TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 11

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM HOÀNG QUÂN – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 11

Chân trời sáng tạo

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cùng với *Sách giáo khoa Toán 11* và *Sách giáo viên Toán 11* (Bộ sách Chân trời sáng tạo), nhóm tác giả biên soạn **Bài tập Toán 11 (tập một, tập hai)** nhằm giúp học sinh rèn luyện kiến thức và các kĩ năng cơ bản phù hợp với Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành năm 2018.

Nội dung sách **Bài tập Toán 11** thể hiện tinh thần tích hợp, phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh.

Cấu trúc sách tương ứng với *Sách giáo khoa Toán 11* (Bộ sách Chân trời sáng tạo). **Bài tập Toán 11, tập một** bao gồm năm chương:

– Chương I. Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

– Chương II. Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

– Chương III. Giới hạn. Hàm số liên tục

– Chương IV. Đường thẳng và mặt phẳng. Quan hệ song song trong không gian

– Chương V. Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm

Mỗi chương bao gồm nhiều bài học. Mỗi bài học gồm các phần như sau:

– KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– BÀI TẬP MẪU

– BÀI TẬP

Cuối mỗi chương là phần LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để Bộ sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc lượng giác

• ***Khái niệm góc lượng giác***

Cho hai tia *Oa*, *Ob*.

– Nếu một tia *Om* quay quanh gốc *O* của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia *Oa* và dừng ở vị trí tia *Ob* thì ta nói *Om* quét một ***góc lượng giác*** có tia đầu *Oa*, tia cuối *Ob*, kí hiệu (*Oa*, *Ob*).

– Khi tia *Om* quay một góc α, ta nói số đo của góc lượng giác (*Oa*, *Ob*) bằng α, kí hiệu sđ(*Oa*, *Ob*) = α.

Chú ý: Với hai tia *Oa* và *Ob* cho trước, có vô số góc lượng giác tia đầu *Oa* và tia cuối *Ob*. Ta dùng chung kí hiệu (*Oa*, *Ob*) cho tất cả các góc lượng giác này.

Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu *Oa* và tia cuối *Ob* sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là:

$$\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ\ (k \in \mathbb{Z}),\ \text{thường viết là } (Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ$$

với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu *Oa* và tia cuối *Ob*.

• ***Hệ thức Chasles (Sa-lơ)***

Với ba tia *Oa*, *Ob* và *Oc* bất kì, ta có $(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Đơn vị radian

Trên đường tròn bán kính *R* tuỳ ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng *R* được gọi là một góc có số đo 1 *radian* (đọc là 1 ra-đi-an, viết tắt là 1 rad).

$$a^\circ = \frac{\pi a}{180}\ \text{rad}; \qquad \alpha\ \text{rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ.$$

Chú ý:

• Khi ghi số đo của một góc ở đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo.

• Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là

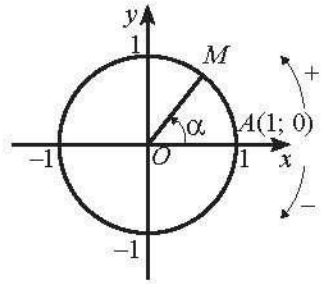
$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$,

trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob.

Lưu ý không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $a^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1; 0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là ***đường tròn lượng giác***.



Hình 1

Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của góc α là điểm M mà số đo của góc lượng giác (OA, OM) bằng α.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

a) Đổi số đo của góc 80° và góc 150° sang đơn vị radian.

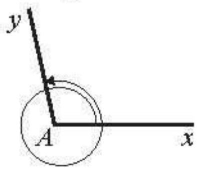
b) Đổi số đo của góc $\dfrac{3\pi}{5}$ rad và góc $-\dfrac{7\pi}{20}$ rad sang đơn vị độ.

Giải

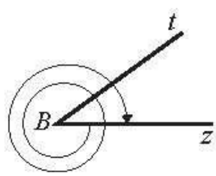
a) $80^\circ = \dfrac{80\pi}{180} = \dfrac{4\pi}{9}$; $\quad 150^\circ = \dfrac{150\pi}{180} = \dfrac{5\pi}{6}$.

b) $\dfrac{3\pi}{5}\text{ rad} = \left(\dfrac{3\pi}{5}\cdot\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ$; $\quad -\dfrac{7\pi}{20}\text{ rad} = \left(-\dfrac{7\pi}{20}\cdot\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ = -63^\circ$.

Bài 2. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây.



a) $\widehat{xAy} = 102^\circ$;



b) $\widehat{zBt} = \dfrac{\pi}{5}$.

Hình 2

Giải

Số đo của góc lượng giác (Ax, Ay) trong Hình 2a bằng $102° + 360° = 462°$.

Số đo của góc lượng giác (Bt, Bz) trong Hình 2b bằng $-\frac{\pi}{5} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{21\pi}{5}$.

Bài 3.

a) Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Oa, Ob), với $0 \le \alpha < 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob có số đo là $\frac{25\pi}{6}$.

b) Hãy tìm số đo $a°$ của góc lượng giác (Om, On), với $0 \le a < 360$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là $-875°$.

Giải

a) Số đo α của các góc lượng giác bất kì có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 2π nên có dạng là $\alpha = \frac{25\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $0 \le \alpha < 2\pi$, suy ra $-\frac{25\pi}{6} \le k2\pi < 2\pi - \frac{25\pi}{6}$, suy ra $-\frac{25}{12} \le k < -\frac{13}{12}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = -2$. Vậy $\alpha = \frac{25\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

b) Số đo $a°$ của các góc lượng giác có cùng tia đầu Om và tia cuối On sai khác nhau một bội nguyên của $360°$ nên có dạng là $a° = -875° + k360°$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $0 \le a < 360$, suy ra $875 \le k360 < 360 + 875$, suy ra $\frac{175}{72} \le k < \frac{247}{72}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$. Vậy $a° = -875° + 3 \cdot 360° = 205°$.

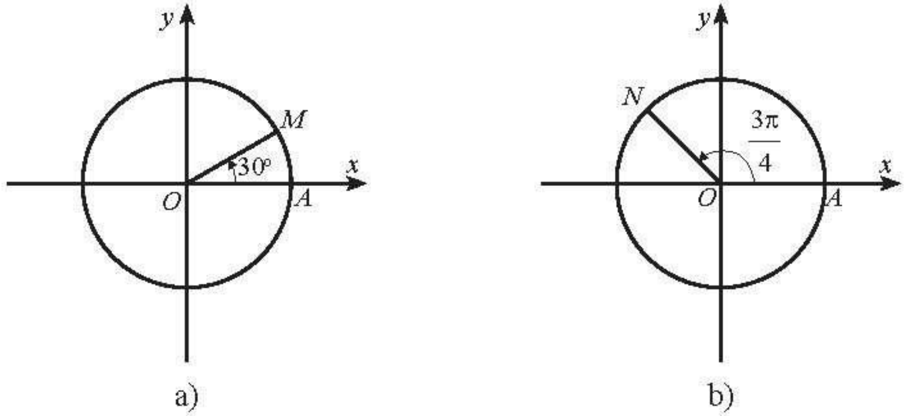
Bài 4. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

a) $750°$;   b) $-\frac{29\pi}{4}$.

Giải

a) Ta có $750° = 30° + 2 \cdot 360°$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $750°$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I sao cho $\overset{\frown}{AOM} = 30°$ (Hình 3a).

b) Ta có $-\frac{29\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + (-4) \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{29\pi}{4}$ là điểm N trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II sao cho $\overset{\frown}{AON} = \frac{3\pi}{4}$ (Hình 3b).



Hình 3

C. BÀI TẬP

1. Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

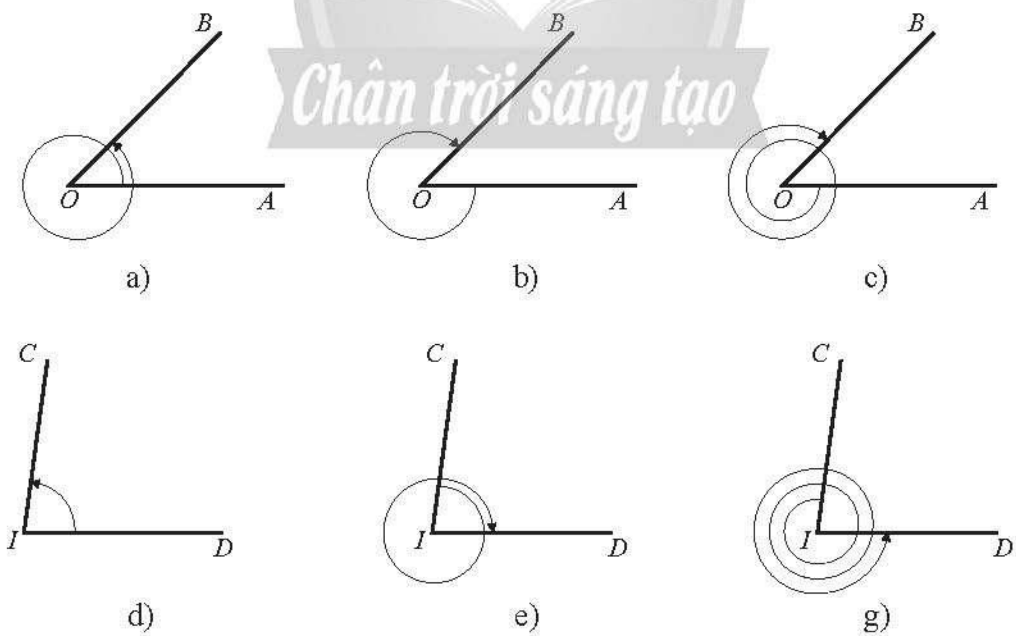
a) $15°$; b) $65°$; c) $-105°$; d) $\left(\frac{-5}{\pi}\right)^{\circ}$.

2. Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

a) 6; b) $\frac{4\pi}{15}$; c) $-\frac{19\pi}{8}$; d) $\frac{5}{3}$.

3. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây.

Biết trong các Hình 4a, b, c có $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$; trong các Hình 4d, e, g có $\widehat{CID} = 82°$.



Hình 4

4. Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Om, On), với $-\pi \leq \alpha < \pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là:

a) $\dfrac{36\pi}{5}$; b) $-\dfrac{75\pi}{14}$; c) $\dfrac{39\pi}{8}$; d) 2023π.

5. Cho một góc lượng giác có số đo là $375°$.

a) Tìm số lớn nhất trong các số đo của góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó mà có số đo âm;

b) Tìm số nhỏ nhất trong các số đo của góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó mà có số đo dương.

6. Viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) dưới dạng $a° + k360°$ $(k \in \mathbb{Z})$, với $0 \leq a < 360$, biết một góc lượng giác với tia đầu Om, tia cuối On có số đo:

a) $1935°$; b) $-450°$; c) $-1440°$; d) $754{,}5°$.

7. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

a) $-1965°$; b) $\dfrac{48\pi}{5}$.

8. a) Góc lượng giác $-245°$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$-605°;\ -65°;\ 115°;\ 205°;\ 475°.$$

b) Góc lượng giác $\dfrac{24\pi}{5}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

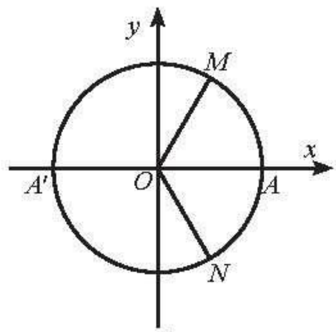
$$-\frac{16\pi}{5};\ -\frac{\pi}{5};\ \frac{14\pi}{5};\ \frac{29\pi}{5};\ \frac{53\pi}{10}.$$

9. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

a) $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; b) $\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

10. Trong hình bên, các điểm M, A', N tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều. Vị trí các điểm M, A', N trên đường tròn lượng giác có thể được biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z});\ -\pi + k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z});\ -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 5

11. Cho ba điểm M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác của các góc lượng giác có số đo $k2\pi$; $\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $\pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Tam giác MNP là tam giác gì?

12. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π?

13. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.

a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Hình 6

Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Trên đường tròn lượng giác, gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α. Khi đó:

$$\sin\alpha = y_M, \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ (nếu } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos\alpha = x_M, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ (nếu } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k, ta có:

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$;

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$.

2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\tan\alpha \, . \, \cot\alpha = 1$ với $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3. Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

- Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha; \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

- Hai góc hơn kém nhau π: α và $\alpha + \pi$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha; \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha;$$
$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha; \qquad \cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

- Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha; \qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

- Hai góc phụ nhau: α và $\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha; \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính các giá trị lượng giác của góc α, nếu:

a) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

b) $\cos\alpha = -0,7$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = 2$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

d) $\cot\alpha = \dfrac{7}{3}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Giải

a) Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$.

Vì $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos\alpha > 0$. Do đó $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = 2\sqrt{2}$.

b) Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (-0,7)^2 = \dfrac{51}{100}$.

Vì $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$. Do đó $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{51}}{10}$.

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{51}}{10}}{-0,7} = \dfrac{\sqrt{51}}{7}$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{7\sqrt{51}}{51}$.

c) Ta có $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + 2^2 = 5$.

Suy ra $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$. Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha > 0$. Do đó $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) Ta có $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = \dfrac{3}{7}$; $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = 1 + \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{58}{9}$.

Suy ra $\sin^2\alpha = \dfrac{9}{58}$. Vì $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$. Do đó $\sin\alpha = -\dfrac{3\sqrt{58}}{58}$.

Suy ra $\cos\alpha = \cot\alpha\sin\alpha = \dfrac{7}{3}\cdot\left(-\dfrac{3\sqrt{58}}{58}\right) = -\dfrac{7\sqrt{58}}{58}$.

Bài 2.

a) Biểu diễn $\sin\left(-\dfrac{29\pi}{3}\right)$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$;

b) Biểu diễn $\tan 973^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45°.

Giải

a) $\sin\left(-\dfrac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\dfrac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\dfrac{5\pi}{3} + 8\pi\right) = -\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + \pi\right) = \sin\dfrac{2\pi}{3}$

$$= \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}.$$

b) $\tan 973^\circ = \tan(73^\circ + 5.180^\circ) = \tan 73^\circ = \tan(90^\circ - 17^\circ) = \cot 17^\circ$.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 1 - \sin\alpha\cos\alpha$;

b) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} + \dfrac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha} = 0$.

Giải

a) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

$$=\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$$

$$=1-\sin\alpha\cos\alpha.$$

b) $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\dfrac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}=\dfrac{\tan\alpha\cot\alpha+\tan\alpha}{\tan\alpha\cot\alpha-\tan\alpha}+\dfrac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$

$$=\frac{\tan\alpha(\cot\alpha+1)}{\tan\alpha(\cot\alpha-1)}+\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}=\frac{\cot\alpha+1}{\cot\alpha-1}-\frac{1+\cot\alpha}{\cot\alpha-1}=0.$$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin^2(3\pi-\alpha)+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)$; b) $[1+\tan^2(-\alpha+11\pi)]\,.\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Giải

a) Ta có: $\sin(3\pi-\alpha)=\sin(\pi-\alpha+2\pi)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$;

$$\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Suy ra $\sin^2(3\pi-\alpha)+\sin^2\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

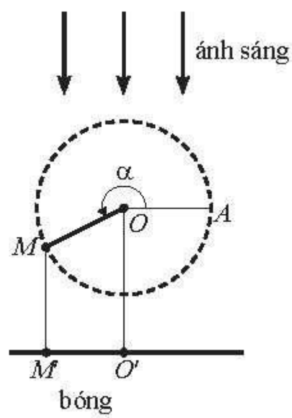
b) Ta có: $\tan(-\alpha+11\pi)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$;

$$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Suy ra $[1+\tan^2(-\alpha+11\pi)]\,.\,\sin^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)=(1+\tan^2\alpha)\,.\,\cos^2\alpha$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=1.$$

Bài 5. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\dfrac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 1

Giải

Ta có $\alpha = \dfrac{60}{13} \cdot 2\pi = \dfrac{120\pi}{13}$.

Suy ra $O'M' = |OM\cos\alpha| = \left|10\cos\dfrac{120\pi}{13}\right| \approx 7{,}5$ cm.

C. BÀI TẬP

1. Tính các giá trị lượng giác của góc α, nếu:

a) $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

b) $\cos\alpha = \dfrac{11}{61}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = -\dfrac{15}{8}$ và $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$;

d) $\cot\alpha = -2{,}4$ và $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$.

2. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\dfrac{\pi}{4}$ (hoặc từ 0° đến 45°):

a) $\sin(-1693^\circ)$; b) $\cos\dfrac{1003\pi}{3}$; c) $\tan 885^\circ$; d) $\cot\left(-\dfrac{53\pi}{10}\right)$.

3. Cho $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\cos(\alpha + \pi)$; b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$; c) $\tan\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

d) $\cot\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)$; e) $\cos\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$; g) $\sin(\pi - 2\alpha)$.

4. Biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha - \tan\alpha}$; b) $B = \dfrac{\cot^2\alpha - \sin\alpha}{\tan\alpha + 2\cos\alpha}$.

5. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$; b) $\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$;

c) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin^3\alpha} = \dfrac{1-\cot^4\alpha}{1-\cot\alpha}$; d) $\dfrac{\tan^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\cot^2\alpha + \sin^2\alpha - 1} = \tan^6\alpha$.

6. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^2 605^\circ + \sin^2 1645^\circ + \cot^2 25^\circ = \dfrac{1}{\cos^2 65^\circ}$;

b) $\dfrac{\sin 530^\circ}{1+\sin 640^\circ} = \dfrac{1}{\sin 10^\circ} + \cot 10^\circ$.

7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\cos(\alpha+\pi) + \sin\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right) - \tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\tan(\pi-\alpha)$.

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\beta+\pi) - \sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin 17^\circ \sin 197^\circ + \sin 73^\circ \cos 163^\circ$;

b) $\dfrac{1}{1-\tan 145^\circ} + \dfrac{1}{1+\tan 55^\circ}$.

9. a) Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$.

b) Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $\sin\alpha\cos\alpha$.

c) Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

10. Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\dfrac{3\sin x - 4\cos x}{5\sin x + 2\cos x}$;

b) $\dfrac{\sin^3 x + 2\cos^3 x}{2\sin x + 3\cos x}$.

11. Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

$$d(t) = 4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \le t \le 365.$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài 3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức cộng

- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;
- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;
- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$;
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

2. Công thức góc nhân đôi

- $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;
- $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;
- $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$;
- $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;
- $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
- $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
- $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
- $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; b) $\cos\dfrac{5\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}$; c) $\sin\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{5\pi}{24}$.

Giải

a) $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

b) $\cos\dfrac{5\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}=2\cos\dfrac{\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12}}{2}\cos\dfrac{\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}}{2}=2\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$;

c) $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}-\frac{5\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{5\pi}{24}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\frac{\pi}{4}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 2. Cho $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\cos 2\alpha$; b) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; c) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Vì $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$.

a) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)^2-1=-\frac{119}{169}$.

b) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{13}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$.

c) Ta có $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$.

Suy ra $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{12}{5}+1}{1-\left(-\frac{12}{5}\right)\cdot 1}=-\frac{7}{17}$.

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Giải

Ta có $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$ nên $2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=-\frac{7}{25}$.

Suy ra $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$ và $\sin^2\alpha=\frac{16}{25}$.

Mà $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha>0$ và $\sin\alpha>0$.

Do đó $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ và $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Suy ra $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

và $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{4}$.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)=\sin\alpha$;

b) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\alpha$;

c) $\sin\alpha\,(2\cos4\alpha+2\cos2\alpha+1)=\sin5\alpha$;

d) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

Giải

a) $\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)$

$=(\sin60^\circ\cos\alpha+\cos60^\circ\sin\alpha)-(\sin60^\circ\cos\alpha-\cos60^\circ\sin\alpha)$

$=2\cos60^\circ\sin\alpha=2\,.\,\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha$;

b) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=1-\frac{1}{4}(1-\cos4\alpha)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos4\alpha$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4\alpha$;

c) $\sin\alpha\,(2\cos4\alpha+2\cos2\alpha+1)$

$=2\sin\alpha\cos4\alpha+2\sin\alpha\cos2\alpha+\sin\alpha$

$=2\cdot\frac{1}{2}[\sin(-3\alpha)+\sin5\alpha]+2\cdot\frac{1}{2}[\sin(-\alpha)+\sin3\alpha]+\sin\alpha$

$=(-\sin3\alpha+\sin5\alpha)+(-\sin\alpha+\sin3\alpha)+\sin\alpha=\sin5\alpha$;

d) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\cos\alpha\cos\beta(1-\tan\alpha\tan\beta)}$

$=\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}$;

b) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;

c) $\frac{\sin^2\alpha}{4-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Giải

a) $\frac{\sin\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos2\alpha}=\frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$;

b) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{-2\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}\sin\dfrac{2\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}\sin\dfrac{2\alpha}{2}}=-\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha}{\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha}=-\tan\dfrac{\pi}{4}=-1;$

c) $\dfrac{\sin^2\alpha}{4-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\left(2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{4\left(1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}.$

C. BÀI TẬP

1. Không dùng máy tính cầm tay. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin\dfrac{19\pi}{24}\cos\dfrac{37\pi}{24}$; b) $\cos\dfrac{41\pi}{12}-\cos\dfrac{13\pi}{12}$; c) $\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{7}+\tan\dfrac{3\pi}{28}}{1+\tan\dfrac{6\pi}{7}\tan\dfrac{3\pi}{28}}$.

2. Cho $\cos\alpha=\dfrac{11}{61}$ và $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$; b) $\cot\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$; c) $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$; d) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}-2\alpha\right)$.

3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin x\cos^5 x-\cos x\sin^5 x$; b) $\dfrac{\sin 3x\cos 2x+\sin x\cos 6x}{\sin 4x}$;

c) $\dfrac{\cos x-\cos 2x+\cos 3x}{\sin x-\sin 2x+\sin 3x}$; d) $\dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}-\tan y$.

4. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $4\cos x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\cos 3x$;

b) $\dfrac{\sin 2x\cos x}{(1+\cos x)(1+\cos 2x)}=\tan\dfrac{x}{2}$;

c) $\sin x(1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x)=\sin 7x$;

d) $\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=8\cos 2x$.

5. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x.

a) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

6. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cos A\cos B - \sin A\sin B + \cos C = 0$;

b) $\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}$.

7. Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Tìm m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

8. Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $\sin(\alpha + \beta)$ và $\cos(\alpha - \beta)$.

9. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$;

b) $\cos 68^\circ \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ + \cos 190^\circ$.

10. Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ (cm) là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm) và } x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}.$$

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Bài 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số lượng giác

– *Hàm số sin* là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, kí hiệu là $y = \sin x$.

– *Hàm số côsin* là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, kí hiệu là $y = \cos x$.

– *Hàm số tang* là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \tan x.$$

– *Hàm số côtang* là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ với } x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \text{ kí hiệu } y = \cot x.$$

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là:

– *Hàm số chẵn* nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

– *Hàm số lẻ* nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

– *Hàm số tuần hoàn* nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có $x \pm T \in D$ và $f(x + T) = f(x)$. Số dương T nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là *chu kì* của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

3. Đồ thị của các hàm số lượng giác

a) Hàm số $y = \sin x$

– Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$.

– Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

– Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O.

– Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Hàm số $y = \cos x$

– Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$.

– Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

– Hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục Oy.

– Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Hàm số $y = \tan x$

– Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$.

– Hàm số tuần hoàn với chu kì π.

– Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O.

– Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) Hàm số $y = \cot x$

– Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$.

– Hàm số tuần hoàn với chu kì là π.

– Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O.

– Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x$; b) $y = \sin^3 x$; c) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; d) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Giải

a) Hàm số $y = \cos 2x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $\cos[2.(-x)] = \cos(-2x) = \cos 2x$. Do đó hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \sin^3 x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $\sin^3(-x) = (-\sin x)^3 = -\sin^3 x$. Do đó hàm số $y = \sin^3 x$ là hàm số lẻ.

c) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ xác định khi và chỉ khi $x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tức là $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Suy ra hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có $-x \neq -k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cũng có nghĩa là $-x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, hay $-x \in D$.

Mặt khác, ta lại có

$$\tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ.

d) Hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Đặt $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Xét hai giá trị $\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \in D$, ta thấy rằng:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vì $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ và $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

Bài 2. Chứng minh rằng các hàm số sau là các hàm số tuần hoàn:

a) $y = 5\sin\frac{x}{4}$; b) $y = -\tan\frac{x}{2}$; c) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; d) $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

a) Hàm số $y = 5\sin\frac{x}{4}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $x \pm 8\pi \in \mathbb{R}$ và $5\sin\frac{x + 8\pi}{4} = 5\sin\left(\frac{x}{4} + 2\pi\right) = 5\sin\frac{x}{4}$.

Do đó hàm số $y = 5\sin\frac{x}{4}$ là hàm số tuần hoàn.

b) Hàm số $y = -\tan\frac{x}{2}$ xác định khi và chỉ $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tức là $x \neq \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có $x \pm 2\pi \neq \pi \pm 2\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, suy ra $x \pm 2\pi \neq \pi + (k \pm 1)2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cũng có nghĩa là $x \pm 2\pi \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, hay $x \pm 2\pi \in D$.

Mặt khác, ta lại có $-\tan\frac{x + 2\pi}{2} = -\tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = -\tan\frac{x}{2}$.

Do đó hàm số $y = -\tan\frac{x}{2}$ là hàm số tuần hoàn.

c) Hàm số $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi $x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tức là $x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có $x \pm \pi \neq \frac{\pi}{3} \pm \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, suy ra $x \pm \pi \neq \frac{\pi}{3} + (k \pm 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cũng có nghĩa là $x \pm \pi \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, hay $x \pm \pi \in D$.

Mặt khác, ta lại có $\cot\left[(x+\pi)-\frac{\pi}{3}\right] = \cot\left[\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right] = \cot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Do đó hàm số $y = \cot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ là hàm số tuần hoàn.

d) Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$x \pm 6\pi \in \mathbb{R}$ và $\cos\left(\frac{x+6\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}+2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn.

Bài 3. Cho hàm số $y = \cos x$ với $x \in [0; 3\pi]$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

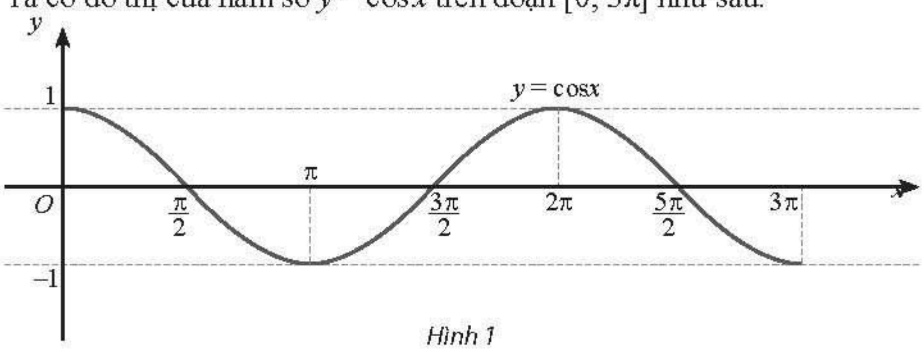
b) Hàm số đã cho đồng biến, nghịch biến trên những khoảng nào?

c) Tại các điểm nào thì giá trị của hàm số lớn nhất, nhỏ nhất?

d) Tìm các giá trị của $x \in [0; \pi]$ sao cho $\cos 3x \leq 0$.

Giải

a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; 3\pi]$ như sau:



Hình 1

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$, nghịch biến trên các khoảng $(0; \pi)$ và $(2\pi; 3\pi)$.

c) Giá trị của hàm số lớn nhất khi $x = 0$ và $x = 2\pi$.

Giá trị của hàm số nhỏ nhất khi $x = \pi$ và $x = 3\pi$.

d) Đặt $t = 3x$. Vì $0 \leq x \leq \pi$ nên $0 \leq t \leq 3\pi$.

Từ đồ thị của hàm số ở trên, ta có $\cos t \leq 0$ khi và chỉ khi $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ hoặc $\frac{5\pi}{2} \leq t \leq 3\pi$. Do đó $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \cot x$ với $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.

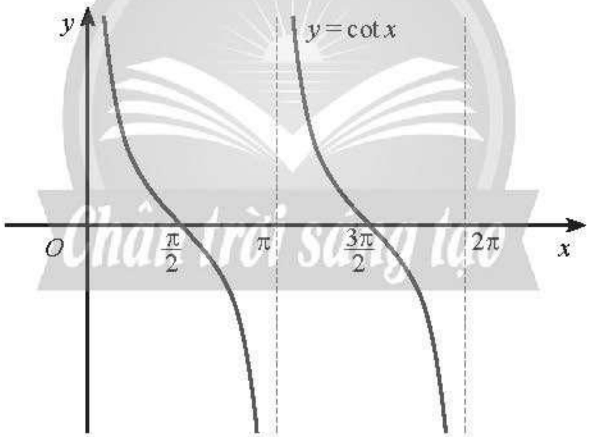
a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị của x sao cho $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Tìm các giá trị của $x \in (0; \pi)$ sao cho $\cot 2x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Giải

a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ như sau:

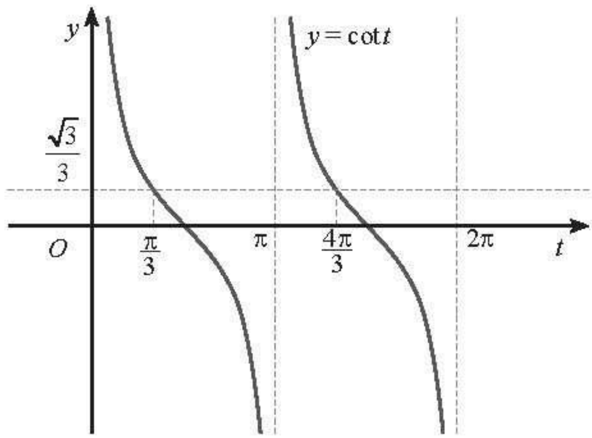


Hình 2

b) Với $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ ta có $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{4\pi}{3}$.

c) Đặt $t = 2x$. Vì $0 < x < \pi$ nên $0 < t < 2\pi$.

Hàm số $y = \cot t$ xác định khi $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kết hợp với điều kiện $0 < t < 2\pi$, suy ra $t \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.



Hình 3

Từ đồ thị trên, ta có $\cot t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $\frac{\pi}{3} < t < \pi$ hoặc $\frac{4\pi}{3} < t < 2\pi$.

Do đó $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ hoặc $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$.

C. BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = -\frac{2}{\sin 3x}$;　　b) $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$;

c) $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;　　d) $y = \frac{1}{3 - \cos^2 x}$.

2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin 3x}{x}$;　　b) $y = -5x^2 + \cos\frac{x}{2}$;　　c) $y = x\sqrt{1 + \cos 2x}$;

d) $y = \cot x - \frac{2}{\sin x}$;　　e) $y = |x| + \tan x$;　　g) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 5 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;　　b) $y = |\sin 3x| - 1$;

c) $y = 2\tan x + 3$;　　d) $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$;

4. Cho hàm số $y = \sin x$ với $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị của $x \in \left[\frac{-5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$ sao cho $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -1$.

c) Tìm các giá trị của $x \in \left[\frac{-9\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$ sao cho $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

d) Tìm m để có bốn giá trị $\alpha \in [-2\pi; 2\pi]$ phân biệt thoả mãn $\sin\alpha = m$.

5. Cho hàm số $y = \tan x$ với $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị của $x \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ sao cho $\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

c) Tìm các giá trị của $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ sao cho $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Chứng minh rằng các hàm số dưới đây là hàm số tuần hoàn.

a) $y = \sin x - 3\tan\frac{x}{2}$;   b) $y = (\cos 2x - 1)\sin x$.

7. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$$p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t,$$

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

8. Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình tương đương

– Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

– Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu "⇔".

