 146
Ôn tập chương 147

Bảng tra cứu thuật ngữ 152

Bảng giải thích thuật ngữ 153

Phần ĐẠI SỐ



CHƯƠNG 1 Hàm số lượng giác. Phương trình lượng giác

Hàm số lượng giác đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu nhiều hiện tượng trong thực tế như thuỷ triều, âm thanh, vòng đu quay,... Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những kiến thức cơ bản về hàm số lượng giác và phương trình lượng giác, cùng với một số ứng dụng của chúng trong thực tiễn.

- Nhận biết được góc lượng giác và giá trị lượng giác của góc lượng giác;
- Mô tả được quan hệ giữa các giá trị lượng giác, các phép biến đổi lượng giác;
- Tìm hiểu được hàm số lượng giác và đồ thị của chúng;
- Giải được các phương trình lượng giác cơ bản;
- Vận dụng được kiến thức về hàm số lượng giác và phương trình lượng giác để giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

BÀI 1

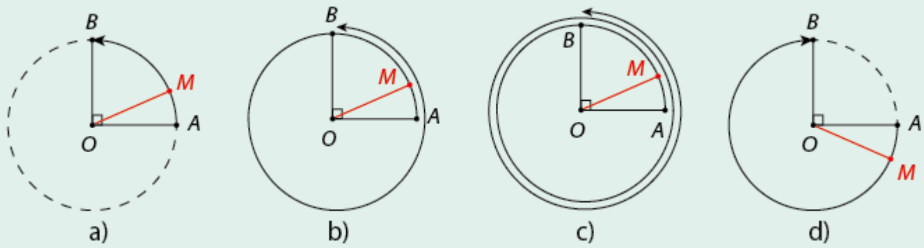
GÓC LƯỢNG GIÁC

Trong hình học, ta đã quen thuộc với các góc có số đo thay đổi từ 0° đến 180°. Vậy có tồn tại các góc có số đo nằm ngoài khoảng này không? Chúng có tên gọi là gì?

I Khái niệm góc lượng giác

HOẠT ĐỘNG 1

Trong mỗi *Hình 1.1a, 1.1b, 1.1c* và *1.1d*, điểm *M* di động trên đường tròn tâm *O* từ *A* đến *B* theo chiều mũi tên.



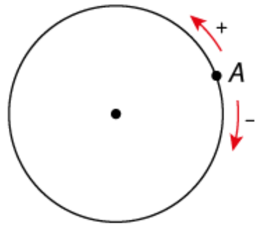
Hình 1.1

a) Với mỗi *Hình 1.1a, 1.1b, 1.1c* và *1.1d*, cho biết điểm *M* di động trên đường tròn từ *A* đến *B* theo chiều quay của kim đồng hồ hay ngược với chiều quay của kim đồng hồ?

b) Số vòng quay khi điểm *M* di động trên đường tròn từ *A* đến *B* theo *Hình 1.1b* và theo *Hình 1.1c* lần lượt nhiều hơn bao nhiêu vòng so với số vòng quay khi điểm *M* di động trên đường tròn từ *A* đến *B* theo *Hình 1.1a*?

Đường tròn định hướng

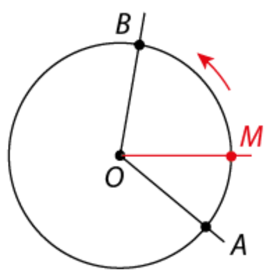
Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



Hình 1.2

Góc lượng giác

Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm *A* và *B*. Một điểm *M* di động trên đường tròn định hướng luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ *A* đến *B*.



Hình 1.3

Tia *OM* quay xung quanh gốc *O* từ tia *OA* đến tia *OB* tạo ra một góc lượng giác có tia đầu là *OA* và tia cuối là *OB*. Góc lượng giác đó được kí hiệu là (*OA*, *OB*).

Ngoài ra, điểm *M* cũng tạo ra một cung lượng giác có điểm đầu *A* và điểm cuối *B*. Cung lượng giác đó được kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$.

Lưu ý: Với hai điểm *A* và *B* trên đường tròn định hướng, ta có vô số góc lượng giác tia đầu *OA* và tia cuối *OB* và cũng có vô số cung lượng giác có điểm đầu *A* và điểm cuối *B*.

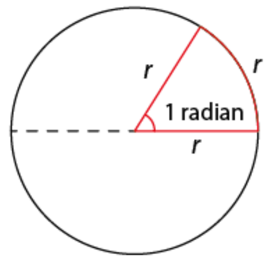
II Số đo của góc lượng giác

1. Độ và radian

a) Đơn vị radian

Ta đã biết đơn vị độ được sử dụng để đo góc. Ngoài đơn vị độ, người ta còn dùng đơn vị radian (đọc là "ra-đi-an") để đo góc và cung.

Trên đường tròn tuỳ ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 radian.
Góc ở tâm chắn cung có số đo 1 radian được gọi là góc có số đo 1 radian.



Hình 1.4

Ghi chú: 1 radian được viết tắt là 1 rad.

b) Quan hệ giữa độ và radian

HOẠT ĐỘNG 2

a) Trên một đường tròn, cung nửa đường tròn có số đo bằng bao nhiêu radian? Góc ở tâm chắn cung nửa đường tròn có số đo bằng bao nhiêu radian?

b) Từ đó tìm mối liên hệ giữa đơn vị độ và đơn vị radian.

Theo Hoạt động 2, ta có:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad và } 1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

VÍ DỤ 1

Đổi 20° và 160° ra radian.

Giải

Do $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad nên $20^\circ = \frac{20\pi}{180} = \frac{\pi}{9}$ rad và $160^\circ = \frac{160\pi}{180} = \frac{8\pi}{9}$ rad.

LUYỆN TẬP 1

Đổi 5 rad và $\frac{\pi}{8}$ rad ra độ.

Lưu ý: Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc có số đo $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là góc có số đo $\frac{\pi}{2}$ rad.

Bảng chuyển đổi thông dụng

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

c) Độ dài của một cung tròn

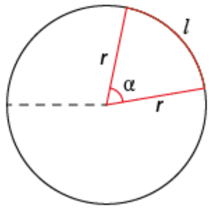
HOẠT ĐỘNG 3

Trên đường tròn bán kính r, hãy tính:

a) Độ dài của cung nửa đường tròn;

b) Độ dài của cung có số đo α rad.

Trên đường tròn bán kính r, cung có số đo α rad có độ dài $l = \alpha r$.



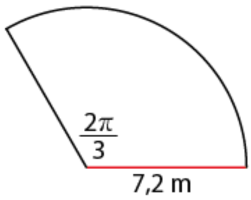
Hình 1.5

VÍ DỤ 2

Trên một đường tròn có bán kính 7,2 m, tìm độ dài của cung có số đo $\frac{2\pi}{3}$.

Giải

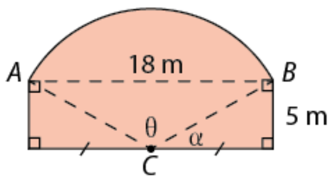
Độ dài của cung là: $l = \frac{2\pi}{3} \cdot 7{,}2 = 4{,}8\pi$ (m).



Hình 1.6

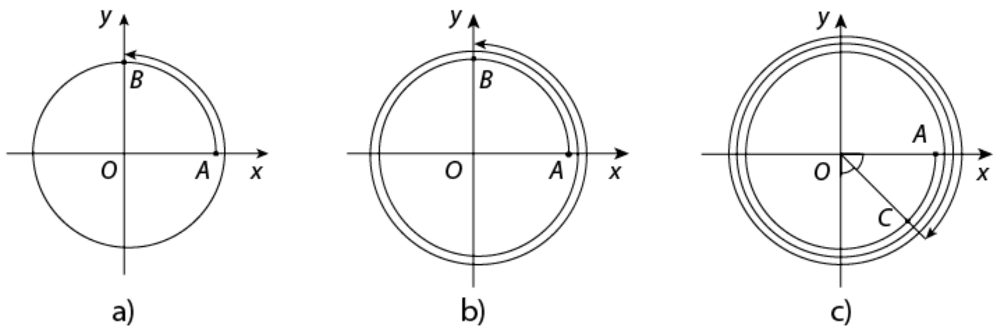
VẬN DỤNG

Một bức tường của một ngôi nhà có dạng như *Hình 1.7*, trong đó cung AB là một cung của đường tròn tâm C, bán kính AC. Tính chu vi của bức tường.



Hình 1.7

2. Số đo của góc lượng giác



Hình 1.8

Xét cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$ trong *Hình 1.8a*. Khi điểm M di động trên đường tròn theo chiều dương từ A đến B tạo nên cung $\frac{1}{4}$ đường tròn (cung này có số đo $\frac{\pi}{2}$), sau đó M đi tiếp một vòng tròn nữa (thêm 2π). Khi đó ta nói cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$ có số đo là $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.

Tương tự, cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AB}$ trong *Hình 1.8b* có số đo là $\frac{\pi}{2} + 2\pi + 2\pi = \frac{9\pi}{2}$.

Xét cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AC}$ trong *Hình 1.8c*. Khi điểm M di động trên đường tròn theo chiều âm từ A đến C tạo nên cung $\frac{1}{8}$ đường tròn (cung này có số đo $-\frac{\pi}{4}$), sau đó M đi tiếp ba vòng tròn nữa. Khi đó ta nói cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AC}$ có số đo là $\frac{-\pi}{4} - 2\pi - 2\pi - 2\pi = -\frac{25\pi}{4}$.

HOẠT ĐỘNG 4

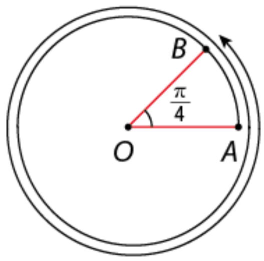
Hãy xác định số đo của mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ khi điểm *M* di động trên đường tròn từ *A* đến *B* trong *Hình 1.1*.

Số đo của góc lượng giác (*OA*, *OB*), kí hiệu sđ(*OA*, *OB*), là số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ tương ứng.

VÍ DỤ 3

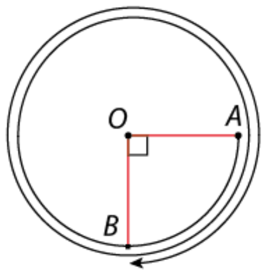
Tìm số đo của góc lượng giác (*OA*, *OB*) trong các hình sau:

a)



Hình 1.9

b)



Hình 1.10

Giải

a) Cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ có số đo là $\frac{\pi}{4} + 2\pi + 2\pi = \frac{17\pi}{4}$. Vậy sđ(*OA*, *OB*) $= \frac{17\pi}{4}$.

b) Cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ có số đo là $-\frac{\pi}{2} - 2\pi - 2\pi = -\frac{9\pi}{2}$. Vậy sđ(*OA*, *OB*) $= -\frac{9\pi}{2}$.

LUYỆN TẬP 2

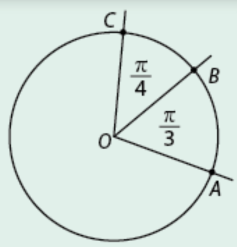
Tìm số đo của mỗi góc lượng giác (*OA*, *OB*) trong *Hình 1.1*.

Lưu ý:

- Mỗi góc lượng giác được xác định bởi tia đầu, tia cuối và số đo của nó.
- Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối sai khác nhau một bội nguyên của 2π.
  Ta viết: sđ(*OA*, *OB*) $= \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong đó α là số đo của một góc lượng giác tuỳ ý có tia đầu *OA* và tia cuối *OB*.
- Nếu dùng đơn vị độ thì ta có thể viết: sđ(*OA*, *OB*) $= a° + k360°, k \in \mathbb{Z}$, trong đó $a°$ là số đo của một góc lượng giác tuỳ ý có tia đầu *OA* và tia cuối *OB*.

HOẠT ĐỘNG 5

Giả sử sđ(*OA*, *OB*) $= \frac{\pi}{3}$ và sđ(*OB*, *OC*) $= \frac{\pi}{4}$ (*Hình 1.11*). Xác định sđ(*OA*, *OC*).



Hình 1.11

Tổng quát, người ta chứng minh được hệ thức Chasles về số đo của góc lượng giác sau đây:

Nếu OA, OB và OC là ba tia bất kì thì sđ(OA, OB) + sđ(OB, OC) = sđ$(OA, OC) + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Từ hệ thức trên ta suy ra: Nếu OA, OB và OC là ba tia bất kì thì

$$\text{sđ}(OB, OC) = \text{sđ}(OA, OC) - \text{sđ}(OA, OB) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

VÍ DỤ 4

Chứng minh rằng nếu sđ(OA, OB) = sđ$(OB, OC) = \frac{\pi}{2}$ thì sđ$(OA, OC) = (1-2k)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Giải

Ta có: sđ(OA, OB) + sđ(OB, OC) = sđ$(OA, OC) + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra sđ$(OA, OC) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - k2\pi = (1-2k)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

LUYỆN TẬP 3

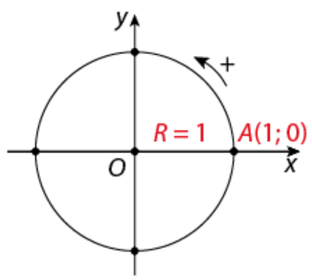
Nếu góc lượng giác (OA, OB) và (OA, OC) lần lượt có số đo là $-\frac{7\pi}{4}$ và $\frac{13\pi}{4}$ thì góc lượng giác (OB, OC) có số đo bằng bao nhiêu, biết rằng $4\pi <$ sđ$(OB, OC) < 6\pi$?

3. Đường tròn lượng giác

HOẠT ĐỘNG 6

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ và tìm giao điểm của nó với các trục toạ độ.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường tròn định hướng tâm O, bán kính $R = 1$ và nhận $A(1; 0)$ làm điểm gốc được gọi là đường tròn lượng giác.



Hình 1.12

Lưu ý: Với mỗi góc lượng giác có số đo α, tồn tại duy nhất một điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho sđ$(OA, OM) = \alpha$. Ta gọi M là điểm biểu diễn của góc lượng giác đó.

VÍ DỤ 5

Trên đường tròn lượng giác, tìm điểm biểu diễn của các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{33\pi}{4}$;

b) $-750°$.

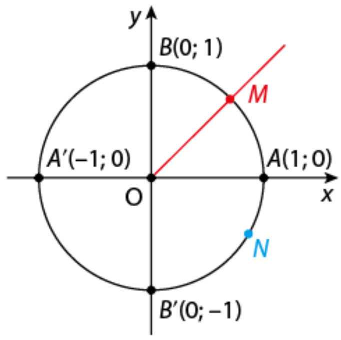
Giải

a) $\dfrac{33\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 4.2\pi$.

Vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\dfrac{33\pi}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (*Hình 1.13*).

b) $-750° = -30° + (-2).360°$.

Vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $-750°$ là điểm N trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB'}$ sao cho $\overset{\frown}{AN} = \dfrac{1}{3}\overset{\frown}{AB'}$ (*Hình 1.13*).



Hình 1.13

LUYỆN TẬP 4

Trên đường tròn lượng giác, tìm điểm biểu diễn của các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\dfrac{19\pi}{3}$; b) $-1\,125°$.

BÀI TẬP

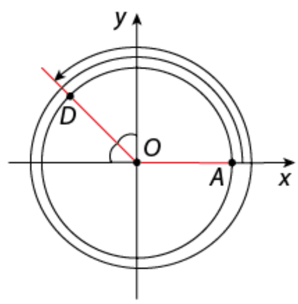
1.1. Đổi số đo của các góc sau đây ra radian:

a) $36°$; b) $-50°$; c) $25°30'$.

1.2. Đổi số đo của các cung sau đây ra độ, phút, giây:

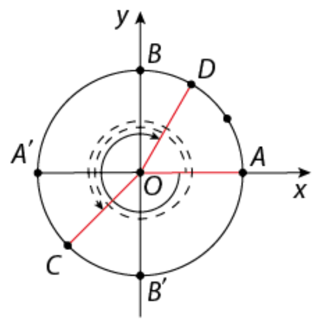
a) $\dfrac{\pi}{36}$; b) $\dfrac{7\pi}{15}$; c) -3.

1.3. Xác định số đo của góc lượng giác (OA, OD) trong *Hình 1.14* theo đơn vị radian và theo đơn vị độ, biết rằng OD là tia phân giác của góc phần tư thứ hai.



Hình 1.14

1.4. Xác định số đo của các góc lượng giác (OA, OC) và (OA, OD) trong *Hình 1.15* (điểm C là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{A'B'}$, điểm D là điểm nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ sao cho $\overset{\frown}{AD} = \dfrac{2}{3}\overset{\frown}{AB}$). Viết số đo này theo đơn vị radian và theo đơn vị độ.



Hình 1.15

1.5. Trên đường tròn lượng giác, tìm điểm biểu diễn của các góc lượng giác có số đo sau:

a) $-\dfrac{41\pi}{4}$; b) $\dfrac{11\pi}{3}$; c) $780°$; d) $-405°$.

BÀI 2

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

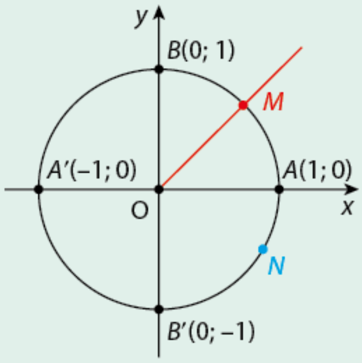
Ở lớp 10, ta đã biết các giá trị lượng giác của góc α, với $0° \leq \alpha \leq 180°$. Các giá trị lượng giác của một góc lượng giác có được định nghĩa tương tự như vậy không?

I Giá trị lượng giác của góc lượng giác

1. Định nghĩa

HOẠT ĐỘNG 1

Trên đường tròn lượng giác, gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{9\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{6}$. Tìm toạ độ của M và N.

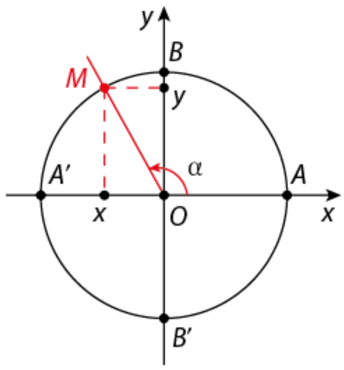


Hình 1.16

Cho góc lượng giác có số đo α rad (ta còn gọi tắt là góc lượng giác α). Trên đường tròn lượng giác, gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của góc lượng giác này.

- Ta gọi y là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$:
$$\sin\alpha = y.$$
- Ta gọi x là côsin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$:
$$\cos\alpha = x.$$
- Nếu $x \neq 0$ thì ta gọi tỉ số $\frac{y}{x}$ là tang của α và kí hiệu là $\tan\alpha$:
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$
- Nếu $y \neq 0$ thì ta gọi tỉ số $\frac{x}{y}$ là côtang của α và kí hiệu là $\cot\alpha$:
$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc lượng giác α.



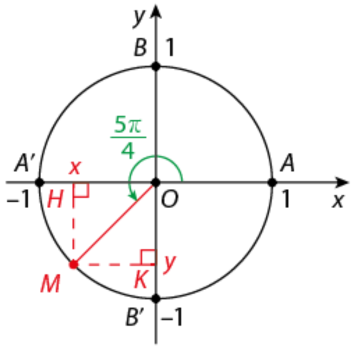
Hình 1.17

Lưu ý: Ta cũng gọi trục tung là trục sin, còn trục hoành là trục côsin.

VÍ DỤ 1

Tìm các giá trị lượng giác của góc $\frac{5\pi}{4}$.

Giải



Hình 1.18

Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn của góc lượng giác $\frac{5\pi}{4}$.

Gọi x và y lần lượt là hoành độ và tung độ của M. Ta có $x < 0$, $y < 0$.

Vì tam giác OHM vuông tại H và có góc $\widehat{MOH} = 45°$ nên $OH = OM \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì tam giác OKM vuông tại K và có góc $\widehat{MOK} = 45°$ nên $OK = OM \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra: $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\sin\frac{5\pi}{4} = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\frac{5\pi}{4} = \frac{\sin\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{4}} = 1$ và $\cot\frac{5\pi}{4} = \frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{4}} = 1$.

LUYỆN TẬP 1

Tìm các giá trị lượng giác của góc 330°.

Lưu ý:

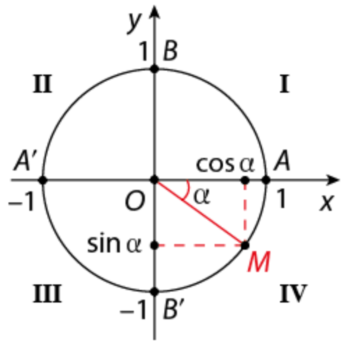
- Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 \le \sin\alpha \le 1$ và $-1 \le \cos\alpha \le 1$.
- Vì các góc lượng giác α và $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác nên:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$$
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- $\tan\alpha$ xác định khi và chỉ khi $\cos\alpha \neq 0$ hay $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, còn $\cot\alpha$ xác định khi và chỉ khi $\sin\alpha \neq 0$ hay $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Dấu của các giá trị lượng giác của góc lượng giác α phụ thuộc vào vị trí của điểm biểu diễn M của góc này trên đường tròn lượng giác.

  Ta có bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau:

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–



Hình 1.19

2. Giá trị lượng giác của một số góc lượng giác đặc biệt

HOẠT ĐỘNG 2

Hãy viết lại bảng các giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt từ 0° đến 90° đã học ở lớp 10.

Tương tự, ta cũng có bảng các giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt từ 0 rad đến $\frac{\pi}{2}$ rad như sau:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

VÍ DỤ 2

Tính $\sin\frac{13\pi}{3}, \cos\frac{13\pi}{3}, \tan\frac{13\pi}{3}, \cot\frac{13\pi}{3}$.

Giải

$\sin\frac{13\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\frac{13\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

$\tan\frac{13\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{13\pi}{3}}{\cos\frac{13\pi}{3}} = \sqrt{3}$ và $\cot\frac{13\pi}{3} = \dfrac{\cos\frac{13\pi}{3}}{\sin\frac{13\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

LUYỆN TẬP 2

Tính $\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right), \cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right), \tan\left(-\frac{35\pi}{6}\right), \cot\left(-\frac{35\pi}{6}\right)$.

3. Sử dụng máy tính cầm tay để tính các giá trị lượng giác của một góc

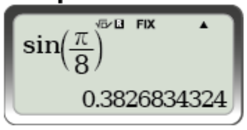
Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính (đúng hoặc gần đúng) các giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì.

VÍ DỤ 3

Sử dụng máy tính cầm tay để tính: $\sin\frac{\pi}{8}, \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right), \tan(20°)$.

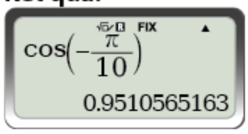
Giải

Kết quả:

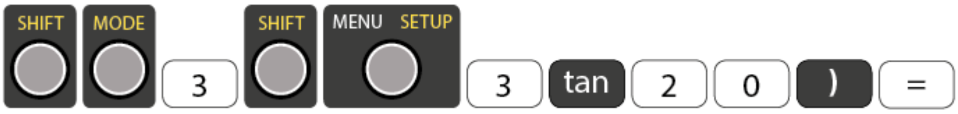


Vậy $\sin\frac{\pi}{8} \approx 0{,}38268344324$.

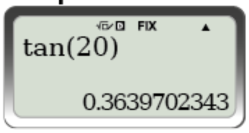
Kết quả:



Vậy $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx 0{,}9510565163$.



Kết quả:



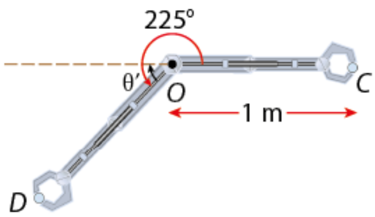
Vậy $\tan(20°) \approx 0{,}3639702343$.

LUYỆN TẬP 3

Tính $\sin 315°$, $\cos\frac{12\pi}{7}$, $\tan(-168°)$.

VẬN DỤNG

Một cánh tay robot dài 1 m được điều khiển để gắp một vật tại điểm *C*, rồi xoay theo chiều dương một góc 225° để thả vật tại điểm *D* như *Hình 1.20*. Chọn hệ trục toạ độ *Oxy* sao cho tâm của cánh tay robot trùng với *O* và *C* có toạ độ là (1; 0). Tìm toạ độ của vật tại điểm *D*.



Hình 1.20

II Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

1. Các hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác

HOẠT ĐỘNG 3

a) Từ định nghĩa của $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, hãy tính: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

b) Từ định nghĩa của $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$, hãy tính: $\tan\alpha.\cot\alpha$.

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hệ thức sau:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\alpha \neq l\pi, l \in \mathbb{Z}$

VÍ DỤ 4

a) Cho $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha$.

b) Cho $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$, với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

Giải

a) Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{9}{25}$, tức là $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ hoặc $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên điểm biểu diễn của góc α thuộc góc phần tư thứ III. Do đó $\cos\alpha < 0$.

Vậy $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

b) Ta có $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{16}{25}$, tức là $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên điểm biểu diễn của góc α thuộc góc phần tư thứ IV. Do đó $\cos\alpha > 0$.

Vậy $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Từ đó $\sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$.

VÍ DỤ 5

Cho $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng: $\frac{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha} = 3\tan^2\alpha + 2$.

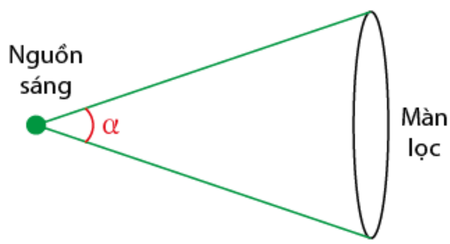
Giải

Vì $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nên $\cos\alpha \neq 0$, do đó cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh đều có nghĩa.

Ta có: $\frac{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha} = 2\tan^2\alpha + 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 2\tan^2\alpha + 1 + 1 + \tan^2\alpha = 3\tan^2\alpha + 2$.

LUYỆN TẬP 4

Cường độ ánh sáng I đi xuyên qua một màn lọc ánh sáng được tính bởi công thức: $I = I_m - \frac{I_m}{1+\cot^2\alpha}$, trong đó I_m là cường độ ánh sáng đã chiếu lên màn lọc ánh sáng và α là góc như trong *Hình 1.21* (nguồn: *https://www.vedantu.com/iit-jee/malus-law*). Chứng minh rằng: $I = I_m\cos^2\alpha$.



Hình 1.21

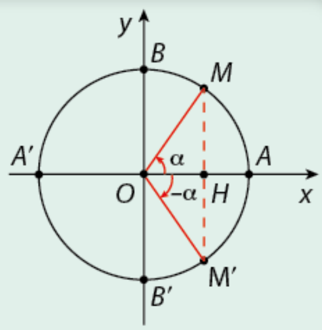
2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

a) Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$

HOẠT ĐỘNG 4

a) Dựa vào *Hình 1.22*, hãy so sánh $\cos(-\alpha)$ và $\cos\alpha$; $\sin(-\alpha)$ và $\sin\alpha$.

b) Từ đó so sánh $\tan(-\alpha)$ và $\tan\alpha$; $\cot(-\alpha)$ và $\cot\alpha$.



Hình 1.22

Đối với hai góc đối nhau α và $-\alpha$, ta có:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

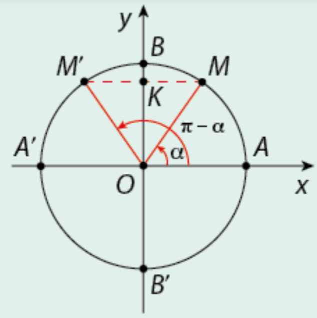
(giả thiết $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ xác định).

b) Hai góc bù nhau: α và $(\pi - \alpha)$

HOẠT ĐỘNG 5

a) Dựa vào *Hình 1.23*, hãy so sánh $\sin(\pi - \alpha)$ và $\sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha)$ và $\cos\alpha$.

b) Từ đó so sánh $\tan(\pi - \alpha)$ và $\tan\alpha$; $\cot(\pi - \alpha)$ và $\cot\alpha$.



Hình 1.23

Đối với hai góc bù nhau α và $(\pi - \alpha)$, ta có:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

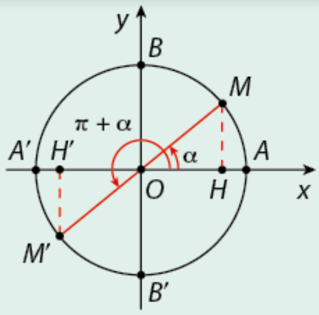
(giả thiết $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ xác định).

c) Hai góc hơn kém π: α và $(\alpha + \pi)$

HOẠT ĐỘNG 6

a) Dựa vào *Hình 1.24*, hãy so sánh $\sin(\alpha + \pi)$ và $\sin\alpha$; $\cos(\alpha + \pi)$ và $\cos\alpha$.

b) Từ đó so sánh $\tan(\alpha + \pi)$ và $\tan\alpha$; $\cot(\alpha + \pi)$ và $\cot\alpha$.



Hình 1.24

Đối với hai góc α và $(\alpha + \pi)$, ta có:

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$

(giả thiết $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ xác định).

Lưu ý: Từ tính chất $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$ và $\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$, ta suy ra:

$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha,\ \forall k\in\mathbb{Z};$

$\cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha,\ \forall k\in\mathbb{Z};$

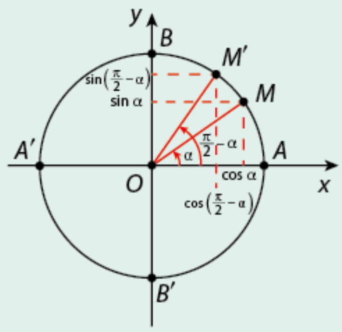
(giả thiết $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ xác định).

d) Hai góc phụ nhau: α và $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

HOẠT ĐỘNG 7

a) Dựa vào *Hình 1.25*, hãy so sánh $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ và $\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ và $\sin\alpha$.

b) Từ đó so sánh $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ và $\cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ và $\tan\alpha$.



Hình 1.25

Đối với hai góc phụ nhau α và $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, ta có:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

(giả thiết $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ xác định).

VÍ DỤ 6

Không dùng máy tính cầm tay, tính $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)$, $\tan\left(\frac{31\pi}{6}\right)$.

Giải

$\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=\cos\frac{13\pi}{4}=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)=\sin\left(7\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\tan\left(\frac{31\pi}{6}\right)=\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

VÍ DỤ 7

Rút gọn biểu thức $A=\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cot(-\alpha)$ (giả thiết $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ và $\cot(-\alpha)$ xác định).

Giải

$A=-\cos\alpha+\cos\alpha+\tan\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cot\alpha$

$\quad=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cot\alpha$

$\quad=\cot\alpha-\cot\alpha=0.$

LUYỆN TẬP 5

Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc α:

$$B = \sin^2(\alpha + \pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha).$$

BÀI TẬP

1.6. Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\tan^2(30°) - \cot^2(240°)$;

c) $\sin^3\frac{\pi}{2} - \cos 5\pi$;

d) $\tan\frac{11\pi}{3} - \cot\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

1.7. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong các trường hợp sau:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

1.8. Giả sử $\sin\alpha = t$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính các giá trị sau theo t:

a) $\sin(\alpha + \pi)$;

b) $\sin(\alpha - \pi)$;

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

d) $\tan(3\pi + \alpha)$.

1.9. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O trùng với tâm của đồng hồ trong *Hình 1.26*, tia Oy chỉ hướng 12 giờ và đầu kim phút của đồng hồ di chuyển trên đường tròn lượng giác tâm O. Từ đó, tìm toạ độ của đầu kim phút khi đồng hồ chỉ chính xác 9 giờ 20 phút.

Hình 1.26

1.10. Khi một quả bóng được đá lên không trung từ mặt đất, khoảng cách x từ quả bóng đó đến đường thẳng vuông góc với mặt đất tại vị trí đá liên hệ với chiều cao y của nó theo công thức: $y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \frac{x\sin\alpha}{\cos\alpha}$, trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của quả bóng, α là góc đá quả bóng so với phương nằm ngang và g là gia tốc trọng trường (nguồn: *https://pressbooks.uiowa.edu/clonedbook/chapter/projectile-motion/*). Chứng minh rằng: $y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}$.

BÀI 3

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Có thể biểu diễn $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$ qua các giá trị lượng giác của các góc a và b không?

I Công thức cộng

HOẠT ĐỘNG 1

Cho hai góc a và b, với $0 < b < a < \pi$. Trên đường tròn lượng giác, xét các điểm $P(\cos a; \sin a)$ và $Q(\cos b; \sin b)$.

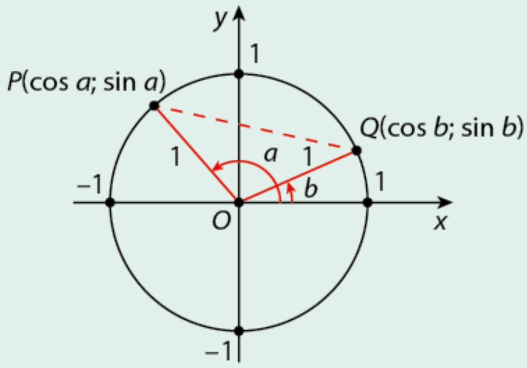
a) Dùng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, giải thích vì sao:

$$PQ^2 = 2 - 2\cos a\cos b - 2\sin a\sin b.$$

b) Dùng định lí côsin, giải thích vì sao:

$$PQ^2 = 2 - 2\cos(a - b).$$

c) Từ đó suy ra: $\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.



Hình 1.27

Người ta chứng minh được các công thức biểu diễn $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$ qua các giá trị lượng giác của các góc a và b như sau:

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad \sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \qquad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

(giả thiết các biểu thức đều có nghĩa).

Các công thức trên được gọi là các công thức cộng.

VÍ DỤ 1

Tính:

a) $\cos\frac{13\pi}{42}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{13\pi}{42}\sin\frac{\pi}{7}$;

b) $\tan\frac{7\pi}{12}$.

Giải

a) $\cos\frac{13\pi}{42}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{13\pi}{42}\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{13\pi}{42} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$.

LUYỆN TẬP 1

Tính giá trị chính xác của:

a) $\sin\frac{\pi}{12}$;

b) $\dfrac{\tan 64^\circ - \tan 19^\circ}{1 + \tan 64^\circ\tan 19^\circ}$.

VẬN DỤNG 1

Một dòng điện xoay chiều có cường độ dòng điện i (ampe) tại thời điểm t (giây) được tính bởi công thức:

$$i = 4\cos\left(\frac{131\pi}{12}t\right).$$

Tính giá trị chính xác của cường độ dòng điện i tại thời điểm $t = 1$ (giây).

II Công thức góc nhân đôi

HOẠT ĐỘNG 2

Nếu cho $b = a$ trong các công thức:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b;$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b;$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

thì ta thu được các công thức nào?

Ta có các công thức góc nhân đôi sau:

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

(giả thiết các biểu thức đều có nghĩa).

Lưu ý: Từ các công thức góc nhân đôi, ta suy ra các công thức sau:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}; \qquad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

(giả thiết các biểu thức đều có nghĩa).

VÍ DỤ 2

a) Biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos 2\alpha$ và $\sin 2\alpha$.

b) Tính giá trị của $\sin\frac{\pi}{8}$.

Giải

a) Ta có: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{16}{25}$, tức là $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Vậy $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{25}$ và $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$.

b) Vì $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ nên $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

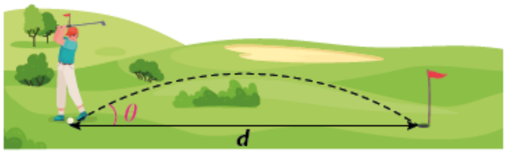
LUYỆN TẬP 2

a) Cho $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

b) Không dùng máy tính cầm tay, tính $\cos 112{,}5°$.

VẬN DỤNG 2

Một quả bóng golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (m) theo phương nằm ngang. Biết rằng $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$, trong đó v_0 (m/s) là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và θ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang (nguồn: *https://pressbooks.uiowa.edu/clonedbook/chapter/projectile-motion/*). Tính giá trị của $\cos 2\theta$ và $\sin \theta$ khi $v_0 = 15$ m/s, $d = 12,5$ m, $g = 10$ m/s^2 và $0° < \theta < 45°$.



Hình 1.28

III. Công thức biến đổi tích thành tổng, tổng thành tích

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

HOẠT ĐỘNG 3

Từ các công thức cộng, hãy tính:

a) $\cos(a-b) + \cos(a+b)$ theo $\cos a$ và $\cos b$;

b) $\cos(a-b) - \cos(a+b)$ theo $\sin a$ và $\sin b$;

c) $\sin(a-b) + \sin(a+b)$ theo $\sin a$ và $\cos b$.

Từ Hoạt động 3, ta suy ra các công thức sau:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

Các công thức trên được gọi là các công thức biến đổi tích thành tổng.

VÍ DỤ 3

Không dùng máy tính cầm tay, tính: $4\cos 187,5° \cos 37,5°$.

Giải

Ta có: $4\cos 187,5° \cos 37,5° = 2[\cos(187,5° - 37,5°) + \cos(187,5° + 37,5°)]$

$$= 2(\cos 150° + \cos 225°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

LUYỆN TẬP 3

Không dùng máy tính cầm tay, tính $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{17\pi}{12}$.

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

HOẠT ĐỘNG 4

Nếu đặt $u = a - b$ và $v = a + b$ trong các công thức:

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$; $\quad \sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$

thì ta thu được các công thức nào theo u và v?

Ta gọi các công thức sau là các công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \qquad \cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \qquad \sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

VÍ DỤ 4

Chứng minh rằng: $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9} = 0.$

Giải

Ta có: $\left(\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9}\right) - \sin\frac{5\pi}{9} = 2\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{9}\right) = \sin\frac{4\pi}{9} - \sin\frac{4\pi}{9} = 0.$

Vậy $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9} = 0.$

LUYỆN TẬP 4

Chứng minh rằng: $\dfrac{\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{13\pi}{17}}{\cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17}} = -\frac{1}{2}.$

BÀI TẬP

1.11. Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\sin\frac{5\pi}{12}$;

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$;

c) $\tan(-75°)$.

1.12. Biết $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tính:

a) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;

b) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $\sin\frac{\alpha}{2}$.

1.13. Không dùng máy tính cầm tay, tính:

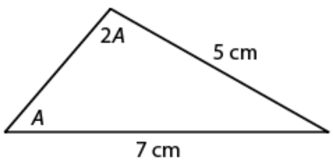
a) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;

b) $\sin 15° \sin 75°$;

c) $\cos(-15°) + \cos 255°$;

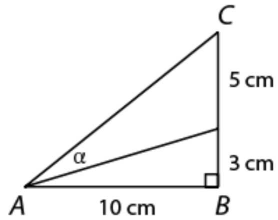
d) $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{9} - \cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{2\pi}{9} - \sin\frac{4\pi}{9}}$.

1.14. Cho tam giác có số đo các góc như *Hình 1.29*. Tính $\cos A$.



Hình 1.29

1.15. Cho góc α như trong *Hình 1.30*. Tính $\tan\alpha$.



Hình 1.30

1.16. Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 20 m tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương bắn với phương ngang). Nếu tăng góc ngắm đó lên hai lần thì vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất 45 m. Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường.

1.17. Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

a) $\cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$;

b) $\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$;

c) $\dfrac{\sin a + \sin 2a}{1 + \cos a + \cos 2a} = \tan a$.

BÀI 4 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

Giả sử tỉ lệ diện tích của Mặt Trăng được chiếu sáng khi quan sát từ Trái Đất trong đêm thứ *t* của một tháng âm lịch, gọi là *M*(*t*), được tính bởi công thức: $M(t) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{15}\right) + \frac{1}{2}$.

Theo công thức trên, tỉ lệ diện tích của Mặt Trăng được chiếu sáng khi quan sát từ Trái Đất bằng 100% vào đêm nào của tháng đó?

Hình 1.31

I Hàm số chẵn, hàm số lẻ. Hàm số tuần hoàn

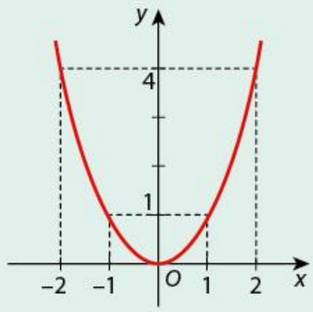
1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

HOẠT ĐỘNG 1

Hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị như *Hình 1.32*.

a) So sánh $f(-1)$ và $f(1)$, $f(-2)$ và $f(2)$, $f(-x)$ và $f(x)$.

b) Đồ thị của hàm số nhận trục nào làm trục đối xứng?

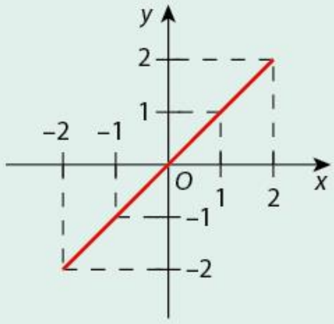


Hình 1.32

Hàm số $y = f(x) = x$, với $x \in [-2; 2]$, có đồ thị như *Hình 1.33*.

a) So sánh $f(-1)$ và $f(1)$, $f(-2)$ và $f(2)$, $f(-x)$ và $f(x)$ khi $x \in [-2; 2]$.

b) Đồ thị của hàm số nhận điểm nào làm tâm đối xứng?



Hình 1.33

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Lưu ý:

- Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

VÍ DỤ 1

a) Chứng minh hàm số $y = f(x) = |x|$ là hàm số chẵn.

b) Chứng minh hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ là hàm số lẻ.

Giải

a) Hàm số $y = f(x) = |x|$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Ta có: Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Vậy hàm số $y = f(x) = |x|$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có: Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Vậy hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ là hàm số lẻ.

LUYỆN TẬP 1

Xác định hàm số chẵn, hàm số lẻ trong các hàm số sau:

$y = f(x) = 4x - 3;$ $y = g(x) = 2x^2 - 6;$ $y = h(x) = x^3 - 3x.$

2. Hàm số tuần hoàn

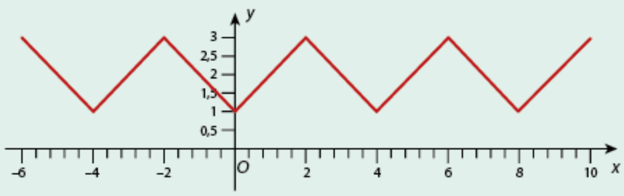
HOẠT ĐỘNG 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như *Hình 1.34*.

a) So sánh $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(8)$.

b) Tìm một số $T \neq 0$ sao cho $f(x + T) = f(x)$, với $x = -6, x = -2, x = 2, x = 6$.

c) Nhận xét đồ thị của hàm số trên các đoạn $[-4; 0]$, $[0; 4]$ và $[4; 8]$.



Hình 1.34

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

- $x + T \in D$ và $x - T \in D$;
- $f(x + T) = f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất thoả mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

Lưu ý:

Muốn vẽ đồ thị của hàm số tuần hoàn có chu kì T, ta vẽ đồ thị của hàm số này trên $[0; T] \cap D$, sau đó lặp lại phần đồ thị đã vẽ đó trên $[T; 2T] \cap D$, $[2T; 3T] \cap D, \ldots$ và trên $[-T; 0] \cap D$, $[-2T; -T] \cap D$, $[-3T; -2T] \cap D, \ldots$ để được toàn bộ đồ thị của hàm số.

VÍ DỤ 2

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Z}, \\ 0 \text{ nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$

a) Tìm tập xác định D của hàm số trên.

b) Hãy so sánh $f(x+1)$ và $f(x)$ khi x là số nguyên và khi x không là số nguyên.

c) Hàm số trên có phải là hàm số tuần hoàn không?

