CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG
LÊ VĂN HIỆN – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài tập TOÁN 11

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

Bài tập
TOÁN 11

TẬP HAI

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG THỊ THANH – LƯU THẾ SƠN
Thiết kế sách: HOÀNG ANH TUẤN
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: PHAN THỊ THANH BÌNH – PHẠM THỊ TÌNH – TẠ THỊ HƯỜNG
Chế bản: CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

BÀI TẬP TOÁN 11 - Tập hai

Mã số: G1BHYT002H23

In .... bản (QĐ ....), khổ 17 x 24cm.
Đơn vị in .... địa chỉ ....
Cơ sở in .... địa chỉ ....
Số ĐKXB: 8-2023/CXBIPH/30-2097/GD
Số QĐXB: .... /QĐ-GD ngày ... tháng ... năm 2023
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 2023
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-34973-6
Tập hai: 978-604-0-34974-3

MỤC LỤC

CHƯƠNG VI
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

BÀI 18

LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A – Kiến thức cần nhớ

1. Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

Với a là số thực tuỳ ý:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ thừa số}}.$$

Với a là số thực khác 0:

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Trong biểu thức a^m, a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

2. Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Luỹ thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$$a^\alpha = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n}.$$

Chú ý. Luỹ thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. (*Tính toán biểu thức số*) Thực hiện phép tính sau:

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 36^{0,5} + \left(\sqrt{2}\right)^{0}.$$

Giải

Ta tính lần lượt các luỹ thừa như sau:

$27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9;$ $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = \left(2^{-4}\right)^{-0,75} = 2^3 = 8;$

$36^{0,5} = \left(6^2\right)^{0,5} = 6;$ $\left(\sqrt{2}\right)^{0} = 1.$

Do đó $A = 9 + 8 - 6 + 1 = 12$.

Ví dụ 2. (*Rút gọn biểu thức*) Cho *a* và *b* là hai số dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{a^{\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{2}}}{b^{-1}}.$$

Giải

Ta có: $\left(\frac{a^{\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} = \frac{\left(a^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}+1}}{\left(b^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}} = \frac{a^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}{b}.$

Thay vào biểu thức *A*, ta được:

$$A = \frac{a^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}{b} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{2}}}{b^{-1}} = a^{2+\sqrt{2}} \cdot a^{-1-\sqrt{2}} = a^{(2+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})} = a.$$

Vậy $A = a$.

Ví dụ 3. (*Vận dụng thực tiễn*) Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$,

trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển,

a là một hằng số dương,

d là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét).

a) Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tìm giá trị của hằng số *a*.

b) Tại độ sâu 15 m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Giải

a) Từ giả thiết, ta có $d = 1$ và $I = \dfrac{95}{100} I_0$.

Thay vào biểu thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được: $a^d = \dfrac{I}{I_0} = \dfrac{95}{100}$.

Mà $d = 1$ nên $a = \dfrac{95}{100} = \dfrac{19}{20}$. Vậy $a = \dfrac{19}{20}$.

b) Từ giả thiết, ta có $d = 15$.

Thay $d = 15$ và $a = \dfrac{19}{20}$ vào công thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được:

$$\frac{I}{I_0} = a^d = \left(\frac{19}{20}\right)^{15} \approx 0,46.$$

Như vậy, tại độ sâu 15 m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng khoảng 46% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.

C – Bài tập

6.1. Tính:

a) $\sqrt[3]{-27}$;   b) $25^{\frac{3}{2}}$;   c) $32^{-\frac{2}{5}}$;   d) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

6.2. So sánh cơ số a $(a > 0)$ với 1, biết rằng:

a) $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$;   b) $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$.

6.3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{20}}$;   b) $6\sqrt[3]{9x^2} \cdot 3\sqrt[3]{24x}$.

6.4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{48}$;   b) $8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3}$ $(x > 0, y > 0)$.

6.5. Cho a là số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{24}}$;   b) $a^{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

c) $a^{-\sqrt{3}} : a^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$;   d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$.

6.6. Cho a và b là hai số dương, $a \neq b$. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right).$$

6.7. Giả sử một lọ nuôi cấy có 100 con vi khuẩn lúc ban đầu và số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi sau mỗi 2 giờ. Khi đó số vi khuẩn N sau t (giờ) sẽ là $N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ (con). Hỏi sau $3\frac{1}{2}$ giờ sẽ có bao nhiêu con vi khuẩn?

6.8. Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài L (tính bằng mét) được cho bởi $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$. Nếu một con lắc có chiều dài 19,6 m, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

6.9. Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính p theo d.

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

6.10. Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo *Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008*).

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hoả là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

(*Kết quả của câu a và câu b tính theo đơn vị triệu dặm và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

BÀI 19

LÔGARIT

A – Kiến thức cần nhớ

1. Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^{\alpha} = M$ được gọi là lôgarit cơ số a của M và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha = \log_a M \Leftrightarrow a^{\alpha} = M.$$

Chú ý. Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

2. Tính chất của lôgarit

– Với $0 < a \neq 1, M > 0$ và α là số thực tuỳ ý, ta có:

$$\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1;\ a^{\log_a M} = M;\ \log_a a^{\alpha} = \alpha.$$

– Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý. Khi đó:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^{\alpha} = \alpha\log_a M.$$

– Với các cơ số lôgarit a và b bất kì $(0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$ và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

3. Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là lôgarit thập phân của M, kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$.

Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M, kí hiệu là $\ln M$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. (*Rút gọn biểu thức*) Cho a là một số thực dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{3}} a^2 + \log_9 \frac{1}{a}.$$

Giải

Áp dụng công thức đổi cơ số, ta đưa các biểu thức lôgarit về lôgarit cơ số 3 như sau:

$$\log_{\frac{1}{3}} a = \frac{\log_3 a}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{-1}} = \frac{\log_3 a}{-1} = -\log_3 a;$$

$$\log_{\sqrt{3}} a^2 = 2\log_{\sqrt{3}} a = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 \sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\frac{1}{2}} = 4\log_3 a;$$

$$\log_9 \frac{1}{a} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 3^2} = -\frac{\log_3 a}{2}.$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức A, ta được:

$$A = -\log_3 a - 4\log_3 a - \frac{\log_3 a}{2} = -\frac{11}{2}\log_3 a.$$

Vậy $A = -\frac{11}{2}\log_3 a$.

Ví dụ 2. (*Tính toán biểu thức số*) Tính $\log_{25} 32$ theo $a = \log_2 5$.

Giải

Ta thực hiện biến đổi như sau:

$$\log_{25} 32 = \log_{25} 2^5 = 5 \cdot \log_{25} 2 = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{\log_5 25} = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{2} = \frac{5}{2}\log_5 2.$$

Mặt khác ta lại có: $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$, do đó $\log_{25} 32 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 5} = \frac{5}{2a}$.

Vậy $\log_{25} 32 = \frac{5}{2a}$.

Ví dụ 3. (*Vận dụng thực tiễn*) Trong Hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H}^+\right]$, trong đó $\left[\mathrm{H}^+\right]$ là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Nếu pH < 7 thì dung dịch có tính acid, nếu pH > 7 thì dung dịch có tính base và nếu pH = 7 thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,001 mol/l.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 8.

c) Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch thay đổi thế nào?

Giải

a) Thay $[H^+] = 0,001$ vào công thức, ta được $pH = -\log[H^+] = -\log 0,001 = 3$.

Vậy độ pH của dung dịch bằng 3.

b) Thay $pH = 8$ vào công thức, ta được $8 = -\log[H^+]$, do đó $[H^+] = 10^{-8}$ mol/l.

Vậy nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-8}$.

c) Thay vào công thức ta thấy khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen giảm đi 10 lần.

C – Bài tập

6.11. Tính:

a) $\log_2 \frac{1}{64}$; b) $\log 1\,000$; c) $\log_5 1\,250 - \log_5 10$; d) $4^{\log_2 3}$.

6.12. Chứng minh rằng:

a) $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0$;

b) $\ln\left(1 + e^{2x}\right) = 2x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.

6.13. Biết $\log_2 3 \approx 1,585$. Hãy tính:

a) $\log_2 48$; b) $\log_4 27$.

6.14. Đặt $a = \log_3 5, b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 10$ theo a và b.

6.15. Tìm $\log_{49} 32$, biết $\log_2 14 = a$.

6.16. So sánh các số sau:

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$; b) $2^{\log_6 3}$ và $3^{\log_6 \frac{1}{2}}$.

6.17. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[\log N] + 1$, ở đó $[\log N]$ là phần nguyên của số thực dương $\log N$. Tìm số các chữ số của $2^{2\,023}$ khi viết trong hệ thập phân.

6.18. Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lãi kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì gửi là $A = P(1 + r)^t$ (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

6.19. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

6.20. Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ số dùng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay 0,2 mg/ml, nghĩa là có 0,02 g cồn trong 100 ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 1,4 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02% là 1,4. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hoá bằng một phương trình có dạng

$$R = e^{kx},$$

trong đó x (%) là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số.

a) Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số k trong phương trình.

b) Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17%?

c) Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.

d) Giả sử nếu một người có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

BÀI 20

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A – Kiến thức cần nhớ

1. Cho a là số thực dương khác 1.

Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

2. Hàm số mũ $y = a^x$:

– Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$;

– Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;

– Liên tục trên $\mathbb{R}$;

– Có đồ thị đi qua các điểm $(0; 1), (1; a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.

3. Cho a là số thực dương khác 1.

Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

4. Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

– Có tập xác định là $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;

– Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0 < a < 1$;

– Liên tục trên $(0;+\infty)$;

– Có đồ thị đi qua các điểm $(1; 0), (a; 1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.

B – Ví dụ

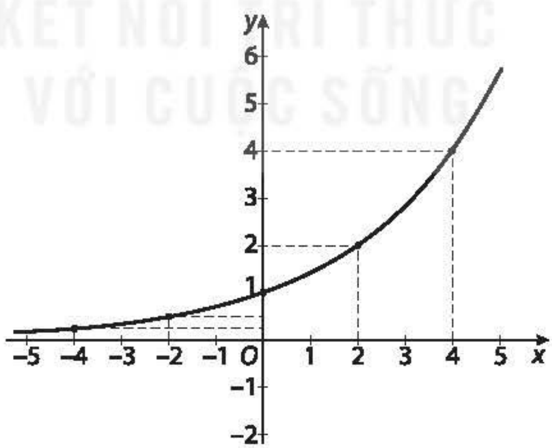
Ví dụ 1. (*Vẽ đồ thị hàm số mũ*) Vẽ đồ thị của hàm số mũ $y = (\sqrt{2})^x$.

Giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = (\sqrt{2})^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = (\sqrt{2})^x$ như hình sau:



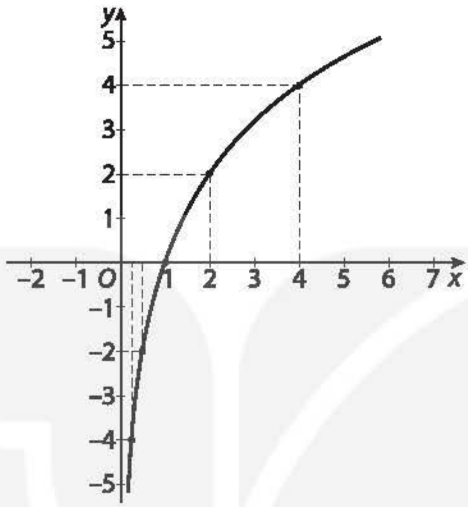
Ví dụ 2. (*Vẽ đồ thị hàm số lôgarit*) Vẽ đồ thị của hàm số lôgarit $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

Giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_{\sqrt{2}} x$	-4	-2	0	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x$ như hình dưới đây.



Ví dụ 3. (*Vận dụng thực tiễn*) Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

trong đó m_0 là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm ban đầu $t = 0$, $m(t)$ là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (là thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết rằng đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã khoảng 9 giờ. Từ khối lượng plutonium-234 ban đầu là 100 g, hãy tính khối lượng plutonium-234 còn lại sau:

a) 9 giờ; b) 1 ngày.

(*Kết quả tính theo gam và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

Giải

a) Thay $t = 9, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{9}{9}} = 100\cdot\frac{1}{2} = 50 \text{ (g)}.$$

b) Do 1 ngày = 24 giờ nên thay $t = 24, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{9}} \approx 15,75 \text{ (g)}.$$

C – Bài tập

6.21. Vẽ đồ thị của các hàm số mũ sau:

a) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$; b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

6.22. Vẽ đồ thị của các hàm số lôgarit sau:

a) $\log_{\sqrt{3}} x$; b) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

6.23. Cho hàm số mũ $f(x) = a^x \ (a > 0)$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = a$;

b) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$;

c) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

6.24. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(x+1)$; b) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x - 1|$.

6.25. Cho hàm số lôgarit $f(x) = \log_a x \ (0 < a \neq 1)$. Chứng minh rằng:

a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$; b) $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$.

6.26. Ta định nghĩa các hàm sin hyperbolic và hàm côsin hyperbolic như sau:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right); \ \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Chứng minh rằng:

a) $\sinh x$ là hàm số lẻ;

b) $\cosh x$ là hàm số chẵn;

c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ với mọi x.

6.27. Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng p truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số sau:

$$p(n) = 100 \cdot (0,97)^n.$$

a) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?

b) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính?

(*Kết quả ở câu a và câu b được làm tròn đến hàng đơn vị*).

6.28. Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:

a) hằng quý;

b) hằng tháng;

c) liên tục.

(*Kết quả được tính theo đơn vị triệu đồng và làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba*).

6.29. Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1 600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1\,600}}.$$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

b) Sau 2 500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

6.30. Trong Vật lí, mức cường độ âm (tính bằng deciben, kí hiệu là dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 là cường độ âm chuẩn, tức là cường độ âm thấp nhất mà tai người có thể nghe được.

a) Tính mức cường độ âm của một cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm là 10^{-7} W/m^2.

b) Khi cường độ âm tăng lên 1 000 lần thì mức cường độ âm (đại lượng đặc trưng cho độ to nhỏ của âm) thay đổi thế nào?

BÀI 21

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A – Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ (với $0 < a \neq 1$).

– Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

– Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ $(0 < a \neq 1)$.

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

3. Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $0 < a \neq 1$.

Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:

– Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

– Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

4. Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $0 < a \neq 1$.

Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:

– Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.

– Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. (*Giải phương trình mũ, lôgarit*) Giải các phương trình sau:

a) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 3$;

b) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$.

Giải

a) Ta có: $2^{2x-1}+4^{x+1}=3 \Leftrightarrow \dfrac{4^x}{2}+4\cdot 4^x=3 \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}\cdot 4^x=3 \Leftrightarrow 4^x=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x=\log_4\dfrac{2}{3}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\log_4\dfrac{2}{3}$.

b) Điều kiện: $x+6>0$ và $x+2>0$, tức là $x>-2$. Ta có:

$$\log_5(x+6)+\log_5(x+2)=1$$
$$\Leftrightarrow \log_5\left[(x+6)(x+2)\right]=1$$
$$\Leftrightarrow x^2+8x+12=5$$
$$\Leftrightarrow x^2+8x+7=0.$$

Giải phương trình bậc hai này ta được hai nghiệm $x=-1, x=-7$. Chỉ có nghiệm $x=-1$ thoả mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-1$.

Ví dụ 2. (*Giải bất phương trình mũ, lôgarit*) Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{x^2-x}\le 9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$;

b) $\log_{0,5}(x-3)+\log_{0,5}(x-2)\ge -1$.

Giải

a) $3^{x^2-x}\le 9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

Bất phương trình đã cho có thể viết ở dạng: $3^{x^2-x}\le 3^{2-x}$.

Vì cơ số $3>1$ nên bất phương trình trở thành $x^2-x\le 2-x$, hay $x^2\le 2$.

Giải bất phương trình này, ta được $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

b) $\log_{0,5}(x-3)+\log_{0,5}(x-2)\ge -1$.

Điều kiện: $x>3$.

Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{0,5}\left[(x-3)(x-2)\right]\ge\log_{0,5}2.$$

Vì cơ số 0,5 < 1 nên bất phương trình trở thành $(x-3)(x-2) \le 2$, hay $x^2 - 5x + 4 \le 0$.

Giải bất phương trình bậc hai này, ta được $1 \le x \le 4$. Kết hợp với điều kiện, ta được $3 < x \le 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là (3; 4].

Ví dụ 3. (*Vận dụng thực tiễn*) Dân số thế giới năm 2020 là khoảng 7,79 tỉ người và tăng với tốc độ khoảng 1,05% mỗi năm (theo *danso.org*). Giả sử tốc độ tăng này không đổi. Khi đó mô hình $P(t) = 7{,}79 \cdot (1{,}0105)^{t-2\,020}$ có thể dùng để ước tính dân số thế giới (theo đơn vị tỉ người) vào năm *t*.

a) Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người?

b) Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 10 tỉ người?

Giải

a) Dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người khi *t* thoả mãn phương trình:

$$7{,}79 \cdot (1{,}0105)^{t-2\,020} = 8{,}5$$

$$\Leftrightarrow 1{,}0105^{t-2\,020} = \frac{8{,}5}{7{,}79}$$

$$\Leftrightarrow t - 2020 = \log_{1{,}0105} \frac{8{,}5}{7{,}79}$$

$$\Leftrightarrow t = 2\,020 + \log_{1{,}0105} \frac{8{,}5}{7{,}79} \approx 2\,028{,}35.$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2029 dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người.

b) Dân số thế giới là 10 tỉ người khi *t* thoả mãn phương trình:

$$7{,}79 \cdot (1{,}0105)^{t-2\,020} = 10$$

$$\Leftrightarrow (1{,}0105)^{t-2\,020} = \frac{10}{7{,}79}$$

$$\Leftrightarrow t - 2020 = \log_{1{,}0105} \frac{10}{7{,}79}$$

$$\Leftrightarrow t = 2\,020 + \log_{1{,}0105} \frac{10}{7{,}79} \approx 2\,043{,}91.$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2044 dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

C – Bài tập

6.31. Giải các phương trình mũ sau:

a) $4^{2x-1} = 8^{x+3}$;

b) $9^{2x} \cdot 27^{x^2} = \frac{1}{3}$;

c) $(e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12}$;

d) $5^{2x-1} = 20$.

6.32. Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3(4x-1) = 2$;

b) $\log_2(x^2-1) = \log_2(3x+3)$;

c) $\log_x 81 = 2$;

d) $\log_2 8^x = -3$.

6.33. Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $2^{2x-3} > \frac{1}{4}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-6}$;

c) $25^x \leq 5^{4x-3}$;

d) $9^x - 3^x - 6 \leq 0$.

6.34. Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3(2x+1) \geq 2$;

b) $\log_2(3x-1) < \log_2(9-2x)$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x-5)$;

d) $\log_2(2x-1) \leq \log_4(x+1)^2$.

6.35. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3^x - 9}$;

b) $y = \ln(4-x^2)$;

c) $y = \log\frac{1}{5-x}$;

d) $y = \frac{2}{\log_4(x-1)}$.

6.36. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thuỷ ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

a) Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển 320 mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.

b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển 667 mmHg. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

6.37. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?

b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng?

(*Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm*).

6.38. Giả sử tổng chi phí hoạt động (đơn vị tỉ đồng) trong một năm của một công ty được tính bằng công thức $C(t) = 90 - 50e^{-t}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi công ty được thành lập. Tính chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

6.39. Nhắc lại rằng độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H}^+\right]$, ở đó $\left[\mathrm{H}^+\right]$ là nồng độ ion hydrogen của dung dịch tính bằng mol/lít. Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45. Hỏi nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn nào?

6.40. Nhắc lại rằng mức cường độ âm (đo bằng dB) được tính bởi công thức $L = 10\log\frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

a) Tính cường độ âm của âm thanh tàu điện ngầm có mức cường độ âm là 100 dB.

b) Âm thanh trên một tuyến đường giao thông có mức cường độ âm thay đổi từ 70 dB đến 85 dB. Hỏi cường độ âm thay đổi trong đoạn nào?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A – Trắc nghiệm

6.41. Cho a là số dương. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}$, ta được kết quả là

A. a. B. a^2. C. $a^{\frac{1}{3}}$. D. $a^{\frac{1}{2}}$.

6.42. Cho a là số dương khác 1. Giá trị của $\log_{a^3} a^2$ là

A. $\dfrac{2}{3}$. B. $\dfrac{3}{2}$. C. $-\dfrac{2}{3}$. D. $-\dfrac{3}{2}$.

6.43. Giá trị của biểu thức $4^{\log_{\sqrt{2}} 3}$ là

A. $\dfrac{1}{3}$. B. 3. C. 81. D. 9.

6.44. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến?

A. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$. C. $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$. D. $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$.

6.45. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến?

A. $y = \log_{\sqrt{2}} x$. B. $y = \log x$. C. $y = \ln x$. D. $y = \log_{\frac{e}{3}} x$.

6.46. Với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 1$?

A. $x > 0$. B. $x < 0$. C. $x > 1$. D. $x < 1$.

6.47. Với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$ nằm phía trên trục hoành?

A. $x > 0,5$. B. $x < 0,5$. C. $x > 1$. D. $x < 1$.

6.48. Tập nghiệm của phương trình $8^{2x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là

A. $\left\{\frac{3}{8}\right\}$. B. $\left\{\frac{2}{5}\right\}$. C. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$. D. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

6.49. Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left[x(x-1)\right] = 1$ là

A. $\{-1\}$. B. $\{-2\}$.

C. $\{-1; 2\}$. D. $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6.50. Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2$ là

A. $x \geq 2$. B. $x \leq 2$. C. $x \geq 4$. D. $x \leq 4$.

6.51. Nghiệm của bất phương trình $\log 2(x+1) > 1$ là

A. $x > 4$. B. $-1 < x < 4$. C. $x > -\frac{1}{2}$. D. $x > \frac{e}{2} - 1$.

6.52. Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

A. $m = 1$. B. $m > 1$ hoặc $m < -1$.

C. $m < 1$. D. $-1 < m < 1$.

B – Tự luận

6.53. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 2\log_4 8 - 3\log_{\frac{1}{8}} 16 + 4^{\log_2 3}.$$

6.54. Giải các phương trình sau:

a) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

b) $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$.

6.55. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq 4 \cdot 2^x$;

b) $2\log(x-1) > \log(3-x) + 1$.

6.56. a) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Chứng minh rằng hai đồ thị trên đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$, tức là nếu điểm M nằm trên một đồ thị thì điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$ sẽ nằm trên đồ thị còn lại.

6.57. Cho hàm số $f(x) = \log_3 (2x+1) - 2$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính $f(40)$. Xác định điểm tương ứng trên đồ thị hàm số.

c) Tìm x sao cho $f(x) = 3$. Xác định điểm tương ứng trên đồ thị hàm số.

d) Tìm giao điểm của đồ thị với trục hoành.

6.58. Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình hằng năm là 4% thì chi phí C cho việc mua một loại hàng hoá hoặc sử dụng một dịch vụ nào đó sẽ được mô hình hoá bằng công thức:

$$C(t) = P(1+0,04)^t,$$

trong đó t là thời gian (tính bằng năm) kể từ thời điểm hiện tại và P là chi phí hiện tại cho hàng hoá hoặc dịch vụ đó.

Giả sử hiện tại chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô là 800 nghìn đồng. Hãy ước tính chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô sau 5 năm nữa (kết quả tính theo đơn vị nghìn đồng và làm tròn đến hàng đơn vị).

6.59. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu m_0 được cho bởi công thức:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kì bán rã của chất đó. Biết rằng chất phóng xạ polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Từ khối lượng polonium-210 ban đầu 100 g, sau bao lâu khối lượng còn lại là:

a) 50 g? b) 10 g?

(*Kết quả tính theo ngày và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

6.60. Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1 200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b là

$$n = 1\,200 \cdot \log_2 \frac{a}{b}.$$

(*Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008*)

a) Tìm khoảng thời gian tính bằng cent khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz.

b) Giả sử khoảng thời gian là 55 cent và tần số đầu là 225 Hz, hãy tìm tần số cuối cùng.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG VII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 22

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A – Kiến thức cần nhớ

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian, lấy điểm O tuỳ ý. Qua O kẻ $a' \parallel a$ (hoặc trùng với a) và kẻ $b' \parallel b$ (hoặc trùng với b). Khi đó, góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b bằng góc giữa đường thẳng a' và đường thẳng b'.

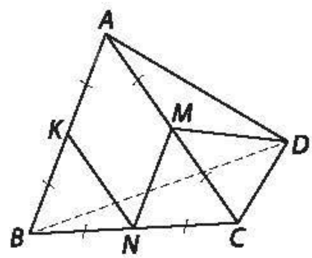
2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa a và b bằng 90°. Kí hiệu: $a \perp b$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC và AB. Tính góc giữa đường thẳng MN và BD; góc giữa đường thẳng KN và MD.

Giải. (H.7.1)



Hình 7.1

Vì $MN \parallel AB$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BD, mà tam giác ABD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AB và BD bằng 60°.

Do đó $(MN, BD) = (AB, BD) = 60^\circ$.