2. Phương trình $\sin x = m$

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$.

Chú ý:

a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình $\cos x = m$

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos\alpha = m$.

Chú ý:

a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình tan $x = m$

Với mọi số thực m, phương trình $\tan x = m$ có nghiệm $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ với α là góc thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\alpha = m$.

Chú ý: $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Phương trình cot $x = m$

Với mọi số thực m, phương trình $\cot x = m$ có nghiệm $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$.

Chú ý: $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin 3x = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Giải

a) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin 3x = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = 2x + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $3x = \pi - \left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos(3x - 5^\circ) = \cos(2x + 15^\circ)$.

Giải

a) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos(3x - 5^\circ) = \cos(2x + 15^\circ)$

$\Leftrightarrow 3x - 5^\circ = 2x + 15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $3x - 5^\circ = -(2x + 15^\circ) + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 20^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -2^\circ + k72^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = 20^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -2^\circ + k72^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 3. Giải phương trình $\tan 3x = \tan\frac{\pi}{7}$.

Giải

$\tan 3x = \tan\frac{\pi}{7} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{7} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. Giải phương trình $\cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}$.

Giải

$$\cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{60} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{11\pi}{60} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos(2x - 30^\circ) = -1$;

c) $3\sin(-2x + 17^\circ) = 4$;

d) $\cos\left(3x - \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$;

e) $\sqrt{3}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$;

g) $\cot\left(\frac{x}{3} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cot\frac{\pi}{5}$.

2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos(2x + 10^\circ) = \sin(50^\circ - x)$;

b) $8\sin^3 x + 1 = 0$;

c) $(\sin x + 3)(\cot x - 1) = 0$;

d) $\tan(x - 30^\circ) - \cot 50^\circ = 0$.

3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$;

b) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$;

c) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2 x - 1 = 0$.

4. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác $y = \dfrac{\sin x - 2\cos 3x}{\sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$.

5. Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

b) $2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;

c) $\tan\left(x + \frac{\pi}{9}\right) = \tan\frac{4\pi}{9}$.

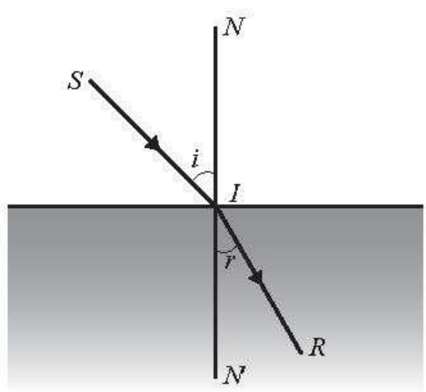
6. Tìm hoành độ các giao điểm của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ và $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

b) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

7. Tìm hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin 3x - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ với trục hoành.

8. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\dfrac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30°. Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 1

9. Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0° \leq \alpha \leq 90°$) từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu 10 m/s và góc ném là 30° so với phương ngang.

b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là 10 m/s thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là 5 m?

10. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20\sin\left(\dfrac{\pi}{25}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

1. Trên đường tròn lượng giác, góc lượng giác $\dfrac{13\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn với góc lượng giác nào sau đây?

A. $\dfrac{6\pi}{7}$. B. $\dfrac{20\pi}{7}$. C. $-\dfrac{\pi}{7}$. D. $\dfrac{19\pi}{14}$.

2. Điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác của góc lượng giác có số đo $-830°$ thuộc góc phần tư thứ mấy?

A. Góc phần tư thứ I. B. Góc phần tư thứ II.

C. Góc phần tư thứ III. D. Góc phần tư thứ IV.

3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $\cos(\pi - x) = -\cos x$. B. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.

C. $\tan(\pi + x) = \tan x$. D. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

4. Cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào không thể xảy ra?

A. $\sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $\cos 2\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

C. $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

5. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \tan x - 2\cot x$.

B. $y = \sin\dfrac{5\pi - x}{2}$.

C. $y = 3\sin^2 x + \cos 2x$.

D. $y = \cot\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right)$.

6. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $y = \sin x$.

B. $y = -\cot x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = \cos x$.

7. Cho $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ và $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

B. $\sin 2\alpha = -\dfrac{12}{25}$.

C. $\tan\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{31}{17}$.

D. $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$.

8. Cho $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ và $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$ bằng

A. $\dfrac{7}{12}$.

B. $\dfrac{1}{12}$.

C. $\dfrac{\sqrt{15}}{12}$.

D. $\dfrac{7}{144}$.

9. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ trên đoạn $[0; 8\pi]$ là

A. 14.

B. 15.

C. 16.

D. 17.

10. Số nghiệm của phương trình $\tan\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \tan\dfrac{3\pi}{8}$ trên đoạn $[-6\pi; \pi]$ là:

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D.10.

B. TỰ LUẬN

1. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin 2\alpha$; b) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$; c) $\tan\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Chứng minh rằng các hàm số dưới đây là hàm số tuần hoàn và xét tính chẵn, lẻ của mỗi hàm số đó.

a) $y = 3\sin x + 2\tan\dfrac{x}{3}$; b) $y = \cos x \sin\dfrac{\pi - x}{2}$.

3. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$;

b) $\sin^2 y + 2\cos x \cos y \cos(x - y) = \cos^2 x + \cos^2(x - y)$.

4. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0$; b) $\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$;

c) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2 x = 1$.

5. Vận tốc v_1 (cm/s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm/s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

$$v_1(t) = -4\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } v_2(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 cm/s;

b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

1. a) $\dfrac{\pi}{12}$; b) $\dfrac{13\pi}{36}$; c) $-\dfrac{7\pi}{12}$; d) $-\dfrac{1}{36}$.

2. a) $343,77^\circ$; b) 48°; c) $-427,5^\circ$; d) $95,49^\circ$.

3. a) $\dfrac{9\pi}{4}$; b) $-\dfrac{7\pi}{4}$; c) $-\dfrac{15\pi}{4}$;

d) 82°; e) -442° g) 998°.

4. a) $-\dfrac{4\pi}{5}$; b) $\dfrac{9\pi}{14}$; c) $\dfrac{7\pi}{8}$; d) $-\pi$.

5. a) -345°; b) 15°.

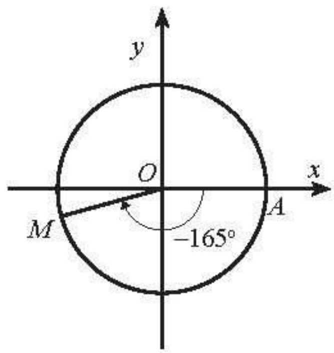
6. a) Ta có $1935^\circ = 135^\circ + 5 \,.\, 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = 135^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $-450^\circ = 270^\circ - 2 \,.\, 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = 270^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $-1\,440^\circ = -4 \,.\, 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

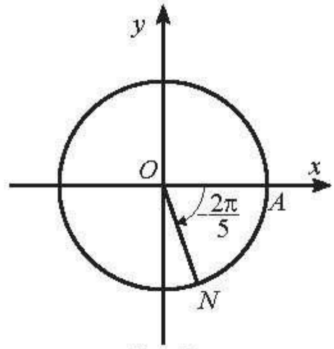
d) Ta có $754,5^\circ = 34,5^\circ + 2 \,.\, 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = 34,5^\circ + k360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

7. a) Ta có $-1965^\circ = -165^\circ + (-5) \,.\, 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -1965° là điểm M trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ III sao cho $\widehat{AOM} = 165^\circ$ như Hình 1.



Hình 1

b) Ta có $\frac{48\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 10\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{48\pi}{5}$ là điểm N trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ III sao cho $\widehat{AON} = \frac{2\pi}{5}$ như Hình 2.



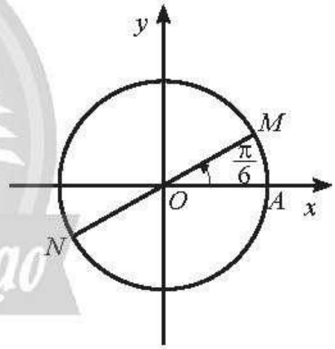
Hình 2

8. *Hướng dẫn:* Tính hiệu số đo của góc lượng giác cần xét với góc được cho. Nếu hiệu số đo là một bội nguyên của 360° hoặc 2π thì chúng có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

a) $-605°$; $115°$; $475°$;

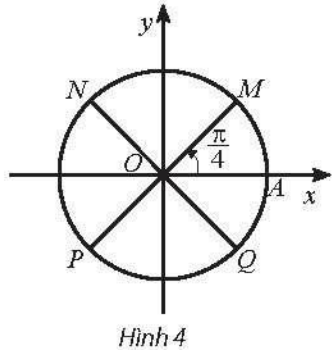
b) $-\frac{16\pi}{5}$; $\frac{14\pi}{5}$.

9. a) Trên đường tròn lượng giác, các góc có số đo $\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi hai điểm M và N như Hình 3.



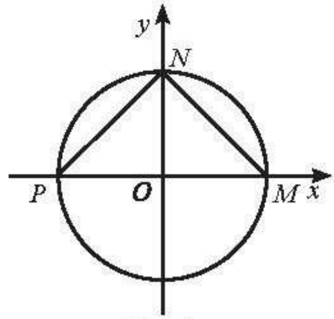
Hình 3

b) Trên đường tròn lượng giác, các góc có số đo $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi bốn điểm M, N, P, Q như Hình 4.



Hình 4

10. $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$; $-\pi + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.



Hình 5

11. Dễ thấy $M(1; 0)$, $N(0; 1)$ và $P(-1; 0)$.

Suy ra $MN = NP = \sqrt{2}$, $MP = 2$.

Do đó MNP là tam giác vuông cân tại N.

12. a) Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{175}{60} = \frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12} \cdot 2\pi = \frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6} \cdot 5 = \frac{175\pi}{6}$.

b) Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là

$$42\pi : \frac{35\pi}{6} = 7{,}2 \text{ giây}.$$

13. a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3{,}75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3{,}75 \,.\, 60 = 225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \,.\, 2\pi = 450\pi$.

b) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r = 0{,}35$ m. Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi \,.\, 0{,}35 \approx 494{,}8$ (m).

Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

1. a) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$, $\cot\alpha = \frac{3}{4}$;

b) $\sin\alpha = \frac{60}{61}$, $\tan\alpha = \frac{60}{11}$, $\cot\alpha = \frac{11}{60}$;

c) $\cot\alpha = -\frac{8}{15}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$;

d) $\tan\alpha = -\frac{5}{12}$, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

2. a) $\sin(-1693^\circ) = \cos 17^\circ$;

b) $\cos\frac{1003\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$;

c) $\tan 885^\circ = -\tan 15^\circ$;

d) $\cot\left(-\frac{53\pi}{10}\right) = -\tan\frac{\pi}{5}$.

3. a) $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha > 0$ vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha < 0$ vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cot\alpha < 0$ vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

d) $\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha < 0$ vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

e) $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2\alpha < 0$ vì $2\pi < 2\alpha < 3\pi$.

g) $\sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha > 0$ vì $2\pi < 2\alpha < 3\pi$.

4. Vì $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ và $\cot\alpha = -\frac{4}{3}$.

a) $A = \dfrac{3\cdot\frac{3}{5}}{2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{36}{17}$;

b) $B = \dfrac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{5}}{-\frac{3}{4} + 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{212}{423}$.

5. a) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$;

b) $\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x} = \dfrac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$;

c) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin^3\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = (1 + \cot^2\alpha) + \cot\alpha\,(1 + \cot^2\alpha)$

$= (1 + \cot\alpha)(1 + \cot^2\alpha)$

$= \dfrac{(1 - \cot^2\alpha)(1 + \cot^2\alpha)}{1 - \cot\alpha} = \dfrac{1 - \cot^4\alpha}{1 - \cot\alpha}$;

d) $\dfrac{\tan^2\alpha+\cos^2\alpha-1}{\cot^2\alpha+\sin^2\alpha-1}=\dfrac{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha}$

$$=\frac{\sin^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)}{\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)}=\tan^2\alpha\cdot\frac{\tan^2\alpha}{\cot^2\alpha}=\tan^6\alpha.$$

6. *Hướng dẫn:* Các góc được cho đều có liên quan đặc biệt. Sử dụng công thức để biểu diễn giá trị lượng giác của các góc về giá trị lượng giác của cùng một góc và sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để chứng minh đẳng thức.

a) $\sin 605^\circ=-\sin 65^\circ$, $\sin 1645^\circ=-\cos 65^\circ$, $\cot 25^\circ=\tan 65^\circ$.

$\sin^2 605^\circ+\sin^2 1645^\circ+\cot^2 25^\circ=\sin^2 65^\circ+\cos^2 65^\circ+\tan^2 65^\circ=1+\tan^2 65^\circ$

$$=\frac{1}{\cos^2 65^\circ}.$$

b) $\sin 530^\circ=\sin 10^\circ$; $\sin 640^\circ=-\cos 10^\circ$.

$$\frac{\sin 530^\circ}{1+\sin 640^\circ}=\frac{\sin 10^\circ}{1-\cos 10^\circ}=\frac{\sin^2 10^\circ}{\sin 10^\circ(1-\cos 10^\circ)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 10^\circ}{\sin 10^\circ(1-\cos 10^\circ)}=\frac{(1+\cos 10^\circ)(1-\cos 10^\circ)}{\sin 10^\circ(1-\cos 10^\circ)}$$

$$=\frac{1+\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{1}{\sin 10^\circ}+\cot 10^\circ.$$

7. a) -1; b) 0.

8. *Hướng dẫn:* Sử dụng công thức để biểu diễn giá trị lượng giác của các góc về giá trị lượng giác của cùng một góc và sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để rút gọn.

a) -1; b) 1.

9. a) $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha=(\tan\alpha+\cot\alpha)^3-3\tan\alpha\cot\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$

$=(\tan\alpha+\cot\alpha)^3-3(\tan\alpha+\cot\alpha)=2^3-3.2=2.$

b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha.$

Do đó $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}[(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1]=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-1\right]=-\dfrac{15}{32}.$

c) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)$

$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha\cos\alpha)$.

Mà $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}[(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = -\frac{3}{8}$,

nên $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left[1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8} = \frac{11}{16}$.

10. *Hướng dẫn:* Vì $\tan x$ xác định nên $\cos x \neq 0$. Chia tử và mẫu của phân thức cho luỹ thừa thích hợp của $\cos x$ để biểu diễn biểu thức theo $\tan x$.

a) $$\frac{3\sin x - 4\cos x}{5\sin x + 2\cos x} = \frac{3\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - 4}{5\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + 2} = \frac{3\tan x - 4}{5\tan x + 2} = \frac{3.2 - 4}{5.2 + 2} = \frac{1}{6}.$$

b) $$\frac{\sin^3 x + 2\cos^3 x}{2\sin x + 3\cos x} = \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 2}{\left(2\frac{\sin x}{\cos x} + 3\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^3 x + 2}{(2\tan x + 3)(\tan^2 x + 1)}$$

$$= \frac{2^3 + 2}{(2.2 + 3)(2^2 + 1)} = \frac{2}{7}.$$

11. $d(31) = 9{,}01$ giờ.

Bài 3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. a) $$\sin\frac{19\pi}{24}\cos\frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\frac{7\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4};$$

b) $$\cos\frac{41\pi}{12} - \cos\frac{13\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{9\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

c) $\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{7}+\tan\dfrac{3\pi}{28}}{1+\tan\dfrac{6\pi}{7}\tan\dfrac{3\pi}{28}}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{7}+\tan\dfrac{3\pi}{28}}{1+\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{7}\right)\tan\dfrac{3\pi}{28}}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{7}+\tan\dfrac{3\pi}{28}}{1-\tan\dfrac{\pi}{7}\tan\dfrac{3\pi}{28}}$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{7}+\frac{3\pi}{28}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1.$$

2. a) Vì $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$.

Do đó, $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{61}\right)^2}=-\dfrac{60}{61}$.

Suy ra

$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{61}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\dfrac{60}{61}\right)=\dfrac{11+60\sqrt{3}}{122}$.

b) Ta có $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\dfrac{60}{61}}{\dfrac{11}{61}}=-\dfrac{60}{11}$.

Do đó $\cot\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{4}}{\tan\alpha+\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{60}{11}\right)\cdot 1}{\left(-\dfrac{60}{11}\right)+1}=-\dfrac{71}{49}$.

c) Ta có $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\dfrac{11}{61}\right)^2-1=-\dfrac{3479}{3721}$;

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\dfrac{60}{61}\right)\cdot\dfrac{11}{61}=-\dfrac{1320}{3721}$.

Suyra $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 2\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin 2\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{3479}{3721}\cdot\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1320}{3721}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\frac{-3479+1320\sqrt{3}}{7442}.$$

d) Ta có $\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{-\dfrac{1320}{3721}}{-\dfrac{3479}{3721}}=\dfrac{1320}{3479}$.

Suy ra $\tan\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)=\dfrac{\tan\frac{3\pi}{4}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{3\pi}{4}\tan 2\alpha}=\dfrac{-1-\frac{1320}{3479}}{1+(-1)\cdot\frac{1320}{3479}}=-\dfrac{4799}{2159}$.

3. a) $\sin x\cos^5 x-\cos x\sin^5 x=\sin x\cos x\,(\cos^4 x-\sin^4 x)$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\,(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x;$$

b) $$\frac{\sin 3x\cos 2x+\sin x\cos 6x}{\sin 4x}=\frac{\frac{1}{2}(\sin x+\sin 5x)+\frac{1}{2}\left[\sin(-5x)+\sin 7x\right]}{\sin 4x}$$

$$=\frac{\sin x+\sin 5x-\sin 5x+\sin 7x}{2\sin 4x}=\frac{\sin x+\sin 7x}{2\sin 4x}$$

$$=\frac{2\sin 4x\cos 3x}{2\sin 4x}=\cos 3x;$$

c) $$\frac{\cos x-\cos 2x+\cos 3x}{\sin x-\sin 2x+\sin 3x}=\frac{(\cos x+\cos 3x)-\cos 2x}{(\sin x+\sin 3x)-\sin 2x}=\frac{2\cos 2x\cos x-\cos 2x}{2\sin 2x\cos x-\sin 2x}$$

$$=\frac{\cos 2x(2\cos x-1)}{\sin 2x(2\cos x-1)}=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cot 2x;$$

d) $$\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}-\tan y=\frac{2(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}{2\cos x\cos y}-\tan y$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}-\tan y=\tan x+\tan y-\tan y$$

$$=\tan x.$$

4. a) $4\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=2\cos x\left(\cos 2x+\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

$$=2\cos x\cos 2x+2\cos x\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$=\cos x+\cos 3x+2\cos x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\cos x+\cos 3x-\cos x=\cos 3x;$$

b) $\dfrac{\sin 2x\cos x}{(1+\cos x)(1+\cos 2x)}=\dfrac{(2\sin x\cos x)\cos x}{\left(1+2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\right)(1+2\cos^2 x-1)}=\dfrac{2\sin x\cos^2 x}{4\cos^2\dfrac{x}{2}\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2};$$

c) $\sin x(1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x)$

$=\sin x+2\sin x\cos 2x+2\sin x\cos 4x+2\sin x\cos 6x$

$=\sin x+[\sin(-x)+\sin 3x]+[\sin(-3x)+\sin 5x]+[\sin(-5x)+\sin 7x]$

$=\sin x+(-\sin x+\sin 3x)+(-\sin 3x+\sin 5x)+(-\sin 5x+\sin 7x)$

$=\sin 7x;$

d)

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 3x\cos^2 x-\cos^2 3x\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{(\sin 3x\cos x)^2-(\cos 3x\sin x)^2}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\frac{(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x)(\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x)}{\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}$$

$$=\frac{4\sin 4x\sin 2x}{\sin^2 2x}=\frac{4(2\sin 2x\cos 2x)\sin 2x}{\sin^2 2x}$$

$$=\frac{8\sin^2 2x\cos 2x}{\sin^2 2x}=8\cos 2x.$$

5. a) Ta có $\sin^2 x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\sin^2 x+\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$=\sin^2 x+\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Vậy giá trị của biểu thức $\sin^2 x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$ không phụ thuộc vào giá trị của x.

b) Ta có $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\left(2x+\frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right]+\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)\right]+\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\frac{7\pi}{12}.$$

Vậy giá trị của biểu thức $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ không phụ thuộc vào giá trị của x.

6. Vì tổng số đo ba góc của một tam giác bằng 180° nên $A + B + C = 180°$.

Suy ra $\frac{A+B+C}{2} = 90°$, hay $\frac{B}{2}+\frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$.

a) $\cos A\cos B - \sin A\sin B + \cos C = \cos(A + B) + \cos C = \cos(180° - C) + \cos C$
$= -\cos C + \cos C = 0.$

b) $\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}.$

7. Ta có $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$

Vì $-1 \le \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$ nên $-\sqrt{2} \le \sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}$. Suy ra $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

Ta lại có $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$.

Suy ra $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 = m^2 - 1$.

Khi đó, $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$ hay $m^2 - 1 = -\frac{3}{4}$, suy ra $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$.

8. Vì $0° < \alpha < 90°$ nên $\cos\alpha > 0$. Do đó, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

Vì $0° < \beta < 90°$ nên $\sin\beta > 0$. Do đó, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$.

Khi đó, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$;

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$.

9. a) Đặt $A = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$. Ta có:

$$\cos 6^\circ\,.\,A = \cos 6^\circ \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{2}\sin 12^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\sin 24^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{8}\sin 48^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16}\sin 96^\circ = \frac{1}{16}\cos 6^\circ.$$

Suy ra $A = \frac{1}{16}$.

b) $\cos 68^\circ \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ + \cos 190^\circ = \sin 22^\circ \sin 12^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ + \cos 10^\circ$

$$= \cos(22^\circ - 12^\circ) - \cos 10^\circ = 0.$$

10. a) Ta có $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= 3\,.\,2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$= 6\cos\frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right)$.

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2}$ cm và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Bài 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

1. a) $y = -\frac{2}{\sin 3x}$ xác định khi $\sin 3x \neq 0$, tức là $3x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $x \neq k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, hay $x \neq \frac{4\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định khi $2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $\cos^2 x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\cos^2 x \neq 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = \dfrac{1}{3 - \cos^2 x}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

2. a) Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sin 3x}{x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

Ta có $\dfrac{\sin[3(-x)]}{-x} = \dfrac{\sin(-3x)}{-x} = \dfrac{-\sin 3x}{-x} = \dfrac{\sin 3x}{x}$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{\sin 3x}{x}$ là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của hàm số $y = -5x^2 + \cos\dfrac{x}{2}$ là $D = \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$. Ta có $-5(-x)^2 + \cos\left(\dfrac{-x}{2}\right) = -5x^2 + \cos\dfrac{x}{2}$.

Vậy hàm số $y = -5x^2 + \cos\dfrac{x}{2}$ là hàm số chẵn.

c) Tập xác định của hàm số $y = x\sqrt{1 + \cos 2x}$ là $D = \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$. Ta có $(-x)\sqrt{1 + \cos(-2x)} = -x\sqrt{1 + \cos 2x}$.

Vậy hàm số $y = x\sqrt{1 + \cos 2x}$ là hàm số lẻ.

d) Tập xác định của hàm số $y = \cot x - \dfrac{2}{\sin x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

Ta có $\cot(-x) - \dfrac{2}{\sin(-x)} = -\cot x + \dfrac{2}{\sin x} = -\left(\cot x - \dfrac{2}{\sin x}\right)$.

Vậy hàm số $y = \cot x - \dfrac{2}{\sin x}$ là hàm số lẻ.

e) Tập xác định của hàm số $y = |x| + \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

Đặt $f(x) = |x| + \tan x$. Xét hai giá trị $\dfrac{\pi}{4}$ và $-\dfrac{\pi}{4}$ thuộc D, ta có:

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|\dfrac{\pi}{4}\right| + \tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 1$ và $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \left|-\dfrac{\pi}{4}\right| + \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} - 1$.

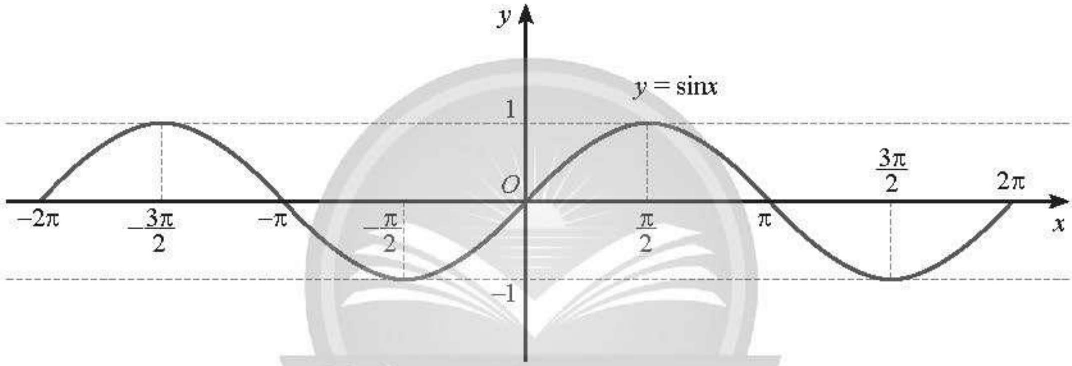
Do $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nên $y = |x| + \tan x$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

g) Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ không thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$ vì $-\frac{\pi}{4} \in D$ mà $\frac{\pi}{4} \notin D$.

Vậy hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

3. a) $[3; 7]$; b) $[-1; 0]$; c) $\mathbb{R}$; d) $[2; 2 + \sqrt{2}]$.

4. a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ như sau:



Hình 1

b) Đặt $t = \frac{\pi}{3} - x$. Vì $\frac{-5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$ nên $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

Từ đồ thị của hàm số ở trên, ta có:

$\sin t = -1$ khi và chỉ khi $t = -\frac{\pi}{2}$ hoặc $t = \frac{3\pi}{2}$. Do đó $x = \frac{5\pi}{6}$ hoặc $x = -\frac{7\pi}{6}$.

c) Đặt $t = 2x + \frac{\pi}{4}$. Vì $\frac{-9\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8}$ nên $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

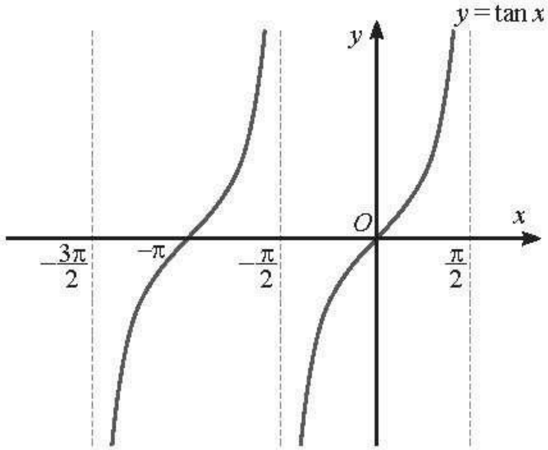
Từ đồ thị của hàm số ở trên, ta có:

$\sin t > 0$ khi và chỉ khi $-2\pi < t < -\pi$ hoặc $0 < t < \pi$.

Do đó $-\frac{9\pi}{8} < x < -\frac{5\pi}{8}$ hoặc $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$.

d) Có bốn giá trị $\alpha \in [-2\pi; 2\pi]$ thoả mãn $\sin\alpha = m$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \sin\alpha$ tại bốn điểm. Từ đồ thị hàm số ở trên, ta thấy điều này xảy ra khi và chỉ khi $-1 < m < 0$ hoặc $0 < m < 1$.

5. a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ với $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ như sau:



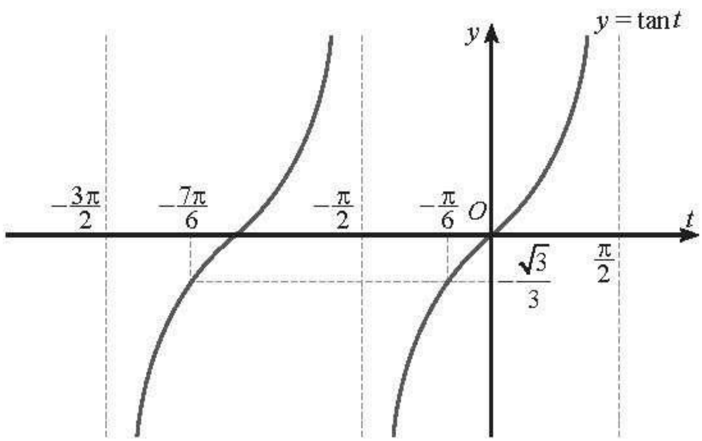
Hình 2

b) Ta có $\sqrt{3}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$ khi và chỉ khi $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$. Vì $-\frac{7\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ nên $-\frac{3\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, hay $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Hàm số $y = \tan t$ xác định khi $t \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kết hợp với điều kiện $t \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $t \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đồ thị hàm số $y = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ như sau:



Hình 3

Từ đồ thị hàm số trên, ta có:

$\tan t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $t = -\dfrac{7\pi}{6}$ hoặc $t = -\dfrac{\pi}{6}$.

Do đó $x = -\dfrac{17\pi}{12}$ hoặc $x = -\dfrac{5\pi}{12}$.

c) Đặt $t = 2x + \dfrac{\pi}{6}$. Vì $-\dfrac{5\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$ nên $-\dfrac{3\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, hay $t \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Tương tự câu b, từ đồ thị hàm số trên, ta có:

$\tan t \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $-\dfrac{7\pi}{6} \le t < -\dfrac{\pi}{2}$ hoặc $-\dfrac{\pi}{6} \le t < \dfrac{\pi}{2}$.

Do đó $-\dfrac{2\pi}{3} \le x < -\dfrac{\pi}{3}$ hoặc $-\dfrac{\pi}{6} \le x < \dfrac{\pi}{6}$.

6. a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có:

$x \pm 2\pi \in D$ và $\sin(x + 2\pi) - 3\tan\dfrac{x + 2\pi}{2} = \sin x - 3\tan\left(\dfrac{x}{2} + \pi\right) = \sin x - 3\tan\dfrac{x}{2}$.

Do đó hàm số $y = \sin x - 3\tan\dfrac{x}{2}$ là hàm số tuần hoàn.

b) Hàm số $y = (\cos 2x - 1)\sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $x \pm 2\pi \in \mathbb{R}$;

$[\cos 2(x + 2\pi) - 1]\sin(x + 2\pi) = [\cos(2x + 4\pi) - 1]\sin x = (\cos 2x - 1)\sin x$.

Do đó hàm số $y = (\cos 2x - 1)\sin x$ là hàm số tuần hoàn.

7. a) Hàm số $p(t)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \dfrac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và

$p\left(t + \dfrac{1}{75}\right) = 120 + 15\cos(150\pi t + 2\pi) = 120 + 15\cos 150\pi t = p(t)$.

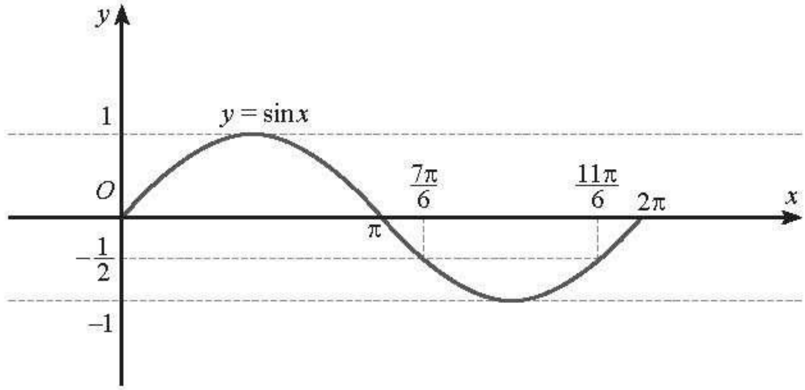
Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \le \cos 150\pi t \le 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \le p(t) \le 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Vậy chỉ số huyết áp của người đó là 135/105.