Giải

a) Hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Khi x là số nguyên thì $x + 1$ cũng là số nguyên. Suy ra: $f(x) = 1$ và $f(x+1) = 1$. Vậy $f(x+1) = f(x)$.
Khi x không là số nguyên thì $x + 1$ cũng không là số nguyên. Suy ra: $f(x) = 0$ và $f(x+1) = 0$.
Vậy $f(x+1) = f(x)$.

c) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $x + 1 \in \mathbb{R}$ và (theo b)): $f(x+1) = f(x)$.
Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn.

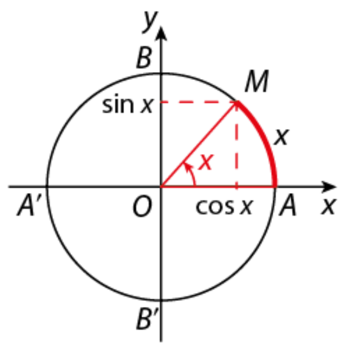
LUYỆN TẬP 2

Hàm số hằng $y = f(x) = c$ (c là hằng số) có phải là một hàm số tuần hoàn không? Vì sao?

II Hàm số lượng giác

1. Định nghĩa các hàm số lượng giác

Ở Bài 2, ta đã biết với mỗi số thực x, có một điểm M duy nhất trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của góc lượng giác (OA, OM) bằng x (rad). Điểm M có toạ độ hoàn toàn xác định, trong đó tung độ chính là giá trị $\sin x$ và hoành độ chính là giá trị $\cos x$ (*Hình 1.35*).



Hình 1.35

HOẠT ĐỘNG 3

Tính sin và côsin của góc lượng giác có số đo radian bằng x trong các trường hợp sau:

$$x = \frac{\pi}{2};\ x = -\frac{\pi}{4};\ x = \frac{11\pi}{3};\ x = -2,5.$$

- Với mỗi số thực x, có một và chỉ một giá trị $\sin x$ tương ứng, vì vậy ta có một hàm số. Hàm số này được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y = \sin x$.
- Với mỗi số thực x, có một và chỉ một giá trị $\cos x$ tương ứng, vì vậy ta có một hàm số. Hàm số này được gọi là **hàm số côsin**, kí hiệu là $y = \cos x$.

Lưu ý: Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

VÍ DỤ 3

a) Tính giá trị của hàm số $y = \sin x$ khi $x = \frac{7\pi}{4}$.

b) Tính giá trị của hàm số $y = \cos x$ khi $x = -\frac{\pi}{6}$.

Giải

a) Giá trị của hàm số $y = \sin x$ khi $x = \frac{7\pi}{4}$ là $\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Giá trị của hàm số $y = \cos x$ khi $x = -\frac{\pi}{6}$ là $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

LUYỆN TẬP 3

Tính giá trị của hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \cos x$ khi $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = -\frac{11\pi}{4}$; $x = \frac{14\pi}{3}$.

VẬN DỤNG 1

Phương trình li độ của một vật dao động điều hoà có dạng: $x = -6\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó x (cm) là li độ của vật (hay độ dời của vật so với vị trí cân bằng) tại thời điểm t (giây). Tính li độ của vật tại thời điểm $t = 3$ giây.

HOẠT ĐỘNG 4

Tính tang và côtang của góc lượng giác có số đo radian bằng x trong các trường hợp sau:

$$x = \frac{7\pi}{3};\ x = -\frac{5\pi}{4};\ x = \frac{11\pi}{6};\ x = -3.$$

- Với mỗi số thực $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ có một và chỉ một giá trị $\tan x$ tương ứng, vì vậy ta có một hàm số. Hàm số này được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$.
- Với mỗi số thực $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ có một và chỉ một giá trị $\cot x$ tương ứng, vì vậy ta có một hàm số. Hàm số này được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y = \cot x$.

Lưu ý:

- Vì $\cos x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là
$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
- Vì $\sin x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là
$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

VÍ DỤ 4

a) Tính giá trị của hàm số $y = \tan x$ khi $x = \dfrac{17\pi}{6}$.

b) Tính giá trị của hàm số $y = \cot x$ khi $x = -\dfrac{25\pi}{4}$.

Giải

a) Giá trị của hàm số $y = \tan x$ khi $x = \dfrac{17\pi}{6}$ là

$$\tan\frac{17\pi}{6} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Giá trị của hàm số $y = \cot x$ khi $x = -\dfrac{25\pi}{4}$ là

$$\cot\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = \cot\left(-6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1.$$

LUYỆN TẬP 4

Tính giá trị của hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$ khi $x = \dfrac{13\pi}{3}$; $x = -\dfrac{9\pi}{4}$; $x = \dfrac{19\pi}{6}$.

2. Tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác

HOẠT ĐỘNG 5

a) So sánh các giá trị $\sin x$ và $\sin(-x)$, $\cos x$ và $\cos(-x)$.

b) So sánh các giá trị $\tan x$ và $\tan(-x)$ khi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) So sánh các giá trị $\cot x$ và $\cot(-x)$ khi $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Từ Hoạt động 5, ta nhận thấy:

- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

VÍ DỤ 5

Xác định tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = |\sin x|\cos x$.

Giải

Hàm số $y = f(x) = |\sin x|\cos x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Ta có với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$f(-x) = |\sin(-x)|\cos(-x) = |-\sin x|\cos x = |\sin x|\cos x = f(x)$.

Vậy hàm số $y = f(x) = |\sin x|\cos x$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

LUYỆN TẬP 5

Xác định tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = \sin x - \tan x$.

3. Tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác

HOẠT ĐỘNG 6

Tìm một số $T \neq 0$ sao cho $f(x+T) = f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \sin x$;
b) $f(x) = \cos x$;
c) $f(x) = \tan x$;
d) $f(x) = \cot x$.

Người ta chứng minh được rằng:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.

VÍ DỤ 6

Giải thích vì sao hàm số $y = f(x) = \sin x + \cos x$ là hàm số tuần hoàn.

Giải

Hàm số $y = f(x) = \sin x + \cos x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Ta có với mọi $x \in D$ thì

$$x + 2\pi \in D, x - 2\pi \in D \text{ và } f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x).$$

Vậy hàm số $y = f(x) = \sin x + \cos x$ là hàm số tuần hoàn.

LUYỆN TẬP 6

Chứng minh hàm số $y = f(x) = 1 - \cot x$ là hàm số tuần hoàn.

III Khoảng đồng biến, nghịch biến và đồ thị của hàm số lượng giác

Các giá trị của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ khi x nhận các giá trị đặc biệt trong $[0; \pi]$ được mô tả trong bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Các giá trị của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ khi x nhận các giá trị đặc biệt trong $[0; \pi]$ được mô tả trong bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|$

1. Khoảng đồng biến, nghịch biến và đồ thị hàm số $y = \sin x$

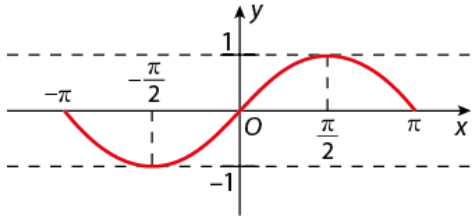
HOẠT ĐỘNG 7

a) Xét các số thực x_1, x_2, sao cho $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo x_1 rad và x_2 rad. Hãy so sánh tung độ của M và N, từ đó so sánh $\sin x_1$ và $\sin x_2$.

b) Xét các số thực x_3, x_4, sao cho $\frac{\pi}{2} < x_3 < x_4 < \pi$. Gọi P và Q lần lượt là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo x_3 rad và x_4 rad. Hãy so sánh tung độ của P và Q, từ đó so sánh $\sin x_3$ và $\sin x_4$.

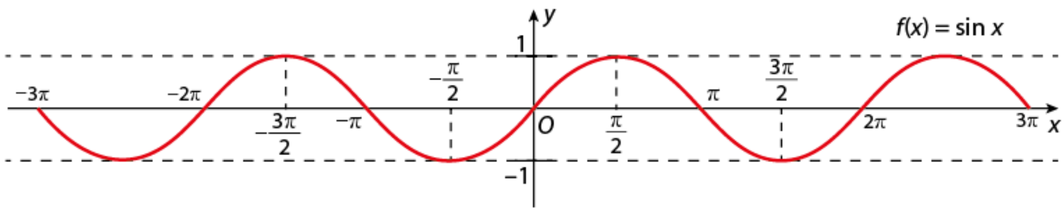
Từ Hoạt động 7, ta nhận thấy hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên lấy đối xứng đồ thị hàm số trên đoạn $[0; \pi]$ qua gốc toạ độ O, ta được đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi; 0]$. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ được biểu diễn trong *Hình 1.36*.



Hình 1.36

Vì hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên muốn có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$, ta lặp lại phần đồ thị trên đoạn $[-\pi; \pi]$ đã vẽ trên các đoạn $[-3\pi; -\pi]$, $[-5\pi; -3\pi]$,... và các đoạn $[\pi; 3\pi]$, $[3\pi; 5\pi]$,... (*Hình 1.37*).



Hình 1.37

Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, ta nhận thấy:

- Tập giá trị của hàm số $y = \sin x$ là đoạn $[-1; 1]$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 7

a) Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, xác định tất cả các giá trị của $x \in [-2\pi; 2\pi]$ sao cho $\sin x = 1$.

b) Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$.

Giải

a) Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, ta có $\sin x = 1$ khi $x \in \left\{\frac{-3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

b) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

LUYỆN TẬP 7

a) Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, xác định tất cả các giá trị của $x \in [-3\pi; 3\pi]$ sao cho $\sin x = 0$.

b) Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-3\pi; 3\pi]$.

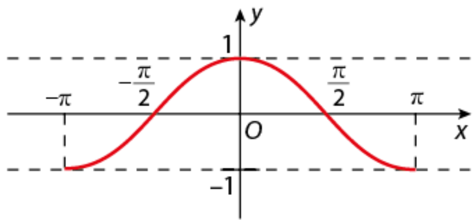
2. Khoảng đồng biến, nghịch biến và đồ thị hàm số $y = \cos x$

HOẠT ĐỘNG 8

Xét các số thực x_1, x_2 sao cho $0 < x_1 < x_2 < \pi$. Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo x_1 rad và x_2 rad. Hãy so sánh hoành độ của M và N, từ đó so sánh $\cos x_1$ và $\cos x_2$.

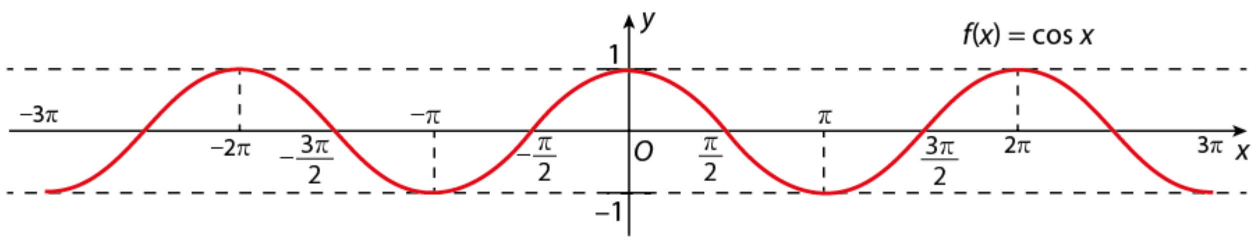
Từ Hoạt động 8, ta nhận thấy hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $(0; \pi)$.

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên lấy đối xứng đồ thị hàm số trên đoạn $[0; \pi]$ qua trục Oy, ta được đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi; 0]$. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ được biểu diễn trong *Hình 1.38*.



Hình 1.38

Vì hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên muốn có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$, ta lặp lại phần đồ thị trên đoạn $[-\pi; \pi]$ đã vẽ trên các đoạn $[-3\pi; -\pi]$, $[-5\pi; -3\pi]$,... và các đoạn $[\pi; 3\pi]$, $[3\pi; 5\pi]$,... (*Hình 1.39*).



Hình 1.39

Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$, ta nhận thấy:

- Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là đoạn $[-1; 1]$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý: Đồ thị của các hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$ được gọi chung là các *đường hình sin*.

VÍ DỤ 8

a) Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, xác định tất cả các giá trị của $x \in [-2\pi; 2\pi]$ sao cho $\cos x = 0$.

b) Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$.

Giải

a) Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, ta có $\cos x = 0$ khi

$$x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

b) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$, $(\pi; 2\pi)$.

LUYỆN TẬP 8

a) Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, xác định tất cả các giá trị của $x \in [-3\pi; 3\pi]$ sao cho $\cos x = -1$.

b) Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-3\pi; 3\pi]$.

VẬN DỤNG 2

Giả sử nhiệt độ bên trong một ngôi nhà sau t giờ kể từ 12 giờ trưa, gọi là $T(t)$, được tính bởi công thức: $T(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{6}\right) + 25$ (°C), $0 \leq t \leq 24$.

a) Tìm nhiệt độ bên trong ngôi nhà lúc 12 giờ trưa, 6 giờ tối, 12 giờ đêm theo công thức trên.

b) Theo công thức trên, nhiệt độ cao nhất bên trong ngôi nhà là bao nhiêu?

3. Khoảng đồng biến, nghịch biến và đồ thị hàm số $y = \tan x$

HOẠT ĐỘNG 9

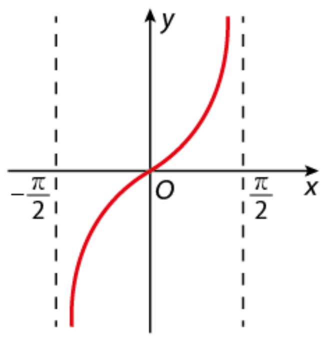
a) Chép lại và hoàn thành bảng sau:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	?	?	?

b) So sánh $\tan\frac{\pi}{6}$, $\tan\frac{\pi}{4}$ và $\tan\frac{\pi}{3}$.

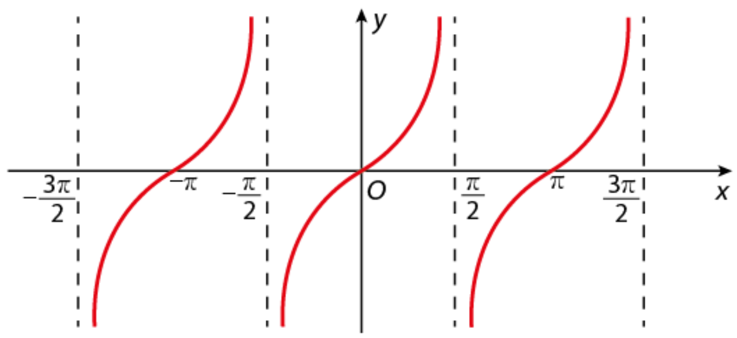
Người ta chứng minh được rằng hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên lấy đối xứng đồ thị hàm số trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ qua gốc toạ độ O, ta được đồ thị hàm số trên nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ được biểu diễn trong *Hình 1.40*.



Hình 1.40

Vì hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π nên muốn có đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên toàn bộ tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, ta lặp lại phần đồ thị trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ đã vẽ trên các khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$, ... và các khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$, ... (*Hình 1.41*).



Hình 1.41

Từ đồ thị của hàm số $y = \tan x$, ta nhận thấy:

- Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 9

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \tan x$, xác định tất cả các giá trị của $x \in [-\pi; \pi]$ sao cho $\tan x = 0$.

Giải

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $[-\pi; \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$, ta có $\tan x = 0$ khi $x \in \{-\pi; 0; \pi\}$.

LUYỆN TẬP 9

Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = \tan x$ trên $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

4. Khoảng đồng biến, nghịch biến và đồ thị hàm số $y = \cot x$

HOẠT ĐỘNG 10

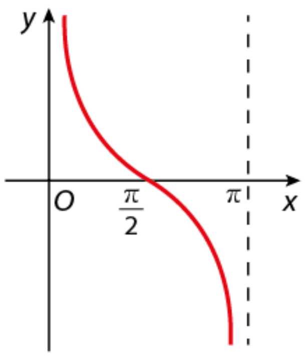
a) Chép lại và hoàn thành bảng sau:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cot x$	?	?	?	?	?	?	?

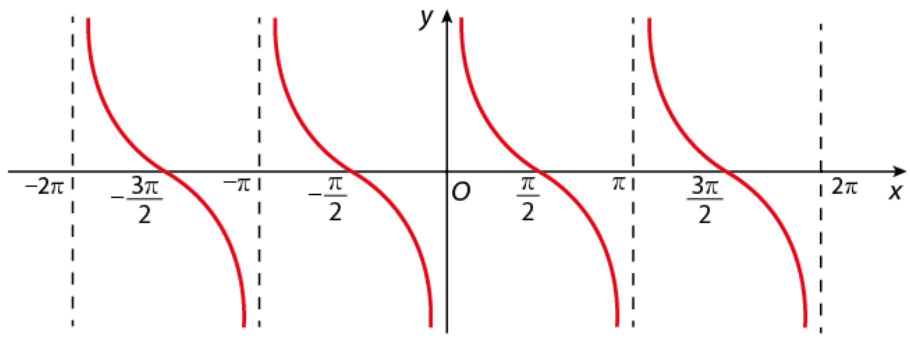
b) So sánh các giá trị của $\cot x$ trong bảng trên.

Người ta chứng minh được rằng hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên $(0; \pi)$. Đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$ được biểu diễn trong *Hình 1.42*.

Vì hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π nên muốn có đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên toàn bộ tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ta lặp lại phần đồ thị trên khoảng $(0; \pi)$ đã vẽ trên các khoảng $(-\pi; 0)$, $(-2\pi; -\pi)$,... và các khoảng $(\pi; 2\pi)$, $(2\pi; 3\pi)$,... (*Hình 1.43*).



Hình 1.42



Hình 1.43

Từ đồ thị của hàm số $y = \cot x$, ta nhận thấy:

- Tập giá trị của hàm số $y = \cot x$ là $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 10

Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cot x$, xác định tất cả các giá trị của x thuộc tập xác định sao cho $\cot x = 0$.

Giải

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên tập xác định, ta có: $\cot x = 0$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

LUYỆN TẬP 10

Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \cot x$ trên $(-2\pi; 2\pi) \setminus \{-\pi; 0; \pi\}$.

BÀI TẬP

1.18. Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

$$y = \cos 2x + 1; \qquad y = |x + 1| - |x - 1|; \qquad y = x^2 - x.$$

1.19. Giải thích vì sao các hàm số dưới đây là các hàm số tuần hoàn:

a) $y = \cos x - \sin x$;

b) $y = 2\tan x + 1$.

1.20. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$;

b) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2 - \sin x}}$.

1.21. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -3\sin x + 4$.

1.22. Li độ của một vật dao động điều hoà sau t (giây) kể từ thời điểm ban đầu được xác định bởi hàm số $x = 8\cos(2\pi t - \pi)$ (cm). Tìm li độ của vật tại thời điểm $t = \frac{2}{3}$ giây và li độ nhỏ nhất của vật.

1.23. Giả sử độ sâu $D(t)$ (m) của nước ở một cảng biển sau t giờ kể từ nửa đêm được tính bởi công thức:

$$D(t) = 4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 6 \text{ (m)}, \ 0 \le t \le 24.$$

a) Tìm độ sâu lớn nhất và nhỏ nhất của nước ở cảng này theo công thức trên.

b) Một chiếc thuyền chỉ đi được vào cảng khi độ sâu của nước không nhỏ hơn 5 mét. Hỏi theo công thức trên, chiếc thuyền này có thể vào cảng lúc 8 giờ tối hay không?

BÀI 5

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Hình 1.44

Giả sử độ cao $H(t)$ so với mặt đất của một ca-bin bánh xe đu quay sau t giây tại một khu vui chơi được xác định bởi công thức:

$$H(t) = -8\cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) + 9 \text{ (m)}, 0 \leq t \leq 60.$$

Hỏi ca-bin này đạt độ cao 15 mét sau bao nhiêu giây?

I Phương trình tương đương

1. Khái niệm phương trình tương đương

HOẠT ĐỘNG 1

Tập nghiệm của các cặp phương trình sau có bằng nhau không?

a) $x^2 - x = 0$ và $\frac{3x}{x-4} + x = 0$.

b) $x^2 - 1 = 0$ và $1 - x = 0$.

Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

Ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của các phương trình.

VÍ DỤ 1

Giải thích vì sao hai phương trình $x^2 - 1 = 0$ và $x^4 - 1 = 0$ tương đương.

Giải

Hai phương trình $x^2 - 1 = 0$ và $x^4 - 1 = 0$ tương đương vì chúng có cùng tập nghiệm là $\{-1; 1\}$.

LUYỆN TẬP 1

Các cặp phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

a) $x^2 = 4$ và $|x| = 2$.

b) $(x-3)(1+\sqrt{x-4}) = 0$ và $3 - x = 0$.

2. Một số phép biến đổi tương đương

Để giải một phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương. Định lí sau đây nêu lên một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng.

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương:

a) Cộng hoặc trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

Lưu ý: Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hoặc trừ hai vế với biểu thức đó.

VÍ DỤ 2

Vì sao các phương trình trong dãy các phép biến đổi sau là tương đương?

$$2x(x^2+1) = (5-3x)(1+x^2) \Leftrightarrow 2x = 5-3x \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

Giải

Hai phương trình $2x(x^2+1) = (5-3x)(1+x^2)$ và $2x = 5-3x$ tương đương vì ta chia hai vế của phương trình $2x(x^2+1) = (5-3x)(1+x^2)$ với cùng biểu thức $1+x^2$ luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

Hai phương trình $2x = 5-3x$ và $5x = 5$ tương đương vì ta cộng hai vế của phương trình $2x = 5-3x$ với cùng biểu thức $3x$ mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

Hai phương trình $5x = 5$ và $x = 1$ tương đương vì ta chia hai vế của phương trình $5x = 5$ với cùng số 5 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

LUYỆN TẬP 2

Các phép biến đổi sau có đúng không? Vì sao?

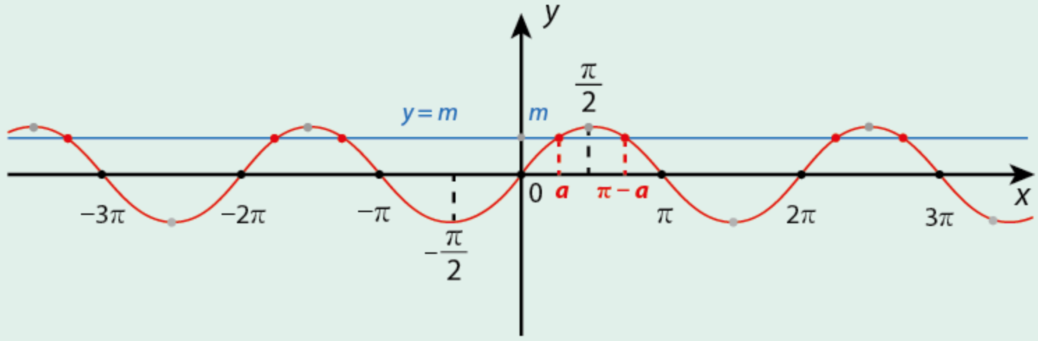
$$x - \frac{1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow x = 2.$$

II Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình $\sin x = m$

HOẠT ĐỘNG 2

Trong *Hình 1.45*, xét đường thẳng $y = m$ $(-1 \le m \le 1)$ và đồ thị hàm số $y = \sin x$.



Hình 1.45

a) Dựa vào *Hình 1.45*, cho biết trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, đồ thị hàm số $y = \sin x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại điểm có hoành độ là giá trị nào.

b) Biểu diễn hoành độ của tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $y = m$ theo hoành độ của giao điểm trong câu a).

Ta nhận xét phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm khi $|m| > 1$ vì $|\sin x| \le 1$ với mọi số thực x.

Khi $-1 \le m \le 1$, ta thấy trong Hoạt động 2, hoành độ của mỗi giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $y = m$ là một nghiệm của phương trình $\sin x = m$. Gọi a là góc lượng giác thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\sin a = m$.

Khi đó, ta có:

Phương trình $\sin x = m$ $(-1 \le m \le 1)$ có các nghiệm là

$$x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

- Tổng quát, người ta chứng minh được:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

- Phương trình $\sin x = \sin \beta°$ có các nghiệm là

$$x = \beta° + k360°, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = 180° - \beta° + k360°, k \in \mathbb{Z}.$$

- Các trường hợp đặc biệt:

Phương trình $\sin x = 1$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\sin x = -1$ có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\sin x = 0$ có các nghiệm là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 3

Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;   b) $\sin x = \frac{3}{4}$.

Giải

a) Vì $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ nên phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ được viết thành $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là

$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi a là góc lượng giác thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\sin a = \frac{3}{4}$.

Phương trình $\sin x = \frac{3}{4}$ được viết thành $\sin x = \sin a$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

LUYỆN TẬP 3

Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$;   b) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$;   c) $\sin(x + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

VÍ DỤ 4

Giải phương trình sau: $\sin 3x = \sin 2x$.

Giải

Ta có: $\sin 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \pi - 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

LUYỆN TẬP 4

Giải phương trình: $\sin 4x = -\sin(\pi - x)$.

VÍ DỤ 5

Giả sử huyết áp của một người A được xác định bởi công thức $p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t)$, trong đó $p(t)$ (đơn vị: mmHg) là huyết áp của người đó tại thời điểm t (đơn vị: phút). Xác định tất cả các thời điểm người này có huyết áp thấp nhất theo công thức trên.

Giải

Người này có huyết áp thấp nhất khi $\sin(160\pi t) = -1$.

Giải phương trình trên ta được: $160\pi t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 1$ (do $t \geq 0$)

$$\text{hay } t = -\frac{1}{320} + \frac{k}{80}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } k \geq 1.$$

Vậy người này có huyết áp thấp nhất khi $t = -\frac{1}{320} + \frac{k}{80}, k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 1$.

VẬN DỤNG 1

Giả sử số lượng N của một loài hươu sau t năm được xác định bởi công thức

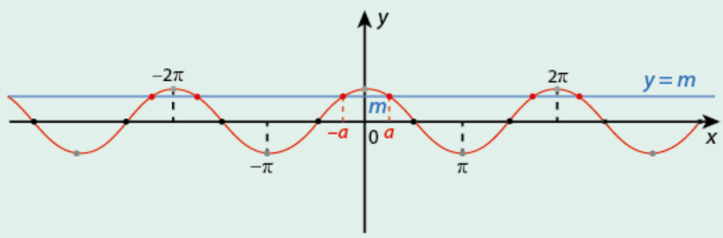
$$N = 30\,000 + 20\,000\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right).$$

Xác định năm đầu tiên mà số lượng của loài hươu này bằng 50 nghìn con theo công thức trên.

2. Phương trình $\cos x = m$

HOẠT ĐỘNG 3

Trong *Hình 1.46*, xét đường thẳng $y = m$ $(-1 \leq m \leq 1)$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$.



Hình 1.46

a) Dựa vào *Hình 1.46*, cho biết trên đoạn $[0; \pi]$, đồ thị hàm số $y = \cos x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại điểm có hoành độ là giá trị nào.

b) Biểu diễn hoành độ của tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$ và đường thẳng $y = m$ theo hoành độ của giao điểm trong câu a).

Ta nhận xét phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm khi $|m| > 1$ vì $|\cos x| \leq 1$ với mọi số thực x.

Khi $-1 \leq m \leq 1$, ta thấy trong Hoạt động 3, hoành độ của mỗi giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cos x$ và đường thẳng $y = m$ là một nghiệm của phương trình $\cos x = m$. Gọi a là góc lượng giác thuộc đoạn $[0; \pi]$ thoả mãn $\cos a = m$.

Khi đó, ta có:

Phương trình $\cos x = m$ $(-1 \leq m \leq 1)$ có các nghiệm là

$$x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = -a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

- Tổng quát, người ta chứng minh được:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = -g(x) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

- Phương trình $\cos x = \cos \beta°$ có các nghiệm là

$$x = \beta° + k360°,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{và } x = -\beta° + k360°,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Các trường hợp đặc biệt:

Phương trình $\cos x = 1$ có các nghiệm là $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\cos x = -1$ có các nghiệm là $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình $\cos x = 0$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 6

Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos x = \frac{5}{7}$.

Giải

a) Vì $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ nên phương trình $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ được viết thành $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$. Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi a là góc lượng giác thuộc đoạn $[0;\pi]$ thoả mãn $\cos a = \frac{5}{7}$.

Phương trình $\cos x = \frac{5}{7}$ được viết thành $\cos x = \cos a$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \pm a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

LUYỆN TẬP 5

Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$; b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; c) $\cos(x - 45°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

VÍ DỤ 7

Giải phương trình: $\cos 3x = \sin x$.

Giải

Ta có: $\cos 3x = \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

LUYỆN TẬP 6

Giải phương trình sau: $\sin 5x = -\cos(\pi + x)$.

VÍ DỤ 8

Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = 8\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định tất cả các thời điểm vật có li độ lớn nhất (kể từ thời điểm ban đầu).

Giải

Vật có li độ lớn nhất là 8 cm khi $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = 1$.

Phương trình trên có các nghiệm là: $\frac{\pi t}{12} = k2\pi, k \in \mathbb{N}$ (do $t \geq 0$) hay $t = 24k, k \in \mathbb{N}$.

Vậy các thời điểm vật có li độ lớn nhất là: $t = 24k, k \in \mathbb{N}$.

VẬN DỤNG 2

Cường độ dòng điện i (ampe) qua một mạch điện xoay chiều được tính bởi công thức

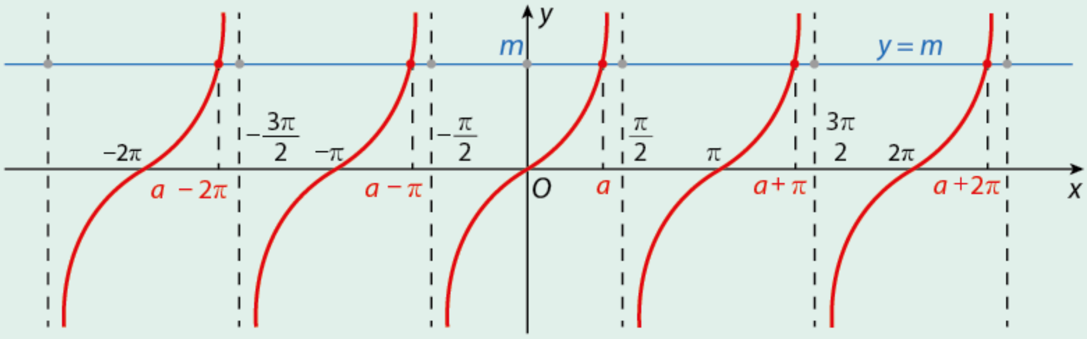
$$i = 10\sqrt{2}\cos(100\pi t),$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây. Xác định thời điểm đầu tiên cường độ dòng điện bằng 10 ampe.

3. Phương trình $\tan x = m$

HOẠT ĐỘNG 4

Trong *Hình 1.47*, xét đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số $y = \tan x$.



Hình 1.47

a) Dựa vào *Hình 1.47*, cho biết trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, đồ thị hàm số $y = \tan x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại điểm có hoành độ là giá trị nào.

b) Biểu diễn hoành độ của tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \tan x$ và đường thẳng $y = m$ theo hoành độ của giao điểm trong câu a.

Trong Hoạt động 4, hoành độ của mỗi giao điểm của đồ thị hàm số $y = \tan x$ và đường thẳng $y = m$ là một nghiệm của phương trình $\tan x = m$. Gọi a là góc lượng giác thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\tan a = m$.

Khi đó, ta có:

Phương trình $\tan x = m$ có các nghiệm là

$$x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý: Phương trình $\tan x = \tan \beta^\circ$ có các nghiệm là $x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

VÍ DỤ 9

Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \tan\frac{2\pi}{5}$;

b) $\tan 2x = -3$.

Giải

a) Phương trình $\tan x = \tan\frac{2\pi}{5}$ có các nghiệm là $x = \frac{2\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi a là góc lượng giác thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\tan a=-3$.

Phương trình $\tan 2x=-3$ được viết thành $\tan 2x=\tan a$.

Vậy $2x=a+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ hay $x=\frac{a}{2}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

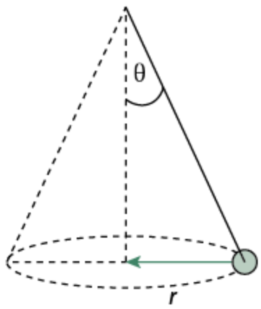
LUYỆN TẬP 7

Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x=1$;   b) $\tan 4x=-1,5$;   c) $\tan(x+15^\circ)=-\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 10

Khi một vật chuyển động đều trên một đường tròn, góc nhọn θ tạo bởi vật đó với phương thẳng đứng (*Hình 1.48*) được xác định bởi công thức $\tan\theta=\frac{v^2}{rg}$, trong đó r (m) là bán kính của đường tròn, v (m/s^2) là tốc độ của vật đó và g là gia tốc trọng trường (nguồn: *https://www.slideshare.net/atobve/1-motion-in-a-circle-by-a-tobve*). Xác định góc θ khi $r=2,5$ m, $v=5$ m/s và $g=10$ m/s^2.



Hình 1.48

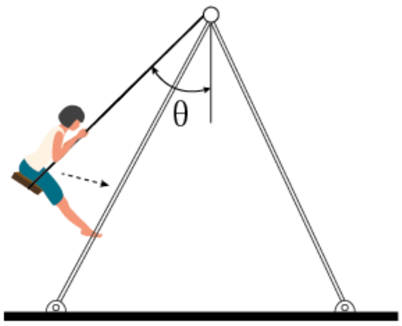
Giải

Khi $r=2,5$ m, $v=5$ m/s và $g=10$ m/s^2, ta có: $\tan\theta=\frac{v^2}{rg}=\frac{25}{2,5.10}=1$.

Vậy $\theta=45^\circ$.

VẬN DỤNG 3

Một người dẫn em gái của mình đến công viên để chơi xích đu. Lực đẩy theo phương ngang F (N) mà người đó dùng để đẩy em gái trong trò chơi này được xác định bởi công thức $F=mg\tan\theta$, trong đó m (kg) là khối lượng của em gái, g là gia tốc trọng trường và θ là góc tạo bởi xích đu khi bắt đầu được đẩy với phương thẳng đứng (*Hình 1.49*) (nguồn: *https://www.khanacademy.org/science/physics/centripetal-force-and-gravitation/centripetal-forces/v/mass-swinging-in-a-horizontal-circle*). Xác định góc θ khi $F=400\sqrt{3}$ N, $m=40$ kg và $g=10$ m/s^2.

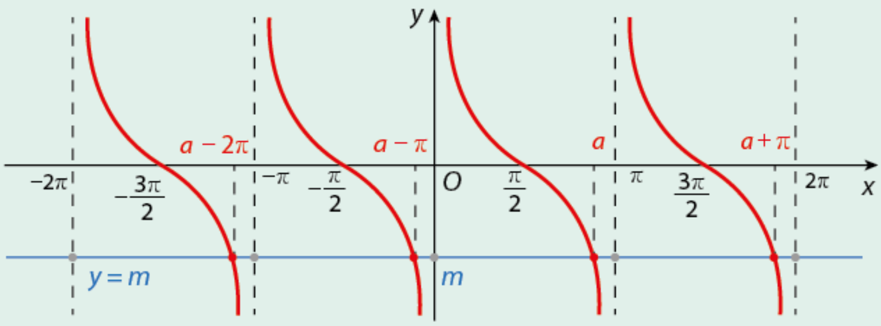


Hình 1.49

4. Phương trình $\cot x=m$

HOẠT ĐỘNG 5

Trong *Hình 1.50*, xét đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số $y=\cot x$.



Hình 1.50

a) Dựa vào *Hình 1.50*, cho biết trên khoảng $(0; \pi)$, đồ thị hàm số $y = \cot x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại điểm có hoành độ là giá trị nào.

b) Biểu diễn hoành độ của tất cả các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cot x$ và đường thẳng $y = m$ theo hoành độ của giao điểm trong câu a.

Trong Hoạt động 5, hoành độ của mỗi giao điểm của đồ thị hàm số $y = \cot x$ và đường thẳng $y = m$ là một nghiệm của phương trình $\cot x = m$. Gọi a là góc lượng giác thuộc khoảng $(0; \pi)$ thoả mãn $\cot a = m$.

Khi đó, ta có:

Phương trình $\cot x = m$ có các nghiệm là

$$x = a + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Lưu ý: Phương trình $\cot x = \cot \beta^\circ$ có các nghiệm là

$$x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

VÍ DỤ 11

Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = \cot \frac{\pi}{8}$;

b) $\cot 3x = -5$.

Giải

a) Phương trình $\cot x = \cot \frac{\pi}{8}$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi a là góc lượng giác thuộc khoảng $(0; \pi)$ thoả mãn $\cot a = -5$.

Phương trình $\cot 3x = -5$ được viết thành $\cot 3x = \cot a$.

Vậy $3x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $x = \frac{a}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

LUYỆN TẬP 8

Giải các phương trình sau:

a) $\cot 2x = -1$;

b) $\cot 6x = 4$;

c) $\cot(x - 45^\circ) = \sqrt{3}$.

III Giải phương trình lượng giác cơ bản bằng máy tính cầm tay

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình lượng giác cơ bản. Tuy nhiên, đối với mỗi phương trình $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, máy tính chỉ cho một kết quả với đơn vị là radian (hoặc độ). Lúc đó ta dùng công thức nghiệm của phương trình $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$ đã nêu trong mục I để viết tất cả các nghiệm đúng hoặc gần đúng của phương trình.

Lưu ý:

- Để giải phương trình với kết quả là radian, ta bấm như sau: SHIFT MODE 4
- Để giải phương trình với kết quả là độ, ta bấm như sau: SHIFT MODE 3

VÍ DỤ 12

Dùng máy tính cầm tay, tính nghiệm gần đúng của các phương trình sau (kết quả là radian, làm tròn đến hàng phần nghìn):

a) $\sin x = 0{,}4$; b) $\cos x = -\frac{1}{6}$; c) $\tan x = \sqrt{2}$.

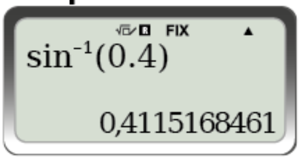
Giải

Chuyển máy tính qua chế độ tính theo radian: SHIFT MODE 4

a) Để giải phương trình $\sin x = 0{,}4$, ta bấm liên tiếp

SHIFT sin 0 . 4) =

Kết quả:



và được kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn là 0,412.

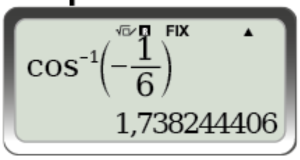
Vậy phương trình $\sin x = 0{,}4$ có các nghiệm là

$$x \approx 0{,}412 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x \approx \pi - 0{,}412 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Để giải phương trình $\cos x = -\frac{1}{6}$, ta bấm liên tiếp

SHIFT cos (–) ▭/▭ 1 ▼ 6 ▶) =

Kết quả:



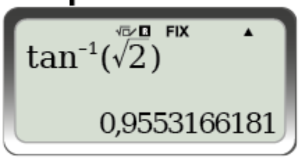
và được kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn là 1,738.

Vậy phương trình $\cos x = -\frac{1}{6}$ có các nghiệm là $x \approx \pm 1{,}738 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Để giải phương trình $\tan x = \sqrt{2}$, ta bấm liên tiếp

SHIFT tan √ 2) =

Kết quả:



và được kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn là 0,955.

Vậy phương trình $\tan x = \sqrt{2}$ có các nghiệm là $x \approx 0{,}955 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

LUYỆN TẬP 9

Dùng máy tính cầm tay, giải các phương trình sau (kết quả là độ, làm tròn đến hàng phần nghìn):

a) $\sin x = 0{,}3$; b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; c) $\tan x = -3$.

VÍ DỤ 13

Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = 4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định thời điểm đầu tiên vật có li độ bằng 3 cm (kể từ thời điểm ban đầu).

Giải

Vì vật có li độ bằng 3 cm nên $x = 3$, tức là $4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 3$ hay $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Vậy $\frac{\pi t}{6} \approx \pm 0{,}723 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Thời điểm đầu tiên vật có li độ bằng 3 cm tương ứng với $\frac{\pi t}{6} \approx 0{,}723$ hay $t \approx \frac{0{,}723.6}{\pi}$

$\approx 1{,}38$ (giây).

VẬN DỤNG 4

Giải bài toán nêu ở đầu bài học.

BÀI TẬP

1.24. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2x = 1$;

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

c) $\cos(4x - 75°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\sin(3x - 15°) = 0$.

1.25. Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -1$;

b) $\cot(x - \pi) = 7$;

c) $\cot(2x - 120°) = \sqrt{3}$;

d) $\tan\left(\frac{x}{2} - 1\right) = -\frac{1}{3}$.

1.26. a) Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin 4x$ bằng nhau?

b) Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = -\sin 5x$ và $y = \cos 2x$ bằng nhau?

1.27. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = -6\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét).

a) Tìm li độ lớn nhất của vật (còn gọi là biên độ dao động).

b) Xác định các thời điểm vật có li độ bằng 3 cm. Từ đó xác định thời điểm đầu tiên vật đạt li độ này.

1.28. Huyết áp của con người thay đổi liên tục theo thời gian. Giả sử huyết áp tâm trương (huyết áp trong động mạch khi tim nghỉ ngơi giữa hai lần co bóp) của người A trong một ngày được tính bởi công thức $B(t) = 80 + 6\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, trong đó t là số giờ kể từ nửa đêm và $B(t)$ (mmHg) là huyết áp tâm trương.

a) Tìm huyết áp tâm trương của người này lúc 6 giờ sáng và 12 giờ trưa theo công thức trên.

b) Theo công thức trên, người này có huyết áp tâm trương thấp nhất vào thời điểm nào trong ngày?

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

BÀI TẬP TỰ LUẬN

1.29. Trên một đường tròn có bán kính 8 cm, tìm độ dài của các cung có số đo lần lượt là:

a) $\frac{\pi}{12}$;　　b) $108°$.

1.30. Trên đường tròn lượng giác, tìm điểm biểu diễn của các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{13\pi}{3}$;　　b) $-765°$.

1.31. Giả sử $\cos\alpha = m$, với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính các giá trị sau theo m:

a) $\cos(\pi - \alpha)$;　　b) $\sin(\alpha + \pi)$;　　c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;　　d) $\tan(3\pi - \alpha)$.

1.32. Biết $\sin\alpha = -\frac{1}{6}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, tính:

a) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;　　b) $\cos 2\alpha$;　　c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;　　d) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

1.33. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\cos a - \sin a)^2 = 1 - \sin 2a$;　　b) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$;

c) $\frac{\sin a + \sin 3a}{1 + \cos 2a} = 2\sin a$ (khi $\cos 2a \neq -1$);　　d) $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = 0$.

1.34. a) Hàm số $y = \cos 2x$ có phải là hàm số chẵn không? Vì sao?

b) Hàm số $y = \sin x + \cos x$ có phải là hàm số lẻ không? Vì sao?

c) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ có phải là hàm số tuần hoàn không? Vì sao?

1.35. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cot x$, tìm các giá trị của x trên đoạn $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số đó:

a) Nhận giá trị bằng -1;　　b) Nhận giá trị dương.

1.36. Giải các phương trình sau:

a) $\cos 7x = -\frac{1}{2}$;　　b) $\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

c) $\tan(2x + 1) = -4$;　　d) $\cos 3x - \sin 2x = 0$.

1.37. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = -5\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định các thời điểm vật có li độ bằng 2 cm.

1.38. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = 38 + 12\sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right]$, trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên.

a) Tính số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí vào các ngày thứ Hai và thứ Năm của tuần thứ hai.

b) Ngày nào trong tháng mà số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 50 mg?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.39. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\sin\alpha < 0$.