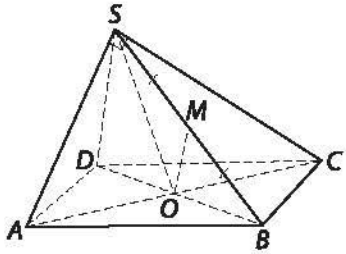
Vì $NK \parallel AC$ nên góc giữa hai đường thẳng NK và MD bằng góc giữa hai đường thẳng AC và MD, mà tam giác ACD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AC và MD bằng 90°.

Do đó $(NK, MD) = (AC, MD) = 90^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và tam giác SAC vuông tại S. Gọi M là trung điểm của cạnh SB. Chứng minh rằng đường thẳng OM vuông góc với đường thẳng SB.

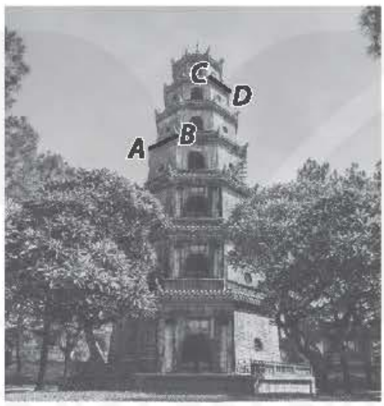
Giải. (H.7.2)

Ta có tam giác SAC vuông tại S và O là trung điểm của AC nên $SO = \frac{1}{2}AC$. Ta lại có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$, suy ra $SO = \frac{1}{2}BD$, mà O là trung điểm của BD nên tam giác SBD vuông tại S hay $SD \perp SB$. Vì $OM \parallel SD$ và $SD \perp SB$ nên $OM \perp SB$.



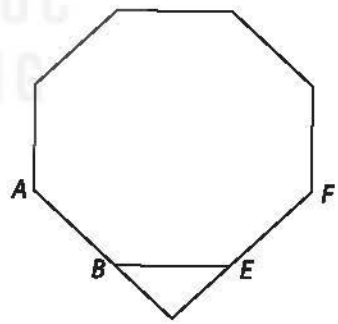
Hình 7.2

Ví dụ 3. Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh AB và CD được thể hiện trên hình sau:



Giải. (H.7.3)

Ta có: $CD \parallel EF$ nên $(AB, CD) = (AB, EF)$, với AB, EF là hai cạnh của một hình bát giác đều. Góc ngoài của một bát giác đều bằng $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ nên $(AB, EF) = 90^\circ$, suy ra $(AB, CD) = 90^\circ$.



Hình 7.3

C – Bài tập

7.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD là tam giác đều và M là trung điểm của cạnh AD. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và SA; BC và SM.

7.2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng $120°$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD; AD và BB'; $A'D$ và BB'.

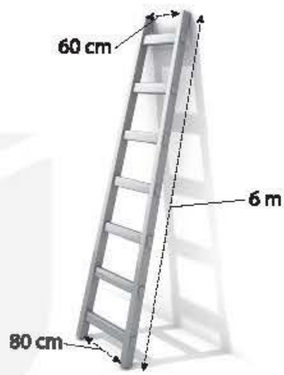
7.3. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Biết $MN = a\sqrt{3}$; $AB = 2\sqrt{2}a$ và $CD = 2a$. Chứng minh rằng đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng CD.

7.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AB.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: MN và SD; MO và SB.

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng SN và BC.

7.5. Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m, hai chân thang cách nhau 80 cm, hai ngọn thang cách nhau 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



BÀI 23

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A – Kiến thức cần nhớ

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P). Kí hiệu: $\Delta \perp (P)$.

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

3. Tính chất

– Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì a vuông góc với (Q).

– Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) mà đường thẳng a song song với đường thẳng b thì b vuông góc với (P).

B – Ví dụ

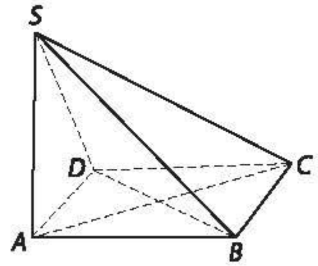
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$; b) $BD \perp (SAC)$.

Giải. (H.7.4)

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$, mà $BC \perp AB$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AB nên $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BD$, mà $BD \perp AC$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AC nên $BD \perp (SAC)$.



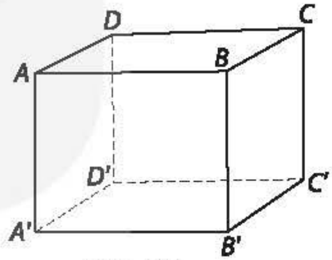
Hình 7.4

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $AA' \perp (A'B'C'D')$; b) $BB' \perp (ABCD)$.

Giải. (H.7.5)

a) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $(ABCD) // (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp (A'B'C'D')$.



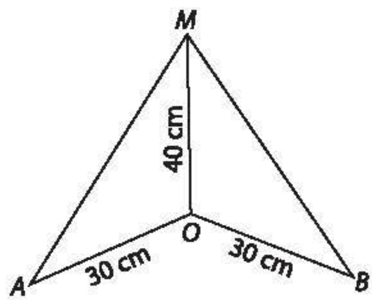
Hình 7.5

b) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $AA' // BB'$ nên $BB' \perp (ABCD)$.

Ví dụ 3. Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột 40 cm. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B đều cách O là 30 cm (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng 50 cm. Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

Giải. (H.7.6)

Ta có: $50^2 = 40^2 + 30^2$ nên $MA^2 = MO^2 + OA^2$ và $MB^2 = MO^2 + OB^2$. Do đó, tam giác MOA và tam giác MOB vuông tại O, hay $MO \perp OA$, $MO \perp OB$. Suy ra $MO \perp (OAB)$. Vậy chiếc cột vuông góc với mặt sân.



Hình 7.6

C – Bài tập

7.6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Kẻ AM vuông góc với SB tại M và AN vuông góc với SC tại N. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$;

b) $AM \perp (SBC)$;

c) $SC \perp (AMN)$.

7.7. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (OAH)$;

b) H là trực tâm của tam giác ABC;

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

7.8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.

7.9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp (A'B'C')$;

b) $B'C' \perp (ABB'A')$.

7.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$;

b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.

7.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAH)$ và các đường thẳng AH, BC, SK đồng quy;

b) $SB \perp (CHK)$ và $HK \perp (SBC)$.

7.12. Một cây cột được dựng trên một sàn phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sàn hay không? Vì sao?

BÀI 24

PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A – Kiến thức cần nhớ

1. Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (P)

– Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90°$.

– Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

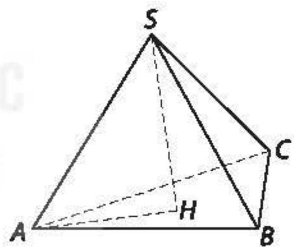
3. Gọi α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0° \leq \alpha \leq 90°$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $3a$, các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau và bằng $2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Giải. (H.7.7)

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó các tam giác SHA, SHB, SHC là những tam giác vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có: $HA = HB = HC$, do đó H là tâm của tam giác đều ABC. Ta tính được $AH = a\sqrt{3}$.



Hình 7.7

Vì AH là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa đường thẳng SA và đường thẳng AH.

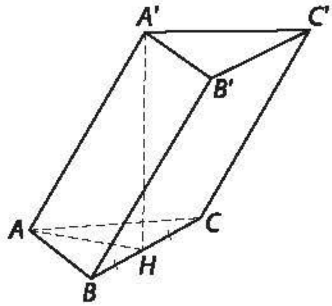
Xét tam giác SAH vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60°$.

Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, góc BAC bằng $120°$ và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC, biết $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC).

Giải. (H.7.8)

Ta có: AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) và tam giác $AA'H$ vuông tại H. Do đó, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AA' và AH.



Hình 7.8

Xét tam giác ABH vuông tại H, có:

$$\widehat{HAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ, \text{ suy ra } AH = a.$$

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H, có:

$$\cos\widehat{HAA'} = \frac{AH}{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ suy ra } \widehat{HAA'} = 45^\circ.$$

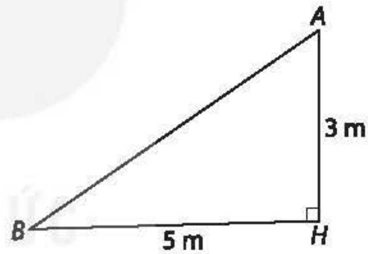
Do đó $(AA', AH) = 45^\circ$, hay góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

Ví dụ 3. Một chiếc cột cao 3 m được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài 5 m. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải. (H.7.9)

Góc giữa tia nắng mặt trời AB và mặt đất là góc ABH. Ta có: $\tan\widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{3}{5}$, suy ra

$$\widehat{ABH} \approx 30{,}96^\circ.$$



Hình 7.9

C – Bài tập

7.13. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Tính côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD).

7.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

7.15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, biết $AB = a$, $SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính tang của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

b) Tính sin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC).

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

7.16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

7.17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

c) Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC). Tính $\sin\alpha$.

7.18. Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc $60°$. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

BÀI 25

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A – Kiến thức cần nhớ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Gọi a là đường thẳng tuỳ ý vuông góc với mặt phẳng (P), b là đường thẳng tuỳ ý vuông góc với mặt phẳng (Q). Khi đó, góc giữa a và b là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Lưu ý: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) có giao tuyến là đường thẳng c, đường thẳng a nằm trên (P) và vuông góc với c, đường thẳng b nằm trên (Q) và vuông góc với c thì góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

– Nếu góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $90°$ thì ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.

– Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0° \le \alpha \le 90°$.

3. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

4. Tính chất

– Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

– Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

5. Góc nhị diện

– Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là góc nhị diện, kí hiệu là $[P, a, Q]$.

– Từ điểm O tuỳ ý thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc nửa mặt phẳng (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$. Số đo của góc xOy được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.

– Gọi α là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$ thì $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.

6. Một số hình lăng trụ đặc biệt

– Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

– Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.

7. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

– Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Khi đó, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

– Hình chóp cụt đều là hình chóp cụt có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = a$, biết $SA \perp (ABC)$, $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC).

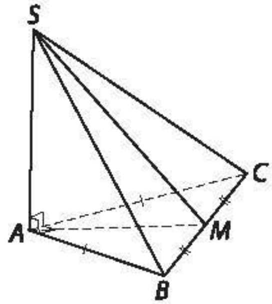
Giải. (H.7.10)

Gọi M là trung điểm của cạnh BC, ta có: $AM \perp BC$; $SM \perp BC$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và SM. Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AM$.

Xét tam giác SAM vuông tại A, có: $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

suy ra $\tan\widehat{AMS} = \dfrac{SA}{AM} = \sqrt{3}$, hay $\widehat{SMA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60°.



Hình 7.10

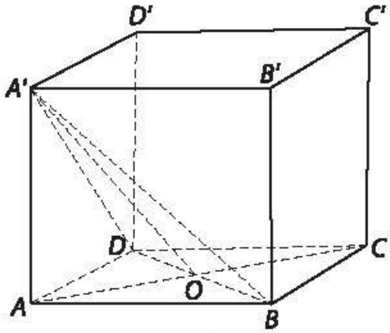
Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính tang của góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(A'BD)$.

Giải. (H.7.11)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $AO \perp BD$, $A'O \perp BD$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'BD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AO và $A'O$.

Ta có: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AA' = a$ và tam giác $AA'O$ vuông tại A nên

$$\tan\left(AO, A'O\right) = \tan\widehat{AOA'} = \frac{AA'}{AO} = \sqrt{2}.$$



Hình 7.11

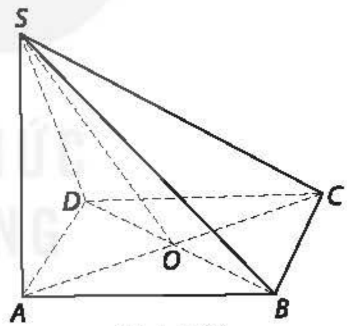
Vậy tang của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'BD)$ bằng $\sqrt{2}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Giải. (H.7.12)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $CO \perp BD$, $SO \perp BD$. Do đó, góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ bằng góc SOC.

Xét tam giác SAO, có $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = SA$ và góc SAO là góc vuông nên tam giác SAO là tam giác vuông cân tại A, suy ra $\widehat{SOA} = 45^\circ$; $\widehat{SOC} = 135^\circ$.



Hình 7.12

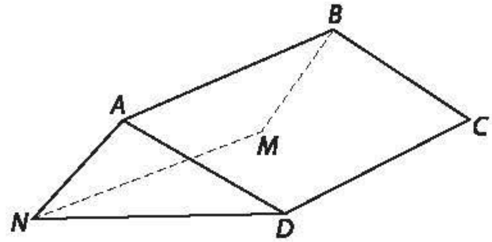
Vậy số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135°.

Ví dụ 4. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD$, $ABMN$, $AD = 4$ m, $AN = 3$ m, $DN = 5$ m. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải. (H.7.13)

Xét tam giác *ADN* có: $AN^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = DN^2$ nên tam giác *AND* vuông tại *A*. Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng (*ABCD*) và (*ABMN*) bằng góc *DAN*.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà bằng 90°.



Hình 7.13

C – Bài tập

7.19. Cho tứ diện đều *ABCD* có độ dài các cạnh bằng *a*. Gọi *M* là trung điểm của *CD*, kẻ *AH* vuông góc với *BM* tại *H*.

a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

b) Tính côsin của góc giữa mặt phẳng (*BCD*) và mặt phẳng (*ACD*).

7.20. Cho tứ diện *ABCD* có *AC* = *BC*, *AD* = *BD*. Gọi *M* là trung điểm của *AB*. Chứng minh rằng $(CDM) \perp (ABC)$ và $(CDM) \perp (ABD)$.

7.21. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O*, cạnh bằng *a*, góc *BAD* bằng 60°. Kẻ *OH* vuông góc với *SC* tại *H*. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chứng minh rằng:

a) $(SBD) \perp (SAC)$;　　b) $(SBC) \perp (BDH)$;　　c) $(SBC) \perp (SCD)$.

7.22. Cho hình chóp đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh bằng *a*. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng (*SAB*) và mặt phẳng (*ABCD*);

b) Mặt phẳng (*SAB*) và mặt phẳng (*SBC*).

7.23. Cho hình lập phương *ABCD.A′B′C′D′* có cạnh bằng *a*.

a) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (*A′BD*) và (*ABCD*).

b) Tính côsin của số đo góc nhị diện [*A′*, *BD*, *C′*].

7.24. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, biết $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAD) \perp (ABCD)$ và *SA* = *a*. Tính côsin của số đo góc nhị diện [*S*, *BD*, *C*] và góc nhị diện [*B*, *SC*, *D*].

7.25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB.

a) Tính côsin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SHC)$.

7.26. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

BÀI 26

KHOẢNG CÁCH

A – Kiến thức cần nhớ

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

– Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a là khoảng cách giữa điểm M và hình chiếu H của M trên a.

– Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa điểm M và hình chiếu H của M trên (P).

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

– Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P).

– Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

– Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta có:

– Điểm A thuộc a, điểm B thuộc b sao cho đường thẳng AB là đường vuông góc chung của a và b thì độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

– Mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b sao cho (P) song song với (Q), khi đó khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a và (Q) cũng bằng khoảng cách giữa (P) và (Q).

B – Ví dụ

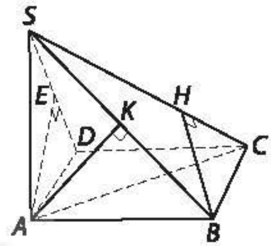
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông tại B, biết $SA = AB = BC = a$. Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm B đến đường thẳng SC.

b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

Giải. (H.7.14)



Hình 7.14

a) Ta có: $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp SB$.
Kẻ $BH \perp SC$ tại H thì $d(B, SC) = BH$.
Theo định lí Pythagore, ta tính được

$$SB = AC = a\sqrt{2}, SC = a\sqrt{3}.$$

Xét tam giác SBC vuông tại B có đường cao BH.

Khi đó: $BH = \dfrac{SB \cdot BC}{SC} = \dfrac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(B,SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

b) Kẻ $AK \perp SB$ tại K, có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AK$. Suy ra $AK \perp (SBC)$, do đó $d(A, (SBC)) = AK$. Xét tam giác SAB vuông tại A có đường cao AK.

Khi đó $AK = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.
Vì $CD \perp AD$, $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$. Kẻ $AE \perp SD$ tại E, mà $AE \perp CD$ nên $AE \perp (SCD)$ (1).
Vì mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB nên

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) \ (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $d(AB, SC) = AE$. Vì tam giác SAD vuông cân tại A, có đường cao AE nên $AE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB, SC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách:

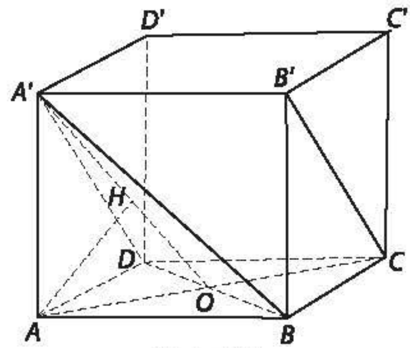
a) Từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

b) Giữa hai đường thẳng song song BC và $A'D'$.

c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'B$ và $B'C$.

Giải. (H.7.15)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD, kẻ AH vuông góc với $A'O$ tại H. Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, có tâm O nên $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác AOA' vuông tại A, đường cao AH nên ta tính được $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Hình 7.15

b) Ta có $A'D' \,//\, BC$ và $BC \perp (ABB'A')$ nên $BC \perp A'B$.

Do đó $A'B = d(A', BC) = d(A'D', BC) = a\sqrt{2}$.

c) Vì $B'C \,//\, A'D$ và $A'D \subset (A'BD), B'C \not\subset (A'BD)$ nên $B'C \,//\, (A'BD)$.

Do đó $d(A'B, B'C) = d(B'C, (A'BD)) = d(C, (A'BD))$. Vì AC cắt mặt phẳng $(A'BD)$ tại O là trung điểm của AC nên $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 3. Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc 500 km/h và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15°. Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

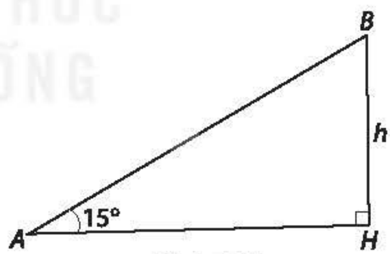
Giải. (H.7.16)

Sau 2 phút, máy bay đi được quãng đường là

$$AB = \frac{500}{60} \cdot 2 = \frac{50}{3} \text{ (km)}.$$

Sau 2 phút, máy bay ở độ cao là

$$h = AB \cdot \sin 15^\circ \approx 4{,}3 \text{ (km)}.$$



Hình 7.16

C – Bài tập

7.27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách:

a) Giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

b) Giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

c) Từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$.

d) Giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$.

7.28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

c) Giữa hai đường thẳng AB và SC.

7.29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng $60°$, biết tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

b) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

c) Giữa hai đường thẳng AB và SC.

7.30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$.

b) Giữa hai đường thẳng BD và CD'.

7.31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = AA' = a$. Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm A đến đường thẳng $B'C$.

b) Giữa hai đường thẳng BC và AB'.

7.32. Trên một mái nhà nghiêng $30°$ so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?

BÀI 27

THỂ TÍCH

A – Kiến thức cần nhớ

1. Thể tích của khối chóp

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.

2. Thể tích khối lăng trụ

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = S \cdot h$.

3. Thể tích khối chóp cụt

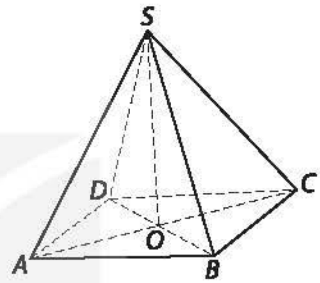
Thể tích khối chóp cụt có diện tích đáy lớn S, diện tích đáy bé S' và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}\left(S + S' + \sqrt{S \cdot S'}\right) \cdot h$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Giải. (H.7.17)

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $SO \perp (ABCD)$ và góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng góc SAO bằng $60°$.



Hình 7.17

Xét tam giác SAO vuông tại O, có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\widehat{SAO} = 60°$.

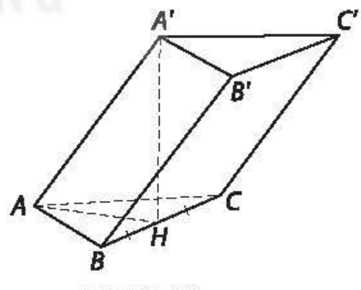
Khi đó $SO = AO \cdot \tan\widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60° = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 2. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh $AA' = a$ và hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Giải. (H.7.18)

Ta có $A'H$ là đường cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác ABC đều có đường cao AH nên ta tính được $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AA' = a$ và tam giác $A'AH$ vuông tại H nên theo định lí Pythagore ta tính được $A'H = \frac{a}{2}$.



Hình 7.18

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a nên diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

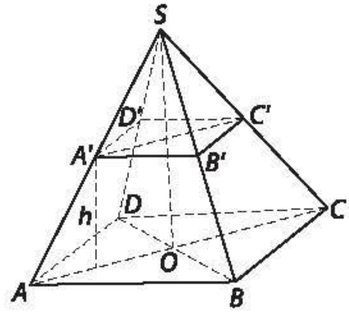
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng a. Tính theo a thể tích khối chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$.

Giải. (H.7.19)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, S là giao điểm của AA' và CC'. Vì $A'B' = \frac{1}{2}AB$ nên A' là trung điểm của SA. Từ đó, suy ra $SA = SC = 2a$.

Vì $ABCD$ là hình vuông và $AB = a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$. Do đó, tam giác SAC đều, có đường cao SO.



Hình 7.19

Từ đó, ta tính được $SO = a\sqrt{3}$. Vì A' là trung điểm của SA và $SO \perp (ABCD)$ nên chiều cao h của hình chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích đáy lớn và đáy nhỏ của hình chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$ lần lượt là $2a^2; \frac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

$$\frac{1}{3}\cdot\left(2a^2 + \frac{a^2}{2} + \sqrt{2a^2\cdot\frac{a^2}{2}}\right)\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Ví dụ 4. Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = 5$ m, $AA' = 3$ m, $AD = 4$ m. Đáy bể là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang.

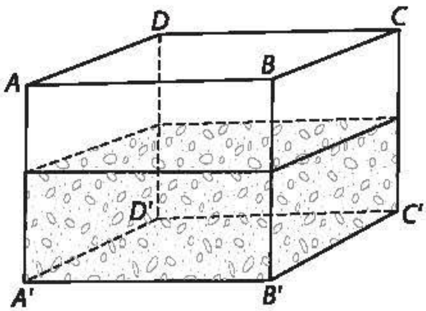
a) Giải tích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.

b) Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là 40 m^3.

Giải. (H.7.20)

a) Vì mặt phẳng chứa bề mặt nước song song với mặt đáy nên phần nước trong bể là khối hình lăng trụ đứng, có đáy $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên phần nước trong bể là khối hộp chữ nhật.

b) Mực nước trong bể là $h = \frac{40}{4\cdot 5} = 2$ (m).



Hình 7.20

C – Bài tập

7.33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{SBA} = 60^\circ$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

7.34. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

7.35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'B'C'$ và $AA'C'$ là hai tam giác đều cạnh a. Biết $(ACC'A') \perp (A'B'C')$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

7.36. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và $\widehat{AOB} = 90^\circ$; $\widehat{BOC} = 60^\circ$; $\widehat{COA} = 120^\circ$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $OABC$.

7.37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, biết $SO \perp (ABCD)$, $AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

7.38. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M, AN vuông góc với SC tại N. Tính theo a thể tích khối chóp $S.AMN$.

7.39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, biết diện tích các tam giác ABC, SAB và SAC lần lượt là $3\sqrt{3}$; 9; 12. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

7.40. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh 1 m để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A – Trắc nghiệm

7.41. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b song song với mặt phẳng (P). Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng

A. 30°. B. 90°. C. 60°. D. 0°.

7.42. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng b cắt mặt phẳng (P).

B. Đường thẳng b song song với mặt phẳng (P).

C. Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P).

D. Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P).

7.43. Cho tứ diện đều $ABCD$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

7.44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

7.45. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

7.46. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, gọi O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

7.47. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, gọi O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

7.48. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BB' bằng

A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

7.49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Thể tích khối tứ diện $ABC'D'$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

7.50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm của AA'. Tỉ số của thể tích khối chóp $M.ABCD$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{2}{3}$.