8. Trong 4 giây đầu, ta có $0 \le t \le 4$, suy ra $0 \le \dfrac{\pi}{2}t \le 2\pi$.

Đặt $x = \dfrac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0; 2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ như sau:



Hình 4

Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0; 2\pi]$, ta có:

$s \le -\frac{3}{2}$ khi $3\sin x \le -\frac{3}{2}$ hay $\sin x \le -\frac{1}{2}$, suy ra $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$.

Do đó $\frac{7}{3} \le t \le \frac{11}{3}$.

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. a) $x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$;

b) $x = 105^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$; c) Phương trình vô nghiệm;

d) $x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

e) $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; g) $x = -\frac{3\pi}{5} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. a) $\cos(2x + 10^\circ) = \sin(50^\circ - x)$

$\Leftrightarrow \cos(2x + 10^\circ) = \cos(x + 40^\circ)$

$\Leftrightarrow 2x + 10^\circ = x + 40^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $2x + 10^\circ = -x - 40^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -\frac{1}{3}.\ 50^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\frac{1}{3}.\ 50^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $8\sin^3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x = -\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $(\sin x + 3)(\cot x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x + 3 = 0$ hoặc $\cot x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -3$ hoặc $\cot x = 1$.

Phương trình $\sin x = -3$ vô nghiệm.

Phương trình $\cot x = 1$ có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $\tan(x - 30^\circ) - \cot 50^\circ = 0 \Leftrightarrow \tan(x - 30^\circ) = \cot 50^\circ \Leftrightarrow \tan(x - 30^\circ) = \tan 40^\circ$

$$\Leftrightarrow x - 30^\circ = 40^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 70^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = 70^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

3. a) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right)$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2 \text{ hoặc } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$

$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $3x - \frac{\pi}{4} = -2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

4. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$.

Ta có $\sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = \pi + 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do đó $\sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ khi và chỉ khi

$$x \neq \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x \neq -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. a) $x \in \left\{-\frac{7\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}\right\}$;

b) $x \in \left\{-\frac{17\pi}{24}; -\frac{13\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}; \frac{11\pi}{24}\right\}$;

c) $x \in \left\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$.

6. a) $x = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$;

b) $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

7. $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{5\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

8. Vì $\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sin 60^\circ}{\sin r}$ nên $\sin r = \dfrac{\sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $r = 37,76^\circ$.

9. a) $d = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ (m);

b) $d = 5 \Leftrightarrow \dfrac{10^2.\sin 2\alpha}{10} = 5 \Leftrightarrow 10\sin 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ$ hoặc $2\alpha = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha = 15^\circ$ hoặc $\alpha = 75^\circ$.

10. a) 50 m; b) 12,5 giây.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. TRẮC NGHIỆM

1. C	**2.** C	**3.** B	**4.** B	**5.** A
6. D	**7.** A	**8.** D	**9.** C	**10.** A

B. TỰ LUẬN

1. a) $-\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$; b) $-\dfrac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$; c) $\dfrac{32-3\sqrt{7}}{31}$.

2. a) Tập xác định của hàm số $y = 3\sin x + 2\tan\dfrac{x}{3}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{2} + k3\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Vì $x \pm 6\pi \in D$ với mọi $x \in D$ và

$$3\sin(x + 6\pi) + 2\tan\frac{x+6\pi}{3} = 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = 3\sin x + 2\tan\frac{x}{3}$$

nên hàm số $y = 3\sin x + 2\tan\dfrac{x}{3}$ là hàm số tuần hoàn.

Vì $-x \in D$ với mọi $x \in D$ và

$$3\sin(-x) + 2\tan\left(-\frac{x}{3}\right) = -3\sin x - 2\tan\frac{x}{3} = -\left(3\sin x + 2\tan\frac{x}{3}\right)$$

nên hàm số $y = 3\sin x + 2\tan\dfrac{x}{3}$ là hàm số lẻ.

b) Hàm số $y = \cos x \sin\dfrac{\pi - x}{2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Vì $x \pm 4\pi \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$\cos(x + 4\pi)\sin\frac{\pi - (x + 4\pi)}{2} = \cos x \sin\left(\frac{\pi - x}{2} - 2\pi\right) = \cos x \sin\frac{\pi - x}{2}$$

nên hàm số $y = \cos x \sin\dfrac{\pi - x}{2}$ là hàm số tuần hoàn.

Vì $-x \in \mathbb{R}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$\cos(-x)\sin\frac{\pi + x}{2} = \cos x \sin\left(\pi - \frac{\pi - x}{2}\right) = \cos x \sin\frac{\pi - x}{2}$$

nên hàm số $y = \cos x \sin\dfrac{\pi - x}{2}$ là hàm số chẵn.

3. a) $\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$

$$= \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right]\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \left(2\sin x\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(2\cos x\sin\frac{\pi}{8}\right) = (2\sin x\cos x)\left(2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sin 2x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x.$$

b) Ta có: $\sin^2 y + 2\cos x\cos y\cos(x - y) = \cos^2 x + \cos^2(x - y)$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\cos y\cos(x - y) - \cos^2(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

$2\cos x\cos y\cos(x - y) - \cos^2(x - y)$

$= \cos(x - y)[2\cos x\cos y - \cos(x - y)] = \cos(x - y)[\cos x\cos y - \sin x\sin y]$

$= \cos(x - y)\cos(x + y) = \dfrac{1}{2}(\cos 2y + \cos 2x)$

$= \dfrac{1}{2}(1 - 2\sin^2 y + 2\cos^2 x - 1) = \cos^2 x - \sin^2 y.$

4. a) $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$;

b) $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\dfrac{\pi}{30} + k\dfrac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

5. a) $t = \dfrac{5\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$ và $t = \dfrac{13\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$;

b) $t = \dfrac{19\pi}{16} + k\dfrac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ và $t = \dfrac{13\pi}{32} + k\dfrac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{N}$.

Chương II. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

Bài 1. DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm dãy số

• Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một ***dãy số vô hạn*** (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$\begin{aligned} u:\ & \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ & n \mapsto u_n = u(n). \end{aligned}$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n).

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \ldots; u_n; \ldots$

• Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \ldots; m\}$ thì được gọi là một ***dãy số hữu hạn***.

Dạng khai triển của dãy số này là $u_1, u_2, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là ***số hạng đầu*** và u_m là ***số hạng cuối***.

2. Cách xác định dãy số

Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

Cách 1: Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).

Cách 2: Cho công thức của số hạng tổng quát u_n.

Cách 3: Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
- Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).

Cách 4: Cho bằng cách mô tả.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

Cho dãy số (u_n).

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số tăng*** nếu $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy số giảm*** nếu $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Dãy số bị chặn

• Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

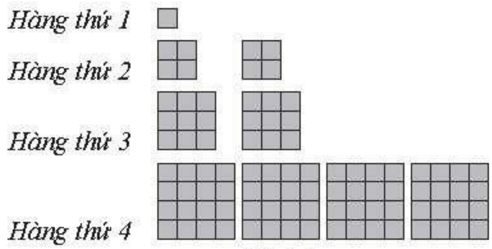
• Dãy số (u_n) được gọi là dãy số ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình 1 (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).

a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4.

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n).



Hình 1

Giải

a) $u_1 = 1; u_2 = 8; u_3 = 27; u_4 = 64$.

b) Ta có: $u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; u_4 = 4^3$. Do đó, dự đoán $u_n = n^3$.

Bài 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đó.

Giải

Năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là:

$$u_1 = \frac{1^2+3.1+7}{1+1} = \frac{11}{2}; \quad u_2 = \frac{2^2+3.\,2+7}{2+1} = \frac{17}{3}; \quad u_3 = \frac{2^2+3.\,3+7}{3+1} = \frac{25}{4};$$

$$u_4 = \frac{4^2+3.\,4+7}{4+1} = 7; \quad u_5 = \frac{5^2+3.\,5+7}{5+1} = \frac{47}{6}.$$

Bài 3. Cho dãy số (u_n) có năm số hạng đầu tiên lần lượt là: –1; 1; –1; 1; –1. Hãy dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Giải

Năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là:

$u_1 = (-1)^1; \quad u_2 = (-1)^2; \quad u_3 = (-1)^3; \quad u_4 = (-1)^4; \quad u_5 = (-1)^5$.

Do đó, dự đoán số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = (-1)^n$.

Bài 4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

Giải

Ta có $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn dưới.

Ta lại có $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \dfrac{3}{n+2} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn trên.

Dãy số (u_n) vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới nên dãy số (u_n) bị chặn.

Bài 5. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, ta có: $u_n = \dfrac{n+1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn dưới;

$u_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn trên.

Ta thấy dãy số (u_n) vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, suy ra dãy số (u_n) bị chặn.
Vậy (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

C. BÀI TẬP

1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số?

2. Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n}. \end{cases}$

3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \quad (n \geq 1). \end{cases}$

Tìm số hạng thứ năm của dãy số đó.

4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

5. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau:

a) $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$; b) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$; c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$.

6. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau:

a) $u_n = n - \sqrt{n^2-1}$; b) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2}$; c) $u_n = \dfrac{3^n-1}{2^n}$.

7. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

Bài 2. CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm cấp số cộng

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là ***công sai*** của cấp số cộng.

2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, n \geq 2.$$

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}.$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm cấp số cộng trong các dãy số sau:

a) 1; −3; −7; −11; −15. b) 1; −3; −6; −9; −12. c) 1; −2; −4; −6; −8.

Giải

a) Dãy số 1; −3; −7; −11; −15 là cấp số cộng với công sai $d = -4$.

b) Ta có $(-3) - 1 \neq (-6) - (-3)$. Vậy dãy số này không phải là cấp số cộng.

c) Ta có $(-2) - 1 \neq (-4) - (-2)$. Vậy dãy số này không phải là cấp số cộng.

Bài 2. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Tìm u_2.

Giải

Ta có $u_2 = u_1 + d = 9 + 2 = 11$.

Bài 3. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$. Tìm u_{10}.

Giải

Ta có $u_{10} = u_1 + 9d = -5 + 9 \,.\, 3 = 22$.

Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34. \end{cases}$

a) Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n).

b) Tính tổng của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n).

c) Tính $S = u_4 + u_5 + ... + u_{30}$.

Giải

a) Từ giả thiết của bài toán, ta có:

$$\begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - (u_1 + d) = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -7 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3. \end{cases}$$

Số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) là: $u_{100} = u_1 + 99d = 2 + 99 \,.\, (-3) = -295$.

b) Tổng của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) là:

$$S_{15} = \frac{15(2u_1 + 14d)}{2} = -285.$$

c) Ta có: $S = u_4 + u_5 + ... + u_{30} = \dfrac{27(2u_4 + 26d)}{2} = 27(u_1 + 16d)$

$= 27[2 + 16 \,.\, (-3)] = -1\,242$.

Chú ý: Với Bài 4c, ta có thể thực hiện theo cách sau:

$$S = S_{30} - S_3 = 15(2u_1 + 29d) - \frac{3}{2}(2u_1 + 2d) = -1\,242.$$

Bài 5. Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,5 m. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?

Hình 1

Giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11 . 1,5 = 966,5$.

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao 966,5 m so với mực nước biển.

C. BÀI TẬP

1. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 2n + 3$; b) $u_n = -3n + 1$; c) $u_n = n^2 + 1$; d) $u_n = \dfrac{2}{n}$.

2. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) $u_n = 3n + 1$; b) $u_n = 4 - 5n$; c) $u_n = \dfrac{2n+3}{5}$;

d) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$; e) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$; g) $u_n = n^2 + 1$.

3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 7n - 3$.

a) Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n).

b) Tìm u_{2012}.

c) Tính tổng của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n).

d) Số 1 208 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

4. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 5$ và $d = 3$.

a) Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n).

b) Tìm u_{99}.

c) Số 1 502 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

d) Cho biết $S_n = 34275$. Tìm n.

5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{18} - u_3 = 75$. Tìm công sai d.

6. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_{12} = 90$. Tìm S_{15}.

7. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 18 \\ u_3 + u_7 = 22; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_9 - u_4 = 15 \\ u_3 \, . \, u_8 = 184; \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16. \end{cases}$

8. Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau:

Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

9. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Bài 3. CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm cấp số nhân

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \, . \, q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \, . \, q^{n-1}, n \geq 2.$$

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ sáu.

Giải

Ta có: $u_6 = u_1 . q^5 = 5 . (-2)^5 = -160$.

Bài 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 10$. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Giải

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân, ta có: $u_n = u_1 . q^{n-1}$,

suy ra $u_2 = u_1 . q$, suy ra $10 = 2q$, suy ra $q = 5$.

Bài 3. Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) có $u_4 - u_2 = 54$ và $u_5 - u_3 = 108$.

Giải

Gọi số hạng đầu của cấp số nhân là u_1 và công bội là q.

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 . q^3 - u_1 . q = 54 \\ u_1 . q^4 - u_1 . q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 . q . (q^2 - 1) = 54 \\ u_1 . q^2 . (q^2 - 1) = 108. \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{1}{q} = \dfrac{54}{108} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $q = 2$.

Với $q = 2$, ta có $8u_1 - 2u_1 = 54$, suy ra $6u_1 = 54$, suy ra $u_1 = 9$.

Bài 4. Cho một cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thoả mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

Giải

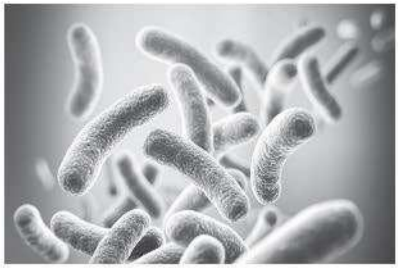
Gọi công bội của cấp số nhân là q.

Ta có $u_4 = u_2 . q^2$ hay $24 = 6 . q^2$, suy ra $q = -2$ hoặc $q = 2$. Do cấp số nhân có các số hạng không âm nên $q = 2$.

Khi đó, cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \dfrac{u_2}{q} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Ta có: $S_{12} = \dfrac{u_1(1 - q^{12})}{1 - q} = \dfrac{3(1 - 2^{12})}{1 - 2} = 12\,285$.

Bài 5. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Hình 1

Giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6 . 20 phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n - 1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

Ta có $u_7 = u_1 . q^6 = 200 . 2^6 = 12800$.

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

C. BÀI TẬP

1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = \frac{2}{3}$. Tìm công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \frac{2}{3}$. Tìm u_5.

3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \frac{1}{4}$ và $u_5 = 16$. Tìm công bội q và số hạng đầu u_1.

4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$, $q = 2$. Số 1 024 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đó?

5. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_5 - u_2 = 78 \\ u_6 - u_3 = 234. \end{cases}$

6. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 2$, $u_3 = 18$.

a) Tìm công bội.

b) Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

7. Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8%/năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

8. Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM

1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{1}{n}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Dãy số (u_n) có $u_3 = \dfrac{1}{6}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

C. Dãy số (u_n) là dãy số không tăng không giảm.

D. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

2. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{1}{9^n}$. B. $u_n = 9^n$. C. $u_n = \sqrt{9n+1}$. D. $u_n = n^9$.

3. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. B. $u_n = \dfrac{1}{n}$. C. $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1}$. D. $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

4. Cho cấp số cộng (u_n), biết $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Số hạng thứ ba của cấp số cộng đó là

A. $u_3 = 4$. B. $u_3 = 2$. C. $u_3 = -5$. D. $u_3 = 7$.

5. Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công sai $d = 5$. Số hạng thứ tư của cấp số cộng đó là

A. $u_4 = 23$. B. $u_4 = 18$. C. $u_4 = 8$. D. $u_4 = 14$.

6. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

A. $S_{16} = -24$. B. $S_{16} = 26$. C. $S_{16} = -25$. D. $S_{16} = 24$.

7. Cho cấp số cộng: $-2; -5; -8; -11; -14; \ldots$ Công sai d và tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó lần lượt là

A. $d = 3$; $S_{20} = 510$. B. $d = -3$; $S_{20} = -610$.

C. $d = -3$; $S_{20} = 610$. D. $d = 3$; $S_{20} = -610$.

8. Một cấp số nhân có sáu số hạng, số hạng đầu là 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Gọi q là công bội của cấp số nhân đó. Giá trị của q là

A. 3. B. –3. C. 2. D. −2.

9. Một cấp số nhân có bốn số hạng, số hạng đầu là 3 và số hạng thứ tư là 192. Gọi S là tổng các số hạng của cấp số nhân đó. Giá trị của S là

A. 390. B. 255. C. 256. D. −256.

10. Trong các dãy số (u_n) được cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$. B. $u_n = 7 - 3^n$. C. $u_n = \dfrac{7}{3n}$. D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

B. TỰ LUẬN

1. Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết

a) $u_n = \dfrac{2n+9}{n+3}$; b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\,024+n}}$; c) $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

2. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành cấp số cộng. Tính độ dài các cạnh của tam giác đó.

3. Chu vi của một đa giác là 213 cm, số đo các cạnh của nó lập thành cấp số cộng với công sai $d = 7$ cm và cạnh lớn nhất bằng 53 cm. Tính số cạnh của đa giác đó.

4. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh: $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

5. Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_3 - u_1 = 24 \\ u_6 - u_4 = 3000. \end{cases}$

6. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 12$, $\dfrac{u_3}{u_8} = 243$. Tìm u_9.

7. Cho cấp số nhân: $-\dfrac{1}{5}$; a; $-\dfrac{1}{125}$. Tính giá trị của a.

8. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$. Tìm n.

9. Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là 6 144 m^2. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.

Hình 1

10. Một khay nước có nhiệt độ 20°C được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm đi 25%. Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.

Hình 2

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. DÃY SỐ

1. $\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{8}{15}$, suy ra $15n + 15 = 16n + 8$, suy ra $n = 7$. Vậy $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ bảy của dãy số.

2. $u_1=-2$; $u_2=-\dfrac{3}{2}$; $u_3=-\dfrac{4}{3}$; $u_4=-\dfrac{5}{4}$; ... Ta dự đoán được $u_n=-\dfrac{n+1}{n}$.

3. Ta có: $u_2=u_1+1=5$; $u_3=u_2+2=7$; $u_4=u_3+3=10$.

Do đó, số hạng thứ năm của dãy số là $u_5=u_4+4=14$.

4. Ta có $-1\le u_n\le 1$, suy ra (u_n) là dãy bị chặn.

5. a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2n-11}{3n+1}-\dfrac{2n-13}{3n-2}=\dfrac{35}{(3n+1)(3n-2)}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_{n+1}>u_n, \forall n\ge 1, n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, ta có: $u_n=\dfrac{2}{3}-\dfrac{35}{3(3n-2)}$, suy ra $-11\le u_n<\dfrac{2}{3}, \forall n\in\mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Ta có:
$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}=\frac{n^2+5n+5}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}$$
$$=\frac{(n^2+5n+5)(n+1)-(n^2+3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra $u_{n+1}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, ta có $u_n>\dfrac{n^2+2n+1}{n+1}=n+1\ge 2, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

c) Ta có $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}}=\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}=\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}}<1, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra $u_{n+1}<u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số giảm.

Mặt khác, ta có $0<u_n<\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số bị chặn.

6. a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1) - \sqrt{(n+1)^2 - 1} - \left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)$

$$= 1 - \sqrt{(n+1)^2 - 1} - \sqrt{n^2 - 1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra (u_n) là dãy số giảm.

b) Ta có: $u_1 = 0; u_2 = \frac{3}{4}; u_3 = \frac{2}{9}$, suy ra $\begin{cases} u_2 > u_1 \\ u_3 < u_2. \end{cases}$

Do đó, (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.

c) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{3^n + 1}{2^{n+1}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, (u_n) là dãy số tăng.

7. Ta có: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$; $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

Suy ra $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Do $u_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n}$, suy ra $1 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (u_n) là dãy số bị chặn.

Bài 2. CẤP SỐ CỘNG

1. a) (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 5$ và $d = 2$.

b) (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = -2$ và $d = -3$.

c) (u_n) không phải là cấp số cộng.

d) (u_n) không phải là cấp số cộng.

2. a) (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 4$ và $d = 3$.

b) (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = -1$ và $d = -5$.

c) (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 1$ và $d = \frac{2}{5}$.

Các ý d), e), g): (u_n) không phải là cấp số cộng.

3. a) $u_1 = 4; d = 7$.

b) $u_{2\,012} = 14081$.

c) $S_{100} = 35\,050$.

d) Số 1 208 là số hạng thứ 173.

4. a) $u_n = 2 + 3n$.

b) $u_{99} = 299$.

c) Số 1 502 là số hạng thứ 500.

d) $n = 150$.

5. $d = 5$.

6. $S_{15} = 675$.

7. a) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{17}{3} \\ d = \dfrac{4}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} d = 3 \\ u_1 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} d = 3 \\ u_1 = -29 \end{cases}$; c) $\begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -6 \\ d = \dfrac{14}{5} \end{cases}$.

8. Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n.
Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng có $u_1 = 240$ và $d = 12$.
Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \,.\, 12 = 360$.
Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

9. Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n.
Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.
Tổng số ghế có trong rạp hát là: $S_{20} = \dfrac{20.[2.20 + (20-1).1]}{2} = 590$ (ghế).
Tổng số tiền vé thu được là: 590 . 60 000 = 35 400 000 (đồng).

Bài 3. CẤP SỐ NHÂN

1. $u_n = u_1 \,.\, q^{n-1} = 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n-2}}$.

2. $u_5 = u_1 \,.\, q^4 = -3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = -\dfrac{16}{27}$.

3. $u_5 = u_1 \,.\, q^4 = u_2 \,.\, q^3$, suy ra $q^3 = \dfrac{u_5}{u_2} = \dfrac{16}{\dfrac{1}{4}} = 64$, suy ra $q = 4$, $u_1 = \dfrac{1}{16}$.

4. Số 1 024 là số hạng thứ 11.

5. Gọi số hạng đầu của cấp số nhân là u_1 và công bội là q.
Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} u_5 - u_2 = 78 \\ u_6 - u_3 = 234 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^4 - u_1.q = 78 \\ u_1.q^5 - u_1.q^2 = 234 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q.(q^3 - 1) = 78 \\ u_1.q^2.(q^3 - 1) = 234. \end{cases}$$

Suy ra $q = 3$, $u_1 = 1$.

6. a) Ta có $u_3 = u_1 \,.\, q^2 = 2 \,.\, q^2 = 18$, suy ra $q = 3$ hoặc $q = -3$.

b) Nếu $q = 3$ thì $S_{10} = \dfrac{2(1 - 3^{10})}{1 - 3} = 59\,048$.

Nếu $q = -3$ thì $S_{10} = \dfrac{2[1-(-3)^{10}]}{1-(-3)} = -29\,524$.

7. Khoảng 215 892 500 đồng.

8. $S_{10} = \dfrac{80(1-0,8^{10})}{1-0,8} \approx 357,05$ (m).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM

1. D	**2.** A	**3.** D	**4.** C	**5.** B	**6.** D	**7.** B	**8.** A	**9.** B	**10.** D

B. TỰ LUẬN

1. a) Ta có: $u_n = \dfrac{2n+9}{n+3} = 2 + \dfrac{3}{n+3}$, suy ra $2 < u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+11}{n+4} - \frac{2n+9}{n+3} = \frac{-3}{(n+4)(n+3)} < 0.$$

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, (u_n) là dãy số giảm và bị chặn.

b) Ta có: $0 < \dfrac{1}{\sqrt{2\,024+n}} < 1$, suy ra $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2\,024+n}}{\sqrt{2\,024+n+1}} < 1$, suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, (u_n) là dãy số giảm và bị chặn.

c) Ta có $u_n = \dfrac{n!}{2^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!2^n}{n!2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2} \geq 1$, suy ra $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, (u_n) là dãy số tăng và bị chặn dưới.

2. Gọi d là công sai của cấp số cộng và các cạnh có độ dài lần lượt là $a-d$, a, $a+d$ với $0 < d < a$.

Vì tam giác có chu vi bằng 3 nên $a - d + a + a + d = 3a = 3$, suy ra $a = 1$.

Vì đây là tam giác vuông nên theo định lí Pythagore, ta có:

$(1 + d)^2 = (1 - d)^2 + 1^2$, suy ra $d = \frac{1}{4}$.

Do đó, ba cạnh của tam giác có độ dài là $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$.

3. $\begin{cases} u_1 + u_2 + ... + u_n = S_n = 213 \\ u_n = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = 213 \\ u_1 + (n-1)d = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(u_1 + 53) = 426 \\ u_1 + 7(n-1) = 53. \end{cases}$

Suy ra $n[53 - 7(n - 1) + 53] = 426$, suy ra $n(113 - 7n) = 426$, suy ra $n = 6$.

4. a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi:

$b - a = c - b \Leftrightarrow (b - a)^2 = (c - b)^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

5. Gọi số hạng đầu của cấp số nhân là u_1 và công bội là q.

Theo giả thiết, ta có:

$\begin{cases} u_3 - u_1 = 24 \\ u_6 - u_4 = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 - u_1 = 24 \\ u_1.q^5 - u_1.q^3 = 3000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(q^2 - 1) = 24 \\ u_1.q^3.(q^2 - 1) = 3000. \end{cases}$

Suy ra $q = 5, u_1 = 1$.

6. Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

Ta có $u_3 = u_1 . q^2, u_8 = u_1 . q^7$, suy ra $\frac{u_3}{u_8} = \frac{1}{q^5} = 243$, suy ra $q = \frac{1}{3}$.

Do đó $u_9 = u_1 . q^8 = 12.\left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{4}{2187}$.

7. Ta có: $a^2 = \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{1}{625}$, suy ra $a = -\frac{1}{25}$ hoặc $a = \frac{1}{25}$.

8. Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân, ta có:

$S_n = \frac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \frac{3.\left(1 - 2^n\right)}{1 - 2} = 765 \Rightarrow n = 8$.

9. $u_{10} = u_1 . q^9 = 6144 . \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12$ (m^2).

10. $u_5 = u_1 . q^4 = 20 . 0{,}75^4 \approx 6{,}33$ $^{\circ}$C.

Chương III. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

• $\lim u_n = 0$ khi và chỉ khi $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

• $\lim u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim (u_n - a) = 0$.

Chú ý: Ta dùng kí hiệu $\lim u_n$ thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Một số giới hạn cơ bản

Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

$\lim \frac{1}{n^k} = 0$ (tổng quát: $\lim \frac{c}{n^k} = 0$, k nguyên dương, c là hằng số).

$\lim q^n = 0$ (q là số thực, $|q| < 1$).

3. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó:

• $\lim (u_n + v_n) = a + b$;
• $\lim (u_n - v_n) = a - b$;
• $\lim (c.u_n) = c.a$;
• $\lim (u_n.v_n) = a.b$;
• $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$;
• Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

5. Giới hạn vô cực

• $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

• $\lim u_n = -\infty$ khi và chỉ khi $\lim (-u_n) = +\infty$.

Chú ý:

• $\lim n^k = +\infty$ (k là số nguyên dương);
• $\lim q^k = +\infty$ $(q > 1)$;
• Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$;

- Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$;
- Giả sử $\lim u_n = +\infty$ và $\lim u_n = a$.

  Nếu $a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

  Nếu $a < 0$ thì $\lim u_n v_n = -\infty$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{n^2 - 2n + 1}{2 - 3n^2}$; b) $\lim \dfrac{2n^2 + n - 3}{n^3 + 5}$; c) $\lim(\sqrt{n^2 + 2n} - n)$.

Giải

a) $$\lim \frac{n^2 - 2n + 1}{2 - 3n^2} = \lim \frac{1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2} - 3} = \frac{\lim 1 - \lim \dfrac{2}{n} + \lim \dfrac{1}{n^2}}{\lim \dfrac{2}{n^2} - 3} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3}.$$

b) $$\lim \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 + 5} = \lim \frac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{n^3}}{1 + \dfrac{5}{n^3}} = \frac{\lim \dfrac{2}{n} + \lim \dfrac{1}{n^2} - \lim \dfrac{3}{n^3}}{1 + \lim \dfrac{5}{n^3}} = \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0} = 0.$$

c) $$\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right) = \lim \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \lim \frac{(n^2 + 2n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$$

$$= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)} + n} = \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} + 1} = \frac{\lim 2}{\lim\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{n}} + 1\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lim 1 + \lim \dfrac{2}{n}} + \lim 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + \lim \dfrac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + 0} + 1} = 1.$$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$; b) $\lim \dfrac{3^{n+1} + 2^n}{3^n}$.

Giải

a) $\lim \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}} = \lim \dfrac{3.3^n}{4^n} = 3 \lim \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 3.\ 0 = 0$ (vì $\dfrac{3}{4} < 1$).

b) $\lim \dfrac{3^{n+1} + 2^n}{3^n} = \lim \dfrac{3.3^n + 2^n}{3^n} = \lim \left[3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] = 3 + \lim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 3 + 0 = 3.$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim(n^2+3n-5)$; b) $\lim \dfrac{n^2+7}{1-2n}$; c) $\lim(3^n-2^n)$.

Giải

a) $n^2+3n-5=n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)$.

Ta có $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)=\lim 1+\lim\dfrac{3}{n}-\lim\dfrac{5}{n^2}=1+0-0=1$.

Suy ra $\lim(n^2+3n-5)=\lim\left[n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)\right]=+\infty$.

b) $\dfrac{n^2+7}{1-2n}=\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n\left(\dfrac{1}{n}-2\right)}=n.\dfrac{1+\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-2}$.

Ta có $\lim n=+\infty$ và $\lim\dfrac{1+\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-2}=\dfrac{\lim 1+\lim\dfrac{7}{n^2}}{\lim\dfrac{1}{n}-\lim 2}=\dfrac{1+0}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\lim\dfrac{n^2+7}{1-2n}=\lim\left[n.\dfrac{1+\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-2}\right]=-\infty$.

c) $3^n-2^n=3^n\left(1-\dfrac{2^n}{3^n}\right)=3^n\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$.

Ta có $\lim 3^n=+\infty$ và $\lim\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]=1-\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=1-0=1$.

Suy ra $\lim(3^n-2^n)=\lim\left\{3^n\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]\right\}=+\infty$.

Bài 4. Kí hiệu $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) có công bội bằng $q\neq 1$. Biết rằng $\lim\dfrac{u_n}{S_n}=\dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị của q.

Giải

Ta có $u_n = u_1q^{n-1}; S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$. Suy ra $\dfrac{u_n}{S_n} = \dfrac{q^{n-1}(1-q)}{1-q^n} = \dfrac{1-q}{q}.\dfrac{q^n}{1-q^n}$.

Nếu $0 < q < 1$ thì $\lim \dfrac{u_n}{S_n} = \lim\left(\dfrac{1-q}{q}.\dfrac{q^n}{1-q^n}\right) = \dfrac{1-q}{q}.\dfrac{\lim q^n}{1-\lim q^n}$

$$= \frac{1-q}{q}.\frac{0}{1-0} = 0 \neq \frac{3}{4}.$$

Do đó, $q > 1$. Khi đó,

$$\lim\frac{u_n}{S_n} = \lim\left(\frac{1-q}{q}.\frac{q^n}{1-q^n}\right) = \frac{1-q}{q}.\lim\frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1} = \frac{1-q}{q}.\frac{1}{0-1} = \frac{q-1}{q}.$$

Suy ra $\dfrac{q-1}{q} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow q = 4$. Vậy $q = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,(12) = 2,121212... thành phân số.

Giải

Ta có: 2,(12) = 2 + 0,(12);

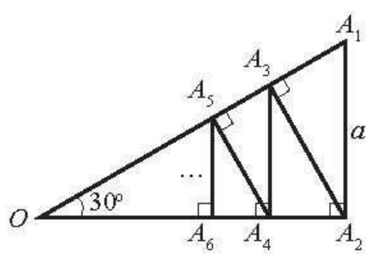
$$0,(12) = 0,12121212... = 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + 0,00000012...$$

$$= 0,12 + 0,12.\frac{1}{100} + 0,12.\frac{1}{100^2} + 0,12.\frac{1}{100^3} + 0,12.\frac{1}{100^4}\ ...$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng 0,12 và công bội bằng $\dfrac{1}{100}$. Tổng này bằng $0,12.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{100}} = \dfrac{12}{99} = \dfrac{4}{33}$.