B. $\tan\alpha > 0$.

C. $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.

D. $\cot\frac{\alpha}{2} < 0$.

1.40. Tập xác định của các hàm số $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ là

A. $\varnothing$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

1.41. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -4\sin(x+2) - 3$ là

A. 1.

B. –3.

C. –4.

D. –7.

1.42. Phương trình $\cot x = -1$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0; 4\pi]$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

1.43. Phương trình $\sin x = \cos x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

CHƯƠNG 2 Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

Trong thực tiễn, chúng ta thường gặp dãy hữu hạn hay vô hạn các số. Chúng có thể xuất hiện ngẫu nhiên hoặc theo một quy luật nào đó. Chẳng hạn, dãy sáu số 1, 2, 6, 5, 0, 9 trong một đợt quay xổ số xuất hiện ngẫu nhiên nhưng dãy số dương chẵn 2, 4, 6, 8,… là một dãy vô hạn các số theo một quy luật.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu khái niệm "dãy số", một khái niệm cơ bản của toán học. Ngoài ra, hai dãy số đặc biệt là cấp số cộng và cấp số nhân cũng sẽ được giới thiệu cùng với các ứng dụng của chúng trong sinh học, trong khảo sát về gia tăng dân số và một số vấn đề thực tiễn khác.

- Nhận biết được khái niệm dãy số, một khái niệm cơ bản của toán học, các cách cho dãy số và các tính chất của dãy số;
- Kiểm chứng được các tính chất của dãy số trong các trường hợp đơn giản;
- Nhận biết được hai dãy số đặc biệt là cấp số cộng và cấp số nhân cùng với một số ứng dụng của chúng.

BÀI 1

DÃY SỐ

Trong thực tiễn, ta gặp những ví dụ điển hình về dãy số. Chẳng hạn, một bảng liệt kê điểm trung bình môn Toán (ĐTB) của một lớp 11 theo số thứ tự (STT) của học sinh:

STT	1	2	3	4	5	6	7	8	...	40	41	42	43	44	45
ĐTB	8,2	7,0	6,4	5,5	5,5	9,0	8,0	4,9	...	7,3	6,1	4,9	5,7	8,0	9,5

Dãy số là một khái niệm cơ bản của toán học mà chúng ta sẽ tìm hiểu trong bài học này.

I Dãy số

HOẠT ĐỘNG 1

a) Một nhà vua Ấn Độ quyết định ban thưởng cho người phát minh ra cờ vua theo nguyện vọng của người đó. Ông ta xin nhà vua một số thóc để mang tặng người nghèo, số thóc được đặt trên bàn cờ vua có 64 ô đã được đánh số từ 1 đến 64 như sau: đặt vào ô số một một hạt, ô số hai hai hạt, ô số ba bốn hạt,... Cứ như vậy, số hạt thóc ở ô sau gấp đôi ô liền trước cho đến ô cuối cùng.

Hình 2.1

Nếu gọi u_n là số hạt thóc được đặt vào ô số n, hãy tìm các giá trị của u_n tương ứng với n đã cho trong bảng sau:

n	1	2	3	4	5	6	...	64
u_n	?	?	?	?	?	?	...	?

b) Với mỗi số nguyên dương n, ta gọi v_n là số nghịch đảo của n. Hãy tìm các giá trị của v_n tương ứng với n đã cho trong bảng sau:

n	1	2	3	4	...	100	...	n	...
v_n	?	?	?	?	...	?	...	?	...

Nhận xét:

Từ phần a của Hoạt động 1, ta có một cách cho tương ứng một số nguyên dương n từ 1 đến 64 với một và chỉ một số thực. Phần b ta có một cách cho tương ứng một số nguyên dương n bất kì với một và chỉ một số thực.

- Một hàm số $u = u(n)$ xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).
  Kí hiệu $u(n) = u_n$ và dãy số là (u_n).
- Một hàm số $u = u(n)$ xác định trên tập $M = \{1; 2; 3;...; m\}$, với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Nhận xét:

- Dãy số (u_n) thường được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$
- n được gọi là chỉ số, u_1 là số hạng đầu và u_n là số hạng tổng quát thứ n của dãy số (thường được gọi tắt là số hạng thứ n).
- Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

VÍ DỤ 1

Cho (u_n) là dãy số nguyên dương chẵn, nghĩa là u_n là số nguyên dương chẵn thứ n. Xác định u_1, u_4 và u_{10}.

Giải

Dạng khai triển của dãy số nguyên dương chẵn là: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20,... trong đó $u_1 = 2$, $u_4 = 8$ và $u_{10} = 20$.

LUYỆN TẬP 1

Cho (p_n) là dãy số, trong đó p_n là số nguyên tố thứ n. Xác định p_2, p_5 và p_9.

II Cách cho một dãy số

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

HOẠT ĐỘNG 2

Cho dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{4}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{7}, \ldots$ Dự đoán số hạng tổng quát u_n của dãy số trên.

Dãy số hay dãy số hữu hạn xác định bởi $u_n = u(n)$, trong đó $u(n)$ là hàm số với biến số n, với $n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $n \in \{1; 2; 3; \ldots; m\}$, được gọi là dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát.

VÍ DỤ 2

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n^2 - 1$.

a) Hãy viết bảy số hạng đầu của dãy số.

b) Số 2 699 có là một số hạng của dãy số (u_n) hay không?

Giải

a) Bảy số hạng đầu của dãy số là $u_1 = 3.1^2 - 1 = 2$, $u_2 = 3.2^2 - 1 = 11$, $u_3 = 26$, $u_4 = 47$, $u_5 = 74$, $u_6 = 107$ và $u_7 = 146$.

b) Nếu 2 699 là số hạng thứ n của dãy số thì số nguyên dương n thoả mãn $2\,699 = 3n^2 - 1$. Giải phương trình này, ta được $n = 30$. Vậy 2 699 là số hạng thứ 30 của dãy số.

LUYỆN TẬP 2

Tính năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$.

2. Dãy số cho bằng cách liệt kê

HOẠT ĐỘNG 3

Viết dãy số nguyên tố trong phạm vi từ 1 đến 50 theo thứ tự tăng dần.

Dãy số hữu hạn viết dưới dạng khai triển còn được gọi là dãy số được cho bằng cách liệt kê.

VÍ DỤ 3

Cho dãy số hữu hạn (u_n) với $u_n = (-1)^n . n!$ $(1 \leq n \leq 10)$. Viết dãy số (u_n) bằng cách liệt kê.

Giải

(u_n) được cho bằng cách liệt kê như sau:

$$-1, 2, -6, 24, -120, 720, -5\,040, 40\,320, -362\,880, 3\,628\,800.$$

3. Dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi

HOẠT ĐỘNG 4

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi các điều kiện sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \text{ và } u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + (u_{n-2})^2, \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Hãy viết sáu số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

Hoạt động 4 cho thấy dãy số có thể cho bằng một cách khác, được gọi là dãy số cho bằng hệ thức truy hồi.

Cho một dãy số (u_n) bằng hệ thức truy hồi nghĩa là:

- Cho biết số hạng đầu hoặc vài số hạng đầu;
- Cho hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

VÍ DỤ 4

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ và $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2}$ với mọi $n \geq 3$. Hãy viết tám số hạng đầu của dãy.

Giải

Theo hệ thức truy hồi, ta có: $u_3 = \dfrac{u_2 + u_1}{2} = 2$, $u_4 = \dfrac{u_3 + u_2}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Tương tự, ta được: $u_5 = \dfrac{9}{4}$, $u_6 = \dfrac{19}{8}$, $u_7 = \dfrac{37}{16}$, $u_8 = \dfrac{75}{32}$.

LUYỆN TẬP 3

Dãy số Fibonacci

Dãy Fibonacci là dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$ với $n \geq 3$. Hãy viết mười số hạng đầu của dãy Fibonacci.

4. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

HOẠT ĐỘNG 5

$\sqrt{2} = 1,414213562...$ là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Một dãy số (u_n) được xác định như sau: "u_n là số gần đúng của $\sqrt{2}$ có được bằng cách giữ lại phần nguyên và n chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy". Hãy liệt kê bảy số hạng đầu của dãy số (u_n).

Cho một dãy số (u_n) bằng phương pháp mô tả là cho các đặc điểm để mô tả cách xác định các số hạng của nó.

VÍ DỤ 5

Cho dãy số (u_n) mà u_n là số chẵn nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng n. Hãy viết tám số hạng đầu của dãy số (u_n).

Giải

Số chẵn nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng 1 là 2, vậy $u_1 = 2$. Số chẵn nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng 2 là 2, vậy $u_2 = 2$. Lập luận tương tự, ta có:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	2	4	4	6	6	8	8

LUYỆN TẬP 4

$\pi = 3,14159263589...$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Một dãy số (u_n) được xác định như sau: "u_n là số gần đúng của π có được bằng cách giữ lại phần nguyên và $2n$ chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy". Hãy liệt kê năm số hạng đầu của dãy số (u_n).

III Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

HOẠT ĐỘNG 6

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) mà $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ và $v_n = 2 - \frac{1}{n}$ (n là số nguyên dương).

a) So sánh u_{n+1} và u_n.

b) So sánh v_{n+1} và v_n.

Từ Hoạt động 6, có những dãy số vô hạn mà số hạng của nó có giá trị tăng dần hoặc giảm dần.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_n < u_{n+1}$, với mọi số nguyên dương n.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi số nguyên dương n.

VÍ DỤ 6

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n+1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b) Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{4^n}{n}$ là dãy số tăng.

Giải

a) Cách 1: Số hạng tổng quát u_n có thể viết lại là $u_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_n - u_{n+1} = \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2n}\right) - \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2(n+1)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) > 0.$

Vậy $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Vì $u_n = \dfrac{3n+1}{2n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên ta lập tỉ số

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3n+1}{2n} \cdot \frac{2(n+1)}{3(n+1)+1} = \frac{6n^2+8n+2}{6n^2+8n} > 1.$$

Vậy $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số giảm.

b) Vì mọi số hạng của dãy số (v_n) đều dương nên ta xét tỉ số $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{4^{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n}{4^n} = \dfrac{4n}{n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (vì $4n > n+1$). Vậy $v_{n+1} > v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra dãy số (v_n) là dãy số tăng.

LUYỆN TẬP 5

Chứng minh rằng dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \dfrac{n-2}{3n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ là một dãy số tăng.

2. Dãy số bị chặn

HOẠT ĐỘNG 7

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

a) So sánh $n+1$ và $2\sqrt{n}$.

b) Suy ra: $u_n \leq \dfrac{1}{2}$, với mọi số nguyên dương n.

- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số thực M sao cho:

  $u_n \leq M$, với mọi số nguyên dương n.

- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số thực m sao cho:

  $u_n \geq m$, với mọi số nguyên dương n.

- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số thực m, M sao cho:

  $m \leq u_n \leq M$, với mọi số nguyên dương n.

VÍ DỤ 7

a) Chứng minh dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ bị chặn trên.

b) Cho dãy số (v_n), với $v_n = \dfrac{1}{n}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) bị chặn.

Giải

a) Ta có: $n^2+1-2n=(n-1)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $n^2+1 \geq 2n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n=\dfrac{2n}{n^2+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.

b) Vì $n \geq 1$ nên $0<\dfrac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $0<v_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (v_n) bị chặn.

Lưu ý:

- Nếu dãy số (u_n) giảm thì nó bị chặn trên. Vì $\ldots u_n<u_{n-1}<\ldots<u_1$. Vậy $u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì nó bị chặn dưới. Vì $u_1<u_2<\ldots<u_n<\ldots$ Vậy $u_n \geq u_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

LUYỆN TẬP 6

Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n-1}{n+2}$, với n là số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) tăng.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) bị chặn.

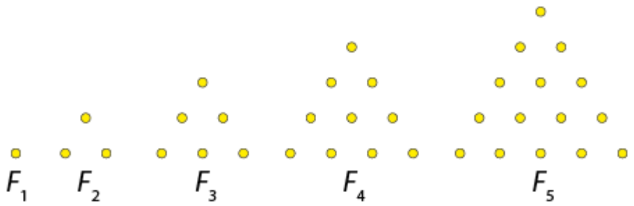
VẬN DỤNG

Trong một trò chơi của trẻ em, các em nhỏ dùng các viên bi để xếp thành các hình tam giác F_n. Dãy các hình xếp (F_n) tuân theo một quy luật được mô tả trong *Hình 2.2*. Trong đó F_1 chỉ có 1 viên bi, thêm 2 viên bi để được tam giác đều là hình F_2, thêm 3 viên bi thẳng hàng và song song với một cạnh của F_2 để được tam giác đều F_3,…

Gọi (u_n) là dãy số mà u_n là số viên bi cần dùng để xếp được hình F_n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Chẳng hạn: $u_1=1, u_2=3, u_3=6, \ldots$

a) Viết sáu số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

b) Dự đoán công thức truy hồi để tính u_n.



Hình 2.2

BÀI TẬP

2.1. Viết sáu số hạng đầu tiên của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

a) $u_n=\dfrac{n\sqrt{n}}{n+1}$; b) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$; c) $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2.2. Viết bốn số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi: $\begin{cases} u_1=1; u_2=3 \\ u_n=u_{n-1}+2u_{n-2}, \forall n \geq 3. \end{cases}$

2.3. $\sqrt{5}$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Một dãy số (u_n) được xác định như sau: "u_n là số gần đúng của $\sqrt{5}$ có được bằng cách giữ lại phần nguyên và $2n$ chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy". Hãy viết sáu số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

2.4. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết:

a) $u_n=-4-\dfrac{1}{n}$; b) $u_n=\dfrac{n-5}{n+2}$; c) $u_n=(-1)^n n!$.

2.5. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) cho bởi các công thức sau đây bị chặn:

a) $u_n=2+\dfrac{1}{n}$; b) $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$; c) $u_n=\sin(n)+\cos(n)$.

BÀI 2

CẤP SỐ CỘNG

Để đảm bảo tính cân đối, thẩm mĩ của một mái nhà, số lượng các viên ngói tăng dần từ trên đỉnh xuống, với số ngói tăng thêm ở mỗi hàng là hằng số so với hàng trước đó, chẳng hạn: 10, 12, 14, 16, 18,... Đây là ví dụ về một khái niệm toán học mà chúng ta tìm hiểu trong phần này, đó là cấp số cộng.

Hình 2.3

I Định nghĩa

HOẠT ĐỘNG 1

Chỗ ngồi trong một giảng đường được xếp thành các dãy theo dạng hình quạt tròn (*Hình 2.4*). Số chỗ ngồi của dãy sau tăng thêm 6 so với dãy trước. Nếu giảng đường có 10 dãy ghế thì số chỗ ngồi của dãy cuối cùng là bao nhiêu và giảng đường có tất cả bao nhiêu chỗ ngồi, biết dãy đầu tiên có 10 chỗ ngồi?

Hình 2.4

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một hằng số d, nghĩa là $u_{n+1} = u_n + d$, với mọi số nguyên dương n.

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Nhận xét: Nếu công sai $d = 0$ thì mọi số hạng của cấp số cộng đều bằng nhau. Khi đó, cấp số cộng là một dãy số không đổi.

VÍ DỤ 1

Xác định xem các dãy số sau đây có là cấp số cộng hay không. Nếu chúng là cấp số cộng, hãy xác định số hạng đầu và công sai.

a) (u_n): –2, –5, –8, –11, –14; b) (v_n), với $v_n = 3n + 1$; c) (z_n), với $z_n = n^2 + 1$.

Giải

a) (u_n) là cấp số cộng hữu hạn với $u_1 = -2$ và $d = -3$.

b) Ta có: $v_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 1 + 3 = v_n + 3$ nên dãy số (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$ và $v_1 = 4$.

c) Ta có: $z_1 = 2$, $z_2 = 5$, $z_3 = 10$. Vì $z_2 = z_1 + 3$ và $z_3 = z_2 + 5$ nên dãy số (z_n) không là cấp số cộng.

LUYỆN TẬP 1

Viết mười số hạng đầu của một cấp số cộng có công sai bằng 5 và số hạng thứ năm là 6.

II Số hạng tổng quát của một cấp số cộng

HOẠT ĐỘNG 2

Cho một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d.

a) Biểu diễn u_2, u_3, u_4, u_5 theo u_1 và d.

b) Hãy dự đoán công thức tính u_{10}, u_{100} theo u_1 và d.

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được cho bởi:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \text{ với } n \geq 2.$$

VÍ DỤ 2

Tính số hạng thứ 15 của cấp số cộng (u_n): 3, −2, −7,...

Giải

Vì $u_1 = 3$ và $u_2 = -2$ nên công sai $d = -2 - 3 = -5$.

Số hạng thứ 15 là $u_{15} = u_1 + 14d = 3 + 14.(-5) = -67$.

VÍ DỤ 3

Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam vào năm 2018 là 96 triệu người. Nếu thực hiện tốt kế hoạch hoá gia đình thì bình quân mỗi năm, dân số nước ta tăng 1 triệu người. Giả sử chương trình kế hoạch hoá gia đình được duy trì tốt và ổn định trong nhiều năm, hãy tính dân số của nước ta vào năm 2030.

Giải

Theo giả thiết, ta có mức tăng dân số hàng năm ổn định 1 triệu người. Do vậy, tính từ năm 2018 thì dân số hàng năm lập thành cấp số cộng với công sai $d = 1$ triệu (người).

Dân số năm 2018 là $u_1 = 96$ triệu, dân số năm 2030 là số hạng thứ 13 của cấp số cộng nên:

$$u_{13} = u_1 + 12d = 96 \text{ triệu} + 12 \text{ triệu} = 108 \text{ triệu (người)}.$$

LUYỆN TẬP 2

Kiến vàng là loài kiến có lợi trong nông học, sinh học. Nó giúp nhà nông ngăn ngừa côn trùng, giảm sử dụng các loại thuốc trừ sâu. Ở đồng bằng sông Cửu Long, nhà nông thường tách đàn kiến sang cây trồng khác để bảo vệ cây. Giả sử một đàn kiến vàng có 4 000 con vào đầu tháng 6 năm 2018, mỗi tháng đàn kiến tăng thêm 900 con. Một nhà nông muốn tách đàn khi đàn kiến đạt khoảng 20 000 con. Đến thời điểm nào người đó có thể tách đàn?

Hình 2.5

III Tổng *n* số hạng đầu của một cấp số cộng

HOẠT ĐỘNG 3

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = 3$.

a) Viết 13 số hạng đầu tiên của (u_n).

b) Gọi S là tổng 13 số hạng của cấp số cộng. Ta viết S bằng hai cách:

$$S = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34 + 37 + 40;$$

$$S = 40 + 37 + 34 + 31 + 28 + 25 + 22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4.$$

Từ nhận xét $4 + 40 = 37 + 7 = 10 + 34 = \ldots = 40 + 4$, hãy suy ra đẳng thức $S = \dfrac{13(4+40)}{2}$.

Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n), khi đó $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$.

Nhận xét:

- Thay $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.
- Trong một cấp số cộng hữu hạn, tổng hai số hạng cách đều hai đầu đều bằng nhau.
- Trong một cấp số cộng (u_n), ta có: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với mọi $k \geq 2$.

VÍ DỤ 4

Cho cấp số cộng 2, 4, 6, 8,…

a) Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng.

b) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Giải

a) Cấp số cộng đã cho có công sai $d = 2$. Ta có $u_{100} = 2 + 99.2 = 200$.

b) Ta có $S_{100} = \dfrac{100(2+200)}{2} = 10\ 100$.

LUYỆN TẬP 3

Tính tổng các số nguyên dương lẻ và có ba chữ số.

VẬN DỤNG

Một công ty X cho người lao động trẻ, có trình độ kĩ thuật cao được tự chọn phương án khi kí hợp đồng lao động có thời hạn 10 năm với công ty. Có hai phương án để chọn:

Phương án 1:

Năm đầu tiên nhận lương 100 triệu đồng, mỗi năm tiếp theo tăng thêm 12 triệu đồng.

Phương án 2:

Quý đầu tiên nhận 30 triệu đồng, mỗi quý tiếp theo sẽ tăng thêm 2,5 triệu đồng.

Giả sử anh An quyết định kí hợp đồng để làm việc cho công ty X trong 10 năm. Anh nên chọn phương án nào để tổng tiền lương nhận được trong 10 năm là lớn hơn?

BÀI TẬP

2.6. Cho cấp số cộng 6, 17, 28,…

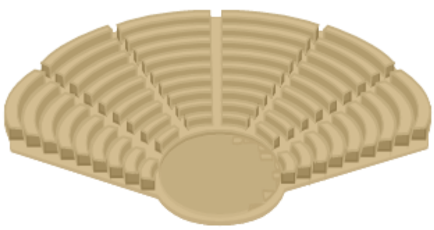
a) Tìm số hạng thứ 20 của cấp số cộng.

b) Tìm tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

2.7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 6$ và $u_9 = 48$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng.

2.8. Trên Mặt Trăng, khi một vật được thả rơi tự do, ở giây đầu tiên nó đi được một đoạn dài 80,772 cm. Mỗi giây sau nó đi được một đoạn nhiều hơn đoạn đường đi trong giây ngay trước đó 161,554 cm. Tìm độ dài của đoạn đường đã đi được trong 10 giây của một vật rơi tự do trên Mặt Trăng.

2.9. Nhà hát bậc dốc hình tròn đã được xây dựng từ thời La Mã. Các dãy chỗ ngồi được xếp theo hình cung tròn mà số chỗ ngồi tăng dần từ trong ra ngoài. Một nhà hát như thế có số chỗ ngồi ở các dãy tính từ trong ra ngoài lập thành cấp số cộng 12, 16, 20,… Số chỗ ngồi của dãy cuối cùng là 72. Tính tổng số chỗ ngồi trong nhà hát.

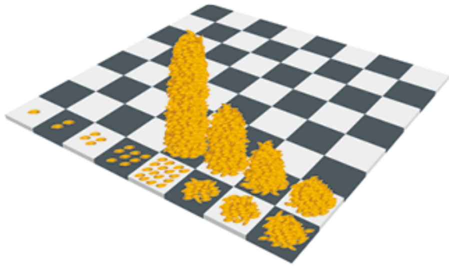


Hình 2.6

BÀI 3

CẤP SỐ NHÂN

Nếu đặt vào ô thứ nhất của bàn cờ vua một hạt thóc, ô thứ hai hai hạt, ô thứ ba bốn hạt, cứ thế gấp đôi lên cho đến ô thứ 64 thì số hạt thóc trong các ô theo thứ tự từ 1 đến 64 là: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^{63}$. Đây là một dãy số đặc biệt mà ta gọi là cấp số nhân.



Hình 2.7

I Định nghĩa

HOẠT ĐỘNG 1

Các dãy số (u_n) và (v_n) dưới đây được cho bằng cách liệt kê:

- (u_n): $1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$
- (v_n): $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

a) Hãy dự đoán quy luật hình thành các số hạng của các dãy số trên.

b) Hãy viết ba số hạng tiếp theo của các dãy số trên.

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một hằng số q, nghĩa là $u_{n+1} = u_n . q$, với mọi số nguyên dương n.

Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

Nhận xét: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là dãy số không đổi: $u_1, u_1, u_1, \ldots$

VÍ DỤ 1

Tìm số hạng cuối của cấp số nhân hữu hạn: $2, 5, \frac{25}{2}, \frac{125}{4}, \boxed{?}$.

Giải

Ta có $u_1 = 2$ và $u_2 = 5 = u_1 . q$ nên $q = \frac{5}{2}$.

Vậy số hạng cuối của cấp số nhân là $u_5 = u_4 . q = \frac{125}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{625}{8}$.

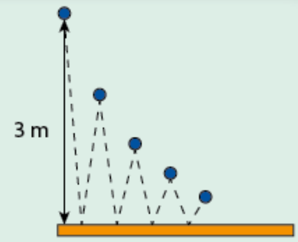
LUYỆN TẬP 1

Tìm số hạng thứ tư và số hạng thứ năm của cấp số nhân $16, 24, \ldots$

II Số hạng tổng quát của một cấp số nhân

HOẠT ĐỘNG 2

Một quả bóng được ném xuống từ độ cao 3 m. Độ cao mà quả bóng nảy lên bằng $\frac{3}{5}$ độ cao trước đó (*Hình 2.8*). Tính độ cao của lần nảy lên thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ năm.



Hình 2.8

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được cho bởi:

$$u_n = u_1 . q^{n-1}, \text{ với } n \geq 2.$$

VÍ DỤ 2

Tìm số hạng thứ chín của cấp số nhân 8, 12, 18,...

Giải

Ta có công bội của cấp số nhân là $q = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Số hạng thứ chín của cấp số nhân là $u_9 = u_1 . q^8 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{3^8}{32} = \frac{6\,561}{32}$.

VÍ DỤ 3

Một tỉnh A có dân số vào đầu năm 2001 là 1,5 triệu người, tỉ lệ tăng dân số hàng năm của tỉnh ổn định là 1,1%. Đến đầu năm 2010, dân số của tỉnh A là bao nhiêu?

Giải

Gọi u_1 là dân số của tỉnh A vào đầu năm 2001 và u_2 là dân số của tỉnh A vào đầu năm 2002.

Vì tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,1% nên $u_2 = u_1 + \frac{1,1}{100} u_1 = \frac{101,1}{100} u_1$.

Tương tự, nếu $u_3, u_4, \ldots, u_{10}$ là dân số của tỉnh A vào đầu các năm 2003, 2004,..., 2010 thì dãy số (u_n) $(1 \leq n \leq 10)$ là cấp số nhân hữu hạn mà công bội $q = \frac{101,1}{100}$.

Dân số của tỉnh ở đầu năm 2010 là $u_{10} = u_1 . q^9 = 1\,500\,000 \cdot \left(\frac{101,1}{100}\right)^9 = 1\,655\,205$ (người).

LUYỆN TẬP 2

Một nước có dân số 25 triệu người vào đầu năm 2021. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm ổn định là 0,5%, tính dân số của nước đó vào đầu năm 2040.

III Tổng *n* số hạng đầu của một cấp số nhân

HOẠT ĐỘNG 3

Cho cấp số nhân (u_n). Đặt S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân, nghĩa là:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Tính qS_n và $qS_n - S_n$.

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, khi đó $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

Nhận xét:

- Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là dãy số không đổi: $u_1, u_1, \ldots, u_1, \ldots$, khi đó $S_n = nu_1$.
- Trong một cấp số nhân hữu hạn, tích hai số hạng cách đều hai đầu luôn bằng nhau.
- Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì $u_{k-1} . u_{k+1} = u_k^2$.

VÍ DỤ 4

Người ta thiết kế một toà tháp có 9 tầng, tầng thứ nhất có diện tích 1 000 m^2, mỗi tầng tiếp theo diện tích bằng $\frac{2}{3}$ diện tích của tầng trước đó. Tính tổng diện tích các tầng của tháp. Làm tròn đến hàng đơn vị (m^2).

Giải

Diện tích các tầng của tháp lập thành cấp số nhân hữu hạn có 9 số hạng với $u_1 = 1\,000$ và $q = \frac{2}{3}$.

Tổng diện tích các tầng của tháp là: $S_9 = \dfrac{1000\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^9\right]}{1-\frac{2}{3}} \approx 2\,921,9 \approx 2\,922$ (m^2).

LUYỆN TẬP 3

Trong bài toán nêu ra ở đầu bài học, tính tổng số hạt thóc được đặt vào 10 ô đầu tiên của bàn cờ vua.

VẬN DỤNG

Mỗi năm, một nhân viên văn phòng mua một đôi giày mới. Giá của một đôi giày người đó mua ở năm đầu tiên là 500 000 đồng. Những năm tiếp theo, giá một đôi giày cùng loại tăng 20% so với giá của năm trước đó. Tính tổng số tiền người đó đã mua giày trong 10 năm.

BÀI TẬP

2.10. Tìm ba số hạng tiếp theo của các cấp số nhân sau:

a) 8, 16, 32,…;

b) 4, –2,…

2.11. Một tảng băng khối lượng 1 tấn đang tan chảy. Cứ mỗi giờ, tảng băng mất đi $\frac{1}{5}$ khối lượng của nó. Tính khối lượng còn lại của tảng băng sau 6 giờ.

2.12. Iodine –131 là một đồng vị phóng xạ được sử dụng trong chẩn đoán y tế. Chu kì bán rã của nó là tám ngày. Nghĩa là sau tám ngày, khối lượng của nó chỉ còn một nửa. Tính khối lượng còn lại của 160 mg Iodine –131 sau 64 ngày. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị (mg).

2.13. Một tỉnh B có dân số 1 500 000 người vào năm 2014. Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi là 1,25%/năm. Tính dân số của tỉnh đó vào năm 2025. Làm tròn kết quả đến hàng chục.

2.14. Vào tháng 4/2022, giá thuê một căn hộ là 4 triệu đồng/tháng. Sau một quý thì giá thuê tăng thêm 5%/tháng so với giá của quý trước đó. Tính giá thuê căn hộ đó vào tháng 01/2025.

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

BÀI TẬP TỰ LUẬN

2.15. Cho dãy số (u_n) được xác định bằng công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 3, u_2 = 7 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 3u_{n-2}}{2}, \forall n \geq 3. \end{cases}$

Tìm các số hạng u_3, u_4 và u_5.

2.16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.

a) Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b) Chứng minh rằng dãy (u_n) tăng và bị chặn.

2.17. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = 3 - \dfrac{2}{n}$;

b) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$;

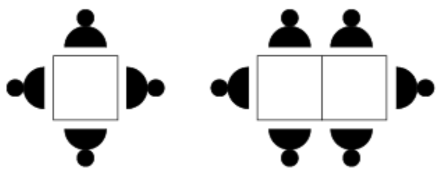
c) $u_n = \dfrac{n+5}{2n-1}$;

d) $u_n = (-1)^n . n!$.

2.18. Tìm tổng các số nguyên dương có ba chữ số và chia hết cho 3.

2.19. Trực khuẩn E. Coli là loại vi khuẩn sinh sống trong đường tiêu hoá của người. Nó có lợi ích như ngăn chặn sự tấn công của vi khuẩn vào đường tiêu hóa, kích thích hệ miễn dịch của cơ thể và một số lợi ích khác, nhưng cũng là tác nhân gây bệnh tiêu chảy. Nó sinh sản theo hình thức phân bào. Trong điều kiện thích hợp thì cứ 20 phút, số tế bào E. Coli tăng gấp đôi. Nếu ban đầu có 1 000 tế bào E. Coli, trong điều kiện thích hợp thì sau 5 giờ số tế bào E. Coli là bao nhiêu?

2.20. Trong một nhà hàng, một bàn vuông ngồi được 4 người, nếu nối hai bàn vuông lại thì ngồi được 6 người, nối ba bàn ngồi được 8 người,... Nếu nối n bàn vuông lại theo một hàng ngang thì ngồi được bao nhiêu người?



Hình 2.9

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

2.21. Dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 15, u_2 = 9 \\ u_{n+2} = u_n - u_{n+1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Số hạng thứ sáu của dãy số là

A. 0. B. 6.

C. 3. D. 9.

2.22. Dãy số (u_n) nào có công thức dưới đây là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{5}{n} - 1$. B. $u_n = \frac{n+1}{3n+2}$.

C. $u_n = n + \sin^2 n$. D. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.23. (u_n) là cấp số cộng mà $u_4 = 15$ và $u_{10} = 39$. Giá trị của u_1 là

A. 3. B. 4.

C. 1. D. –3.

2.24. Cấp số cộng hữu hạn 2, 5, 8,…, 86 có bao nhiêu số hạng?

A. 27. B. 28.

C. 29. D. 30.

2.25. Một cấp số nhân hữu hạn có 5 số hạng, số hạng đầu là 2 và số hạng cuối là 162. Tổng các số hạng của cấp số nhân đó là

A. 80. B. 162.

C. 242 hoặc 122. D. 268.

2.26. Cho a, b, c, d, e là một cấp số nhân hữu hạn theo thứ tự đó. Nếu $ace = 125$ thì giá trị của c là

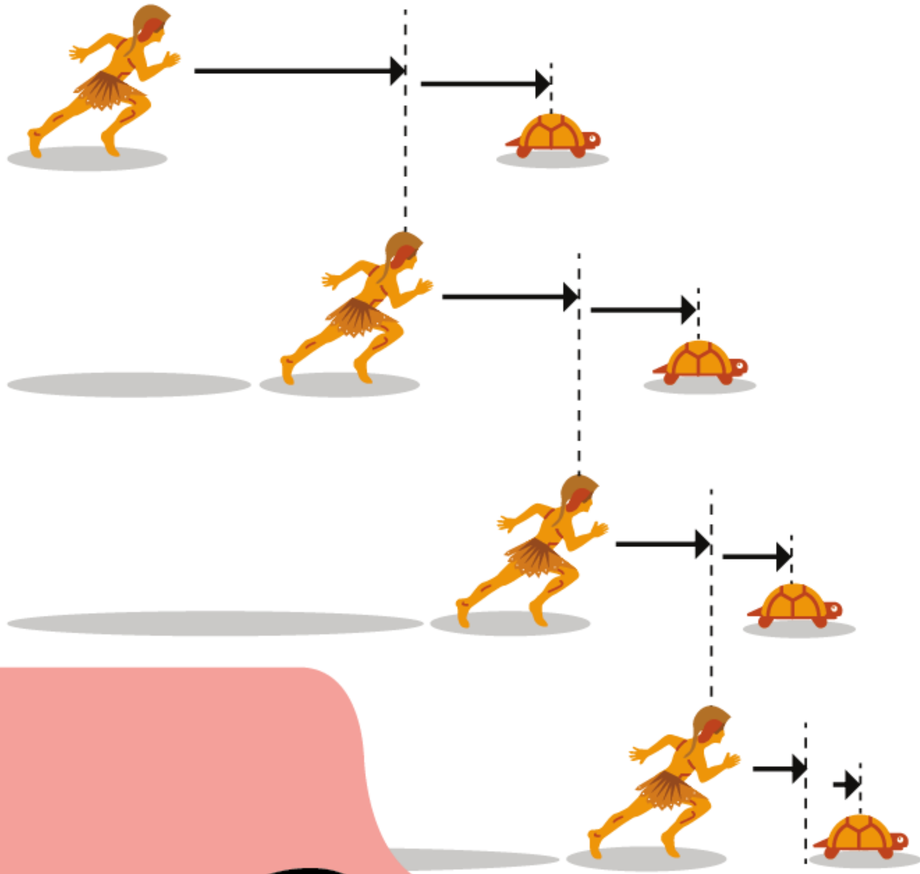
A. 15. B. 25.

C. 50. D. 5.

2.27. Một cấp số nhân hữu hạn có 10 số hạng và công bội $q = \frac{1}{2}$. Tổng các số hạng của cấp số nhân là 511,5. Số hạng đầu của cấp số nhân là

A. 512. B. 256.

C. 128. D. 64.



CHƯƠNG 3

Giới hạn. Hàm số liên tục

Nhiều khái niệm toán học ra đời để giải quyết những vấn đề thực tiễn. Đôi khi chúng cũng bắt nguồn từ những lập luận tự mâu thuẫn về mặt logic, hoặc dẫn đến một kết luận không thể chấp nhận được, thường được gọi là "nghịch lí". Nghịch lí nổi tiếng nhất có tên "Achilles và rùa", còn được gọi là nghịch lí Zenon. Trong thần thoại Hy Lạp, Achilles là một chiến binh vĩ đại. Tuy nhiên, trong cuộc chạy thi với rùa, nếu rùa được chạy trước thì Achilles không thể bắt kịp rùa. Thật vậy, nếu rùa chạy trước thì khi Achilles đến chỗ rùa đang đứng, rùa đã đi thêm một đoạn nữa và Achilles lại mất thêm thời gian chạy đến vị trí mới. Cứ như thế, Achilles dù có sức mạnh phi thường cũng không bao giờ bắt kịp rùa.
Khái niệm "giới hạn" cho phép giải quyết nhiều bài toán của khoa học và thực tiễn liên quan đến sự vô hạn.

- Nhận biết được khái niệm giới hạn của dãy số và một số giới hạn cơ bản;
- Vận dụng được các phép toán về giới hạn dãy số để tìm giới hạn của một số dãy số;
- Nhận biết được khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số, giới hạn một phía của hàm số tại một điểm và giới hạn hữu hạn của hàm số ở vô cực;
- Vận dụng được các phép toán trên giới hạn của hàm số;
- Nhận dạng được hàm số liên tục và tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản.

BÀI 1

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Ta đã biết cách tính tổng $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, với n là số nguyên dương tuỳ ý. Vậy tổng vô hạn $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ có tồn tại hay không và nếu có thì được tính như thế nào?

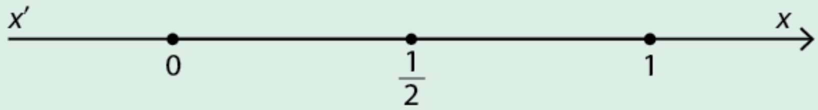
I Giới hạn hữu hạn của dãy số

1. Dãy số có giới hạn bằng 0

HOẠT ĐỘNG 1

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{1}{n}$.

a) Tính giá trị của $u_1, u_2, u_3, u_4, u_{10}$ và biểu diễn chúng trên trục số thực dưới đây:



b) Khi n tăng thì khoảng cách giữa u_n và 0 thay đổi thế nào? Điều đó thể hiện thế nào trên trục số?

c) Bắt đầu từ số hạng thứ mấy thì khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,01? Câu hỏi tương tự với 0,001; 0,00001.

Ghi chú: Khoảng cách từ một số u_n (trong Hoạt động 1) trên trục số đến 0 là $|u_n|$. Người ta chứng minh được rằng $|u_n| = \frac{1}{n}$ có thể nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $|u_n|$ có thể nhỏ bao nhiêu cũng được, nếu chọn n đủ lớn. Ta nói rằng dãy (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực.

Tổng quát, ta có định nghĩa:

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn bằng 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

VÍ DỤ 1

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Giải

Giả sử a là một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước. Ta có $|u_n| < a$ khi và chỉ khi $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < a$.

Hay $n^2 > \frac{1}{a}$. Suy ra $n > \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Vậy nếu chọn n_0 là số nguyên dương thoả điều kiện $n_0 > \frac{1}{\sqrt{a}}$ thì $\left|\frac{(-1)^{n_0}}{n_0^2}\right| = \frac{1}{n_0^2} < a$.

Với mọi số nguyên dương $n > n_0$ ta có $|u_n| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n_0^2} < a$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Chẳng hạn, $a = 0{,}01$ thì chọn $n_0 > \frac{1}{\sqrt{0{,}01}} = 10$, chọn $n_0 = 11$;

$a = 0{,}00005$ thì chọn $n_0 > \frac{1}{\sqrt{0{,}00005}} = 141{,}42$, chọn $n_0 = 142$.

LUYỆN TẬP 1

Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số đã cho.

b) Khi giá trị của n càng lớn thì khoảng cách giữa u_n và 0 thay đổi thế nào?

Lưu ý: Người ta chứng minh được các giới hạn sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ (nếu $|q| < 1$).

2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

HOẠT ĐỘNG 2

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n+1}{n}$. Xét dãy số (v_n) với $v_n = u_n - 3$. Viết công thức tính số hạng tổng quát v_n và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hoặc $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: Nếu $u_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.

VÍ DỤ 2

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{5n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

Giải

Ta có $u_n - 5 = \frac{5n+1}{n} - 5 = \frac{1}{n}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 5) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

LUYỆN TẬP 2

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-4n^2}{n^2} = -4$.

3. Định lí về giới hạn hữu hạn

HOẠT ĐỘNG 3

a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6n^3+1}{n^3} = 6$.

b) So sánh $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6n^3+1}{n^3}$ và $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} 6 + \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3}\right)$.

Người ta chứng minh được các tính chất sau:

a) Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ thì:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n . v_n) = a.b$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = a - b$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ nếu $b \neq 0$

b) Nếu $u_n \geq 0$, với mọi số nguyên dương n và $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Lưu ý: Từ đây ta viết $\lim u_n$ thay cho $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

VÍ DỤ 3

a) Tìm $\lim \dfrac{3n+4}{2n-1}$.

b) Tìm $\lim \dfrac{2^n - 4}{1 - 3.2^n}$.

Giải

a) Ta có $\dfrac{3n+4}{2n-1} = \dfrac{3 + 4 \cdot \dfrac{1}{n}}{2 - \dfrac{1}{n}}$.

Vì $\lim 3 = 3$, $\lim 4 = 4$, $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ và $\lim 2 = 2$ nên $\lim\left(3 + 4 \cdot \dfrac{1}{n}\right) = 3 + 4.0 = 3$ và $\lim\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - 0 = 2$. Vậy $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$.

b) Vì $2^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên ta có thể viết lại $\dfrac{2^n - 4}{1 - 3.2^n} = \dfrac{1 - \dfrac{4}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n} - 3} = \dfrac{1 - 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3}$.

Vì $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim\left[1 - 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right] = 1$ và $\lim\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 3\right] = -3$.

Vậy $\lim \dfrac{2^n - 4}{1 - 3.2^n} = -\dfrac{1}{3}$.

LUYỆN TẬP 3

Tìm $\lim \dfrac{6 - 7n^2}{2n^3 + 9}$ và $\lim \dfrac{5^n + 2.6^n}{6^n + 4^n}$.

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

HOẠT ĐỘNG 4

1. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) và (v_n) với công thức tính số hạng tổng quát lần lượt là $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ và $v_n = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ là các cấp số nhân mà công bội của chúng có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1.
2. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q ($|q| < 1$).
   a) Viết công thức tính tổng S_n của n số hạng đầu tiên của (u_n) theo u_1 và q.
   b) Nếu quy ước $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \lim S_n$, hãy tính S theo u_1 và q.

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.
- Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q, kí hiệu là $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, được cho bởi công thức:

$$S = \frac{u_1}{1-q}.$$

VÍ DỤ 4

Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots$

Giải

S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Vậy $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{3}$.

LUYỆN TẬP 4

Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

II Giới hạn vô cực

HOẠT ĐỘNG 5

Cho dãy số chính phương (u_n) với $u_n = n^2$.

a) Viết các số hạng tương ứng của dãy số (u_n) trong bảng sau:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	…	u_{1000}	…
?	?	?	?	?	?	?	?	…	?	…

b) Từ kết quả có được, nhận xét gì về giá trị của u_n khi n tăng lên vô hạn?

c) Từ số hạng thứ mấy thì mọi số hạng u_n đều thoả mãn $u_n > 10\,000\,000\,000$?

Ghi chú: Ta cũng chứng minh được rằng $u_n = n^2$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi n dần tới $+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi n dần tới $+\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

VÍ DỤ 5

Cho dãy số (u_n) mà $u_n = 2^n$.

a) Từ số hạng thứ mấy trở đi thì mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn 1 000?

b) Từ số hạng thứ mấy trở đi thì mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn 100 000?

Giải

a) Ta có $u_9 = 512$, $u_{10} = 1\,024$, $u_{11} = 2\,048, \ldots$ Vậy từ số hạng thứ mười trở đi, mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn 1 000.

b) Ta có $u_{16} = 65\,536$, $u_{17} = 131\,072$, $u_{18} = 262\,144, \ldots$ Vậy từ số hạng thứ mười bảy trở đi, mọi số hạng của dãy số đều lớn hơn 100 000.

Nhận xét:

- $\lim n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương.
- $\lim q^n = +\infty$, với $q > 1$.

VÍ DỤ 6

Tìm $\lim(-n^4)$.

Giải

Vì $\lim(n^4) = +\infty$ nên $\lim(-n^4) = -\infty$.

LUYỆN TẬP 5

Tìm $\lim(2^n.3^n.4^n)$.

Nhận xét:

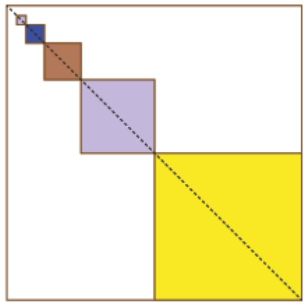
- Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = +\infty$ hoặc $\lim v_n = -\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n < 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$.
- Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.