B – Tự luận

7.51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB.

a) Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

b) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

c) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

7.52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, biết $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$ và $(SAD) \perp (SCD)$.

b) Gọi BE, DF là hai đường cao của tam giác SBD. Chứng minh rằng $(ACF) \perp (SBC)$ và $(AEF) \perp (SAC)$.

c) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

7.53. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Gọi SM, SN lần lượt là đường cao của tam giác SAD và tam giác SBC.

a) Chứng minh rằng $(SMN) \perp (ABCD)$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[S, AD, B]$.

c) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

7.54. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AB = 2a$, $AC = 3a$ và số đo của góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 45°.

a) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

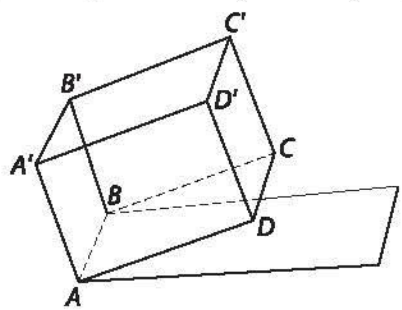
b) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

7.55. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD.

a) Tính theo a thể tích khối chóp cụt $AMN.A'B'D'$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $A'B$.

7.56. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ được đặt trên một mái nhà nghiêng so với mặt đất nằm ngang góc 10°, $AB = 1$ m, $AD = 1{,}5$ m, $AA' = 1$ m. Đáy bể là hình chữ nhật $ABCD$. Các điểm A, B cùng ở độ cao 5 m (so với mặt đất), các điểm C, D ở độ cao lớn hơn so với độ cao của các điểm A, B. Khi nước trong bể phẳng lặng người ta đo được khoảng cách giữa đường mép nước ở mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của bể là 80 cm. Tính thể tích của phần nước trong bể.



CHƯƠNG VIII

CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

BÀI 28

BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

A – Kiến thức cần nhớ

- Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: "A hoặc B xảy ra" được gọi là biến cố hợp của A và B và được kí hiệu là $A \cup B$.
- Giả sử A, B là tập con của không gian mẫu Ω. Biến cố hợp của A và B là tập con $A \cup B$ của không gian mẫu Ω.
- Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: "A và B đều xảy ra" được gọi là biến cố giao của A và B và được kí hiệu là AB.
- Giả sử A, B là tập con của không gian mẫu Ω. Biến cố giao AB là tập con $A \cap B$ của không gian mẫu Ω.
- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.
- Nếu cặp biến cố (A, B) độc lập thì các cặp biến cố $(A, \overline{B})$; $(\overline{A}; B)$ và $(\overline{A}, \overline{B})$ cũng độc lập.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Hai xạ thủ X, Y mỗi người bắn một viên đạn vào một mục tiêu. Xét các biến cố A: "Xạ thủ X bắn trúng"; B: "Xạ thủ Y bắn trúng".

Nêu nội dung của các biến cố AB, $A \cup B$, $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

Giải

- AB: "Cả hai xạ thủ bắn trúng".
- $A \cup B$: "Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng".
- $\overline{A}\overline{B}$: "Cả hai xạ thủ bắn trượt".
- $\overline{A}B$: "Xạ thủ X bắn trượt, xạ thủ Y bắn trúng".

- $A\overline{B}$: "Xạ thủ X bắn trúng, xạ thủ Y bắn trượt".
- $A\overline{B} \cup \overline{A}B$: "Chỉ có một xạ thủ bắn trúng".

Ví dụ 2. Có hai chiếc hộp A, B mỗi hộp đựng 30 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 30. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Kí hiệu a, b là số ghi trên thẻ tương ứng rút từ hộp A và hộp B.

Gọi M là biến cố: "a là số chẵn"; N là biến cố: "b là số chẵn".

Xét biến cố E: "$a + b$ là số lẻ".

Chứng tỏ rằng $E = M\overline{N} \cup \overline{M}N$.

Giải

Nếu $M\overline{N}$ xảy ra thì a là số chẵn, b là số lẻ, do đó $a + b$ lẻ tức là E xảy ra. Nếu $\overline{M}N$ xảy ra thì a là số lẻ, b là số chẵn, do đó $a + b$ lẻ tức là E xảy ra. Ngược lại, nếu E xảy ra thì a và b phải khác tính chẵn lẻ. Nếu a chẵn, b lẻ thì $M\overline{N}$ xảy ra. Nếu a lẻ, b chẵn thì $\overline{M}N$ xảy ra.

Vậy $E = M\overline{N} \cup \overline{M}N$.

Ví dụ 3. Có hai lọ hoa. Lọ I cắm 5 bông hoa hồng và 3 bông hoa cúc. Lọ II cắm 4 bông hoa hồng và 5 bông hoa thược dược. Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ mỗi lọ một bông hoa. Xét hai biến cố sau:

A: "Lấy được bông hoa hồng từ lọ I", B: "Lấy bông hoa hồng từ lọ II".

Chứng tỏ rằng A và B độc lập.

Giải

Dù A có xảy ra (lấy được bông hoa hồng) hay A không xảy ra (lấy được bông hoa cúc) ta đều có $P(B) = \frac{4}{9}$.

Dù B có xảy ra (lấy được được bông hoa hồng) hay B không xảy ra (lấy được bông hoa thược dược) ta đều có $P(A) = \frac{5}{8}$.

Việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia. Vậy A và B độc lập.

C – Bài tập

8.1. Một hộp đựng 70 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 70. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Kí hiệu a là số ghi trên thẻ. Gọi A là biến cố: "a là ước của 28", B là biến cố: "a là ước của 70". Xét biến cố C: "a là ước của 14". Chứng tỏ C là biến cố giao của A và B.

8.2. Một chiến hạm có ba bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Chiến hạm sẽ bị chìm khi và chỉ khi:

- Hoặc có một quả ngư lôi bắn trúng bộ phận A;
- Hoặc có hai quả ngư lôi bắn trúng bộ phận B;
- Hoặc có ba quả ngư lôi bắn trúng bộ phận C.

Giả sử có hai quả ngư lôi bắn trúng chiến hạm. Xét hai biến cố K: "Hai quả trúng vào C", H: "Một quả trúng vào B, một quả trúng vào C".

Gọi M là biến cố: "Chiến hạm không bị chìm". Chứng tỏ rằng M là biến cố hợp của H và K.

8.3. Có bốn chiếc hộp I, II, III, IV mỗi hộp đựng 10 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 10. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Gọi a, b, c, d là số ghi trên thẻ tương ứng rút từ I, II, III, IV.

Xét các biến cố sau:

A: "a là số chẵn"; B: "b là số chẵn"; C: "c là số chẵn"; D: "d là số chẵn";

E: "ad là số lẻ"; F: "bc là số lẻ", G; "$ad - bc$ là số chẵn".

Chứng tỏ rằng:

a) $E = \overline{A}\overline{D}$; $F = \overline{B}\overline{C}$;

b) $G = EF \cup \overline{E}\overline{F}$.

8.4. Hai bạn Sơn và Tùng, mỗi bạn gieo đồng thời hai đồng xu cân đối. Xét hai biến cố sau:

E: "Cả hai đồng xu bạn Sơn gieo đều ra mặt sấp".

F: "Hai đồng xu bạn Tùng gieo có một sấp, một ngửa".

Chứng tỏ rằng E và F độc lập.

8.5. Một chiếc túi có 12 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Bạn Hoà rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong túi để sang bên cạnh. Tiếp theo, bạn Bình rút ngẫu nhiên tiếp một tấm thẻ. Xét hai biến cố sau:

M: "Bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số lẻ";

N: "Bạn Bình rút được tấm thẻ ghi số chẵn".

Chứng tỏ rằng hai biến cố M và N không độc lập.

BÀI 29

CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

A – Kiến thức cần nhớ

- Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra.
  Giả sử A, B là tập con của không gian mẫu Ω. A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \varnothing$.
- Công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc: Cho A và B là hai biến cố xung khắc. Khi đó ta có:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Công thức cộng xác suất: Cho hai biến cố A và B. Khi đó ta có:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Trong một hộp có 8 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Gọi A là biến cố: "Cả hai viên bi có màu xanh"; B là biến cố: "Có một viên bi màu xanh và một viên bi màu đỏ".

a) Tính $P(A)$ và $P(B)$.

b) Tính xác suất để trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh.

Giải

a) Ta có $n(\Omega) = C_{14}^2 = 91$; $n(A) = C_8^2 = 28$, $n(B) = 8 \cdot 6 = 48$.

Vậy $P(A) = \dfrac{28}{91}$, $P(B) = \dfrac{48}{91}$.

b) *Cách 1:* Xét biến cố C: "Trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh", nên C là biến cố hợp của A và B. Do A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(C) = P(A) + P(B) = \dfrac{28}{91} + \dfrac{48}{91} = \dfrac{76}{91}$.

Cách 2: Xét biến cố đối $\overline{C}$: "Cả hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ". Khi đó $n(\overline{C}) = C_6^2 = 15$. Suy ra $P(\overline{C}) = \dfrac{15}{91}$.

Vậy $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{15}{91} = \dfrac{76}{91}$.

Ví dụ 2. Một lớp có 29 học sinh, trong đó có 22 em học khá môn Toán, 21 em học khá môn Ngữ văn, 3 em không học khá cả hai môn Ngữ văn và Toán. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để học sinh đó:

a) Học khá cả hai môn Toán và Ngữ văn.

b) Học khá môn Toán và không học khá môn Ngữ văn.

c) Học khá môn Ngữ văn và không học khá môn Toán.

Giải

a) Gọi A là biến cố: "Học sinh đó học khá môn Toán", B là biến số: "Học sinh đó học khá môn Ngữ văn". Ta cần tính $P(AB)$.

Ta có: $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{22}{29} + \dfrac{21}{29} - \dfrac{26}{29} = \dfrac{17}{29}$.

b) Tính $P(A\overline{B})$:

Ta có: $A = AB \cup A\overline{B}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$.

Do đó $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \dfrac{22}{29} - \dfrac{17}{29} = \dfrac{5}{29}$.

c) Tính $P(\overline{A}B)$:

Ta có: $B = AB \cup \overline{A}B$, suy ra $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$.

Do đó $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \dfrac{21}{29} - \dfrac{17}{29} = \dfrac{4}{29}$.

C – Bài tập

8.6. Trong một căn phòng có 36 người, trong đó có 25 người họ Nguyễn và 11 người họ Trần. Chọn ngẫu nhiên hai người trong phòng đó. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng họ.

8.7. Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 19 người thích chơi bóng bàn, 20 người thích chơi cầu lông, 8 người không thích chơi cả cầu lông và bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Tính xác suất để người đó:

a) Thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông.

b) Thích chơi cầu lông và không thích chơi bóng bàn.

c) Thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông.

d) Thích chơi đúng một trong hai môn.

8.8. Một nhóm có 50 người được phỏng vấn họ đã mua cành đào hay cây quất vào dịp Tết vừa qua, trong đó có 31 người mua cành đào, 12 người mua cây quất và 5 người mua cả cành đào và cây quất. Chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất để người đó:

a) Mua cành đào hoặc cây quất.

b) Mua cành đào và không mua cây quất.

c) Không mua cành đào và không mua cây quất.

d) Mua cây quất và không mua cành đào.

BÀI 30

CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

A – Kiến thức cần nhớ

- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.
- Nếu cặp biến cố (A, B) độc lập thì các cặp biến cố $(A,\overline{B})$, $(\overline{A},B)$, $(\overline{A},\overline{B})$ cũng độc lập.
- Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì ta có: $P(AB) = P(A)P(B)$.

  Công thức này gọi là công thức nhân cho hai biến cố độc lập.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Một vận động viên thi bắn súng. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là 0,2; bắn trúng vòng 9 là 0,25 và bắn trúng vòng 8 là 0,3. Nếu bắn trúng vòng k thì được k điểm. Vận động viên thực hiện bắn hai lần. Giả sử hai lần bắn của của vận động viên là độc lập. Vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Tính xác suất để vận động viên đạt được huy chương đồng.

Giải

Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố: "Vận động viên bắn trúng vòng 10", "Vận động viên bắn trúng vòng 9", "Vận động viên bắn trúng vòng 8".

Gọi G là biến cố: "Vận động viên đạt được huy chương đồng"; U là biến cố: "Vận động viên hai lần bắn trúng vòng 9", V là biến cố: "Vận động viên một lần bắn trúng vòng 10, một lần bắn trúng vòng 8".

Ta có: $G = U \cup V$.

$P(U) = P(B) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$.

$P(V) = P(AC) + P(CA) = 0,2 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,12$.

Do U và V xung khắc nên $P(G) = P(U) + P(V) = 0,0625 + 0,12 = 0,1825$.

Ví dụ 2. Gieo ba xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét các biến cố sau:

A: "Số chấm xuất hiện trên mặt của ba xúc xắc khác nhau".

B: "Có ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm".

Chứng minh rằng hai biến cố A và B không độc lập.

Giải

Ta cần chứng minh $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

- Tính $P(A)$: Ta có $\Omega = \{(a,b,c); 1 \leq a,b,c \leq 6\}$, $n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

  $A = \{(a,b,c); 1 \leq a,b,c \leq 6\}$ và a, b, c là các số nguyên dương phân biệt.

  Mỗi bộ (a,b,c) là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

  Ta có $n(A) = A_6^3 = 120$.

  Vậy $P(A) = \frac{120}{216}$.

- Tính $P(B)$:

  Xét biến cố đối $\overline{B}$: "Số chấm xuất hiện trên mỗi xúc xắc đều khác 6". Mỗi kết quả thuận lợi cho $\overline{B}$ là một bộ ba số (a,b,c) trong đó $1 \leq a,b,c \leq 6$.

  Do đó theo quy tắc nhân, số kết quả thuận lợi cho $\overline{B}$ là $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

  Vậy $P(\overline{B}) = \frac{125}{216}$. Suy ra $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{91}{216}$.

- Tính $P(AB)$:

  Mỗi kết quả thuận lợi cho AB là một bộ ba số (a,b,c) trong đó $1 \leq a,b,c \leq 6$ và a, b, c là các số nguyên dương khác nhau và có đúng một số bằng 6. Có 3 cách chọn một số bằng 6 và $A_5^2 = 20$ cách chọn hai số còn lại trong 5 số $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Theo quy tắc nhân, ta có $3 \cdot 20 = 60$ kết quả thuận lợi.

  Do đó $P(AB) = \frac{60}{216} \neq P(A)P(B) = \frac{120}{216} \cdot \frac{91}{216}$.

  Vậy A, B không độc lập.

C – Bài tập

8.9. Cho $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,6$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

8.10. Cho $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

8.11. Gieo hai đồng xu cân đối. Xét các biến cố A: "Cả hai đồng xu đều ra mặt sấp", B: "Có ít nhất một đồng xu ra mặt sấp". Hỏi A và B có độc lập hay không?

8.12. Gieo hai con xúc xắc cân đối. Xét các biến cố A: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm", B: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7". Chứng tỏ rằng A và B không độc lập.

8.13. Có 3 hộp I, II, III. Mỗi hộp chứa ba tấm thẻ đánh số 1, 2, 3. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Xét các biến cố sau:

A: "Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ là 6"; B: "Ba tấm thẻ có ghi số bằng nhau".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$.

b) Hỏi A, B có độc lập không?

8.14. Hai bạn An và Bình không quen biết nhau và đều học xa nhà. Xác suất để bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật là 0,2 và của bạn Bình là 0,25. Dùng sơ đồ hình cây để tính xác suất vào ngày Chủ nhật:

a) Cả hai bạn đều về thăm nhà.

b) Có ít nhất một bạn về thăm nhà.

c) Cả hai bạn đều không về thăm nhà.

d) Chỉ có bạn An về thăm nhà.

e) Có đúng một bạn về thăm nhà.

8.15. Cho A, B là hai biến cố độc lập và $P(AB) = 0,1$; $P(A\overline{B}) = 0,4$. Tìm $P(A \cup \overline{B})$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A – Trắc nghiệm

8.16. Một vận động viên thi bắn súng. Biết rằng xác suất để vận động viên bắn trúng vòng 10 là 0,2; bắn trúng vòng 9 là 0,25 và bắn trúng vòng 8 là 0,3. Nếu bắn trúng vòng k thì được k điểm. Vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Vận động viên thực hiện bắn hai lần và hai lần bắn độc lập với nhau. Xác suất để vận động viên đạt được huy chương bạc là

A. 0,15. B. 0,1. C. 0,2. D. 0,12.

8.17. Hai bạn Sơn và Tùng độc lập với nhau, mỗi người tung một con xúc xắc. Xác suất để xúc xắc của bạn Sơn xuất hiện số lẻ, xúc xắc của bạn Tùng xuất hiện số lớn hơn 4 là

A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{2}{11}$.

8.18. Một trường học có hai máy in A và B hoạt động độc lập. Trong 24 giờ hoạt động, xác suất để máy A và máy B gặp lỗi kĩ thuật tương ứng là 0,08 và 0,12. Xác suất để trong 24 giờ hoạt động có nhiều nhất một máy gặp lỗi kĩ thuật là

A. 0,99. B. 0,9904. C. 0,991. D. 0,9906.

8.19. Hai xạ thủ A và B thi bắn súng một cách độc lập với nhau. Xác suất để xạ thủ A và xạ thủ B bắn trúng bia tương ứng là 0,7 và 0,8. Xác suất để có đúng một xạ thủ bắn trúng là

A. 0,38. B. 0,385. C. 0,37. D. 0,374.

8.20. Hai bạn An và Bình độc lập với nhau tham gia một cuộc thi. Xác suất để bạn An và bạn Bình đạt giải tương ứng là 0,8 và 0,6. Xác suất để có ít nhất một bạn đạt giải là

A. 0,94. B. 0,924. C. 0,92. D. 0,93.

B – Tự luận

8.21. Một nhóm 30 bệnh nhân có 24 người điều trị bệnh X, có 12 người điều trị cả bệnh X và bệnh Y, có 26 người điều trị ít nhất một trong hai bệnh X hoặc Y. Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân. Tính xác suất để người đó:

a) Điều trị bệnh Y.

b) Điều trị bệnh Y và không điều trị bệnh X.

c) Không điều trị cả hai bệnh X và Y.

8.22. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 34 em thích ăn chuối, 22 em thích ăn cam và 2 em không thích ăn cả hai loại quả đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để em đó:

a) Thích ăn ít nhất một trong hai loại quả chuối hoặc cam.

b) Thích ăn cả hai loại quả chuối và cam.

8.23. Một dãy phố gồm 40 gia đình, trong đó 23 gia đình có điện thoại thông minh, 18 gia đình có laptop và 26 gia đình có ít nhất một trong hai thiết bị này. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong dãy phố. Tính xác suất để gia đình đó:

a) Có điện thoại thông minh và laptop.

b) Có điện thoại thông minh nhưng không có laptop.

c) Không có cả điện thoại thông minh và laptop.

8.24. Một nhóm 50 học sinh đi cắm trại, trong đó có 23 em mang theo bánh ngọt, 22 em mang theo nước uống và 5 em mang theo cả bánh ngọt lẫn nước uống. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm. Tính xác suất để học sinh đó:

a) Mang theo hoặc bánh ngọt hoặc nước uống.

b) Không mang theo cả bánh ngọt và nước uống.

8.25. Một lớp 40 học sinh, trong đó có 22 em học khá môn Toán, 25 em học khá môn Ngữ văn và 3 em không học khá cả hai môn này. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để em đó:

a) Học khá ít nhất một trong hai môn Toán hoặc Ngữ văn.

b) Học khá cả môn Toán và môn Ngữ văn.

8.26. Chọn ngẫu nhiên hai người từ một nhóm 9 nhà toán học tham dự hội thảo, trong nhóm có 5 nhà toán học nam và 4 nhà toán học nữ. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng giới tính.

8.27. Cho A, B là hai biến cố độc lập và xung khắc với $P(A) = 0,35$; $P(A \cup B) = 0,8$. Tính xác suất để:

a) Xảy ra B.

b) Xảy ra cả A và B.

c) Xảy ra đúng một trong hai biến cố A hoặc B.

8.28. Cho hai biến cố A, B với $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(\overline{B}) = \dfrac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \dfrac{7}{8}$.

Hỏi A và B có độc lập hay không?

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG IX
ĐẠO HÀM

BÀI 31

ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A – Kiến thức cần nhớ

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

- Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại, giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

- Cách viết khác của định nghĩa: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- Quy tắc tính đạo hàm của hàm số tại một điểm bằng định nghĩa:

Bước 1: Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2: Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a;b), x \neq x_0$.

Bước 3: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ là $k = f'(x_0)$ nếu đạo hàm $f'(x_0)$ tồn tại.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t là $v(t) = s'(t)$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x + \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $D = [1; +\infty)$.

Tại điểm $x_0 = 2$, $y_0 = 2 + \sqrt{2-1} = 3$. Với $1 \le x \ne 2$, ta có:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{x + \sqrt{x-1} - 3}{x-2} = \frac{(x-2) + \left(\sqrt{x-1} - 1\right)}{x-2} = 1 + \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}.$$

Do đó:

$$y'(2) = \lim_{x \to 2}\left(1 + \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}\right) = 1 + \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)\left(\sqrt{x-1} + 1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1} + 1\right)}$$

$$= 1 + \lim_{x \to 2} \frac{(x-1) - 1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1} + 1\right)} = 1 + \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Vậy $y'(2) = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y = |x-1|x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

Giải

Đạo hàm $y'(1)$ (nếu có) là:

$$y'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{y - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{|x-1|x^2}{x-1}.$$

Ta cần tính riêng các giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1. Ta có:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1;$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \left(-x^2\right) = -1.$$

Giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1 khác nhau nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|x^2}{x-1}$. Do đó, đạo hàm $y'(1)$ không tồn tại.

Chú ý. $|x-1|x^2=(x-1)x^2$ khi $x \geq 1$ và $|x-1|x^2=-(x-1)x^2$ khi $x<1$ nên để khử vô định trong giới hạn trên ta phải xét riêng các giới hạn một phía.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=(2x+1)^2$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=-1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1; 1)$.

Giải

a) Tại điểm $x_0=-1$, $y_0=(-2+1)^2=1$. Với $x \neq -1$, ta có:

$$\frac{y-1}{x-(-1)}=\frac{(2x+1)^2-1}{x+1}=\frac{(2x+1-1)(2x+1+1)}{x+1}=2\cdot 2x.$$

Do đó: $y'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{y-1}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}2\cdot 2x=-4$.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1; 1)$ là:

$$y-1=y'(-1)\left(x-(-1)\right)=-4(x+1) \text{ hay } y=-4x-3.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\frac{8}{x}$, $x \neq 0$.

a) Tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 bất kì, $x_0 \neq 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y = -2x + 8$.

Giải

a) Với $x_0 \neq 0$ bất kì, ta có:

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{8}{x}-\frac{8}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{8(x_0-x)}{(x-x_0)x_0\cdot x}=\lim_{x\to x_0}\frac{-8}{x_0\cdot x}=-\frac{8}{x_0^2}.$$

b) Với $x_0=2$ ta có $y_0=4$ và $y'(2)=-2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là:

$$y - 4 = -2(x - 2) = -2x + 4 \text{ hay } y = -2x + 8.$$

c) Hệ số góc tiếp tuyến có dạng $k=y'(x_0)=-\frac{8}{x_0^2}$ ($x=x_0$ là hoành độ tiếp điểm).

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -2x + 8$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -2$.

Ta có: $-\dfrac{8}{x_0^2} = -2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 2$, phương trình tiếp tuyến là: $y - 4 = -2(x - 2)$, hay $y = -2x + 8$ (loại, do tiếp tuyến trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = -2$, phương trình tiếp tuyến là:

$$y - (-4) = -2\left(x - (-2)\right), \text{ hay } y = -2x - 8.$$

Vậy $y = -2x - 8$ là tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý. Đối với bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng cho trước, ta cần kiểm tra lại kết quả và loại trường hợp hai đường thẳng trùng nhau do điều kiện hệ số góc bằng nhau chỉ là điều kiện cần.

C – Bài tập

9.1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + 3x - 1$ tại điểm $x_0 = 1$.

9.2. Cho hàm số $f(x) = x(2x - 1)^2$. Tính $f'(0)$ và $f'(1)$.

9.3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 1 - 2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

9.4. Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y = ax^2$ (a là hằng số) tại điểm x_0 bất kì.

b) $y = \dfrac{1}{x-1}$ tại điểm x_0 bất kì, $x_0 \neq 1$.

9.5. Tìm toạ độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3.

9.6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -3x^2$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y = 6x + 5$.

9.7. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = t^3 - 4t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 3$ giây và $t = 5$ giây.

BÀI 32

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A – Kiến thức cần nhớ

1. Phép toán

$(u+v)' = u' + v'$;

$(u-v)' = u' - v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$(ku)' = ku'$ (k là hằng số);

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x và ta có $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

3. Công thức đạo hàm

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$;

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$;

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$;

$(e^x)' = e^x$.

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (nếu $x^{\alpha-1}$ có nghĩa);

$(\sin x)' = \cos x$;

$(a^x)' = a^x \ln a$;

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $x > 0$ $(0 < a \neq 1)$;

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 1)$;

b) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$.

