MỤC LỤC

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Giải phương trình nghiệm nguyên chứa các ẩn $x, y, z, \ldots$ là tìm tất cả các bộ số nguyên $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ thỏa mãn phương trình đó. Khi giải phương trình nghiệm nguyên, do phải lợi dụng các tính chất của tập hợp $\mathbb{Z}$ nên ngoài các biến đổi tương đương, ta còn dùng đến các biến đổi mà các giá trị của ẩn chỉ thỏa mãn điều kiện cần (chứ chưa phải điều kiện cần và đủ) của nghiệm. Trong trường hợp này, ta cần kiểm tra lại các giá trị đó bằng cách thử vào phương trình đã cho. Do đó, việc giải phương trình nghiệm nguyên thường gồm hai bước:

- *Bước 1.* Giả sử phương trình có nghiệm nguyên $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$, ta suy ra các ẩn phải nhận các giá trị nào đó.
- *Bước 2.* Thử lại các giá trị đó của ẩn để khẳng định tập nghiệm của phương trình.

Để đơn giản, trong nhiều bài toán ở cuốn sách này, bước 1 không tách riêng một cách tường minh và các giá trị $x_0, y_0, z_0, \ldots$ vẫn được biểu thị bởi $x, y, z, \ldots$ Với các bài toán mà các biến đổi đều tương đương, ta không cần bước 2. Một phương trình nghiệm nguyên có thể vô nghiệm, hoặc hữu hạn nghiệm, hoặc vô số nghiệm. Trong trường hợp phương trình có vô số nghiệm nguyên, các nghiệm nguyên của phương trình thường được biểu thị bởi một công thức có chứa tham số là một số nguyên.

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP XÉT TÍNH CHIA HẾT

A PHƯƠNG PHÁP PHÁT HIỆN TÍNH CHIA HẾT CỦA MỘT ẨN

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$3x + 17y = 159 \tag{1}$$

Giả sử $x,\ y$ là các số nguyên thỏa mãn phương trình (1). Ta thấy 159 và $3x$ đều chia hết cho 3 nên $17y \,\vdots\, 3$, suy ra $y \,\vdots\, 3$ (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau). Đặt $y = 3t\ (t \in \mathbb{Z})$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$3x + 17.3t = 159 \Leftrightarrow x + 17t = 53.$$

Do đó $\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{Z}).$ (2)

Thử lại, thay các biểu thức của x và y ở (2) vào (1) thì phương trình được nghiệm đúng. Vậy phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên $(x;\ y)$ được biểu thị bởi công thức

$$\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} (t \text{ là số nguyên tùy ý}).$$

B PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH ƯỚC SỐ

Ta gọi *phương trình ước số* là phương trình có vế trái là một tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là một hằng số nguyên. Bằng cách tìm ước của hằng số đó, ta tìm được nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của phương trình

$$xy - x - y = 2.$$

Biến đổi phương trình thành

$$\begin{aligned} x(y-1) - y = 2 &\Leftrightarrow x(y-1) - (y-1) = 2 + 1 \\ &\Leftrightarrow (y-1)(x-1) = 3. \end{aligned}$$

Vì x và y là các số nguyên nên $x-1$ và $y-1$ là các số nguyên và là ước của 3. Do vài trò bình đẳng của x và y trong phương trình nên có thể giả sử rằng $x \geq y$, khi đó $x-1 \geq y-1$. Lúc đó ta có:

$$\begin{cases} x-1=3 \\ y-1=1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-3. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=0 \\ y=-2. \end{cases}$$

Các nghiệm nguyên $(x;\ y)$ của phương trình là $(4;\ 2),\ (2;\ 4),\ (0;\ 2), (-2;\ 0)$.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$2xy - x + y = 3$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2xy - x + y = 3 &\Leftrightarrow 4xy - 2x + 2y = 6 \\ &\Leftrightarrow 2x(2y-1) + (2y-1) = 6-1 \\ &\Leftrightarrow (2y-1)(2x+1) = 5. \end{aligned}$$

Vì $2x+1$ và $2y-1$ lấy các giá trị nguyên và là ước của 5 nên ta có

$2x+1$	1	5	-5	-1
$2y-1$	5	1	-1	-5

Vậy phương trình nghiệm nguyên $(x;\ y)$ là $(0;\ 3),\ (-1;\ -2),\ (2;\ 1),\ (-1;\ 0)$.