VẬN DỤNG

Một nhà thầu nhận được hợp đồng sơn màu trang trí một bức tường hình vuông màu trắng kích thước 4 m × 4 m của một trường mẫu giáo. Hai điều kiện của hợp đồng như sau:

a) Các hình vuông cần sơn màu như *Hình 3.1*. Hình vuông lớn nhất có diện tích bằng một phần tư diện tích bức tường được sơn màu tuỳ ý khác màu trắng. Mỗi hình vuông tiếp theo có diện tích bằng một phần tư diện tích hình vuông trước nó, được sơn màu khác với hình vuông trước đó và khác màu trắng;

b) Một phần ba bức tường phải được sơn màu.



Hình 3.1

Sau khi xem các điều kiện của hợp đồng, nhà thầu đã từ chối vì cho rằng họ không thể thực hiện theo yêu cầu của nhà trường. Hãy giải thích lí do vì sao họ từ chối hợp đồng.

BÀI TẬP

3.1. Tìm các giới hạn:

a) $\lim \dfrac{3n+2}{4-n}$;

b) $\lim \dfrac{5n^2+2n-1}{2n^2+n+1}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+4n+2}}{3n-1}$;

d) $\lim \dfrac{n+7}{4+n^2}$;

e) $\lim \dfrac{2^n-1}{5^n+1}$.

3.2. Tìm các giới hạn:

a) $\lim(n^3-n^4+2n)$;

b) $\lim(\sqrt{n^2+4}+n)$;

c) $\lim \dfrac{5^n+2}{3^n+2^n}$.

3.3. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn:

a) $S = 3+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots$;

b) $T = \dfrac{3}{2}-1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{9}+\ldots$;

c) $U = 0{,}2+0{,}02+0{,}002+0{,}0002+\ldots$

3.4. Người ta thả một viên bi lăn trong một khe thẳng trên mặt phẳng. Viên bi lăn chậm dần. Giây đầu tiên nó đi được 2 mét. Mỗi giây sau đó nó đi được một đoạn bằng $\dfrac{3}{4}$ đoạn đường đi được trong giây liền trước đó.

a) Tính đoạn đường viên bi đi được trong 5 giây đầu tiên.

b) Giả sử chuyển động của viên bi không bao giờ chấm dứt, viên bi có thể cách xa vị trí ban đầu 8 mét hay không?

3.5. Một khinh khí cầu (*Hình 3.2*) bay cao 200 m ở phút đầu tiên sau khi được thả. Mỗi phút tiếp theo, nó bay cao thêm độ cao bằng một nửa độ cao bay được ở phút trước đó. Khinh khí cầu có thể đạt độ cao 400 m hay không?

Hình 3.2

BÀI 2

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ không xác định tại $x = 1$. Khi cho x một số giá trị rất gần 1, ta thấy giá trị tương ứng của hàm số rất gần 2:

x	1,01	1,0001	1,0000001	1,0000000001	...
$f(x)$	2,01	2,0001	2,0000001	2,0000000001	...

Người ta nói hàm số có giới hạn bằng 2 khi x dần đến 1.

I Giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

HOẠT ĐỘNG 1

Cho dãy số (x_n) với $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}\cdot$ Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$.

a) Tính $f(x_n)$ theo n.

b) Tìm $\lim x_n$ và $\lim f(x_n)$.

Lưu ý: Cho các số thực a, b ($a < b$), ta viết khoảng K thay cho một trong các khoảng $(a; b)$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$.

Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

VÍ DỤ 1

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x - 1}\cdot$ Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 6$.

Giải

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Với mọi dãy (x_n) mà $x_n \neq 1$, và $\lim x_n = 1$, ta có:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{3{x_n}^2 - 3}{x_n - 1} = \lim \frac{3(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = \lim 3(x_n + 1) = 6.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 6$.

LUYỆN TẬP 1

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$. Tìm $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c là hằng số).

2. Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số

HOẠT ĐỘNG 2

a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ và $\lim\limits_{x \to 2} (x + 1) = 3$.

b) Tìm $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + x + 1\right)$ và $\lim\limits_{x \to 2} x^2(x + 1)$.

Ta thừa nhận định lí sau:

a) Cho $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số xác định trên $K \setminus \{x_0\}$.
Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, trong đó A và B là các số thực thì:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = A + B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = A - B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) g(x)\right] = AB$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ nếu $B \neq 0$

b) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in K \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

VÍ DỤ 2

Tìm $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 2x)$.

Giải

Hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Vì $\lim\limits_{x \to 4} x = 4$, $\lim\limits_{x \to 4} 2 = 2$ nên

$$\lim_{x \to 4} (x^2 - 2x) = \lim_{x \to 4} (x^2) - \lim_{x \to 4} (2x) = \lim_{x \to 4} x . \lim_{x \to 4} x - \lim_{x \to 4} 2 . \lim_{x \to 4} x = 4.4 - 2.4 = 8.$$

VÍ DỤ 3

Tìm $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$.

Giải

Hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Vì $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$ nên ta chưa áp dụng được định lí trên.

Với $x \neq 2$, ta có: $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 6)}{x - 2} = x + 6$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 6) = 8$.

LUYỆN TẬP 2

Tìm $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1}$ và $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{x^2 + \sqrt{2 - x}}{(2 + x)^2}$.

3. Giới hạn vô cực

HOẠT ĐỘNG 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$ và dãy số (x_n) mà $\lim x_n = 0$. Tìm $\lim f(x_n)$.

Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ (hoặc $-\infty$) khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$ (hoặc $\lim f(x_n) = -\infty$), kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ hoặc $f(x) \to +\infty$ khi $x \to x_0$ (tương tự, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ hoặc $f(x) \to -\infty$ khi $x \to x_0$).

VÍ DỤ 4

Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Giải

Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 0$, ta có: $\sqrt{x_n^{\,2}+1} - 1 > 0$ (vì $x_n \neq 0$) và $\lim\left(\sqrt{x_n^{\,2}+1}-1\right) = 0$.

Vì $\lim 1 = 1$ nên $\lim \frac{1}{\sqrt{x_n^{\,2}+1}-1} = +\infty$. Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} = +\infty$.

LUYỆN TẬP 3

Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{2-\sqrt{x^2+4}}$.

II Giới hạn một phía

HOẠT ĐỘNG 4

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ nếu } x \geq 1 \\ x-4 \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$ và hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = 1 + \frac{1}{n}$; $v_n = 1 - \frac{1}{n}$.

a) So sánh u_n, v_n với 1 và tìm $\lim u_n$, $\lim v_n$.

b) Tính $f(u_n)$ và $f(v_n)$ theo n.

c) Tìm $\lim f(u_n)$ và $\lim f(v_n)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy số (x_n) sao cho $x_0 < x_n < b$, với mọi số nguyên dương n và $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi x dần đến x_0 nếu với mọi dãy số (x_n) sao cho $a < x_n < x_0$, với mọi số nguyên dương n và $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

VÍ DỤ 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x > 1 \\ -x+4 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Giải

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì mà $x_n > 1$ và $\lim x_n = 1$, ta có $f(x_n) = x_n + 1$.

Vậy $\lim f(x_n) = 1 + 1 = 2$. Suy ra $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì mà $x_n < 1$ và $\lim x_n = 1$, ta có $f(x_n) = -x_n + 4$.

Vậy $\lim f(x_n) = -1 + 4 = 3$. Suy ra $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$.

LUYỆN TẬP 4

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{nếu } x \geq -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$.

Lưu ý: Các định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm cũng đúng với giới hạn hữu hạn một phía tại một điểm.

Ta thừa nhận định lí sau:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

VÍ DỤ 6

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ 2x-1 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (nếu có).

Giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x-1) = -1$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ có giới hạn khi x dần đến 0 và $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.

LUYỆN TẬP 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2ax+6 & \text{nếu } x \geq -2 \\ \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{nếu } x < -2 \end{cases}$. Tìm a, biết rằng tồn tại $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

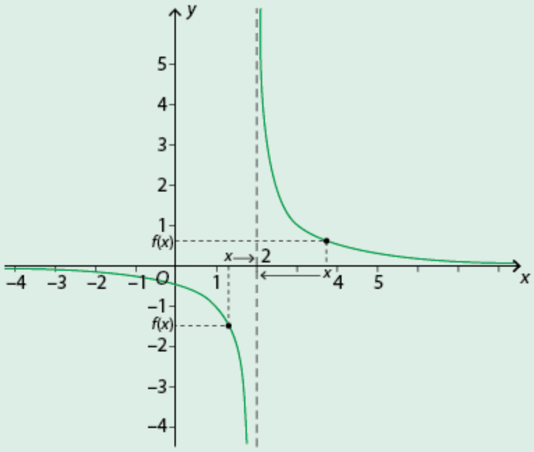
Lưu ý: Tương tự định nghĩa giới hạn hữu hạn bên trái hoặc bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi x dần đến x_0, ta có thể định nghĩa giới hạn vô cực bên trái (hoặc bên phải) khi x dần đến x_0.

HOẠT ĐỘNG 5

Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ được cho trong *Hình 3.3*.

a) Nếu $M(x; f(x))$ là một điểm trên đồ thị, hãy dự đoán giá trị của $f(x)$ khi x dần đến 2 theo phía phải, theo phía trái.

b) (x_n) là một dãy số bất kì mà $x_n < 2$ và $\lim x_n = 2$. Tính $f(x_n)$ và tìm $\lim f(x_n)$.



Hình 3.3

Ta thừa nhận định lí sau:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \text{ và } \lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty, \text{ với mọi số thực } a.$$

VÍ DỤ 7

Tìm $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x-5}$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1}$.

Giải

Theo định lí trên, ta có $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x-5} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$.

LUYỆN TẬP 6

Tìm $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2-x}$ và $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{x-4}$.

III Giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

HOẠT ĐỘNG 6

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính giá trị của hàm số tại các điểm trong bảng giá trị sau:

x	$-\infty$	-10^8	-10^3	-10^2	-10	0	10	$1\,000$	$100\,000$	10^9	$+\infty$
$y = f(x)$						$\|\|$					

c) Nhận xét gì về giá trị của $f(x)$ khi x dần đến $+\infty$? Khi x dần đến $-\infty$?

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n), $a < x_n$ và $\lim x_n = +\infty$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến $-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n < a$ và $\lim x_n = -\infty$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

VÍ DỤ 8

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{3x+2}{-x+1}$. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Giải

Hàm số có tập xác định là $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

- Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thoả mãn $x_n < 1$ và $\lim x_n = -\infty$.

  Ta có: $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{3x_n + 2}{-x_n + 1} = \lim \dfrac{3 + \dfrac{2}{x_n}}{-1 + \dfrac{1}{x_n}} = -3$.

  Vậy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$.

- Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thoả mãn $x_n > 1$ và $\lim x_n = +\infty$.

  Ta có: $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{3x_n + 2}{-x_n + 1} = \lim \dfrac{3 + \dfrac{2}{x_n}}{-1 + \dfrac{1}{x_n}} = -3$.

  Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$.

LUYỆN TẬP 7

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Nhận xét:

- Với c là hằng số, ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$.
- Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$.

Lưu ý: Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm vẫn đúng với giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực.

VÍ DỤ 9

Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 - x}$.

Giải

Hàm số $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 - x}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3}}{4 - \dfrac{1}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ nên

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^3 - x} = \frac{1 - 0 + 0}{4 - 0} = \frac{1}{4}$.

LUYỆN TẬP 8

Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$.

2. Giới hạn vô cực của hàm số tại vô cực

HOẠT ĐỘNG 7

Cho hàm số $f(x) = x^2$ và dãy số (x_n) với $x_n = n + 1$.

a) Tìm $\lim x_n$.

b) Tính $f(x_n)$ theo n và tìm $\lim f(x_n)$.

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.
Ta nói $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n > a$ và $\lim x_n = +\infty$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ hoặc $f(x) \to +\infty$ khi $x \to +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.
Ta nói $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi x dần đến $-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n < a$ và $\lim x_n = -\infty$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ hoặc $f(x) \to +\infty$ khi $x \to -\infty$.

Từ hai định nghĩa trên, ta có định nghĩa $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$ (hay $x \to -\infty$) như sau:

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to+\infty} [-f(x)] = +\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to-\infty} [-f(x)] = +\infty$.

VÍ DỤ 10

Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Giải

Hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$ có tập xác định là $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

$\forall (x_n)$, $x_n > 1$ và $\lim x_n = +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = \lim\left(x_n + \frac{1}{x_n - 1}\right) = \lim x_n\left[1 + \frac{1}{x_n(x_n - 1)}\right]$.

Vì $\lim x_n(x_n - 1) = +\infty$ nên $\lim \frac{1}{x_n(x_n - 1)} = 0$. Suy ra $\lim\left[1 + \frac{1}{x_n(x_n + 1)}\right] = 1$.

Vì $\lim x_n = +\infty$ và $\lim\left[1 + \frac{1}{x_n(x_n + 1)}\right] = 1$ nên $\lim x_n\left[1 + \frac{1}{x_n(x_n - 1)}\right] = +\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$.

LUYỆN TẬP 9

Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$.

Nhận xét:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$, với k nguyên dương lẻ.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương chẵn.

3. Quy tắc tìm giới hạn của tích và thương tại vô cực

HOẠT ĐỘNG 8

Cho các hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ và $g(x) = x + 1$.

a) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x).g(x)]$.

Định lí về giới hạn của tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Người ta đã chứng minh được các quy tắc sau đây về giới hạn tại vô cực của tích và thương của hai hàm số:

- **Giới hạn của tích**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L < 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty$

- **Giới hạn của thương**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và $g(x) < 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L < 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và $g(x) < 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Lưu ý:

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp giới hạn của hàm số tại x_0 hoặc giới hạn một phía tại x_0.

VÍ DỤ 11

Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty}(2x^4 - x^3)$ và $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3x-5}{x-3}$.

Giải

- Ta có: $2x^4 - x^3 = x^4\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)$.

  Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2 > 0$ nên $\lim\limits_{x \to +\infty}(2x^4 - x^3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

- Ta có: $\lim\limits_{x \to 3^+}(3x - 5) = 9 - 5 = 4$.

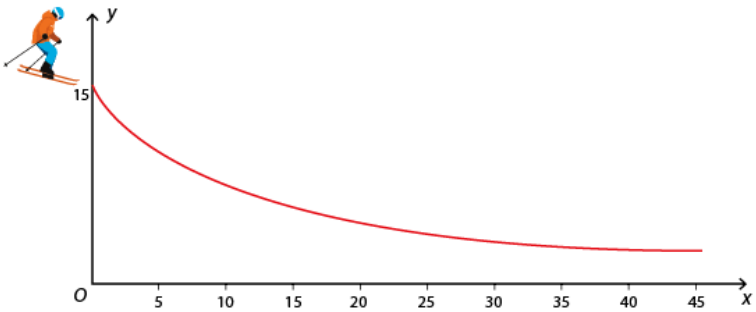
  $\lim\limits_{x \to 3^+}(x-3) = 3 - 3 = 0$ và $x - 3 > 0, \forall x > 3$ nên $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3x-5}{x-3} = +\infty$.

LUYỆN TẬP 10

Tìm $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

VẬN DỤNG

Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt bằng băng cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Hình 3.4

Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí (0; 15) cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thoả mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{150}{x+10}$, với $x \geq 0$.

Hãy kiểm tra xem hàm số $y = f(x)$ có thoả mãn các điều kiện dưới đây hay không:

a) Có đồ thị qua điểm (0; 15);

b) Giảm trên $[0; +\infty)$;

c) Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị của hàm số càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tuỳ ý.

BÀI TẬP

3.6. Dùng định nghĩa để tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-2x}{x+3}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}$.

3.7. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+x+10}{2x^2-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^3+9}{x^4+1}$;

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

3.8. Tìm các giới hạn sau:

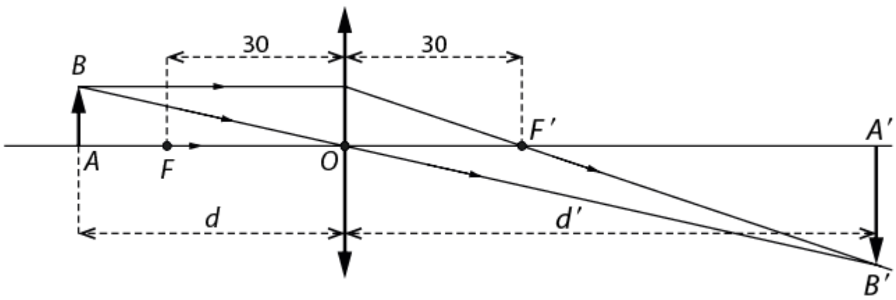
a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-x}{(x-4)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{2x-4}$.

3.9. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x<1\\ x^3+2x-1 & \text{nếu } x\geq 1\end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

3.10. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng d (cm) > 30 (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm) (*Hình 3.5*). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{30}$.



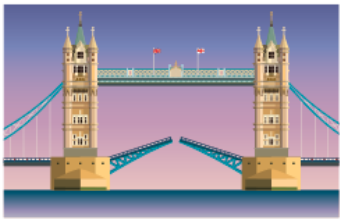
Hình 3.5

a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

b) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{d\to 30^+}h(d)$; $\lim\limits_{d\to 30^-}h(d)$ và $\lim\limits_{d\to +\infty}h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

BÀI 3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

Để thuận tiện cho lưu thông đường thuỷ lẫn đường bộ, nhiều cây cầu trên thế giới được thiết kế để có thể đóng hoặc mở. Khi cầu mở để tàu thuyền qua lại, nhìn từ xa, hình dạng cầu là một đường không liên tục.



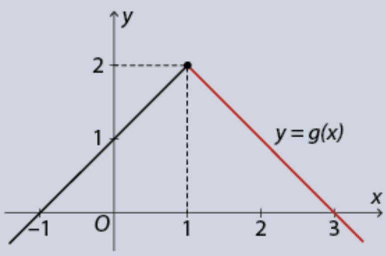
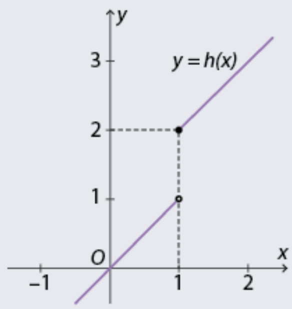
Hình 3.6

I Hàm số liên tục tại một điểm và liên tục trên một khoảng

1. Hàm số liên tục tại một điểm

HOẠT ĐỘNG 1

Dòng 1 của bảng dưới đây cho biết biểu thức của một hàm số. Dòng 2 cho biết đồ thị của hàm số đã cho. Trả lời các câu hỏi ở dòng 3 và 4.

$g(x) = \begin{cases} x+1 \text{ nếu } x \le 1 \\ 3-x \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$	$h(x) = \begin{cases} x+2 \text{ nếu } x \ge 1 \\ x+1 \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$
	
• $g(1) = ?$ • $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = ?$ • $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = ?$	• $h(1) = ?$ • $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = ?$ • $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = ?$
Tồn tại $g(1)$ và $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ hay không? Nếu có, hãy so sánh $g(1)$ và $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.	Tồn tại $h(1)$ và $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ hay không? Nếu có, hãy so sánh $h(1)$ và $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K chứa x_0. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Lưu ý: Hàm số không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

VÍ DỤ 1

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Giải

Hàm số $f(x)$ có tập xác định $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ và $x_0\in(1;+\infty)$.

Ta có: $f(2)=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{4-1}=\dfrac{1}{3}=f(2)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

LUYỆN TẬP 1

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{nếu } x\neq -2\\ -6 & \text{nếu } x=-2\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0=-2$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

HOẠT ĐỘNG 2

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=x^2+1$ tại điểm x_0 bất kì thuộc $\mathbb{R}$.

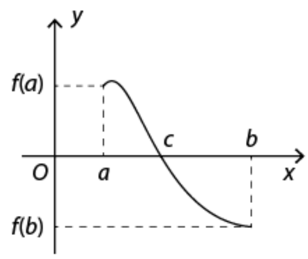
a) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

b) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a);\ \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b).$$

Nhận xét:

- Về mặt hình học, đồ thị một hàm số liên tục trên một khoảng là đường liền trên khoảng đó.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm c thuộc $(a;b)$ sao cho $f(c)=0$. Nói cách khác, phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a;b)$ (*Hình 3.7*).



Hình 3.7

Lưu ý: Khái niệm hàm số liên tục trên $(a;b]$; $[a;b)$; $[a;+\infty)$ và $(-\infty;a]$ được định nghĩa tương tự.

VÍ DỤ 2

Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)=\sqrt{x-1}$ trên $[1;+\infty)$.

Giải

Hàm số có tập xác định là $[1;+\infty)$.

Với mọi $x_0>1$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x-1}=\sqrt{x_0-1}=f(x_0)$. Vậy hàm số liên tục tại mọi điểm $x_0>1$, nói cách khác, hàm số liên tục trên $(1;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0=f(1)$. Suy ra $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$.

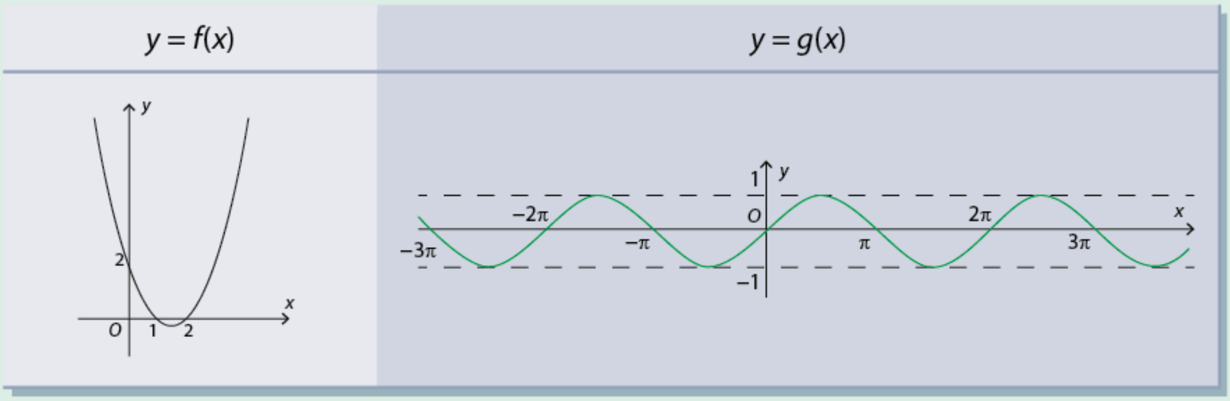
LUYỆN TẬP 2

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$.

II Một số định lí cơ bản

HOẠT ĐỘNG 3

Các hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$ và $g(x) = \sin x$ xác định trên $(-\infty; +\infty)$ có đồ thị như sau:



Dựa vào đồ thị, hãy dự đoán tính liên tục của các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên $(-\infty; +\infty)$.

Ta thừa nhận định lí sau đây:

1. Định lí 1

a) Các hàm đa thức, $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.

b) Các hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

c) Hàm số $y = \sqrt{x}$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

VÍ DỤ 3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} & \text{nếu } x \neq 5 \\ 4 & \text{nếu } x = 5 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

- Trên tập hợp $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$, hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$ là phân thức hữu tỉ xác định trên các khoảng $(-\infty; 5)$ và $(5; +\infty)$ nên liên tục trên các khoảng này.
- Khi $x = 5$, ta có $f(5) = 4$.

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-5)} = \lim_{x \to 5} (x - 1) = 4 = f(5).$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 5$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định của nó, nghĩa là liên tục trên $\mathbb{R}$.

LUYỆN TẬP 3

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x - 2}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

2. Định lí 2

HOẠT ĐỘNG 4

Cho hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Xét tính liên tục của $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tại $x_0 = 1$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) + g(x)$ tại $x_0 = 1$.

a) Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_0;
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

b) Giả sử $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $f(x) \geq 0, \forall x \in K$. Khi đó hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ liên tục trên K.

VÍ DỤ 4

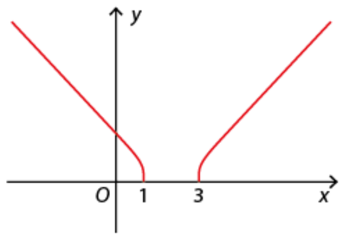
Xét tính liên tục của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

Giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Tập xác định của hàm số là $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Hàm số $h(x) = x^2 - 4x + 3$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 1]$ và $[3; +\infty)$.



Hình 3.8

Ngoài ra, vì $x^2 - 4x + 3 \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ nên $y = \sqrt{h(x)}$ liên tục trên $(-\infty; 1]$ và $[3; +\infty)$.

Nhận xét: Sử dụng phần mềm toán học GeoGebra, đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ cho bởi *Hình 3.8*. Đồ thị là đường liền trên $(-\infty; 1]$ và $[3; +\infty)$.

LUYỆN TẬP 4

Tìm các khoảng trên đó hàm số sau đây là liên tục: $y = x + \tan x$.

VẬN DỤNG

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq 0 \\ ax + b & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 4 - x & \text{nếu } 2 \leq x \end{cases}$, trong đó a và b là hai số thực. Tìm a và b để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI TẬP

3.11. Xét tính liên tục của các hàm số sau đây tại điểm $x_0 = 3$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x - 3} \text{ nếu } x \neq 3 \\ 9 \text{ nếu } x = 3; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 \text{ nếu } x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 \text{ nếu } x \geq 3. \end{cases}$

3.12. Hãy xác định các khoảng mà trên đó mỗi hàm số sau đây là liên tục:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - x - 6}$;

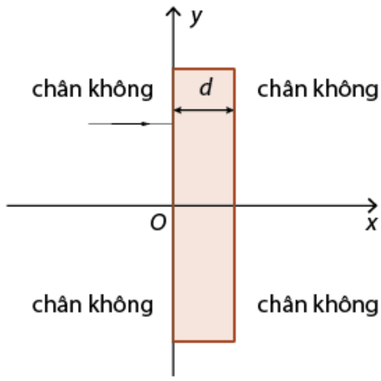
b) $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 9x}$;

c) $h(x) = x^2 + \cot x$;

d) $t(x) = (x + 2\sqrt{x})(x - 2\sqrt{x})$;

e) $u(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

3.13. Trong Vật lí, tỉ số giữa tốc độ c của ánh sáng trong chân không và tốc độ v của ánh sáng trong một môi trường được gọi là chiết suất của môi trường đó. Chiết suất của một môi trường đồng nhất là không đổi. Ngày nay, với công nghệ nano, người ta tạo ra được các bản thuỷ tinh mà chiết suất của nó thay đổi theo một phương nào đó. Xét sự truyền của ánh sáng vào bản thuỷ tinh dọc theo trục Ox như *Hình 3.9*. Biết chiết suất của bản thuỷ tinh này thay đổi theo hoành độ x cho bởi: $n(x) = \dfrac{a}{a - x}$ với $0 \leq x \leq d$, trong đó a là một hằng số có giá trị lớn hơn bề dày d của bản thuỷ tinh.



Hình 3.9

a) Chứng minh rằng tốc độ của ánh sáng cho bởi: $v(x) = \begin{cases} c \text{ nếu } x < 0 \\ c\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \text{ nếu } 0 \leq x \leq d \\ c \text{ nếu } x > d. \end{cases}$

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = v(x)$ trên $(-\infty; +\infty)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

BÀI TẬP TỰ LUẬN

3.14. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{6n+3}{4n-1}$;

b) $\lim \dfrac{(n^2+1)(2n^3-2n+1)}{(n-1)(n^2+1)^2}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{8n^2+9}}{2n-1}$;

d) $\lim \dfrac{2^n+4^n}{6^n+1}$.

3.15. Vị trí ban đầu của một chất điểm trên trục Ox cách gốc toạ độ 50 cm về phía phải. Nó bắt đầu chuyển động trên trục Ox theo hướng dương. Giây đầu tiên nó di chuyển được 40 cm, giây thứ hai được 20 cm..., cứ mỗi giây tiếp theo nó di chuyển một đoạn bằng $\dfrac{1}{2}$ đoạn đường đi được trong giây ngay trước đó.

a) Tính khoảng cách từ gốc O đến chất điểm sau 5 giây.

b) Tại thời điểm nào kể từ lúc bắt đầu chuyển động, chất điểm cách O một khoảng 135 cm? Giả thiết rằng chuyển động của chất điểm không bao giờ chấm dứt.

3.16. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau:

a) $S = 4 + 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \ldots$;

b) $T = 6 - 3 + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4} + \ldots$

3.17. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-16}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+x+5}{2x^3-1}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2x-1}$.

3.18. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+1}{x-2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2}}$.

3.19. Xét tính liên tục của các hàm số sau đây tại điểm x_0:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{nếu } x > 1 \\ -\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \le 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x-2} & \text{nếu } x < 2 \\ -3 & \text{nếu } x = 2 \\ 1-2x & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

3.20. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} \text{ nếu } x \neq 1 \\ a \text{ nếu } x = 1 \end{cases}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi

A. $a = 1$.
B. $a = 2$.
C. $a = 3$.
D. $a = -1$.

3.21. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x - 4}{x - 2}$ là

A. 4.
B. -4.
C. $+\infty$.
D. $-\infty$.

3.22. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - x + x^2}{x}$ là

A. $-\infty$.
B. $+\infty$.
C. 0.
D. 1.

3.23. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) là 5. Nếu công bội của cấp số nhân là $q = \dfrac{2}{3}$ thì số hạng đầu là

A. $u_1 = 3$.
B. $u_1 = \dfrac{5}{3}$.
C. $u_1 = \dfrac{4}{3}$.
D. $u_1 = \dfrac{7}{3}$.

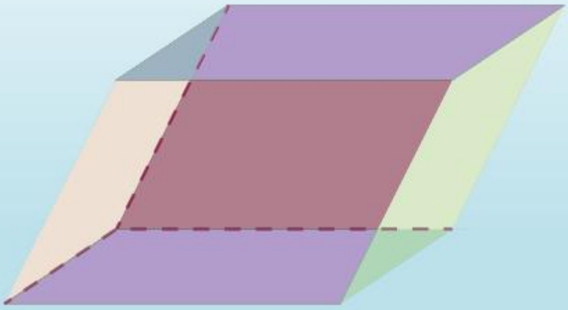
3.24. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n + 2} - \dfrac{n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ có giới hạn là

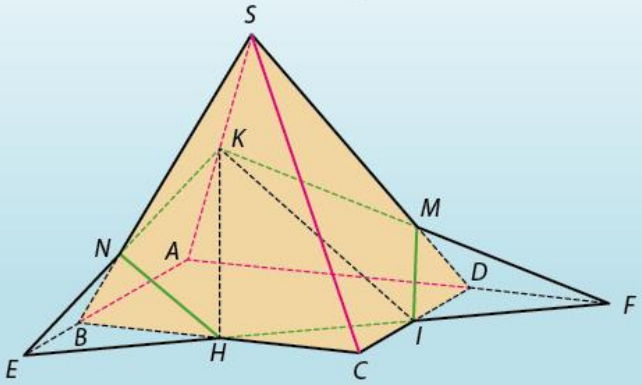
A. $-\dfrac{1}{2}$.
B. $\dfrac{1}{2}$.
C. -1.
D. 1.

3.25. $\lim \dfrac{4^n - 5^n}{2^n . 3^n}$ là

A. $+\infty$.
B. $-\infty$.
C. $\dfrac{5}{6}$.
D. 0.

Phần HÌNH HỌC





CHƯƠNG 4 Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song

Trước đây, chúng ta đã nghiên cứu tính chất của những hình nằm trong mặt phẳng như tam giác, đường tròn, vectơ... Tuy nhiên, xung quanh chúng ta còn có những hình không nằm trong mặt phẳng như quả bóng, bể cá, quyển sách, hộp phấn... Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu các khái niệm về hình học trong không gian, quan hệ song song trong không gian.

- Nhận biết các quan hệ liên thuộc cơ bản giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian, các cách xác định mặt phẳng, hình chóp, hình tứ diện;
- Nhận biết được vị trí tương đối của hai đường thẳng, giải thích được tính chất hai đường thẳng song song;
- Giải thích được điều kiện để đường thẳng song song mặt phẳng, điều kiện để hai mặt phẳng song song, định lí Thalès trong không gian, tính chất hình lăng trụ, hình hộp;
- Nhận biết được khái niệm, tính chất phép chiếu song song, vẽ được hình biểu diễn trường hợp đơn giản;
- Vận dụng quan hệ song song để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

BÀI 1 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I Các khái niệm mở đầu

1. Mặt phẳng

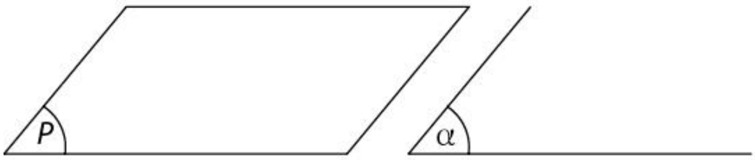
HOẠT ĐỘNG 1

Đây là hình ảnh bên trong một phòng học. Hãy chỉ ra các vật có bề mặt phẳng, nhẵn.

Hình 4.1

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ tĩnh lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn. Ta thường kí hiệu mặt phẳng bằng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp đặt trong dấu ngoặc ( ): mặt phẳng (P), mặt phẳng (α) hoặc viết tắt mp (P), mp (α) hoặc (P), (α),...



Hình 4.2

VÍ DỤ 1

Hãy chỉ ra một vài hình ảnh một phần mặt phẳng trong *Hình 4.3a*, *Hình 4.3b*, *Hình 4.3c*.

Hình 4.3a

Hình 4.3b. Hoàng Thành Thăng Long

Hình 4.3c

Giải

Ở *Hình 4.3a*, mặt hồ nước yên tĩnh là hình ảnh một phần mặt phẳng.
Ở *Hình 4.3b*, bề mặt ngoài của tường thành là hình ảnh một phần mặt phẳng.
Ở *Hình 4.3c*, màn hình tivi, bức tường là hình ảnh một phần mặt phẳng.

LUYỆN TẬP 1

Hãy tìm những đồ vật xung quanh ta là hình ảnh một phần mặt phẳng.

2. Điểm thuộc mặt phẳng

Cho trước một điểm A và mặt phẳng (P). Ta có hai trường hợp xảy ra:

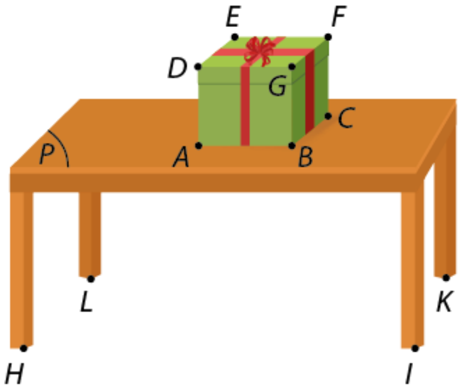
- Khi điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta nói A nằm trên (P), hay (P) chứa A hay (P) đi qua A và kí hiệu $A \in (P)$;
- Khi điểm A không thuộc mặt phẳng (P), ta nói A nằm ngoài (P) hay (P) không chứa A và kí hiệu $A \notin (P)$.

VÍ DỤ 2

Quan sát *Hình 4.4*, xem mặt bàn là một phần của mặt phẳng (P), xét các điểm $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L$. Hãy cho biết những điểm nào thuộc mặt phẳng (P) và những điểm nào không thuộc mặt phẳng (P).

Giải

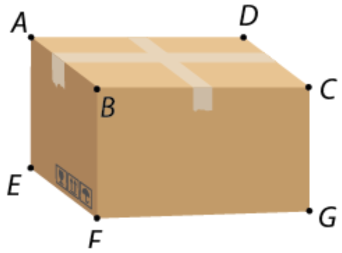
Ta có các điểm A, B, C thuộc mặt phẳng (P), còn các điểm D, E, F, G, H, I, K, L không thuộc mặt phẳng (P).



Hình 4.4

LUYỆN TẬP 2

Hình 4.5 là ảnh chụp một thùng các–tông đựng hàng hóa có dạng hình hộp chữ nhật. Xem bề mặt đáy trên (nắp thùng) là một phần của mặt phẳng (P). Trong các điểm được đánh dấu ở các đỉnh hình hộp chữ nhật gồm A, B, C, D, E, F, G, những điểm nào thuộc mặt phẳng (P)?



Hình 4.5

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

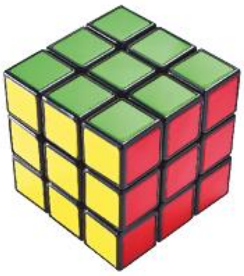
Để nghiên cứu hình học không gian, người ta thường vẽ các hình không gian lên bảng, lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là hình biểu diễn của một hình không gian.

QUY TẮC VẼ HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

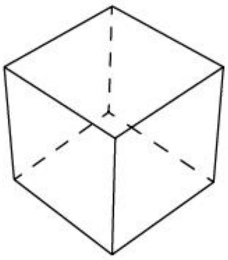
- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

Ghi chú: Các quy tắc khác sẽ được học ở phần sau.

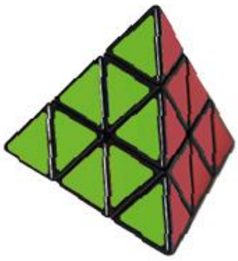
Chẳng hạn, một khối rubik thường gặp có hình dạng là hình lập phương (*Hình 4.6*) và có thể được vẽ biểu diễn như *Hình 4.7*. Ngoài ra, còn có các khối rubik hình chóp tam giác đều (*Hình 4.8*) và có thể được vẽ biểu diễn như *Hình 4.9*.



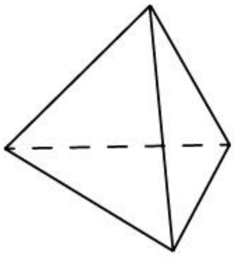
Hình 4.6



Hình 4.7



Hình 4.8



Hình 4.9

II Các tính chất thừa nhận

1. Các tính chất

HOẠT ĐỘNG 2

Trong hình học phẳng, qua hai điểm phân biệt có thể xác định được bao nhiêu đường thẳng?

TÍNH CHẤT 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Hình 4.10

Hình 4.10 minh hoạ qua hai điểm A, B có duy nhất một đường thẳng.

Một số đồ vật có ba chân khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh. Dưới đây là một số hình minh hoạ:

Hình 4.11. Cửu đỉnh ở Hoàng Thành, Huế

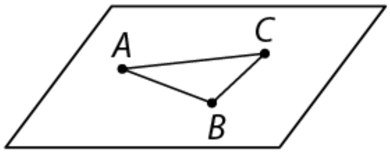
Hình 4.12. Giá đỡ ba chân máy quay phim

Hình 4.13. Kiềng ba chân

TÍNH CHẤT 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

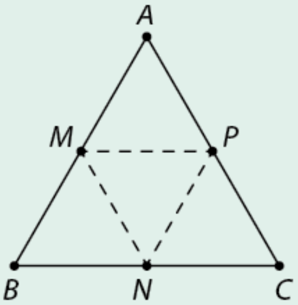
Lưu ý: Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng. Ta kí hiệu mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là mặt phẳng (ABC) hoặc mp (ABC) hoặc (ABC).



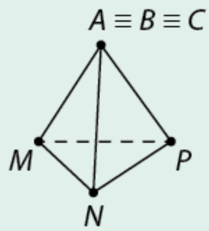
Hình 4.14

HOẠT ĐỘNG 3

a) Hãy sử dụng một giấy bìa cứng, vẽ và cắt thành hình một tam giác đều ABC như *Hình 4.15*. Lấy các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA, sau đó gấp lại theo các đường nét đứt MN, NP, PM và dán các mép với nhau bằng băng dính để được một mô hình có hình biểu diễn như *Hình 4.16*.



Hình 4.15



Hình 4.16

b) Sử dụng thêm một tấm bìa cứng phẳng (H), có thể đặt (H) chạm đồng thời vào bốn vị trí tương ứng với bốn điểm A, M, N, P hay không?

TÍNH CHẤT 3

Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Lưu ý: Một tập hợp điểm cùng thuộc một mặt phẳng được gọi là các điểm đồng phẳng. Nếu không có mặt phẳng nào chứa tập hợp điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

HOẠT ĐỘNG 4

Vì sao người thợ xây thường dùng cây gỗ thẳng dài rê trên bề mặt sàn sau khi đổ bê tông? Vì sao người thợ mộc thường rê thước thẳng trên mặt bàn sau khi bào nhẵn mặt bàn (*Hình 4.17*)?

Hình 4.17

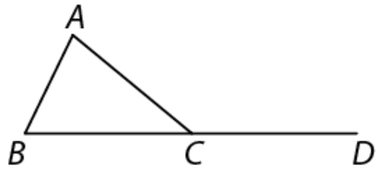
TÍNH CHẤT 4

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (P) hoặc (P) chứa d, kí hiệu: $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.

VÍ DỤ 3

Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm nằm trên đường thẳng chứa cạnh BC sao cho $BD = 2BC$. Điểm D có thuộc mặt phẳng (ABC) không? Đường thẳng AD có nằm trong mặt phẳng (ABC) không?



Hình 4.18

Giải

Do $B \in (ABC), C \in (ABC)$, mà D nằm trên đường thẳng BC nên theo Tính chất 4, ta có $D \in (ABC)$.
Do $A \in (ABC)$ và $D \in (ABC)$ nên đường thẳng AD nằm trong (ABC).

LUYỆN TẬP 3

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Khi đó, O và D có thuộc mặt phẳng (ABC) không?

HOẠT ĐỘNG 5

a) Quan sát trong lớp học, xem mặt tường (có chứa bảng xanh) và sàn nhà là hình ảnh của hai mặt phẳng phân biệt (*Hình 4.19*). Hãy chỉ ra một số điểm chung của hai mặt phẳng này.

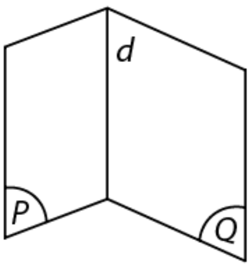
b) Đặt quyển sách thẳng đứng trên mặt bàn và mở ra thành hai nửa (*Hình 4.20*). Xem hai trang giấy trước mặt là hình ảnh của hai mặt phẳng phân biệt (P), (Q). Hãy chỉ ra ít nhất ba điểm vừa thuộc (P) vừa thuộc (Q) và nhận xét về vị trí của các điểm này.


Hình 4.19


Hình 4.20

TÍNH CHẤT 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của (P) và (Q). Kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$ hoặc $(P) \cap (Q) = d$.



Hình 4.21

Lưu ý: Nếu ta tìm được hai điểm chung A và B của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì $(P) \cap (Q) = AB$.

VÍ DỤ 4

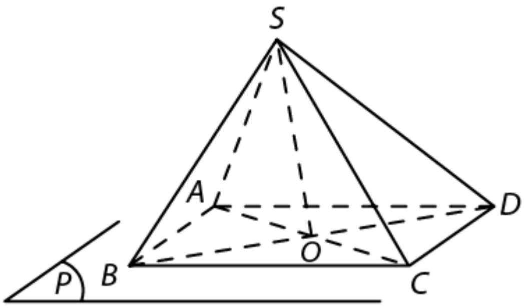
Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Lấy một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Giải

Rõ ràng S là một điểm chung của (SAC) và (SBD).

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của hình bình hành $ABCD$. Ta có O thuộc AC và $AC \subset (SAC)$ nên O thuộc (SAC). Tương tự O thuộc BD và $BD \subset (SBD)$ nên O thuộc (SBD). Suy ra, O cũng là một điểm chung của (SAC) và (SBD).