Vậy $2,(12) = 2 + \dfrac{4}{33} = \dfrac{70}{33}$.

Bài 6. Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại A_2, $A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1; A_3A_4 \perp OA_2; A_4A_5 \perp OA_1$; ... Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4$... Tính độ dài đường gấp khúc này theo a.



Hình 1

Giải

Các góc $\widehat{A_1A_2A_3}$, $\widehat{A_2A_3A_4}$, $\widehat{A_3A_4A_5}$, ... đều bằng góc $\widehat{A_1OA_2}$ nên đều có số đo 30°.

$A_2A_3 = A_1A_2 \,.\, \cos 30^\circ = a \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$A_3A_4 = A_2A_3 \,.\, \cos 30^\circ = a \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} . \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

$A_4A_5 = A_3A_4 \,.\, \cos 30^\circ = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 . \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; ...

Vậy độ dài các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và công bội bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4$... là

$$l = \frac{a\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = a(3+2\sqrt{3}).$$

C. BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(2+\dfrac{5}{n}\right)$;

b) $\lim\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)$;

c) $\lim\left(3-\dfrac{4}{n}\right)\left(2+\dfrac{5}{n^2}\right)$;

d) $\lim\dfrac{3-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n^3}}$.

2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2n-3}{6n+1}$;

b) $\lim\dfrac{3n-1}{n^2+n}$;

c) $\lim\dfrac{(2n-1)(2n+3)}{2n^2+4}$;

d) $\lim\dfrac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n}+n}$;

e) $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

g) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$.

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

b) $\lim\dfrac{3^n}{4^n-1}$;

c) $\lim\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$;

d) $\lim\dfrac{4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

4. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = 4$. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim (3u_n - 4)$;

b) $\lim (u_n + 2v_n)$;

c) $\lim (u_n - v_n)^2$;

d) $\lim \dfrac{-2u_n}{v_n - 2u_n}$.

5. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\lim nu_n = 3$. Tìm giới hạn $\lim \dfrac{2n+3}{n^2 u_n}$.

6. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim (1 + 3n - n^2)$;

b) $\lim \dfrac{n^3 + 3n}{2n-1}$;

c) $\lim (\sqrt{n^2 - n} + n)$;

d) $\lim (3^{n+1} - 5^n)$.

7. Tuỳ theo giá trị của $a > 0$, tìm giới hạn $\lim \dfrac{a^n}{a^n + 1}$.

8. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn:

a) $1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} - \dfrac{1}{5^3} + ... + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n + ...$

b) $2 + \dfrac{2^2}{3} + \dfrac{2^3}{3^2} + ... + \dfrac{2^n}{3^{n-1}} + ...$

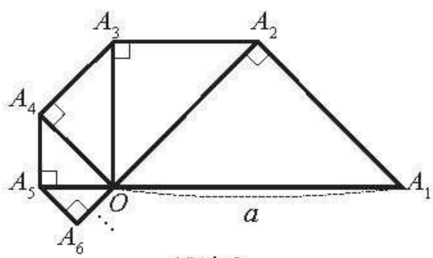
9. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau thành phân số:

a) 0,(7) = 0,777...;

b) 1,(45) = 1,454545...

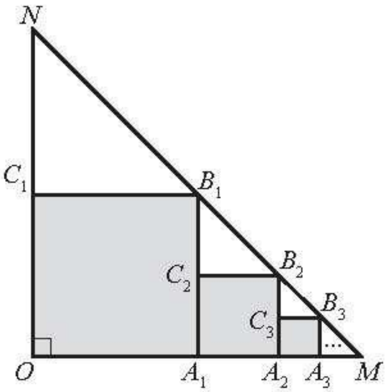
10. Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với 100 m^3 ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

11. Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a. Bên ngoài tam giác OA_1A_2, vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3. Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3, vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2). Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\dots$



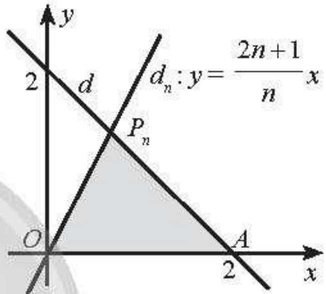
Hình 2

12. Cho tam giác OMN vuông cân tại O, $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN, vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON. Trong tam giác A_1MB_1, vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng d: $x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng d_n: $y = \dfrac{2n+1}{n}x$ tại điểm P_n ($n \in \mathbb{N}^*$). Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n. Tìm $\lim S_n$.



Hình 4

Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $\lim x_n = x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

Giới hạn một phía

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $\lim x_n = x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $\lim x_n = x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $\lim x_n = +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $\lim x_n = -\infty$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

2. Một số giới hạn hữu hạn cơ bản

• $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$;

• $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$;

• $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$;

• $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$

(c là hằng số, k là số nguyên dương).

3. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

• $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;

• $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

• $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).\, g(x)] = L\,.\,M$;

• $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (với $M \neq 0$);

• Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$.)

4. Giới hạn vô cực của hàm số

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $\lim x_n = x_0$, ta có $\lim f(x_n) = +\infty$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $\lim x_n = +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = +\infty$.

Chú ý: Các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

5. Một số giới hạn vô cực cơ bản

- $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ $(a\in\mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=+\infty$ nếu k là số nguyên dương chẵn;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=-\infty$ nếu k là số nguyên dương lẻ.

6. Quy tắc tính giới hạn vô cực

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=+\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0^+}[f(x)\,.\,g(x)]$ được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+}[f(x)\,.\,g(x)]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty$, $-\infty$).

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x}{x^2+2}$.

Giải

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì thoả mãn $x_n\neq-1$, $x_n\neq3$ với mọi n và $\lim x_n=3$.

Ta có $\lim\dfrac{x_n^2-x_n}{x_n+1}=\dfrac{(\lim x_n)^2-\lim x_n}{\lim x_n+1}=\dfrac{3^2-3}{3+1}=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

b) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì thoả mãn $\lim x_n=+\infty$.

Ta có $\lim\dfrac{2x_n^2-5x_n}{x_n^2+2}=\lim\dfrac{2-\dfrac{5}{x_n}}{1+\dfrac{2}{x_n^2}}=\dfrac{2-5\lim\dfrac{1}{x_n}}{1+2\lim\dfrac{1}{x_n^2}}=\dfrac{2-5.0}{1+2.0}=2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-5x}{x^2+2}=2$.

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3}[(3x+1)(2-x^2)]$;

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(4x+10)^2}{\sqrt{x^2-6x}}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 3}[(3x+1)(2-x^2)] = \lim\limits_{x\to 3}(3x+1)\,.\,\lim\limits_{x\to 3}(2-x^2) = (3\lim\limits_{x\to 3}x+1)\left[2-(\lim\limits_{x\to 3}x)^2\right]$

$= (3.3+1).(2-3^2) = -70.$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(4x+10)^2}{\sqrt{x^2-6x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(4x+10)^2}{\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^2-6x}} = \dfrac{\left(4\lim\limits_{x\to -2}x+10\right)^2}{\sqrt{\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^2-6\lim\limits_{x\to -2}x}}$

$= \dfrac{\left[4.(-2)+10\right]^2}{\sqrt{(-2)^2-6.(-2)}} = 1.$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-5)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x-5) = \lim\limits_{x\to -1}x-5 = -1-5 = -6.$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-1}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}x-1}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \dfrac{1}{2}.$

Chú ý:

- Ta có $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4x-5)=0$ nên ta nói giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x+1}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$. Để tính giới hạn này, ta không thể áp dụng phép toán giới hạn của một thương bằng thương của hai giới hạn mà phải biến đổi "khử nhân tử dần tới 0" (ở đây là nhân tử $x+1$) của hàm số dưới dấu giới hạn.

• Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ cũng có dạng $\dfrac{0}{0}$. Để làm xuất hiện nhân tử dần tới 0 ở tử, ta nhân cả tử và mẫu với $\sqrt{x-1}+1$, gọi là biểu thức liên hợp của tử $\sqrt{x-1}-1$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ với $x\neq 1$. Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (nếu có).

Giải

Với $x>1$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$;

Với $x<1$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-1}{1-x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-(x+1)$.

Từ đó, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=\lim\limits_{x\to 1^+}x+1=1+1=2$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[-(x+1)]=-(\lim\limits_{x\to 1^-}x+1)=-(1+1)=-2$.

Do $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+3}{2x^2+4}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)$.

Giải

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+3}{2x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}2+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\frac{1-0+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

b) Do xét giới hạn khi $x\to-\infty$ nên ta chỉ cần xét $x<0$. Khi đó, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ nên ta có

$$\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}}{x+1}=\frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1}=\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}.$$

Do đó, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-\sqrt{4+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-\sqrt{4+0}}{1+0} = -2.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x}$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{\sqrt{1+\dfrac{6}{x}}+1} = \dfrac{6}{1+1} = 3.$$

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+2x-4)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x-1}$.

Giải

a) $-x^2+2x-4 = x^2\left(-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1) + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}$

$= -1+0-0 = -1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+2x-4) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)\right] = -\infty$.

b) $\dfrac{x^2+3x+1}{2x-1} = \dfrac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)} = x.\dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1+0+0}{2-0} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x.\dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}}\right) = -\infty$.

Bài 7. Tìm giá trị của các tham số a và b biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4.$

Giải

Do $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=4,$

trước hết ta phải có $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$ hay $1+a+b=0 \Rightarrow b=-a-1.$

Khi đó, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+a(x-1)}{x-1}$

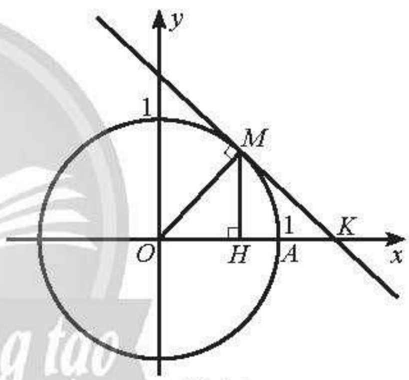
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)+a(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1+a)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=\lim_{x\to 1}x+1+a=2+a.$$

Suy ra $2+a=4$ hay $a=2$, suy ra $b=-3$.

Vậy $a=2$, $b=-3$.

Bài 8. Cho điểm $M(t;\ \sqrt{1-t^2})$, $0<t<1$ nằm trên đường tròn đơn vị (C): $x^2+y^2=1$, điểm $A(1;\ 0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\dfrac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Hình 1

Giải

Điểm M dần đến điểm A khi $t\to 1^-$. Do đó, ta cần tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{HK}{HA}$.

Ta có $H(t;\ 0)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M nhận $\overrightarrow{OM}=(t;\ \sqrt{1-t^2})$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

d: $t(x-t)+\sqrt{1-t^2}\,(y-\sqrt{1-t^2})=0.$

Thay $y=0$ vào phương trình của d ta nhận được $x=\dfrac{1}{t}$. Suy ra $K\left(\dfrac{1}{t};\ 0\right)$.

Ta có: $HA=1-t$; $HK=\dfrac{1}{t}-t=\dfrac{1-t^2}{t}$; $\dfrac{HK}{HA}=\dfrac{1-t^2}{t(1-t)}=\dfrac{1+t}{t}$;

$\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{HK}{HA}=\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{1+t}{t}=\dfrac{1+1}{1}=2.$

Vậy khi điểm M dần đến điểm A thì giá trị của tỉ số $\dfrac{HK}{HA}$ dần đến 2.

C. BÀI TẬP

1. Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-3x)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x+5}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4-x}{2x+1}$.

2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -3}(8+3x-x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}[(5x-1)(2-4x)]$;

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x}{(2x+1)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{10-2x^2}$.

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{1-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$; d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{x+6}}{x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$; g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$.

4. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to 4}g(x)=-3$. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 4}[g(x)-3f(x)]$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2f(x).g(x)}{[f(x)+g(x)]^2}$.

5. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)+2g(x)]=7$.

Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2f(x)+g(x)}{2f(x)-g(x)}$.

6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le -1\\ 3-2x^2, & x>-1.\end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 1\\ \sqrt{x^2+a}, & x>1.\end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a sao cho tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

8. Mỗi giới hạn sau có tồn tại không? Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$; b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{|x-2|}$.

9. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+4}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+1}{(2x+1)^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x}}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+2x})$.

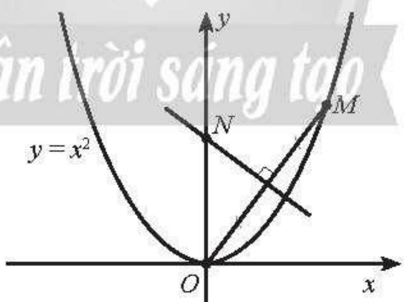
10. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+2x^2}{3x^2+1}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

11. Tìm giá trị của các tham số a và b, biết rằng:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{ax+b}{x-2} = 5$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = 3$.

12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(t; t^2)$, $t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N. Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O?



Hình 2

Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

• Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.

• Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

• Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) . f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$. (Nói cách khác, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.)

3. Tính liên tục của hàm số sơ cấp

• Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

• Hàm số phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.

($P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.)

4. Tổng, hiệu, tích, thương của hàm số liên tục

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

• Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) . g(x)$ liên tục tại x_0.

• Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Dùng định nghĩa, xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = -1$.

a) $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x}{x - 1}$;

b) $y = g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 0 & \text{khi } x = -1. \end{cases}$

Giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, chứa điểm -1.

Ta có: $f(-1) = \dfrac{2.(-1)^2 + 5.(-1)}{-1-1} = \dfrac{3}{2}$;

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+5x}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+5x)}{\lim\limits_{x\to -1}(x-1)} = \frac{2(\lim\limits_{x\to 1}x)^2 + 5\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}x - 1}$$

$$= \frac{2(-1)^2+5(-1)}{-1-1} = \frac{3}{2}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(-1)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = -1$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$, chứa điểm -1.

Ta có: $g(-1) = 0$;

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to 1}(x^2-x+1)$$

$$= (\lim_{x\to 1}x)^2 - \lim_{x\to 1}x + 1 = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1} g(x) \neq g(-1)$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại điểm $x = -1$.

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,|x-3|}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 3 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x = 3$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$, chứa điểm 3.

Ta có: $f(3) = 3$;

Khi $x > 3$, $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{x-3} = x$ nên $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x = 3$;

Khi $x < 3$, $f(x) = \dfrac{x(3-x)}{x-3} = -x$ nên $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(-x) = -3$.

Do $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm $x = 3$.

Bài 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-2x-3}$; b) $y = g(x) = \sqrt{3x+6} + \dfrac{2\sin x}{\sqrt{3-x}}$.

Giải

a) Ta có $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 3$.

$y = f(x)$ là hàm số phân thức có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ nên nó liên tục trên các khoảng của tập xác định là $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ và $(3; +\infty)$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 3x+6 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 3$.

Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = [-2; 3)$.

Hàm số lượng giác $y = 2\sin x$ và hai hàm số căn thức $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \sqrt{3-x}$ đều liên tục trên $[-2; 3)$ nên hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $[-2; 3)$.

Bài 4. Tìm các số thực a và b để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+ax+2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ b & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2+ax+2}{x-1}$ là hàm số phân thức có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Do đó, ta cần tìm a và b để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$, tức là

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ hay $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax+2}{x-1} = b$.

Do $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$ nên để giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax+2}{x-1}$ tồn tại, trước hết ta phải có $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + ax + 2) = 0$ hay $a + 3 = 0$, suy ra $a = -3$.

Khi đó, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax+2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x-2) = -1$, suy ra $b = -1$.

Vậy $a = -3$, $b = -1$ là các số cần tìm.

Bài 5. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$;

b) $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(0).f(-1) = (-1).3 = -3 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ hay $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng (0; 1).

b) Xét hàm số $f(x) = x - \cos x$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Suy ra $f(0).f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Do đó, phương trình $f(x) = x - \cos x = 0$ hay $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 6. Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng (0; 4].

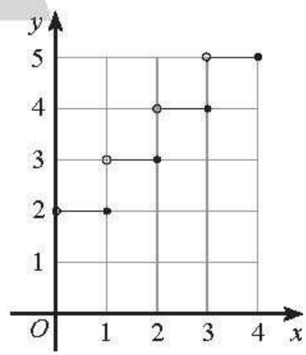
Giải

Hàm số $P(t)$ trên (0; 4] có công thức:

$$P(t) = \begin{cases} 2 & \text{khi } 0 < t \leq 1 \\ 3 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \\ 4 & \text{khi } 2 < t \leq 3 \\ 5 & \text{khi } 3 < t \leq 4. \end{cases}$$

(P tính theo chục nghìn đồng, t tính theo giờ).

Đồ thị của hàm số $P(t)$ như Hình 1.



Hình 1

Trên mỗi nửa khoảng (0; 1], (1; 2], (2; 3] và (3; 4], hàm số đều có dạng $P(t) = c$ (c là hằng số) nên hàm số liên tục trên mỗi khoảng này.

Ta có $\lim\limits_{t \to 1^-} P(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} 2 = 2$; $\lim\limits_{t \to 1^+} P(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} 3 = 3$. Do $\lim\limits_{t \to 1^-} P(t) \neq \lim\limits_{t \to 1^+} P(t)$ nên hàm số không liên tục tại điểm $t = 1$.

Tương tự, chỉ ra được hàm số không liên tục tại các điểm $t = 2$ và $t = 3$.

Vậy hàm số liên tục trên các nửa khoảng $(0; 1]$, $(1; 2]$, $(2; 3]$ và $(3; 4]$; gián đoạn tại các điểm $t = 1$, $t = 2$ và $t = 3$.

C. BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa, xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tại điểm $x = -2$;   b) $f(x) = \sqrt{3x+2}$ tại điểm $x = 0$.

2. Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau tại điểm $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 6-2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 2x^2-6 & \text{khi } x < 2; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 0 & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

3. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = |x+1|$ tại điểm $x = -1$;   b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

5. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 2$;   b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x}$;

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$;   d) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$.

6. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$;   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

7. Cho hai hàm số $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $y = f(x) \cdot g(x)$;   b) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$;   c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)+g(x)}}$.

8. Cho hai hàm số $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{khi } x<1 \\ x^2+x & \text{khi } x\geq 1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{khi } x<1 \\ -x^2+a & \text{khi } x\geq 1. \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a sao cho hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

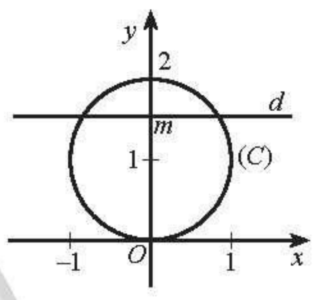
9. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{khi } |x|<2 \\ x(2-x) & \text{khi } |x|\geq 2. \end{cases}$

Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

10. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.

b) $\sqrt{x^2+x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

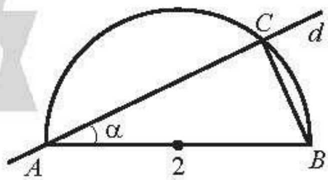


Hình 2

11. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m, gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng d: $y = m$ với đường tròn (C). Viết công thức xác định hàm số $y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?

12. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A, cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} S(\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Hình 3

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

1. $\lim \dfrac{3n^2+2n}{2-n^2}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. B. -2. C. 3. D. -3.

2. $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+4n+1}}{4n+1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. $+\infty$.

3. $\lim \dfrac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. B. 1. C. $\dfrac{1}{4}$. D. 2.

4. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) thoả mãn $\lim u_n = 4$, $\lim(v_n - 3) = 0$.

$\lim[u_n(u_n - v_n)]$ bằng

A. 7. B. 12. C. 4. D. 28.

5. $\lim \dfrac{4^n}{2.4^n + 3^n}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 1. C. 4. D. 0.

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{2x-4}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. B. $\dfrac{1}{2}$. C. 1. D. $-\dfrac{1}{2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{\sqrt{x+3}-2}$ bằng

A. 0. B. $+\infty$. C. 2. D. 8.

8. Biết $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+a}{x-1} = b$ với a và b là hai số thực. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 1. B. 2. C. 4. D. 5.

9. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{|x-3|}$. Đặt $a = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ và $b = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$. Giá trị của $a - 2b$ bằng

A. 0. B. 9. C. –3. D. –9.

10. Biết rằng $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) + 2g(x)) = 4$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)-2g(x)}{f(x)+2g(x)}$ bằng

A. –1. B. 0. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $-\dfrac{1}{2}$.

11. Biết rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2ax}{\sqrt{x^2 + ax} + x} = 3$. Giá trị của a là

A. $\dfrac{3}{4}$. B. 6. C. $\dfrac{3}{2}$. D. 3.

12. $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1-3x}{x+2}$ bằng

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. -3. D. $\dfrac{7}{4}$.

13. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{x+1}}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 3$. Giá trị của a bằng

A. $-\dfrac{1}{4}$. B. $\dfrac{1}{4}$. C. -2. D. 3.

14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{khi } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4} \\ k - \cot x & \text{khi } \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ liên tục trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Giá trị của k bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. $\dfrac{\pi}{2}$.

15. Biết rằng phương trình $x^3 - 2x - 3 = 0$ chỉ có một nghiệm. Phương trình này có nghiệm trong khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $(2; 3)$.

B. TỰ LUẬN

1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{n(2n^2+3)}{4n^3+1}$; b) $\lim[\sqrt{n}(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})]$.

2. Cho các dãy số (u_n) và (v_n) thoả mãn $\lim u_n = 2$, $\lim (u_n - v_n) = 4$. Tìm $\lim \dfrac{3u_n - v_n}{u_n v_n + 3}$.

3. Tìm $\lim \dfrac{6^n + 4^n}{(2^n+1)(3^n+1)}$.

4. Cho $a > b > 0$ và $\lim \dfrac{a^{n+1} + b^n}{2a^n + b^{n+1}} = 1$. Tìm giá trị của a.

5. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\lim nu_n = \dfrac{1}{2}$. Tìm $\lim(3n - 4)u_n$.

6. Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước như sau:

Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\dfrac{1}{4}$).

Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\dfrac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n, bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\dfrac{1}{4^n}$). Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.

Hình 1

7. Biết rằng, từ vị trí A, một mũi tên bay với tốc độ 10 m/s hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng 10 m (Hình 2). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B, trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB. Tiếp theo, nó phải đến trung điểm A_2 của A_1B. Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B. Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B".

Hình 2

Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{|x+3|} & \text{khi } x \neq -3 \\ a & \text{khi } x = -3. \end{cases}$

a) Tìm $\lim\limits_{x\to\ 3^+} f(x) - \lim\limits_{x\to\ 3} f(x)$.

b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = -3$.

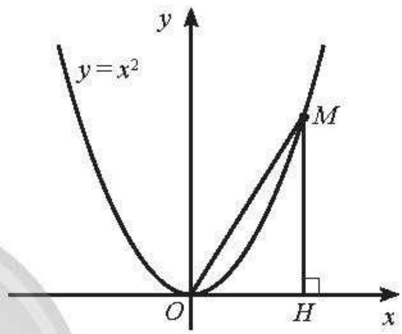
9. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

a) Xét tính liên tục của hàm số đã cho.

b) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3} f(x)$.

10. Cho điểm M thay đổi trên parabol $y = x^2$; H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành. Gọi x là hoành độ của điểm H.

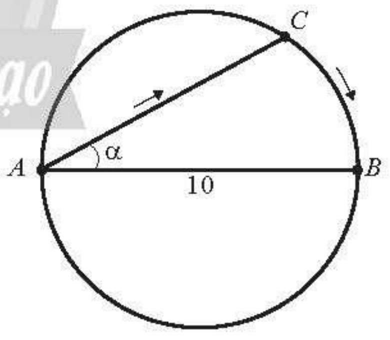
Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} (OM - MH)$.



Hình 3

11. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 3x^2 - 1 = 0$ trong mỗi khoảng $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ và $(0; 1)$ đều có ít nhất một nghiệm.

12. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10$ m, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình 4). Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.



Hình 4

a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim\limits_{\alpha\to0^+} S(\alpha)$ và $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. a) 2; b) 0; c) 6; d) 3.

2. a) $\frac{1}{3}$; b) 0.

c) $\lim \frac{(2n-1)(2n+3)}{2n^2+4} = \lim \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{2+\frac{4}{n^2}} = \frac{2\,.\,2}{2} = 2;$

d) $\lim \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim \frac{4+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{4+\lim\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\lim\frac{3}{n}}+1} = \frac{4}{1+1} = 2;$

e) $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2};$

g) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$

$= \lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 2.$

3. a) 0;

b) $\lim \frac{3^n}{4^n-1} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{0}{1-0} = 0;$

c) $\lim\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{1-\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1+\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{1-0}{1+0}=1;$

d) $\lim\dfrac{4^{n+1}}{3^n+4^n}=\lim\dfrac{4}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}=\dfrac{4}{\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}=\dfrac{4}{0+1}=4.$

4. a) 5; b) 11; c) 1; d) 3.

5. $\lim\dfrac{2n+3}{n^2u_n}=\lim\left(\dfrac{2n+3}{n}\cdot\dfrac{1}{nu_n}\right)=\lim\dfrac{2n+3}{n}.\lim\dfrac{1}{nu_n}$

$$=\lim\left(2+\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{1}{\lim nu_n}=2\,.\,\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

6. a) $\lim(1+3n-n^2)=\lim\left[n^2\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n}-1\right)\right]=-\infty;$

b) $\lim\dfrac{n^3+3n}{2n-1}=\lim\left[n^2\cdot\dfrac{1+\dfrac{3}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n}}\right]=+\infty;$

c) $\lim(\sqrt{n^2-n}+n)=\lim\left[n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1\right)\right]=+\infty;$

d) $\lim(3^{n+1}-5^n)=\lim\left\{5^n\left[3\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-1\right]\right\}=-\infty.$

7. Nếu $0<a<1$ thì $\lim a^n=0$ nên $\lim\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{\lim a^n}{\lim a^n+1}=\dfrac{0}{0+1}=0.$

Nếu $a=1$ thì $\lim\dfrac{a^n}{a^n+1}=\lim\dfrac{1^n}{1^n+1}=\lim\dfrac{1}{1+1}=\lim\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Nếu $a>1$, ta viết $\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{a}\right)^n}$ (chia cả tử và mẫu cho a^n).

Do $a > 1$ nên $0 < \frac{1}{a} < 1$, suy ra $\lim\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$. Từ đó,

$$\lim\frac{a^n}{a^n+1} = \lim\frac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{1+\lim\left(\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Vậy $\lim\frac{a^n}{a^n+1}$ bằng 0 nếu $0 < a < 1$; bằng $\frac{1}{2}$ nếu $a = 1$; bằng 1 nếu $a > 1$.

8. a) $1 \, . \, \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{6}$; b) $2 \, . \, \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6$.

9. a) $\frac{7}{9}$; b) $\frac{16}{11}$.

10. $100 + 100 \, . \, 0{,}8 + 100 \, . \, (0{,}8)^2 + 100 \, . \, (0{,}8)^3 + \ldots = 100. \frac{1}{1-0{,}8} = 500$ (m^3).

11. Ta có các góc $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, $\widehat{A_3OA_4}$, … đều bằng 45°. Ta có:

$A_1A_2 = OA_2 = OA_1 . \cos 45^\circ = a\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$A_2A_3 = OA_3 = OA_2 . \cos 45^\circ = a\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

$A_3A_4 = OA_4 = OA_3 . \cos 45^\circ = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$; …

Vậy độ dài các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, … tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4$… là

$$l = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.(2+\sqrt{2}) = a(1+\sqrt{2}).$$

12. Độ dài cạnh của các hình vuông lần lượt là

$a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$; …

Diện tích của các hình vuông lần lượt là

$$S_1 = a_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$S_2 = a_2^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$S_3 = a_3^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \ldots$$

Các diện tích $S_1, S_2, S_3, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = \frac{1}{4}$ và công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Do đó, tổng diện tích các hình vuông là $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

13. $A(2; 0); P_n\left(\frac{2n}{3n+1}; \frac{4n+2}{3n+1}\right); OA = 2; AP_n = \frac{4n+2}{3n+1} \cdot \sqrt{2};\ \widehat{OAP_n} = 45^\circ$.

$$S_n = \frac{1}{2} OA\ .\ AP_n\ .\ \sin\widehat{OAP_n} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4n+2}{3n+1} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4n+2}{3n+1}.$$

$$\lim S_n = \lim \frac{4n+2}{3n+1} = \lim \frac{4+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{4}{3}.$$

Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. a) 2; b) 3; c) $-\frac{1}{2}$.

2. a) -10; b) -54; c) $\frac{2}{3}$; d) $2\sqrt{2}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-2) = -2-2 = -4;$

b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-1}{1-x} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}[-(x^2+x+1)] = -3;$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-1)=3-1=2;$

d) $\lim\limits_{x\to\ 2}\dfrac{2-\sqrt{x+6}}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(2-\sqrt{x+6}\right)\left(2+\sqrt{x+6}\right)}{(x+2)\left(2+\sqrt{x+6}\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-(x+6)}{(x+2)\left(2+\sqrt{x+6}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\ 2}\dfrac{-(x+2)}{(x+2)\left(2+\sqrt{x+6}\right)}=\lim\limits_{x\to\ 2}\dfrac{-1}{2+\sqrt{x+6}}=\dfrac{-1}{2+\sqrt{-2+6}}=-\dfrac{1}{4};$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(x+1)-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2;$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0.$

4. a) –9; b) –12.

5. Ta có $g(x)=\dfrac{1}{2}\{[f(x)+2g(x)]-f(x)\}.$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\dfrac{1}{2}\{\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+2g(x)]-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)]\}=\dfrac{1}{2}(7-3)=2.$

Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)+g(x)}{2f(x)-g(x)}=\dfrac{2\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}{2\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\dfrac{2.3+2}{2.3-2}=2.$

6. $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(3-2x^2)=1;\ \lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x+4)=1;\ \lim\limits_{x\to -1}f(x)=1.$

7. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3;\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2+a}=\sqrt{1+a}.$

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ thì $\sqrt{1+a}=3$, suy ra $a=8$.

8. a) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}=0.$

b) Không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$, do $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}x=2$ và

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x)=-2.$

9. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{4}{x}}=\dfrac{1}{1+4\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{1+4.0}=1;$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{(2x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\ \infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{2+\lim\limits_{x\to\ \infty}\dfrac{1}{x^2}}{\left(2+\lim\limits_{x\to\ \infty}\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{2+0}{(2+0)^2}=\dfrac{1}{2};$

c) Với $x<0$ thì $\sqrt{x^2}=|x|=-x$, nên ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}=-\frac{3+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-2\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}}=-\frac{3+0}{\sqrt{1-2.0}}=-3;$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)}{x+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}=-1.$$

10. a) $\lim\limits_{x\to\ \infty}(x^3+2x^2-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty$

(vì $\lim\limits_{x\to\ \infty}x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=1+0-0=1$).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x^2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\dfrac{x^2+2x}{3x^2+1}\right]=+\infty$ (vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{3x^2+1}=\dfrac{1}{3}$);

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)=+\infty$

(vì $\lim\limits_{x\to -\infty}|x| = \lim\limits_{x\to -\infty}(-x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = 1$).

11. a) Do $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{ax+b}{x-2} = 5$, trước hết ta phải có $\lim\limits_{x\to 2}(ax+b) = 0$ hay $2a+b=0$, suy ra $b=-2a$.

Khi đó, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{ax+b}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{ax-2a}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}a = a$.

Suy ra $a=5$ và $b=-10$.

b) Do $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = 3$, trước hết ta phải có $\lim\limits_{x\to 1}(a\sqrt{x}+b) = 0$ hay $a+b=0$, suy ra $b=-a$.