Lưu ý. Để viết vế trái $2xy - x + y$ thành một tích, ta biến đổi thành $x(2y-1) + \frac{1}{2}(2y-1)$. Do đó ta nhân hai vế của phương trình $2xy - x + y = 3$ với 2 rồi trừ 1 vào hai vế để đưa về phương trình ước số.

C PHƯƠNG PHÁP BIỂU THỊ MỘT ẨN THEO ẨN CÒN LẠI RỒI DÙNG TÍNH CHIA HẾT

Ví dụ 4: Giải phương trình ở ví dụ 2 (ở trang 2) bằng cách biểu thị x theo y rồi tách ra các giá trị nguyên và dùng tính chia hết.

$$\begin{aligned} &xy - x - y = 2 \\ \Leftrightarrow &x(y-1) = y+2. \end{aligned}$$

Ta thấy $y \neq 1$ (vì nếu $y = 1$ thì $0x = 3$, vô nghiệm).
Do đó $x = \dfrac{y+2}{y-1}$.
Tách ra ở phân thức $\dfrac{y+2}{y-1}$ các số nguyên được

$$x = \frac{y+2}{y-1} = \frac{y-1+3}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}.$$

Do x là số nguyên nên $\dfrac{3}{y-1}$ là số nguyên, do đó $y-1$ là ước của 3. Lần lượt cho $y-1$ bằng $-1,\ 1,\ -3,\ 3$, ta được đáp số như ở ví dụ 2.

D PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ CỦA TỪNG VẾ

Ví dụ 5: Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$;

b) $x^2 + y^2 = 1999$.

a) Dễ chứng minh x^2, y^2 chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1 nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 3. Còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) x^2, y^2 chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 2. Còn vế phải là 1999 chia cho 4 dư 3. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

∗***Kinh nghiệm giải toán***
Cần nhớ các kết luận được rút ra từ ví dụ 5 :
$x^2 - y^2$ chia cho 4 không dư 2,
$x^2 + y^2$ chia cho 4 không dư 3.

Ví dụ 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$9x + 2 = y^2 + y.$$

Biến đổi phương trình thành $9x + 2 = y(y+1)$.
Ta thấy vế trái của phương trình là số chia hết cho 3 dư 2 nên $y(y+1)$ chia cho 3 dư 2.

Từ đó chỉ có thể là $y = 3k + 1$ và $y + 1 = 3k + 2$ (k nguyên).
Khi đó

$$\begin{aligned} & 9x + 2 = (3k+1)(3k+2) \\ \Leftrightarrow & 9x = 9k^2 + 9k \\ \Leftrightarrow & x = k(k+1). \end{aligned}$$

Thử lại, $x = k(k+1)$, $y = 3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.
Đáp số: $\begin{cases} x = k(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases}$ (k là số nguyên tùy ý).

BÀI TẬP

Bài 1.1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x + 13y = 156$.
Ta thấy $156 = 12 \cdot 13$ nên $x \,\vdots\, 13$. Đặt $x = 13t$ $(t \in \mathbb{Z})$ ta được $2t + y = 12$. Vậy tập hợp các nghiệm nguyên của phương trình là $\begin{cases} x = 13t \\ y = 12 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{Z})$.

Bài 1.2: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $2xy - 4x + y = 7$;

b) $3xy + x - y = 1$.

a) $2xy - 4x + y = 7$.
Đưa về phương trình ước số: $(2x+1)(y-2) = 5$. Từ đó ta tìm được các nghiệm nguyên của phương trình là $(0;7), (2;3), (-1;-3), (-3;1)$.

b) $3xy + x - y = 1$.
Đưa về phương trình ước số: $(3x-1)(3y+1) = 2$. Từ đó ta tìm được các nghiệm nguyên của phương trình là $(1;0)$ và $(0;-1)$.

Bài 1.3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$.
Đưa về phương trình ước số: $(x+2y)(2x-y) = 7$. Từ đó ta tìm được các nghiệm nguyên của phương trình là $(3;-1)$ và $(-3;1)$.