Giải

a) Áp dụng các công thức và phép toán đạo hàm, ta có:

$$y' = \left(\sqrt{x}+2\right)'\left(x^2+1\right) + \left(\sqrt{x}+2\right)\left(x^2+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2+1\right) + \left(\sqrt{x}+2\right)2x$$

$$= \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + 2x\left(\sqrt{x}+2\right).$$

b) Ta có:

$$y' = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Ta có: $y' = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)' = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)'$

$$= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x.$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2e^{-2x}$ và tìm x để $y' = 0$.

Giải

Ta có: $y' = \left(x^2\right)'e^{-2x} + x^2\left(e^{-2x}\right)' = 2xe^{-2x} + x^2e^{-2x}(-2x)'$

$$= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} = 2\left(x-x^2\right)e^{-2x}.$$

Do $e^{-2x} > 0$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = x + \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ và $g(x) = x\ln|2-x|$. Tính $\frac{f'(0)}{g'(0)}$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 1 + \frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

$$g'(x) = \ln|2-x| + x\frac{(2-x)'}{2-x} = \ln|2-x| - \frac{x}{2-x}.$$

Thay $x = 0$ vào các đẳng thức trên, ta được:

$$f'(0) = 1 + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 3,\ g'(0) = \ln 2 \text{ và } \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{3}{\ln 2}.$$

C – Bài tập

9.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x+1)^2(x^2-1)$;   b) $y = \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3$.

9.9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x+2}$;   b) $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$.

9.10. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ và $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$. Tính $f'(0) - g'(1)$.

9.11. Tính đạo hàm của hàm số $y = 3\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

9.12. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$. Tính đạo hàm $f'(x)$ và chứng tỏ $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

9.13. Cho hàm số $f(x) = 4\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \le 8$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $f'(x) = 8$.

9.14. Biết y là hàm số của x thoả mãn phương trình $xy = 1 + \ln y$. Tính $y'(0)$.

9.15. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là v_0 (m/s) (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

9.16. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức $s(t) = 10 + \sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

BÀI 33

ĐẠO HÀM CẤP HAI

A – Kiến thức cần nhớ

- Định nghĩa: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.
- Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời của chuyển động có phương trình $s = s(t)$ là $a(t) = s''(t)$.

B – Ví dụ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = x^2e^{-x}$.

Giải

a) Ta có:

$$y' = -\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' = -4\pi\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$y'' = -4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' = -16\pi^2\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

b) Ta có:

$$y' = \left(x^2\right)'e^{-x} + x^2\left(e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x};$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(2x - x^2\right)'e^{-x} + \left(2x - x^2\right)\left(e^{-x}\right)' \\ &= (2 - 2x)e^{-x} - \left(2x - x^2\right)e^{-x} \\ &= \left(x^2 - 4x + 2\right)e^{-x}. \end{aligned}$$

Chú ý. Hàm số dạng $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ (A, ω, φ là các hằng số, $A > 0, \omega > 0$) biểu diễn phương trình chuyển động của một dao động điều hoà. Hàm số đó thoả mãn phương trình $y'' = -\omega^2 y$. Phương trình này vì vậy được gọi là phương trình dao động điều hoà (một lớp phương trình quan trọng trong Vật lí).

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Tính $f''(0)$.

Giải

Ta có:

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\dfrac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$f''(x)=-\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}.$$

Thay $x=0$ vào biểu thức trên ta được $f''(0)=0$.

C – BÀI TẬP

9.17. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+1$; b) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

9.18. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\ln|2x-1|$; b) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

9.19. Cho hàm số $f(x)=xe^{x^2}+\ln(x+1)$.

Tính $f'(0)$ và $f''(0)$.

9.20. Cho $f(x)=\left(x^2+a\right)^2+b$ (a, b là tham số). Biết $f(0)=2$ và $f''(1)=8$, tìm a và b.

9.21. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t)=15+\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây.

Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t=3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A – Trắc nghiệm

9.22. Cho $f(x) = \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$. Đạo hàm $f'(0)$ bằng

A. 1.　　B. -1.　　C. $2\cos\frac{\pi}{12}$.　　D. $-2\cos\frac{\pi}{12}$.

9.23. Cho $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 1$. Đạo hàm $f'(x) > 0$ khi

A. $x < -1$.　　B. $x > 3$.　　C. $-1 < x < 3$.　　D. $x > -1$.

9.24. Đạo hàm của hàm số $y = \ln|1 - 2x|$ là

A. $y' = \frac{1}{|1 - 2x|}$.　　B. $y' = \frac{1}{1 - 2x}$.

C. $y' = \frac{2}{2x - 1}$.　　D. $y' = \frac{-2}{2x - 1}$.

9.25. Đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{2x + 1}{x - 1}\right)^3$ là

A. $3\left(\frac{2x + 1}{x - 1}\right)^2$.　　B. $-9\frac{(2x + 1)^2}{(x - 1)^5}$.

C. $-9\frac{(2x + 1)^2}{(x - 1)^4}$.　　D. $9\frac{(2x + 1)^2}{(x - 1)^4}$.

9.26. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$ là

A. $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 2\sin^2 x}}$.　　B. $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 + 2\sin^2 x}}$.

C. $y' = \frac{2\sin 2x}{\sqrt{1 + 2\sin^2 x}}$.　　D. $y' = \frac{\sin x \cos x}{2\sqrt{1 + 2\sin^2 x}}$.

9.27. Đạo hàm của hàm số $y = x\sin^2 x$ là

A. $y' = \sin^2 x + 2x\sin x$.　　B. $y' = \sin^2 x + x\sin 2x$.

C. $y' = \sin^2 x + 2x\cos x$.　　D. $y' = \sin^2 x + x\cos 2x$.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

9.28. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{1+5g(x)}$ với $g(0) = 3$, $g'(0) = -8$. Đạo hàm $f'(0)$ bằng

A. 10. B. –8. C. –5. D. 5.

9.29. Cho $f(x)=x\sin x$ và $g(x)=\dfrac{\cos x}{x}$. Giá trị $\dfrac{f'(1)}{g'(1)}$ là

A. –1. B. sin1 + cos1. C. 1. D. –sin1 – cos1.

9.30. Cho $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ là

A. {1}. B. {–1}. C. {0; 1}. D. {–1; 1}.

9.31. Cho hai hàm số $f(x)=2x^3+3x-1$ và $g(x)=3(x^2+x)+2$.

Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) < g'(x)$ là

A. $(-\infty; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

9.32. Cho $S(r)$ là diện tích hình tròn bán kính r. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S'(r)$ là diện tích nửa hình tròn đó.

B. $S'(r)$ là chu vi đường tròn đó.

C. $S'(r)$ là chu vi nửa đường tròn đó.

D. $S'(r)$ là hai lần chu vi đường tròn đó.

9.33. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x(x-1)^2+x^2+1$ tại điểm $A(-1;-2)$ có phương trình là

A. $y = 6x + 4$. B. $y = 6x - 4$. C. $y = -2x - 4$. D. $y = -2x + 4$.

9.34. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3-4x^2+5x+3$ với hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là

A. $y=3x-25$. B. $y=-3x+25$. C. $y=-3x+\dfrac{25}{3}$. D. $y=3x-\dfrac{25}{3}$.

9.35. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+2}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là

A. $k = 5$. B. $k = 2$. C. $k = -2$. D. $k = -5$.

9.36. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+1$ với hệ số góc lớn nhất có phương trình là

A. $y = 3x - 5$. B. $y = 3x - 7$. C. $y = 3x + 5$. D. $y = 3x + 7$.

9.37. Cho $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$. Giá trị của $f''(0)$ là

A. 4. B. –4. C. 0. D. –1.

9.38. Cho hàm số $y = e^x \cos x$. Đẳng thức đúng là

A. $y'' - 2y' - 2y = 0$.
B. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
C. $y'' + 2y' - 2y = 0$.
D. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

9.39. Độ cao (tính bằng mét) của một vật rơi tự do sau t giây là $h(t) = 400 - 4,9t^2$. Giá trị tuyệt đối của vận tốc của vật khi nó chạm đất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) là

A. 88,5 m/s. B. 86,7 m/s. C. 89,4 m/s. D. 90 m/s.

9.40. Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, ở đó s tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. 4,5 cm/s^2.
B. 5,5 cm/s^2.
C. 6,3 cm/s^2.
D. 7,1 cm/s^2.

9.41. Vị trí của một vật chuyển động (tính bằng mét) sau t giây được xác định bởi $s = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t,\ t > 0$. Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc $v = 20$ m/s là

A. 140 m/s^2. B. 120 m/s^2. C. 130 m/s^2. D. 100 m/s^2.

B – Tự luận

9.42. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)^3$;

b) $y = 2^x + \log_3(1 - 2x)$;

c) $y = \frac{1 - 2x}{x^2 + 1}$;

d) $y = \sin 2x + \cos^2 3x$.

9.43. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm tập xác định của $f'(x)$.

c) Tìm x sao cho $f'(x) = 0$.

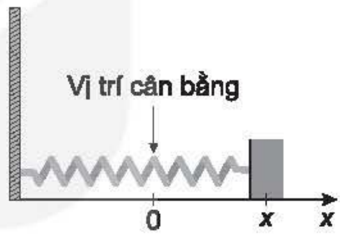
9.44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{nếu } x \le 0 \\ -x^3 + mx & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

9.45. Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ ($a \in \mathbb{R}$ là tham số). Tìm a để $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

9.46. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có đồ thị là đường cong (C). Tìm toạ độ điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với đường thẳng có phương trình $y = 2x - 1$.

9.47. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x^2 - 1)^2 - 3$ tại các giao điểm của nó với đồ thị hàm số $y = 10 - x^2$.

9.48. Một vật gắn trên lò xo chuyển động theo phương ngang trên một mặt phẳng nhẵn (H.9.1). Phương trình chuyển động của vật được cho bởi $x = 8\sin\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimét. Tìm vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất). Vật chuyển động theo hướng nào tại thời điểm đó?



Hình 9.1

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A – Trắc nghiệm

1. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Hàm số $y = \cos\frac{2x}{3}$ là hàm số tuần hoàn với chu kì

A. 2π.

B. π.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. 3π.

3. Nghiệm lớn nhất của phương trình lượng giác $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$ trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$ là

A. $-\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{5\pi}{18}$. D. $\frac{17\pi}{18}$.

4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1, u_{10} = -17$. Số hạng thứ 100 của cấp số cộng này là

A. −197. B. −199. C. −170. D. 289.

5. Cho cấp số nhân có số hạng thứ năm bằng 48 và số hạng thứ mười hai bằng −6 144. Số hạng thứ mười của cấp số nhân này bằng

A. 1 536. B. −1 536. C. 3 072. D. −3 072.

6. Số thập phân vô hạn tuần hoàn x = 1,(2) = 1,2222... viết được dưới dạng phân số tối giản là

A. $1\frac{2}{9}$. B. $\frac{11}{9}$. C. $\frac{10}{9}$. D. $\frac{22}{18}$.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề **sai** là

A. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. B. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. C. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = -\infty$. D. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$.

8. Giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ -2x + m & \text{khi } x \le -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là

A. 3. B. 1. C. −3. D. −1.

9. Hàm số đồng biến trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$ là

A. $y = 2^{-x}$. B. $y = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$. C. $y = \ln x$. D. $y = \log x$.

10. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2 - x + 1} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là

A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

11. Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x + e^{x^2-1}$ là

A. $y' = \sin 4x + 2xe^{x^2-1}$. B. $y' = 2\sin 2x + 2xe^{x^2-1}$.

C. $y' = 2\sin 4x + 2xe^{x^2-1}$. D. $y' = 4\sin 2x \cos 2x + e^{x^2-1}$.

12. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Trong các khẳng định sau, khẳng định đúng là

A. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 2 giây là a = 0 m/s^2.

B. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm t = 2 giây là v = –4 m/s.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t = 3 giây là a = 12 m/s^2.

D. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm t = 3 giây là v = 0 m/s.

Dữ liệu sau dùng cho các câu hỏi 13, 14.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm sau về thời gian sử dụng mạng xã hội của một nhóm học sinh trong ngày.

Thời gian (giờ)	[0; 0,5)	[0,5; 1)	[1; 1,5)	[1,5; 2)	[2; 2,5)
Số học sinh	2	5	8	6	4

13. Thời gian (giờ) sử dụng mạng xã hội trung bình trong ngày của nhóm học sinh là

A. 1,0. B. 1,25. C. 1,35. D. 1,5.

14. Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm

A. [0,5; 1). B. [1; 1,5). C. [1,5; 2). D. [2; 2,5).

15. Trong tỉnh X, tỉ lệ học sinh học giỏi môn Ngữ văn là 9%, học giỏi môn Toán là 12% và học giỏi cả hai môn là 7%. Tỉ lệ học sinh tỉnh X học giỏi môn Ngữ văn hoặc học giỏi môn Toán là

A. 14%. B. 15%. C. 13%. D. 14,5%.

16. Có hai hộp đựng bi. Hộp I có 3 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Hộp 2 có 5 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I và bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II. Xác suất để hai viên bi lấy ra có màu khác nhau là

A. $\frac{14}{29}$. B. $\frac{13}{30}$. C. $\frac{15}{28}$. D. $\frac{13}{31}$.

17. Có bốn đồng xu I, II, III và IV. Xác suất xuất hiện mặt ngửa khi gieo đồng xu I và II là $\frac{1}{2}$. Xác suất xuất hiện mặt ngửa khi gieo đồng xu III và VI là $\frac{2}{3}$.

Bạn Sơn gieo đồng thời hai đồng xu I, II. Bạn Tùng độc lập với bạn Sơn, gieo đồng thời hai đồng xu III, IV. Xác suất để cả 4 đồng xu đều xuất hiện mặt ngửa là

A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{3}{10}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{4}{11}$.

18. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng c. Gọi a là đường thẳng nằm trên (P) và vuông góc với đường thẳng c; b là đường thẳng nằm trên (Q) và tạo với đường thẳng c một góc 60°. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng

A. 60°. B. 90°. C. 150°. D. 30°.

19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng AC và BC' bằng

A. 90°. B. 30°. C. 60°. D. 45°.

20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy ($ABCD$), tam giác SAB đều, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{10}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{5}$.

21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

22. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'B'C'$ là hình tứ diện đều cạnh bằng a. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B – Tự luận

25. Cho $\sin x = -\frac{1}{3}$, $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính giá trị $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

26. Chứng minh rằng:

a) $\sin 3x = 4 \sin x \sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)$;

b) $\dfrac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$.

27. Xét xem các dãy số với công thức tổng quát sau có phải là cấp số cộng/cấp số nhân hay không. Tìm số hạng đầu tiên và công sai/công bội nếu có.

a) $u_n = 5n - 7$; b) $u_n = 9 \cdot 2^n$; c) $u_n = n^2 - n + 1$.

28. Một công ty kĩ thuật đưa ra hai phương án về lương cho kĩ sư làm việc tại công ty như sau:

Phương án 1: Mức lương của quý làm việc đầu tiên là 64,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 10 triệu đồng mỗi quý.

Phương án 2: Mức lương của quý làm việc đầu tiên là 24 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 1,2 lần mỗi quý.

Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 5 năm làm việc cho công ty này theo mỗi phương án trên. Kĩ sư nên chọn phương án nhận lương nào?

29. Giả sử u_n là số hạng thứ n của dãy số (u_n) và $u_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$.

a) Chứng tỏ rằng $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ và $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó suy ra (u_n) là dãy số Fibonacci.

b) Viết 11 số hạng đầu tiên của dãy Fibonacci và 10 tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ đầu tiên.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

30. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2 - x - 10}{x + 2}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - x}{2x + 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{(x-2)^2}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to-5^-} \dfrac{2x}{x+5}$.

31. Tìm m để hàm số sau liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ m\cdot 4^{-x}+1 & \text{khi } x\le -1.\end{cases}$$

32. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x^2-3x}=4^{4x}$;

b) $\log_3(x^2-x-3)=\log_3(2x-1)+1$.

33. Cho các hàm số $f(x)=3^{2x-1}$ và $g(x)=x\ln 9$. Giải bất phương trình $f'(x)<g'(x)$.

34. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\cos^2 x+\sqrt{3x^2+x+1}$;

b) $y=\log_5^2 x+e^{2-7x}$.

35. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2-11x+13$ tại điểm M có hệ số góc là 1. Tìm toạ độ điểm M.

36. Cho phương trình dao động $x(t)=10\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t+\dfrac{\pi}{3}\right)$, ở đây li độ x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây.

a) Tìm thời điểm đầu tiên để vật có li độ lớn nhất.

b) Tìm thời điểm đầu tiên để vật có vận tốc bằng 0.

c) Tìm thời điểm đầu tiên để vật có gia tốc bằng 0.

37. Một công ty bất động sản đã thống kê số lượng khách hàng theo giá đất họ đầu tư và thu được kết quả như sau:

Mức giá (triệu đồng/m^2)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)
Số khách hàng	15	25	38	29	13

a) Ước lượng mức giá có nhiều khách hàng lựa chọn nhất.

b) Công ty muốn hướng đến 25% khách hàng cao cấp nhất thì nên kinh doanh bất động sản với mức giá ít nhất là bao nhiêu?

38. Gieo hai xúc xắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Xét các biến cố A, B sau đây:

A: "Có ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm".

B: "Tổng số chấm xuất hiện trên mặt của hai xúc xắc bằng 7".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$.

b) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

40. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

41. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, tam giác $AB'C'$ cân tại A, mặt phẳng $(AB'C')$ vuông góc với mặt phẳng $(A'B'C')$ và $AA' = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh rằng $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

c) Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$.

42. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

a) Tính theo a thể tích khối hộp chữ nhật.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

43. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB' và CC'.

a) Tính theo a thể tích khối tứ diện $AA'MN$.

b) Tính côsin góc nhị diện $[A, MN, A']$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHƯƠNG VI – HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM LÔGARIT

Bài 18 LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

6.1. a) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$.

b) $25^{\frac{3}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$.

c) $32^{-\frac{2}{5}} = \left(2^5\right)^{-\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.

d) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

6.2. a) Do $\dfrac{3}{4} < \dfrac{5}{6}$ và $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$ nên $a < 1$.

b) Do $\dfrac{11}{6} < \dfrac{15}{8}$ và $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$ nên $a > 1$.

6.3. a) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{20}} = \sqrt[5]{2^5 \cdot \left(x^3\right)^5 \cdot \left(y^4\right)^5} = 2x^3y^4$.

b) $6\sqrt[3]{9x^2} \cdot 3\sqrt[3]{24x} = 18\sqrt[3]{9x^2 \cdot 24x} = 18\sqrt[3]{6^3 \cdot x^3} = 18 \cdot 6 \cdot x = 108x$.

6.4. a) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{48} = 2\sqrt{3 \cdot 2^2} - 3\sqrt{3 \cdot 3^2} + 2\sqrt{3 \cdot 4^2}$

$= 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

b) $8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3} = 8xy - 5xy + 2xy = 5xy$.

6.5. a) $\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{24}} = a^{\sqrt{6 \cdot 24}} = a^{12}$.

b) $a^{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a$.

c) $a^{-\sqrt{3}} : a^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = a^{-\sqrt{3}} : a^{4-2\sqrt{3}} = a^{-4+\sqrt{3}}$.

d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}} = a$.

6.6. Vì $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}$ nên

$$B = \frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a - b - a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - b}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}.$$

Ta có: $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$ nên

$$B = \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right).$$

Do đó $A = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6.7. Thay $t = 3\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$ (giờ) vào công thức ta được số vi khuẩn sau $3\dfrac{1}{2}$ giờ là

$$N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}} = 100 \cdot 2^{\frac{7}{4}} \approx 336 \text{ (con)}.$$

6.8. Thay $L = 19{,}6$ vào công thức ta được chu kì dao động của con lắc là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9{,}8}} = 2\pi\sqrt{\frac{19{,}6}{9{,}8}} \approx 8{,}9 \text{ (giây)}.$$

6.9. a) Theo định luật thứ ba của Kepler, ta có:

$$p^2 = d^3 \text{ hay } p = \sqrt{d^3}.$$

b) Thay $p = 29{,}46$ vào công thức $p = \sqrt{d^3}$, ta được $d \approx 9{,}54$ AU.

6.10. a) Thay $t = 687$ vào công thức ta được khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} \approx 141{,}48 \text{ (triệu dặm).}$$

b) Thay $t = 365$ vào công thức ta được khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là:

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} \approx 92{,}81 \text{ (triệu dặm).}$$

Bài 19 LÔGARIT

6.11. a) $\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6.$

b) $\log 1\,000 = \log 10^3 = 3.$

c) $\log_5 1\,250 - \log_5 10 = \log_5 \frac{1\,250}{10} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3.$

d) $4^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9.$

6.12.

a) $\log_a\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \log_a\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \log_a\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$
$= \log_a 1 = 0.$

b) $\ln\left(1 + e^{2x}\right) = \ln\left[e^{2x}\left(1 + e^{-2x}\right)\right] = \ln e^{2x} + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$
$= 2x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right).$

6.13. a) $\log_2 48 = \log_2(3 \cdot 2^4) = \log_2 3 + \log_2 2^4 \approx 1{,}585 + 4 = 5{,}585.$

b) $\log_4 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} = \frac{3\log_2 3}{2} \approx \frac{3}{2} \cdot 1{,}585 = 2{,}3775.$

6.14. Ta có: $\log_{15} 10 = \frac{\log_5 10}{\log_5 15} = \frac{\log_5(2 \cdot 5)}{\log_5(3 \cdot 5)} = \frac{\log_5 2 + 1}{\log_5 3 + 1}.$

Mà $\log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = \frac{1}{a}$ và $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{2b}$

nên $\log_{15} 10 = \frac{\frac{1}{2b} + 1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{(1 + 2b)a}{2b(a + 1)}.$

6.15. Ta có: $\log_{49} 32 = \log_{49} 2^5 = 5\log_{49} 2 = \dfrac{5}{\log_2 49} = \dfrac{5}{\log_2 7^2} = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_2 7}$.

Do $\log_2 14 = a$ nên $a = \log_2(7\cdot 2) = 1 + \log_2 7$. Suy ra $\log_{49} 32 = \dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{a-1}$.

6.16. a) $\log_4 \dfrac{1}{3} < \log_3 4$. b) $2^{\log_6 3} > 3^{\log_6 \frac{1}{2}}$.

6.17. Số chữ số của 2^{2023} là: $\left[\log 2^{2023}\right] + 1 = [2\,023 \cdot \log 2] + 1 = 609$.

6.18. Để số tiền ban đầu tăng gấp đôi thì $A = 2P$.

Thay $A = 2P$ vào công thức lãi kép ta có:

$$2P = P(1+r)^t \text{, suy ra } (1+r)^t = 2 \text{, tức là } t = \log_{1+r} 2 \text{ (năm).}$$

6.19. Lãi suất năm là 8% nên lãi suất kì hạn 6 tháng sẽ là r = 4% = 0,04.

Thay $P = 100$; $r = 0{,}04$ và $A = 120$ vào công thức $A = P(1+r)^t$, ta được:

$$120 = 100(1+0{,}04)^t.$$

Suy ra $1{,}2 = 1{,}04^t$, hay $t = \log_{1{,}04} 1{,}2 \approx 4{,}65$.

Vậy sau 5 kì gửi tiết kiệm kì hạn 6 tháng, tức là sau 30 tháng, người đó sẽ nhận được ít nhất 120 triệu đồng.

6.20. a) Thay $R = 1{,}4$ và $x = 0{,}02\%$ vào công thức, ta được: $1{,}4 = e^{k\cdot\frac{0{,}02}{100}}$.

Suy ra $k \approx 1\,682{,}36$.

b) $R = e^{1\,682{,}36\cdot\frac{0{,}17}{100}} \approx 17{,}46$.

c) Thay $R = 100$ vào công thức, ta được: $100 = e^{1\,682{,}36x}$. Suy ra $x \approx 0{,}27\%$.

d) Với $R \geq 5$ thì $x \geq 0{,}096\%$, tức là một người có nồng độ cồn trong máu từ khoảng $0{,}096\%$ trở lên thì không được lái xe.