Khi đó, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{a}{\sqrt{x}+1} = \frac{a}{2}.$$

Suy ra $\frac{a}{2} = 3$ hay $a=6$, suy ra $b=-6$.

12. Trung điểm của đoạn thẳng OM là $I\left(\frac{t}{2};\frac{t^2}{2}\right)$.

Đường trung trực của OM nhận vectơ $\overrightarrow{OM} = (t; t^2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình d: $t\left(x-\frac{t}{2}\right)+t^2\left(y-\frac{t^2}{2}\right) = 0$. Thay $x=0$ vào phương trình của d, ta nhận được $y = \frac{1}{2}(1+t^2)$. Suy ra $N\left(0;\frac{1}{2}(1+t^2)\right)$.

Điểm M dần đến điểm O khi t dần đến 0^+. Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{2}(1+t^2) = \frac{1}{2}$.

Suy ra khi điểm M dần đến điểm O thì điểm N dần đến điểm $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. a) Tìm được $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 0$. Từ đó, hàm số liên tục tại điểm $x = -2$.

b) Hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

2. a) Tìm được $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$, $f(2) = 2$. Suy ra hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

b) Tìm được $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, $f(2) = 0$. Suy ra hàm số không liên tục tại điểm $x = 2$.

3. a) Tìm được $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0, f(-1) = 0$. Suy ra hàm số liên tục tại $x = -1$.

b) Tìm được $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -1$. Suy ra hàm số không liên tục tại $x = 1$.

4. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x + 2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = a$.

Vậy $a = \dfrac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

5. a) Liên tục trên $\mathbb{R}$; b) Liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$ và $(4; +\infty)$;

c) Liên tục trên $\mathbb{R}$; d) Liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0]$ và $[2; +\infty)$.

6. a) Điều kiện: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$ xác định và liên tục trên $(-1; 1)$. Do $(-1; 1) \subset \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $y = \tan x$ xác định và liên tục trên $(-1; 1)$. Suy ra, hàm số $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1 - x^2}}$ liên tục trên $(-1; 1)$.

b) Hàm số liên tục trên các khoảng $(k\pi; (k + 1)\pi)$ với k là số nguyên.

7. a) Liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$;

c) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

8. $h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 2 + x - x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x + a & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 + x - x^2) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 + \lim\limits_{x \to 1^-} x - \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 2 + 1 - 1^2 = 2;$

$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x + a) = \lim\limits_{x \to 1^+} x + \lim\limits_{x \to 1^+} a = 1 + a; h(1) = 1 + a.$

Hàm số $h(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1)$
$\Leftrightarrow 2 = 1 + a \Leftrightarrow a = 1.$

9. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} [x(2 - x)] = -8 = f(-2);$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b;$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} [x(2 - x)] = 0 = f(2);$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b.$

Hàm số liên tục tại $x = -2$ và $x = 2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2a + b = -8 \\ 4 + 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -12 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8. \end{cases}$

Vậy $a = 2$, $b = -8$ là các giá trị cần tìm.

10. a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ có $f(-1) = -4; f(1) = 2$. Do $f(-1) \,.\, f(1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

b) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x} + x^2 - 1$ có $f(0) = -1; f(1) = \sqrt{2}$. Do $f(0) \,.\, f(1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ hay $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

11. $Q(m) = \begin{cases} 0 & \text{khi } m < 0 \text{ hay } m > 2 \\ 1 & \text{khi } m = 0 \text{ hay } m = 2 \\ 2 & \text{khi } 0 < m < 2. \end{cases}$

Hàm số không liên tục tại các điểm $m = 0$ và $m = 2$.

12. $S(\alpha)=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}.2\cos\alpha.2\sin\alpha=\sin2\alpha,\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Do các hàm số $y=\sin2\alpha$ đều liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số $y=S(\alpha)$ liên tục trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$\lim\limits_{\alpha\to0^+}S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\sin2\alpha=0;$

$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^-}\sin2\alpha=0.$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A. TRẮC NGHIỆM

1. D	**2.** A	**3.** B	**4.** C	**5.** A	**6.** A	**7.** D	**8.** A
9. B	**10.** B	**11.** D	**12.** B	**13.** A	**14.** C	**15.** C	

B. TỰ LUẬN

1. a) $\frac{1}{2}$;   b) 2.

2. $v_n=u_n-(u_n-v_n)$, suy ra $\lim v_n=\lim u_n-\lim(u_n-v_n)=2-4=-2$.

$\lim\frac{3u_n-v_n}{u_nv_n+3}=\frac{3\lim u_n-\lim v_n}{\lim u_n\lim v_n+3}=\frac{3.2-(-2)}{2(-2)+3}=-8.$

3. Viết $\frac{6^n+4^n}{(2^n+1)(3^n+1)}=\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}$ (chia cả tử và mẫu cho $6^n=2^n.3^n$).

Từ đó, tìm được $\lim\frac{6^n+4^n}{(2^n+1)(3^n+1)}=1.$

4. Ta có $\frac{a^{n+1}+b^n}{2a^n+b^{n+1}}=\frac{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}$ (chia cả tử và mẫu cho a^n).

Từ đó, $\lim \dfrac{a^{n+1}+b^n}{2a^n+b^{n+1}} = \dfrac{a}{2}$. Suy ra $\dfrac{a}{2} = 1$, suy ra $a = 2$.

5. Ta có $\lim u_n = \lim\left(\dfrac{1}{n} \cdot nu_n\right) = \lim \dfrac{1}{n}\ .\ \lim nu_n = 0 \cdot \dfrac{1}{2} = 0.$

Từ đó, $\lim(3n-4)u_n = \lim(3nu_n - 4u_n) = 3\lim nu_n - 4\lim u_n = 3 \cdot \dfrac{1}{2} - 4 \cdot 0 = \dfrac{3}{2}$.

6. $S = \dfrac{1}{4} + 3 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + \ldots + 3^n \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} + \ldots$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \ldots$.

Đây là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{4}$, công bội $q = \dfrac{3}{4}$, nên $S = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{3}{4}} = 1$.

7. Thời gian để mũi tên bay từ A đến A_1 là $\dfrac{1}{2}$ giây, từ A_1 đến A_2 là $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2}$ giây, từ A_2 đến A_3 là $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3}, \ldots$.

Tổng thời gian bay của mũi tên là $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$. (*)

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $\dfrac{1}{2}$ và công bội bằng $\dfrac{1}{2}$.

Do đó, tổng này bằng $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 1$ (giây).

Như vậy, mũi tên đến bia mục tiêu sau 1 giây.

Lập luận của nhà thông thái không đúng, sai lầm ở chỗ cho rằng tổng ở (*) không phải là một số hữu hạn.

8. a) Khi $x > -3$, $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3} = x - 3$. Khi $x < -3$, $f(x) = \dfrac{x^2-9}{-(x+3)} = 3 - x$.

Từ đó, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} (x-3) = -6$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} (3-x) = 6$.

Suy ra $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) - \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 6 - (-6) = 12$.

b) Do $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$, nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to\ 3} f(x)$. Do đó, hàm số không liên tục tại $x = -3$ với mọi giá trị của a.

9. a) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$.

10. $M(x; x^2)$; $OM = \sqrt{x^2 + x^4}$; $MH = x^2$.

$$\lim_{x\to+\infty}(OM - MH) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x^4} - x^2\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x^4}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

11. Xét hàm số $f(x) = x^5 + 3x^2 - 1$. Hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$f(-2) = -21, f(-1) = 1, f(0) = -1, f(1) = 3.$

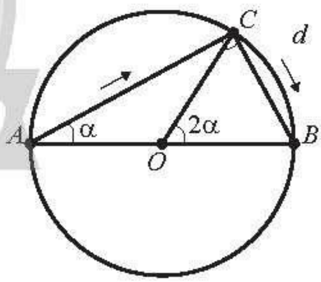
Do $f(-2).f(-1) = -21 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-2; -1)$.

Do $f(-1).f(0) = -1 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 0)$.

Do $f(0).f(1) = -3 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Vậy trong mỗi khoảng $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ và $(0; 1)$, phương trình $f(x) = 0$ hay $x^5 + 3x^2 - 1 = 0$ đều có ít nhất một nghiệm.

12. Kí hiệu O là tâm hình tròn.



a) Do tam giác ABC vuông tại C nên

$AC = AB\cos\alpha = 10\cos\alpha$ (m).

Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$. Suy ra độ dài cung CB là

$l = OB.\widehat{BOC} = 5.2\alpha = 10\alpha$ (m).

Quãng đường di chuyển (tính theo m) của người đó là

$S(\alpha) = AC + l = 10\cos\alpha + 10\alpha = 10(\alpha + \cos\alpha)\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Do các hàm số $y = \alpha$ và $y = \cos\alpha$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $\lim\limits_{\alpha\to0^+} S(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to0^+} 10(\alpha + \cos\alpha) = 10(\lim\limits_{\alpha\to0^+}\alpha + \lim\limits_{\alpha\to0^+}\cos\alpha) = 10(0 + 1) = 10.$

$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+} S(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+} 10(\alpha + \cos\alpha) = 10(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+}\alpha + \lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}^+}\cos\alpha) = 10(\frac{\pi}{2} + 0) = 5\pi.$

PHẦN HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IV. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mặt phẳng trong không gian

– Mặt bảng, mặt bàn, mặt sàn nhà, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của một mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

– Ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc để biểu diễn mặt phẳng và dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp trong dấu ngoặc để kí hiệu mặt phẳng.

a) Mặt phẳng (P) **b) Mặt phẳng (α)**

Hình 1

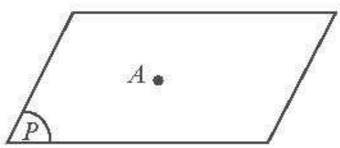
Chú ý: Mặt phẳng (P) còn được viết tắt là mp(P) hoặc (P).

Điểm thuộc mặt phẳng

Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P) như Hình 2.

– Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói A nằm trên (P) hay (P) chứa A, hay (P) đi qua A và kí hiệu là $A \in (P)$.

– Nếu điểm B không thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói B nằm ngoài (P) hay (P) không chứa B và kí hiệu là $B \notin (P)$.



Hình 2

2. Các tính chất được thừa nhận của hình học không gian

– Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước (Hình 3a).

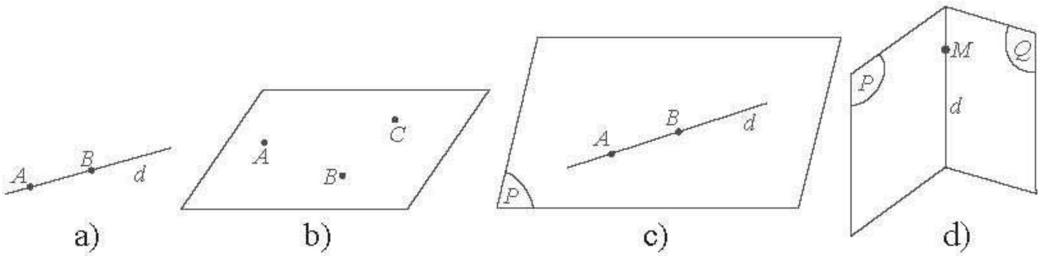
– Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước (Hình 3b).

– Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó (Hình 3c).

– Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

– Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó (Hình 3d).

– Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.



Hình 3

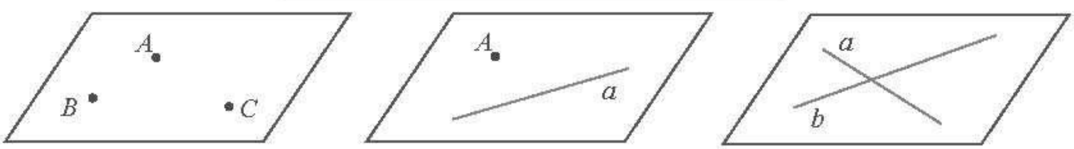
Chú ý: Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là ***giao tuyến*** của (P) và (Q), kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.

3. Cách xác định một mặt phẳng

– Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng (Hình 4a).

– Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó (Hình 4b).

– Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau (Hình 4c).



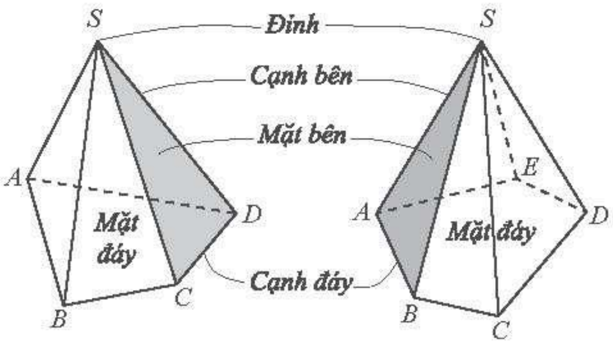
a) mp(ABC) hay (ABC) b) mp(A, a) hay (A, a) c) mp(a, b)

Hình 4

4. Hình chóp và hình tứ diện

Hình chóp

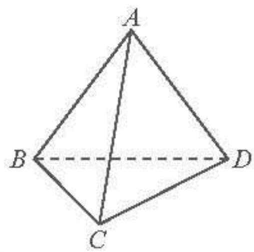
Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α). Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là ***hình chóp***, kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$.



Hình 5

Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB và BCD được gọi là ***hình tứ diện*** (hay ***tứ diện***), kí hiệu $ABCD$.



Hình 6

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAC) và (SBD); b) (SAC) và (MBD);

c) (MBC) và (SAD); d) (SAB) và (SCD).

Giải

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD.

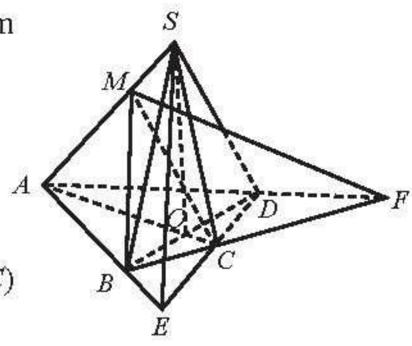
Ta có: $O \in AC$ và $AC \subset (SAC)$;

$O \in BD$ và $BD \subset (SBD)$.

Suy ra $O \in (SAC) \cap (SBD)$.

Ta lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$.

Vậy SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).



Hình 7

b) Ta có: $O \in AC$ và $AC \subset (SAC)$; $O \in BD$ và $BD \subset (MBD)$.

Suy ra $O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Tương tự, ta có $M \in (SAC) \cap (MBD)$.

Vậy OM là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (MBD).

c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi F là giao điểm của BC và AD.

Ta có: $F \in BC$ và $BC \subset (MBC)$; $F \in AD$ và $AD \subset (SAD)$.

Suy ra $F \in (MBC) \cap (SAD)$.

Tương tự, ta có $M \in (MBC) \cap (SAD)$.

Vậy FM là giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD).

d) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AB và CD.

Ta có: $E \in AB$ và $AB \subset (SAB)$; $E \in CD$ và $CD \subset (SCD)$.

Suy ra $E \in (SAB) \cap (SCD)$.

Mặt khác, $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Vậy SE là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. K là điểm thuộc BD sao cho $KD < KB$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (IJK) và (ACD); b) (IJK) và (ABD).

Giải

a) Trong mặt phẳng (BCD), gọi E là giao điểm của JK và CD.

Ta có: $E \in JK$ và $JK \subset (IJK)$;

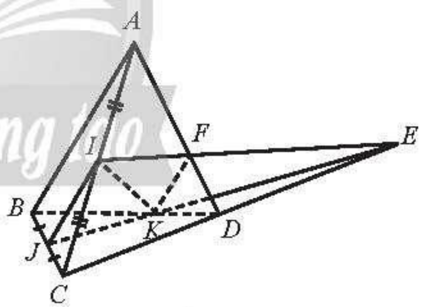
$E \in CD$ và $CD \subset (ACD)$.

Suy ra $E \in (IJK) \cap (ACD)$. (1)

Mặt khác, $I \in AC$ và $AC \subset (ACD)$;

$I \in (IJK)$.

Suy ra $I \in (IJK) \cap (ACD)$. (2)



Hình 8

Từ (1) và (2) suy ra IE là giao tuyến của hai mặt phẳng (IJK) và (ACD).

b) Từ câu a ta suy ra: $IE \subset (ACD)$. Gọi F là giao điểm của AD và IE.

Ta có: $F \in IE$ và $IE \subset (IJK)$; $F \in AD$ và $AD \subset (ABD)$.

Suy ra $F \in (IJK) \cap (ABD)$. (3)

Mặt khác, ta có: $K \in BD$ và $BD \subset (ABD)$; $K \in (IJK)$.

Suy ra $K \in (IJK) \cap (ABD)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra KF là giao tuyến của hai mặt phẳng (IJK) và (ABD).

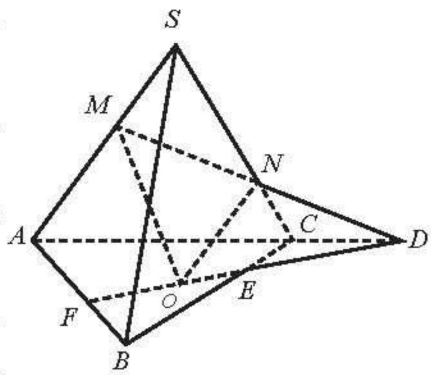
Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SA, SC sao cho MN không song song với AC. Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của các đường thẳng AC, BC và AB với mặt phẳng (OMN).

Giải

• Trong mặt phẳng (SAC), gọi D là giao điểm của MN và AC.

Ta có $D \in MN$ và $MN \subset (OMN)$, suy ra $D \in (OMN)$.

Vậy D là giao điểm của đường thẳng AC và mặt phẳng (OMN).



Hình 9

• Trong mặt phẳng (ABC), gọi E là giao điểm của OD và BC. Ta có $E \in OD$ và $OD \subset (OMN)$, suy ra $E \in (OMN)$.

Vậy E là giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (OMN).

• Trong mặt phẳng (ABC), gọi F là giao điểm của OD và AB.
Ta có $F \in OD$ và $OD \subset (OMN)$, suy ra $F \in (OMN)$.
Vậy F là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (OMN).

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD. Gọi E, F lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SB, SD.

a) Tìm giao điểm của EF với (SAC).

b) Tìm giao điểm của BC với (AEF).

2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi D, E, F lần lượt là ba điểm trên ba cạnh SA, SB, SC sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là các điểm thuộc ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, AD cắt EG tại H. Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

4. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm E, F, G sao cho $EB > AE$, $AF > FC$, $BG > GD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (EFG) và (ACD), (EFG) và (BCD), (EFG) và (ABD).

Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

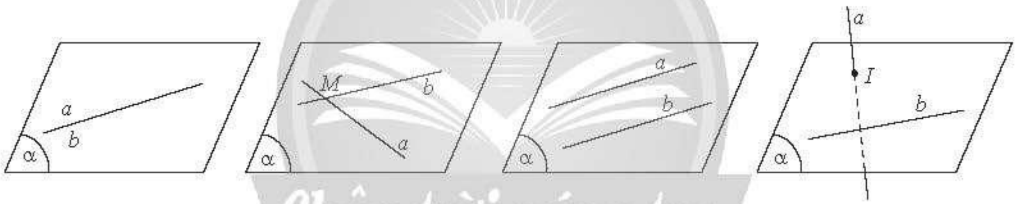
– **Trường hợp 1:** Có một mặt phẳng chứa a và b. Khi đó ta nói a và b đồng phẳng. Theo kết quả của hình học phẳng, có ba khả năng sau đây xảy ra:

• Nếu a và b có hai điểm chung thì ta nói a trùng b, kí hiệu $a \equiv b$.

• Nếu a và b có một điểm chung duy nhất M thì ta nói a và b cắt nhau tại M, kí hiệu $a \cap b = M$.

• Nếu a và b không có điểm chung thì ta nói a và b song song với nhau, kí hiệu $a \,//\, b$.

– **Trường hợp 2:** Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b. Khi đó ta nói hai đường thẳng a và b chéo nhau hay a chéo với b.



a) $a \equiv b$ b) $a \cap b = M$ c) $a \,//\, b$ d) a và b chéo nhau

Hình 1

Hai đường thẳng được gọi là ***song song*** nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chú ý:

a) Hai đường thẳng gọi là ***chéo nhau*** nếu chúng không đồng phẳng.

b) Cho hai đường thẳng song song a và b. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu mp(a, b).

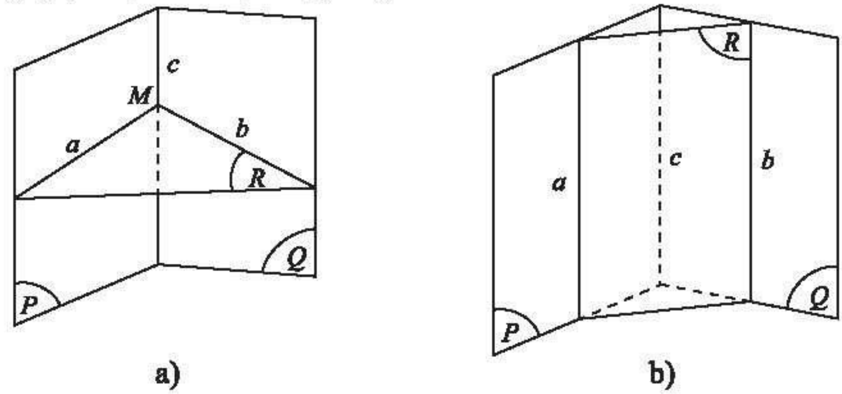
2. Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

Định lí 1

Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Định lí 2

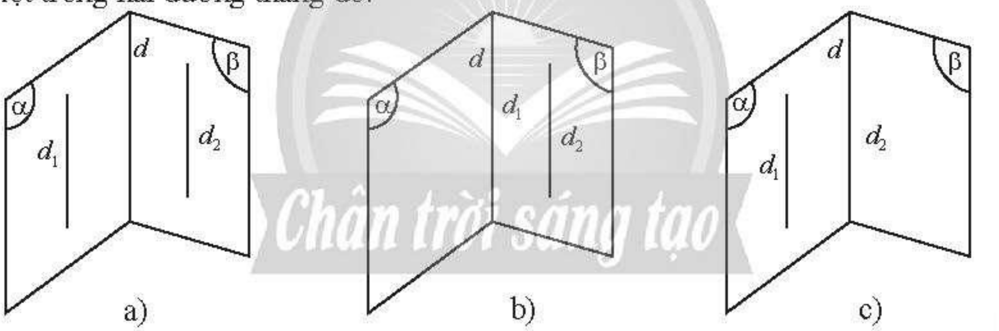
Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



Hình 2

Hệ quả

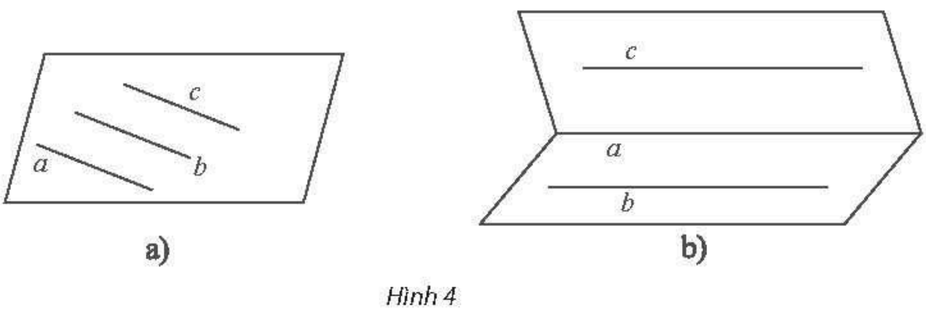
Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Hình 3

Định lí 3

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



Hình 4

Chú ý: Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu là $a \mathbin{/\!/} b \mathbin{/\!/} c$ và gọi là ***ba đường song song***.

B. BÀI TẬP MẪU

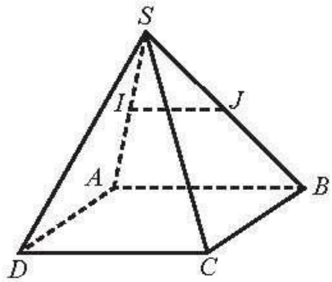
Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng $IJ \mathbin{/\!/} AB$, từ đó suy ra $IJ \mathbin{/\!/} CD$.

Giải

Vì I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB nên IJ là đường trung bình của tam giác SAB.

Do đó, $IJ \mathbin{/\!/} AB$.

Mà $AB \mathbin{/\!/} CD$ nên $IJ \mathbin{/\!/} CD$ (vì cùng song song với đường thẳng AB).



Hình 5

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB.

a) Chứng minh MN song song với CD.

b) Gọi P là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (ADN), I là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI song song với CD.

Giải

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \mathbin{/\!/} AB$. Mà $ABCD$ là hình thang nên $AB \mathbin{/\!/} CD$.

Suy ra $MN \mathbin{/\!/} AB \mathbin{/\!/} CD$. Vậy $MN \mathbin{/\!/} CD$.

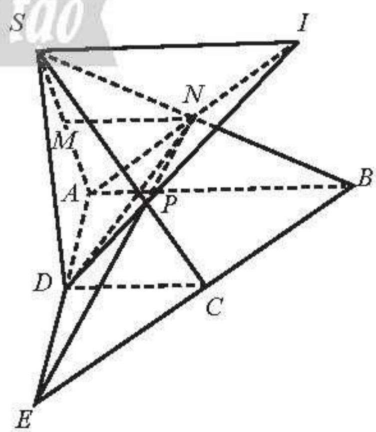
b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AD và BC. Trong mặt phẳng (SBC), gọi P là giao điểm của SC và EN.

Ta có:

$E \in AD$ và $AD \subset (ADN)$, suy ra $EN \subset (ADN)$;

$P \in EN$ và $EN \subset (ADN)$, suy ra $P \in (ADN)$.

Vậy $P = SC \cap (ADN)$.



Hình 6

Do $I = AN \cap DP$, suy ra $I \in AN$.

Ta có: $I \in AN$ và $AN \subset (SAB)$; $I \in DP$ và $DP \subset (SCD)$.

Suy ra $I \in (SAB) \cap (SCD)$.

Do đó $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Ta có $AB \subset (SAB)$; $CD \subset (SCD)$; $(SAB) \cap (SCD) = SI$. Mà $AB \parallel CD$.

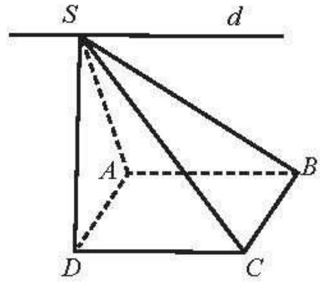
Suy ra $SI \parallel CD$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Giải

Ta có $AB \subset (SAB)$; $CD \subset (SCD)$; $AB \parallel CD$; $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Vậy d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) với $d \parallel AB \parallel CD$, $S \in d$.



Hình 7

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

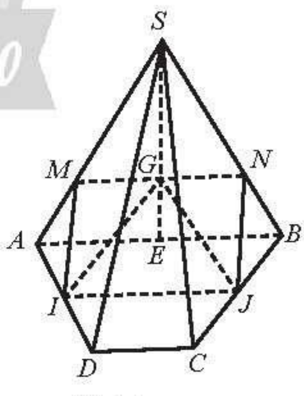
b) Tìm điều kiện của AB và CD để các giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp tạo thành một hình bình hành.

Giải

a) Ta có IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $AB \parallel IJ$.

Ta có $G \in (SAB) \cap (IJG)$; $AB \subset (SAB)$; $IJ \subset (IJG)$; $AB \parallel IJ$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là MN với $MN \parallel IJ \parallel AB$, sao cho $M \in SA$, $N \in SB$.



Hình 8

b) Dễ thấy giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp là tứ giác $MNJI$.

Do G là trọng tâm của tam giác SAB và $MN \parallel AB$ nên $\frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$ (E là trung điểm của AB) suy ra $MN = \frac{2}{3}AB$.

Ta lại có $IJ = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Vì $MN \,//\, IJ$ nên $MNJI$ là hình thang, do đó $MNJI$ là hình bình hành khi $MN = IJ \Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Vậy giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp tạo thành một hình bình hành khi $AB = 3CD$.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Gọi E là giao điểm của AM và BP, F là giao điểm của CQ và DN. Chứng minh EF song song với MN và PQ.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD.

a) Chứng minh rằng $MN \,//\, BC$.

b) Tứ giác $MNJI$ là hình gì. Tìm điều kiện để tứ giác $MNJI$ là hình bình hành.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAD) và (SBC);

b) (SAB) và (MDC), với M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng SD.

a) Tìm các giao tuyến: $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$; $d_2 = (SCD) \cap (MAB)$.

b) Chứng minh $d_1 \,//\, d_2$.

Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

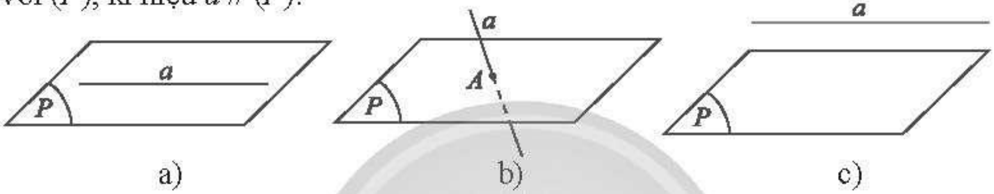
1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Khi đó có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

– **Trường hợp 1:** a và (P) có từ hai điểm chung phân biệt trở lên (Hình 1a), suy ra mọi điểm thuộc a đều thuộc (P), ta nói a nằm trong (P), kí hiệu $a \subset (P)$.

– **Trường hợp 2:** a và (P) có một điểm chung duy nhất A (Hình 1b), ta nói a cắt (P) tại A, kí hiệu $a \cap (P) = A$.

– **Trường hợp 3:** a và (P) không có điểm chung nào (Hình 1c), ta nói a song song với (P), kí hiệu $a \parallel (P)$.



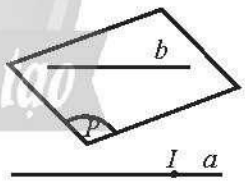
Hình 1

Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lí 1

Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P).

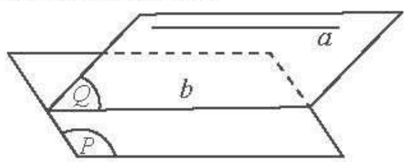


Hình 2

3. Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

Định lí 2

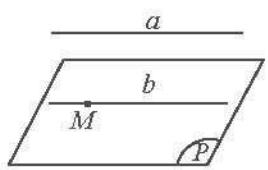
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a, cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b.



Hình 3

Hệ quả 1

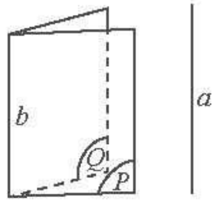
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P).



Hình 4

Hệ quả 2

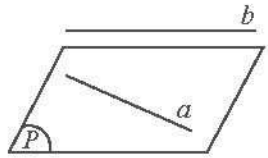
Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Hình 5

Định lí 3

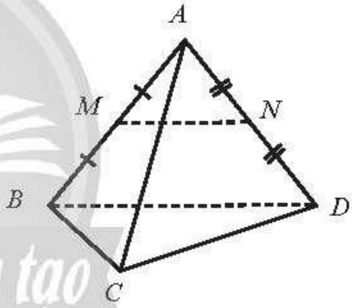
Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a, có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.



Hình 6

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng MN // (BCD).



Hình 7

Giải

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD nên MN là đường trung bình của tam giác ABD.

Suy ra MN // BD.

Mà $BD \subset (BCD)$ nên MN // (BCD).

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC, ACD. Chứng minh rằng IJ // (BCD).