Bài 1.4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = 91$.
Đưa về phương trình ước số: $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = 13 \cdot 7$. Chú ý rằng $x^2 + xy + y^2 > 0$. Từ đó ta tìm được các nghiệm nguyên của phương trình là $(6;5), (-5;-6), (4;-3), (3;-4)$.

Bài 1.5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$
Biểu thị y theo x ta được: $xy - 5y = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow (x-5)y = x^2 - 6x + 8$.
Do $x \neq 5$ nên $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} = x - 1 + \dfrac{3}{x-5}$. Từ đó $3 \,\vdots\, (x-5)$, tương ứng với giá trị của

$x-5$ bằng $1,-1,3,-3$ ta có các nghiệm $(x;y)$ là $(6;8),(4;0),(8;8),(2;0)$.

Lưu ý. Nếu đưa về phương trình ước số, ta được: $(x-5)(x-y-1)=-3$.

Bài 1.6: Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(1)\cdot f(2)=35$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm nguyên a. Thế thì $f(x)=(x-a)g(x)$, trong đó $g(x)$ là đa thức có các hệ số nguyên. Suy ra

$$f(1)=(1-a)g(1)$$
$$f(2)=(2-a)g(2)$$

trong đó $g(1),g(2)$ là các số nguyên.

Do đó $f(1)\cdot f(2)=(1-a)(2-a)g(1)g(2)\Rightarrow 35=(1-a)(2-a)g(1)g(2)$. Không xảy ra đẳng thức trên vì vế trái là số lẻ, còn vế phải là số chẵn do có tích của hai số nguyên liên tiếp là $(1-a)$ và $(2-a)$.

Bài 1.7: Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $3x^2-4y^2=13$;

b) $7x^2+12y^2=2013$.

a) Xét $3x^2-4y^2=13$.
Vế phải chia cho 4 dư 1. Hãy chứng minh rằng vế trái chia cho 4 có số dư khác 1 (chú ý rằng x^2 chia cho 4 có số dư bằng 0 hoặc 1).

b) Xét $7x^2+12y^2=2013$.
Vế phải là số lẻ nên $7x^2$ là số lẻ, do đó x là số lẻ. Ta có x^2 chia cho 4 dư 1 nên $7x^2$ chia cho 4 dư 3. Vế trái chia cho 4 dư 3, còn vế phải 2013 chia cho 4 dư 1.

Bài 1.8: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^2=2y^2-8y+3.$$

Vế trái chia cho 8 dư $0,1,4$. Còn vế phải chia cho 8 dư 3 (nếu y chẵn) hoặc dư 5 (nếu y lẻ).

Bài 1.9: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^5-5x^3+4x=24(5y+1).$$

Biến đổi: $x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=120y+24$. Vế trái là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 5, còn vế phải không chia hết cho 5.

Bài 1.10: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$3x^5 - x^3 + 6x^2 - 15x = 2001.$$

Vế phải chia hết cho 3. Suy ra $x^3 \vdots 3$, do đó $x \vdots 3$. Khi đó vế trái chia hết cho 9, còn vế phải không chia hết cho 9.

Bài 1.11: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2015.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & |x-y| + |y-z| + |z-x| = 2015 \\ \Leftrightarrow & |x-y| + |y-z| + |z-x| + (x-y) + (y-z) + (z-x) = 2015 \\ \Leftrightarrow & (|x-y| + x - y) + (|y-z| + y - z) + (|z-x| + z - x) = 2015. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta thấy:

- Nếu $x \geq y$ thì $|x-y| + x - y = 2x$ là số chẵn.
- Nếu $x < y$ thì $|x-y| + x - y = 0$ cũng là số chẵn.

Suy ra $|x-y| + x - y$ là số chẵn.
Tương tự $|y-z| + y - z$ và $|z-x| + z - x$ đều là số chẵn.
Phương trình (1) không có nghiệm nguyên vì vế trái là số chẵn còn vế phải là số lẻ.

Bài 1.12: Chứng minh rằng số $A = 1\underbrace{00\ldots0}_{49 \text{ chữ số } 0}5\underbrace{00\ldots0}_{50 \text{ chữ số } 0}1$ không phải là lập phương của một số tự nhiên.