Vậy, giao tuyến của (SAC) và (SBD) là đường thẳng SO, hay $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

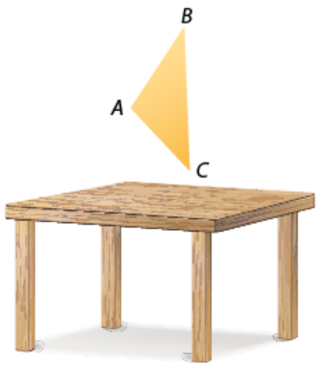


Hình 4.22

Lưu ý: Để chỉ ra O là điểm chung của (SAC) và (SBD), người ta có thể viết $O \in (SAC) \cap (SBD)$.

LUYỆN TẬP 4

Bạn Nam cầm một miếng bìa hình tam giác với 3 đỉnh là A, B, C (*Hình 4.23*) đưa lên không quá cao so với mặt bàn và khẳng định rằng: "Nếu ta đặt các thanh thước dài dọc theo các cạnh AB, BC, CA để các thanh thước này chạm vào mặt bàn lần lượt tại các vị trí đánh dấu là điểm D, E, F thì ba điểm này thẳng hàng". Bạn Mai không đồng ý và khẳng định: "D, E, F không thẳng hàng được vì A, B, C không thẳng hàng". Hãy cho biết ai đúng, ai sai. Vì sao?



Hình 4.23

TÍNH CHẤT 6

Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

2. Cách xác định một mặt phẳng

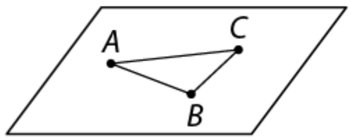
HOẠT ĐỘNG 6

a) Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, một đường thẳng d đi qua hai điểm B, C. Hãy xác định một mặt phẳng chứa cả điểm A và đường thẳng d.

b) Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại điểm I. Trên các đường thẳng a, b lần lượt lấy các điểm A và B không trùng I. Các đường thẳng a, b có nằm trong mặt phẳng (ABI) hay không?

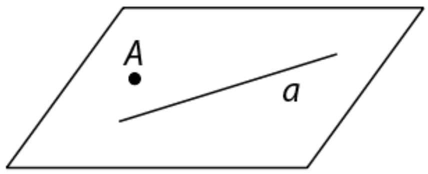
Từ Tính chất 2 và Hoạt động 6, ta có ba cách xác định mặt phẳng sau đây:

Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.



Hình 4.24. Ba điểm A, B, C không thẳng hàng xác định một mặt phẳng

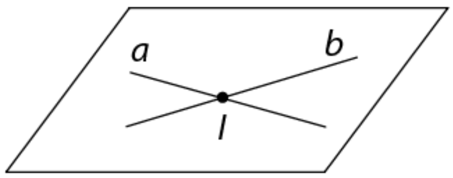
Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.



Hình 4.25. Hình minh hoạ mặt phẳng chứa một điểm và đường thẳng

Cho đường thẳng a và điểm A không thuộc a. Khi đó điểm A và đường thẳng a xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (A, a) hay (A, a) hoặc mp (a, A) hay (a, A) (*Hình 4.25*).

Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.



Hình 4.26. Hình minh hoạ mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Khi đó, hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (a, b) hay (a, b) hoặc mp (b, a) (*Hình 4.26*).

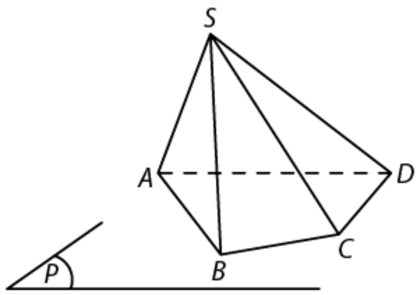
Lưu ý: Từ tính chất này, ta suy ra trong không gian, điều kiện cần để hai đường thẳng cắt nhau là chúng phải nằm trong cùng một mặt phẳng.

VÍ DỤ 5

Trong mặt phẳng (P), cho tứ giác $ABCD$. Lấy điểm S không thuộc mặt phẳng (P). Có hay không một mặt phẳng chứa cả hai đường thẳng SD và BC?

Giải

Giả sử tồn tại mặt phẳng (Q) chứa cả hai đường thẳng SD và BC. Khi đó, S, D, B, C cùng thuộc mặt phẳng (Q). Ta có (Q) cũng chính là mặt phẳng (BCD). Suy ra S thuộc (BCD), mâu thuẫn với giả thiết S không thuộc $(ABCD)$. Vậy không có mặt phẳng nào chứa cả hai đường thẳng SD và BC.



Hình 4.27

LUYỆN TẬP 5

Trong mặt phẳng (P), cho tam giác ABC. Lấy S là điểm không thuộc mặt phẳng (P). Có hay không một mặt phẳng chứa cả hai đường thẳng SA và BC?

VẬN DỤNG 1

Cho hai đường thẳng *a* và *b* cắt nhau và hai điểm *M*, *N* không nằm trong mặt phẳng (*a*, *b*). Biết rằng đường thẳng *MN* và mặt phẳng (*a*, *b*) luôn có một điểm chung. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn luôn chứa *MN* và (α) có điểm chung với hai đường thẳng *a*, *b* lần lượt là *A*, *B*. Chứng minh rằng đường thẳng *AB* luôn đi qua một điểm cố định khi (α) thay đổi.

III Hình chóp và hình tứ diện

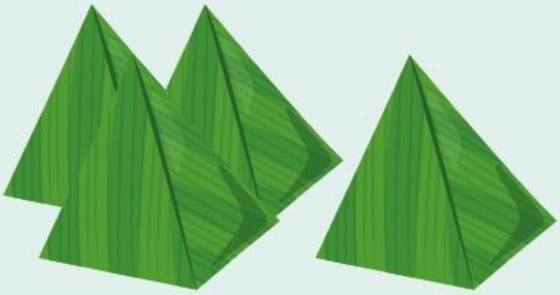
1. Hình chóp

Các kim tự tháp Ai Cập là công trình kiến trúc hùng vĩ đã được xây dựng cách đây hơn 4 000 năm (*Hình 4.28*). Chúng gồm nhiều hình chóp. Sau đây, chúng ta sẽ tìm hiểu về hình chóp và các tính chất của nó.

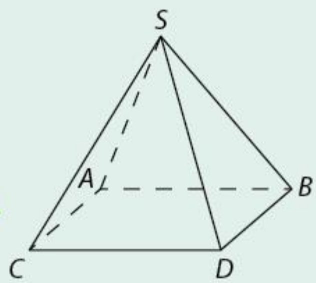
Hình 4.28. Kim tự tháp Ai Cập

HOẠT ĐỘNG 7

Bánh ít lá gai là một đặc sản của người miền Trung, có dạng là một hình chóp tứ giác như *Hình 4.29a*. Trong không gian, hình ảnh bánh ít lá gai có thể biểu diễn bởi *Hình 4.29b*. Hãy gọi tên các tam giác và tứ giác ở *Hình 4.29b* tương ứng với các bề mặt được gói lá của một chiếc bánh ít.



a)



b)

Hình 4.29

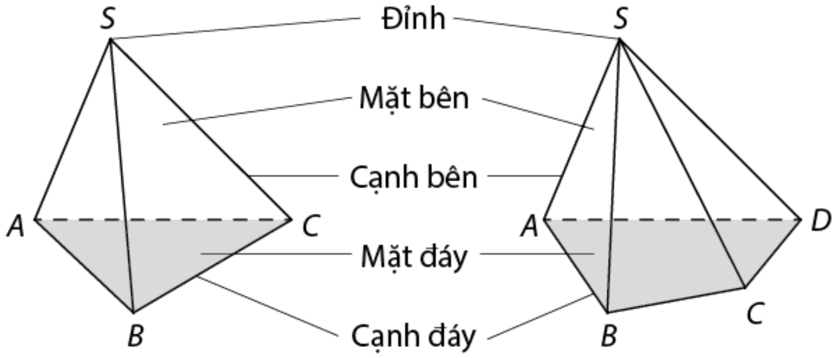
Trong mặt phẳng (*P*), cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Lấy điểm *S* nằm ngoài (*P*). Lần lượt nối *S* với các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta được *n* tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_nA_1$.

Hình gồm đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1 được gọi là hình chóp, kí hiệu là: $S.A_1A_2\ldots A_n$.

- S được gọi là đỉnh, đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ được gọi là mặt đáy và cạnh của đa giác này gọi là cạnh đáy.
- Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,…, SA_nA_1 được gọi là các mặt bên.
- Các đoạn SA_1, SA_2,…, SA_n được gọi là các cạnh bên.

Lưu ý:

Khi nói đến đa giác, ta có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh hoặc cũng có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh và các điểm trong của đa giác đó.



Hình 4.30

Ghi chú: Hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,… tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,…

VÍ DỤ 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA. Tìm giao điểm của mặt phẳng (HIK) với các cạnh của hình chóp và giao tuyến của mặt phẳng (HIK) với các mặt của hình chóp.

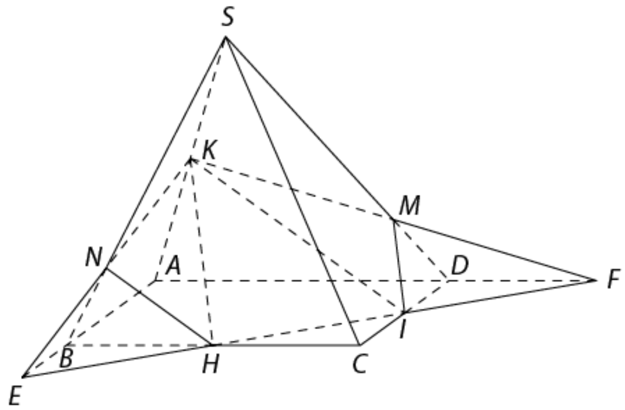
Giải

Đường thẳng HI cắt đường thẳng AB và AD lần lượt tại E, F.

Gọi N là giao điểm của KE và SB, M là giao điểm của KF và SD.

Ta có giao điểm của (HIK) với các cạnh SB, SA, SD lần lượt là N, K, M. Từ đó suy ra:

$$(HIK) \cap (ABCD) = IH;$$
$$(HIK) \cap (SBC) = HN;$$
$$(HIK) \cap (SAB) = NK;$$
$$(HIK) \cap (SAD) = KM;$$
$$(HIK) \cap (SCD) = MI.$$



Hình 4.31

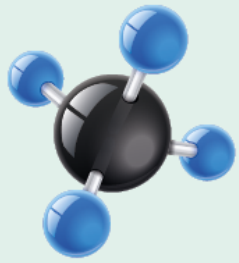
LUYỆN TẬP 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ với hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi M là một điểm thuộc SA (khác S và A). Hãy tìm các giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng $(ABCD)$, (SAB), (SCD), (SBC), (SAD).

2. Hình tứ diện

HOẠT ĐỘNG 8

Trong hoá học, ta đã biết phân tử khí methane (CH_4) có một nguyên tử carbon (C) liên kết với bốn nguyên tử hydrogen (H) và các nguyên tử này không cùng nằm trong một mặt phẳng. Nếu xem bốn nguyên tử hydrogen là bốn điểm A, B, C, D thì ta có bao nhiêu tam giác khác nhau tạo từ bốn điểm này? (Nguồn: *https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Organic_Chemistry/Organic_Chemistry_(LibreTexts)/01%3A_Structure_and_Bonding/1.06%3A_sp_Hybrid_Orbitals_and_the_Structure_of_Methane*)



Hình 4.32

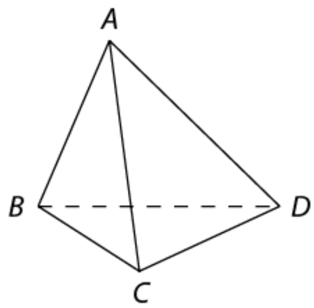
Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, BCD, ABD, ACD gọi là **hình tứ diện** (gọi tắt là tứ diện), kí hiệu là $ABCD$.

Các điểm A, B, C, D gọi là **đỉnh** của tứ diện. Các đoạn AB, BC, CD, DA, AC, BD gọi là các **cạnh** của tứ diện. Các tam giác ABC, BCD, ABD, ACD gọi là các **mặt** của tứ diện.

Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là **hai cạnh đối diện**. Ta có các cặp cạnh đối diện là: AB và CD, BC và AD, AC và BD.

Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là **đỉnh đối diện** với mặt đó.

Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là **hình tứ diện đều**.



Hình 4.33

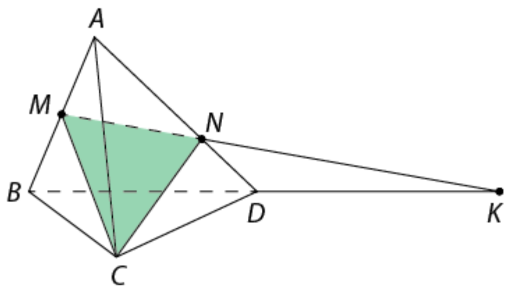
Lưu ý:

- Tứ diện đều có sáu cạnh bằng nhau.
- Một tứ diện $ABCD$ có thể coi là hình chóp tam giác, cụ thể là hình chóp $A.BCD$, $B.ACD$, $C.ABD$, $D.ABC$.

VÍ DỤ 7

Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (ABC) và (ACD); b) (MNC) và (BCD).



Hình 4.34

Giải

a) A và C cùng thuộc hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) nên giao tuyến hai mặt phẳng này chính là đường thẳng AC.

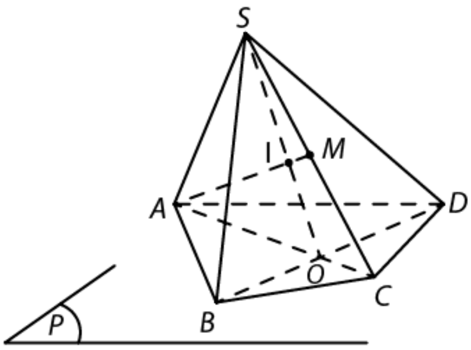
b) Trong mặt phẳng (ACD), vì $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AD}$ nên đường thẳng MN và BD cắt nhau tại một điểm, gọi điểm đó là K. Vì K và C cùng thuộc hai mặt phẳng (MNC) và (BCD) nên $(MNC) \cap (BCD) = CK$.

LUYỆN TẬP 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AB. Gọi M là trung điểm của SD. Hãy xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAD) và (SBC), (MBC) và (SAD).

VÍ DỤ 8

Trong mặt phẳng (P), cho tứ giác $ABCD$. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi M là trung điểm của SC. Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD).



Hình 5.35

Giải

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có đường thẳng AM và SO cắt nhau tại một điểm, gọi điểm đó là I.

Ta có: $\begin{cases} I \in SO \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD)$ và hiển nhiên $I \in AM$. Vậy I là giao điểm của AM và (SBD).

Lưu ý:

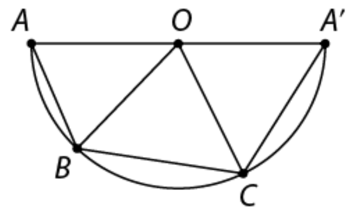
- Để tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng, ta có thể đưa về việc tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.
- Nếu I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta còn kí hiệu là $I = d \cap (\alpha)$ hoặc $d \cap (\alpha) = I$.

LUYỆN TẬP 8

Trong mặt phẳng (Q), cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn là AD. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (Q). Gọi M là trung điểm của SB. Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SCD).

VẬN DỤNG 2

Cắt một miếng bìa thành nửa hình tròn tâm O, đường kính AA'. Trên cung AA', lấy hai điểm B, C bất kì (khác A, A'). Dùng kéo cắt theo các đường AB, BC, CA', sau đó gấp giấy theo các đường OB, OC và dán hai mép OA, OA' lại với nhau. Khi đó, ta được một mô hình của hình chóp (không có mặt đáy).



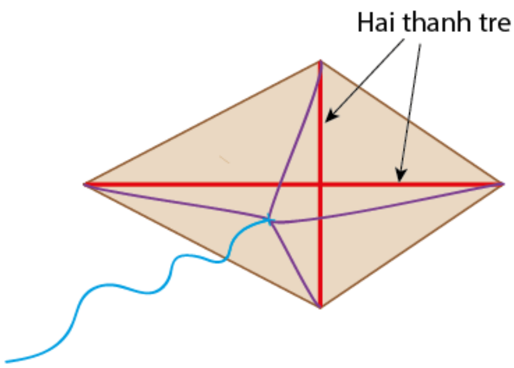
Hình 4.36

a) Hình chóp này có tên gọi là gì?

b) Bằng cách làm này, muốn có một hình chóp lục giác (không đáy) thì ta cần lấy bao nhiêu điểm trên cung AA'?

BÀI TẬP

4.1. Thả diều là một trong những trò chơi dân gian được nhiều bạn nhỏ yêu thích. Để tự thiết kế một cánh diều từ giấy và thanh tre có nhiều cách khác nhau, nhưng trong trường hợp đơn giản nhất, người ta thường dùng hai thanh tre nẹp vào giấy và buộc nút thắt như *Hình 4.37*. Hai thanh tre này có tác dụng gì?



Hình 4.37

4.2. Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Lấy S nằm ngoài mặt phẳng (P). Lấy M, N lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SA, SC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC).

b) Giả sử MN và AC cắt nhau tại I, chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng (BMN) và (ABC), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và (ABC).

4.3. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (MCD).

b) Gọi I và K lần lượt là điểm trên đoạn thẳng AC và AD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (BIK).

4.4. Trong mặt phẳng (P), cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc mặt phẳng (P). Lấy M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC.

a) Xác định giao điểm K của đường thẳng SD và mặt phẳng (BMN).

b) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MK và AD, Q là giao điểm của hai đường thẳng NK và CD. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, B thẳng hàng.

4.5. Có tồn tại hay không một hình chóp có số cạnh (gồm cả cạnh bên và cạnh đáy) của nó là số lẻ? Vì sao?

4.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBG) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BG và mặt phẳng (SAC).

BÀI 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

HOẠT ĐỘNG 1

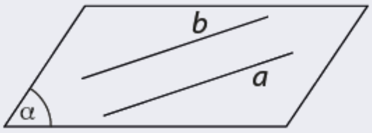
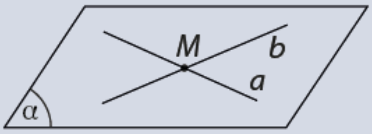
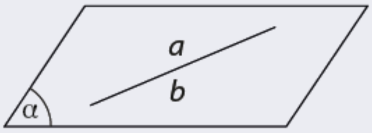
Đây là ảnh chụp một góc bên trong căn phòng. Xem các mép tường (cạnh tường) là hình ảnh của đường thẳng. Hãy chỉ ra một số cặp đường thẳng cùng nằm trong mặt phẳng và một số cặp đường thẳng không thể cùng nằm trong một mặt phẳng.

Hình 4.38

Cho hai đường thẳng *a* và *b* trong không gian. Chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Có một mặt phẳng chứa *a* và *b*. Khi đó ta nói *a* và *b* đồng phẳng.

Trong trường hợp này, ta đã biết là có ba khả năng trong bảng sau đây:

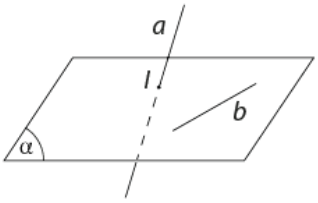
Hình minh hoạ	Số điểm chung	Vị trí tương đối	Kí hiệu
	Không có điểm chung	*a* và *b* song song với nhau	$a \parallel b$
	Chỉ có 1 điểm chung	*a* và *b* cắt nhau tại điểm *M*	$a \cap b = \{M\}$ hoặc $a \cap b = M$
	Vô số điểm chung	*a* và *b* trùng nhau	$a \equiv b$

Như vậy, ta có:

> Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Trường hợp 2. Không có mặt phẳng nào chứa cả *a* và *b*. Khi đó ta nói *a* và *b* không đồng phẳng hoặc *a* và *b* chéo nhau hay *a* chéo với *b*. Như vậy, ta có:

> Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không đồng phẳng.



Hình 4.39. Minh hoạ hai đường thẳng chéo nhau

Hình 4.40. Hai mép không cùng nằm trong một mặt của viên gạch là hình ảnh hai đường chéo nhau

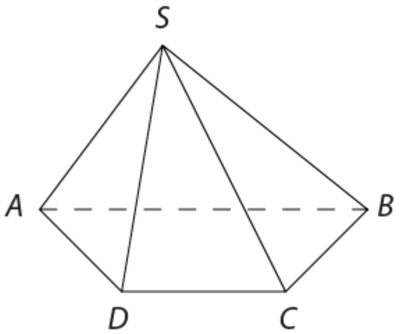
VÍ DỤ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a) AB và CD;

b) AD và BC;

c) SA và BC.



Hình 4.41

Giải

a) Đường thẳng AB và CD song song do cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ và không có điểm chung (tính chất hình thang).

b) Đường thẳng AD và BC cắt nhau do cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ và là hai cạnh bên của hình thang.

c) Đường thẳng SA và BC chéo nhau do chúng không đồng phẳng. Thật vậy, giả sử SA và BC cùng nằm trong một mặt phẳng, suy ra S thuộc mặt phẳng (ABC) hay S thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $S.ABCD$ là hình chóp.

LUYỆN TẬP 1

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh đường thẳng MN song song với đường thẳng BD và đường thẳng AB chéo với đường thẳng CD. Hãy chỉ ra thêm một cặp đường thẳng chéo nhau khác của tứ diện này.

II Tính chất hai đường thẳng song song trong không gian

HOẠT ĐỘNG 2

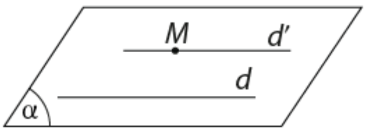
Cho đường thẳng d và điểm M không thuộc d. Vẽ đường thẳng d' qua M và song song với d.

a) Đường thẳng d' có nằm trong mặt phẳng (M, d) không?

b) Có thể vẽ được bao nhiêu đường thẳng d' như vậy? Vì sao?

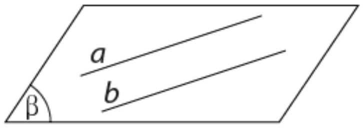
ĐỊNH LÍ 1

Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



Hình 4.42

Nhận xét: Cho hai đường thẳng song song a và b. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu là mp (a, b) (*Hình 4.43*).



Hình 4.43

HOẠT ĐỘNG 3

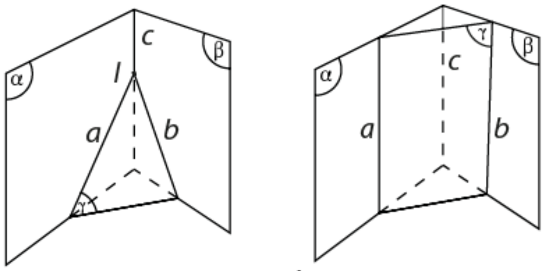
Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c. Một mặt phẳng (γ) cắt (α) và (β) lần lượt theo các giao tuyến a và b.

a) Khi a và b cắt nhau tại I thì I có thuộc c không?

b) Khi a và b song song với nhau thì a có thể cắt đường thẳng c không?

ĐỊNH LÍ 2 (ĐỊNH LÍ VỀ GIAO TUYẾN CỦA BA MẶT PHẲNG)

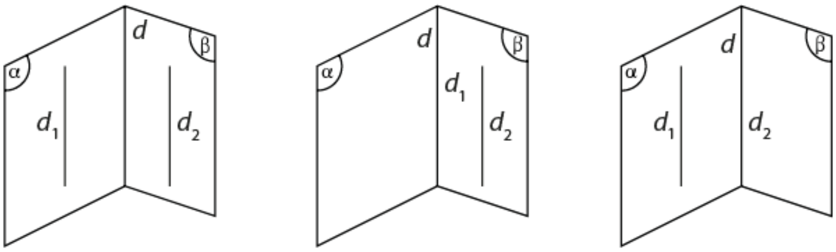
Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



Hình 4.44

HỆ QUẢ

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



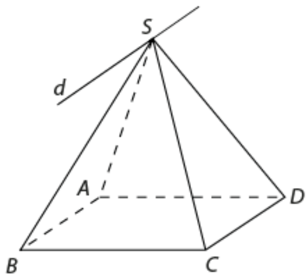
Hình 4.45

VÍ DỤ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Giải

Các mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB và CD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD (*Hình 4.46*).



Hình 4.46

LUYỆN TẬP 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là một điểm thuộc đoạn SA (M khác S và A). Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (MCD).

VÍ DỤ 3

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Gọi Q là giao điểm của AD và mặt phẳng (MNP). Xét vị trí tương đối của ba đường thẳng MQ, NP, CD.

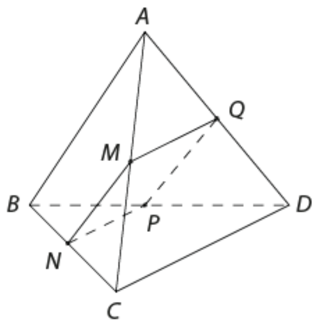
Giải

Ta có: $MQ = (MNP) \cap (ACD)$;

$NP = (MNP) \cap (BCD)$;

$CD = (ACD) \cap (BCD)$.

Theo Định lí 2, ta có MQ, NP, CD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy. Mặt khác, $NP \parallel CD$ (NP là đường trung bình của tam giác BCD) nên ta có MQ, NP, CD đôi một song song nhau.



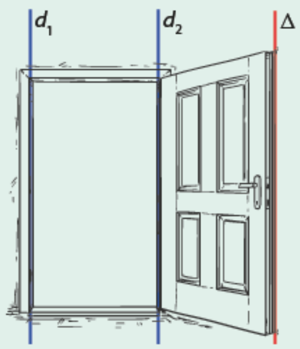
Hình 4.47

LUYỆN TẬP 3

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và AC. (P) là mặt phẳng chứa IJ và cắt SB, SC lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng $IJLK$ là hình thang. Nếu K là trung điểm SB thì tứ giác $IJLK$ là hình gì?

HOẠT ĐỘNG 4

Quan sát hình một cánh cửa. Khung cửa là một hình chữ nhật và d_1, d_2 là hai đường thẳng chứa hai cạnh hình chữ nhật, mép cửa là hình ảnh đường thẳng Δ (*Hình 4.48*). Khi cánh cửa xoay, hãy nhận xét về vị trí tương đối giữa Δ với d_1?



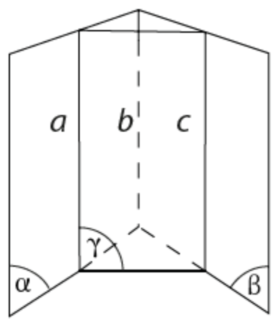
Hình 4.48

Tổng quát, trong không gian, người ta chứng minh được định lí sau đây:

ĐỊNH LÍ 3

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

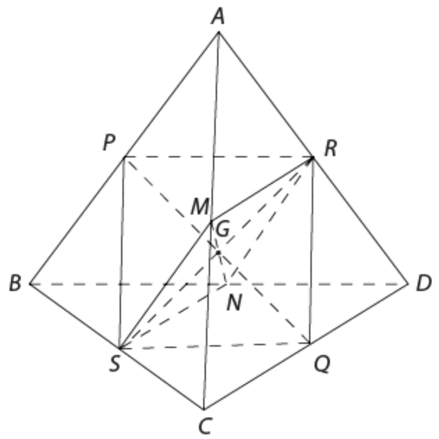
Khi hai đường thẳng a, b cùng song song với đường thẳng c, ta kí hiệu $a \parallel b \parallel c$ và gọi là ba đường thẳng song song.



Hình 4.49

VÍ DỤ 4

Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* và *S* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AC*, *BD*, *AB*, *CD*, *AD* và *BC*. Chứng minh rằng các đoạn thẳng *MN*, *PQ*, *RS* đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.



Hình 4.50

Giải

Ta có: *PR* là đường trung bình của tam giác *ABD*, suy ra $PR \parallel BD$ và $PR = \frac{1}{2}BD$ (1).

QS là đường trung bình của tam giác *BCD*, suy ra $QS \parallel BD$ và $QS = \frac{1}{2}BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $PR \parallel QS$ và $PR = QS$, suy ra *PRQS* là hình bình hành và do đó hai đường thẳng *PQ* và *RS* cắt nhau tại trung điểm *G* của mỗi đường.

Tương tự, *MRNS* là hình bình hành nên *RS* cắt *MN* tại trung điểm *G*.

Vậy ba đường thẳng *MN*, *PQ*, *RS* đồng quy tại *G*.

LUYỆN TẬP 4

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là tứ giác *ABCD*. Gọi *M*, *N*, *P*, *Q* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AB*, *AD*, *SD*, *SB*. Chứng minh rằng *MNPQ* là hình bình hành.

VẬN DỤNG

a) *Hình 4.51* là một loại thang nhôm chữ *A* được kết hợp từ hai nhánh là hai thang đơn. Hãy chỉ ra hình ảnh một số cặp đường thẳng song song ở mỗi nhánh của thang. Các bậc thang ở hai nhánh khác nhau có song song với nhau không? Vì sao?

b) Hãy nêu thêm một số đồ vật xung quanh có hình ảnh là các đường thẳng song song.

Hình 4.51

BÀI TẬP

4.7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AD và P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng BC. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ, NP và vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ.

4.8. Giàn giáo là thiết bị chuyên dụng được sử dụng tại hầu hết các công trình xây dựng (*Hình 4.52a*). Có nhiều loại giàn giáo khác nhau, trong đó phổ biến nhất là loại giàn giáo khung (giàn giáo H) (*Hình 4.52b*). Hãy chỉ ra một số hình ảnh của những đường thẳng song song, chéo nhau và cắt nhau trên một giàn giáo khung.

a) Giàn giáo trong công trình

b) Giàn giáo khung (giàn giáo H)

Hình 4.52

4.9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm N của SD và mặt phẳng (ABM).

b) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BM và AN. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh SC.

4.10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD).

b) Qua M, kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và $BM' = M'A' = A'N$.

4.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD. Lấy I là trung điểm của đoạn BC.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

b) Gọi L, H lần lượt là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (MNI). Chứng minh rằng $LH \parallel BD$.

BÀI 3 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I Đường thẳng và mặt phẳng song song trong không gian

HOẠT ĐỘNG 1

Hình 4.53 là kệ khung sắt, xem các thanh sắt xung quanh là hình ảnh của những đường thẳng và bề mặt tầng trên cùng của kệ (bằng gỗ) là một phần của mặt phẳng (*P*). Để trang trí kệ sách này, Nam tô màu đỏ những đường thẳng có điểm chung với (*P*), tô màu xanh những đường thẳng không có điểm chung với (*P*) để gửi cho thợ sơn. Hãy chỉ ra những thanh sắt nào cần tô màu đỏ, những thanh sắt nào cần tô màu xanh.

Hình 4.53

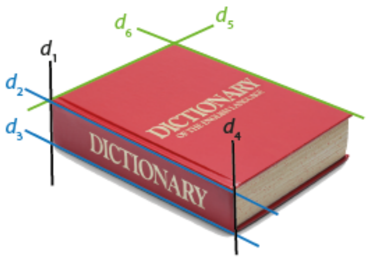
Đường thẳng và mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

VÍ DỤ 1

Quan sát một quyển sách (từ điển), xem các mép bìa, mép gáy sách là hình ảnh của những đường thẳng (*Hình 4.54*) và mặt bìa dưới quyển sách là một phần của mặt phẳng (*P*). Hãy chỉ ra các đường thẳng song song với (*P*).

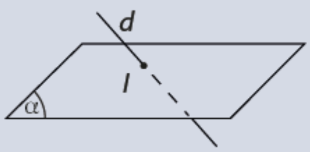
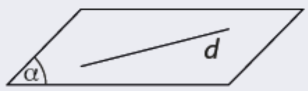
Giải

Các đường thẳng song song với mặt phẳng (*P*) gồm d_2, d_5 và d_6.



Hình 4.54

Cho đường thẳng *d* và mặt phẳng (α). Tuỳ theo số điểm chung của *d* và (α), ta có ba vị trí tương đối sau đây:

Hình minh hoạ	Số điểm chung	Vị trí tương đối	Kí hiệu
	Không có điểm chung	*d* song song với (α) hay (α) song song với *d*	$d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$
	Chỉ có 1 điểm chung	*d* và (α) cắt nhau tại *I*	$d \cap (\alpha) = \{I\}$. Ta thường viết $d \cap (\alpha) = I$
	Có từ 2 điểm chung trở lên	*d* nằm trong (α) hay (α) chứa *d*	$d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$

Lưu ý: Trong Ví dụ 1, đường thẳng d_3 nằm trong (P), còn hai đường thẳng d_1 và d_4 cắt mặt phẳng (P).

LUYỆN TẬP 1

Trong phòng học, quan sát bàn học sinh, xem mặt bàn là một phần của mặt phẳng (P), nêu một số hình ảnh của đường thẳng song song với mặt phẳng (P).

Hình 4.55

II Điều kiện và tính chất của đường thẳng và mặt phẳng song song

HOẠT ĐỘNG 2

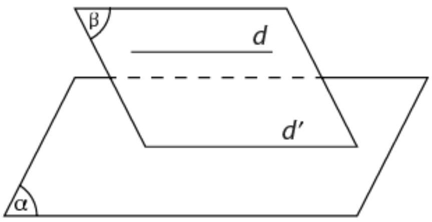
Cho hai đường thẳng d và d' song song với nhau và một mặt phẳng (α) chứa d' nhưng không chứa d. Gọi (β) là mặt phẳng chứa d và d'.

a) Xác định giao tuyến của (α) và (β).

b) d và (α) có điểm chung hay không? Vì sao?

ĐỊNH LÍ 1 (ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG)

Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).



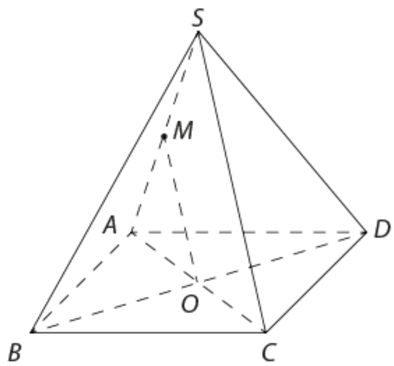
Hình 4.56

VÍ DỤ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, lấy điểm M là trung điểm của SA. Chứng minh rằng đường thẳng OM song song với mặt phẳng (SCD).

Giải

Ta có OM không chứa trong (SCD), OM song song với SC (OM là đường trung bình của tam giác SAC) và $SC \subset (SCD)$, suy ra $OM \mathbin{/\mkern-6mu/} (SCD)$.



Hình 4.57

LUYỆN TẬP 2

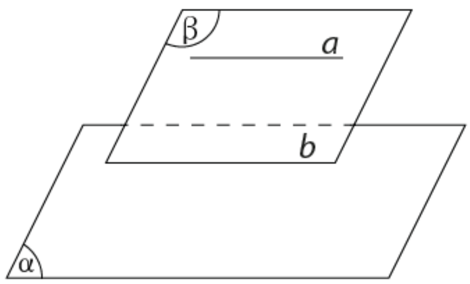
Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm của *AB*, *AC*, *AD*. Các đường thẳng *MN*, *NP*, *PM* có song song với mặt phẳng (*BCD*) không? Vì sao?

HOẠT ĐỘNG 3

Cho đường thẳng *a* song song với mặt phẳng (α). Gọi (β) là mặt phẳng chứa *a* và (β) cắt (α) theo giao tuyến *b*. Hỏi *b* và *a* có thể có điểm chung hay không? Vì sao?

ĐỊNH LÍ 2

Cho đường thẳng *a* song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa *a* và cắt (α) theo giao tuyến *b* thì *b* song song với *a*.



Hình 4.58

VÍ DỤ 3

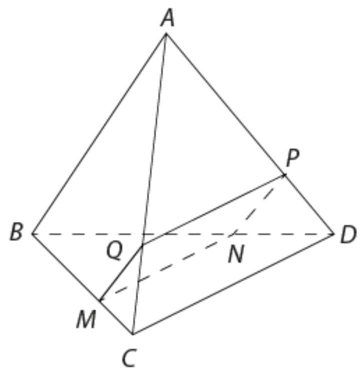
Cho tứ diện *ABCD*. Lấy *M* thuộc đoạn thẳng *BC* sao cho $BM = 2MC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua *M* và song song với các đường thẳng *AB* và *CD*. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt phẳng (*ABC*), (*ACD*), (*BCD*), (*ABD*).

Giải

Mặt phẳng (α) đi qua *M* và song song với *AB* nên (α) cắt mặt phẳng (*ABC*) (chứa *AB*) theo giao tuyến *d* đi qua *M* và song song với *AB*. Gọi *Q* là giao điểm của *d* với *AC*.

Tương tự, (α) song song với *CD* nên (α) cắt (*ACD*) và (*BCD*) (là các mặt phẳng chứa *CD*) theo các giao tuyến *QP* và *MN* cùng song song với *CD* ($P \in AD$, $N \in BD$).

Vậy $(\alpha) \cap (ABD) = NP$.



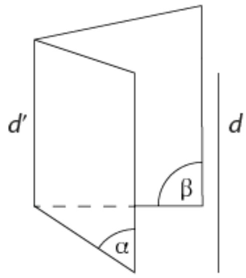
Hình 4.59

LUYỆN TẬP 3

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Lấy *I* là điểm thuộc cạnh *BC* (*I* khác *B* và *C*). Gọi (α) là mặt phẳng qua *I* và song song với các đường thẳng *AB* và *SD*. Tìm giao điểm của các đường thẳng *AD*, *SA*, *SB* với mặt phẳng (α).

Từ Định lí 2, ta có hệ quả sau:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

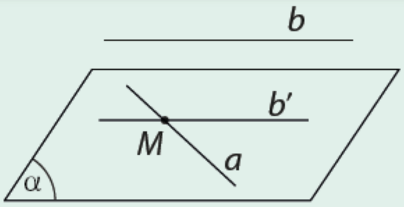


Hình 4.60

Ở *Hình 4.60*, $(\alpha) \mathbin{/\!/} d$, $(\beta) \mathbin{/\!/} d$ và $(\alpha) \cap (\beta) = d'$, suy ra $d \mathbin{/\!/} d'$.

HOẠT ĐỘNG 4

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy điểm M bất kì thuộc a. Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi a và b'. Hãy nhận xét về vị trí tương đối của b và (α)?



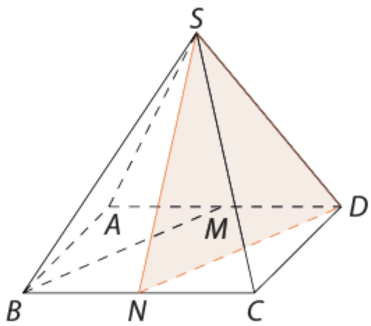
Hình 4.61

ĐỊNH LÍ 3

Cho hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

VÍ DỤ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của đoạn AD. Xác định mặt phẳng chứa SD và song song với BM.



Hình 4.62

Giải

Gọi N là trung điểm của BC, ta có $MD \mathbin{/\!/} BN$ và $MD = BN = \frac{1}{2}BC$ nên $MBND$ là hình bình hành.

Suy ra $BM \mathbin{/\!/} ND$, mà $ND \subset (SDN)$ nên $BM \mathbin{/\!/} (SDN)$.

Vậy (SDN) là mặt phẳng chứa SD và song song với BM.

LUYỆN TẬP 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, AD song song BC và $AD = 2BC$. Xác định mặt phẳng chứa SB và song song với CD.

VẬN DỤNG

Trong giờ ra chơi, khi thảo luận về hình học không gian, bạn An khẳng định rằng: "Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau". Bạn Mai cho rằng đây là một khẳng định sai, Mai muốn tìm các hình ảnh về đường thẳng và mặt phẳng trong thực tế để minh hoạ cho ý kiến của mình. Dựa vào các đồ vật xung quanh phòng học, hãy giúp Mai chỉ ra một ví dụ để thấy khẳng định của An là sai.

BÀI TẬP

4.12. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a, b. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau đây:

a) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b;

b) Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b;

c) Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b;

d) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b;

e) Nếu (P) cắt a thì (P) có thể song song với b;

g) Nếu (P) chứa a thì (P) song song với b.

4.13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD. Chứng minh rằng đường thẳng GG' song song với hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).

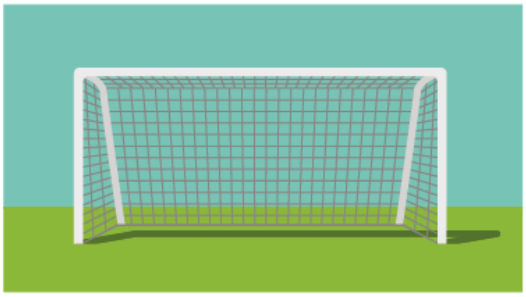
4.14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF).

4.15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Mặt phẳng (α) đi qua O, (α) song song với AB và SC. Xác định giao điểm của (α) với các đường thẳng SA, AD, BC.

4.16. Trong giờ học bóng đá, khi hai bạn Nam và Mai lại gần khung thành thủ môn, bạn Nam khẳng định thanh ngang trên cùng của khung thành và bóng của nó là hình ảnh của hai đường thẳng song song. Bạn Mai cho rằng hai đường thẳng này chưa chắc song song vì còn phụ thuộc vào hướng của ánh sáng Mặt Trời nữa. Hãy cho biết ai đúng, ai sai. Vì sao? Biết rằng, Mặt Trời cách xa Trái Đất nên các tia sáng có thể xem là những đường thẳng song song.



Hình 4.63

BÀI 4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Ở các trung tâm thương mại, siêu thị lớn, sân bay,... ta thường thấy các thang cuốn. Chúng chuyển động dạng băng tải di chuyển lên trên hay xuống dưới, các bậc thang chuyển động ăn khớp với nhau theo quỹ đạo là một vòng khép kín. Điểm chú ý là khi di chuyển, các bậc thang luôn tạo ra những bề mặt bằng phẳng giúp con người đứng vững. Các bậc thang này là hình ảnh của những mặt phẳng song song trong không gian.

Hình 4.64

Hình 4.65

I Hai mặt phẳng song song trong không gian

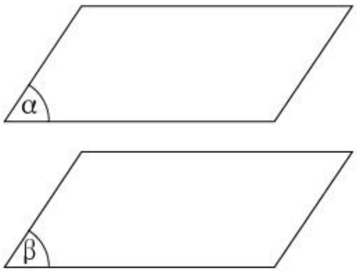
HOẠT ĐỘNG 1

Xét hai bậc thang liên tiếp của một cầu thang ở *Hình 4.66*. Xem hai bề mặt bậc thang là hình ảnh của hai mặt phẳng (P_1), (P_2). Hãy nhận xét về số điểm chung của mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Hình 4.66

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, ta kí hiệu là $(\alpha) /\!/ (\beta)$ hay $(\beta) /\!/ (\alpha)$.

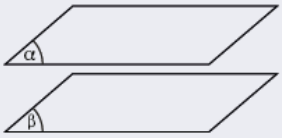
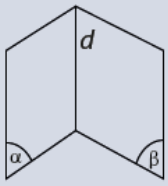
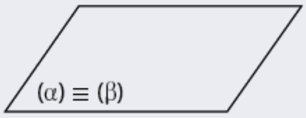


Hình 4.67. Hình biểu diễn hai mặt phẳng song song

Hình 4.68

Ở *Hình 4.68*, các dải tấm quang điện của hệ thống điện mặt trời là hình ảnh của những mặt phẳng song song.

Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Tùy theo số điểm chung của (α) và (β), ta có ba vị trí tương đối sau đây:

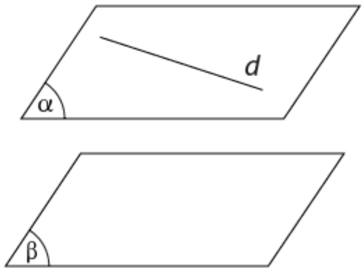
Hình minh hoạ	Số điểm chung	Vị trí tương đối	Kí hiệu
	Không có điểm chung	(α) song song với (β) hay (β) song song với (α)	$(\alpha) \mathbin{/\mkern-6mu/} (\beta)$ hay $(\beta) \mathbin{/\mkern-6mu/} (\alpha)$
	Có vô số điểm chung thẳng hàng	(α) cắt (β) theo giao tuyến d	$(\alpha) \cap (\beta) = d$
	Có ít nhất 3 điểm chung không thẳng hàng	(α) trùng với (β)	$(\alpha) \equiv (\beta)$

VÍ DỤ 1

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β). Đường thẳng d nằm trong (α). Hỏi d và (β) có điểm chung không?

Giải

Giả sử d và (β) có điểm chung là M, suy ra $M \in (\beta)$ và $M \in d$. Mặt khác, $d \subset (\alpha)$ nên $M \in (\alpha)$, từ đó ta có $M \in (\alpha) \cap (\beta)$, điều này mâu thuẫn giả thiết $(\alpha) \mathbin{/\mkern-6mu/} (\beta)$. Vậy d và (β) không có điểm chung.



Hình 4.69

Lưu ý: Nếu $(\alpha) \mathbin{/\mkern-6mu/} (\beta)$ và $d \subset (\alpha)$ thì $d \mathbin{/\mkern-6mu/} (\beta)$.

LUYỆN TẬP 1

Khẳng định sau đây đúng hay sai? Vì sao?

"Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song hoặc chéo với mọi đường thẳng nằm trong (Q)."

II Tính chất của hai mặt phẳng song song trong không gian

HOẠT ĐỘNG 2

Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Biết rằng hai đường thẳng a và b nằm trong (α) sao cho $a \mathbin{/\mkern-6mu/} (\beta)$ và $b \mathbin{/\mkern-6mu/} (\beta)$.

a) Vì sao (α) và (β) là hai mặt phẳng phân biệt?

b) Nếu (α) cắt (β) theo giao tuyến c thì c có song song với a và b hay không?

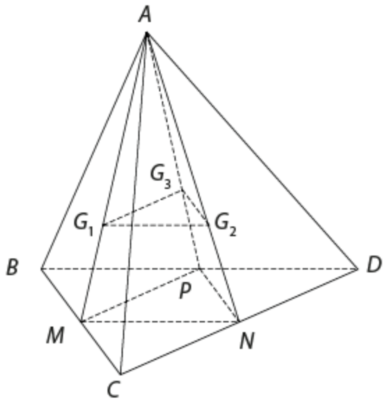
c) Nếu a cắt b tại M thì (α) và (β) có thể có điểm chung hay không?

ĐỊNH LÍ 1 (ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG)

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

VÍ DỤ 2

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD).



Hình 4.70

Giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB (Hình 4.70).

Ta có: $M \in AG_1$ và $\frac{AG_1}{AM} = \frac{2}{3}$; $N \in AG_2$ và $\frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}$;

$P \in AG_3$ và $\frac{AG_3}{AP} = \frac{2}{3}$. Do đó $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN}$, suy ra $G_1G_2 \parallel MN$.

Vì $MN \subset (BCD)$ nên $G_1G_2 \parallel (BCD)$. Tương tự, $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_3}{AP}$, suy ra $G_1G_3 \parallel MP$.

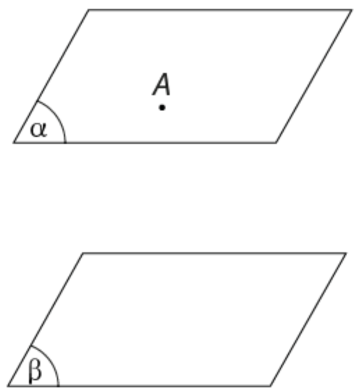
Vì $MP \subset (BCD)$ nên $G_1G_3 \parallel (BCD)$. Vậy $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

LUYỆN TẬP 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

HOẠT ĐỘNG 3

Cho điểm A nằm ngoài một mặt phẳng (β). Trong (β), lấy hai đường thẳng cắt nhau a và b. Vẽ các đường thẳng d_1, d_2 qua A và lần lượt song song với a, b. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi d_1 và d_2. Mặt phẳng (α) và (β) có điểm chung không? Vì sao?



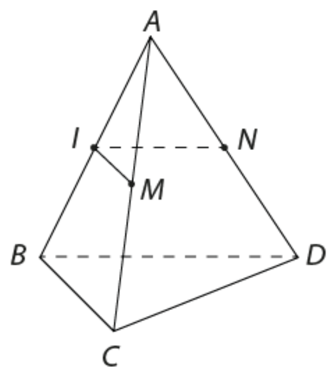
Hình 4.71

ĐỊNH LÍ 2

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

VÍ DỤ 3

Cho tứ diện $ABCD$. Xác định mặt phẳng qua trung điểm I của đoạn AB và song song với mặt phẳng (BCD).



Hình 4.72

Giải

Trong tam giác ABC, vẽ đường thẳng qua I và song song với BC, cắt AC tại M (tức IM là đường trung bình của tam giác ABC), suy ra $IM \parallel (BCD)$ (1).

Tương tự, trong tam giác ABD, vẽ đường thẳng qua I, song song với BD và cắt AD tại N, ta có $IN \parallel (BCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(IM, IN) \parallel (BCD)$, do đó mặt phẳng (IMN) là mặt phẳng cần tìm.

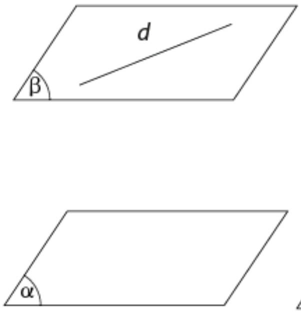
LUYỆN TẬP 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Lấy M là trung điểm của đoạn AD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAC). Xác định giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp đã cho.

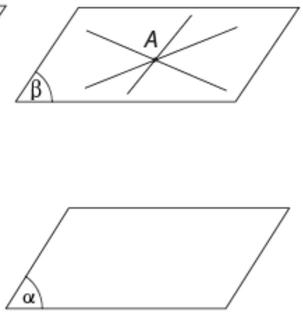
Từ Định lí 2, ta có hệ quả sau:

HỆ QUẢ

- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).



Hình 4.73



Hình 4.74

VÍ DỤ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$.

a) Xác định các giao tuyến d_1, d_2 của các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD), (SAD) và (SBC).

b) Gọi E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SACE$. Chứng minh rằng ba đường thẳng d_1, d_2 và SE đồng phẳng.

Giải

a) Hai mặt phẳng (SAB), (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB và CD nên

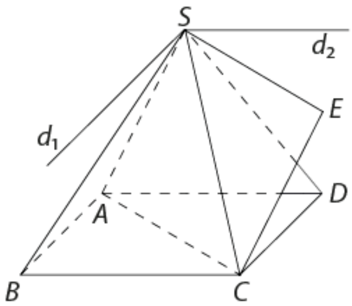
$(SAB) \cap (SCD) = d_1$, với d_1 qua S và $d_1 \parallel AB \parallel CD$.

Tương tự, $(SAD) \cap (SBC) = d_2$, với d_2 qua S và $d_2 \parallel AD \parallel BC$.

b) Ta có $SE \parallel AC \Rightarrow SE \parallel (ABCD)$.

$d_1 \parallel AB \Rightarrow d_1 \parallel (ABCD)$.

$d_2 \parallel AD \Rightarrow d_2 \parallel (ABCD)$.



Hình 4.75

Ba đường thẳng d_1, d_2 và SE cùng đi qua điểm S và cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ nên theo Hệ quả của Định lí 2, chúng đồng phẳng.

LUYỆN TẬP 4

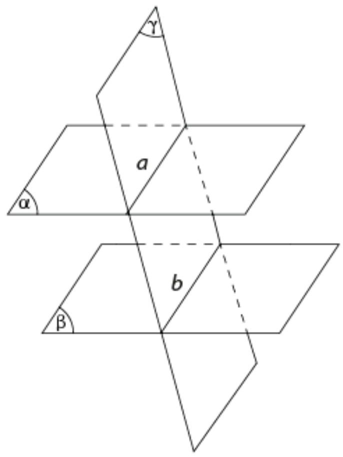
Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA. Một đường thẳng d đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) nhưng không song song với BC. Xác định giao điểm của d với mặt phẳng (SBC).

HOẠT ĐỘNG 4

Cho mặt phẳng (γ) cắt hai mặt phẳng song song (α) và (β) lần lượt theo hai giao tuyến a và b. Hỏi a và b có điểm chung hay không? Vì sao?

ĐỊNH LÍ 3

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



Hình 4.76

Ở *Hình 4.76*, ta có: Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a$ thì $(\gamma) \cap (\beta) = b$, hơn nữa $a \parallel b$.

VÍ DỤ 5

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Lấy I, K là hai điểm bất kì lần lượt trên MN, MP. Hai đường thẳng AI, AK lần lượt cắt BC, BD tại I', K'. Chứng minh rằng $IK \parallel I'K'$.

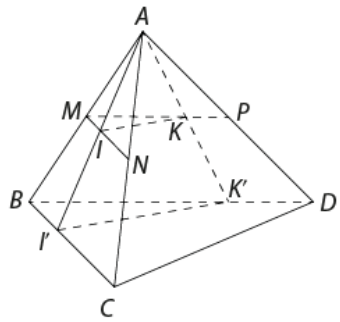
Giải

Ta có $MN \parallel BC$ (đường trung bình của tam giác ABC), mà $BC \subset (BCD)$ nên $MN \parallel (BCD)$.

Tương tự, ta có $MP \parallel BD$ (đường trung bình tam giác ABD), nên $MP \parallel (BCD)$.

Từ đó suy ra $(MNP) \parallel (BCD)$.

Mặt khác, mặt phẳng $(AI'K')$ cắt hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) lần lượt theo hai giao tuyến là IK và $I'K'$ nên ta có $IK \parallel I'K'$.



Hình 4.77

LUYỆN TẬP 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy lớn $AD = 2BC$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và SD.

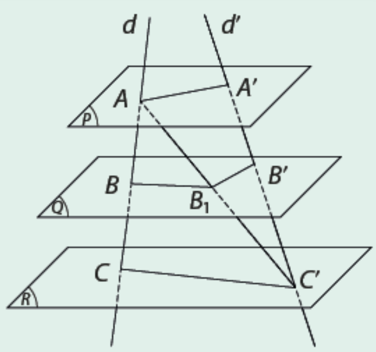
a) Chứng minh rằng $(SAB) \parallel (CIK)$.

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Lấy M là điểm bất kì trên đoạn CD, đường thẳng OM cắt CI, AB lần lượt tại N, P và SM cắt CK tại Q. Chứng minh rằng $SP \parallel NQ$.

III Định lí Thalès

HOẠT ĐỘNG 5

Cho ba mặt phẳng đôi một song song (P), (Q), (R) cắt hai đường thẳng d, d' lần lượt tại A, B, C và A', B', C'. Gọi B_1 là giao điểm của đường thẳng AC' và mặt phẳng (Q). Tìm mối liên hệ giữa các tỉ số $\frac{AB}{BC}$ và $\frac{AB_1}{B_1C'}$; $\frac{A'B'}{B'C'}$ và $\frac{AB_1}{B_1C'}$; $\frac{AB}{BC}$ và $\frac{A'B'}{B'C'}$.



Hình 4.78

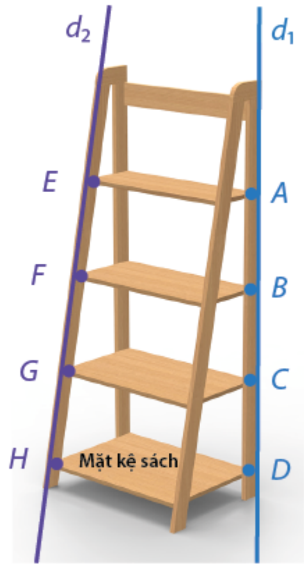
ĐỊNH LÍ 4 (ĐỊNH LÍ THALÈS)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Nếu d, d' là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' (*Hình 4.78*) thì $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

VÍ DỤ 6

Hình 4.79 là kệ sách gỗ có bốn mặt kệ, với thanh gỗ đứng (xem như đường thẳng d_1) và thanh gỗ xiên (xem như đường thẳng d_2). Giá đỡ các mặt kệ xuất hiện ở các vị trí A, B, C, D, E, F, G, H. Biết rằng $EF = 32$ cm và các điểm A, B, C, D cách đều nhau. Các mặt kệ đặt song song với mặt đất. Tính độ dài HE.



Hình 4.79

Giải

Các mặt kệ sách đặt song song với mặt đất nên là hình ảnh của các mặt phẳng song song nhau, ta kí hiệu các mặt phẳng từ đáy kệ sách lên trên lần lượt là (P_1), (P_2), (P_3), (P_4). Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng (P_1), (P_2), (P_3) với hai cát tuyến (d_1), (d_2) ta có:

$\dfrac{FG}{BC} = \dfrac{GH}{CD}$ hay $\dfrac{FG}{GH} = \dfrac{BC}{CD}$ mà $BC = CD$ nên $\dfrac{FG}{GH} = \dfrac{BC}{CD} = 1$.

Suy ra $FG = GH$.

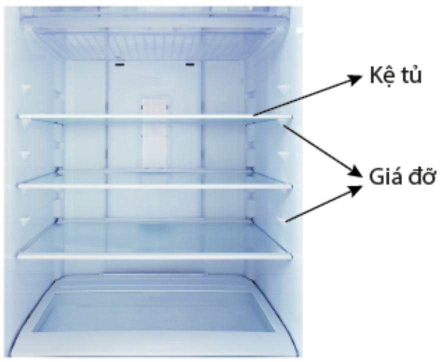
Tương tự, áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng (P_2), (P_3), (P_4) với hai cát tuyến (d_1), (d_2), ta có $EF = FG$.

Từ đó suy ra $GH = FG = EF = 32$ cm.

Vậy $EH = EF + FG + GH = 96$ cm.

LUYỆN TẬP 6

Các kệ trong ngăn mát của tủ lạnh có thể xem là hình ảnh của các mặt phẳng (*Hình 4.80*). Thông tin từ nhà sản xuất là các kệ này được lắp song song với nhau. Bề mặt bên trái và bên phải của tủ lạnh có các giá đỡ bên dưới các kệ. Nếu các giá đỡ ở mặt bên trái cách đều nhau một khoảng 15 cm thì các giá đỡ ở mặt bên phải cách nhau bao nhiêu? Vì sao?



Hình 4.80

IV Hình lăng trụ và hình hộp

Trong Vật lí, lăng kính là một dụng cụ quang học, cấu tạo từ một khối chất trong suốt, đồng chất (nhựa, thuỷ tinh...) được dùng để khúc xạ, phản xạ và tán xạ ánh sáng sang các màu quang phổ. Lăng kính thường có dạng là một hình lăng trụ tam giác (*Hình 4.81*).

Hình 4.81

1. Hình lăng trụ

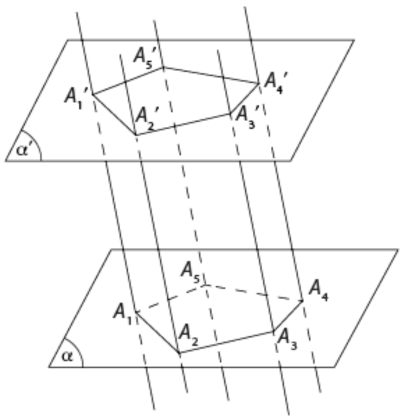
HOẠT ĐỘNG 6

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α), lấy tam giác ABC. Qua các đỉnh A, B, C, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại A', B', C'. Các tứ giác $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ là hình gì? Hãy nhận xét về hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α), cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A_1', A_2', \ldots, A_n'$. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A_1'A_2'\ldots A_n'$ và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3, \ldots,$ $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là hình lăng trụ và được kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.A_1'A_2'\ldots A_n'$.

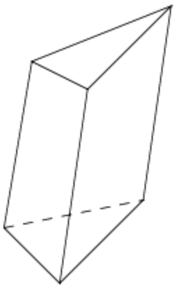
Ghi chú:

- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $A_1'A_2'\ldots A_n'$ được gọi là hai mặt đáy của hình lăng trụ. Hai mặt đáy của hình lăng trụ có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.
- Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$ được gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- Các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3, \ldots,$ $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai mặt đáy được gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.
- Các cạnh của hai mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình lăng trụ.

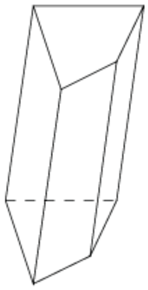


Hình 4.82. Minh hoạ định nghĩa với $n = 5$

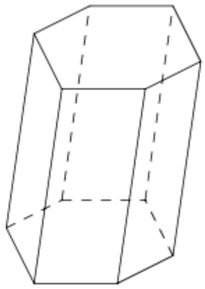
Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên đa giác đáy, chẳng hạn hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, lục giác thì tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ lục giác (*Hình 4.83*).



Hình lăng trụ tam giác



Hình lăng trụ tứ giác



Hình lăng trụ lục giác

Hình 4.83

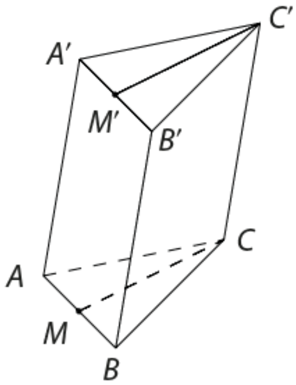
VÍ DỤ 7

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $A'B'$. Chứng minh rằng CM song song với $C'M'$.

Giải

Xét tứ giác $MBB'M'$, ta có $MB \parallel M'B'$ và $MB = M'B' = \frac{1}{2}AB$ nên $MBB'M'$ là hình bình hành, suy ra MM' song song BB'.

Mặt khác, BB' song song CC' nên ta có MM' song song CC' và do đó M, C, C', M' đồng phẳng.Mặt phẳng $(MCC'M')$ cắt hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ lần lượt theo hai giao tuyến CM và $C'M'$, mà mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ song song với nhau nên CM song song với $C'M'$.



Hình 4.84

LUYỆN TẬP 7

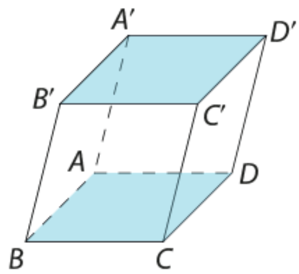
Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Chứng minh rằng AO song song $A'O'$.

2. Hình hộp

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là **hình hộp**.

Ghi chú:

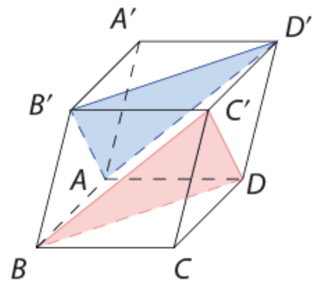
- Hình hộp có sáu mặt (bốn mặt bên và hai mặt đáy) đều là những hình bình hành. Mỗi mặt có một mặt song song với nó, hai mặt như thế gọi là hai mặt đối diện.
- Hình hộp có tám đỉnh, hai đỉnh của hình hộp gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo của hình hộp.



Hình 4.85

VÍ DỤ 8

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ song song với nhau.



Hình 4.86

Giải

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên ta có $BB' \parallel DD'$ (cùng song song CC') và $BB' = DD'$ (cùng bằng CC').

Suy ra $BDD'B'$ là hình bình hành, do đó $BD \parallel B'D'$.

Mặt khác, $B'D' \subset (AB'D')$, suy ra $BD \parallel (AB'D')$ (1).

Chứng minh tương tự, ta có $AD \parallel B'C'$ và $AD = B'C'$, suy ra $ADC'B'$ là hình bình hành.

Từ đó, ta có $DC' \parallel AB'$, mà $AB' \subset (AB'D')$ nên $DC' \parallel (AB'D')$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(C'BD) \parallel (AB'D')$.

LUYỆN TẬP 8

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

BÀI TẬP

4.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy lớn là AD, $AD = 2BC$. Gọi I, K, L lần lượt là trung điểm của đoạn AD, SA, SD. Chứng minh rằng $(SAB) \parallel (ILC)$ và $(SCD) \parallel (BIK)$.

4.18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

a) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, ON. Chứng minh rằng $PQ \parallel (SBC)$.

4.19. Sau khi gắn kệ treo tường bằng gỗ (*Hình 4.87*), bạn Nam chuẩn bị đặt đồ trang trí lên nhưng lại lo lắng kệ bị nghiêng, các đồ đạc sẽ bị rơi vỡ. Bạn Bình đề xuất với bạn Nam: "Chỉ cần dùng một viên bi đặt lên vài vị trí trên kệ, nếu viên bi đứng yên thì yên tâm, nếu viên bi lăn xuống thì phải chỉnh lại kệ". Xem mặt kệ và mặt đất lần lượt là hình ảnh của mặt phẳng (P) và (Q). Với cách làm của bạn Bình, nếu viên bi lăn xuống đất thì (P) và (Q) có song song với nhau không? Vì sao?

Hình 4.87

4.20. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $B'C'$.

a) Tìm giao điểm của mặt phẳng $(AB'C')$ với đường thẳng $A'M$.

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.

c) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng $(AM'M)$. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

4.21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

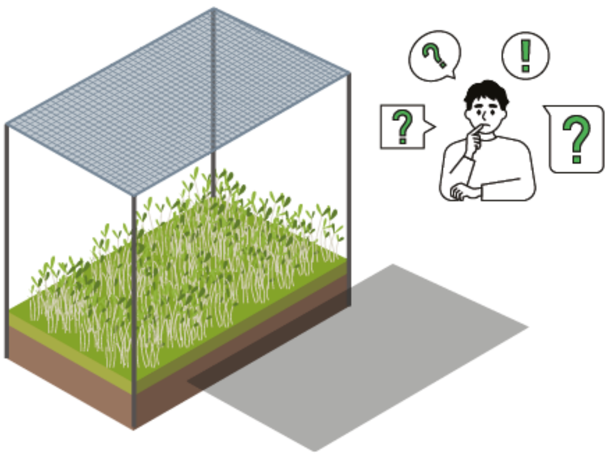
a) Hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.

b) Đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

BÀI 5 PHÉP CHIẾU SONG SONG

Bạn An trồng rau cải mầm trên một mảnh đất hình chữ nhật và quyết định làm mái che cho rau. Bạn dựng bốn cây cọc ở bốn góc mảnh đất, rồi giăng một tấm lưới che trên bốn đỉnh cọc như *Hình 4.88*. Vì sao lúc 9 giờ 30 phút sáng, bóng râm của lưới che lại không phủ toàn bộ rau mà lệch sang một bên?



Hình 4.88

I Phép chiếu song song

HOẠT ĐỘNG 1

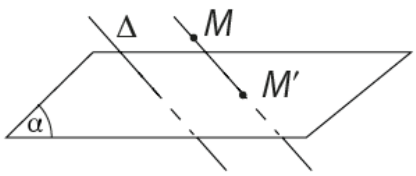
Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Lấy M là điểm bất kì trong không gian. Qua M, vẽ đường thẳng d song song với Δ. Hỏi d và (α) có điểm chung hay không?

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp H' các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc H được gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của H qua phép chiếu song song nói trên.

Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu.

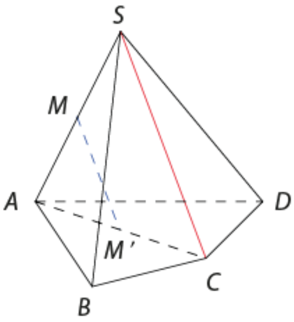


Hình 4.89

Lưu ý: Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Sau đây, khi nói đến hình chiếu của đường thẳng, ta chỉ xét các hình chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

VÍ DỤ 1

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M là trung điểm của SA. Tìm hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SC.



Hình 4.90

Giải

Gọi M' là trung điểm của đoạn AC, ta có MM' là đường trung bình của tam giác SAC nên $MM' \parallel SC$. Ta lại có MM' cắt $(ABCD)$ tại M', suy ra M' là hình chiếu song song của M trên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương SC.

LUYỆN TẬP 1

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Tìm hình chiếu song song của điểm O trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương AA'.

II Tính chất của phép chiếu song song

HOẠT ĐỘNG 2

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy M là trung điểm của AB và G là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi M', G' lần lượt là hình chiếu song song của M và G trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương AA'. Hãy nhận xét về vị trí tương đối của ba điểm M', G', C'?

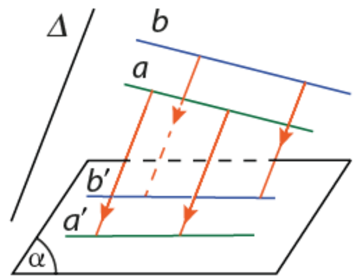
ĐỊNH LÍ

a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

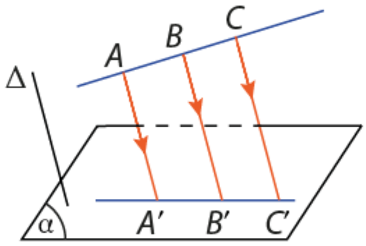
b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

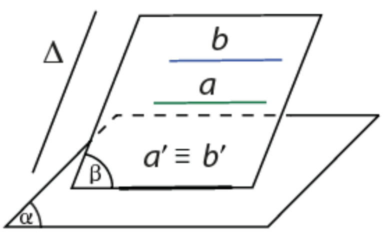
d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



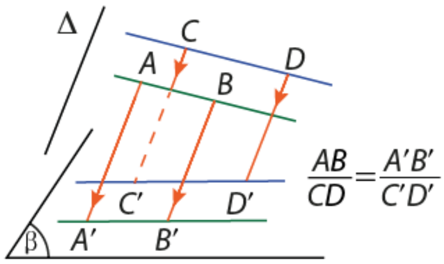
Hình 4.91



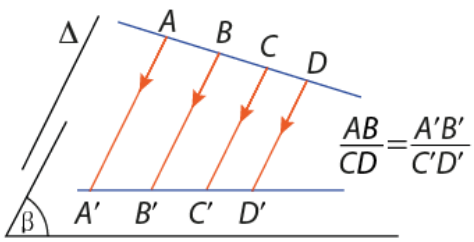
Hình 4.92



Hình 4.93



Hình 4.94



Hình 4.95

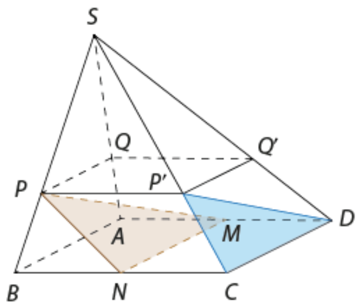
VÍ DỤ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC. Lấy P, Q lần lượt là hai điểm trên cạnh SB, SA sao cho $\frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SA} = \frac{2}{3}$.

a) Tìm ảnh của các đoạn thẳng MN, PQ và tam giác MNP qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD.

b) Hãy nhận xét về vị trí tương đối của ảnh hai đường thẳng MN, PQ qua phép chiếu trên.

Giải



Hình 4.96

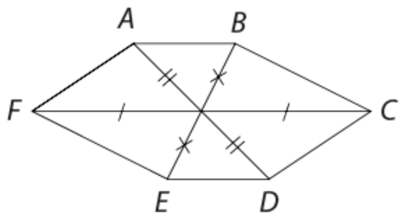
a) Ảnh của M và N qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD lần lượt là C và D nên ảnh của MN qua phép chiếu này là CD.

Trong (SAD) vẽ QQ' song song AD ($Q' \in SD$), trong (SBC) vẽ PP' song song BC ($P' \in SC$). Ta có ảnh của P, Q qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (SCD) theo phương AD lần lượt là P', Q', do đó ảnh của PQ qua phép chiếu này là $P'Q'$.

Ta có cũng có ảnh của tam giác MNP là tam giác DCP'.

b) Ta có: $\frac{SP'}{SC} = \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}, \frac{SQ'}{SD} = \frac{SQ}{SA} = \frac{2}{3}$, suy ra $\frac{SP'}{SC} = \frac{SQ'}{SD} = \frac{2}{3}$, suy ra $P'Q' \parallel CD$.

LUYỆN TẬP 2



Hình 4.97

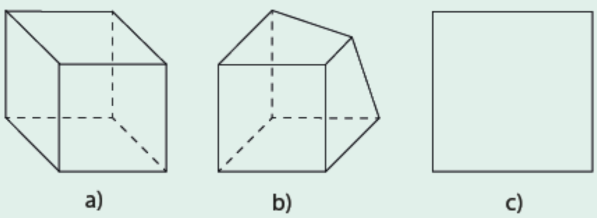
a) Hình chiếu song song của một hình vuông có thể là hình bình hành không? Hãy cho một ví dụ minh hoạ .

b) *Hình 4.97* có thể là hình chiếu song song của hình lục giác đều được không? Vì sao?

III Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

HOẠT ĐỘNG 3

Trong các hình bên, hình nào biểu diễn cho hình lập phương?



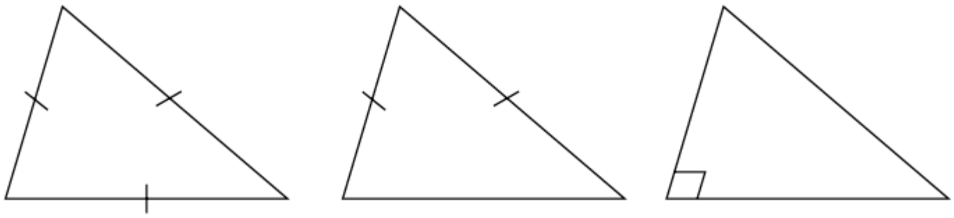
Hình 4.98

Hình biểu diễn của một hình *H* trong không gian là hình chiếu song song của hình *H* trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn của các hình thường gặp:

a) Tam giác

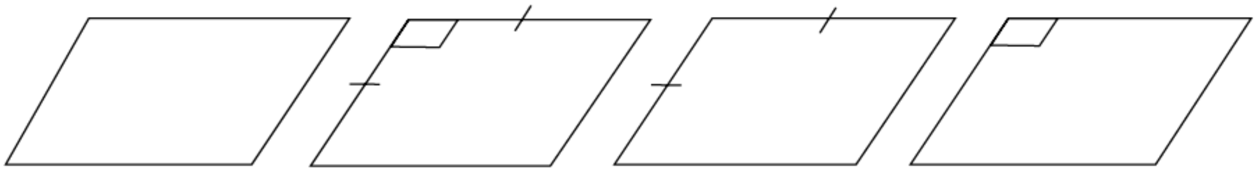
Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tuỳ ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông,...)



Hình 4.99

b) Hình bình hành

Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể xem là hình biểu diễn của một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật...)



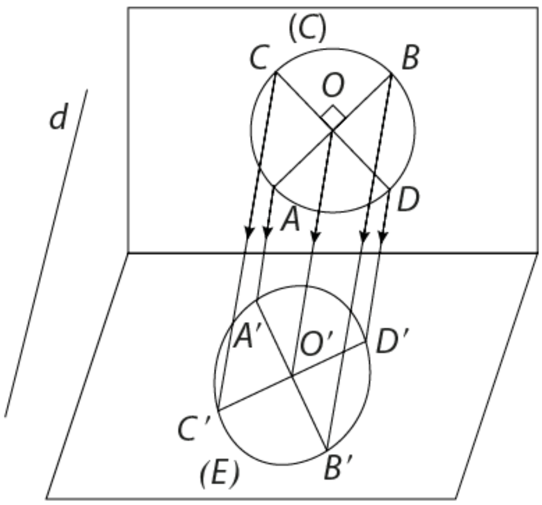
Hình 4.100

c) Hình thang

Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tuỳ ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

d) Hình tròn

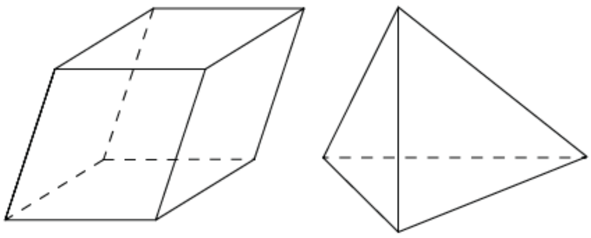
Vì hình chiếu song song của một hình tròn là một hình elip hoặc một hình tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng nên người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn.



Hình 4.101

Lưu ý:

Một hình có thể có nhiều hình biểu diễn khác nhau (bởi vì ta có thể chiếu lên một mặt phẳng theo những phương khác nhau hoặc ta có thể chiếu lên những mặt phẳng khác nhau). Nhưng khi nghiên cứu một hình *H* nào đó, ta cần chọn những hình biểu diễn "tốt" của *H* bằng cách chọn những phương chiếu thích hợp (chẳng hạn phương chiếu *không song song* với một cạnh hay một mặt nào đó của hình *H*). *Hình 4.102* là hình biểu diễn "tốt" của hình hộp và hình tứ diện.



Hình 4.102

VÍ DỤ 3

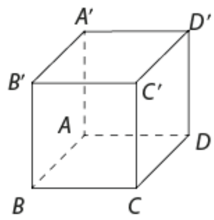
Một kiện hàng gồm hai thùng hàng hình hộp có cùng kích thước được đặt kề nhau (*Hình 4.103*). Vẽ hình biểu diễn hình ảnh các thùng hàng này.

Hình 4.103

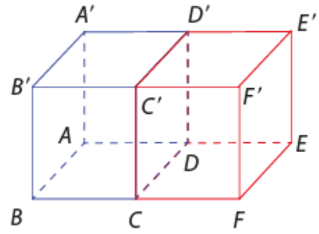
Giải

Bước 1 Vẽ hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (*Hình 4.104*).

Bước 2 Tương tự, vẽ một hình hộp $CDEF.C'D'E'F'$ có chung mặt bên $CDD'C'$ với hình hộp ở Bước 1 (*Hình 4.105*) ta được hình biểu diễn cần xác định (chú ý rằng hai đường thẳng CD, DD' cần được sửa lại thành nét đứt vì bị che khuất).



Hình 4.104



Hình 4.105

LUYỆN TẬP 3

Nhà kính trồng rau của anh A được thiết kế có dạng là một hình hộp và phần mái bên trên là một hình lăng trụ có đáy là tam giác cân đặt nằm ngang (*Hình 4.106*). Hãy vẽ hình biểu diễn của hình ảnh gồm hình lăng trụ và hình hộp này.

Hình 4.106

BÀI TẬP

4.22. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau;

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau;

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau;

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

4.23. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau;

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau;

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau;

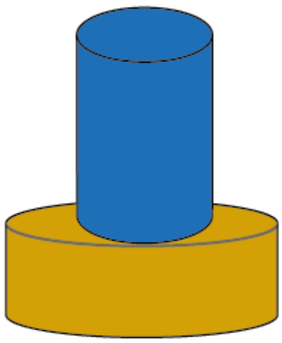
d) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song của nó;

e) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó;

g) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

4.24. Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

4.25. Một đồ chơi cấu tạo gồm hai hình trụ đặt chồng lên nhau như *Hình 4.107*, hình trụ ở trên có bán kính bằng một nửa bán kính của hình trụ ở dưới và chiều cao gấp đôi chiều cao của hình trụ ở dưới. Vẽ hình biểu diễn của hai hình trụ tương ứng với đồ chơi này.



Hình 4.107

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

I Vẽ hình biểu diễn của hình lục giác đều

Vấn đề:

Các bu lông–ốc vít trong máy móc và các đồ dùng hằng ngày thường có dạng bề mặt là những hình lục giác đều (*Hình 4.108*). Hãy vẽ hình biểu diễn của một hình lục giác đều trong trường hợp tổng quát.

Yêu cầu chuẩn bị: Giấy, compa, bút, thước kẻ.

Tổ chức hoạt động:

1. Sử dụng compa và thước, vẽ trên giấy một hình lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*.
2. Có nhận xét gì về tính chất của tứ giác *OABC*?
3. Có nhận xét gì về vị trí các điểm *D*, *E*, *F* so với *A*, *B*, *C*?
4. Hãy suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều *ABCDEF*.

Hình 4.108

II Sử dụng phần mềm GeoGebra 3D dựng hình chóp, giao điểm, giao tuyến

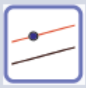
Mục tiêu: Sử dụng phần mềm GeoGebra 3D trên máy tính (máy tính bảng, điện thoại thông minh) để:

- Dựng hình chóp có đáy là hình bình hành;
- Dựng mặt phẳng đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau cho trước.

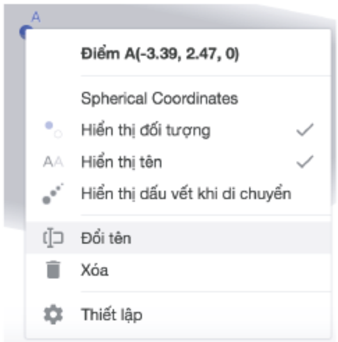
Yêu cầu và chuẩn bị:

- Phần mềm GeoGebra 3D, bản cài đặt trên máy tính tại địa chỉ: *https://www.geogebra.org/download* hoặc sử dụng trực tuyến trên trình duyệt tại địa chỉ: *https://www.geogebra.org/3d*.
- Học sinh cũng có thể dùng ứng dụng GeoGebra 3D trên điện thoại thông minh, máy tính bảng bằng cách tìm kiếm và cài đặt ứng dụng GeoGebra 3D Calculator trên Play Store (đối với hệ điều hành Android) và App Store (đối với hệ điều hành iOS).
- Các nút lệnh và thao tác cần thiết để thực hiện nội dung này:

Nút lệnh/Công cụ	Công dụng	Cách dùng
Điểm mới 	Vẽ một điểm trong không gian.	Chọn nút lệnh này và bấm chọn vào vị trí (hoặc đối tượng) cần vẽ điểm.
Giao điểm của 2 đối tượng 	Tìm giao điểm của hai đối tượng (đường thẳng và đường thẳng, đường thẳng và mặt phẳng,...).	Chọn nút lệnh này, sau đó bấm chuột vào vị trí giao của hai đối tượng.
Đường thẳng qua 2 điểm 	Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm.	Chọn nút lệnh này, sau đó lần lượt bấm vào hai điểm cần vẽ đường thẳng đi qua.
Đoạn thẳng 	Vẽ đoạn thẳng đi qua hai điểm.	Chọn nút lệnh này, sau đó lần lượt bấm vào hai điểm cần vẽ đoạn thẳng đi qua.

Đường song song 	Vẽ đường thẳng đi qua một điểm và song song với đường thẳng cho trước.	Chọn nút lệnh này, sau đó bấm chọn điểm đi qua rồi bấm chọn vào đường thẳng song song.
Hình chóp 	Vẽ hình chóp.	Chọn nút lệnh này, sau đó bấm chọn các điểm là đỉnh của đa giác đáy hình chóp. Tiếp theo, giữ chuột vào phần mặt phẳng rồi kéo lên phía trên so với với mặt phẳng để được đỉnh hình chóp.

Thao tác sửa tên một đối tượng: Nhấn chuột phải vào đối tượng và chọn **Đổi tên**, sau đó đổi tên mới.



Hình 4.109

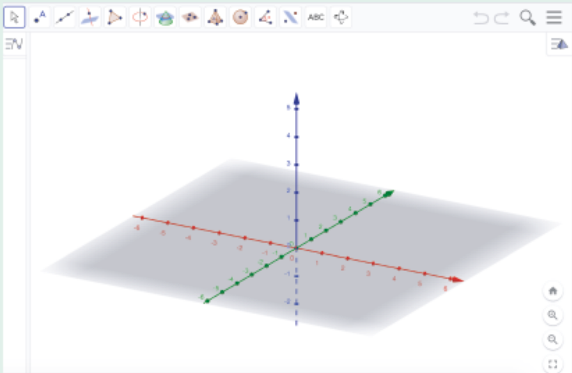
Bài toán:

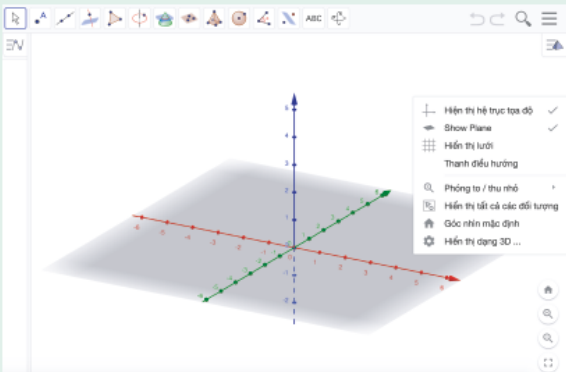
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi E là điểm nằm trên đoạn thẳng BO (E khác B, O). Một mặt phẳng (α) đi qua điểm E và song song với hai đường thẳng SB, AC. Xác định giao điểm của (α) với tất cả các cạnh của hình chóp đã cho.

Tổ chức hoạt động:

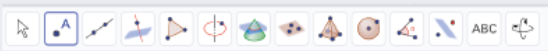
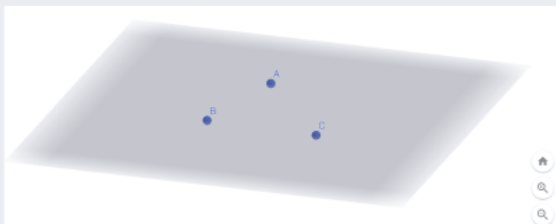
HOẠT ĐỘNG

Bước 1 Dựng hình bình hành $ABCD$. Khởi động GeoGebra 3D ta được giao diện như *Hình 4.110*. Chúng ta có thể ẩn các trục toạ độ bằng cách nhấn chuột phải vào vùng làm việc và chọn **Hiển thị hệ trục toạ độ** như *Hình 4.111*.

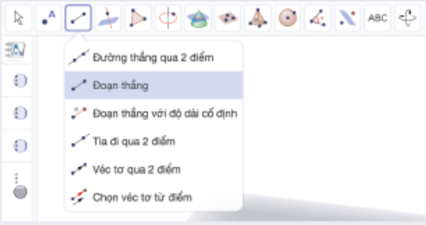
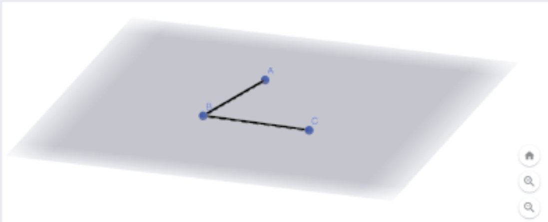

Hình 4.110


Hình 4.111

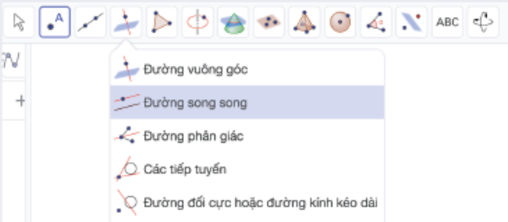
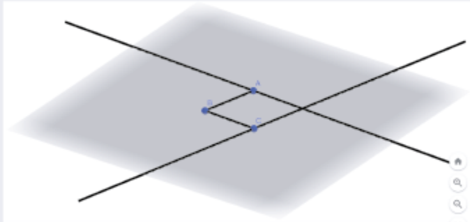
Sử dụng nút lệnh **Điểm mới** và vẽ ba điểm bất kì A, B, C không thẳng hàng trên mặt phẳng.

Thanh công cụ	Vùng làm việc
	

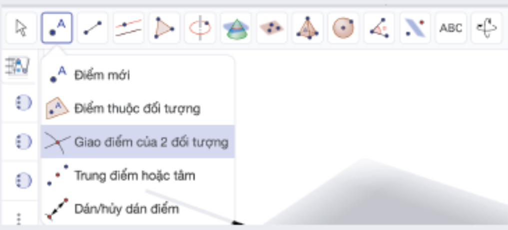
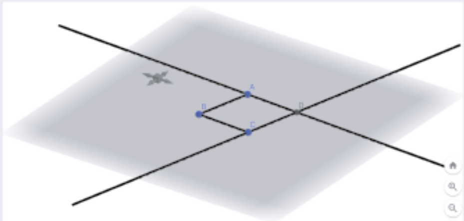
Sử dụng nút lệnh **Đoạn thẳng** để vẽ đoạn thẳng *AB* và *BC*.