Giải

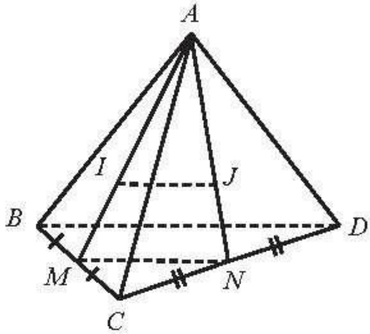
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Suy ra MN là đường trung bình của tam giác BCD. Suy ra MN // BD. (1)

Mặt khác, I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ACD nên $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3}$.

Theo định lí Thalès đảo trong tam giác AMN, ta có IJ // MN. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ // BD.

Mà $BD \subset (BCD)$ nên IJ // (BCD).



Hình 8

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 2a$. Gọi E là trung điểm của SC. Chứng minh rằng BE // (SAD).

Giải

Cách 1:

Gọi F là trung điểm của SD.

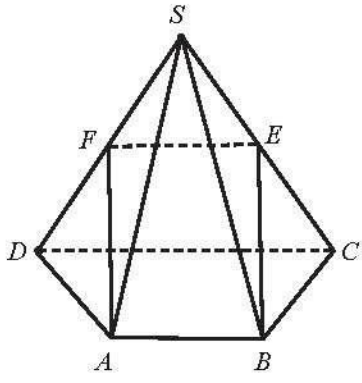
EF là đường trung bình của tam giác SCD.

Suy ra EF // CD và $EF = \frac{1}{2}CD$.

Mà AB // CD và $AB = \frac{1}{2}CD$. Do đó, EF // AB và $EF = AB$ hay $ABEF$ là hình bình hành.

Suy ra BE // AF. Mà $AF \subset (SAD)$.

Vậy BE // (SAD).



Hình 9

Cách 2:

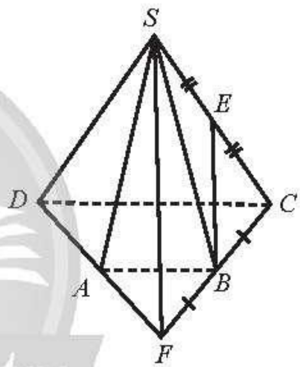
Gọi F là giao điểm của BC và AD.

Ta có AB // CD và $AB = \frac{1}{2}CD$, suy ra AB là đường trung bình của tam giác CDF.

Do đó B là trung điểm của FC.

Suy ra BE là đường trung bình của tam giác SCF hay BE // SF.

Mà $SF \subset (SAD)$ nên BE // (SAD).



Hình 10

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD, M là điểm trên đoạn DC sao cho $DC = 3DM$.

Chứng minh rằng MG // (SBC).

Giải

Gọi N là trung điểm của AD.

Ta có $MG \subset (SMN)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$,

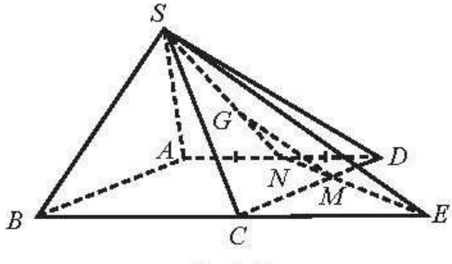
gọi $E = MN \cap BC$.

Ta có $S \in (SNM) \cap (SBC)$;

$E \in MN$ và $MN \subset (SMN)$;

$E \in BC$ và $BC \subset (SBC)$.

Suy ra $(SMN) \cap (SBC) = SE$.



Hình 11

Dễ thấy $\Delta MND \backsim \Delta MEC$, suy ra $\frac{MN}{ME} = \frac{MD}{MC} = \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{MN}{NE} = \frac{1}{3}$. (1)

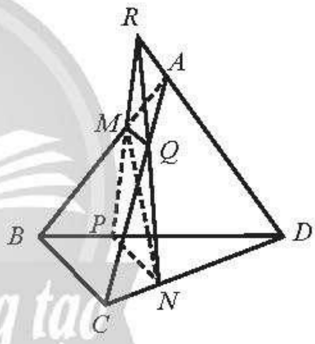
Mặt khác, $\frac{GN}{SN} = \frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAD). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{GN}{SN} = \frac{MN}{NE}$.

Theo định lí Thalès đảo trong tam giác SNE, ta có $MG // SE$.
Mà $SE \subset (SBC)$ nên $MG // (SBC)$.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh AB và CD. Đặt (α) là mặt phẳng qua MN và song song với BC. Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện $ABCD$.

Giải



Hình 12

Ta có: $BC \subset (BCD)$; $N \in (\alpha) \cap (BCD)$; $(\alpha) // BC$.

Suy ra $(\alpha) \cap (BCD) = Nx$, với $Nx // BC$.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi P là giao điểm của Nx và BD.

Suy ra $NP = (\alpha) \cap (BCD)$.

Ta có $BC \subset (ABC)$; $M \in (\alpha) \cap (ABC)$; $(\alpha) // BC$.

Suy ra $(\alpha) \cap (ABC) = My$ với $My // BC$.

Trong mặt phẳng (ABC), gọi Q là giao điểm của My và AC.

Suy ra $MQ = (\alpha) \cap (ABC)$.

Từ đó, dễ thấy: $(\alpha) \cap (ABD) = MP$; $(\alpha) \cap (ACD) = QN$.

C. BÀI TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ACD. Chứng minh G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD).

2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O'.

a) Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh AF, AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AF$, $AN = \frac{1}{3}AD$. Chứng minh $MN // (DCEF)$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, I là trung điểm của AB và M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$. Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh:

a) $NG \parallel (SCD)$;   b) $MG \parallel (SCD)$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD, P là trung điểm của SA. Chứng minh:

a) MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD);

b) SB song song với (MNP);

c) SC song song với (MNP).

d) Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm của hai tam giác ABC và SBC. Chứng minh G_1G_2 song song với (SAD).

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

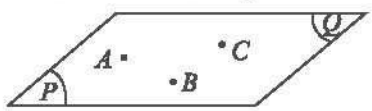
Bài 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

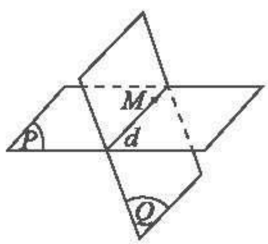
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q), có thể xảy ra một trong ba trường hợp:

– Trường hợp 1: (P) và (Q) có ba điểm chung không thẳng hàng, ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau, kí hiệu $(P) \equiv (Q)$.



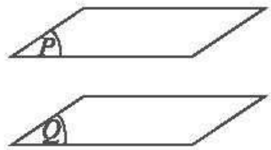
a)

– Trường hợp 2: (P) và (Q) phân biệt và có một điểm chung, ta nói (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d đi qua điểm chung, kí hiệu $(P) \cap (Q) = d$.



b)

– Trường hợp 3: (P) và (Q) không có bất kì điểm chung nào, nghĩa là $(P) \cap (Q) = \varnothing$, ta nói (P) và (Q) song song với nhau, kí hiệu $(P) \mathbin{/\mkern-4mu/} (Q)$ hoặc $(Q) \mathbin{/\mkern-4mu/} (P)$.



c)

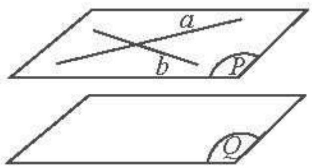
Hình 1

Hai mặt phẳng được gọi là ***song song*** với nhau nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lí 1

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

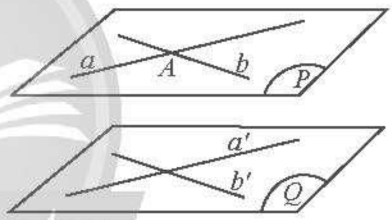


Hình 2

3. Tính chất của hai mặt phẳng song song

Định lí 2

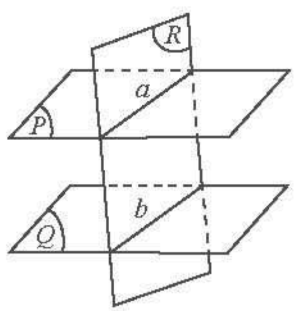
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.



Hình 3

Định lí 3

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.



Hình 4

4. Định lí Thalès trong không gian

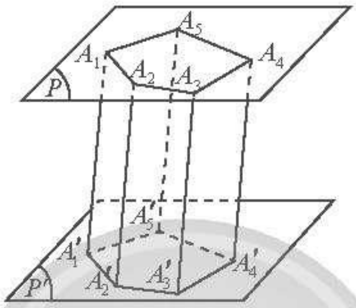
Định lí 4 *(Định lí Thalès)*

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

5. Hình lăng trụ và hình hộp

Hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại A_1', A_2', ..., A_n'. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ..., $A_nA_1A_1'A_n'$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'...A_n'$ gọi là ***hình lăng trụ***, kí hiệu $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.



Hình 5

Hình hộp

Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

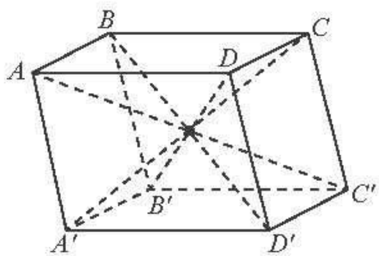
Trong hình hộp ta có:

– Sáu mặt là sáu hình bình hành. Mỗi mặt đều có một mặt song song với nó. Hai mặt như thế gọi là ***hai mặt đối diện***;

– Hai đỉnh không cùng nằm trên một mặt gọi là ***hai đỉnh đối diện***;

– Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là ***đường chéo***;

– Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Hình 6

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

Giải

Ta có MO là đường trung bình của tam giác SAC, suy ra $MO \parallel SC$.

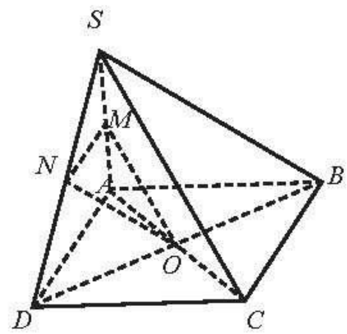
Do đó $MO \parallel (SBC)$. (1)

Ta có NO là đường trung bình của tam giác SDB, suy ra $NO \parallel SB$.

Do đó $NO \parallel (SBC)$. (2)

Mặt khác, $NO \cap MO = O$ và $NO, MO \subset (OMN)$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.



Hình 7

Bài 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$;   b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

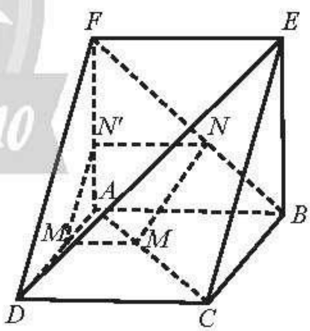
Giải

a) Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (BCE)$;

$AF \parallel BE \Rightarrow AF \parallel (BCE)$.

Ta có $AD \cap AF = A$ và $AD, AF \subset (ADF)$

nên $(ADF) \parallel (BCE)$.



Hình 8

b) Trong tam giác ADC, ta có $MM' \parallel CD$, theo định lí Thalès suy ra $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$. (1)

Trong tam giác AFB, ta có $NN' \parallel AB$, theo định lí Thalès suy ra $\dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$. (2)

Ta có: $AM = BN$ (giả thiết) và $AC = BF$ (vì $ABCD$ và $ABEF$ là các hình vuông). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF}$, theo định lí Thalès đảo trong tam giác ADF, suy ra $M'N' \parallel DF$. Do đó, $DF \parallel (MM'N'N)$. (4)

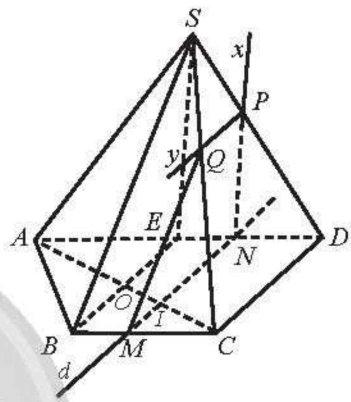
Lại có $NN' // AB$ (giả thiết), suy ra $NN' // EF$, suy ra $EF // (MM'N'N)$. (5)

Mặt khác, $DF \cap EF = F$ và $DF, EF \subset (DEF)$. (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $(DEF) // (MM'N'N)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AD // BC$, $AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm của AD, O là giao điểm của AC và BE, I là điểm nằm trên đoạn OC. Mặt phẳng (P) qua I và song song với (SBE). Tìm các giao tuyến của các mặt của hình chóp với mặt phẳng (P).

Giải



Hình 9

• Ta có $(P) // (SBE)$, $(ABCD) \cap (SBE) = BE$.

Mà $I \in (P) \cap (ABCD)$ nên $(P) \cap (ABCD) = d$ với $d // BE$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của d và BC; N là giao điểm của d và AD.

Suy ra $(P) \cap (ABCD) = MN$.

• Ta có $(P) // (SBE)$, $(SBE) \cap (SAD) = SE$.

Mà $N \in (P) \cap (SAD)$ nên $(P) \cap (SAD) = Nx$ với $Nx // SE$.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi P là giao điểm của Nx và SD.

Suy ra $(P) \cap (SAD) = NP$.

• Ta có $MN \subset (P)$, $CD \subset (SCD)$, $P \in (P) \cap (SCD)$, $MN // CD$.

Suy ra $(P) \cap (SCD) = Py$ với $Py // MN // CD$.

Trong mặt phẳng (SCD), gọi Q là giao điểm của Py và SC.

Suy ra $(P) \cap (SCD) = PQ$.

• Ta có $Q \in SC$, suy ra $Q \in (SCB)$.

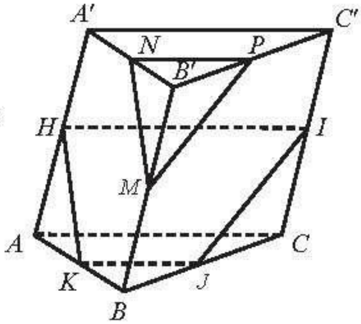
Mà $Q \in (P)$, suy ra $Q \in (SCB) \cap (P)$.

Tương tự, ta có $M \in (SCB) \cap (P)$.

Suy ra $(P) \cap (SBC) = QM$.

Bài 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', A'B', B'C'$. H là điểm bất kì thuộc cạnh AA' và (P) là mặt phẳng đi qua H và song song với mặt phẳng (MNP). Chứng minh các đoạn giao tuyến của hình lăng trụ với mặt phẳng (P) tạo thành một hình thang.

Giải



Hình 10

• Ta có $(P) \parallel (MNP)$; $(MNP) \cap (A'B'BA) = MN$.

Suy ra $(P) \cap (A'B'BA) = Hx \parallel MN$.

Trong mặt phẳng $(A'B'BA)$, gọi K là giao điểm của Hx và AB.

Suy ra $(P) \cap (A'B'BA) = HK$.

• Vì $(P) \parallel (MNP)$ nên $NP \parallel (P)$. Hơn nữa $NP \parallel A'C'$.

Suy ra $(P) \parallel A'C'$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, vẽ $HI \parallel A'C'$, $I \in CC'$.

Ta có $(P) \cap (ACC'A') = HI$.

Tương tự, ta có $(P) \cap (BCC'B') = IJ$ với $J \in BC$ và $IJ \parallel MP$.

Vì $K, J \in (P) \cap (ABC)$ nên $(P) \cap (ABC) = JK$.

Do đó các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ tạo thành tứ giác $HIJK$.

Mặt khác, $KJ \parallel HI$ (do cùng song song với $A'C'$).

Vậy tứ giác $HIJK$ là hình thang.

C. BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, SD.

a) Chứng minh: $(BEF) \parallel (SCD)$ và $CI \parallel (BEF)$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

c) Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến vừa tìm được ở câu b, từ đó chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Giả sử hai tam giác SAD và SAB là các tam giác cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là đường phân giác trong của hai tam giác SAD và SAB. Chứng minh $EF \parallel (SBD)$.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh:

a) $(BDA') // (B'D'C)$.

b) Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

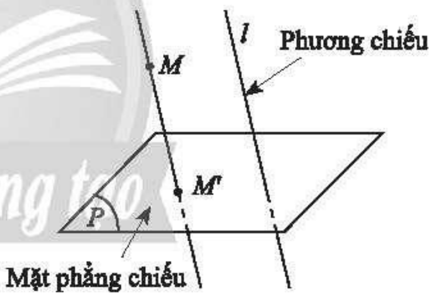
4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. (P) là mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD). Tìm giao tuyến của các mặt của hình chóp với mặt phẳng (P).

Bài 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm phép chiếu song song

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P). Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l. Đường thẳng này cắt (P) tại M'. Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là ***phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l***.



Hình 1

2. Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Tính chất 1

Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.

Tính chất 2

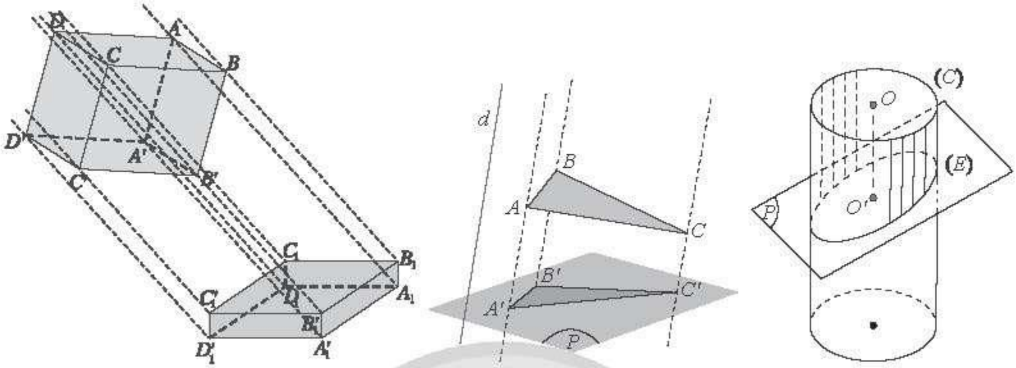
Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 3

• Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

• Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

3. Hình biểu diễn của một hình không gian



a) b) c)

Hình 2

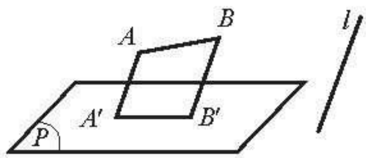
Hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho mặt phẳng (P), đoạn thẳng AB và đường thẳng l cắt mặt phẳng (P). Cho biết AB không song song với l. Nêu cách xác định hình chiếu song song của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) theo phương l.

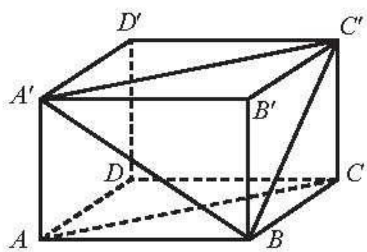
Giải

Vẽ hai đường thẳng lần lượt qua A, B và song song với l, cắt (P) tại A' và B'. Ta có đoạn thẳng $A'B'$ là hình chiếu song song của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) theo phương l.



Hình 3

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'B$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương DD'.

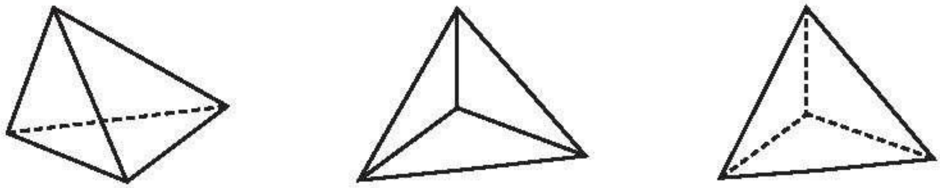


Hình 4

Giải

Ta có $AA' // CC' // DD'$ nên tam giác ACB là ảnh của tam giác $A'C'B$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương DD'.

Bài 3. Trong Hình 5, hãy cho biết hình nào là hình biểu diễn của tứ diện?



a) b) c)

Hình 5

Giải

Cả ba hình trên đều là hình biểu diễn của tứ diện với các phương chiếu và mặt phẳng chiếu khác nhau.

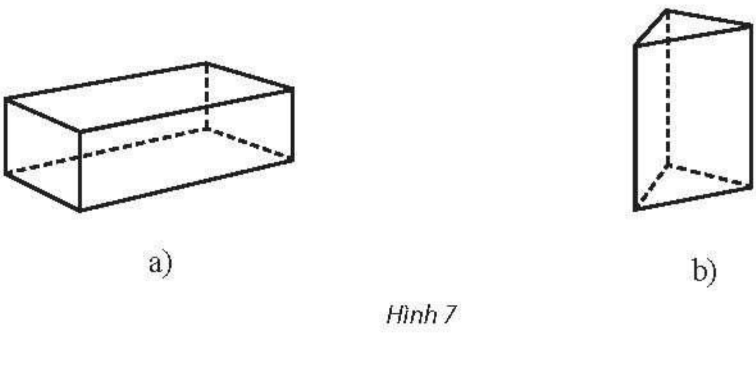
Bài 4. Vẽ hình biểu diễn của các vật sau.

a) b)

Hình 6

Giải

Hình 7a là hình biểu diễn của Hình 6a; Hình 7b là hình biểu diễn của Hình 6b.



a) b)

Hình 7

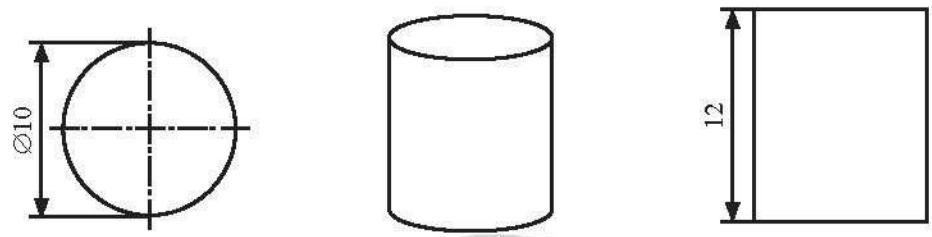
C. BÀI TẬP

1. Cho mặt phẳng (P), tam giác ABC và đường thẳng l cắt mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng AB, BC, CA đều không song song hoặc trùng với đường thẳng l. Xác định hình chiếu song song của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) theo phương l trong mỗi trường hợp sau:

a) Mặt phẳng (ABC) không song song với l;

b) Mặt phẳng (ABC) song song hoặc chứa l.

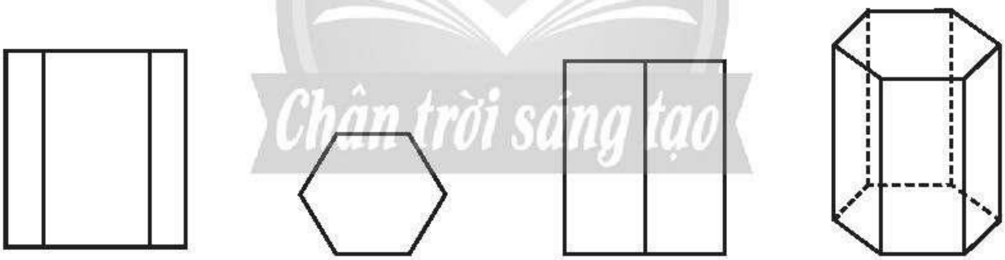
2. Trong Hình 8, hãy cho biết hình nào là hình biểu diễn của hình trụ?



a) b) c)

Hình 8

3. Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của hình lăng trụ đứng có đáy là lục giác đều?



a) b) c) d)

Hình 9

4. Vẽ hình biểu diễn của các vật sau.

a) b)

Hình 10

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A. TRẮC NGHIỆM

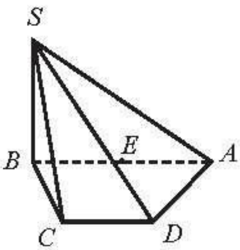
1. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Ba điểm. B. Một điểm và một đường thẳng.

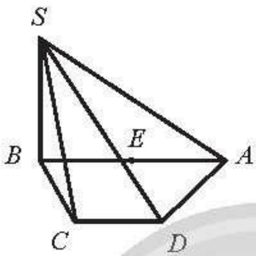
C. Hai đường thẳng cắt nhau. D. Bốn điểm.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB và E là trung điểm của đoạn thẳng AB. Hình vẽ nào sau đây là hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$?

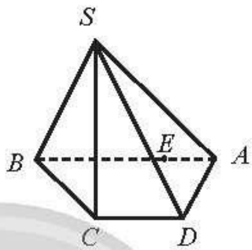
A.



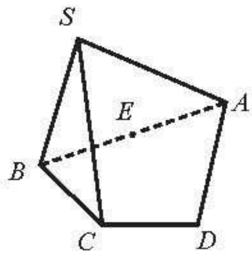
B.



C.



D.



3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N. Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD)?

A. SM. B. SN. C. SB. D. SC.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành có O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh SC và SD. Đường thẳng SO cắt đường thẳng AM và BN lần lượt tại P và Q. Giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD) là điểm nào sau đây?

A. Điểm P. B. Điểm Q. C. Điểm O. D. Điểm M.

5. Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì

A. cắt nhau. B. chéo nhau hoặc song song.

C. chéo nhau. D. song song.

6. Cho hai đường thẳng song song a, b và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu $a \mathbin{/\!/} (P)$ thì $b \mathbin{/\!/} (P)$. B. Nếu a cắt (P) thì b cắt (P).

C. Nếu a nằm trên (P) thì $b \mathbin{/\!/} (P)$. D. Nếu a nằm trên (P) thì b nằm trên (P).

7. Cho tứ diện $ABCD$ có P, Q lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ABQ) và mặt phẳng (DCP) là đường thẳng d. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. d đi qua trung điểm hai cạnh AB và CD.

B. d đi qua trung điểm hai cạnh AB và AD.

C. d là đường thẳng PQ.

D. d là đường thẳng QA.

8. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. MN // $(ABCD)$.
B. MN // (SAB).
C. MN // (SAD).
D. MN // (SCD).

9. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (β). Biết (α) // (β). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. a // (β).
B. b // (α).
C. a // b.
D. Nếu có một mặt phẳng (γ) chứa a và b thì a // b.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. BD.
B. SC.
C. AC.
D. AB.

B. TỰ LUẬN

1. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ các đỉnh A, B, C và D lần lượt kẻ các tia Ax, By, Cz và Dt song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh mặt phẳng (Ax, By) song song với mặt phẳng (Cz, Dt).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N, P lần lượt là ba điểm nằm trên các cạnh AB, BC, SO. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$ (nếu có).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$, biết rằng (P) đi qua M, song song với SC và AD.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và tam giác SAB đều. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BM = x$ $(0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M, song song với hai đường thẳng SA và AB.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

b) Tính diện tích của hình tạo bởi các đoạn giao tuyến ở câu a theo a và x.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của AC và BD, $AC = 2a$, $BD = 2b$; tam giác SBD là tam giác đều. Gọi I là điểm nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AI = x$ $(0 < x < a)$, (P) là mặt phẳng đi qua điểm I và song song với mặt phẳng (SBD).

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

b) Tính diện tích của hình tạo bởi các đoạn giao tuyến ở câu a theo a, b và x.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB và $AD = a$. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S, $SA = a$; mặt phẳng (R) song song với (SAB) và cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

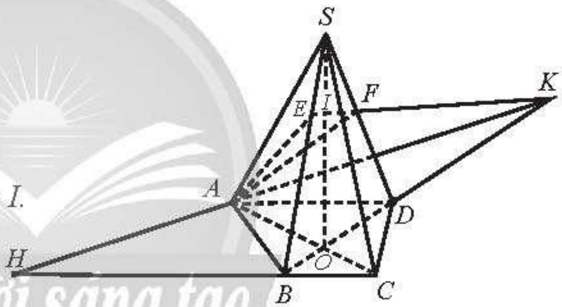
a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM$ với $0 < x < a$. Tính MQ theo a và x.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

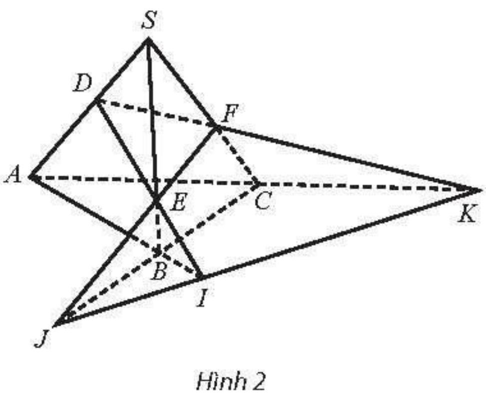
1. a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.
Suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.
Trong mặt phẳng (SBD), gọi $I = EF \cap SO$. Vậy $EF \cap (SAC) = I$.



Hình 1

b) Trong mặt phẳng (SBD), gọi $K = EF \cap BD$. Suy ra $AK = (ABCD) \cap (AEF)$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $H = BC \cap AK$. Vậy $BC \cap (AEF) = H$.

2. Ta có $I = DE \cap AB$, suy ra:
$I \in DE$, suy ra $I \in (DEF)$;
$I \in AB$, suy ra $I \in (ABC)$.
Tương tự, ta có J, K cũng thuộc hai mặt phẳng (DEF), (ABC).
Vậy I, J, K thẳng hàng.



Hình 2

3. Gọi $O = HF \cap IG$. Ta có:

$O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$

suy ra $O \in (ACD)$;

$O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$.

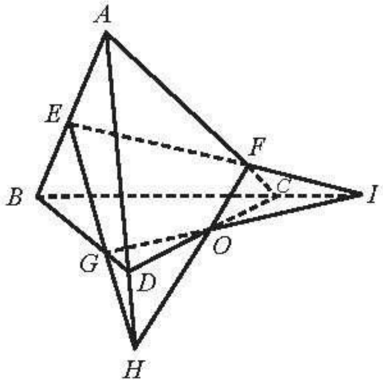
Do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mặt khác, ta có

$(ACD) \cap (BCD) = CD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in CD$.

Vậy ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.



Hình 3

4. Ta có $(EFG) \cap (ABC) = EF$.

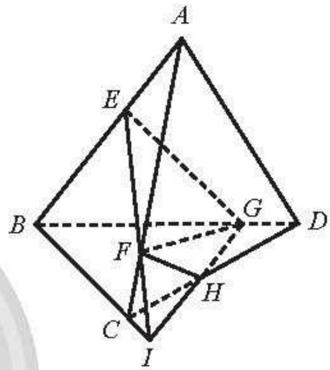
Trong mặt phẳng (ABC), gọi $I = EF \cap BC$.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi $H = IG \cap CD$.

Vậy $(EFG) \cap (ACD) = FH$,

$(EFG) \cap (BCD) = HG$,

$(EFG) \cap (ABD) = GE$.



Hình 4

Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

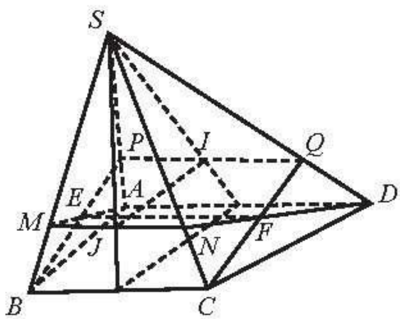
1. a) Ta có $AD \parallel BC$, $AD \subset (ADJ)$, $BC \subset (SBC)$,

$(ADJ) \cap (SBC) = MN$.

Suy ra $MN \parallel AD \parallel BC$.

Chứng minh tương tự, ta có $PQ \parallel AD \parallel BC$.

Suy ra $MN \parallel PQ$.

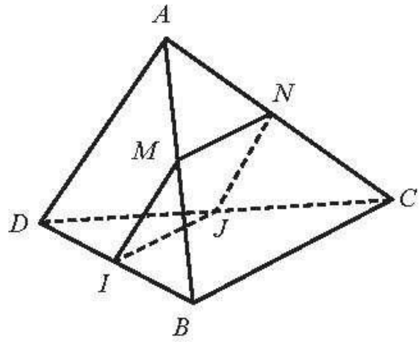


Hình 1

b) Ta có: $AD \parallel BC$, $(ADJ) \cap (IBC) = EF$, $AD \subset (ADJ)$, $BC \subset (IBC)$.