- Nếu $a = 3k$ thì $a^3 \vdots 9$.
- Nếu $a = 3k+1$ thì a^3 chia cho 9 dư 1.
- Nếu $a = 3k+2$ thì a^3 chia cho 9 dư 8, nên lập phương của một số nguyên khi chia cho 9 chỉ có số dư là $0, 1, 8$; còn A là số chia cho 9 dư 7.

BÀI 2. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

A PHƯƠNG PHÁP SẮP THỨ TỰ CÁC ẨN

Ví dụ 1: Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

- **Cách 1.** Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z. Ta có:

$$x + y + z = xyz.$$

Chú ý rằng các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong phương trình nên có thể sắp thứ tự giá trị các ẩn, chẳng hạn:

$$1 \leq x \leq y \leq z.$$

Do đó $xyz = x + y + z \leq 3$.
Chia hai vế của bất đẳng thức $xyz \leq 3z$ cho số dương z, ta được $xy \leq 3$. Do đó $xy \in \{1; 2; 3\}$.

+ Với $xy = 1$, ta có $x = 1, y = 1$. Thay vào $x + y + z = xyz$ được $2 + z = z$, loại.
+ Với $xy = 2$, ta có $x = 1, y = 2$. Thay vào $x + y + z = xyz$ ta được $z = 3$.
+ Với $xy = 3$, ta có $x = 1, y = 3$. Thay vào $x + y + z = xyz$ được $z = 2$, loại vì trái với sắp xếp $y \leq z$.

Vậy ba số phải tìm là $1; 2; 3$.

- **Cách 2.** Chia hai vế của $x + y + z = xyz$ cho $xyz \neq 0$, ta được

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1.$$

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Ta có:

$$1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}.$$

Suy ra $\frac{3}{x^2} \geq 1$, do đó $x^2 \leq 3$ nên $x = 1$. Thay $x = 1$ vào $x + y + z = xyz$ ta được

$$\begin{aligned}
& 1 + y + z = yz \\
\Leftrightarrow & yz - y - z = 1 \\
\Leftrightarrow & y(z-1) - (z-1) = 2 \\
\Leftrightarrow & (z-1)(y-1) = 2.
\end{aligned}$$

Ta có $z - 1 \geq y - 1 \geq 0$ nên $z - 1 = 2$ và $y - 1 = 1$. Suy ra $(y; z) = (2; 3)$. Ba số phải tìm là $1; 2; 3$.

Lưu ý: Ở cách 1, từ $xy \leq 3$ còn có thể suy ra $x^2 \leq xy \leq 3$ nên $x = 1$.

B PHƯƠNG PHÁP XÉT TỪNG KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA ẨN

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$$

Do vai trò bình đẳng của x và y, giả sử $x \geq y$. Ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của số nhỏ hơn (là y).
Hiển nhiên ta có $\frac{1}{y}<\frac{1}{3}$ nên $y>3$.
Mặt khác, do $x \geq y \geq 1$ nên $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$. Do đó

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y} \Rightarrow \frac{2}{y} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow y \leq 6.$$

Do y là số nguyên nên từ $y>3$ và $y \leq 6$ suy ra $y \in \{4;5;6\}$.

- Với $y=4$ ta được $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ nên $x=12$.
- Với $y=5$ ta được $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$, loại vì x không là số nguyên.
- Với $y=6$ ta được $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ nên $x=6$.

Đáp số: Các nghiệm nguyên dương $(x;y)$ của phương trình đã cho là $(4;12)$, $(12;4)$; $(6;6)$.
Lưu ý:

a) Để giới hạn $y \leq 6$, có thể lập luận

$$y \leq x \Rightarrow \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} \geq \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):2=\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}.$$

Vậy $y \leq 6$.

b) Cách giải đưa về phương trình ước số:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow xy-3x-3y=0 \Leftrightarrow (x-3)(y-3)=9.$$

Sau đó, xét các ước của 9.

Kinh nghiệm giải toán: Khi các ẩn trong phương trình có vai trò bình đẳng, ta thường sắp thứ tự các ẩn, sau đó dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của số nhỏ.

C PHƯƠNG PHÁP CHỈ RA NGHIỆM NGUYÊN

Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng chỉ ra một hoặc một vài số là nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác.