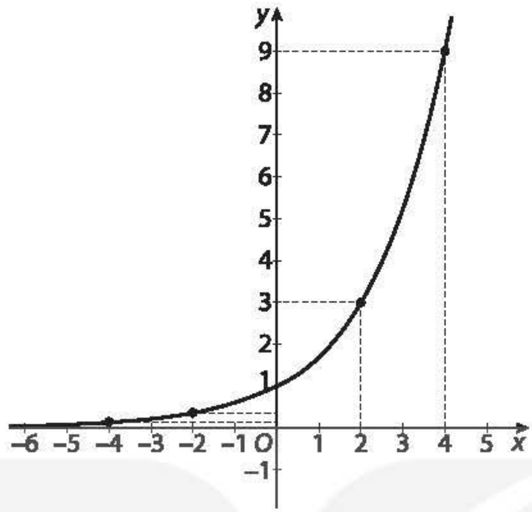
Bài 20 HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

6.21. a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \left(\sqrt{3}\right)^x$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	1	3	9

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

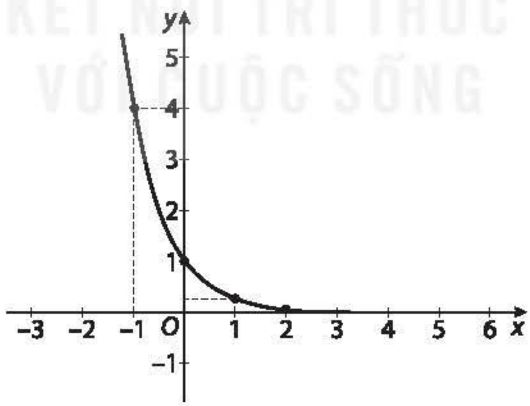
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ như hình sau:



b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

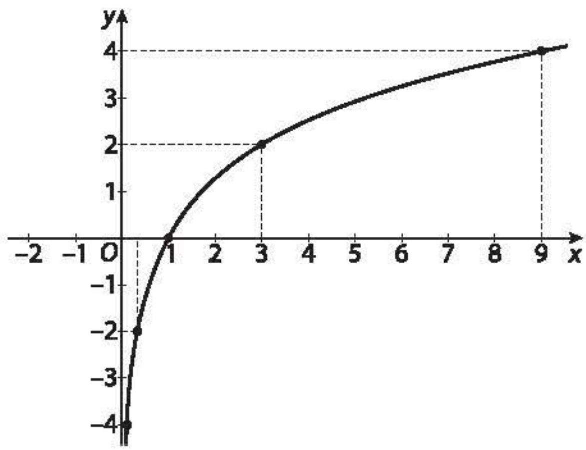
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ như hình sau:



6.22. a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_{\sqrt{3}} x$	-4	-2	0	2	4

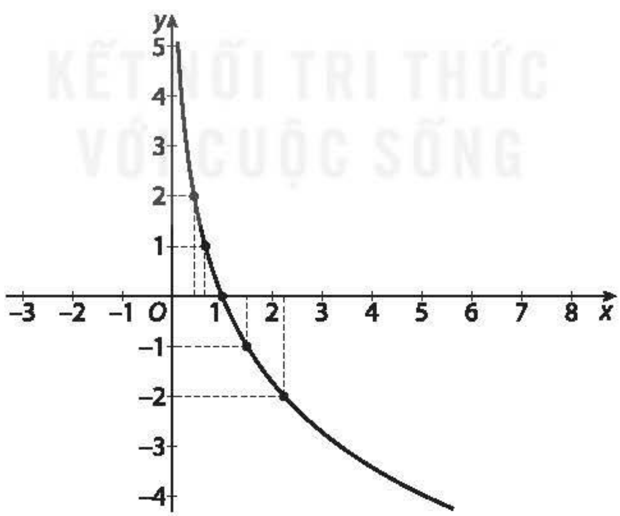
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ như hình sau:



b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
$y = \log_{\frac{2}{3}} x$	−2	−1	0	1	2

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ như hình sau:



6.23. a) $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \dfrac{a^{x+1}}{a^x} = a$; b) $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{f(x)}$;

c) $f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

6.24. a) Tập xác định của hàm số là $(-1;+\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ do $|x-1|>0\ \forall x\neq 1$.

6.25. a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log_a\dfrac{1}{x}=-\log_a x=-f(x)$.

b) $f(x^{\alpha})=\log_a x^{\alpha}=\alpha\log_a x=\alpha f(x)$.

6.26. a) Ta có: $f(x)=\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Rightarrow f(-x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}-e^x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\sinh x$ là hàm số lẻ.

b) Ta có: $g(x)=\cosh x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Rightarrow g(-x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}+e^x)=g(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\cosh x$ là hàm số chẵn.

c) Ta có: $(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2-\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\dfrac{1}{4}\cdot 2e^{-x}\cdot 2e^x=1$.

6.27. a) $p(10)=100\cdot(0,97)^{10}\approx 74\%$.

b) $p(25)=100\cdot(0,97)^{25}\approx 47\%$.

6.28. Để giải câu a và câu b, ta sử dụng công thức lãi kép theo định kì để tính tổng số tiền thu được $A=P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^t$, trong đó P là số tiền vốn ban đầu, r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân), n là số kì tính lãi trong một năm và t là số kì gửi.

a) Ta có: P = 120, r = 6% = 0,06, n = 4, t = 20. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A=120\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{20}=120\cdot 1,015^{20}\approx 161,623 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Ta có: P = 120, r = 6% = 0,06, n = 12, t = 60. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A=120\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{60}=120\cdot 1,005^{60}\approx 161,862 \text{ (triệu đồng)}.$$

c) Ta sử dụng công thức lãi kép liên tục $A=Pe^{rt}$, ở đây r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân) và t là số năm gửi tiết kiệm.

Ta có: P = 120, r = 6% = 0,06, t = 5 nên

$$A=120\cdot e^{0,06\cdot 5}=120\cdot e^{0,3}\approx 161,983 \text{ (triệu đồng)}.$$

6.29. a) $m(0)=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=25$ (g).

b) $m(2500)=25\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2500}{1600}}\approx 8{,}46$ (g).

6.30. a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm 10^{-7} W/m^2 là $L=10\log\frac{10^{-7}}{10^{-12}}=50$ (dB).

b) Ta có: $10\log\frac{1\,000I}{I_0}=10\cdot\left(\log 1\,000+\log\frac{I}{I_0}\right)=30+10\log\frac{I}{I_0}$.

Vậy mức cường độ âm tăng lên 30 dB.

Bài 21 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

6.31. a) $4^{2x-1}=8^{x+3}\Leftrightarrow 2^{4x-2}=2^{3x+9}\Leftrightarrow 4x-2=3x+9\Leftrightarrow x=11$.

b) $9^{2x}\cdot 27^{x^2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{4x}\cdot 3^{3x^2}=3^{-1}\Leftrightarrow 3^{3x^2+4x+1}=1$

$$\Leftrightarrow 3x^2+4x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\ x=-1.\end{array}\right.$$

c) $(e^4)^x\cdot e^{x^2}=e^{12}\Leftrightarrow e^{4x}\cdot e^{x^2}=e^{12}\Leftrightarrow e^{x^2+4x-12}=1$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-6.\end{array}\right.$$

d) $5^{2x-1}=20\Leftrightarrow 2x-1=\log_5 20\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(1+\log_5 20)$.

6.32. a) Điều kiện: $x>\frac{1}{4}$.

Khi đó: $\log_3(4x-1)=2\Leftrightarrow 4x-1=9\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ (thoả mãn).

b) Điều kiện: $x>1$. Khi đó: $\log_2(x^2-1)=\log_2(3x+3)\Leftrightarrow x^2-1=3x+3$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\ \text{(loại)}\\ x=4.\end{array}\right.$$

c) Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Ta có: $\log_x 81 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 81 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9 \text{ (loại)} \\ x = 9. \end{array}\right.$

d) $\log_2 8^x = -3 \Leftrightarrow 8^x = 2^{-3} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

6.33. a) $2^{2x-3} > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{2x-3} > 2^{-2} \Leftrightarrow 2x - 3 > -2 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x-6} \Leftrightarrow x^2 \leq 5x - 6 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$.

c) $25^x \leq 5^{4x-3} \Leftrightarrow 5^{2x} \leq 5^{4x-3} \Leftrightarrow 2x \leq 4x - 3 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$.

d) $9^x - 3^x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3^x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

6.34. a) Điều kiện: $x > -\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\log_3(2x+1) \geq 2 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 3^2 \Leftrightarrow x \geq 4$ (thoả mãn).

b) Điều kiện: $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{9}{2}$.

Ta có: $\log_2(3x-1) < \log_2(9-2x) \Leftrightarrow 3x - 1 < 9 - 2x \Leftrightarrow 5x < 10 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\dfrac{1}{3} < x < 2$.

c) Điều kiện: $x > \dfrac{5}{4}$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x-5) \Leftrightarrow x + 1 \geq 4x - 5 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\dfrac{5}{4} < x \leq 2$.

d) Điều kiện: $x > \dfrac{1}{2}$. Ta có: $\log_2(2x-1) \leq \log_4(x+1)^2$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1) \leq \dfrac{\log_2(x+1)^2}{\log_2 4} \Leftrightarrow \log_2(2x-1) \leq \dfrac{\log_2(x+1)^2}{2}$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-1)^2 \leq \log_2(x+1)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\dfrac{1}{2} < x \leq 2$.

6.35. a) $y = \dfrac{1}{3^x - 9}$. Hàm số xác định khi $3^x \neq 9$, tức là $x \neq 2$.

b) $y = \ln\left(4 - x^2\right)$. Hàm số xác định khi $4 - x^2 > 0$, tức là $-2 < x < 2$.

c) $y = \log\dfrac{1}{5 - x}$. Hàm số xác định khi $\dfrac{1}{5 - x} > 0$, tức là $x < 5$.

d) $y = \dfrac{2}{\log_4(x - 1)}$. Hàm số xác định khi $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ \log_4(x - 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1, x \neq 2$.

6.36. a) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 320$, ta tìm được $h \approx 5,965$ km.

Vậy độ cao của máy bay là khoảng 5,965 km.

b) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 667$, ta tìm được $h \approx 0,9$ km.

Vậy chiều cao của ngọn núi là khoảng 0,9 km.

6.37. a) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 500$, ta được $t \approx 1,91$ năm.

Vậy chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng sau khoảng 2 năm.

b) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 200$, ta được $t \approx 6,52$ năm.

Vậy chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng sau khoảng 7 năm.

6.38. Chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập là:

$$C(10) = 90 - 50e^{-10} \approx 89,998 \text{ (tỉ đồng).}$$

6.39. Ta có: $7,30 \leq -\log\left[H^+\right] \leq 7,45$

$$\Leftrightarrow -7,30 \geq \log\left[H^+\right] \geq -7,45$$

$$\Leftrightarrow 10^{-7,30} \geq \left[H^+\right] \geq 10^{-7,45}.$$

Vậy nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn $\left[5,01 \cdot 10^{-8}; 3,55 \cdot 10^{-8}\right]$.

6.40. a) Giải phương trình $100 = 10\log\dfrac{I}{10^{-12}}$, ta tìm được $I = 0,01$.

b) Ta có: $70 \leq 10\log\dfrac{I}{10^{-12}} \leq 85$.

Giải bất phương trình này, ta được $10^{-5} \leq I \leq 10^{-3,5}$.

Vậy cường độ âm thay đổi trong đoạn $\left[10^{-5}; 10^{-3,5}\right]$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A – Trắc nghiệm

6.41. A. **6.42.** A. **6.43.** C. **6.44.** C. **6.45.** D. **6.46.** B.

6.47. D. **6.48.** A. **6.49.** C. **6.50.** D. **6.51.** A. **6.52.** D.

B – Tự luận

6.53. Ta tính lần lượt như sau:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}; \log_{\frac{1}{8}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \frac{1}{8}} = \frac{4}{\log_2 2^{-3}} = -\frac{4}{3};$$

$$4^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9.$$

Thay các kết quả vào A, ta được: $A = 2\cdot\frac{3}{2} - 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 9 = 16$. Vậy $A = 16$.

6.54. a) Điều kiện: $x \neq 3, x \neq 7$. Khi đó, ta có:

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{5\cdot\frac{x+5}{x-7}} = 2^{-2}\cdot 2^{7\cdot\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2+\frac{7(x+17)}{x-3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x+5)}{x-7} = -2 + \frac{7(x+17)}{x-3}$$

$\Leftrightarrow 5(x+5)(x-3) = -2(x-7)(x-3) + 7(x+17)(x-7) \Leftrightarrow x = 10.$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 10$.

b) Điều kiện: $x > 1$. Khi đó, ta có:

$$\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 2$. Chỉ có nghiệm $x = 2$ thoả mãn điều kiện. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

6.55. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq 4\cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{1-3x} \geq 2^{2+x} \Leftrightarrow 1 - 3x \geq 2 + x \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4}.$

b) Điều kiện: $1 < x < 3$. Khi đó, ta có:

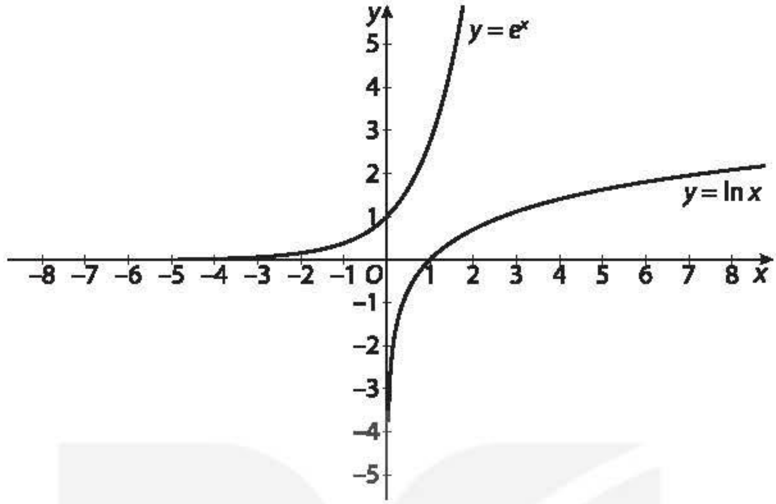
$$2\log(x-1) > \log(3-x) + 1 \Leftrightarrow \log(x-1)^2 > \log 10(3-x)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 > 10(3-x) \Leftrightarrow x^2 + 8x - 29 > 0.$$

Giải bất phương trình này ta được $x > -4 + 3\sqrt{5}$ hoặc $x < -4 - 3\sqrt{5}$.

Kết hợp với điều kiện, ta được $-4 + 3\sqrt{5} < x < 3$.

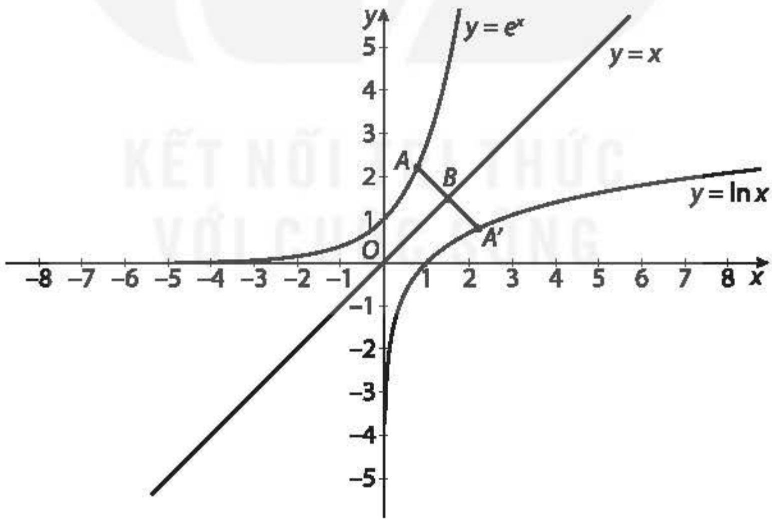
6.56. a) Đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ trên cùng một hệ trục toạ độ như hình sau:



b) Xét điểm $A\left(x_0, e^{x_0}\right)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = e^x$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng $y = x$:

$$d\colon\ y = -x + x_0 + e^{x_0}.$$



Toạ độ giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng $y = x$ là điểm

$$B\left(\frac{x_0 + e^{x_0}}{2}; \frac{x_0 + e^{x_0}}{2}\right).$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $y = x$. Ta tìm được $A'\left(e^{x_0}; x_0\right)$.

Khi đó A' thuộc đồ thị hàm số $y = \ln x$.

Tương tự, nếu điểm $B(x_0; \ln x_0)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \ln x$ thì ta cũng có thể tìm toạ độ của điểm B' đối xứng với B qua đường thẳng $y = x$ và chứng minh B' thuộc đồ thị hàm số $y = e^x$.

Vậy hai đồ thị đã cho đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Chú ý. Tổng quát, có thể chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (tức là đường thẳng $y = x$).

6.57. $f(x) = \log_3(2x + 1) - 2$.

a) Tập xác định của hàm số là $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) $f(40) = \log_3(2 \cdot 40 + 1) - 2 = 2$.

Điểm tương ứng trên đồ thị hàm số là (40; 2).

c) $f(x) = 3 \Leftrightarrow \log_3(2x + 1) - 2 = 3 \Leftrightarrow \log_3(2x + 1) = 5 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3^5 \Leftrightarrow x = 121$.

Điểm tương ứng trên đồ thị hàm số là (121; 3).

d) Gọi $A(x_0; 0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = \log_3(2x + 1) - 2$ với trục hoành. Khi đó $\log_3(2x_0 + 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + 1 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 4$.

Vậy giao điểm cần tìm là (4; 0).

6.58. Chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô sau 5 năm nữa là:

$$C(5) = 800(1 + 0,04)^5 \approx 973 \text{ (nghìn đồng).}$$

6.59. a) Giải phương trình $100\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = 50$, ta được $t = 138$.

Vậy sau 138 ngày thì khối lượng polonium-210 còn 50 g.

b) Giải phương trình $100\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = 10$, ta được $t \approx 458,43$.

Vậy sau khoảng 458,43 ngày thì khối lượng polonium-210 còn 10 g.

6.60. a) Khoảng thời gian giữa hai nốt nhạc khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz là $1\,200 \cdot \log_2 \dfrac{443}{415} \approx 113$ (cent).

b) Giải phương trình $55 = 1\,200 \cdot \log_2 \dfrac{225}{b}$, ta được $b \approx 218$.

Vậy tần số cuối cùng cần tìm là 218 Hz.

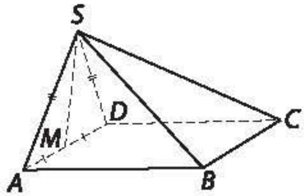
CHƯƠNG VII – QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Bài 22 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

7.1. (H.7.21) Vì $BC\ //\ AD$ nên

$(BC, SA) = (AD, SA) = \widehat{SAD} = 60^\circ$ và

$(BC, SM) = (AD, SM) = 90^\circ$.



Hình 7.21

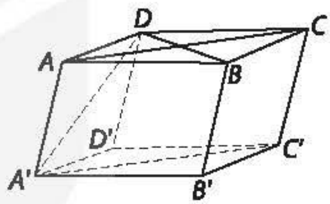
7.2. (H.7.22) Vì $ABCD$ là hình thoi và $A'C'\ //\ AC$ nên

$(A'C', BD) = (AC, BD) = 90^\circ$.

Vì $BB'\ //\ AA'$ nên

$(AD, BB') = (AD, AA') = 180^\circ - \widehat{A'AD} = 60^\circ$ và

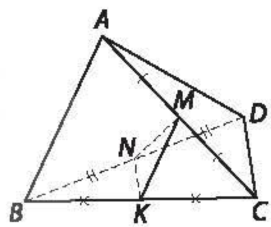
$(A'D, BB') = (A'D, AA') = \widehat{AA'D} = 30^\circ$.



Hình 7.22

7.3. (H.7.23) Lấy K là trung điểm của cạnh BC, ta có: NK và MK lần lượt là đường trung bình của tam giác BCD và tam giác ABC nên $NK = a$, $MK = a\sqrt{2}$.

Do đó, $MN^2 = 3a^2 = NK^2 + MK^2$ suy ra tam giác MNK vuông tại K, hay $MK \perp NK$, mà $MK\ //\ AB$ và $NK\ //\ CD$ nên $(AB, CD) = (MK, NK) = 90^\circ$, hay $AB \perp CD$.



Hình 7.23

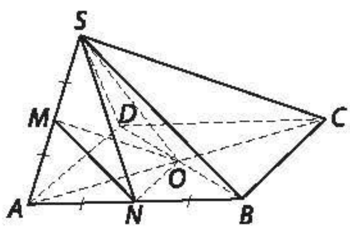
7.4. (H.7.24) a) Ta có: $BD^2 = SB^2 + SD^2 = 2a^2$ nên ΔSBD vuông tại S, mà $MN\ //\ SB$, suy ra $(MN, SD) = (SB, SD) = 90^\circ$.

Với O là giao điểm của AC và BD thì $MO\ //\ SC$.

Khi đó $(MO, SB) = (SC, SB) = \widehat{BSC} = 60^\circ$.

b) Vì $ON\ //\ BC$ nên $(SN, BC) = (SN, ON) = \widehat{SNO}$.

Ta có $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $ON = \dfrac{a}{2}$ và tam giác SNO vuông tại O nên $\tan\widehat{SNO} = \dfrac{SO}{ON} = \sqrt{2}$. Vậy $\tan(SN, BC) = \sqrt{2}$.



Hình 7.24

7.5. (H.7.25) Gọi A, B là hai điểm tại hai vị trí chân thang và C, D là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang, EF là đường chân tường.

Ta có EF // AB nên $(EF, AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$.

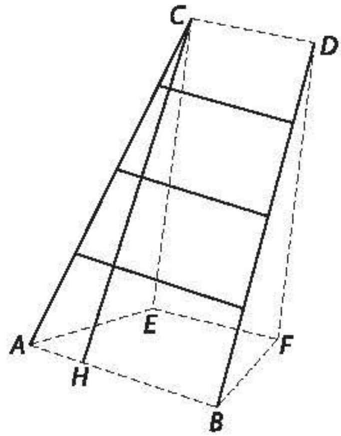
Kẻ CH vuông góc với AB tại H, khi đó

$$AH = \frac{AB - CD}{2} = 10 \text{ (cm)} = 0{,}1 \text{ (m)}.$$

Tam giác ACH vuông tại H nên

$$\cos\widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{0{,}1}{6} = \frac{1}{60},$$

suy ra $\widehat{CAH} \approx 89{,}05^\circ$.



Hình 7.25

Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang bằng khoảng $89{,}05^\circ$.

Bài 23 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

7.6. (H.7.26)

a) Ta có: $BC \perp AB$ và $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$,

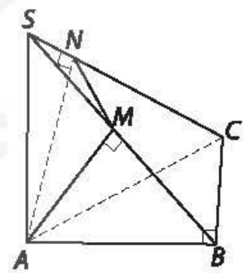
suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AM$, mà $AM \perp SB$,

suy ra $AM \perp (SBC)$.

c) Vì $AM \perp (SBC)$ nên $AM \perp SC$, mà $AN \perp SC$,

suy ra $SC \perp (AMN)$.



Hình 7.26

7.7. (H.7.27)

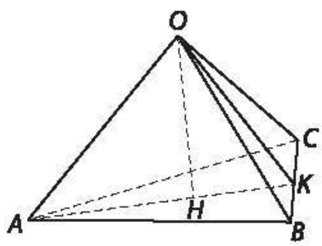
a) Vì $OA \perp OB, OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$,

suy ra $OA \perp BC$.

Vì $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp BC$,

suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Vì $BC \perp (OAH)$ nên $BC \perp AH$. Tương tự, $CA \perp BH$, do đó H là trực tâm của tam giác ABC.



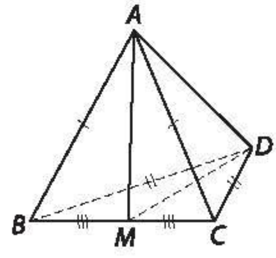
Hình 7.27

c) Gọi K là giao điểm của AH và BC, ta có: $OK \perp BC$ và $OA \perp OK$ nên OK là đường cao của tam giác vuông OBC và OH là đường cao của tam giác vuông OAK.

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông OBC và OAK, ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}$ và $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Từ đó suy ra: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

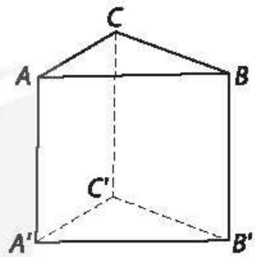
7.8. (H.7.28) Gọi M là trung điểm của BC, ta có: $BC \perp AM, BC \perp MD$. Do đó $BC \perp (AMD)$, suy ra $BC \perp AD$.



Hình 7.28

7.9. (H.7.29) a) Vì $AA' \perp (ABC)$, $AA' \mathbin{//} BB'$ và $(ABC) \mathbin{//} (A'B'C')$ nên $BB' \perp (A'B'C')$.

b) Vì $BC \perp AB, BC \perp BB'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, mà $BC \mathbin{//} B'C'$, suy ra $B'C' \perp (ABB'A')$.



Hình 7.29

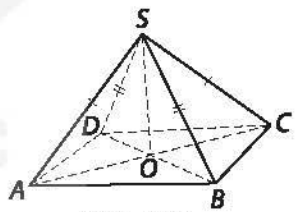
7.10. (H.7.30)

a) Vì O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC và BD, suy ra $SO \perp AC$, $SO \perp BD$.

Do đó $SO \perp (ABCD)$.

b) Vì $AC \perp BD$, $AC \perp SO$ nên $AC \perp (SBD)$.

Tương tự, ta được $BD \perp (SAC)$.