Suy ra $EF \parallel AD \parallel BC$, suy ra $EF \parallel MN \parallel PQ$.

2. a) Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, suy ra $MN // BC$.

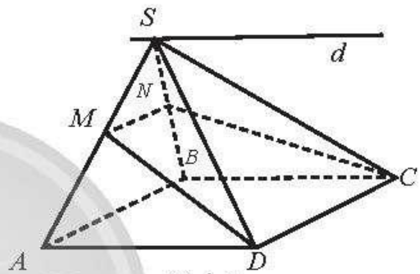


Hình 2

b) Ta có IJ là đường trung bình của tam giác DBC, suy ra $IJ // BC$. Suy ra $IJ // BC // MN$, do đó $MNJI$ là hình thang.

$MNJI$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MI // NJ // AD$, suy ra MI là đường trung bình của tam giác ADB. Vậy M là trung điểm AB.

3. a) Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$, $AD \subset (SAD)$, $BC \subset (SBC)$ và $AD // BC$.



Hình 3

Suy ra $(SAD) \cap (SBC) = d$ với $S \in d$, $d // AD // BC$.

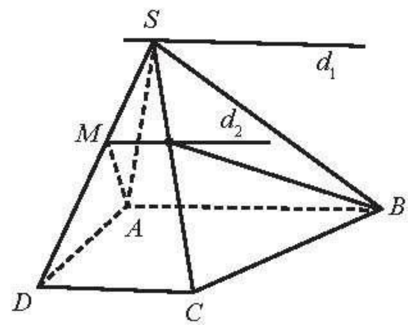
b) Ta có $M \in (SAB) \cap (MDC)$, $AB \subset (SAB)$, $DC \subset (MDC)$ và $AB // DC$.

Suy ra $(SAB) \cap (MDC) = Mx$ với $Mx // AB // DC$.

Gọi $N = SB \cap Mx$.

Khi đó $(SAB) \cap (MDC) = MN$.

4. a) Ta có $AB // CD$ và S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), suy ra giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d_1 thoả mãn: d_1 đi qua S và $d_1 // AB // CD$.



Hình 4

Ta có $AB // CD$ và M là điểm chung của hai mặt phẳng (SCD) và (MAB), suy ra giao tuyến của (SCD) và (MAB) là đường thẳng d_2 thoả mãn: d_2 đi qua M và $d_2 // AB // CD$.

b) Ta có $d_1 // d_2$ vì chúng cùng song song với AB.

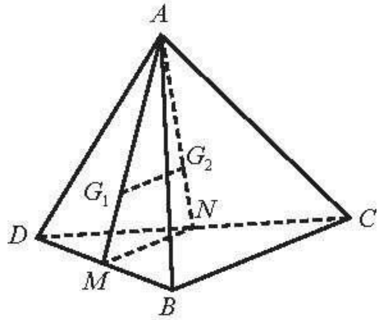
Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DB, DC.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác DBC, suy ra $MN \parallel BC$.

Trong tam giác AMN, ta có $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_2}{AN} = \dfrac{2}{3}$.

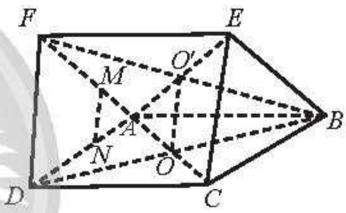
Theo định lí Thalès đảo trong tam giác AMN, ta có $G_1G_2 \parallel MN$. Suy ra $G_1G_2 \parallel MN \parallel BC$, suy ra G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD).



Hình 1

2. a) Ta có $OO' \parallel DF \parallel CE$, suy ra OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Ta có $\dfrac{AM}{AF} = \dfrac{AN}{AD}$, suy ra $MN \parallel DF$, suy ra $MN \parallel (DCEF)$.



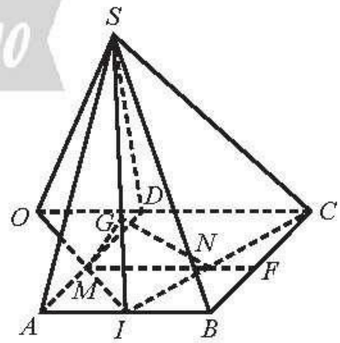
Hình 2

3. a) Gọi F là giao điểm của MN và BC.

Ta có $MN \parallel AB$, suy ra $NF \parallel BI$ (vì $F \in MN$, $I \in AB$).

Trong tam giác CIB có $NF \parallel BI$, nên theo định lí Thalès ta có: $\dfrac{NI}{CI} = \dfrac{BF}{BC} = \dfrac{1}{3}$.

Trong tam giác SAB, ta có G là trọng tâm nên $\dfrac{GI}{SI} = \dfrac{1}{3}$.



Hình 3

Trong tam giác SIC, ta có $\dfrac{GI}{SI} = \dfrac{NI}{CI} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $NG \parallel SC$ (định lí Thalès đảo).

Do đó $NG \parallel (SDC)$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của MI và DC.

Trong tam giác OCI có $MN \parallel OC$, suy ra $\dfrac{MI}{OI} = \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3}$ (theo định lí Thalès).

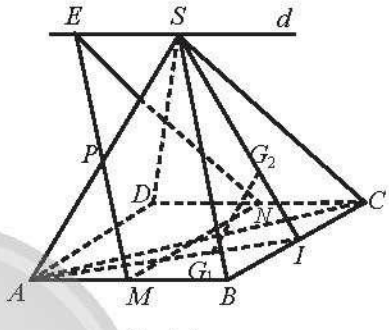
Mà $\dfrac{IG}{SI} = \dfrac{1}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAB).

Do đó, trong tam giác SOI có $\dfrac{MI}{OI} = \dfrac{IG}{SI} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $MG \parallel SO$ (định lí Thalès đảo).

Do đó $MG \parallel (SDC)$.

4. a) Ta có $BC \subset (SBC)$ và $MN \parallel BC$, suy ra $MN \parallel (SBC)$; $AD \subset (SAD)$ và $MN \parallel AD$, suy ra $MN \parallel (SAD)$.

b) Trong tam giác SAB, có PM là đường trung bình, suy ra $SB \parallel MP$, suy ra $SB \parallel (MNP)$.



Hình 4

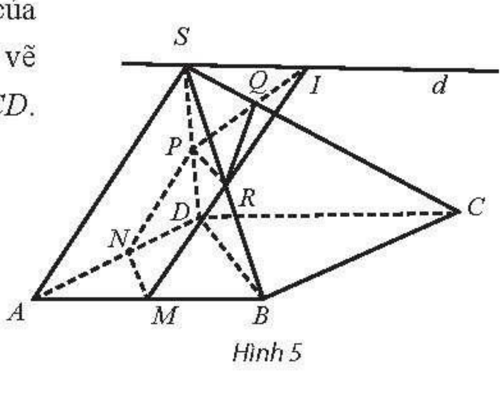
c) Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng d đi qua S và $d \parallel AB$. Gọi E là giao điểm của MP và d, ta có $MBSE$ là hình bình hành, suy ra $SE \parallel MB$ và $SE = MB$, suy ra $SE \parallel CN$ và $SE = CN$, suy ra $SC \parallel NE$. Ta lại có $NE \subset (MNP)$, suy ra $SC \parallel (MNP)$.

d) Trong mặt phẳng (SBC), gọi I là giao điểm của SG_2 và BC.

Trong tam giác SIA, ta có $\dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IS} = \dfrac{1}{3}$, theo định lí Thalès đảo suy ra $G_1G_2 \parallel SA$, suy ra $G_1G_2 \parallel (SAD)$.

5. Gọi N, P, R lần lượt là trung điểm của AD, SD, SB. Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng d đi qua S và $d \parallel AB \parallel CD$. MR cắt d tại I, PI cắt SC tại Q.

Suy ra: $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$, $(P) \cap (SAD) = NP$, $(\alpha) \cap (SCD) = PQ$, $(\alpha) \cap (SBC) = QR$, $(\alpha) \cap (SAB) = MR$.



Hình 5

Bài 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

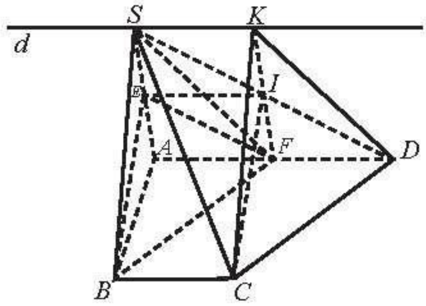
1. a) Ta có $EF \parallel SD$ (đường trung bình của tam giác SAD).

Suy ra $EF \parallel (SCD)$ (vì $SD \subset (SCD)$).

Ta có $BF \parallel CD$ ($BFDC$ là hình bình hành), suy ra $BF \parallel (SCD)$ (vì $CD \subset (SCD)$).

Mặt khác $EF, BF \subset (BEF)$; $EF \cap BF = F$.

Vậy $(BEF) \parallel (SCD)$.



Hình 1

Ta có $EI \parallel BC$ (vì cùng song song với AD) và $EI = BC = \frac{1}{2}AD$ (vì EI là đường trung bình của tam giác SAD và $AD = 2BC$).

Ta có $EICB$ là hình bình hành nên $CI \parallel BE$.

Mặt khác $BE \subset (BEF)$ suy ra $CI \parallel (BEF)$.

b) Ta có $BC \parallel AD$, suy ra giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và $d \parallel BC \parallel AD$.

c) Xét tam giác SAD có I là trung điểm của SD, F là trung điểm của AD.

Suy ra IF là đường trung bình của tam giác SAD, suy ra $IF \parallel SA$ suy ra $KF \parallel SA$. (1)

Mặt khác, $SK \parallel AF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SKFA$ là hình bình hành. Suy ra $SK = AF$.

Suy ra $SK = FD$ (vì $AF = FD$). Tứ giác $SKDF$ có $SK = FD$ và $SK \parallel FD$, nên $SKDF$ là hình bình hành. Suy ra $SF \parallel KD$.

Ta có $SF \parallel KD$; $BF \parallel DC$; $F = SF \cap BF$; $D = KD \cap CD$.

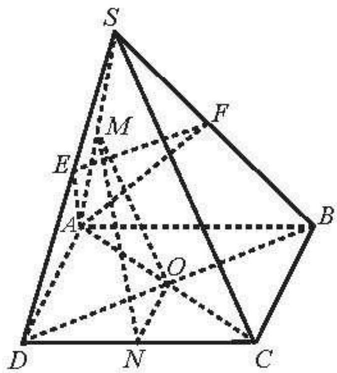
Suy ra $(SBF) \parallel (KCD)$.

2. a) Ta có $MO \parallel SC$ (MO là đường trung bình của tam giác SAC), suy ra $MO \parallel (SCB)$; $NO \parallel BC$ (NO là đường trung bình của tam giác DCB), suy ra $NO \parallel (SCB)$.

Mà $MO, NO \subset (OMN)$; $MO \cap NO = O$.

Vậy $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Ta có hai tam giác SAD và SAB là các tam giác cân tại A, suy ra AE và AF vừa là đường phân giác vừa là đường trung tuyến lần lượt của hai tam giác SAD và SAB, suy ra E và F lần lượt là trung điểm của SD và SB.



Hình 2

Suy ra $EF \parallel BD$ (EF là đường trung bình của tam giác SDB).

Suy ra $EF \parallel (SBD)$.

3. a) Ta có $DD' \parallel BB'$ và $DD' = BB'$ ($ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp), suy ra $DD'B'B$ là hình bình hành, suy ra $BD \parallel B'D'$ mà $B'D' \subset (B'D'C)$, suy ra $BD \parallel (B'D'C)$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $DA' \parallel B'C$, mà $B'C \subset (B'D'C)$, suy ra $DA' \parallel (B'D'C)$. (2)

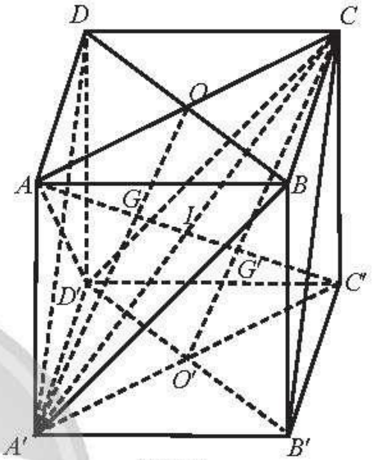
Mặt khác, ta có $BD \cap DA' = D$ và $BD, DA' \subset (BDA')$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Trong hình bình hành $AA'C'C$ gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$; cắt $A'O$, CO' lần lượt tại G và G'.

Trong tam giác $AA'C$, ta có G là giao điểm của hai trung tuyến AI và $A'O$ nên G là trọng tâm của tam giác $AA'C$, suy ra G cũng là trọng tâm tam giác $A'BD$, tương tự G' là trọng tâm tam giác $B'D'C$.

Vậy AC' đi qua trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.



Hình 3

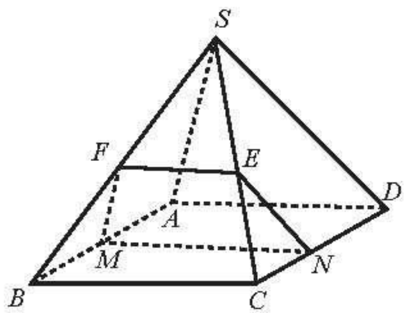
c) Ta có $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{1}{3}AC'$; $C'G' = \frac{2}{3}C'I = \frac{1}{3}AC'$, suy ra G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

4. $(P) \cap (ABCD) = MN$ với $MN \parallel BC \parallel AD$.

$(P) \cap (SAB) = MF$ với $MF \parallel SA$ ($F \in SB$).

$(P) \cap (SDC) = NE$ với $NE \parallel SD$ ($E \in SC$).

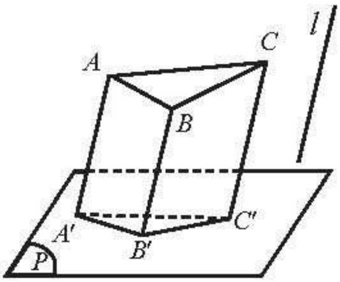
$(P) \cap (SBC) = EF$ với $EF \parallel BC \parallel MN$.



Hình 4

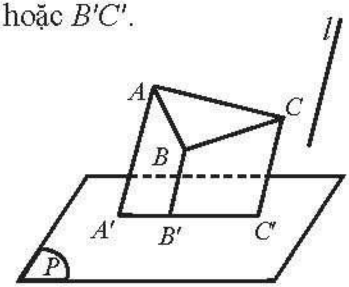
Bài 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. a) Hình chiếu song song của tam giác *ABC* trên mặt phẳng (*P*) theo phương *l* là tam giác *A'B'C'*.



Hình 1

b) Hình chiếu song song của tam giác *ABC* trên mặt phẳng (*P*) theo phương *l* là đoạn thẳng *A'C'* hoặc *A'B'* hoặc *B'C'*.



Hình 2

2. Cả ba hình đã cho đều là hình biểu diễn của hình trụ với các phương chiếu và mặt phẳng chiếu khác nhau.

3. Cả bốn hình đã cho đều là hình biểu diễn của hình lăng trụ đứng có đáy là lục giác đều với các phương chiếu và mặt phẳng chiếu khác nhau.

4.

a) b)

Hình 3

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

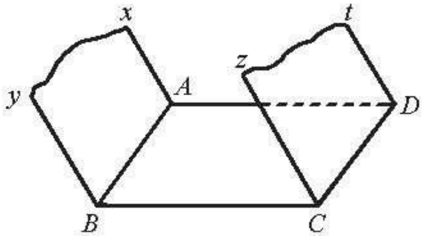
A. TRẮC NGHIỆM

1. C	**2.** A	**3.** A	**4.** A	**5.** B	**6.** B	**7.** A	**8.** A	**9.** C	**10.** D

B. TỰ LUẬN

1. Ta có *Cz* // *By* nên *Cz* // (*Ax*, *By*).

Do tứ giác *ABCD* là hình bình hành nên *CD* // *AB* do đó *CD* // (*Ax*, *By*). Mặt phẳng (*Cz*, *Dt*) chứa hai đường thẳng cắt nhau *Cz*, *CD* cùng song song với (*Ax*, *By*) nên (*Cz*, *Dt*) // (*Ax*, *By*).



Hình 1

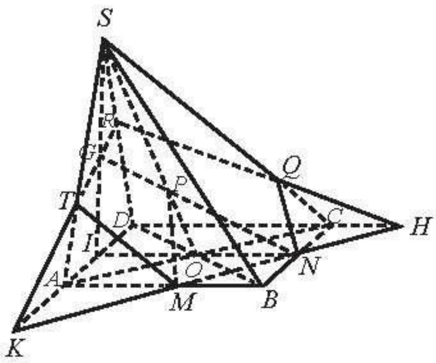
2. Ta thấy: $(MNP) \cap (ABCD) = MN$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $H = MN \cap DC$; $K = MN \cap AD$ và $I = NO \cap AD$.

Trong mặt phẳng (SIO), gọi $G = NP \cap SI$.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi $T = KG \cap SA$ và $R = KG \cap SD$.

Trong mặt phẳng (SDC), gọi $Q = RH \cap SC$.



Hình 2

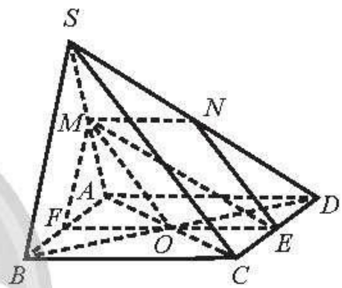
Khi đó, $(MNP) \cap (SBC) = NQ$, $(MNP) \cap (SDC) = QR$, $(MNP) \cap (SAD) = RT$, $(MNP) \cap (SAB) = TM$.

3. Gọi $O = AC \cap BD$, E là trung điểm của CD.

Ta có: $SC \parallel MO$, suy ra $SC \parallel (MOE)$; $AD \parallel OE$, suy ra $AD \parallel (MOE)$.

Khi đó, mặt phẳng (P) đã cho là (MOE).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $F = OE \cap AB$, suy ra $(MOE) \cap (ABCD) = EF$, $(MOE) \cap (SAB) = FM$.



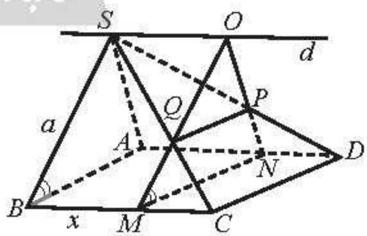
Hình 3

Vì $M \in (MOE) \cap (SAD)$ và $OE \parallel AD$ nên $(MOE) \cap (SAD) = Mx \parallel AD \parallel OE$.

Trong mặt phẳng (SAD), Mx cắt SD tại N. Do đó, $(MOE) \cap (SAD) = MN$ và $(MOE) \cap (SDC) = NE$.

4. a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $MN \parallel AB \parallel CD$, $N \in AD$.

Trong mặt phẳng (SAD), kẻ đường thẳng d đi qua S và $d \parallel AD$. Qua N vẽ đường thẳng song song với SA và cắt d tại O. Nối MO cắt SC tại Q và nối NO cắt SD tại P.



Hình 4

Khi đó $(\alpha) \cap (ABCD) = MN$; $(\alpha) \cap (SBC) = MQ$; $(\alpha) \cap (SCD) = QP$; $(\alpha) \cap (SAD) = NP$.

b) Các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp tạo thành tứ giác $MNPQ$.

Ta có $CD \parallel MN \parallel PQ$, suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang với $MN = AB = a$, $MQ = a - x$, $PQ = x$, $\widehat{QMN} = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

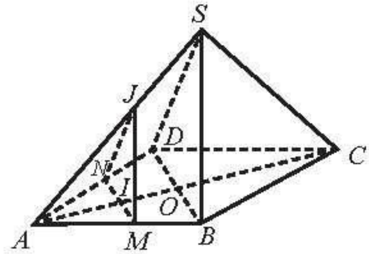
Khi đó, $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}MQ.\sin 60^\circ.(MN + PQ) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(a-x)\sqrt{3}}{2}(a+x) = \dfrac{(a^2 - x^2)\sqrt{3}}{4}$.

5. a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ MN đi qua I và $MN \parallel BD$ ($M \in AB, N \in AD$).

Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $JN \parallel SD$ ($J \in SA$).

Trong mặt phẳng (SAB), nối JM.

Khi đó, $(P) \cap (SAB) = JM$; $(P) \cap (SAD) = JN$; $(P) \cap (ABCD) = MN$.



Hình 5

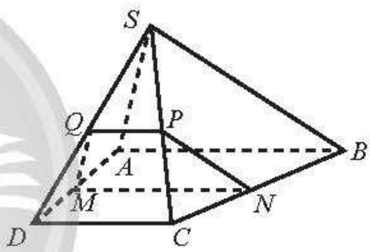
b) Các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$ tạo thành tam giác JMN.

Ta có $\Delta JMN \backsim \Delta SBD$ nên ΔJMN là tam giác đều.

Ta có $MN \parallel BD$, suy ra: $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow MN = \dfrac{2bx}{a} \Rightarrow S_{\Delta JMN} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

6. a) Các mặt phẳng $(ABCD)$, (SAD), (SCB), (SDC) cắt hai mặt phẳng song song (R) và (SAB) theo các cặp giao tuyến song song, suy ra $MN \parallel AB$, $MQ \parallel SA$, $NP \parallel SB$, $QP \parallel CD \parallel AB$.

Vì $QP \parallel MN$ nên $MNPQ$ là hình thang.



Hình 6

Ta có $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{CN}{CB} = \dfrac{NP}{SB}$ và $SA = SB$,

suy ra $MQ = NP$. Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Ta có $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA} \Rightarrow \dfrac{MQ}{a} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = a - x$.

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương V. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

BÀI 1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số liệu ghép nhóm

Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	…	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	…	n_k

Chú ý:

• Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \le j \le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

• Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

• Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm ***giá trị đại diện*** cho nhóm ấy.

Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.

• Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là ***độ dài*** của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

– Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \,.\, L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

– Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

2. Số trung bình

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Nhóm 1	Nhóm 2	...	Nhóm k
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính như sau:

$$\overline{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + ... + n_kc_k}{n}$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

3. Mốt

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó ***mốt của mẫu số liệu ghép nhóm***, kí hiệu là M_o, được xác định bởi công thức

$$M_o = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Chú ý: Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một bưu tá thống kê lại số bưu phẩm gửi đến một cơ quan mỗi ngày trong tháng 6/2022 ở bảng sau:

30	32	28	34	37	26	44	24	22	38
34	20	30	27	28	34	38	32	42	39
43	42	32	26	36	32	37	24	29	32

a) Tính số trung bình và mốt của mẫu số liệu trên.

b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số bưu phẩm	[20; 24]	[25; 29]	[30; 34]	[35; 39]	[40; 44]
Số ngày	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

a) Số trung bình của mẫu số liệu là 32,4. Mốt của mẫu số liệu là 32.

b) Bảng tần số ghép nhóm.

Số bưu phẩm	[20; 24]	[25; 29]	[30; 34]	[35; 39]	[40; 44]
Số ngày	4	6	10	6	4

c) Do số bưu phẩm là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại bảng tần số ghép nhóm như sau:

Số bưu phẩm	[19,5; 24,5)	[24,5; 29,5)	[29,5; 34,5)	[34,5; 39,5)	[39,5; 44,5)
Giá trị đại diện	22	27	32	37	42
Số ngày	4	6	10	6	4

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{4.22 + 6.27 + 10.32 + 6.37 + 4.42}{30} = 32.$$

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [29,5; 34,5).

Do đó: $u_m = 29{,}5$; $n_{m-1} = 6$; $n_m = 10$; $n_{m+1} = 6$; $u_{m+1} - u_m = 34{,}5 - 29{,}5 = 5$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là $M_o = 29{,}5 + \frac{10 - 6}{(10 - 6) + (10 - 6)} . 5 = 32$.

Bài 2. Kết quả khảo sát cân nặng của 20 quả cam Canh ở mỗi lô hàng 1 và lô hàng 2 được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[100; 110)	[110; 120)	[120; 130)	[130; 140)	[140; 150)
Số quả cam Canh ở lô hàng 1	1	4	5	4	6
Số quả cam Canh ở lô hàng 2	2	3	6	4	5

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam Canh ở lô hàng 1 và lô hàng 2.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam Canh ở lô hàng nào nặng hơn?

Giải

Ta có bảng thống kê số lượng cam Canh theo giá trị đại diện:

Cân nặng đại diện (g)	105	115	125	135	145
Số quả cam Canh ở lô hàng 1	1	4	5	4	6
Số quả cam Canh ở lô hàng 2	2	3	6	4	5

a) Cân nặng trung bình của mỗi quả cam Canh ở lô hàng 1 là

$$(1.105 + 4.115 + 5.125 + 4.135 + 6.145) : 20 = 130 \text{ (g)}.$$

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam Canh ở lô hàng 2 là

$$(2.105 + 3.115 + 6.125 + 4.135 + 5.145) : 20 = 128{,}5 \text{ (g)}.$$

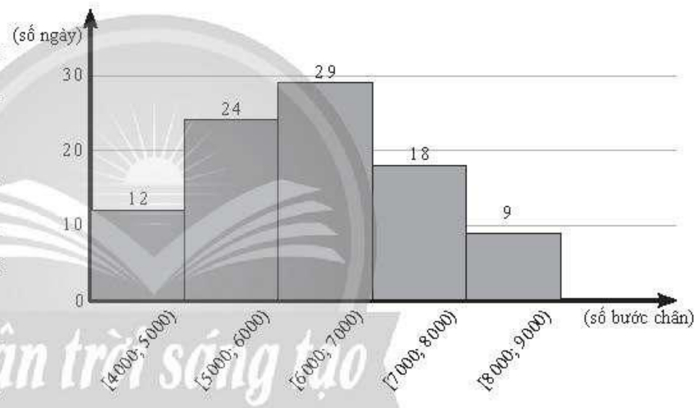
b) Nếu so sánh theo số trung bình thì số cam Canh ở lô hàng 1 nặng hơn số cam Canh ở lô hàng 2.

Bài 3. Thảo thống kê lại số bước chân bạn đi mỗi ngày trong 3 tháng. Kết quả được biểu diễn ở biểu đồ ở bên.

a) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm, kèm theo giá trị đại diện biểu diễn dữ liệu thống kê trên.

b) Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Số bước chân đi mỗi ngày trong 3 tháng



Giải

a) Bảng tần số ghép nhóm:

Số bước chân	Giá trị đại diện	Số ngày
[4000; 5000)	4500	12
[5000; 6000)	5500	24
[6000; 7000)	6500	29
[7000; 8000)	7500	18
[8000; 9000)	8500	9

b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{12.4500 + 24.5500 + 29.6500 + 18.7500 + 9.8500}{92} \approx 6369{,}57.$$

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [6 000; 7 000).

Do đó: $u_m = 6000; n_{m-1} = 24; n_m = 29; n_{m+1} = 18; u_{m+1} - u_m = 7000 - 6000 = 1000$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 6000 + \frac{29-24}{(29-24)+(29-18)} . 1\,000 = 6\,312{,}5.$$

Bài 4. Diện tích các tỉnh và thành phố khu vực Nam Bộ được thống kê ở bảng sau:

Tỉnh/ thành phố	Diện tích (km²)	Tỉnh/ thành phố	Diện tích (km²)
Bình Phước	6 877	Vĩnh Long	1 526
Tây Ninh	4 041	Đồng Tháp	3384
Bình Dương	2 695	An Giang	3537
Đồng Nai	5 864	Kiên Giang	6 349
Bà Rịa - Vũng Tàu	1 981	Cần Thơ	1 439
TP.Hồ Chí Minh	2 061	Hậu Giang	1 622
Long An	4 495	Sóc Trăng	3312
Tiền Giang	2 511	Bạc Liêu	2 669
Bến Tre	2 395	Cà Mau	5221
Trà Vinh	2 358		

(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

a) Hãy tính diện tích trung bình của mỗi tỉnh/thành phố khu vực Nam Bộ.

b) Dựa vào số liệu trên, hãy hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm về diện tích các tỉnh khu vực Nam Bộ theo mẫu sau:

Diện tích (km²)	[1 000; 2 500)	[2 500; 4 000)	[4000; 5 500)	[5 500; 7 000)
Số tỉnh/thành phố	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

a) Diện tích trung bình của mỗi tỉnh/thành phố khu vực Nam Bộ là

$(6\,877 + 4\,041 + 2\,695 + 5\,864 + 1\,981 + 2\,061 + 4\,495 + 2\,511 + 2\,395 + 2\,358 + 1\,526 +$
$+ 3\,384 + 3\,537 + 6\,349 + 1\,439 + 1\,622 + 3312 + 2\,669 + 5221) : 19 \approx 3386{,}16$ (km²).

b) Bảng tần số ghép nhóm:

Diện tích (km^2)	[1 000; 2 500)	[2 500; 4 000)	[4 000; 5 500)	[5 500; 7 000)
Số tỉnh/thành phố	7	6	3	3

c) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm giá trị đại diện của các nhóm như sau:

Diện tích (km^2)	[1 000; 2 500)	[2 500; 4 000)	[4 000; 5 500)	[5 500; 7 000)
Giá trị đại diện	1 750	3 250	4 750	6 250
Số tỉnh/ thành phố	7	6	3	3

Khi đó, số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x} = \frac{7.1750 + 6.3250 + 3.4750 + 3.6250}{19} \approx 3\,407{,}89.$$

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [1 000; 2 500).

Do đó: $u_m = 1\,000$; $n_{m-1} = 0$; $n_m = 7$; $n_{m+1} = 6$; $u_{m+1} - u_m = 2\,500 - 1\,000 = 1\,500$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 1\,000 + \frac{7-0}{(7-0)+(7-6)}.1\,500 = 2\,312{,}5.$$

C. BÀI TẬP

1. Nhân ngày hội đọc sách, các học sinh của một trường trung học phổ thông mang sách cũ đến tặng thư viện trường và trao đổi với các bạn học sinh khác. Bảng sau thống kê số sách cũ mà các bạn học sinh lớp 11B mang đến trường.

Số sách	[1; 3]	[4; 6]	[7; 9]	[10; 12]	[13; 15]
Số học sinh	5	14	10	8	3

Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

2. Một kĩ thuật viên ghi lại cân nặng của 20 chi tiết máy ở bảng sau (đơn vị: gam):

5,63	5,58	5,42	5,58	5,56	5,54	5,55	5,40	5,60	5,56
5,46	5,51	5,58	5,48	5,61	5,50	5,54	5,64	5,43	5,63

a) Tính cân nặng trung bình của mỗi chi tiết máy.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên với nhóm đầu tiên là [5,40; 5,45) và ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

3. Bảng sau thống kê số lượt chở khách mỗi ngày của một lái xe taxi trong 30 ngày.

15	13	7	5	18	13	11	9	10	8	14	11	16	10	9
13	11	12	13	15	12	13	6	8	17	13	6	18	12	13

a) Hãy tính số trung bình và mốt của mẫu số liệu trên.

b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên với nhóm đầu tiên là [4,5; 7,5).

c) Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm đó.

4. Bảng sau thống kê cân nặng (đơn vị: kg) của một số con ngan đực 88 ngày tuổi ở một trang trại.

4,60	4,62	4,64	4,65	4,67	4,67	4,68	4,68	4,70	4,70
4,70	4,70	4,71	4,71	4,72	4,73	4,74	4,76	4,77	4,77
4,77	4,78	4,78	4,80	4,82	4,84	4,84	4,85	4,87	4,89
4,89	4,90	4,92	4,92	4,93	4,94	4,94	4,95	4,97	4,97
4,97	4,99	4,99	5,01	5,02	5,03	5,04	5,05	5,06	5,07

a) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên với nhóm đầu tiên là [4,6; 4,7).