Ví dụ 3: Tìm các số tự nhiên x sao cho

$$2^x + 3^x = 5^x.$$

Viết phương trình dưới dạng

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1.$$

- Với $x = 0$ thì vế trái phương trình trên bằng 2, loại.
- Với $x = 1$ thì vế trái phương trình trên bằng 1, đúng.
- Với $x \geq 2$ thì $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{2}{5}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}$ nên

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1, \text{loại.}$$

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 1$.

D PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM

Ở những phương trình có thể đưa về phương trình bậc hai đối với một ẩn, ta sử dụng điều kiện phương trình có nghiệm là $\Delta \geq 0$.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - xy + y^2 = 2x - y.$$

Viết phương trình đã cho thành phương trình bậc hai đối với x ta được

$$x^2 - (y+2)x + (y^2 + y) = 0.$$

Điều kiện để phương trình bậc hai ẩn x có nghiệm là $\Delta \geq 0$.
Ta có $\Delta = (y+2)^2 - 4(y^2 + y) = -3y^2 + 4$.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 \leq 4.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; -1\}$.

- Với $y = 0$, thay vào phương trình $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$ ta được $x^2 - 2x = 0$. Ta có $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.
- Với $y = 1$, thay vào phương trình $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$ ta được $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ta có $x_3 = 1$; $x_4 = 2$.
- Với $y = -1$, thay vào phương trình $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$ ta được $x^2 - x = 0$. Ta có $x_5 = 0$; $x_6 = 1$.

Đáp số: Phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$, $(2;0)$; $(1;1)$; $(2;1)$; $(0;-1)$; $(1;-1)$.

Kinh nghiệm giải toán: Biệt số $\Delta \geq 0$ là điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai có nghiệm, nhưng chỉ là điều kiện cần (chứ chưa đủ) để phương trình có nghiệm nguyên. Tuy nhiên các giá trị tìm được nói trên đều là các số nguyên nên chúng là nghiệm nguyên của phương trình. Không đòi hỏi phải thử chúng vào phương trình đã cho.

Ví dụ 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = x + y.$$

Viết phương trình đã cho dưới dạng phương trình bậc hai đối với x, ta được:

$$x^2 + (y-1)x + (y^2 - y) = 0.$$

Điều kiện để phương trình bậc hai theo ẩn x có nghiệm là $\Delta \geq 0$.
Ta có $\Delta = (y^2-1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 2y + 1$.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (3y+1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq y \leq 1.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0;1\}$.

- Với $y = 0$, thay vào phương trình $x^2 + (y-1)x + (y^2 - y) = 0$ ta được $x^2 - x = 0$, ta có $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.
- Với $y = 1$, thay vào phương trình $x^2 = 0$, ta có $x_3 = 0$.

Đáp số: Phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$.
Kinh nghiệm giải toán: Khi giải bất phương trình $\Delta \geq 0$, ta phải giải bất phương trình bậc hai

$$3y^2 - 2y - 1 \leq 0.$$

Trong lời giải trên, ta biến đổi tương đương để đưa về bất phương trình tích $(3y+1)(y-1) \leq 0$. Có nhiều cách khác để giải bất phương trình $3y^2 - 2y - 1 \leq 0$:

- **Cách 1:**

  $$3y^2-2y-1\le 0 \Leftrightarrow 9y^2-6y-3\le 0 \Leftrightarrow (3y-1)^2\le 4 \Leftrightarrow -2\le 3y-1\le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le y\le 1.$$

  Suy ra $y\in\{0;1\}$.

- **Cách 2:** $3y^2-2y-1\le 0 \Leftrightarrow y(3y-2)\le 1$.

  + Nếu $y\ge 2$ thì $y(3y-2)\ge 2\cdot 4=8$, loại.

  + Nếu $y\le -1$ thì $y(3y-2)\ge(-1)(-5)=5$, loại

  Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{0;1\}$.

BÀI TẬP

Bài 2.1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$

Giả sử $1\le x\le y$ thì $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}$. Suy ra

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}\Rightarrow x\le 8.$$

Mặt khác, ta có $\frac{1}{x}<\frac{1}{4}\Rightarrow x>4$. Cho x các giá trị từ 5 đến 8 để tìm y.

x	5	6	7	8
y	20	12	loại	8

Đáp số: $(x;y)=(5;20),\ (20;5),\ (6;12),\ (12;6),\ (8;8)$.