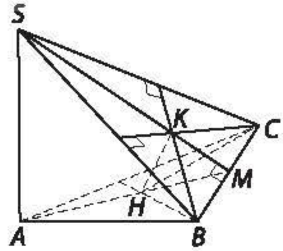


Hình 7.30

7.11. (H.7.31)

a) Vì $BC \perp SA, BC \perp AH$ nên $BC \perp (SAH)$. Gọi M là giao điểm của AH và BC, ta có: $BC \perp (SAM)$, suy ra $BC \perp SM$, mà K là trực tâm của tam giác SBC nên SM đi qua K. Do đó, SK, AH, BC đồng quy tại M.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp CH$, mà $CH \perp AB$, suy ra $CH \perp (SAB)$. Do đó $CH \perp SB$, lại có $SB \perp CK$ nên $SB \perp (CHK)$. Từ đó ta có $SB \perp HK$, tương tự, ta chứng minh được $SC \perp (BHK)$, suy ra $SC \perp HK$. Do đó $HK \perp (SBC)$.



Hình 7.31

7.12. Vì dây dọi song song với cây cột và dây dọi vuông góc với mặt phẳng sàn nên cây cột vuông góc với mặt phẳng sàn.

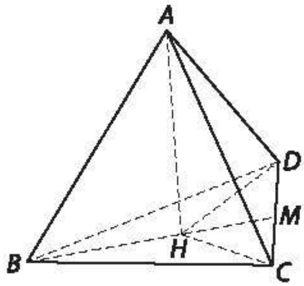
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài 24 PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

7.13. (H.7.32) Kẻ $AH \perp (BCD)$ tại H, ta có BH là hình chiếu vuông góc của AB trên mặt phẳng (BCD) nên góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BH, mà $(AB, BH) = \widehat{ABH}$.

Vì $AB = AC = AD$ nên $HD = HB = HC$, hay H là tâm của tam giác BCD, suy ra $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó ta tính được: $\cos\widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

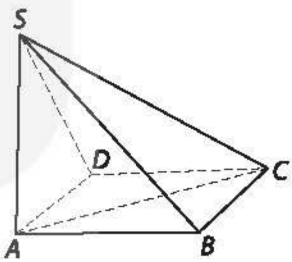


Hình 7.32

Vậy côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7.14. (H.7.33)

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$, do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và AC, mà $(SC, AC) = \widehat{SCA}$. Vì tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45°$. Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$.



Hình 7.33

b) Ta có: $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng SC và SB.

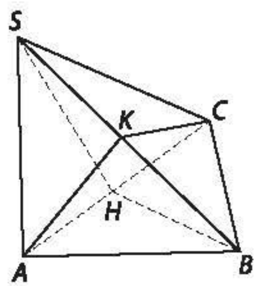
Ta có: $(SB, SC) = \widehat{BSC}$. Xét tam giác SBC vuông tại B, có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}, BC = a.$$

Do đó, $\tan\widehat{BSC} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7.15. (H.7.34)

a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H, mà $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BH$, suy ra $BH \perp (SAC)$. Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAC) nên góc giữa



Hình 7.34

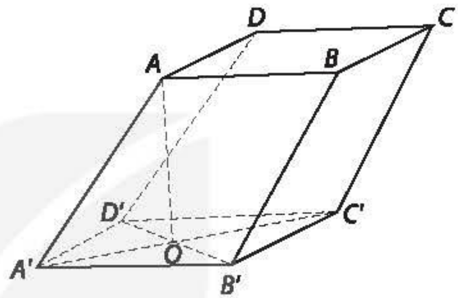
đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SH, mà $(SB,SH)=\widehat{BSH}$.

Ta tính được: $BH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SH=\frac{a\sqrt{26}}{2}$, suy ra $\tan\widehat{BSH}=\frac{BH}{SH}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

b) Kẻ $AK\perp SB$ tại K, mà $BC\perp(SAB)$ nên $BC\perp AK$, suy ra $AK\perp(SBC)$. Do đó CK là hình chiếu vuông góc của AC trên (SBC), suy ra góc giữa đường thẳng AC và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AC và CK, mà $(AC,CK)=\widehat{ACK}$.

Ta có: $AK=\frac{SA\cdot AB}{SB}=a\sqrt{\frac{6}{7}}$, suy ra $\sin\widehat{ACK}=\frac{AK}{AC}=\sqrt{\frac{3}{7}}$.

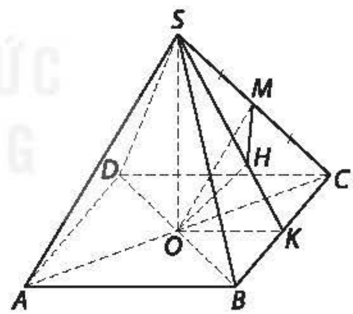
7.16. (H.7.35)



Hình 7.35

Gọi O là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Ta có: $A'O$ là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng góc giữa AA' và $A'O$. Mà $(AA',A'O)=\widehat{AA'O}$, ta lại có $A'O=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\cos\widehat{AA'O}=\frac{OA'}{AA'}=\frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{AA'O}=60^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng 60°.

7.17. (H.7.36)



Hình 7.36

a) Ta có: $SO\perp AC$; $SO\perp BD$ nên $SO\perp(ABCD)$.

b) Vì $AO\perp(SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBD), do đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc giữa hai đường thẳng SA và SO. Mà $(SA,SO)=\widehat{ASO}$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc ASO. Xét tam giác SAC có $SA^2+SC^2=AC^2$ và $SA=SC$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{ASO}=45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng 45°.

c) Kẻ $OK\perp BC$ tại K, $OH\perp SK$ tại H thì ta chứng minh được $OH\perp(SBC)$, suy ra HM là hình chiếu vuông góc của OM trên mặt phẳng (SBC), do đó góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng OM và MH, mà $(OM,MH)=\widehat{OMH}$ nên góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc OMH hay $\widehat{OMH}=\alpha$.

Ta có: $OM = \frac{a}{2}, OK = \frac{a}{2}, SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

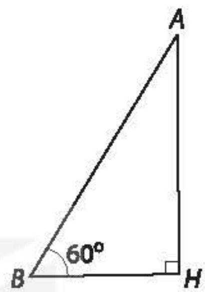
Tam giác SOK vuông tại O, đường cao OH nên $OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vì tam giác OMH vuông tại H nên $\sin\alpha = \sin\widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

7.18. (H.7.37) Gọi A là vị trí con diều, B là vị trí đầu dây diều trên mặt đất, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt đất.

Tam giác ABH vuông tại H, góc ABH bằng $60°$ và AB = 10 m = 1 000 cm.

Ta có: $AH = AB \cdot \sin 60° \approx 866$ (cm).



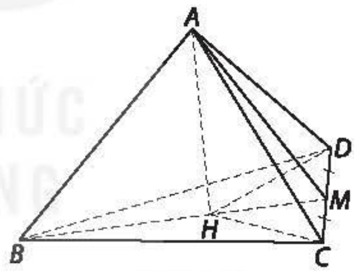
Hình 7.37

Bài 25 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

7.19. (H.7.38)

a) Vì M là trung điểm của CD nên $CD \perp BM$, $CD \perp AM$, do đó $CD \perp (ABM)$, suy ra $CD \perp AH$, ta lại có $AH \perp BM$ nên $AH \perp (BCD)$.

b) Vì $AM \perp CD$, $BM \perp CD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và BM, mà $(AM, BM) = \widehat{AMB}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng $\widehat{AMB}$.

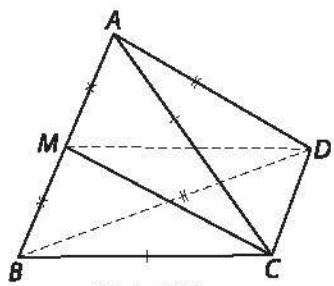


Hình 7.38

Ta có: $HM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác AHM vuông tại H nên $\cos\widehat{AMB} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$.

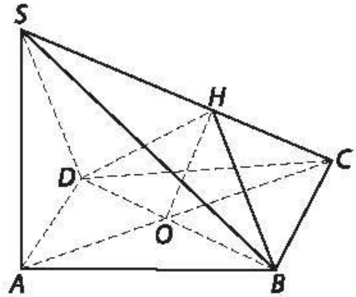
7.20. (H.7.39) Vì M là trung điểm của AB nên $AB \perp CM$, $AB \perp DM$, suy ra $AB \perp (CDM)$.

Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) đều chứa đường thẳng AB nên $(ABC) \perp (CDM)$, $(ABD) \perp (CDM)$.



Hình 7.39

7.21. (H.7.40)



Hình 7.40

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$ mà $BD \perp AC$, do đó $BD \perp (SAC)$.

Vì mặt phẳng (SBD) chứa BD nên $(SBD) \perp (SAC)$.

b) Ta có $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$ mà $SC \perp OH$, do đó $SC \perp (BDH)$.

Vì mặt phẳng (SBC) chứa SC nên $(SBC) \perp (BDH)$.

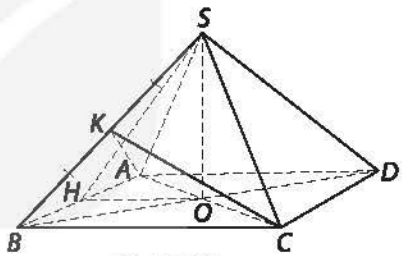
c) Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\Delta CHO \backsim \Delta CAS$ nên $\dfrac{HO}{AS} = \dfrac{CO}{CS}$, suy ra $HO = \dfrac{CO \cdot AS}{CS} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BD}{2}$.

Do đó, tam giác BDH vuông tại H, suy ra $\widehat{BHD} = 90^\circ$.

Ta lại có $BH \perp SC$, $DH \perp SC$ nên $(SBC) \perp (SCD)$.

7.22. (H.7.41)



Hình 7.41

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp AB$, kẻ $OH \perp AB$ tại H thì $AB \perp (SOH)$, suy ra $AB \perp SH$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SH và HO, mà $(SH, HO) = \widehat{SHO}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SHO}$.

Ta tính được $OH = \dfrac{a}{2}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\cos\widehat{SHO} = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Gọi K là trung điểm của SB. Khi đó $AK \perp SB$, $CK \perp SB$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AK và CK.

Ta có: $AK = CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ACK, ta có:

$$\cos\widehat{AKC} = \frac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2 \cdot AK \cdot CK} = \frac{-1}{3}\text{, suy ra } \cos(AK, CK) = -\cos\widehat{AKC} = \frac{1}{3}.$$

Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\dfrac{1}{3}$.

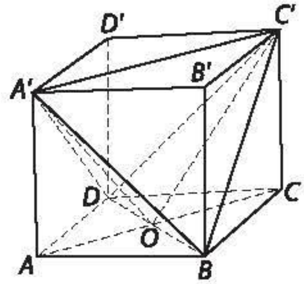
7.23. (H.7.42)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: $AO \perp BD$, $A'O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AO, $A'O$ mà

$(AO, A'O) = \widehat{AOA'}$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $\widehat{AOA'}$. Ta có:

$OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, OA' = \sqrt{OA^2 + AA'^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra $\cos\widehat{AOA'} = \dfrac{AO}{A'O} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



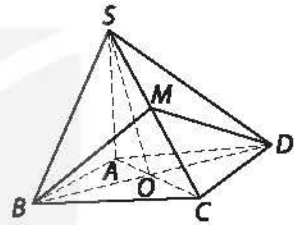
Hình 7.42

b) Vì $A'O \perp BD$, $C'O \perp BD$ nên góc nhị diện $[A', BD, C']$ bằng $\widehat{A'OC'}$.

Ta có $OA' = OC' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $A'C' = a\sqrt{2}$ nên $\cos\widehat{A'OC'} = \dfrac{OA'^2 + OC'^2 - A'C'^2}{2 \cdot OA' \cdot OC'} = \dfrac{2}{9}$.

7.24. (H.7.43) Ta có $SO \perp BD$, $CO \perp BD$ nên góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng $\widehat{SOC}$. Vì tam giác SAO vuông tại A nên $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và

$\cos\widehat{SOC} = -\cos\widehat{SOA} = -\dfrac{OA}{SO} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



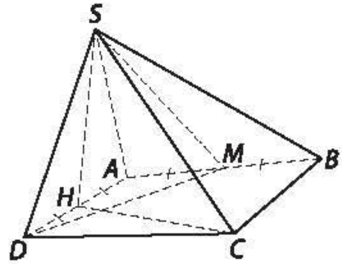
Hình 7.43

Kẻ $BM \perp SC$ tại M thì $DM \perp SC$ nên $[B, SC, D] = \widehat{BMD}$.

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên tam giác SBC vuông tại B, tính được $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$ và $DM = BM = \dfrac{SB \cdot BC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDM, ta có: $\cos\widehat{BMD} = \dfrac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2 \cdot BM \cdot DM} = -\dfrac{3}{4}$.

7.25. (H.7.44)

a) Ta có $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SH \perp AD$ nên $SH \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CH, mà $(SC, CH) = \widehat{SCH}$, ta tính được $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ và $SC = a\sqrt{2}$.

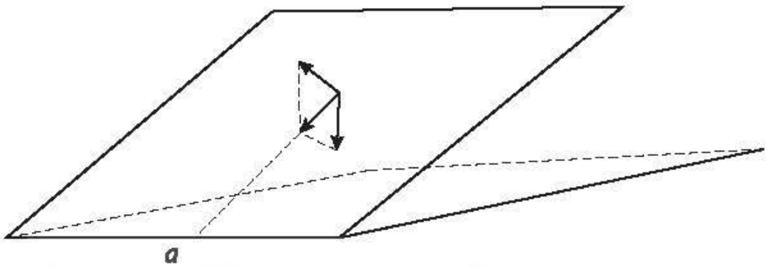


Hình 7.44

Do đó $\cos\widehat{SHC} = \dfrac{HC}{SC} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

b) Ta có $DM \perp CH$, $DM \perp SH$ nên $DM \perp (SCH)$. Hơn nữa, mặt phẳng (SDM) chứa đường thẳng DM nên $(SDM) \perp (SCH)$.

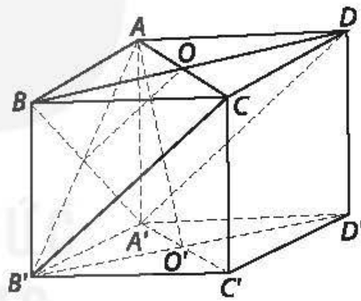
7.26. (H.7.45) Gọi *a* là giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng nằm nghiêng. Phương của lực hút trái đất vuông góc với mặt phẳng nằm ngang, phương của phản lực vuông góc với mặt phẳng nghiêng nên phương của hai lực nói trên đều vuông góc với đường thẳng *a*, do đó đường thẳng *a* vuông góc với mặt phẳng (*P*) chứa hai phương của hai lực đó. Vì tổng hợp lực của trọng lực và phản lực là một lực có phương nằm trên mặt phẳng (*P*) nên phương đó vuông góc với *a*. Do đó, viên bi lăn dọc theo đường thẳng vuông góc với đường thẳng *a*.



Hình 7.45

Bài 26 KHOẢNG CÁCH

7.27. (H.7.46)



Hình 7.46

a) Vì BC' vuông góc với cả hai đường thẳng AB và $C'D'$ nên $d(AB, C'D') = BC' = a\sqrt{2}$.

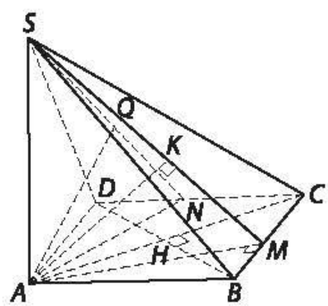
b) Vì $AC \parallel (A'B'C'D')$ nên

$d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a$.

c) Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$, ta có $AO' \perp B'D'$, theo định lí Pythagore, áp dụng cho tam giác $AA'O'$ vuông tại A' thì $AO' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Do đó $d(A, B'D') = AO' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

d) Ta có: $d(AC, B'D') = d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a$.

7.28. (H.7.47)



Hình 7.47

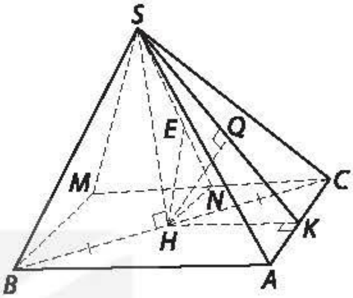
a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H, mà $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BH$, suy ra $BH \perp (SAC)$. Do đó $d(B, (SAC)) = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Kẻ $AM \perp BC$ tại M và $AK \perp SM$ tại K thì $AK \perp (SBC)$, suy ra $d(A, (SBC)) = AK$.

Ta có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{19}{12a^2}$, suy ra $AK = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$. Vậy $d\left(A,(SBC)\right) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

c) Dựng hình bình hành $ABCD$ thì AB // (SCD) và mặt phẳng (SCD) chứa SC nên $d(AB, SC) = d\left(AB, (SCD)\right)$. Mà $d\left(AB, (SCD)\right) = d\left(A, (SCD)\right)$, tính tương tự như câu b ta được: $d\left(A, (SCD)\right) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$. Vậy $d(AB, SC) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

7.29. (H.7.48)



Hình 7.48

a) Kẻ SH vuông góc với BC tại H thì $SH \perp (ABC)$, suy ra $d\left(S,(ABC)\right) = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Kẻ HK vuông góc với AC tại K, HQ vuông góc với SK tại Q thì $d\left(H,(SAC)\right) = HQ$.

Ta có: $AB = \frac{a}{2}, HK = \frac{a}{4}$ và tam giác SHK vuông tại H, đường cao HQ nên $HQ = \frac{SH \cdot HK}{SK} = \frac{a\sqrt{39}}{26}$.

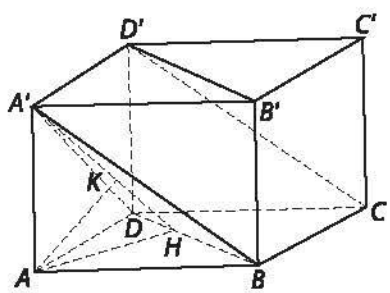
Lại có H là trung điểm của BC nên $d\left(B, (SAC)\right) = 2d\left(H, (SAC)\right) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

c) Dựng hình bình hành $ABMC$, chứng minh được $ABMC$ là hình chữ nhật. Khi đó AB // (SCM) và mặt phẳng (SMC) chứa SC nên

$d(AB, SC) = d\left(AB, (SCM)\right) = d\left(B, (SCM)\right) = 2d\left(H, (SCM)\right)$.

Kẻ HN vuông góc với CM tại N, HE vuông góc với SN tại N thì $HE \perp (SCM)$, suy ra $d\left(H,(SCM)\right) = HE$. Ta có: $HN = \frac{BM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, tam giác SHN vuông tại H, đường cao HE nên $HE = \frac{SH \cdot HN}{SN} = \frac{a\sqrt{15}}{10}$. Vậy $d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

7.30. (H.7.49)



Hình 7.49

a) Kẻ AH vuông góc với BD tại H.

Khi đó $AH \perp (BB'D'D)$, suy ra

$d\left(A,(BB'D'D)\right) = AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

b) Ta có: CD' // $(A'BD)$ nên

$d(CD', BD) = d\left(CD', (A'BD)\right) = d\left(C, (A'BD)\right)$.

Vì AC cắt BD tại trung điểm của AC nên $d\left(C,(A'BD)\right)=d\left(A,(A'BD)\right)$.

Kẻ AK vuông góc với $A'H$ tại K. Khi đó $AK\perp(A'BD)$, suy ra

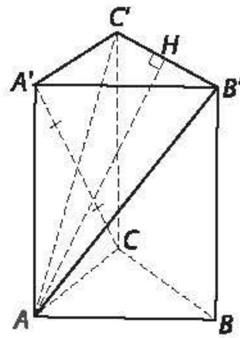
$d\left(A,(A'BD)\right)=AK=\dfrac{AH\cdot AA'}{A'H}=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$. Vậy $d\left(CD',BD\right)=\dfrac{a\sqrt{66}}{11}$.

7.31. (H.7.50)

a) Kẻ AH vuông góc với $B'C'$ tại H thì $d(A,B'C')=AH$.

Ta có: $AB'=AC'=B'C'=a\sqrt{2}$ nên $AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $d\left(A,B'C'\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Hình 7.50

b) Vì $BC\,//\,(AB'C')$ nên

$$d(BC,AB')=d\left(BC,(AB'C')\right)=d\left(C,(AB'C')\right).$$

Mà CA' cắt AC' tại trung điểm của CA' nên

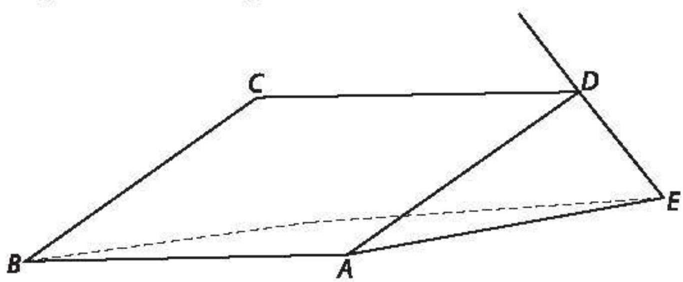
$$d\left(C,(AB'C')\right)=d\left(A',(AB'C')\right).$$

Đặt $d\left(A',(AB'C')\right)=h$ thì $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{A'A^2}+\dfrac{1}{A'B'^2}+\dfrac{1}{A'C'^2}=\dfrac{3}{a^2}$, suy ra $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d\left(BC,AB'\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

7.32. (H.7.51). Gọi AB là giao tuyến của mặt phẳng mái nhà và mặt phẳng nằm ngang, AD là đường thẳng nằm trên mái nhà và vuông góc với AB, đường thẳng DE là chiếc cột vuông góc với mái nhà, đường thẳng AE nằm trên mặt phẳng nằm ngang, khi đó tam giác ADE vuông tại D, đường thẳng AE là hình chiếu vuông góc của DE trên mặt phẳng nằm ngang, mà góc DAE bằng 30° nên góc giữa hai đường thẳng DE và AE bằng 60°.

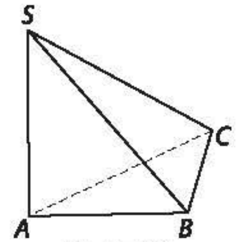
Vậy góc giữa đường thẳng DE (chiếc cột) và mặt phẳng nằm ngang bằng góc giữa hai đường DE và AE bằng 60°.



Hình 7.51

Bài 27 THỂ TÍCH

7.33. (H.7.52) Ta có: $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$;

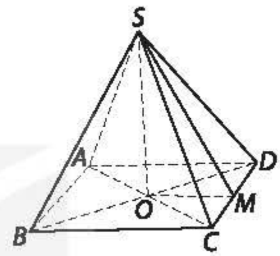


Hình 7.52

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC} = \frac{a^2}{2}.$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

7.34. (H.7.53) Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có SO vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Kẻ OM vuông góc với CD tại M thì SM cũng vuông góc với CD nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SM và OM, mà $(SM, OM) = \widehat{SMO} = 60^\circ$.

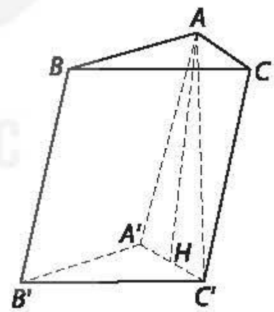


Hình 7.53

Ta có: $OM = \frac{a}{2}; SO = OM \cdot \tan\widehat{SMO} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

7.35. (H.7.54) Kẻ $AH \perp A'C'$ tại H thì $AH \perp (A'B'C')$.



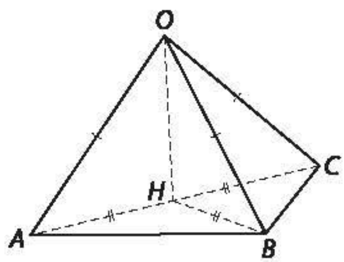
Hình 7.54

Ta có: $S_{A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'} \cdot AH$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}.$$

7.36. (H.7.55) Ta có: $AB = a\sqrt{2}, BC = a, CA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Vì $OA = OB = OC$ nên $HA = HB = HC$, hay H là trung điểm của AC. Xét tam giác OAH vuông tại H, theo định lí Pythagore ta tính được: $OH = \frac{a}{2}$.



Hình 7.55

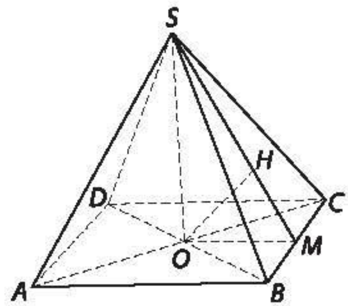
Do đó $V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

7.37. (H.7.56) Kẻ OM vuông góc với BC tại M, OH vuông góc với SM tại H, ta chứng minh được $OH \perp (SBC)$. Vì O là trung điểm của AC nên

$$d(A,(SBC)) = 2 \cdot d(O,(SBC)) = 2 \cdot OH = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

suy ra $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Hình 7.56

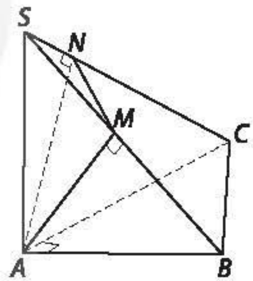
Tam giác OBC vuông tại O, có $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$ và đường cao OM nên $OM = \dfrac{OB \cdot OC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SOM vuông tại O, đường cao OH nên $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OS^2}$, suy ra $SO = \dfrac{a}{2}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

7.38. (H.7.57) Ta có: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$, tam giác SAB vuông cân tại A nên $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{2}$; tam giác SAC vuông tại A, đường cao AN nên $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SN \cdot SC}{SC^2} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{1}{4}$.