Thanh công cụ	Vùng làm việc
	

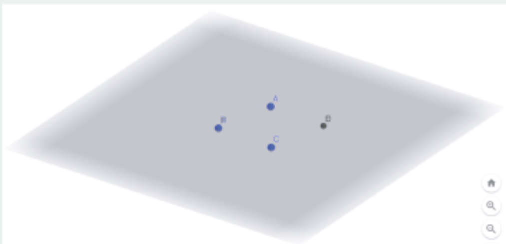
Sử dụng nút lệnh **Đường song song** để vẽ đường thẳng qua *A* song song *BC* và đường thẳng qua *C* song song *AB*.

Thanh công cụ	Vùng làm việc
	

Dùng nút lệnh **Giao điểm của 2 đối tượng** để vẽ điểm *D* là giao điểm của hai đường thẳng vừa dựng.

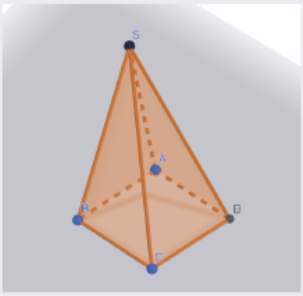
Thanh công cụ	Vùng làm việc
	

Ẩn tất cả các đoạn thẳng (đường thẳng), ta được bốn đỉnh *A*, *B*, *C*, *D* của hình bình hành *ABCD*.



Bước 2 Dựng hình chóp *S.ABCD*.

Sử dụng nút lệnh **Hình chóp** để vẽ một hình chóp với đáy là bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D*.Sau khi bấm chuột vào bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* thì nhấn giữ chuột tại một vị trí bất kì ở miền trong tứ giác *ABCD* rồi rê chuột lên phía trên so với mặt phẳng để tạo được đỉnh *S* (thông thường phần mềm tạo điểm này là điểm *E*, hãy đổi chữ *E* thành chữ *S*).

Thanh công cụ	Vùng làm việc
	

Bước 3 Dựng thêm các điểm trong giả thiết.

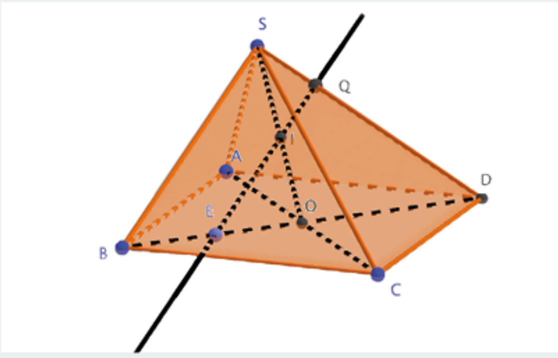
Dùng các nút lệnh **Đoạn thẳng**, **Giao điểm 2 đối tượng** để vẽ đoạn thẳng *AC*, *BD* và tâm *O* của hình bình hành.

Dùng nút lệnh **Điểm mới** để lấy điểm *E* trên đoạn *BO*.

Bước 4 Dựng mặt phẳng (α).

> Ta có: (α) qua *E* và song song với *SB* nên (α) cắt mặt phẳng (*SBD*) theo giao tuyến là đường thẳng *Ex* song song *SB*.

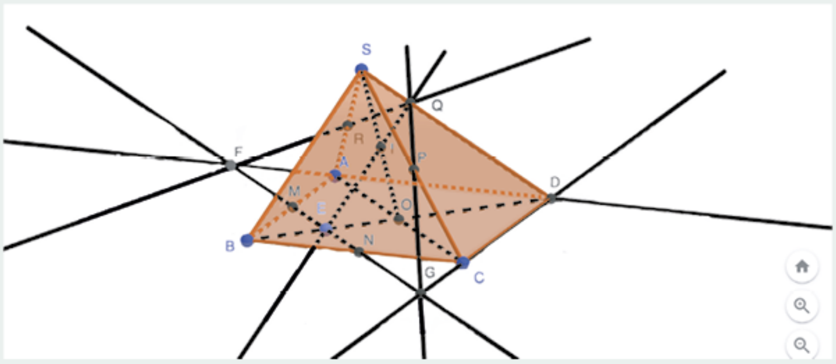
Sử dụng nút lệnh **Đường song song** để vẽ đường thẳng qua *E* và song song với *SB*. Đường thẳng này cắt *SO* tại *I* và *SD* tại *Q* (dùng nút lệnh **Giao điểm 2 đối tượng** để xác định).



Hình 4.112

> Mặt phẳng (α) qua *E* và song song *AC* nên (α) cắt (*ABCD*) theo giao tuyến là đường thẳng đi qua *E* và song song với *AC*.

Tiếp tục sử dụng các nút lệnh **Đường song song**, **Giao điểm 2 đối tượng** và **Đường thẳng qua 2 điểm** để vẽ đường thẳng *d* qua *E* và song song với *AC* cắt *AB* và *BC* lần lượt tại *M*, *N*, *d* cắt hai đường thẳng *AD*, *CD* tại *F*, *G*. *QF* cắt *SA* tại *R*, *QG* cắt *SC* tại *P* (*Hình 4.113*).



Hình 4.113

Vậy (α) cắt các cạnh *SA*, *SC*, *SD* lần lượt tại *R*, *P*, *Q* và cắt các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* lần lượt tại *M*, *N*, *G*, *F*.

ÔN TẬP CHƯƠNG 4

BÀI TẬP TỰ LUẬN

4.26. Cho tam giác BCD và điểm A không thuộc mặt phẳng (BCD). Gọi I là trung điểm của đoạn AB và G là trọng tâm của tam giác ACD. Tìm giao điểm của đường thẳng IG và mặt phẳng (BCD).

4.27. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M và I lần lượt là trung điểm của SC và BC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABM) và (SAI).

4.28. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Lấy K là một điểm trên cạnh SB. Đường thẳng BM cắt AK tại E và BN cắt CK tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF song song với mặt phẳng (ABC).

4.29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với AD là đáy lớn. Gọi M, E lần lượt là trung điểm của CD, SB.

a) Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Chứng minh rằng $EM \parallel (SAD)$.

4.30. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G, K, H lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, ABC.

a) Chứng minh $GK \parallel (ABC)$.

b) Tìm giao tuyến của (BGK) và (ABC).

4.31. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên AA', AB, DC sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{DP}{DC} = \dfrac{1}{3}$.

a) Chứng minh mặt phẳng (MNP) song song với $(A'BC)$.

b) Gọi Q là giao điểm của AC' với (MNP). Xét vị trí tương đối của MQ và $A'C$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

4.32. Hình chóp có 18 cạnh (bao gồm cả cạnh đáy và cạnh bên) thì có bao nhiêu mặt?

A. 9. B. 10.

C. 18. D. 19.

4.33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $IA = 3IM$. B. $IM = 3IA$.

C. $IM = 2IA$. D. $IA = 2IM$.

4.34. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và M là trung điểm của AD. Giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC) là

A. Giao điểm của MG và BC.

B. Giao điểm của MG và AC.

C. Giao điểm của MG và AB.

D. Giao điểm của MG và AN với N là trung điểm của BC.

4.35. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

B. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song nhau.

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song nhau.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

4.36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với

A. Đường thẳng AD.

B. Đường thẳng BJ.

C. Đường thẳng BI.

D. Đường thẳng IJ.

4.37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ảnh của tam giác $C'MN$ qua phép chiếu song song trên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương AO' là

A. Đoạn thẳng MN.

B. Tam giác OBC.

C. Tam giác CMN.

D. Đoạn thẳng BD.

4.38. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Giao tuyến của mặt phẳng $(GA'C')$ với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng song song với đường thẳng

A. AB.

B. BC.

C. AC.

D. AA'.

Phần
THỐNG KÊ và XÁC SUẤT

CHƯƠNG 5

Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm

Ta đã biết cách tính các tham số đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu không ghép nhóm và đã nghiên cứu vai trò của chúng trong phân tích số liệu. Đối với việc phân tích các mẫu số liệu ghép nhóm, làm thế nào để xác định các tham số này và có thể sử dụng chúng như thế nào?

- Tìm hiểu cách xác định các tham số đặc trưng đo xu thế trung tâm (số trung bình, trung vị, tứ phân vị, mốt) của một mẫu số liệu ghép nhóm;
- Sử dụng các tham số này vào việc phân tích một số mẫu số liệu đơn giản trong thực tiễn, từ đó có thể rút ra những kết luận có ý nghĩa.

BÀI 1

MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Ta đã từng gặp những mẫu số liệu ghép nhóm. Vậy, lợi ích đầu tiên của việc thiết lập một mẫu số liệu ghép nhóm là gì? Khi phân tích một mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta nên quan sát những yếu tố nào?

I Mẫu số liệu ghép nhóm

HOẠT ĐỘNG 1

Nhóm của Lan được giao nhiệm vụ thu hoạch và lập báo cáo trình bày kết quả của thí nghiệm trồng cà rốt mà lớp đã thực hiện trong vườn trường. Kết quả thí nghiệm được đánh giá qua khối lượng các củ cà rốt. Cà rốt được xếp theo khối lượng với các mức:

- Mức lớn: Nặng từ 65 g (gam) trở lên;
- Mức trung bình: Nặng từ 50 g đến dưới 65 g;
- Mức nhỏ: Nặng từ 35 g đến dưới 50 g;
- Mức rất nhỏ: Nặng dưới 35 g.

Nhóm của Lan cân từng củ cà rốt thu hoạch được và sắp xếp theo khối lượng như sau:

25	33	42	42	50	55	56	58	60	62
62	62	62	64	64	64	67	68	69	69
70	72	72	74	76	76	76	78	79	79

Hãy giúp nhóm của Lan lập bảng thống kê để báo cáo kết quả thí nghiệm.

Ở Hoạt động 1, ta nên lập một bảng thống kê mà trong đó số liệu được phân thành bốn nhóm tương ứng với bốn mức phân loại cà rốt. Cách làm này giúp thu gọn mẫu số liệu và thuận tiện cho việc phân tích kết quả thí nghiệm trồng cà rốt.

Trong mẫu số liệu ghép nhóm, mỗi nhóm gồm những số liệu được nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm đó thường được kí hiệu là nửa khoảng dạng $[a; b)$. Các số a và b tương ứng được gọi là **đầu mút trái** và **đầu mút phải** của nhóm. Hiệu $b - a$ được gọi là **độ dài của nhóm**.

Số số liệu thuộc mỗi nhóm được gọi là **tần số của nhóm**.

Bảng phân bố tần số ghép nhóm (gọi tắt là **bảng tần số ghép nhóm**) có dạng như *Bảng 5.1*.

Bảng 5.1

Nhóm	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
...	...
$[a_k; a_{k+1})$	n_k
	$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Lưu ý:

- N chính là cỡ của mẫu số liệu.
- Khi ghép nhóm số liệu, người ta thường chọn các nhóm là những nửa khoảng có độ dài bằng nhau. Nhóm đầu tiên chứa số liệu nhỏ nhất, nhóm cuối cùng chứa số liệu lớn nhất của mẫu. Trong *Bảng 5.1*, nhóm cuối cùng cũng có thể lấy là đoạn $[a_k; a_{k+1}]$.
- Người ta có thể lập bảng tần số ghép nhóm ở dạng chuyển 2 cột của *Bảng 5.1* thành 2 dòng: Dòng thứ nhất viết các nhóm, dòng thứ hai viết tần số của các nhóm.

VÍ DỤ 1

Một trường phổ thông kí hợp đồng mua đồng phục thể dục với công ty may M. Công ty thiết kế mẫu đồng phục thể dục theo các kích cỡ (size) khác nhau, mỗi kích cỡ dành cho những người có chiều cao và cân nặng trong một khoảng nào đó.

Để quyết định số lượng đồng phục đặt mua cho mỗi kích cỡ, nhà trường tiến hành điều tra chiều cao một số học sinh lấy từ các khối lớp khác nhau. Lúc này, việc cung cấp cho công ty M số đo của từng người là không cần thiết, nên sau khi tham khảo tiêu chuẩn chiều cao ứng với mỗi kích cỡ quần áo, nhà trường thống kê kết quả đo theo *Bảng 5.2*.

Bảng 5.2

Chiều cao (cm)	Tần số
[150; 157)	34
[157; 164)	102
[164; 171)	93
[171; 178)	55
[178; 185]	26
	$N = 310$

Với *Bảng 5.2*, số liệu đã được ghép thành 5 nhóm.

Nhóm thứ nhất gồm những số đo thuộc nửa khoảng [150; 157). Tần số của nhóm [150; 157) là 34, nghĩa là có 34 học sinh cao từ 150 cm đến dưới 157 cm.

Tương tự, nhìn vào *Bảng 5.2*, ta chỉ ra được các nhóm còn lại và tần số của mỗi nhóm.

Nếu tập hợp 310 học sinh có thể đại diện cho toàn trường thì căn cứ vào *Bảng 5.2*, nhà trường sẽ xác định được số lượng quần áo cần may ở mỗi kích cỡ.

Ví dụ 1 liên quan đến hoạt động đo đạc. Khi đo đạc, ta không thể đưa ra được số đo chính xác mà chỉ viết một giá trị gần đúng của nó. Mặt khác, khó mà có được hai đối tượng có số đo chính xác giống hệt nhau. Việc nghiên cứu tần số của từng giá trị lúc này không có nhiều ý nghĩa. Nhưng nếu nhóm các giá trị theo từng khoảng thì ta có thể căn cứ vào số giá trị trong mỗi khoảng để đưa ra những kết luận thoả đáng.

Trở lại với câu hỏi trong phần Khởi động: Việc ghép nhóm số liệu (theo một tiêu chí nào đó) giúp ta trình bày mẫu số liệu được gọn gàng, súc tích, nhất là khi có nhiều số liệu, hay khi việc phân biệt các số liệu gần bằng nhau là không cần thiết. Lúc quan sát mẫu số liệu ghép nhóm, thông tin về tần số mỗi nhóm là yếu tố đầu tiên cần được lưu ý.

LUYỆN TẬP 1

Bảng 5.3 trình bày kết quả đo cân nặng của 30 học sinh trong một lớp học.

Bảng 5.3

Cân nặng (kg)									
54	42	53	63	58	54	63	70	59	49
73	49	66	60	55	48	65	63	56	51
61	57	69	67	63	52	50	56	49	44

Hãy thu gọn dữ liệu bằng cách lập bảng tần số ghép nhóm với các nhóm ghép là [40; 50), [50; 60), [60; 70), [70; 80).

II Tần số tích luỹ

HOẠT ĐỘNG 2

Kết quả điều tra thời gian chờ khám (đơn vị: phút) của bệnh nhân tại một phòng khám thuộc bệnh viện X được cho trong *Bảng 5.4*.

Hãy xác định:

- Số người chờ ở phòng khám trong khoảng thời gian dưới 25 phút;
- Số người chờ ở phòng khám trong khoảng thời gian dưới 30 phút;
- Số người chờ ở phòng khám trong khoảng thời gian dưới 35 phút.

Giải thích cách tìm câu trả lời.

Bảng 5.4

Thời gian (phút)	Tần số
[20; 25)	4
[25; 30)	5
[30; 35)	8
[35; 40)	3
	$N = 20$

Trong Hoạt động 2, để tìm số người chờ khám dưới 35 phút, ta đã phải lấy tổng 4 + 5 = 9, trong đó 4 là số người chờ dưới 25 phút và 5 là số người chờ từ 25 đến dưới 30 phút. Như vậy, số 9 tìm được bằng cách lấy tổng tần số của hai nhóm [20; 25) và [25; 30). Người ta gọi 9 là tần số tích luỹ của nhóm [25; 30).

Tương tự, 17 người có thời gian chờ dưới 35 phút. Số 17 thu được bằng cách lấy tổng 4 + 5 + 8, hay 9 + 8. Ta gọi 17 là tần số tích luỹ của nhóm [30; 35).

Cũng như thế, tần số tích luỹ của nhóm [35; 40) là 20 = 4 + 5 + 8 + 3 hay 17 + 3. Nó cho biết có 20 người chờ dưới 40 phút.

Tần số tích luỹ của mỗi nhóm bằng tần số của nhóm đó cộng với tần số của các nhóm phía trước.

Từ bảng phân bố tần số *5.1*, ta lập được bảng tần số tích luỹ như sau:

Bảng tần số tích luỹ

Nhóm	Tần số	Tần số tích luỹ
$[a_1; a_2)$	n_1	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2	$n_1 + n_2$
$[a_3; a_4)$	n_3	$n_1 + n_2 + n_3$
...	...	...
$[a_k; a_{k+1})$	n_k	$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

VÍ DỤ 2

Một công ty tìm hiểu thâm niên công tác (số năm đã làm việc) của nhân viên và thống kê kết quả điều tra bởi bảng tần số ghép nhóm bên (*Bảng 5.5*). Hãy lập bảng tần số tích luỹ ứng với bảng số liệu đã cho.

Bảng 5.5

Số năm	Số người
[2; 4)	15
[4; 6)	33
[6; 8)	17
[8; 10)	15
	$N = 80$

Giải

Việc tính toán để lập bảng tần số tích luỹ được mô tả như sau:

Bảng 5.5a. Bảng tần số tích luỹ về thâm niên công tác

Thời gian (năm)	Tần số	Tần số tích luỹ
[2; 4)	15	15
[4; 6)	33	48
[6; 8)	17	65
[8; 10)	15	80

$15 + 33 = 48$

$48 + 17 = 65$

$65 + 15 = 80$

LUYỆN TẬP 2

Thống kê lượng người và số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà mỗi người rút ra ở một máy ATM (máy rút tiền tự động) trong một buổi sáng, ngân hàng X lập được bảng tần số ghép nhóm bên (*Bảng 5.6*).

a) Lập bảng tần số tích luỹ tương ứng với mẫu số liệu đã cho.

b) Bao nhiêu người đã rút tiền ở máy vào buổi sáng hôm đó?

c) Bao nhiêu người rút số tiền ít hơn 3 triệu đồng?

Bảng 5.6. Số tiền rút từ máy ATM

Số tiền (triệu đồng)	Số người
[0; 1)	6
[1; 2)	12
[2; 3)	15
[3; 4)	8
[4; 5]	4

BÀI TẬP

5.1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm ở *Bảng 5.7*.

Bảng 5.7

Nhóm	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]
Tần số	8	5	12	22	5

a) Mẫu số liệu đã cho có bao nhiêu giá trị thuộc nhóm [60; 70)? Thuộc nhóm [70; 80)?

b) Lập bảng tần số tích luỹ của mẫu số liệu.

5.2. Để định hướng lựa chọn sản phẩm cho quý kế tiếp, công ty dịch vụ thương mại Z sử dụng kết quả điều tra do một nhà phân phối thực hiện về tuổi thọ của 50 máy mát-xa đã qua sử dụng trên thị trường. Kết quả điều tra được biểu diễn bởi *Bảng 5.8*.

Bảng 5.8

Tuổi thọ (năm)	[2; 5)	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)
Số máy	8	15	17	6	4

a) Lập bảng tần số tích luỹ của mẫu số liệu.

b) Bao nhiêu máy có tuổi thọ dưới 8 năm? Dựa vào đâu để tìm câu trả lời?

c) Số máy có tuổi thọ dưới 14 năm chiếm bao nhiêu phần trăm? Hãy giải thích cách tính.

BÀI 2 SỐ TRUNG BÌNH CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Một nhà thực vật học đo độ dài (đơn vị: mm) của 40 chiếc lá lấy từ một cây trồng để nghiên cứu chiều dài trung bình của lá cây. Ban đầu, chiều dài các lá được nhà thực vật học ghi lại trong bảng dưới đây:

Bảng 5.9a. Chiều dài của lá

40	46	45	59	43	52	49	43
59	53	70	42	60	37	55	43
51	56	61	57	32	63	46	56
60	42	46	66	39	50	33	45

Sau đó, nhà thực vật học dùng một bảng tần số ghép nhóm để ghi lại dữ liệu (*Bảng 5.9b*).

Bảng 5.9b. Bảng tần số ghép nhóm chiều dài của lá

Chiều dài	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70]
Tần số	4	12	10	6

HOẠT ĐỘNG

Nhằm tìm hiểu tình hình học sinh rèn luyện sức khoẻ qua môn bơi lội, nhà trường đề nghị mỗi lớp trưởng thống kê thời gian các bạn trong lớp dành cho môn thể thao này hàng tuần.

Đầu tiên, Hùng – lớp trưởng lớp 11A1 – điều tra và ghi lại thời gian tập luyện bơi lội của mỗi bạn. Nhưng sau đó, Hùng đã tổng hợp số liệu trong bảng dưới đây (*Bảng 5.10*):

Bảng 5.10. Thời gian dành cho môn bơi lội

Thời gian (phút)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)	[120; 150)	[150; 180]
Số học sinh	4	8	12	3	5

a) Tính thời gian tập luyện trung bình của 4 bạn ứng với nhóm ghép thứ nhất, biết rằng số liệu Hùng ghi chép về 4 bạn này là 40; 35; 45; 55 (phút).

Đặt $c_1 = \dfrac{30+60}{2}$. Có nhận xét gì về sự chênh lệch giữa kết quả tìm được với c_1?

b) Nếu chỉ dựa vào *Bảng 5.10* mà không có đầy đủ các số liệu lúc đầu, hãy thử đưa ra một cách ước tính thời gian bơi lội trung bình hàng tuần của các bạn lớp 11A1. Giải thích cách tính.

Số c_1 trong Hoạt động trên được gọi là giá trị đại diện của nhóm [30; 60).

Với mỗi nhóm, trung bình cộng của đầu mút trái và đầu mút phải được gọi là giá trị đại diện của nhóm đó.

Thông qua giá trị đại diện của các nhóm ghép, ta ước tính được trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm. Để tiện tính toán, ta bổ sung vào *Bảng 5.10* cột "Giá trị đại diện" và lập bảng sau:

Bảng 5.10a. Thời gian dành cho môn bơi lội

Thời gian (phút)	Giá trị đại diện	Tần số
[30; 60)	45	4
[60; 90)	75	8
[90; 120)	105	12
[120; 150)	135	3
[150; 180]	165	5

Dựa vào bảng này, ta ước tính được giá trị trung bình của mẫu số liệu.

Công thức tính số trung bình với bảng tần số ghép nhóm

Đối với một mẫu số liệu ghép nhóm, do không biết từng số liệu cụ thể nên ta không tính được giá trị chính xác của số trung bình. Nhưng bằng cách sử dụng giá trị đại diện của các nhóm, ta có thể ước tính gần đúng số trung bình của mẫu.

Giả sử mẫu số liệu kích thước N được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm, trong đó các số liệu được chia thành k nhóm. Gọi n_i và c_i lần lượt là tần số và giá trị đại diện của nhóm thứ i, $1 \leq i \leq k$. Khi đó:

Số trung bình cộng (hay trung bình) $\overline{x}$ của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}(c_1n_1 + c_2n_2 + \ldots + c_kn_k)$$

VÍ DỤ

Tỉ giá giữa đồng tiền mỗi nước với đồng Đô la Mỹ (USD) là một chỉ số quan trọng của kinh tế. Một nhà kinh doanh đã theo dõi trong 25 ngày liên tiếp tỉ giá giữa đồng EUR (đồng tiền chung của nhiều quốc gia trong Liên minh châu Âu) và đồng USD vào đầu giờ làm việc mỗi ngày. Do sự biến động tỉ giá giữa hai ngày liền nhau thường không nhiều nên nhà kinh doanh đó đã ghép nhóm số liệu thu được và biểu diễn qua *Bảng 5.11*.

Bảng 5.11. Tỉ giá EUR/USD

Tỉ giá EUR/USD	[1; 1,04)	[1,04; 1,08)	[1,08; 1,12)	[1,12; 1,16)	[1,16; 1,2)
Tần số	6	4	5	7	3

Tính tỉ giá trung bình của đồng EUR/USD trong 25 ngày mà nhà kinh doanh theo dõi.

Giải

Để ngắn gọn, ta trình bày cách tính trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm qua bảng sau:

Tỉ giá EUR/USD	Giá trị đại diện c_i	Tần số n_i	$c_i n_i$
[1; 1,04)	1,02	2	2,04
[1,04; 1,08)	1,06	4	4,24
[1,08; 1,12)	1,10	12	13,20
[1,12; 1,16)	1,14	4	4,56
[1,16; 1,2)	1,18	3	3,54
		$N = 25$	27,58

Số trung bình của mẫu số liệu cho trong *Bảng 5.11* là:

$$\overline{x} = \frac{27,58}{25} \approx 1,103.$$

Như vậy, tỉ giá EUR/USD trung bình của 25 ngày mà nhà kinh doanh theo dõi xấp xỉ bằng 1,103.

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị trung bình xấp xỉ của các số liệu trong mẫu. Nó có thể được xem như giá trị trung tâm của mẫu và nhiều khi được dùng làm một đại diện cho mẫu.

Chẳng hạn, trong ví dụ trên, nhà kinh doanh có thể nói rằng trong 25 ngày đã theo dõi, giá trị trung tâm của tỉ giá đồng EUR/USD là 1,103.

LUYỆN TẬP

Xét tình huống đã nêu ở đầu bài học.

a) Tính chiều dài trung bình của các lá cây được khảo sát trong mẫu số liệu ở *Bảng 5.9a*.

b) Ước tính chiều dài trung bình của lá cây thông qua mẫu số liệu ghép nhóm trong *Bảng 5.9b*. Đối chiếu với kết quả tìm được được ở câu a), có nhận xét gì?

BÀI TẬP

5.3. *Bảng 5.12* thống kê kết quả điều tra thời gian sử dụng Internet trong một tuần của 32 nhân viên văn phòng. Ước tính thời gian sử dụng Internet trung bình của 32 người được điều tra.

Bảng 5.12. Thời gian sử dụng Internet

Thời gian (giờ)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	
Tần số (số người)	2	12	7	7	4	$N = 32$

5.4. *Bảng 5.13* trình bày dữ liệu liên quan đến quãng đường của 160 chuyến xe mà một tài xế taxi đã hoàn thành trong một tháng. Xác định quãng đường trung bình của các chuyến xe mà tài xế này đã thực hiện trong tháng đó.

Bảng 5.13. Quãng đường đi của 160 chuyến xe

Quãng đường x (km)	$0 \le x < 6$	$6 \le x < 12$	$12 \le x < 18$	$18 \le x < 24$	$24 \le x \le 30$
Tần số (số chuyến xe)	24	56	40	28	12

5.5. Người ta tiến hành khảo sát tuổi thọ của một số máy chạy thể dục do hai công ty A và B sản xuất. Kết quả được tóm tắt trong *Bảng 5.14*. Ước tính tuổi thọ trung bình của các máy chạy thể dục được sản xuất bởi mỗi công ty. Có thể dự đoán là sản phẩm của công ty nào có độ bền cao hơn?

Bảng 5.14. Tuổi thọ của máy chạy thể dục

Tuổi thọ t (năm)	$0 \le t < 2$	$2 \le t < 4$	$4 \le t < 6$	$6 \le t < 8$	$8 \le t \le 10$	
Số máy của công ty A	8	18	13	9	2	$N = 50$
Số máy của công ty B	3	8	15	15	9	$N = 50$

5.6. Một viện nghiên cứu nuôi trồng thuỷ sản triển khai nuôi thí điểm giống cá mới ở hai cơ sở A, B theo hai phương pháp khác nhau. Sau ba tháng, mỗi cơ sở kiểm tra khối lượng của một số cá. Số liệu dưới đây đã được gửi về viện nghiên cứu.

Bảng 5.15a. Cân nặng của cá nuôi ở cơ sở A

Cân nặng (g)	**Tần số**
[50; 60)	7
[60; 70)	20
[70; 80)	25
[80; 90)	30
[90; 100)	13
	$N = 95$

Bảng 5.15b. Cân nặng của cá nuôi ở cơ sở B

Cân nặng (g)	**Tần số**
[40; 60)	43
[60; 80)	34
[80; 100)	12
[100; 120)	8
[120; 140)	3
	$N = 100$

Hãy ước tính khối lượng trung bình của cá nuôi ở mỗi cơ sở. Nhà nghiên cứu có thể đưa ra kết luận gì về hiệu quả của hai phương pháp nuôi cá?

BÀI 3 CÁC TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Cũng giống như số trung bình, khi dữ liệu đã được ghép nhóm thì ta không tính được giá trị chính xác của các tứ phân vị. Vậy làm thế nào để ước tính gần đúng các giá trị này?

I Nhóm chứa trung vị

HOẠT ĐỘNG 1

Bảng 5.16 là bảng tần số ghép nhóm về chiều cao của 50 học sinh.

a) Nếu mẫu dữ liệu lúc chưa ghép nhóm được sắp xếp thành dãy không giảm, kí hiệu là $u_1, u_2, \ldots, u_{50}$ thì trung vị được tính như thế nào?

b) Xác định nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{N}{2}$, với N là cỡ mẫu. Hãy chứng minh rằng trung vị thuộc nhóm ghép này.

Bảng 5.16. Chiều cao của 50 học sinh

Chiều cao (cm)	Tần số
[149; 152)	2
[152; 155)	4
[155; 158)	15
[158; 161)	16
[161; 164)	9
[164; 167]	4
	$N = 50$

Nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{N}{2}$, trong đó N là cỡ mẫu.

VÍ DỤ 1

Điểm kiểm tra môn Toán của học sinh một lớp được thống kê trong *Bảng 5.17*. Tìm nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu về điểm thi đã cho.

Bảng 5.17

Điểm thi	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]	
Tần số	2	3	12	25	3	$N = 45$

Giải

Ta lập bảng tần số tích luỹ cho mẫu số liệu ghép nhóm ở trên.

Điểm thi	Tần số	Tần số tích luỹ
[0; 2)	2	2
[2; 4)	3	5
[4; 6)	12	17
[6; 8)	25	42
[8; 10]	3	45

Ta có $\frac{N}{2} = 22,5$. Nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 22,5 là nhóm [6; 8).
Vậy nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu đã cho là [6; 8).

LUYỆN TẬP 1

Trong cuộc vận động sử dụng xe đạp làm phương tiện giao thông để nâng cao sức khoẻ và góp phần bảo vệ môi trường, nhà trường đã tìm hiểu thời gian đi xe đạp trong một tháng của một số học sinh. Kết quả điều tra được biểu diễn bởi *Bảng 5.18*. Hãy xác định nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu.

Bảng 5.18

Thời gian (giờ)	Số học sinh	Thời gian (giờ)	Số học sinh
[2; 4)	20	[10; 12)	22
[4; 6)	43	[12; 14)	12
[6; 8)	30	[14; 16)	10
[8; 10)	12	[16; 18]	11

II Công thức tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

HOẠT ĐỘNG 2

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi *Bảng 5.16* trong Hoạt động 1.

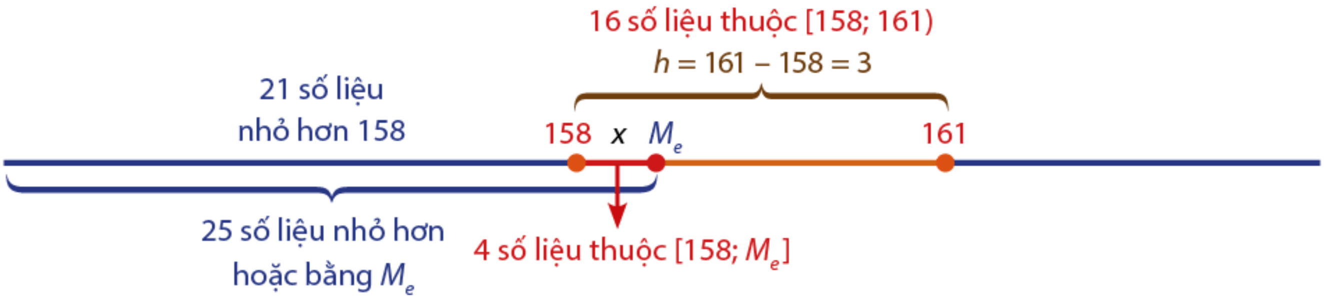
a) Lập bảng tần số tích luỹ của mẫu số liệu đã cho.

b) Gọi M_e là trung vị của mẫu số liệu. Tìm nhóm chứa trung vị M_e. Gọi h là độ dài của nhóm đó. Tìm h.

c) Xác định số số liệu:

- Nhỏ hơn 158;
- Thuộc nhóm [158; 161);
- Nhỏ hơn hoặc bằng M_e;
- Thuộc đoạn $[158; M_e]$.

Hình 5.1 biểu diễn các kết quả tìm được trong Hoạt động 2:



Hình 5.1

Giả định là các số liệu nằm cách đều nhau trong nhóm chứa trung vị. Từ hình trên, ta có đẳng thức:

$$\frac{3}{16} = \frac{M_e - 158}{4}.$$

Suy ra:

$$M_e = 158 + \frac{4}{16} \cdot 3 = 158{,}75. \quad (*)$$

Như vậy, ta tính được trung vị của mẫu số liệu đã cho là $M_e = 158{,}75$ (cm).

Dưới đây, ta phân tích các thành phần của biểu thức (*) tìm được ở trên:

$\frac{N}{2}$

Đầu mút trái của nhóm chứa trung vị

Tần số tích luỹ của nhóm trước nhóm chứa trung vị

$$M_e = 158 + x = 158 + \frac{25 - 21}{16} \cdot 3$$

Độ dài của nhóm chứa trung vị

Tần số của nhóm chứa trung vị

Tổng quát, ta có:

Công thức tính số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$M_e = L_m + \frac{\frac{N}{2} - T}{n_m} \cdot h$$

Trong đó: N là cỡ mẫu;

L_m, n_m và h lần lượt là đầu mút trái, tần số và độ dài của nhóm chứa trung vị;

T là tần số tích luỹ của nhóm ngay trước nhóm chứa trung vị;

Trong trường hợp nhóm chứa trung vị là nhóm đầu tiên của mẫu số liệu, người ta quy ước $T = 0$.

Lưu ý rằng trong lập luận trên, ta đã giả định là các số liệu nằm cách đều nhau trong nhóm chứa trung vị. Nhưng thực tế có thể không phải như vậy, nên công thức trên chưa hẳn đã cho giá trị chính xác mà chỉ mang lại một giá trị gần đúng của trung vị.

VÍ DỤ 2

Một câu lạc bộ thể dục thể thao đã ghi lại số giờ các thành viên của mình sử dụng cơ sở vật chất của câu lạc bộ để tập luyện trong một tháng. Họ tổ chức dữ liệu thu được vào *Bảng 5.19*:

Bảng 5.19

Thời gian (giờ)	[1; 5)	[5; 9)	[9; 13)	[13; 17)	[17; 21)	[21; 25)
Tần số (số người)	10	14	31	2	5	23

Hãy tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

a) Trung vị của mẫu số liệu;

b) Trung bình của mẫu số liệu. Trong trường hợp này thì trung bình hay trung vị đại diện tốt hơn cho mẫu số liệu?

Giải

a) Lập bảng tần số tích luỹ.

$\frac{N}{2} = \frac{85}{2} = 42,5$. Nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 42,5 là nhóm [9; 13). Vậy đây là nhóm chứa trung vị. Từ đó ta xác định được:

- Đầu mút trái của nhóm chứa trung vị: $L_m = 9$;
- Tần số của nhóm chứa trung vị: $n_m = 31$;
- Độ dài của nhóm chứa trung vị: $h = 13 - 9 = 4$;
- Tần số tích luỹ của nhóm trước nhóm chứa trung vị là $T = 24$.

Bảng 5.19a

Thời gian (giờ)	Tần số	Tần số tích luỹ
[1; 5)	10	10
[5; 9)	14	24
[9; 13)	31	55
[13; 17)	2	57
[17; 21)	5	62
[21; 25)	23	85

Áp dụng công thức trên, ta có trung vị của mẫu số liệu là:

$$M_e = 9 + \frac{42,5 - 24}{31} \cdot 4 \approx 11,4.$$

b) Các tính toán để xác định trung bình của mẫu số liệu được thể hiện qua *Bảng 5.19b*:

Bảng 5.19b

Thời gian	Giá trị đại diện c_i	Tần số n_i	$c_i n_i$
[1; 5)	3	10	30
[5; 9)	7	14	98
[9; 13)	11	31	341
[13; 17)	15	2	30
[17; 21)	19	5	95
[21; 25)	23	23	529
		$N = 85$	1123

Trung bình của mẫu số liệu là $\overline{x} = \frac{1123}{85} \approx 13,2$.

Như vậy, trung bình thuộc nhóm [13; 17). *Bảng 5.19a* cho thấy trong 85 số liệu, đã có ít nhất 55 số liệu nhỏ hơn trung bình $\overline{x}$. Suy ra, trong trường hợp này thì trung vị là số đại diện tốt hơn cho mẫu số liệu.

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu và có thể sử dụng làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

LUYỆN TẬP 2

Xác định số trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho trong Luyện tập 1.

III Công thức tính các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ta đã biết: Tứ phân vị của mẫu số liệu là ba số Q_1, Q_2, Q_3, trong đó $Q_2 = M_e$ được gọi là tứ phân vị thứ hai, Q_1 là trung vị của nhóm dưới M_e (nhóm gồm những giá trị của mẫu số liệu, không vượt quá M_e), được gọi là tứ phân vị thứ nhất (hay tứ phân vị dưới), Q_3 là trung vị của nhóm trên M_e (gồm những giá trị của mẫu số liệu, không nhỏ hơn M_e), được gọi là tứ phân vị thứ ba (hay tứ phân vị trên).

HOẠT ĐỘNG 3

Bảng 5.20 cho biết phân phối về khối lượng của một nhóm 32 học sinh.

Bảng 5.20

Khối lượng (kg)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Số học sinh	5	6	7	5	4	3	2

a) Xác định nhóm chứa trung vị M_e của mẫu số liệu đã cho. Tìm M_e.

b) Kí hiệu $u_1, u_2, \ldots, u_{32}$ là các giá trị của mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Nhóm dưới M_e có bao nhiêu giá trị? Nhóm trên M_e có bao nhiêu giá trị?

c) Hãy giải thích vì sao *Bảng 5.20a* và *Bảng 5.20b* tương ứng là bảng phân bố tần số của nhóm dưới và bảng phân bố tần số của nhóm trên.

Bảng 5.20a

Khối lượng (kg)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Tần số	5	6	5

Bảng 5.20b

Khối lượng (kg)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	2	5	4	3	2

d) Tính các tứ phân vị thứ nhất Q_1 (trung vị của nhóm dưới) và tứ phân vị thứ ba Q_3 (trung vị của nhóm trên) của mẫu số liệu cho ở *Bảng 5.20*.

Công thức tính các tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm:

Nhóm chứa Q_i ($i = 1; 2; 3$) là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng $\frac{iN}{4}$ và

$$Q_i = L_i + \frac{i \cdot \frac{N}{4} - T_i}{n_i} \cdot h$$

Trong đó: N là cỡ mẫu;

L_i, n_i và h lần lượt là đầu mút trái, tần số và độ dài của nhóm chứa Q_i;

T_i là tần số tích luỹ của nhóm trước nhóm chứa Q_i. Trong trường hợp nhóm chứa Q_i là nhóm đầu tiên của mẫu số liệu, người ta quy ước $T_i = 0$.

Lưu ý: Trong trường hợp các nhóm có độ dài bằng nhau thì h giống nhau với mọi nhóm.

Ý nghĩa của các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ của tứ phân vị của mẫu số liệu.
- Các tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu ghép nhóm thành bốn phần có số số liệu bằng nhau. Các tứ phân vị cho ta một hình ảnh về sự phân bố của mẫu số liệu. Dựa vào các tứ phân vị, ta có thể biết số liệu tập trung ít hay nhiều quanh trung vị.

VÍ DỤ 3

Trung tâm ngoại ngữ thống kê trong *Bảng 5.21* kết quả kiểm tra (thang điểm 100) môn tiếng Anh của một khoá học.

Bảng 5.21

Điểm	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100]
Số học viên	10	30	55	42	9

a) Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Kết quả tìm được cho biết thông tin gì?

Giải

a) Trước hết, ta lập bảng tần số tích luỹ.

Điểm	Tần số	Tần số tích luỹ
[0; 20)	10	10
[20; 40)	30	40
[40; 60)	55	95
[60; 80)	42	137
[80; 100)	9	146

Ta có $N = 146 \Rightarrow \frac{N}{4} = 36,5 \Rightarrow \frac{N}{2} = 73$ và $\frac{3N}{4} = 109,5$.

Từ đó, ta xác định được các nhóm chứa Q_1, Q_2, Q_3 lần lượt là [20; 40), [40; 60), [60; 80).

Độ dài các nhóm ghép đều là $h = 20$.

Áp dụng công thức tính các tứ phân vị, ta có:

$L_1 = 20; n_1 = 30; T_1 = 10$. Suy ra $Q_1 = L_1 + \dfrac{\frac{N}{4} - T_1}{n_1} \cdot h = 20 + \dfrac{36,5 - 10}{30} \cdot 20 \approx 37,67$.

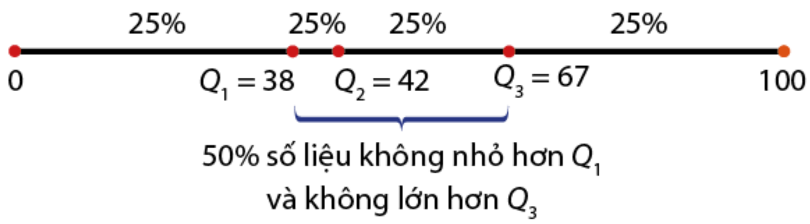
$L_2 = 40; n_2 = 55; T_2 = 40$. Suy ra $Q_2 = L_2 + \dfrac{\frac{N}{2} - T_2}{n_2} \cdot h = 40 + \dfrac{73 - 40}{55} \cdot 20 = 42$.

$L_3 = 60; n_3 = 42; T_3 = 95$. Suy ra $Q_3 = L_3 + \dfrac{\frac{3N}{4} - T_3}{n_3} \cdot h = 60 + \dfrac{109,5 - 95}{42} \cdot 20 = 66,9$.

b) Nếu làm tròn số, ta có thể lấy $Q_1 = 38; Q_2 = 42; Q_3 = 67$. Đây là các giá trị ước lượng cho các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

Theo ý nghĩa của các tứ phân vị thì:

- Có ít nhất 25% học viên đạt điểm không vượt quá 38. Cũng như vậy, khoảng 50% học viên đạt điểm không vượt quá 42; khoảng 75% học viên đạt điểm không vượt quá 67 và khoảng 25% học viên có điểm từ 67 trở lên.
- Đối với 50% học viên có điểm ở trung tâm của dữ liệu thì đầu mút trái của khoảng điểm là 38 và đầu mút phải của khoảng điểm là 67. *Hình 5.2* cho thấy điểm số của học viên tập trung nhiều trong [38 ; 42].



Hình 5.2

LUYỆN TẬP 3

Bảng 5.22 biểu diễn kết quả điều tra do Ban Chấp hành Công đoàn một xí nghiệp may thực hiện về lương hàng tháng của 604 công nhân và cán bộ lãnh đạo.

a) Ban Chấp hành Công đoàn muốn đề nghị trợ cấp cho nhóm 25% số công nhân có mức lương thấp nhất trong công ty. Hãy ước tính mức lương cao nhất của nhóm công nhân này (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).

b) Để có thêm thông tin nhằm hoạch định vấn đề lương thưởng cho công nhân năm tới, Ban giám đốc căn cứ vào 50% công nhân có lương nằm ở trung tâm của mẫu số liệu. Hãy xác định mức lương thấp nhất và mức lương cao nhất của nhóm công nhân này (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).