Bài 2.2: Tìm ba số nguyên dương sao cho tích của chúng gấp đôi tổng của chúng.

Cách 1. Ta có $xyz=2(x+y+z)$ (1)

Giả sử $x\le y\le z$. Ta có $xyz=2(x+y+z)\le 6z$. Suy ra $xy\le 6$.

- Xét $xy=1$, có $x=1,\ y=1$. Thay vào (1) ta được $z=-4$, loại.

- Xét $xy=2$, có $x=1,\ y=2$. Thay vào (1), loại.

- Xét $xy=3$, có $x=1,\ y=3$. Thay vào (1) ta được $z=8$.

- Xét $xy = 4$, với $x = 1,\ y = 4$, thay vào (1) ta được $z = 5$; với $x = y = 2$, thay vào (1) ta được $z = 4$.

- Xét $xy = 5$, có $x = 1,\ y = 5$. Thay vào (1) ta được $z = 4$, loại vì trái với $y \leq z$.

- Xét $xy = 6$, với $x = 1,\ y = 6$, thay vào (1) ta được $z = \frac{7}{2}$, loại. Với $x = y = 3$, thay vào (1) ta có $z = \frac{7}{2}$ loại.

Kết luận: Bộ ba số phải tìm là $(1;\ 3;\ 8),\ (1;\ 4;\ 5),\ (2;\ 2;\ 4)$.

Cách 2. Từ (1) ta có $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{2}$. (2)

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$, từ (2) ta có $\frac{3}{x^2} \geq \frac{1}{2}$ nên $x^2 \leq 6$. Vậy $x \in \{1;\ 2\}$

- Với $x = 1$, thay vào (1) ta được $2(1 + y + z) = yz$.
  Biến đổi về tích ta được $z - 2)(y - 2) = 6$. Từ đây ta tìm được $y = 3,\ z = 8$ và $y = 4,\ z = 5$.

- Với $x = 2$, thay vào (1) ta được $2 + y + z = yz$.
  Đưa về tích ta được: $(z - 1)(y - 1) = 3$. Giải ra ta được $y = 2,\ z = 4$.

Từ đó ta được kết quả như trên.

Bài 2.3: Tìm bốn số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Gọi 4 số cần tìm là x, y, z, t thỏa mãn $x + y + z + t = xyzt$ (1)

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq t$. Ta có $xyzt = x + y + z + t \leq 4t$ nên $xyz \leq 4$

- Với $xyz = 1$ ta có $x = y = z = 1$. Thay vào (1) ta được $t = 3 + t$, loại.

- Với $xyz = 2$ ta có $x = y = 1,\ z = 2$. Thay vào (1) ta được $t = 4$.

- Với $xyz = 3$ ta có $x = y = 1,\ z = 3$. Thay vào (1) ta được $t = \frac{5}{2}$, loại.

- Với $xyz = 4$ ta có $x = 1,\ y = z = 2$ hoặc $x = y = 1,\ z = 4$. Thay vào (1) ta thấy cả hai trường hợp đều loại.

Đáp số: Bốn số phải tìm là $1;\ 1;\ 2;\ 4$

Bài 2.4: Tìm sáu số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Gọi 6 số cần tìm là a, b, c, d, e, f. Khi đó: $abcdeg = a + b + c + d + e + g$ (1)

Giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq g$. Ta có

$$abcdeg = a + b + c + d + e + g \leq 6g \Rightarrow abcde \leq 6.$$

- $abcde = 1$, ta có $a = b = c = d = e = 1$. Thay vào (1) ta được $g = 5 + g$ (loại).

- $abcde = 2$, ta có $a = b = c = d = 1$, $e = 2$. Thay vào (1) ta tìm được $g = 6$.
- $abcde = 3$, ta có $a = b = c = d = 1$, $e = 3$. Thay vào (1) ta tìm được $g = \dfrac{7}{2}$ (loại).
- $abcde = 4$, ta có $a = b = c = 1$, $e = 4$ hoặc $a = b = c = 1$, $d = e = 2$. Thay vào (1) ta thấy cả hai trường hợp này loại.
- $abcde = 5$, ta có $a = b = c = d = 1$, $e = 5$. Thay vào (1) ta được $g = \dfrac{9}{4}$(loại).
- $abcde = 6$, ta có $a = b = c = d = 1$, $e = 6$ hoặc $a = b = c = 1$, $d = 2$, $e = 3$. Thay vào (1) ta thấy cả hai trường hợp này đều loại.