Do đó $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{8}$, suy ra

$V_{S.AMN} = \dfrac{1}{8} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.



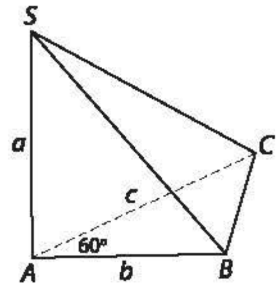
Hình 7.57

7.39. (H.7.58) Đặt $SA = a$, $AB = b$, $AC = c$. Khi đó

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin 60^\circ \cdot a = \dfrac{abc\sqrt{3}}{12}$.

Theo đề bài, ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} bc \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$, suy ra $bc = 12$.

$S_{SAB} = \dfrac{ab}{2} = 9$, suy ra $ab = 18$; $S_{SAC} = \dfrac{ac}{2} = 12$, suy ra $ac = 24$. Do đó $(abc)^2 = 12 \cdot 18 \cdot 24 = 72^2$, hay $abc = 72$. Vậy $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}$.



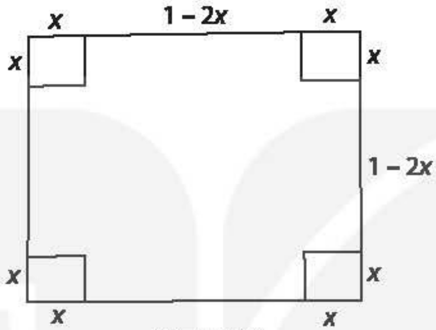
Hình 7.58

7.40. (H.7.59) Gọi x (m) là chiều dài cạnh hình vuông nhỏ tại mỗi góc của tấm tôn được cắt bỏ đi (với $0 < x < \frac{1}{2}$). Thể tích hình hộp chữ nhật nhận được là

$$V = (1-2x)^2 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot (1-2x) \cdot (1-2x) \cdot 4x \le \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1-2x+1-2x+4x}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $1-2x = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$.

Vậy để thể tích chiếc thùng là lớn nhất thì các cạnh của hình vuông được cắt bỏ đi là $\frac{1}{6}$ m.



Hình 7.59

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A – Trắc nghiệm

7.41. B.	**7.42.** D.	**7.43.** D.	**7.44.** B.	**7.45.** D.
7.46. A.	**7.47.** C.	**7.48.** B.	**7.49.** A.	**7.50.** C.

B – Tự luận

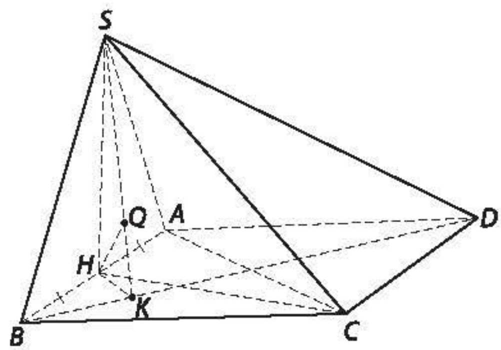
7.51. (H.7.60)

a) Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$,

suy ra $SH^2 + HC^2 = SC^2$,

do đó ΔSHC vuông tại H,

hay $SH \perp HC$. Lại có $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.



Hình 7.60

b) Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{ABCD} = a^2$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

c) Vì H là trung điểm của AB nên $d(A, (SBD)) = 2 \cdot d(H, (SBD))$. Kẻ HK vuông góc với BD tại K, HQ vuông góc với SK tại Q. Khi đó $HQ \perp (SBD)$, suy ra $d(H, (SBD)) = HQ$.

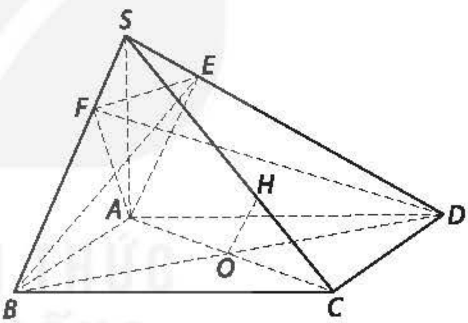
Ta tính được $HK = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mà tam giác SHK vuông tại H, đường cao HQ nên $\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2}$.

Suy ra $HQ = \frac{a\sqrt{21}}{14}$, do đó $d(A,(SBD)) = 2HQ = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

7.52. (H.7.61)

a) Ta có: $BD \perp AC$, $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$, suy ra $BD \perp (SAC)$, mà mặt phẳng (SBD) chứa đường thẳng BD, do đó $(SBD) \perp (SAC)$.

Ta có: $CD \perp AD$, $CD \perp SA$, suy ra $CD \perp (SAD)$, mà mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng CD, do đó $(SCD) \perp (SAD)$.



Hình 7.61

b) Ta có: $AD \perp (SAB)$ nên $AD \perp SB$, mà $SB \perp DF$ suy ra $SB \perp (ADF)$, do đó $SB \perp AF$. Ta lại có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AF$, suy ra $AF \perp (SBC)$, mà mặt phẳng (ACF) chứa đường thẳng AF nên $(ACF) \perp (SBC)$.

Vì $AF \perp (SBC)$ nên $AF \perp SC$. Tương tự, ta có $AE \perp (SCD)$ nên $AE \perp SC$, suy ra $SC \perp (AEF)$, mà mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC nên $(AEF) \perp (SAC)$.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD, kẻ $OH \perp SC$ tại H, mà $BD \perp (SAC)$ nên $OH \perp BD$, suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC, hay $d(BD, SC) = OH$.

Ta có: $\Delta CHO \backsim \Delta CAS$ nên $\frac{OC}{CS} = \frac{OH}{AS}$, suy ra $OH = \frac{AS \cdot OC}{CS} = \frac{a}{2}$.

Vậy $d(BD, SC) = \frac{a}{2}$.

7.53. (H.7.62)

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

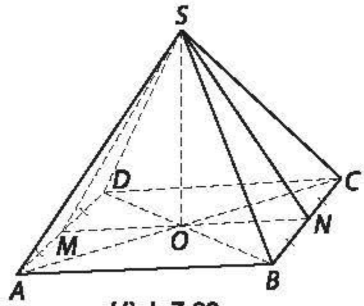
Ta có: $AD \perp SM$, $AD \parallel BC$ nên $BC \perp SM$, mà $BC \perp SN$, suy ra $BC \perp (SMN)$.

Do đó $(SMN) \perp (ABCD)$.

b) Vì MN đi qua O và $OM \perp AD, SM \perp AD$ nên $[S, AD, B] = \widehat{SMO}$, ta tính được $SM = SN = MN = a$.

Do đó tam giác SMN đều, suy ra $\widehat{SMN} = 60^\circ$.

Vậy $[S, AD, B] = 60^\circ$.



Hình 7.62

c) Ta có: $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{ABCD} = a^2$, suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

7.54. (H.7.63)

a) Kẻ AH vuông góc với BC tại H, AK vuông góc với $A'H$ tại K thì $AK \perp (A'BC)$, suy ra $A'H \perp BC$.

Góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng $\widehat{AHA'}$, suy ra $\widehat{AHA'} = 45^\circ$.

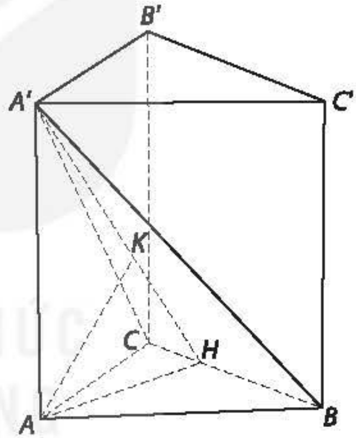
Theo định lí côsin, áp dụng cho tam giác ABC, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} = 7a^2$,

suy ra $BC = a\sqrt{7}$.

Do đó

$$AH = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{BC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC}}{BC} = \frac{3\sqrt{21}}{7}a.$$



Hình 7.63

Vì tam giác AHA' vuông cân tại A nên $AK = \dfrac{A'H}{2} = \dfrac{AH\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{42}}{14}a$.

Vậy $d(A, (A'BC)) = \dfrac{3\sqrt{42}}{14}a$.

b) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$\begin{aligned} V_{ABC.A'B'C'} &= S_{ABC} \cdot AA' \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \cdot AA' \\ &= \frac{27\sqrt{7}}{14}a^3. \end{aligned}$$

7.55. (H.7.64)

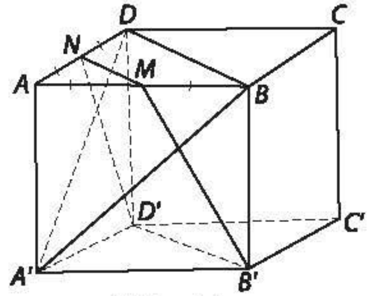
a) Ta có:

$S_{A'B'D'} = \dfrac{a^2}{2}; S_{AMN} = \dfrac{a^2}{8}; S_{ABCD} = a^2; AA' = a,$

suy ra thể tích khối chóp cụt $AMN.A'B'D'$ là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot \left(S_{AMN} + S_{A'B'D'} + \sqrt{S_{AMN} \cdot S_{A'B'D'}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{a^2}{2}}\right) = \frac{7a^3}{24}.$$



Hình 7.64

b) Vì $MN \,//\, BD$ nên $MN \,//\, (A'BD)$, do đó:

$$d(MN, A'B) = d(MN, (A'BD)) = d(M, (A'BD)).$$

Vì M là trung điểm của AB nên $d(M, (A'BD)) = \dfrac{1}{2} d(A, (A'BD))$.

Đặt $h = d(A, (A'BD))$ thì $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{3}{a^2}$, suy ra $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(MN, A'B) = d(M, (A'BD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

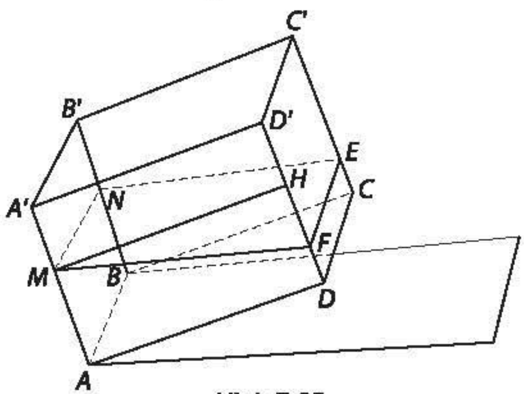
7.56. (H.7.65) Gọi MN là đường mép nước ở trên mặt $(ABB'A')$, EF là đường mép nước trên mặt $(CDD'C')$. Khi đó $ABNM.DCEF$ là một hình chóp cụt. Kẻ MH vuông góc với DD' tại H thì $HF = MH \cdot \tan 10^\circ = \tan 10^\circ$ (m).

Suy ra $DF = DH - HF = AM - HF = 0{,}8 - \tan 10^\circ \approx 0{,}62$ (m).

Ta có: $S_1 = S_{DCEF} = DF \cdot CD \approx 0{,}62$ (m^2); $S_2 = S_{ABNM} = AB \cdot AM = 0{,}8$ (m^2).

Vậy thể tích phần nước trong bể là

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right) \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \left(0{,}62 + 0{,}8 + \sqrt{0{,}62 \cdot 0{,}8}\right) \approx 0{,}71 \text{ } (m^3).$$



Hình 7.65

CHƯƠNG VIII – CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Bài 28 BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

8.1. $A = \{1;2;4;7;14;28\}$; $B = \{1;2;5;7;10;14;35;70\}$; $C = \{1;2;7;14\}$.

Ta có $A \cap B = \{1;2;7;14\}$.

Vậy C là biến cố giao của A và B.

8.2. Nếu biến cố H xảy ra thì B trúng một quả ngư lôi, C trúng một quả ngư lôi. Từ điều kiện ta thấy chiến hạm không bị chìm (biến cố M xảy ra).

Nếu biến cố K xảy ra thì C trúng hai quả ngư lôi. Từ điều kiện ta thấy chiến hạm không bị chìm (biến cố M xảy ra).

Ngược lại giả sử chiến hạm không bị chìm, khi đó cả hai quả hoặc trúng vào C (biến cố K xảy ra) hoặc chỉ một quả trúng vào B và quả còn lại không trúng A, tức là trúng C (biến cố H xảy ra).

Vậy M là biến cố hợp của H và K.

8.3. a) ad là số lẻ khi và chỉ khi cả a và d đều là số lẻ, tức là không xảy ra cả biến cố A và D. Vậy $E = \overline{AD}$. Tương tự bc là số lẻ chỉ khi cả b và c đều là số lẻ, tức là không xảy ra cả biến cố B và C. Vậy $F = \overline{BC}$.

b) Giả sử G xảy ra, tức là ad và bc có cùng tính chẵn, lẻ. Nếu ad là số lẻ, bc là số lẻ thì E và F đều xảy ra. Do đó EF xảy ra.

Nếu ad là số chẵn, bc là số chẵn thì E và F đều không xảy ra. Do đó $\overline{EF}$ xảy ra.

Ngược lại, nếu EF xảy ra thì ad là số lẻ, bc là số lẻ. Suy ra $ad - bc$ là số chẵn.

Nếu $\overline{EF}$ xảy ra thì ad là số chẵn, bc là số chẵn. Do đó $ad - bc$ là số chẵn.

Vậy $G = EF \cup \overline{EF}$.

8.4. Nếu F xảy ra thì $P(E) = \dfrac{1}{4}$; nếu F không xảy ra thì $P(E) = \dfrac{1}{4}$.

Nếu E xảy ra thì $P(F) = \dfrac{1}{2}$; nếu E không xảy ra thì $P(F) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy E và F độc lập.

8.5. Có 6 số lẻ là $\{1;3;5;7;9;11\}$ và 6 số chẵn là $\{2;4;6;8;10;12\}$.

Nếu M xảy ra, tức là bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số lẻ thì sau đó trong túi còn 11 tấm thẻ với 5 tấm thẻ ghi số lẻ và 6 tấm thẻ ghi số chẵn.

Vậy $P(N) = \dfrac{6}{11}$.

Nếu M không xảy ra, tức là bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số chẵn thì sau đó trong túi còn 11 tấm thẻ với 6 tấm thẻ ghi số lẻ và 5 tấm thẻ ghi số chẵn.

Vậy $P(N) = \dfrac{5}{11}$.

Như vậy xác suất của N thay đổi tuỳ theo M xảy ra hay M không xảy ra. Do đó M và N không độc lập.

Bài 29 CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

8.6. Xét các biến cố sau:

A: "Cả hai người được chọn đều họ Nguyễn"; B: "Cả hai người được chọn đều họ Trần".

C: "Cả hai người được chọn có cùng họ". C là biến cố hợp của A và B. Do A và B xung khắc nên $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ta có: $n(\Omega) = C_{36}^2 = 630$;

$n(A) = C_{25}^2 = 300$; $n(B) = C_{11}^2 = 55$.

Suy ra $P(A) = \dfrac{300}{630}$; $P(B) = \dfrac{55}{630}$.

Vậy $P(C) = P(A) + P(B) = \dfrac{300}{630} + \dfrac{55}{630} = \dfrac{355}{630} = \dfrac{71}{126}$.

8.7. Gọi A là biến cố: "Người đó thích chơi bóng bàn"; B là biến cố: "Người đó thích chơi cầu lông".

a) Ta cần tính $P(A \cup B)$. Biến cố đối của biến cố $A \cup B$: "Người đó thích chơi ít nhất một trong hai môn" là biến cố $\overline{AB}$: "Người đó không thích chơi cả cầu lông và bóng bàn".

Ta có: $P(A) = \dfrac{19}{40}$; $P(B) = \dfrac{20}{40}$; $P(\overline{AB}) = \dfrac{8}{40}$.

Vậy $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - \dfrac{8}{40} = \dfrac{32}{40} = \dfrac{4}{5}$.

b) Ta cần tính $P(\overline{A}B)$.

Ta có: $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{19}{40} + \frac{20}{40} - \frac{32}{40} = \frac{7}{40}$.

$B = AB \cup \overline{A}B$, suy ra $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$, do đó

$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{20}{40} - \frac{7}{40} = \frac{13}{40}$.

c) Ta cần tính $P(A\overline{B})$. Ta có: $A = AB \cup A\overline{B}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$,

do đó $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{19}{40} - \frac{7}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

d) Gọi E là biến cố: "Người đó thích chơi đúng một trong hai môn cầu lông hay bóng bàn".

Ta có: $E = A\overline{B} \cup \overline{A}B$, suy ra $P(E) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = \frac{12}{40} + \frac{13}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$.

8.8. a) Gọi A là biến cố: "Người đó mua cành đào", B là biến cố: "Người đó mua cây quất".

Ta cần tính $P(A \cup B)$. Ta có: $P(A) = \frac{31}{50}$; $P(B) = \frac{12}{50}$; $P(AB) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$.

Do đó: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{31}{50} + \frac{12}{50} - \frac{5}{50} = \frac{38}{50} = \frac{19}{25}$.

b) Ta cần tính $P(A\overline{B})$. Ta có: $A = AB \cup A\overline{B}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$,

do đó $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{31}{50} - \frac{5}{50} = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}$.

c) Ta cần tính $P(\overline{AB})$. Ta có biến cố đối của biến cố $\overline{AB}$ là biến cố $A \cup B$.

Vậy $P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{38}{50} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$.

d) Ta cần tính $P(\overline{A}B)$. Ta có: $B = AB \cup \overline{A}B$, suy ra $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$,

do đó $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{12}{50} - \frac{5}{50} = \frac{7}{50}$.

Bài 30 CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

8.9. $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,2$.

Vậy A và B không độc lập.

8.10. $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{7}{30} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{15} = \frac{4}{30}$.

Vậy A và B không độc lập.

8.11. Tính $P(A)$: Ta có $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}$, $n(\Omega) = 4$, $A = \{SS\}$, $n(A) = 1$.

Vậy $P(A) = \frac{1}{4}$.

Tính $P(B)$: Ta có $B = \{SS; SN; NS\}$, $n(B) = 3$. Vậy $P(B) = \frac{3}{4}$.

Tính $P(AB)$: Ta có $AB = A \cap B = \{SS\}$, $n(A \cap B) = 1$.

Vậy $P(AB) = \frac{1}{4}$.

Ta có $P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{4}{16} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. Vậy A và B không độc lập.

8.12. Tính $P(A)$: Xét biến cố đối $\overline{A}$: "Cả hai con xúc xắc không xuất hiện mặt 5 chấm", $\overline{A} = \{(a,b) : a, b \in \{1; 2; 3; 4; 6\}\}$. Ta có $n(\overline{A}) = 25$; $n(\Omega) = 36$.

Vậy $P(\overline{A}) = \frac{25}{36}$, do đó $P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Tính $P(B)$: Ta có $B = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$, $n(B) = 6$.

Vậy $P(B) = \frac{6}{36}$.

Tính $P(AB)$: Ta có $AB = A \cap B = \{(2,5); (5,2)\}$, $n(A \cap B) = 2$.

Vậy $P(AB) = \frac{2}{36}$.

Ta có: $P(AB) = \frac{2}{36} = \frac{72}{36^2}$; $P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{66}{36^2}$.

Suy ra $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Vậy A và B không độc lập.

8.13. a) Ta có $\Omega = \{(a,b,c) : 1 \le a,b,c \le 3\}$, $n(\Omega) = 27$.

Tính $P(A)$: $A = \{(1,2,3);(2,1,3);(3,1,2);(1,3,2);(3,2,1);(2,3,1);(2,2,2)\}$, $n(A) = 7$.

Suy ra $P(A) = \frac{7}{27}$.

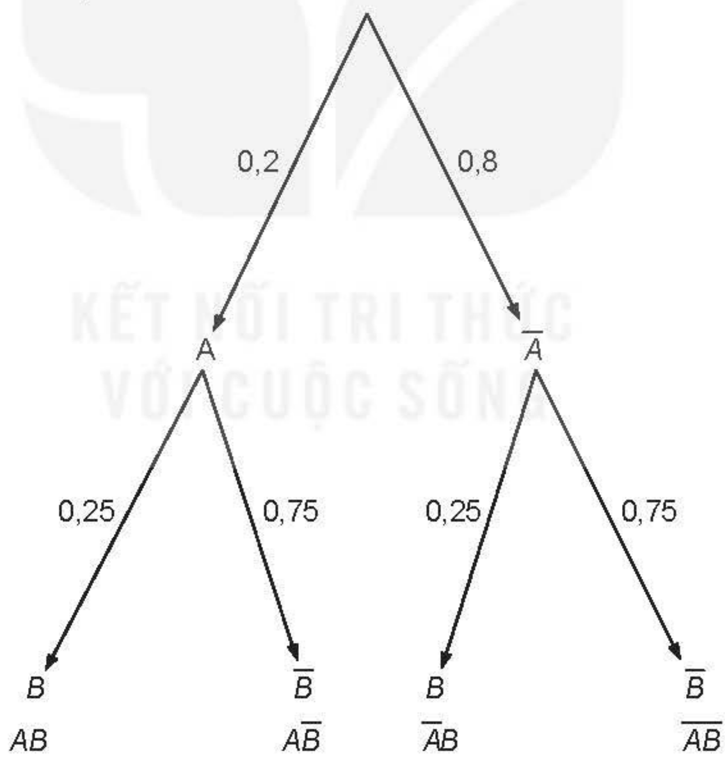
Tính $P(B)$: $B = \{(1,1,1);(2,2,2);(3,3,3)\}$, $n(B) = 3$. Suy ra $P(B) = \frac{3}{27}$.

b) Tính $P(AB)$: Ta có $A \cap B = \{(2,2,2)\}$. Vậy $P(AB) = \frac{1}{27}$.

Vì $P(AB) = \frac{1}{27} = \frac{27}{27^2} \ne \frac{21}{27^2} = \frac{7}{27} \cdot \frac{3}{27} = P(A) \cdot P(B)$ nên A và B không độc lập.

8.14. Gọi A, B tương ứng là các biến cố: "Bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật" và "Bạn Bình về thăm nhà vào ngày Chủ nhật". A và B là hai biến cố độc lập.

Ta có sơ đồ hình cây:



a) $P(AB) = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,2 + 0,25 - 0,05 = 0,4$.

c) $P(\overline{AB}) = 0,8 \cdot 0,75 = 0,6$.

d) $P\left(A\overline{B}\right) = 0,2 \cdot 0,75 = 0,15$.

e) $P\left(A\overline{B} \cup \overline{A}B\right) = P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) = 0,2 \cdot 0,75 + 0,8 \cdot 0,25 = 0,35$.

8.15. $P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A\overline{B}\right)$.

$P(A) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) = 0,1 + 0,4 = 0,5$.

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,1$. Khi đó $0,1 = 0,5 \cdot P(B)$, suy ra $P(B) = 0,2$.

$P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A\overline{B}\right) = 0,5 + 0,8 - 0,4 = 0,9$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A – Trắc nghiệm

8.16. B.

8.17. A.

8.18. B.

8.19. A.

8.20. C.

B – Tự luận

8.21. Xét các biến cố A: "Người đó điều trị bệnh X", B: "Người đó điều trị bệnh Y".

a) $P(B) = P(A \cup B) + P(AB) - P(A) = \frac{26}{30} + \frac{12}{30} - \frac{24}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.

b) Ta có $B = AB \cup \overline{A}B$, suy ra $P(B) = P(AB) + P\left(\overline{A}B\right)$,

do đó $P\left(\overline{A}B\right) = P(B) - P(AB) = \frac{14}{30} - \frac{12}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

c) $P\left(\overline{AB}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{26}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

8.22. Xét các biến cố A: "Học sinh đó thích ăn chuối", B: "Học sinh đó thích ăn cam".

Ta có $P(A) = \frac{34}{40}$, $P(B) = \frac{22}{40}$, $P\left(\overline{AB}\right) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$.

a) $P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{AB}\right) = 1 - \frac{2}{40} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}$.

b) $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{34}{40} + \frac{22}{40} - \frac{38}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$.

8.23. Xét các biến cố A: "Gia đình đó có điện thoại thông minh", B: "Gia đình đó có laptop".

a) Ta có $P(A) = \frac{23}{40}$, $P(B) = \frac{18}{40}$, $P(A \cup B) = \frac{26}{40} = \frac{13}{20}$.