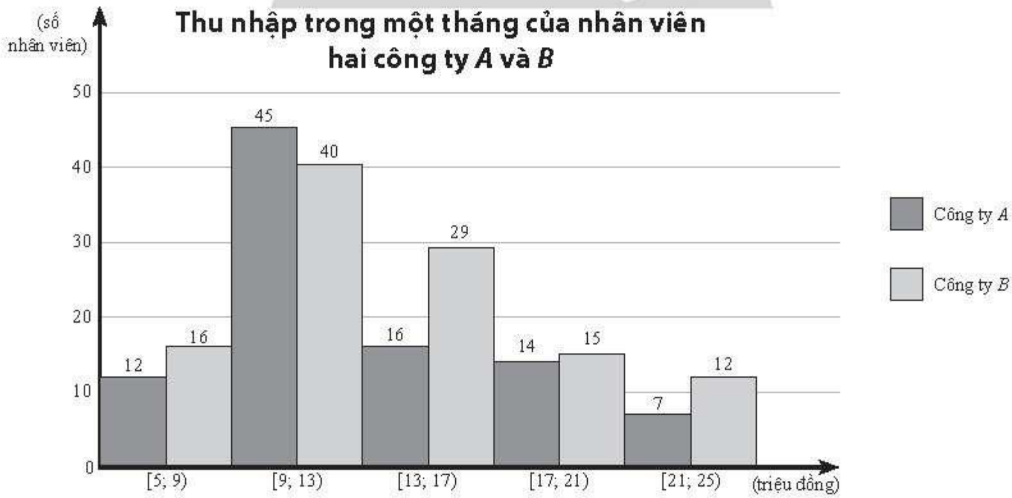
b) Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

5. Bảng sau thống kê chiều cao (đơn vị: cm) của một số cây giống sau khi nảy mầm được 2 tuần.

Chiều cao (cm)	[6,2; 6,7)	[6,7; 7,2)	[7,2; 7,7)	[7,7; 8,2)	[8,2; 8,7)
Số cây	10	21	28	12	9

Hãy ước lượng chiều cao trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

6. Thống kê lại thu nhập trong một tháng của nhân viên hai công ty A và B (đơn vị: triệu đồng) được thể hiện trong biểu đồ dưới đây.



Hãy so sánh thu nhập trung bình của nhân viên hai công ty theo số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm.

BÀI 2. TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trung vị

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

2. Tứ phân vị

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2, cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot \left(u_{m+1} - u_m\right).$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3, ta thực hiện như sau:

• Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
• n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
• $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1}$.
Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j).$$

Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

a) Hãy ước lượng số trung bình, mốt và trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Hỏi công ty nên gửi đến các hộ tiêu thụ từ bao nhiêu mét khối nước trở lên?

Giải

a) Cỡ mẫu $n = 160$.

Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)	[15; 18)
Giá trị đại diện	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là

$$\overline{x} = \frac{1}{160}(24 \,.\, 4{,}5 + 57 \,.\, 7{,}5 + 42 \,.\, 10{,}5 + 29 \,.\, 13{,}5 + 8 \,.\, 16{,}5) = 9{,}375.$$

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là nhóm [6; 9).

Do đó: $u_m = 6$; $n_m = 57$; $n_{m-1} = 24$; $n_{m+1} = 42$; $u_{m+1} = 9$.

Mốt của mẫu số liệu là $M_o = 6 + \frac{(57-24)}{(57-24)+(57-42)}.(9-6) = 8{,}0625.$

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{160}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, \ldots, x_{24} \in [3; 6); x_{25}, \ldots, x_{81} \in [6; 9); x_{82}, \ldots, x_{123} \in [9; 12);$

$x_{124}, \ldots, x_{152} \in [12; 15); x_{153}, \ldots, x_{160} \in [15; 18).$

Cỡ mẫu $n = 160$ là số chẵn nên trung vị là $M_e = \frac{1}{2}(x_{80} + x_{81})$. Do x_{80} và x_{81} thuộc nhóm [6; 9) nên trung vị của mẫu số liệu là $M_e = 6 + \frac{\frac{160}{2} - 24}{57}.(9-6) \approx 8{,}95.$

b) 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất có lượng nước tiêu thụ không nhỏ hơn Q_3, với Q_3 là tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{160}$ là $\frac{1}{2}(x_{120} + x_{121})$. Do x_{120} và x_{121} thuộc nhóm [9; 12) nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là

$$Q_3 = 9 + \frac{\frac{160.3}{4} - (24+57)}{42}.(12-9) \approx 11{,}79.$$

Vậy công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ 11,79 m^3 nước trở lên.

Bài 2. Bảng sau thống kê khối lượng một số quả măng cụt được lựa chọn ngẫu nhiên trong một thùng hàng.

Khối lượng (gam)	[80; 82)	[82; 84)	[84; 86)	[86; 88)	[88; 90)
Số quả	18	20	24	15	13

a) Hãy ước lượng số trung bình, mốt và trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Người ta muốn chia măng cụt trong thùng ra làm ba loại theo cân nặng, bao gồm: loại nhỏ, loại vừa và loại to. Các loại này lần lượt chiếm khoảng 25%, 50% và 25% số măng cụt trong thùng. Hãy xác định ngưỡng cân nặng để phân loại quả.

Giải

a) Cỡ mẫu $n = 90$.

Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Khối lượng (gam)	[80; 82)	[82; 84)	[84; 86)	[86; 88)	[88; 90)
Khối lượng đại diện	81	83	85	87	89
Số quả	18	20	24	15	13

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$\overline{x} = \frac{1}{90}(18.81 + 20.83 + 24.85 + 15.87 + 13.89) = \frac{254}{3} \approx 84{,}67.$$

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu là nhóm [84; 86).

Do đó: $u_m = 84$; $n_m = 24$; $n_{m-1} = 20$; $n_{m+1} = 15$; $u_{m+1} = 86$.

Mốt của mẫu số liệu là $M_o = 84 + \dfrac{(24-20)}{(24-20)+(24-15)}.(86-84) \approx 84{,}62.$

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{90}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, \ldots, x_{18} \in [80; 82)$; $x_{19}, \ldots, x_{38} \in [82; 84)$; $x_{39}, \ldots, x_{62} \in [84; 86)$;

$x_{63}, \ldots, x_{77} \in [86; 88)$; $x_{78}, \ldots, x_{90} \in [88; 90)$.

Cỡ mẫu $n = 90$ là số chẵn nên trung vị là $M_e = \dfrac{1}{2}(x_{45} + x_{46})$. Do x_{45} và x_{46} thuộc nhóm [84; 86) nên trung vị của mẫu số liệu là

$$M_e = 84 + \frac{\frac{90}{2} - (18+20)}{24}.(86-84) \approx 84{,}58.$$

b) Gọi Q_1, Q_3 lần lượt là tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của mẫu số liệu. Theo đề bài, ta có:

Măng cụt loại nhỏ có cân nặng nhỏ hơn Q_1.

Măng cụt loại vừa có cân nặng trong $[Q_1; Q_3)$.

Măng cụt loại to có cân nặng không nhỏ hơn Q_3.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{90}$ là $x_{23} \in [82; 84)$. Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{90}$ là $x_{68} \in [86; 88)$.

Do đó, tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 82 + \dfrac{\dfrac{90}{4} - 18}{20}.(84 - 82) = 82,45$;

tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = 86 + \dfrac{\dfrac{90.3}{4} - (18 + 20 + 24)}{15}.(88 - 86) \approx 86,73$.

Vậy măng cụt loại nhỏ có khối lượng (tính theo gam) thuộc [80; 82,45).

Măng cụt loại vừa có khối lượng (tính theo gam) thuộc [82,45; 86,73).

Măng cụt loại to có khối lượng (tính theo gam) thuộc [86,73; 90).

Bài 3. Thời gian sử dụng điện thoại trong một ngày của 30 sinh viên được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: phút).

85	195	187	198	43	223	280	71	205	277
298	142	162	89	167	122	175	168	148	253
234	187	85	193	224	233	117	81	39	85

a) Tìm các tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là [0; 60). Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Giải

a) Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm ta được:

39; 43; 71; 81; 85; 85; 85; 89; 117; 122; 142; 148; 162; 167; 168; 175; 187; 187; 193; 195; 198; 205; 223; 224; 233; 234; 253; 277; 280; 298.

Cỡ mẫu $n = 30$ là số chẵn nên trung vị của mẫu số liệu là

$$Q_2 = \frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) = \frac{1}{2}(168 + 175) = 171,5.$$

Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = x_8 = 89$.

Tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = x_{23} = 223$.

b) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu như sau:

Thời gian (phút)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)
Số sinh viên	2	7	7	10	4

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{30}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2 \in [0; 60)$; $x_3, \ldots, x_9 \in [60; 120)$; $x_{10}, \ldots, x_{16} \in [120; 180)$; $x_{17}, \ldots, x_{26} \in [180; 240)$; $x_{27}, \ldots, x_{30} \in [240; 300)$.

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})$. Do x_{15} và x_{16} thuộc nhóm [120; 180) nên tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 120 + \frac{\frac{30}{2} - (2+7)}{7}.(180 - 120) = \frac{1200}{7} \approx 171{,}43.$$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu là $x_8 \in [60; 120)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = 60 + \frac{\frac{30}{4} - 2}{7}.(120 - 60) = \frac{750}{7} \approx 107{,}14.$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $x_{23} \in [180; 240)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = 180 + \frac{\frac{3.30}{4} - (2+7+7)}{10}.(240 - 180) = 219.$

Bài 4. Một nhóm gồm 45 học sinh làm một bài kiểm tra trắc nghiệm gồm 40 câu hỏi. Số câu trả lời đúng của mỗi bạn được ghi lại ở bảng sau:

24	35	37	24	30	23	21	39	28	20	32	37	17	40	34
27	34	30	21	26	26	38	37	16	35	19	20	22	25	38
34	29	39	40	36	18	31	24	36	33	24	24	36	26	37

a) Tìm các tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số câu trả lời đúng	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]
Số học sinh	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Giải

a) Mẫu số liệu đã cho được sắp xếp theo thứ tự không giảm như sau:

16; 17; 18; 19; 20; 20; 21; 21; 22; 23; 24; 24; 24; 24; 24;

25; 26; 26; 26; 27; 28; 29; 30; 30; 31; 32; 33; 34; 34; 34;

35; 35; 36; 36; 36; 37; 37; 37; 37; 38; 38; 39; 39; 40; 40.

Cỡ mẫu là $n = 45$ là số lẻ nên trung vị của mẫu số liệu là $Q_2 = x_{23} = 30$.

Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}) = \frac{1}{2}(24 + 24) = 24$.

Tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = \frac{1}{2}(x_{34} + x_{35}) = \frac{1}{2}(36 + 36) = 36$.

b) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Số câu trả lời đúng	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]
Số học sinh	6	10	8	8	13

c) Do số câu trả lời đúng của học sinh là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại bảng số liệu như sau:

Số câu trả lời đúng	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)	[25,5; 30,5)	[30,5; 35,5)	[35,5; 40,5)
Số học sinh	6	10	8	8	13

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{45}$ là số câu trả lời đúng của 45 học sinh được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, \ldots, x_6 \in [15,5; 20,5)$; $x_7, \ldots, x_{16} \in [20,5; 25,5)$; $x_{17}, \ldots, x_{24} \in [25,5; 30,5)$; $x_{25}, \ldots, x_{32} \in [30,5; 35,5)$; $x_{33}, \ldots, x_{45} \in [35,5; 40,5)$.

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{45}$ là $x_{23} \in [25,5; 30,5)$. Do đó, tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 25,5 + \frac{\frac{45}{2} - (6+10)}{8}.(30,5 - 25,5) = 29,5625.$$

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{45}$ là $\frac{1}{2}(x_{11} + x_{12})$. Do x_{11} và x_{12} thuộc nhóm [20,5; 25,5) nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 20,5 + \frac{\frac{45}{4} - 6}{10}.(25,5 - 20,5) = 23,125.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{45}$ là $\frac{1}{2}(x_{34} + x_{35})$. Do x_{34} và x_{35} thuộc nhóm [35,5; 40,5) nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 35,5 + \frac{\frac{3.45}{4} - (6 + 10 + 8 + 8)}{13}.(40,5 - 35,5) \approx 36,173.$$

C. BÀI TẬP

1. Một trang báo điện tử thống kê thời gian người sử dụng đọc thông tin trên trang trong mỗi lần truy cập ở bảng sau:

Thời gian đọc (phút)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số lượt truy cập	45	34	23	18	5

Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

2. Người ta thống kê tốc độ của một số xe ô tô di chuyển qua một trạm kiểm soát trên đường cao tốc trong một khoảng thời gian ở bảng sau:

Tốc độ (km/h)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)
Số xe	5	12	18	24	19

Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

3. Thâm niên công tác của các công nhân hai nhà máy *A* và *B*.

Thâm niên công tác (năm)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)
Số công nhân nhà máy *A*	35	13	12	12	8
Số công nhân nhà máy *B*	14	26	24	11	5

a) Hãy so sánh thâm niên công tác của nhân viên hai nhà máy theo số trung bình và trung vị.

b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của hai mẫu số liệu ghép nhóm trên.

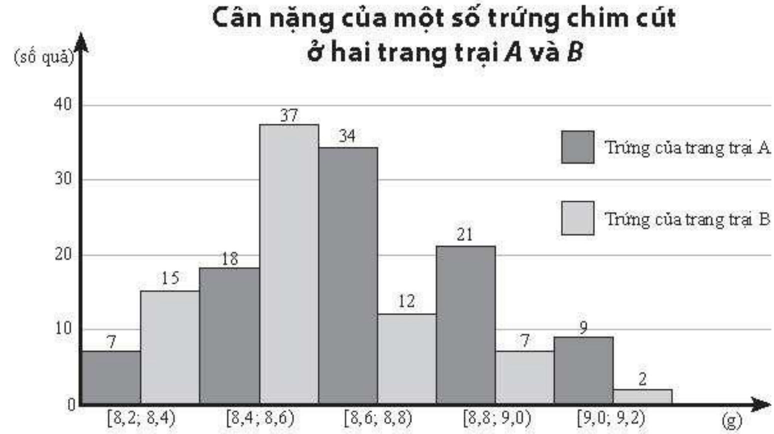
4. Thầy giáo thống kê lại số lần kéo xà đơn của các học sinh nam khối 11 ở bảng sau:

Số lần	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số học sinh	35	54	32	17	5

a) Hãy ước lượng số trung bình, mốt và trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Thầy giáo dự định chọn 25% học sinh có số lần kéo thấp nhất để bồi dưỡng thể lực thêm. Thầy giáo nên chọn học sinh có thành tích kéo xà đơn dưới bao nhiêu lần để bồi dưỡng thể lực?

5. Kết quả kiểm tra cân nặng của một số quả trứng chim cút được lựa chọn ngẫu nhiên ở hai trang trại chăn nuôi A và B được biểu diễn ở biểu đồ sau (đơn vị: g).



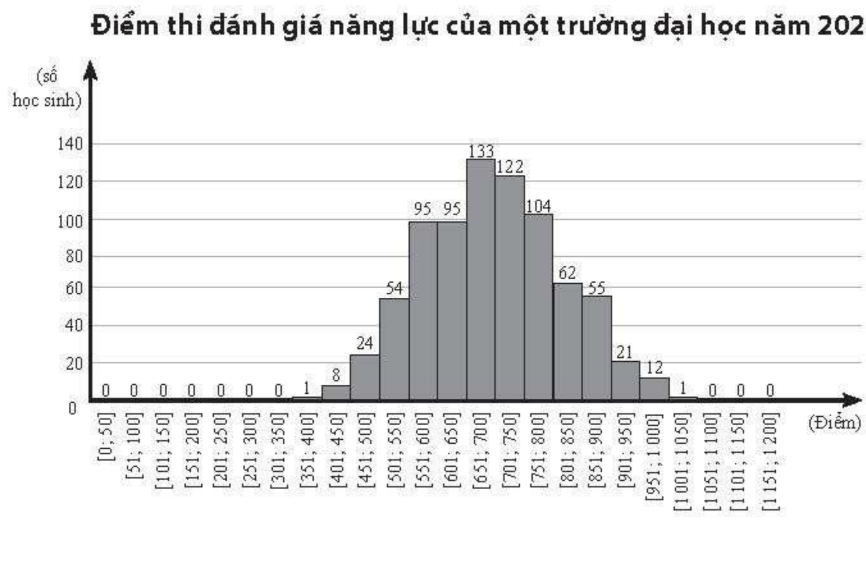
a) Hãy so sánh cân nặng của trứng chim cút của hai trang trại A và B theo số trung bình và trung vị.

b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của cân nặng trứng chim cút của trang trại A.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM

Trả lời các câu hỏi 1 – 5 dựa trên đồ thị thể hiện điểm thi đánh giá năng lực của một trường đại học vào năm 2020 dưới đây.



1. Tổng số học sinh tham gia kì thi đánh giá năng lực trên là

A. 780. B. 787. C. 696. D. 697.

2. Giá trị đại diện cho nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 625,5. B. 675,5. C. 725,5. D. 775,5.

3. Giá trị đại diện cho nhóm chứa trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 625,5. B. 675,5. C. 725,5. D. 775,5.

4. Giá trị đại diện cho nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 625,5. B. 675,5. C. 725,5. D. 775,5.

5. Giá trị đại diện cho nhóm chứa tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 625,5. B. 675,5. C. 725,5. D. 775,5.

Trả lời các câu hỏi 6 – 10 dựa trên bảng số liệu về chiều cao của 100 học sinh một trường trung học phổ thông dưới đây.

Nhóm	**Chiều cao (cm)**	**Số học sinh**
1	[150; 153)	7
2	[153; 156)	13
3	[156; 159)	40
4	[159; 162)	21
5	[162; 165)	13
6	[165; 168)	6

6. 160,5 là giá trị đại diện cho nhóm

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

7. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là

A. 157,76. B. 158,25. C. 157,5. D. 160,28.

8. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 157,76. B. 157,25. C. 158,25. D. 160,45.

9. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là

A. 156,25. B. 157,5. C. 156,38. D. 157,54.

10. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

A. 160,52. B. 161,52. C. 161,14. D. 162,25.

B. TỰ LUẬN

1. Một công ty bảo hiểm thống kê lại độ tuổi các khách hàng mua bảo hiểm xe ô tô ở bảng sau:

Độ tuổi	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)
Số khách hàng	25	38	62	42	37	29

Hãy ước lượng số trung bình, mốt và các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

2. Các bạn học sinh một lớp thống kê số túi nhựa mà gia đình bạn đó sử dụng trong một tuần. Kết quả được tổng hợp lại ở bảng sau:

Số túi	[5; 9]	[10; 14]	[15; 19]	[20; 24]	[25; 29]
Số gia đình	8	15	12	7	2

a) Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu trên.

b) Cô giáo dự định trao danh hiệu "Gia đình xanh" cho 25% gia đình các bạn sử dụng ít túi nhựa nhất. Cô giáo nên trao danh hiệu cho các gia đình dùng không quá bao nhiêu túi nhựa?

3. Bảng sau thống kê doanh số bán hàng của các nhân viên một trung tâm thương mại trong một ngày.

Doanh số (triệu đồng)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số nhân viên	4	8	12	7	5

a) Hãy ước lượng số trung bình, mốt và trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Trung tâm thương mại dự định sẽ thưởng cho 25% số nhân viên có doanh số bán hàng cao nhất. Theo mẫu số liệu trên, trung tâm thương mại nên khen thưởng các nhân viên có doanh số bán hàng ít nhất là bao nhiêu?

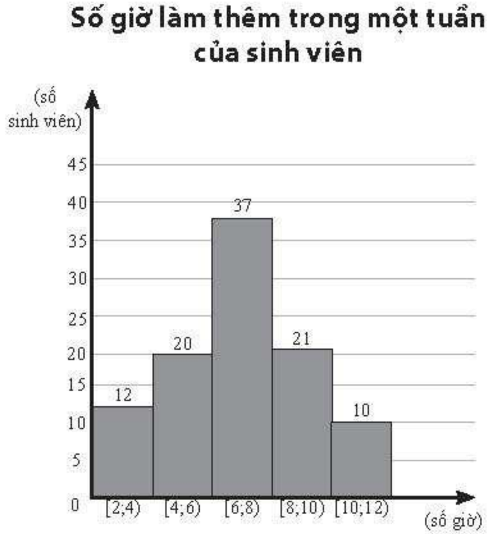
4. Một cửa hàng sách thống kê số truyện thiếu nhi bán được trong hai tháng ở bảng sau:

Số sách	[14; 20]	[21; 27]	[28; 34]	[35; 41]	[42; 48]
Số ngày	5	7	25	15	9

Hãy ước lượng số trung bình, mốt và các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

5. Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ bên.

Hãy ước lượng số trung bình, mốt và các tứ phân vị của số liệu đó.



LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Bảng số liệu ghép nhóm hiệu chỉnh như sau:

Số sách	[0,5; 3,5)	[3,5; 6,5)	[6,5; 9,5)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)
Số học sinh	5	14	10	8	3

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 7,25.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là $\frac{145}{26} \approx 5,58$.

2. a) Cân nặng trung bình của mỗi chi tiết máy là 5,54 g.

b) Bảng số liệu ghép nhóm của mẫu số liệu đã cho như sau:

Cân nặng	[5,40; 5,45)	[5,45; 5,50)	[5,50; 5,55)	[5,55; 5,60)	[5,60; 5,65)
Số chi tiết	3	2	4	6	5

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 5,545.

3. a) Số trung bình mẫu số liệu là 11,7. Mốt của mẫu số liệu là 13.

b) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đã cho như sau:

Số lượt khách	[4,5; 7,5)	[7,5; 10,5)	[10,5; 13,5)	[13,5; 16,5)	[16,5; 19,5)
Số ngày	4	6	13	4	3

c) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 11,6.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là $\frac{189}{16} \approx 11,8$.

4. a) Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu đã cho như sau:

Cân nặng (kg)	[4,6; 4,7)	[4,7; 4,8)	[4,8; 4,9)	[4,9; 5,0)	[5,0; 5,1)
Số con ngan	8	15	8	12	7

b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 4,84. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là 4,75.

5. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là khoảng 7,38. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là khoảng 7,35.

6. Ta lập bảng thống kê thu nhập của nhân viên hai công ty như sau:

Thu nhập (đơn vị: triệu đồng)	Giá trị đại diện	Số nhân viên công ty A	Số nhân viên công ty B
[5; 9)	7	12	16
[9; 13)	11	45	40
[13; 17)	15	16	29
[17; 21)	19	14	15
[21; 25)	23	7	12

Số trung bình thu thập trong một tháng của nhân viên công ty A là

$$\overline{x}_A = \frac{12.7+45.11+16.15+14.19+7.23}{94} \approx 13,26 \text{ (triệu đồng).}$$

Số trung bình thu thập trong một tháng của nhân viên công ty B là

$$\overline{x}_B = \frac{16.7+40.11+29.15+15.19+12.23}{112} \approx 13,82 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu so sánh theo số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm thì thu nhập của nhân viên công ty A thấp hơn thu nhập của nhân viên công ty B.

• Ta ước lượng mốt của thu nhập của nhân viên công ty A:

Nhóm mốt của mẫu số liệu là nhóm [9;13).

Do đó: $u_m = 9; n_{m-1} = 12; n_m = 45; n_{m+1} = 16; u_{m+1} - u_m = 13 - 9 = 4$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 9 + \frac{45-12}{(45-12)+(45-16)}.4 = \frac{345}{31} \approx 11,13.$$

• Ta ước lượng mốt của thu nhập của nhân viên công ty B:

Nhóm mốt của mẫu số liệu là nhóm [9; 13).

Do đó: $u_m = 9; n_{m-1} = 16; n_m = 40; n_{m+1} = 29; u_{m+1} - u_m = 13 - 9 = 4$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 9 + \frac{40-16}{(40-16)+(40-29)}.4 = \frac{411}{35} \approx 11,74.$$

Vậy nếu so sánh theo mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, thu nhập của nhân viên công ty A thấp hơn thu nhập của nhân viên công ty B.

BÀI 2. TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. $Q_1 = \frac{25}{18}$; $Q_2 = \frac{103}{34}$; $Q_3 = \frac{243}{46}$.

2. $Q_1 = \frac{3\,085}{36}$; $Q_2 = \frac{545}{6}$; $Q_3 = \frac{4\,555}{48}$.

3. a) So sánh theo số trung bình: $\overline{x}_A = 9,0625$; $\overline{x}_B = 10,4375$, suy ra $\overline{x}_A < \overline{x}_B$.

So sánh theo trung vị: $M_e(A) = \frac{90}{13}$; $M_e(B) = 10$, $M_e(A) < M_e(B)$.

b) $Q_1(A) = \frac{20}{7}$, $Q_3(A) = 15$; $Q_1(B) = \frac{80}{13}$, $Q_3(B) = \frac{85}{6}$.

4. a) $\overline{x} = \frac{2\,089}{143}$; $M_o = \frac{1051}{82}$; $M_e = \frac{1499}{108}$.

b) $Q_1 = \frac{797}{72} \approx 11,07$. Thầy giáo nên chọn các bạn có thành tích kéo xà dưới 12 lần để bồi dưỡng thể lực thêm.

5. a) Từ biểu đồ đã cho, ta lập được bảng số liệu ghép nhóm sau:

Cân nặng (gam)	[8,2; 8,4)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)
Số quả trứng của trại A	7	18	34	21	9
Số quả trứng của trại B	15	37	12	7	2

Từ đó, ta có bảng thống kê số quả trứng chim cút của hai trang trại theo giá trị đại diện như sau:

Cân nặng đại diện (gam)	8,3	8,5	8,7	8,9	9,1
Số quả trứng của trang trại A	7	18	34	21	9
Số quả trứng của trang trại B	15	37	12	7	2

• Đối với trang trại A:

Cỡ mẫu $n_A = 89$.

Cân nặng trung bình của mỗi quả trứng của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}_A = \frac{8,3.7 + 8,5.18 + 8,7.34 + 8,9.21 + 9,1.9}{89} \approx 8,72 \text{ (g)}.$$

Trung vị của dãy số liệu là số liệu thứ 45 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm [8,6; 8,8).

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e(A) = 8,6 + \frac{\frac{89}{2} - 25}{34}.(8,8 - 8,6) \approx 8,71.$$

• Đối với trang trại B:

Cỡ mẫu $n_B = 73$.

Cân nặng trung bình của mỗi quả trứng của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\overline{x}_B = \frac{8,3.15 + 8,5.37 + 8,7.12 + 8,9.7 + 9,1.2}{73} \approx 8,55.$$

Trung vị của dãy số liệu là số liệu thứ 37 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm [8,4; 8,6).

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e(B) = 8,4 + \frac{\frac{73}{2} - 15}{37}.(8,6 - 8,4) \approx 8,52.$$

Ta thấy $\overline{x}_A > \overline{x}_B$ và $M_e(A) > M_e(B)$. Vậy khi so sánh theo số trung bình hay theo trung vị, cân nặng của trứng chim cút của trang trại A đều lớn hơn cân nặng của trứng chim cút của trang trại B.

b) Đối với trang trại A:

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là trung bình cộng của số liệu thứ 22 và 23 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm [8,4; 8,6), nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1(A) = 8{,}4 + \frac{\frac{1.89}{4} - 7}{18}.(8{,}6 - 8{,}4) \approx 8{,}57.$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là trung bình cộng của số liệu thứ 67 và 68 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm [8,8; 9,0), nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3(A) = 8{,}8 + \dfrac{\frac{3.89}{4} - 59}{21}.(9{,}0 - 8{,}8) \approx 8{,}87$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A. TRẮC NGHIỆM

1. B	**2.** B	**3.** B	**4.** A	**5.** D	**6.** C	**7.** A	**8.** C	**9.** C	**10.** C

B. TỰ LUẬN

1. $\overline{x} \approx 39{,}97$; $M_o = \dfrac{415}{11}$; $Q_1 = \dfrac{275}{8}$, $Q_2 = M_e = \dfrac{4875}{124}$, $Q_3 = \dfrac{6815}{148}$.

2. a) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là khoảng 14,73.

Mốt của mẫu số liệu là 13.

b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = \dfrac{21}{2} = 10{,}5$.

Do đó, cô giáo nên trao danh hiệu cho gia đình các bạn dùng không quá 10 túi nhựa.

3. a) $\overline{x} = \dfrac{815}{18}$; $M_o = \dfrac{400}{9}$; $M_e = 45$.

b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = \dfrac{380}{7} \approx 54{,}29$.

Do đó, trung tâm thương mại nên khen thưởng các nhân viên có doanh số bán hàng một ngày ít nhất là 54,29 triệu đồng.

4. $\overline{x}=\dfrac{2003}{61}$; $M_o=32$; $Q_1=28{,}41$; $Q_2=M_e=32{,}68$; $Q_3=\dfrac{4967}{90}$.

5. Từ mẫu số liệu ghép nhóm, ta có bảng thống kê số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên như sau:

Số giờ làm thêm	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số giờ làm thêm đại diện	3	5	7	9	11
Số sinh viên	12	20	37	21	10

Cỡ mẫu $n=100$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$\overline{x}=\frac{3.12+5.20+7.37+9.21+11.10}{100}=6{,}94.$$

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu trên là nhóm [6; 8).

Do đó: $u_m=6$; $n_m=37$, $n_{m-1}=20$; $n_{m+1}=21$; $u_{m+1}=8$.

Vậy mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o=6+\frac{37-20}{(37-20)+(37-21)}.(8-6)\approx 7{,}03.$$

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{50}+x_{51})$. Do x_{50} và x_{51} thuộc nhóm [6; 8) nên $Q_2=6+\dfrac{\frac{2.100}{4}-32}{37}.(8-6)\approx 6{,}97$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{25}+x_{26})$. Do x_{25} và x_{26} thuộc nhóm [4; 6) nên $Q_1=4+\dfrac{\frac{1.100}{4}-12}{20}.(6-4)=5{,}3$.

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \ldots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{75}+x_{76})$. Do x_{75} và x_{76} thuộc nhóm [8; 10) nên $Q_3=8+\dfrac{\frac{3.100}{4}-69}{21}.(10-8)\approx 8{,}57$.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản

Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung

Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: ĐẶNG THỊ THUÝ – NGUYỄN THỊ THANH DUYÊN

Thiết kế sách: CAO TIẾN DŨNG

Trình bày bìa: TÔNG THANH THẢO

Sửa bản in: ĐẶNG THỊ THUÝ – HOÀNG THỊ THU DUNG

NGUYỄN THỊ THANH DUYÊN

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

BÀI TẬP TOÁN 11 – TẬP MỘT (Chân trời sáng tạo)

Mã số: G2BHYT001M23

In.........bản, (QĐ in số....) Khổ 17 x 24 cm.

Đơn vị in:........................

Cơ sở in:........................

Số ĐKXB: 10-2023/CXBIPH/37-2157/GD

Số QĐXB: ... ngày... tháng... năm 20...

In xong và nộp lưu chiểu tháng... năm 20...

Mã số ISBN: Tập 1: 978-604-0-35239-2

Tập 2: 978-604-0-35240-8

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ BÀI TẬP LỚP 11 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Bài tập
   TOÁN 11, TẬP MỘT
2. Bài tập
   TOÁN 11, TẬP HAI
3. Bài tập
   NGỮ VĂN 11, TẬP MỘT
4. Bài tập
   NGỮ VĂN 11, TẬP HAI
5. TIẾNG ANH 11
   Friends Global - Workbook
6. Bài tập
   LỊCH SỬ 11
7. Bài tập
   ĐỊA LÍ 11
8. Bài tập
   VẬT LÍ 11
9. Bài tập
   HOÁ HỌC 11
10. Bài tập
    SINH HỌC 11
11. Bài tập
    HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 11 (1)
12. Bài tập
    HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 11 (2)
13. Bài tập
    GIÁO DỤC KINH TẾ VÀ PHÁP LUẬT 11
14. Bài tập
    GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG VÀ AN NINH 11

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-35239-2

Giá: .... đ