Bảng 5.22

Mức lương (triệu đồng)	Số lượng công nhân
[4; 6)	56
[6; 8)	187
[8; 10)	202
[10; 12)	65
[12; 14)	58
[14; 16)	24
[16; 18)	8
[18; 20)	4

BÀI TẬP

5.7. *Bảng 5.23* biểu diễn kết quả thống kê về thời gian cần thiết để thực hiện các cuộc chạy marathon đã được tổ chức ở một địa phương.

a) Xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Xét nhóm gồm 50% số cuộc thi có thời gian ngắn hơn đã được tổ chức: Thời gian tối đa của các cuộc thi trong nhóm này là bao nhiêu?

Bảng 5.23

Thời gian (phút)	Tần số
[120; 135)	1
[135; 150)	5
[150; 165)	4
[165; 180)	4
[180; 195)	6
[195; 210)	3
[210; 225)	5
[225; 240]	4
	$N = 32$

5.8. Tuổi của một số lao động nam được thống kê trong *Bảng 5.24*.

a) Xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Kết quả tìm được cho biết thông tin gì về độ tuổi của các lao động nam được điều tra?

Bảng 5.24

Tuổi (năm)	Tần số	Tuổi (năm)	Tần số
[20; 25)	36	[40; 45)	58
[25; 30)	42	[45; 50)	28
[30; 35)	90	[50; 55)	22
[35; 40)	36	[55; 60)	30

5.9. Tham khảo trang *https://www.gso.gov.vn/*, Mai thống kê diện tích trồng lúa năm 2019 của 63 tỉnh thành và tổ chức dữ liệu trong *Bảng 5.25*.

a) Xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu.

b) Kết quả tìm được cho biết thông tin gì về diện tích trồng lúa năm 2019?

Bảng 5.25

Diện tích (nghìn ha)	Tần số	Diện tích (nghìn ha)	Tần số
[0; 30)	7	[150; 180)	4
[30; 60)	18	[180; 210)	3
[60; 90)	9	[210; 240)	3
[90; 120)	9	[240; 270)	2
[120; 150)	5	[270; 300]	3

5.10. Lan tìm hiểu hàm lượng vitamin C trong một số loại rau củ quả và thống kê dữ liệu trong *Bảng 5.26*. Lan muốn phân những loại rau củ quả mà mình tìm hiểu thành 4 nhóm tuỳ theo hàm lượng vitamin C của chúng: Nhóm I gồm khoảng 25% loại rau củ quả có hàm lượng vitamin C thấp; nhóm II gồm khoảng 50% loại rau củ quả có hàm lượng vitamin C trung bình; nhóm III gồm khoảng 25% loại rau củ quả có hàm lượng vitamin C cao.

Hãy xác định:

a) Đầu mút phải của khoảng biểu thị hàm lượng vitamin C của nhóm I;

b) Đầu mút phải và đầu mút trái của khoảng biểu thị hàm lượng vitamin C của nhóm II;

c) Đầu mút trái của khoảng biểu thị hàm lượng vitamin C của nhóm III.

Bảng 5.26

Hàm lượng (mg/100 g)	Tần số	Hàm lượng (mg/100 g)	Tần số
[10; 20)	2	[60; 70)	8
[20; 30)	7	[70; 80)	6
[30; 40)	7	[80; 90)	10
[40; 50)	4	[90; 100)	4
[50; 60)	5	[100; 110)	3

BÀI 4

MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Ta đã biết rằng mốt của một mẫu số liệu là giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu và cũng là một tham số đo xu thế trung tâm của mẫu.

Trong khi số trung bình, trung vị, tứ phân vị chỉ phù hợp với mẫu dữ liệu định lượng thì mốt có thể dùng để phân tích cả mẫu dữ liệu định tính lẫn định lượng. Tuy nhiên, khi xét các mẫu số liệu ghép nhóm thì ta chỉ nói về dữ liệu định lượng.

Mốt của một mẫu số liệu ghép nhóm là gì và được xác định như thế nào?

I Nhóm chứa mốt

HOẠT ĐỘNG 1

Bảng 5.27 phân loại cân nặng của một số học sinh. Nhóm nào chứa nhiều số liệu nhất?

Bảng 5.27

Cân nặng (kg)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60]
Tần số	5	12	16	18	25	14

Trong một mẫu số liệu ghép nhóm, nhóm có tần số lớn nhất được gọi là nhóm chứa mốt.

VÍ DỤ 1

Bảng 5.28 biểu diễn kết quả đọc được từ chiếc camera mà cảnh sát giao thông đã đặt để theo dõi tốc độ các xe ô tô lưu thông trên một quãng đường cao tốc. Cho biết nhóm nào là nhóm chứa mốt của mẫu số liệu.

Bảng 5.28

Tốc độ (km/h)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120]	
Tần số	30	35	50	40	15	$N = 170$

Giải

Quan sát dòng tần số trong *Bảng 5.28*, ta thấy 50 là số lớn nhất. Nhóm có tần số này là [90; 100). Vậy đây là nhóm chứa mốt của mẫu số liệu. Nó cho ta biết rằng trong khoảng thời gian camera theo dõi, loại xe chạy với tốc độ từ 90 (km/h) đến dưới 100 (km/h) trên quãng đường này chiếm số lượng nhiều nhất.

LUYỆN TẬP 1

Bảng 5.29 do người chủ một cơ sở cho thuê xe đạp lập nên sau khi điều tra 50 khách thuê xe trong hai ngày cuối tuần về chiều dài quãng đường mà mỗi người đã thực hiện. Hãy chỉ ra nhóm chứa mốt của mẫu số liệu.

Bảng 5.29

Chiều dài quãng đường (km)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)
Tần số	5	15	18	8	4

II Công thức tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

HOẠT ĐỘNG 2

Xét mẫu số liệu ghép nhóm về cân nặng của học sinh cho trong Hoạt động 1 (*Bảng 5.27*). Ta đã xác định được nhóm chứa mốt là [50; 55) và tần số của nhóm này là 25.

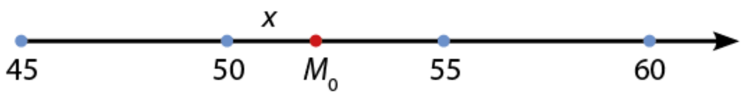
a) Xác định nhóm liền kề trước, nhóm liền kề sau của nhóm chứa mốt và tần số của mỗi nhóm này.

b) Gọi a và b tương ứng là hiệu giữa tần số của nhóm chứa mốt với tần số các nhóm liền kề trước và nhóm liền kề sau. Tìm a và b.

c) Xác định chiều dài h của nhóm chứa mốt.

Với những kết quả trên, làm thế nào để xác định mốt M_0 của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho?

Vì $M_0 \in [50; 55)$ nên $M_0 = 50 + x$ với $0 \leq x < 5$, trong đó $h = 5$ là độ dài của nhóm chứa mốt (*Hình 5.3*).



Hình 5.3

Bằng những lập luận dựa trên phân phối của mẫu số liệu, các nhà Thống kê học đi đến quy ước tính x theo công thức $x = \frac{a}{a+b} \cdot h$.

Trong trường hợp mẫu số liệu trên thì $x = \frac{7}{7+11} \cdot 5$. Như vậy, mốt của mẫu số liệu đã cho là $M_0 = 50 + \frac{7.5}{7+11} \approx 51,94$. Nếu làm tròn đến hàng đơn vị thì $M_0 \approx 52$ (kg).

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức:

$$M_0 = L_m + \frac{a}{a+b} \cdot h$$

Trong đó: L_m là đầu mút trái của nhóm chứa mốt;

h là độ dài của nhóm chứa mốt;

$a = n_0 - n_1$; $b = n_0 - n_2$ với n_0, n_1, n_2 tương ứng là tần số của nhóm chứa mốt, nhóm liền kề trước và nhóm liền kề sau nhóm chứa mốt.

Lưu ý:

- Nếu nhóm chứa mốt là nhóm đầu tiên thì $n_1 = 0$. Nếu nhóm chứa mốt là nhóm cuối cùng thì $n_2 = 0$.
- Nếu hai nhóm kề nhau đều có cùng tần số lớn nhất thì người ta kết hợp chúng để tạo thành một nhóm và việc tính toán mốt vẫn được thực hiện theo công thức trên.
- Nếu có hai nhóm có cùng tần số lớn nhất, nhưng không liền kề nhau, thì mẫu số liệu có 2 mốt. Mốt thuộc mỗi nhóm được tính toán độc lập và vẫn theo công thức trên.

VÍ DỤ 2

Tìm mốt của mẫu số liệu cho ở Ví dụ 1 (*Bảng 5.28*). Hãy cho biết trong các xe được quan sát, loại xe chạy với tốc độ nào chiếm số lượng nhiều nhất.

Giải

Để tiện theo dõi, ta viết lại ở đây *Bảng 5.28*. Căn cứ vào bảng, ta đã nói rằng nhóm chứa mốt là nhóm [90; 100).

Tốc độ (km/h)	Tần số
[70; 80)	30
[80; 90)	35
[90; 100)	50
[100; 110)	40
[110; 120)	15

Như vậy:

$L_m = 90$; $h = 100 - 90 = 10$.

$n_0 = 50$; $n_1 = 35$; $n_2 = 40$.

$\Rightarrow a = 50 - 35 = 15$; $b = 50 - 40 = 10$.

Áp dụng công thức trên, ta tính được:

$M_0 = 90 + \dfrac{15}{15+10} \cdot 10 = 96.$

Theo kết quả tìm được, ta có thể nói trong số những xe ô tô được quan sát thì loại xe chạy với tốc độ xấp xỉ 96 km/h chiếm số lượng nhiều nhất.

Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Mốt của một mẫu số liệu ghép nhóm cho biết rằng những giá trị xấp xỉ với mốt xuất hiện nhiều nhất trong mẫu. Nó cũng thể hiện xu thế tập trung của mẫu số liệu.

LUYỆN TẬP 2

Xác định mốt của mẫu số liệu cho trong Luyện tập 1 (*Bảng 5.29*). Khoảng cách dài xấp xỉ bao nhiêu km được nhiều khách thuê xe thực hiện nhất?

VẬN DỤNG

Bảng 5.30 do người quản lí một cửa hàng thực phẩm lập được sau khi thống kê lượng hoa quả (đơn vị: kg) bán ra hàng ngày trong một tháng.

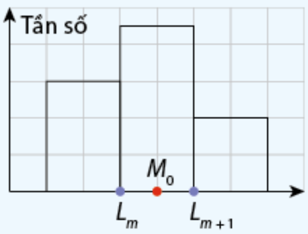
Bảng 5.30

Khối lượng (kg)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)
Số ngày	3	5	5	9	6	2

Xác định số kilôgam hoa quả (làm tròn đến hàng đơn vị) có thể xem là lượng mà nhiều ngày bán được nhất.

EM CÓ BIẾT

Có nhóm chứa mốt không có nghĩa là mẫu số liệu đã cho có mốt (vì có thể trong nhóm chứa mốt có rất nhiều giá trị của mẫu số liệu, nhưng không có giá trị nào có tần số lớn) hoặc nếu có thì cũng chưa hẳn đã thuộc nhóm chứa mốt (có thể giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu lại nằm ở nhóm ghép khác). Mốt tìm được bằng công thức đã cho chỉ là quy ước và giá trị tìm được chỉ là giá trị gần đúng).



Hình 5.4

Vì là quy ước nên người ta còn đưa ra một cách ước tính khác đơn giản hơn. Theo cách ước tính này, nếu nhóm chứa mốt là $[L_m, L_{m+1})$ thì mốt được lấy là đại diện của nhóm đó, nghĩa là $M_0 = \dfrac{L_m + L_{m+1}}{2}$. Như vậy, nếu mẫu số liệu được cho bởi biểu đồ tần số ghép nhóm thì để xác định mốt, ta chỉ việc tìm hoành độ trung điểm cạnh nằm ngang của hình chữ nhật cao nhất (*Hình 5.4*).

BÀI TẬP

5.11. Hãy xác định mốt của mẫu số liệu cho bởi bảng tần số ghép nhóm dưới đây:

Bảng 5.31

Nhóm ghép	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16]
Tần số	3	8	18	11	12	8

5.12. Điều tra quãng đường mà mỗi xe buýt các tuyến nội thành thực hiện vào một ngày làm việc bình thường trong tuần, Trung tâm Quản lí giao thông công cộng lập được *Bảng 5.32*:

Bảng 5.32

Quãng đường (km)	Tần số
[80; 90)	2
[90; 100)	8
[100; 110)	6
[110; 120)	13
[120; 130)	8
[130; 140)	13
[140; 150)	5
[150; 160)	3
[160; 170)	2
	$N = 60$

Nam và Lan cùng phân tích bảng dữ liệu để tìm quãng đường đi phổ biến của các xe buýt. Theo Nam, quãng đường xấp xỉ 116 km là quãng đường được nhiều xe thực hiện nhất. Lan không đồng ý, cho rằng quãng đường dài xấp xỉ 134 km mới là quãng đường được nhiều xe thực hiện nhất. Có hay không điểm bất hợp lí trong ý kiến của mỗi bạn Nam, Lan? Giải thích vì sao.

5.13. *Bảng 5.33* biểu diễn kết quả tìm hiểu về chi tiêu hàng tháng cho nhà ở của công nhân làm việc trong một khu công nghiệp:

Bảng 5.33

Tiền chi tiêu (triệu đồng/tháng)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4]
Tần số	6	10	48	24	12

Mức chi tiêu phổ biến (mức chi của nhiều người nhất) cho nhà ở của các công nhân xấp xỉ bằng bao nhiêu?

BÀI 5

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chúng ta tổ chức thời gian sinh hoạt đã hợp lí chưa?

Mục tiêu: Vận dụng kiến thức thống kê để giải quyết một vấn đề thực tế mà ở đó phải thực hiện các bước của quá trình điều tra: Thu thập dữ liệu; tổ chức và biểu diễn dữ liệu; phân tích xu thế trung tâm của dữ liệu. Từ kết quả nghiên cứu, học sinh có thể tự đặt cho mình câu hỏi về việc tổ chức thời gian sinh hoạt hàng ngày của cá nhân.

Vấn đề đặt ra: Mỗi tuần, em và các bạn thường dành bao nhiêu thời gian cho việc tự học và việc rèn luyện sức khoẻ? Khoảng thời gian tốt nhất dành cho việc tự học và rèn luyện sức khỏe nên là bao nhiêu? Phân bổ thời gian của em cho hai việc này đã hợp lí chưa?

Chuẩn bị:

- Nếu điều kiện cho phép, có thể dùng máy vi tính để trình chiếu;
- Nếu không có máy vi tính hay máy chiếu, chuẩn bị giấy A0 để trình bày báo cáo.

Tổ chức hoạt động: Lớp học được chia thành hai đội, đội Chăm học và đội Sức khoẻ. Đội Chăm học tìm hiểu thời gian mà một số học sinh trung học phổ thông dành cho việc tự học hàng tuần. Đội Sức khoẻ tìm hiểu thời gian mà hàng tuần mỗi học sinh dành cho hoạt động thể thao nâng cao sức khoẻ.

Hoạt động 1: Xác định rõ vấn đề cần giải quyết

Thảo luận trong nội bộ mỗi đội để xác định rõ:

- Vấn đề cần giải quyết (thu thập câu trả lời của một số học sinh về thời gian mà mỗi người dành cho việc tự học hàng tuần đối với đội Chăm học, về thời gian rèn luyện sức khoẻ đối với đội Sức khoẻ);
- Cách tổ chức dữ liệu: Dự kiến phân dữ liệu sẽ thu thập được thành những nhóm ghép nào?
- Nên dùng phương pháp điều tra nào để thu thập dữ liệu?
  Nếu chọn phương án điều tra bằng phiếu hỏi: Soạn phiếu hỏi;
  Nếu chọn phương án phỏng vấn trực tiếp: Lập bảng ghi chép dữ liệu khi phỏng vấn.

Hoạt động 2: Thu thập và tổ chức dữ liệu

- Mỗi đội có thể chia thành các nhóm nhỏ, mỗi nhóm được giao điều tra một lớp trong trường hoặc một số học sinh bậc trung học phổ thông ở địa phương mình sinh sống.
- Có thể sử dụng một hay vài phương pháp khác nhau đã xác định ở trên.
- Các nhóm tiến hành thu thập ngoài giờ lên lớp, sau đó lập một bảng tổng hợp dữ liệu ở dạng bảng tần số ghép nhóm (theo các nhóm ghép đã dự kiến trong Hoạt động 1).
- Sao y bảng tổng hợp của nhóm đủ để chia sẻ thông tin cho các nhóm khác trong cùng đội.

Hoạt động 3: Tổng hợp và phân tích dữ liệu toàn đội thu được

- Mỗi nhóm căn cứ vào kết quả điều tra của tất cả các nhóm trong đội để lập bảng tổng kết số liệu do toàn đội thu được.
- Phân tích mẫu số liệu của toàn đội: Trung bình, trung vị, các tứ phân vị, mốt của mẫu số liệu? Nhận xét về xu thế tập trung của mẫu số liệu.
- Nhận xét về thời gian hàng tuần mà các bạn học sinh dành cho việc học (đối với đội Chăm học) hay việc rèn luyện sức khoẻ (đối với đội Sức khoẻ).

Hoạt động 4: Báo cáo và đưa ra nhận xét

- Mỗi đội cử một nhóm đại diện báo cáo kết quả làm việc của đội.
- Thảo luận lớp: Nhìn chung, thời gian phân bổ cho hai loại hoạt động (tự học và rèn luyện sức khoẻ) của các bạn học sinh được điều tra đã hợp lí chưa?
- Mỗi cá nhân tự đối chiếu thời gian mình dành cho hai hoạt động này xem đã hợp lí hay chưa.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

5.14. Vũ và Tâm đều theo dõi thành tích của các vận động viên nam trong một cuộc thi bơi tự do dài 50 m. Vũ ghi lại thời gian bơi (đơn vị: giây) của mỗi vận động viên, còn Tâm lập bảng phân bố tần số ghép lớp để biểu diễn kết quả.

Bảng 5.34a. Thời gian bơi (giây) do Vũ ghi

29,50	29,74	31,62
32,62	32,84	33,90
27,17	27,87	28,12
28,55	28,60	29,17
24,11	25,63	26,00
26,11	26,27	27,05

Bảng 5.34b. Thời gian bơi do Tâm ghi

Thời gian bơi (giây)	Tần số
[24; 26)	2
[26; 28)	6
[28; 30)	6
[30; 32)	1
[32; 34)	3

a) Với số liệu do Vũ cung cấp, hãy tính thành tích trung bình của các vận động viên.

b) Với bảng tần số ghép nhóm của Tâm thì thành tích trung bình của các vận động viên là bao nhiêu?

c) Giải thích vì sao có sự khác nhau giữa hai kết quả tìm được.

5.15. Một du học sinh ở nước ngoài đã tìm hiểu mức lương của nhân viên thuộc một công ty và thu được *Bảng 5.35* dưới đây. Nếu xét về lương thì có hay không sự bất bình đẳng giữa nam giới và nữ giới làm việc ở công ty này? Giải thích câu trả lời bằng cách dựa vào các tham số đo xu thế trung tâm (trung bình, trung vị, mốt) của mẫu số liệu.

Bảng 5.35

Lương (USD/h)	[4; 12)	[12; 20)	[20; 28)	[28; 36)
Nhân viên nam	12	32	15	2
Nhân viên nữ	13	28	17	1

5.16. Tuổi thọ của lốp xe ô tô được tính theo quãng đường mà lốp được sử dụng cho đến khi bắt đầu xảy ra sự cố về lốp, gọi là "quãng đường lăn bánh". Dưới đây là bảng thống kê quãng đường lăn bánh của một số lốp xe do hãng X sản xuất:

Bảng 5.36

Quãng đường (nghìn km)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]	
Tần số	10	26	52	62	105	35	30	$N = 320$

a) Tính quãng đường lăn bánh trung bình của lốp xe do hãng X sản xuất.

b) Chiếm số lượng nhiều nhất là loại lốp xe có quãng đường lăn bánh xấp xỉ bao nhiêu km?

5.17. Để chuẩn bị cho đồ án tốt nghiệp, một sinh viên y khoa đã khảo sát huyết áp tối đa của một số bệnh nhân và lập được bảng tần số ghép nhóm sau:

Bảng 5.37

Huyết áp	Tần số
[90; 110)	6
[110; 130)	20
[130; 150)	35
[150; 170)	45
[170; 190)	30
[190; 210)	16

a) Xác định trung bình, trung vị và mốt của mẫu số liệu.

b) Hãy giải thích vì sao trong trường hợp này, cả ba giá trị tìm được đều đại diện tốt cho huyết áp của những bệnh nhân được khảo sát.

EM CÓ BIẾT

Huyết áp là một trong những thông số đơn giản nhất để đánh giá tình trạng sức khỏe con người. Có hai chỉ số về huyết áp là huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu.

Huyết áp tối đa cho biết áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp. Con số này thể hiện khả năng bơm máu của tim để cung cấp đến các cơ quan.

5.18. Mai tìm hiểu lượng hàm lượng chất béo (đơn vị: g) có trong 100 g mỗi loại thực phẩm. Sau khi thu thập dữ liệu về 60 loại thực phẩm, Mai lập được bảng thống kê *5.38*.

Bảng 5.38

Hàm lượng chất béo (g)	[2; 6)	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26]
Tần số	2	6	10	13	16	13

a) Xác định trung bình, trung vị, mốt của mẫu số liệu.

b) Từ các giá trị tìm được, hãy phân tích số liệu về hàm lượng chất béo của những loại thực phẩm mà Mai đã tìm hiểu.

5.19. Một công ty giống cây trồng đã cho trồng thử nghiệm hai giống lúa vụ đông xuân ở một số địa phương, với điều kiện thổ nhưỡng và chế độ chăm sóc như nhau. Cuối vụ, công ty tìm hiểu năng suất mỗi giống lúa trên những thửa ruộng đã trồng thí điểm và thu được dữ liệu ở bảng sau:

Bảng 5.39

Năng suất (tạ/ha)		[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)	[65; 70)	[70; 75)
Diện tích (ha)	Giống lúa A	2	5	8	11	6
	Giống lúa B	6	8	13	5	4

Trong vai nhà nghiên cứu, hãy phân tích dữ liệu về năng suất mỗi giống lúa và quyết định nên triển khai trồng đại trà giống lúa nào. Giải thích sự lựa chọn đó.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

5.20. Dưới đây là một mẫu số liệu cho ở dạng bảng tần số ghép nhóm:

Bảng 5.40

Nhóm ghép	Tần số	Nhóm ghép	Tần số
[62,5; 67,5)	4	[82,5; 87,5)	22
[67,5; 72,5)	7	[87,5; 92,5)	5
[72,5; 77,5)	10	[92,5; 97,5)	10
[77,5; 82,5)	26	[97,5; 102,5)	16

Trung vị M_e của mẫu số liệu là một số thoả mãn điều kiện

A. $77,5 \le M_e < 82,5$.

B. $82,5 \le M_e < 87,5$.

C. $87,5 \le M_e < 92,5$.

D. $92,5 \le M_e < 97,5$.

5.21. Dưới đây là một mẫu số liệu cho ở dạng bảng tần số ghép nhóm:

Bảng 5.41

Nhóm ghép	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)	
Tần số	6	8	7	6	2	$N = 29$

Trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

A. $\overline{x} \approx 112,8$.

B. $\overline{x} \approx 107,8$.

C. $\overline{x} \approx 102,5$.

D. $\overline{x} \approx 85,5$.

5.22. Xét mẫu số liệu về lợi nhuận hàng ngày của một cửa hàng trong quãng thời gian 60 ngày.

Bảng 5.42

Lợi nhuận (triệu đồng)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Tần số	5	8	20	18	9
Tần số tích luỹ	5	13	33	51	60

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Q_3 thuộc nhóm [20; 25).

B. Nhóm chứa trung vị là nhóm [15; 20).

C. Q_1 thuộc nhóm [10; 15).

D. Q_1, Q_2 đều thuộc nhóm [15; 20).

SỬ DỤNG PHẦN MỀM GEOGEBRA ĐỂ XÁC ĐỊNH CÁC TỨ PHÂN VỊ

(BÀI ĐỌC THÊM)

Bảng tần số tích luỹ của một mẫu số liệu có thể được biểu diễn bằng đường tần số tích luỹ. Phần mềm GeoGebra sẽ giúp ta vẽ đường tần số tích luỹ và sau đó dùng nó để xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu.

VÍ DỤ

Một trung tâm Anh ngữ thống kê kết quả kiểm tra giữa khoá của học viên qua bảng sau:

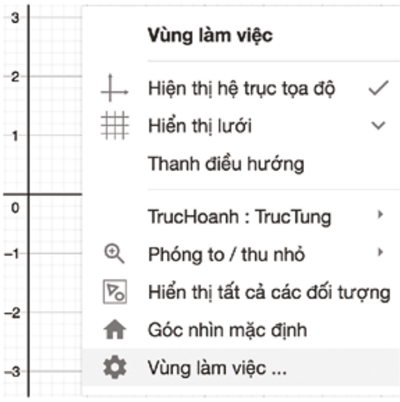
Điểm	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]
Số học sinh	4	7	12	14	9	8	4

Xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

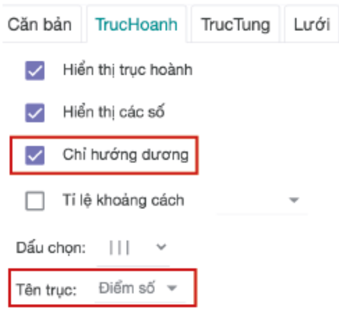
Bước 1 Mở phần mềm và thiết lập bước đầu

Mở phần mềm GeoGebra và vào chế độ Graphing.

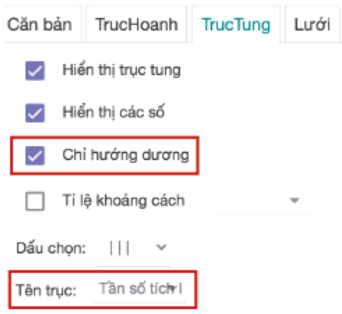
- Để con trỏ vào vùng mặt phẳng toạ độ, nhấp chuột phải, chọn "Vùng làm việc" (*Hình 5.5a*).
- Tại thẻ TrucHoanh, đặt tên trục là "Điểm số" và nhấp chuột trái vào ô "Chỉ hướng dương" (*Hình 5.5b*).
- Tại thẻ TrucTung, đặt tên trục là "Tần số tích luỹ" và nhấp chuột trái vào ô "Chỉ hướng dương" (*Hình 5.5c*).



Hình 5.5a



Hình 5.5b



Hình 5.5c

Bước 2 Vẽ đường tần số tích luỹ

- Vẽ các điểm $A_1(30; 0)$, $A_2(40; 4)$, $A_3(50; 11)$, $A_4(60; 23)$, $A_5(70; 37)$, $A_6(80; 46)$, $A_7(90; 54)$, $A_8(100; 58)$.
  – Vẽ điểm $A_1(30; 0)$: Tại ô Nhập lệnh, nhấn "A_1 ▶ = (30, 0)" rồi nhấn Enter.
  – Thực hiện tương tự để vẽ các điểm $A_2, \ldots, A_8$.

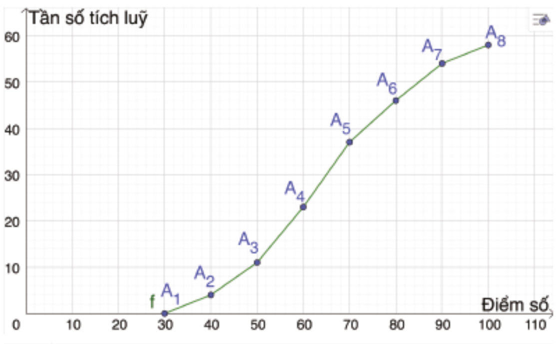
  Lưu ý:

  Hoành độ của các điểm trên (bộ số {30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100} chính là các đầu mút trái và đầu mút phải của các nhóm ghép. Tung độ của điểm đầu tiên (A_1) bằng 0. Tung độ của các điểm tiếp theo lần lượt là tần số tích luỹ của các nhóm ghép, từ nhóm đầu tiên đến nhóm cuối cùng.

- Vẽ đường tần số tích luỹ: Tại ô Nhập lệnh, nhập "LineGraph ({30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}, {0, 4, 11, 23, 37, 46, 54, 58})" (*Hình 5.6a*) rồi nhấn Enter, màn hình sẽ hiện đường tần số tích luỹ (*Hình 5.6b*).

f(x) = LineGraph({30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}, {0, 4, 11, 23, 37, 46, 54, 58})

Hình 5.6a

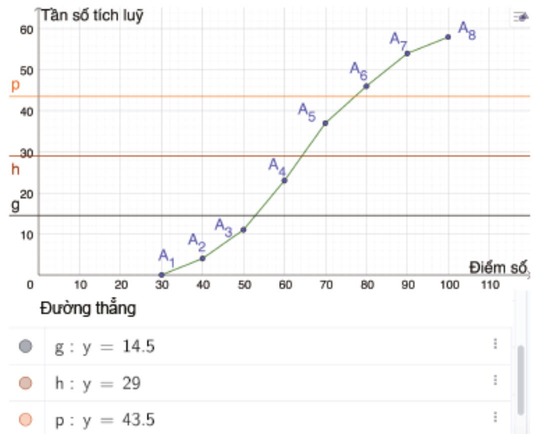


Hình 5.6b

Bước 3 Xác định các tứ phân vị

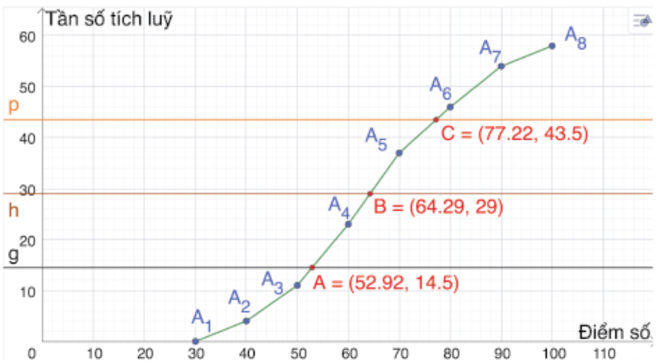
Vì $N = 58$ nên: $\dfrac{N}{4} = 14{,}5$; $\dfrac{N}{2} = 29$; $\dfrac{3N}{4} = 43{,}5$.

- Vẽ ba đường vuông góc với trục tung và lần lượt cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 14,5; 29 và 43,5: Nhập vào ô Nhập lệnh "y = 14.5" rồi nhấn Enter. Tương tự cho hai đường còn lại. Màn hình hiện như ở *Hình 5.7*.

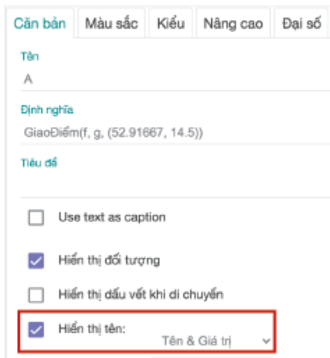


Hình 5.7

- Sử dụng Điểm mới để vẽ điểm cắt của ba đường thẳng $y = 14{,}5$; $y = 29$; $y = 43{,}5$ với đường tần số tích luỹ: Đưa con trỏ chuột lại vị trí giao điểm và nhấp chuột trái. Khi đó ta được ba giao điểm A, B, C (*Hình 5.8*).
- Cho hiển thị toạ độ của ba điểm A, B, C: Nhấp chuột trái vào từng điểm. Tại thẻ Căn bản, chọn kiểu Hiển thị tên "Tên & Giá trị" (*Hình 5.9*).



Hình 5.8



Hình 5.9

- Kết luận các tứ phân vị của mẫu số liệu:
  Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là hoành độ điểm A và xấp xỉ 52,92;
  Tứ phân vị thứ hai Q_2 là hoành độ điểm B và xấp xỉ 64,29;
  Tứ phân vị thứ ba Q_3 là hoành độ điểm C và xấp xỉ 77,22.

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

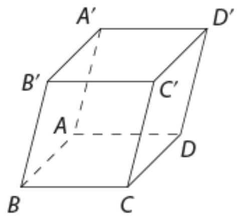
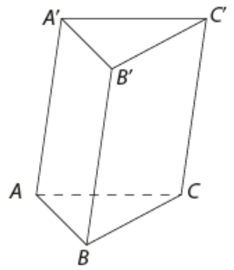
Bảng tần số tích luỹ	129
Cạnh bên của hình chóp	91
Cạnh bên của hình lăng trụ	112
Cạnh đáy của hình chóp	91
Cạnh đáy của hình lăng trụ	112
Cạnh đối diện của tứ diện	92
Cấp số cộng	50
Cấp số nhân	53
Cấp số nhân lùi vô hạn	62
Chu kì	21
Công bội	53
Công sai	50
Cung có số đo 1 radian	3
Dãy số	44
Dãy số bị chặn	48
Dãy số bị chặn dưới	48
Dãy số bị chặn trên	48
Dãy số có giới hạn $-\infty$	63
Dãy số có giới hạn $+\infty$	63
Dãy số có giới hạn hữu hạn	60
Dãy số giảm	47
Dãy số hữu hạn	44
Dãy số tăng	47
Đầu mút trái, đầu mút phải của nhóm	127
Đỉnh hình chóp	91
Đỉnh hình lăng trụ	112
Đồng phẳng	86
Đường chéo của hình hộp	113
Đường thẳng và mặt phẳng song song	101
Đường tròn lượng giác	6
Giá trị đại diện của nhóm	132
Giá trị lượng giác của góc lượng giác	8
Giao tuyến	87
Giới hạn bên phải của hàm số khi $x \to x_0$	67
Giới hạn bên trái của hàm số khi $x \to x_0$	67
Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm	65
Góc có số đo 1 radian	3
Góc lượng giác	2
Hai đỉnh đối diện của hình hộp	113
Hai đường thẳng chéo nhau	95
Hai đường thẳng song song	95
Hai mặt đáy của hình hộp	113
Hai mặt đối diện của hình hộp	113
Hai mặt phẳng song song	106
Hàm số chẵn	20
Hàm số côsin	22
Hàm số côtang	23
Hàm số gián đoạn tại một điểm	75
Hàm số lẻ	20
Hàm số liên tục tại một điểm	75
Hàm số liên tục trên một khoảng	76
Hàm số sin	22
Hàm số tang	23
Hàm số tuần hoàn	21
Hình biểu diễn của một hình không gian	84
Hình chiếu song song của một điểm	115
Hình chóp	91
Hình hộp	113
Hình lăng trụ	112
Hình tứ diện	92
Hình tứ diện đều	92
Không đồng phẳng	86
Mặt bên của hình chóp	91
Mặt bên của hình lăng trụ	112
Mặt đáy hình chóp	91
Mặt phẳng chiếu	115
Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm	143
Nhóm chứa mốt	142
Nhóm chứa trung vị	135
Nhóm chứa Q_i	139
Phép chiếu song song	115
Phương chiếu	115

Số đo của góc lượng giác	5
Tần số của nhóm ghép	127
Tần số tích luỹ của nhóm	129
Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	62
Trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm	132
Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm	137
Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	139

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Cạnh bên của hình chóp	Là các cạnh $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ trong hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$.
Cạnh bên của hình lăng trụ	Là các cạnh $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$ của hình lăng trụ $A_1A_2\ldots A_n.A_1'A_2'\ldots A_n'$.
Cạnh đáy của hình chóp	Là các cạnh của mặt đáy hình chóp.
Cạnh đáy của hình lăng trụ	Là các cạnh đáy của hai mặt đáy hình lăng trụ.
Cạnh đối diện của tứ diện	Là các cặp cạnh: *AB* và *CD*, *BC* và *AD*, *AC* và *BD* của tứ diện *ABCD*.
Cấp số nhân lùi vô hạn	Là cấp số nhân có công bội q thỏa mãn $\lvert q \rvert < 1$.
Chu kì	Là số dương T nhỏ nhất thoả mãn $f(x + T) = f(x)$.
Cung có số đo 1 radian	Là cung có độ dài bằng bán kính trên đường tròn tuỳ ý.
Dãy số	Dãy số (u_n) là một hàm số f có miền xác định là tập hợp các số nguyên dương, trong đó $u_n = f(n)$.
Dãy số bị chặn	Nếu tồn tại số thực m, M sao cho $m \le u_n \le M$, với mọi số nguyên dương n.
Dãy số bị chặn dưới	Nếu tồn tại số thực m sao cho $u_n \ge m$, với mọi số nguyên dương n.
Dãy số bị chặn trên	Nếu tồn tại số thực M sao cho $u_n \le M$, với mọi số nguyên dương n.
Dãy số có giới hạn hữu hạn	Là dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n \to L$ khi $n \to +\infty$.
Dãy số giảm	Là dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n > u_{n+1}$, với mọi số nguyên dương n.
Dãy số hữu hạn	Là một hàm số f có miền xác định là $\{n$ nguyên $/ 1 \le n \le m\}$, trong đó m là một số nguyên dương.
Dãy số tăng	Là dãy số (u_n) thoả mãn $u_n < u_{n+1}$, với mọi số nguyên dương n.
Đỉnh hình chóp	Là điểm S trong hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$.
Đỉnh hình lăng trụ	Là các đỉnh của hai mặt đáy hình lăng trụ.
Đồng phẳng	Các điểm đồng phẳng là các điểm cùng nằm trên một mặt phẳng.
Đường chéo của hình hộp	Là đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện hình hộp.
Đường thẳng và mặt phẳng song song	Là đường thẳng và mặt phẳng trong không gian không có điểm chung.
Đường tròn lượng giác	Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, đường tròn định hướng tâm *O* bán kính $R = 1$ nhận $A(1; 0)$ làm điểm gốc được gọi là đường tròn lượng giác.
Giá trị lượng giác của góc lượng giác	Các giá trị $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ là các giá trị lượng giác của góc lượng giác α.
Giao tuyến	Giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt là đường thẳng duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Giới hạn bên phải của hàm số khi $x \to x_0$	Nếu $f(x_n) \to L$ khi $x_n \to x_0$, với mọi dãy số (x_n) thuộc miền xác định của hàm số và $x_n > x_0$.
Giới hạn bên trái của hàm số khi $x \to x_0$	Nếu $f(x_n) \to L$ khi $x_n \to x_0$, với mọi dãy số (x_n) thuộc miền xác định của hàm số và $x_n < x_0$.
Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm	Nếu $f(x_n) \to L$ khi $x_n \to x_0$, với mọi dãy số (x_n) thuộc miền xác định của hàm số.
Góc có số đo 1 radian	Góc ở tâm chắn cung có số đo 1 radian được gọi là góc có số đo 1 radian.
Góc lượng giác	Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A và B. Một điểm M di động trên đường tròn định hướng luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ A đến B. Tia OM quay xung quanh gốc O từ tia OA đến tia OB tạo ra một góc lượng giác có tia đầu là OA và tia cuối là OB.
Hai đỉnh đối diện của hình hộp	Là hai đỉnh của hình hộp không cùng nằm trên một mặt nào.
Hai đường thẳng chéo nhau	Hai đường thẳng a và b gọi là chéo nhau nếu không có mặt phẳng nào chứa cả hai đường thẳng này.
Hai đường thẳng song song	Là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
Hai mặt đối diện của hình hộp	Là cặp mặt bên hoặc mặt đáy song song nhau.
Hai mặt phẳng song song	Là hai mặt phẳng không có điểm chung.
Hai mặt đáy của hình lăng trụ	Là hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1'A_2'...A_n'$ của hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.
Hai đỉnh đối diện của hình hộp	Là cặp mặt bên hoặc mặt đáy song song nhau.
Hàm số chẵn	Là hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D thoả mãn với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
Hàm số côsin	Là hàm số cho tương ứng một và chỉ một giá trị $\cos x$ với mỗi số thực x.
Hàm số côtang	Là hàm số cho tương ứng một và chỉ một giá trị $\cot x$ với mỗi số thực $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Hàm số liên tục tại một điểm	Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K chứa x_0. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Hàm số gián đoạn tại một điểm	Là hàm số không liên tục tại điểm đó.
Hàm số lẻ	Là hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D thoả mãn với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
Hàm số liên tục trên một khoảng	Là hàm số liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
Hàm số sin	Là hàm số cho tương ứng một và chỉ một giá trị $\sin x$ với mỗi số thực x.
Hàm số tang	Là hàm số cho tương ứng một và chỉ một giá trị $\tan x$ với mỗi số thực $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số tuần hoàn	Là hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D thoả mãn tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$, ta có: $x + T \in D$ và $x - T \in D$; $f(x + T) = f(x)$.
Hình biểu diễn của một hình không gian	Là hình chiếu song song của hình không gian trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
Hình chiếu song song của một điểm	Điểm M' gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ nếu đường thẳng d qua M và song song với Δ cắt (α) tại M'.
Hình chóp	Hình gồm đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1 với S là điểm nằm ngoài mặt phẳng $(A_1A_2\ldots A_n)$.
Hình hộp	
Hình lăng trụ	
Hình tứ diện	Hình gồm bốn tam giác ABC, BCD, ABD, ACD có được từ bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D.
Hình tứ diện đều	Là hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều.
Không đồng phẳng	Các điểm không đồng phẳng khi không tồn tại một mặt phẳng nào chứa tất cả các điểm đó.
Mặt bên của hình chóp	Là các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1 trong hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$.
Mặt bên của hình lăng trụ	Là các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3$,..., $A_nA_n'A_1'A_1$ của hình lăng trụ $A_1A_2\ldots A_n.A_1'A_2'\ldots A_n'$.
Mặt đáy hình chóp	Là đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ trong hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$.
Mặt phẳng chiếu	Là mặt phẳng (α) trong phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương Δ.
Phép chiếu song song	Là phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu song song M' của nó trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.
Phương chiếu	Là đường thẳng Δ trong phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương Δ.
Số đo của góc lượng giác	Số đo của góc lượng giác (OA, OB), kí hiệu sđ(OA, OB), là số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ tương ứng.
Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	$S = u_1 + u_2 + \ldots = \dfrac{u_1}{1-q}$, trong đó u_n là một cấp số nhân có công bội q thoả mãn $\lvert q \rvert < 1$.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ
Số 07 đường Hà Nội, phường Vĩnh Ninh, thành phố Huế
Điện thoại: 0234.3834486
Email: nxbdhhue@hue.uni.edu.vn - Website: htth://huph.hueuni.edu.vn

---

TOÁN 11_Tập 1

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng chủ biên)
TRẦN ANH DŨNG (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ CHÂN ĐỨC, NGÔ MINH ĐỨC
PHẠM DUY KHÁNH, HỒ LỘC THUẬN

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: TRẦN BÌNH TUYÊN

Chịu trách nhiệm nội dung:
Quyền Tổng biên tập: NGUYỄN CHÍ BẢO

Biên tập:
TRƯƠNG THỊ MỸ VÂN

Trình bày bìa, minh hoạ:
NGUYỄN DIỄM QUỲNH

Trình bày sách, sửa bản in:
NGUYỄN ĐỖ MINH QUÂN, TRỊNH THÁI PHƯỢNG
TRẦN NGỌC BẢO KIM, LẠI THỊ KIỀU VI, ĐÀM HUỲNH PHƯƠNG THẢO
NGUYỄN ĐOAN TRANG, NGUYỄN VĂN VĨNH
NGUYỄN VŨ KHÁNH LINH, TRẦN THỊ THU NGUYỆT

Liên kết xuất bản:
Công ty TNHH Education Solutions Việt Nam
Tầng 1, Toà nhà Vietphone Building
Số 64 Nguyễn Đình Chiểu, Phường Đa Kao, Quận 1, Tp.HCM