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{23}{40} + \frac{18}{40} - \frac{26}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}.$$

b) Ta có $A = AB \cup A\overline{B}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$, do đó:

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{23}{40} - \frac{15}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}.$$

c) $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{26}{40} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$.

8.24. Xét các biến cố A: "Học sinh đó mang theo bánh ngọt", B: "Học sinh đó mang theo nước uống".

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{23}{50} + \frac{22}{50} - \frac{5}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$.

b) $P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{40}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$.

8.25. Xét các biến cố A: "Học sinh đó học khá môn Toán", B: "Học sinh đó học khá môn Ngữ văn".

Ta có $P(A) = \frac{22}{40}$, $P(B) = \frac{25}{40}$, $P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{3}{40}$.

a) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}$.

b) $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{22}{40} + \frac{25}{40} - \frac{37}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

8.26. Xét các biến cố A: "Cả hai người là nam", B: "Cả hai người là nữ".

Biến cố C: "Hai người có cùng giới tính" là biến cố hợp của A và B. Hai biến cố A và B là xung khắc nên $P(C) = P(A) + P(B)$.

Ta có $n(\Omega) = C_9^2 = 36$, $n(A) = C_5^2 = 10$, $n(B) = C_4^2 = 6$.

Do đó $P(A) = \frac{10}{36}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{10}{36} + \frac{6}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

8.27. a) Do A, B xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

suy ra $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,8 - 0,35 = 0,45$.

b) Do A, B độc lập nên $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,35 \cdot 0,45 = 0,1575$.

c) Do (A, $\overline{B}$) độc lập và ($\overline{A}$, B) độc lập nên

$$P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0,35 \cdot 0,55 = 0,1925.$$

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0,65 \cdot 0,45 = 0,2925.$$

Xác suất xảy ra đúng một trong hai biến cố A hoặc B là

$$P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0,1925 + 0,2925 = 0,485.$$

8.28. $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \dfrac{1}{4} + \left(1 - \dfrac{1}{5}\right) - \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{40}$.

$P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{40} \neq \dfrac{7}{40} = P(AB)$.

Vậy hai biến cố A, B không độc lập.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHƯƠNG IX – ĐẠO HÀM

Bài 31 ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

9.1. $y'(1) = 7$.

9.2. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0}(2x - 1)^2 = (-1)^2 = 1$. Để tính $f'(1)$, ta phân tích:

$$f(x) - f(1) = x(2x-1)^2 - 1 = (x-1)(2x-1)^2 + (2x-1)^2 - 1$$
$$= (x-1)(2x-1)^2 + 4x(x-1).$$

Khi đó, $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}\left((2x-1)^2 + 4x\right) = 5$.

9.3. Tìm giới hạn bên phải và bên trái tại điểm $x = 0$. Ta có $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1-1)(x-1+1)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+}(x - 2) = -2;$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(1-2x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+}(-2) = -2.$$

Vậy $f'(0) = -2$.

9.4. a) $y'(x_0) = 2ax_0$; b) $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0 - 1)^2}, x_0 \neq 1$.

9.5. Gọi $M(a; a^3 + 1)$ là toạ độ điểm cần tìm. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $k = y'(a) = 3a^2$.

Theo giả thiết: $k = 3a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$. Vậy $M(1;2)$ và $M(-1;0)$ là toạ độ các điểm cần tìm.

9.6. $y = 6x + 3$.

9.7. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là $v(3) = s'(3) = 7$ m/s. Tương tự, $v(5) = 39$ m/s.

Bài 32 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

9.8. Dùng quy tắc và công thức đạo hàm của hàm số hợp.

a) $y' = 2(x+1)(x^2-1) + 2x(x+1)^2 = 2(x+1)(2x^2+x-1)$.

b) $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2\left(2x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

9.9. a) $y' = \frac{x^2+4x-3}{(x+2)^2}$; b) $y' = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

9.10. Dùng quy tắc tính đạo hàm $f'(x), g'(x)$ và thay giá trị tương ứng.

Ta có:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2} = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}};$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2x.$$

Do đó, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $g'(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(0) - g'(1) = 0$.

9.11. $y' = \frac{3}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \tan^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

9.12. Ta có:

$$f'(x) = -2\cos x\sin x - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

$$= -\sin 2x - \sin\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)$$

$$= -\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$$

$$= -\sin 2x + 2\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x$$

$$= -\sin 2x + \sin 2x = 0.$$

9.13. Ta có:

$$f'(x) = 8\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 8\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)'$$

$$= 16\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 8\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Từ đó suy ra: $|f'(x)| = 8\left|\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)\right| \le 8, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = 8 \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

9.14. Dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có:

$$y + xy' = (\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y'\left(\frac{1}{y} - x\right) = y \Rightarrow y' = \frac{y^2}{1 - xy}.$$

Tại $x = 0$, thay vào phương trình ta được $1 + \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Vậy $y'(0) = \frac{1}{e^2}$.

9.15. Tại thời điểm vật chạm đất: $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \ (t > 0)$.

Giải phương trình ta được $t = \frac{2v_0}{g}$.

Vận tốc của vật khi chạm đất là $v = h'\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -v_0$.

9.16. Vận tốc của hạt sau t giây là: $v(t) = s'(t) = 4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Vận tốc cực đại của hạt là: $v_{max} = 4\pi\sqrt{2} \approx 17,8$ m/s, đạt được khi:

$$\left|\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1 \text{ hay } t = \frac{5}{24} + \frac{k}{4}, k \in \mathbb{N}.$$

Bài 33 ĐẠO HÀM CẤP HAI

9.17. a) $y'' = 3x^2 - 4$; b) $y'' = \frac{6}{(x-1)^3}$.

9.18. a) $y'' = -\dfrac{4}{(2x-1)^2}$;

b) $y' = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)} = 1 + \tan^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

$$y'' = 2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\left(\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = \frac{2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

9.19. Ta có:

$$f'(x) = \left(1 + 2x^2\right)e^{x^2} + \frac{1}{x+1};$$

$$f''(x) = \left(6x + 4x^3\right)e^{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Thay $x = 0$ ta được $f'(0) = 2$ và $f''(0) = -1$.

9.20. Tính đạo hàm cấp hai ta được $f''(x) = 12x^2 + 4a$. Từ đó có $f''(1) = 12 + 4a = 8$ nên $a = -1$. Mặt khác, $f(0) = a^2 + b = 2$. Thay $a = -1$ ta được $b = 1$. Vậy $a = -1$, $b = 1$ là các giá trị cần tìm.

9.21. Gia tốc của hạt tại thời điểm t là: $a(t) = s''(t) = -16\pi^2\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Tại thời điểm $t = 3$ giây, gia tốc của hạt là:

$$a = -16\pi^2\sqrt{2}\sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right) \approx -111{,}7 \text{ m/s}^2.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A – Trắc nghiệm

9.22. B.	**9.23.** C.	**9.24.** C.	**9.25.** C.	**9.26.** A.
9.27. B.	**9.28.** C.	**9.29.** A.	**9.30.** D.	**9.31.** D.
9.32. B.	**9.33.** A.	**9.34.** C.	**9.35.** D.	**9.36.** B.
9.37. A.	**9.38.** B.	**9.39.** A.	**9.40.** C.	**9.41.** A.

9.34. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số có dạng $k = y' = 2x^2 - 8x + 5$. Khi đó ta có:

$$k = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) - 3 = 2(x-2)^2 - 3 \geq -3.$$

Dấu "=" đạt được, $k_{min} = -3$, khi $x = 2$ và $y = \frac{7}{3}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y - \frac{7}{3} = -3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x + \frac{25}{3}.$$

B – Tự luận

9.42. a) $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)^2\left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)'$

$$= 6\left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)^2\left(x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

b) $y' = 2^x \ln 2 + \dfrac{(1-2x)'}{(1-2x)\ln 3} = 2^x \ln 2 - \dfrac{2}{(1-2x)\ln 3}$.

c) $y' = \dfrac{2\left(x^2 - x - 1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

d) $y' = 2\cos 2x + 2\cos 3x\,(\cos 3x)' = 2\cos 2x - 6\cos 3x \sin 3x$

$= 2\cos 2x - 3\sin 6x$.

9.43. a) Điều kiện: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Tập xác định của hàm số là $[-2;2]$.

b) Ta có: $f'(x) = 1 + \dfrac{\left(4-x^2\right)'}{2\sqrt{4-x^2}} = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Tập xác định của $f'(x)$ là $(-2;2)$.

c) Ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

9.44. Ta có $f'(x) = 2x - 1$ với $x \in (-\infty;0)$ và $f'(x) = -3x^2 + m$ với $x \in (0;+\infty)$.

Do đó, hàm số có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi tồn tại $f'(0)$.

Ta tính đạo hàm bên phải và bên trái điểm $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(-x^2 + m\right) = m;$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1.$$

Vậy hàm số có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -1$.

9.45. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$. Do đó, $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$3x^2 + 2ax + 3 > 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta' = a^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < a < 3.$$

9.46. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x - 1$ có hệ số góc $k = 2$. Mặt khác, hệ số góc của tiếp tuyến có dạng $k = y' = 3x^2 - 6x + 2$. Từ đó, ta có:

$$3x^2 - 6x + 2 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Thay $x = 0$, $x = 2$ vào biểu thức hàm số ta được $y = -1$. Thử lại ta thấy điểm $M(0; -1)$ thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$ (tiếp tuyến trùng với đường thẳng đã cho) và điểm $M(2; -1)$ không thuộc đường thẳng đó. Vậy $M(2; -1)$ là điểm cần tìm.

9.47. Phương trình hoành độ giao điểm: $\left(x^2 - 1\right)^2 - 3 = 10 - x^2$. Giải phương trình ta được nghiệm $x = 2$ và $x = -2$. Toạ độ các giao điểm là $A(2; 6)$ và $B(-2; 6)$. Phương trình các tiếp tuyến cần tìm là $y = 24x - 42$ và $y = -24x - 42$.

9.48. Vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm t là:

$$v(t) = x'(t) = 8\pi\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$a(t) = x''(t) = -16\pi^2 \sin\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Tại $t = 5$ giây, vận tốc và gia tốc của vật là $v = -10{,}5$ m/s và $a = 150{,}8$ m/s^2. Khi ấy vật đang chuyển động theo hướng từ phải sang trái (hướng tới vách chắn cố định).

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A – Trắc nghiệm

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	D	A	B	B	C	D	B	B	C	C
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
C	C	A	B	C	B	C	B	A	B	A	D

B – Tự luận

25. Ta tính được: $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Khi đó:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{3}\sin x \cos x = \frac{7 + 4\sqrt{6}}{18}.$$

26. a) Vế phải $= 4\sin x \sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x) = 2\sin x[\cos 2x - \cos 120^\circ]$

$= 2\sin x \cos 2x + \sin x = \sin 3x + \sin(-x) + \sin x = \sin 3x =$ Vế trái.

b) Vế trái $= \dfrac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x} = \dfrac{2\sin 2x \cos x - \sin 2x}{2\cos 2x \cos x - \cos 2x} = \dfrac{\sin 2x(2\cos x - 1)}{\cos 2x(2\cos x - 1)}$

$= \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x =$ Vế phải.

27. a) Ta có $u_{n+1} = 5(n+1) - 7 = 5n - 2$, suy ra

$u_{n+1} - u_n = 5n - 2 - (5n - 7) = 5\ \forall n.$

Vậy (u_n) là cấp số cộng và $u_1 = -2, d = 5$.

Lại có $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{3}{-2} \neq \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{8}{3}$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

b) Ta có $u_{n+1} = 9 \cdot 2^{n+1} = 18 \cdot 2^n$, suy ra $u_{n+1} : u_n = 2\ \forall n.$

Vậy (u_n) là cấp số nhân và $u_1 = 18, q = 2$.

Lại có $u_2 - u_1 = 36 - 18 \neq u_3 - u_2 = 72 - 36$ nên (u_n) không là cấp số cộng.

c) Ta có $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{3}{1} \neq \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{7}{3}$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

Lại có $u_2 - u_1 = 3 - 1 \neq u_3 - u_2 = 7 - 3$ nên (u_n) không là cấp số cộng.

28. Ta biết rằng 5 năm là 20 quý.

Phương án 1: Theo giả thiết, số tiền lương kĩ sư nhận được theo mỗi quý là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 64{,}5$ và công sai $d = 10$. Do đó, tổng số tiền lương kĩ sư nhận được sau 5 năm là $S_{20} = \dfrac{(2u_1 + 19d)\cdot 20}{2} = 3\,190$ (triệu đồng).

Phương án 2: Theo giả thiết, số tiền lương kĩ sư nhận được theo mỗi quý là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = 24$ và công bội $q = 1{,}2$. Do đó, tổng số tiền lương kĩ sư nhận được sau 5 năm là $S'_{20} = v_1\dfrac{1-q^{20}}{1-q} \approx 4\,480{,}51$ (triệu đồng).

Vậy kĩ sư nên chọn phương án 2.

29. a) Ta có $u_1 = 1, u_2 = 1$ và

$$u_{n+2} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2}\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right]\left[1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right] - (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})\left[(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}\right]}{2^{n+2}\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right]\cdot 2 + 4\cdot\left[(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}\right]}{2^{n+2}\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}} = u_{n+1} + u_n.$$

Vậy (u_n) là dãy số Fibonacci.

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$	1	2	1,5	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{8}{5}$	$\dfrac{13}{8}$	$\dfrac{21}{13}$	$\dfrac{34}{21}$	$\dfrac{55}{34}$	$\dfrac{89}{55}$	

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} : \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5} - (1-\sqrt{5})\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(do $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} = 0$).

30. a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-x-10}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(2x-5)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}(2x-5)=-9.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}{2+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{3}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}=-\infty$

(do $\lim\limits_{x\to2}(x-4)=-2<0$ và $\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2=0,\ (x-2)^2>0\ \forall x\neq2$).

d) $\lim\limits_{x\to-5^-}\dfrac{2x}{x+5}=+\infty$

(do $\lim\limits_{x\to-5^-}2x=-10<0,\ \lim\limits_{x\to-5^-}(x+5)=0$ và $x+5<0\ \forall x<-5$).

31. Dễ thấy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=-1$.

Ta xét tính liên tục của hàm số tại $x=-1$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+5-4}{(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+5}+2}=\dfrac{1}{4},$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(m\cdot4^{-x}+1\right)=4m+1,$ và $f(-1)=4m+1.$

Suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{4}=4m+1\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{16}.$

32. a) Ta có: $3^{x^2-3x}=4^{4x}\Leftrightarrow x^2-3x=4x\log_3 4\Leftrightarrow x(x-3-4\log_3 4)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3+4\log_3 4$. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{0;3+4\log_3 4\}$.

b) Điều kiện: $x^2-x-3>0$ và $2x-1>0$. Ta có:

$\log_3\left(x^2-x-3\right)=\log_3(2x-1)+1$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-x-3\right)=\log_3(2x-1)+\log_3 3$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-x-3\right)=\log_3 3(2x-1)$

$\Leftrightarrow x^2-x-3=3(2x-1)$

$\Leftrightarrow x^2-7x=0\Leftrightarrow x=0;\ x=7.$

Đối chiếu với điều kiện, thì chỉ có $x = 7$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 7$.

33. Ta có $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 3$; $g'(x) = \ln 9$.

Khi đó: $f'(x) < g'(x) \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 3 < \ln 9 \Leftrightarrow 3^{2x-1} < 1 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

34. a) $y' = -\sin 2x + \dfrac{6x+1}{2\sqrt{3x^2 + x + 1}}$.

b) $y' = \dfrac{2\log_5 x}{x \ln 5} - 7e^{2-7x}$.

35. Gọi hoành độ điểm M là x_0.

Theo giả thiết: $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 6x_0 - 11 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 2$.

Vậy $M(-1; 19)$ hoặc $M(2; -5)$.

36. a) Vật có li độ lớn nhất khi $10\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t + \dfrac{\pi}{3}\right) = 10 \Leftrightarrow t = \dfrac{-5}{6} + 5k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $t \geq 0$ nên thời điểm đầu tiên vật có li độ lớn nhất tương ứng với $k = 1$, tức là tại thời điểm $t = \dfrac{-5}{6} + 5 = \dfrac{25}{6}$ (giây).

b) Ta có vận tốc $v(t) = x'(t) = -4\pi \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vận tốc bằng 0 tức là $-4\pi \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $t \geq 0$ nên thời điểm đầu tiên vật có vận tốc bằng 0 tương ứng với $k = 1$, tức là tại thời điểm $t = \dfrac{-5}{6} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{3}$ (giây).

c) Ta có gia tốc $a(t) = x''(t) = -\dfrac{8\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Gia tốc bằng 0 tức là $-\dfrac{8\pi^2}{5}\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}t + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{12} + \dfrac{5}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $t \geq 0$ nên thời điểm đầu tiên vật có gia tốc bằng 0 tương ứng với $k = 1$, tức là tại thời điểm $t = \dfrac{5}{12} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{35}{12}$ (giây).

37. a) Tổng số khách hàng là $n = 15 + 27 + 38 + 27 + 13 = 120$. Nhóm chứa mốt là nhóm $[20;25)$. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này là:

$$M_0 = 20 + \frac{38-25}{(38-25)+(38-29)} \cdot 5 \approx 22{,}95.$$

Vậy mức giá có nhiều khách hàng lựa chọn nhất là khoảng 22,95 triệu đồng/m^2.

b) Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm $[25;30)$. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$Q_3 = 25 + \frac{90-78}{29} \cdot 5 \approx 27{,}07.$$

Vậy công ty nên tập trung vào các bất động sản có mức giá ít nhất là 27,07 triệu đồng/m^2.

38. a) Các kết quả thuận lợi cho B là: (1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1).

Vậy $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) Gọi A_1 là biến cố: "Xúc xắc I ra mặt 6 chấm", A_2 là biến cố: "Xúc xắc II ra mặt 6 chấm". Khi đó $A = A_1 \cup A_2$. Theo công thức cộng xác suất, ta có:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2). \qquad (1)$$

Ta có: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{6}$.

Vì việc gieo hai xúc xắc là độc lập nên hai biến cố A_1, A_2 độc lập. Theo quy tắc nhân xác suất, ta có: $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{36}$.

Thay vào (1) ta được $P(A) = \frac{11}{36}$.

b) Xét biến cố AB: "Tổng số chấm xuất hiện trên mặt của hai xúc xắc bằng 7, trong đó có ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm."

Các kết quả thuận lợi cho AB là (1,6); (6,1).

Do đó: $P(AB) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

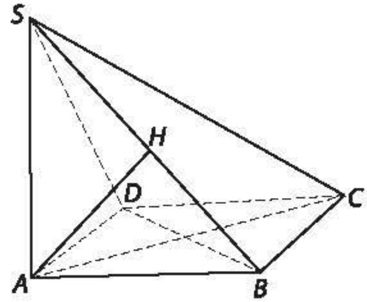
Lại có $P(A).P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{216}$.

Suy ra $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

Vậy A, B không độc lập.

39. a) Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên đường thẳng AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$, do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SC và AC.



Ta có: $SA \perp AC$ và $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại A, suy ra góc giữa hai đường thẳng SC và AC bằng 45°.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°.

c) Kẻ AH vuông góc với SB tại H, vì $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AH$, suy ra $AH \perp (SBC)$.

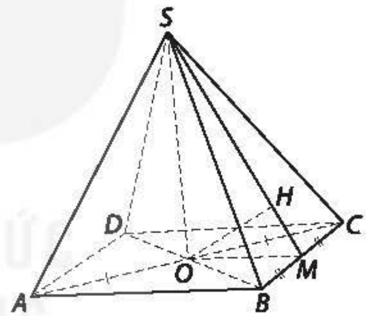
Do đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có đường cao AH, khi đó:

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

40. a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có tam giác SAO vuông tại O nên theo định lí Pythagore: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$\frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

b) Vì $AD \mathbin{/\mkern-5mu/} (SBC)$ và mặt phẳng (SBC) chứa SB nên

$$d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)).$$

Đường thẳng AO cắt mặt phẳng (SBC) tại C và O là trung điểm của đoạn AC nên $d(A, (SBC)) = 2 \cdot d(O, (SBC))$.

Kẻ OM vuông góc với BC tại M, OH vuông góc với SM tại H thì

$$BC \perp (SOM) \Rightarrow BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH.$$

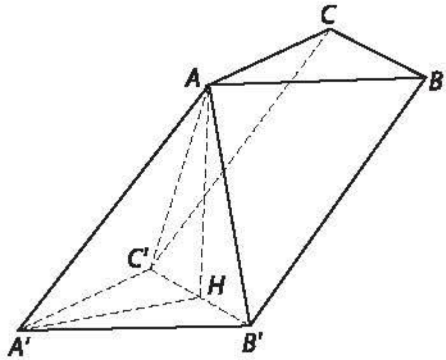
Tam giác SOM vuông tại O, có đường cao OH, khi đó $OH = \dfrac{SO \cdot OM}{SM} = \dfrac{a\sqrt{42}}{14}$.

Vậy $d(AD, SB) = 2 \cdot OH = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

41. a) Kẻ AH vuông góc với $B'C'$ tại H thì $AH \perp (A'B'C')$ và H là trung điểm của $B'C'$, tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'H \perp B'C'$

$\Rightarrow B'C' \perp (AA'H) \Rightarrow B'C' \perp AA'$.

Mà $BB' \parallel AA'$ nên $B'C' \perp BB'$ hay $BCC'B'$ là hình chữ nhật.



b) Tam giác $AA'H$ vuông tại H, ta có:

$$A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \frac{3a}{2}.$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $S_{A'B'C'} \cdot AH = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

c) Vì $A'H$ là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng $(A'B'C')$ nên góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ là góc giữa hai đường thẳng AA' và $A'H$, mà $(AA', A'H) = \widehat{AA'H}$.

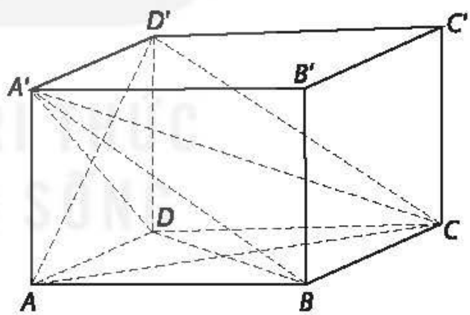
Tam giác $AA'H$ vuông tại H, ta có: $\cos\widehat{AA'H} = \frac{A'H}{AA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AA'H} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng 60°.

42. a) Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng $A'C$ và AC bằng $\widehat{A'CA} = 30^\circ$

$\Rightarrow AA' = AC \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = a.$

Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $AB \cdot AD \cdot AA' = a^3\sqrt{2}$.



b) Vì $CD' \parallel (A'BD)$ và mặt phẳng $(A'BD)$ chứa BD nên

$$d(CD', BD) = d(CD', (A'BD)) = d(D', (A'BD)).$$

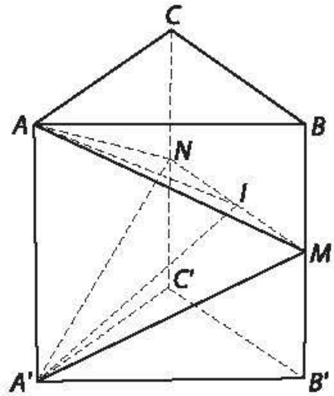
Vì AD' cắt mặt phẳng $(A'BD)$ tại trung điểm của đoạn AD' nên

$$d(D', (A'BD)) = d(A, (A'BD)).$$

Đặt $d(A, (A'BD)) = h$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $d(CD', BD) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

43. a) Ta có $S_{AA'M}=\dfrac{1}{2}\cdot S_{ABB'A'}=a^2$ và $CC'\,//\,(ABB'A')$



nên $d(N,(AA'M))=d(C,(ABB'A'))=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $AA'MN$ bằng

$$\frac{1}{3}\cdot S_{AA'M}\cdot d(N,(AA'M))=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

b) Gọi I là trung điểm của MN thì

$$AI\perp MN, A'I\perp MN\Rightarrow [A,MN,A']=\widehat{AIA'}.$$

Ta có $AI=A'I=\sqrt{AM^2-MI^2}=\sqrt{AB^2+BM^2-MI^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Theo định lí côsin áp dụng cho tam giác $AA'I$, ta có:

$$\cos\widehat{AIA'}=\frac{AI^2+A'I^2-AA'^2}{2\cdot AI\cdot A'I}=\frac{-1}{7}.$$

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH BÀI TẬP LỚP 11 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Bài tập Ngữ văn 11, tập một
2. Bài tập Ngữ văn 11, tập hai
3. Bài tập Toán 11, tập một
4. Bài tập Toán 11, tập hai
5. Bài tập Lịch sử 11
6. Bài tập Địa lí 11
7. Bài tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
8. Bài tập Vật lí 11
9. Bài tập Hoá học 11
10. Bài tập Sinh học 11
11. Bài tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
12. Bài tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
13. Bài tập Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11
14. Bài tập Giáo dục quốc phòng và an ninh 11
15. Tiếng Anh 11 – Global Success – Sách bài tập

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-34974-3

9 786040 349743

Giá: ... đ