Vậy 6 số cần tìm là $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 6$.

Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau (bài 2.5, 2.6, 2.7):

Bài 2.5: $x^2 + xy + y^2 = 2x + y$.

Biến đổi phương trình về dạng

$$x^2 + (y-2)x + y^2 - y = 0.$$

Ta có $\Delta = (y-2)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 4$. Vì $\Delta \geq 0$, nên $|y| \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Suy ra $y \in \{-1,\ 0,\ 1\}$.

- Với $y = -1$, ta có $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = 2$.
- Với $y = 0$, ta có $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2$.
- Với $y = 1$, ta có $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = 0$.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y) = (1;-1),\ (2;-1),\ (0;0),\ (2;0),\ (0;1),\ (1;1)$.

Bài 2.6: $x^2 - 3xy + 3y^2 = 3y$.

Ta viết phương trình về dạng $x^2 - 3xy + 3y^2 - 3y = 0$. Ta có $\Delta = -3y(y-4)$.

Vì $\Delta \geq 0$ nên $y \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

- $y = 0$, ta có $x = 0$.
- $y = 1$, ta có $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 3$.
- $y = 2$, ta có $x^2 - 6x + 6 = 0$, phương trình này không có nghiệm nguyên.
- $y = 3$, ta có $x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3,\ x = 6$.
- $y = 4$, ta có $x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(0;0)$, $(0;1)$, $(3;1)$, $(3;3)$, $(6;3)$, $(6;4)$.

Bài 2.7: $x^2 - 2xy + 5y^2 = y + 1$.
Ta viết phương trình dưới dạng $x^2 - 2xy + 5y^2 - y - 1 = 0$, ta có $\Delta' = -4y^2 + y + 1$. Vì $\Delta \geq 0$ nên ta có $y = 0$. Thay vào phương trình ta được: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y) = (1;0)$, $(-1;0)$.

Bài 2.8: Tìm các số tự nhiên x sao cho

$$2^x + 3^x = 35.$$

Ta thấy $x = 3$ là một nghiệm của phương trình.

- Với $x > 3$, ta có $\begin{cases} 2^x > 2^3 = 8 \\ 3^x > 3^3 = 27 \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3^x > 35$. Nên trường hợp này phương trình vô nghiệm.
- Với $x < 3$, chứng minh tương tự phương trình cũng vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Bài 2.9: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x! + y! = (x + y)!$$

(Kí hiệu $x!$ là tích các số tự nhiên từ 1 đến x).
Giả sử $x \leq y$. Ta có

$$y!(y+1)\cdots(y+x) = (x+y)! = x! + y! \leq 2y! \Rightarrow (y+1)(y+2)\cdots(y+x) \leq 2.$$

Từ đây, ta có $x = y = 1$.
Thử lại ta thấy $x = y = 1$ là nghiệm của phương trình.

Bài 2.10: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương

$$x^{17} + y^{17} = 19^{17}.$$

Giả sử $1 \leq x \leq y < 19$. Ta có

$$19^{17} \geq (y+1)^{17} = y^{17} + 17y^{16} + \cdots > y^{17} + 17y^{16},$$

suy ra

$$x^{17} + y^{17} > y^{17} + 17y^{16} \geq y^{17} + 17x^{16} \Rightarrow x > 17.$$

Mặt khác $x^{17} < 19^{17}$, nên $x < 19$. Từ đó, ta có $x = y = 18$. Tuy nhiên, khi đó

$$x^{17} + y^{17} = 2.18^{17} < 19^{17}.$$

Do đó, phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

BÀI 3. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

A SỬ DỤNG TÍNH CHẤT VỀ CHIA HẾT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.
Các tính chất thường dùng của số chính phương về tính chia hết là

- Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
- Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2.
- Số chính phương chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1.
- Số chính phương chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1.
- Số chính phương chia cho 8 có số dư là 0, hoặc 1, hoặc 4.

Ví dụ 1: Tìm các số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.
Cách 1. Giả sử $9x+5=n(n+1)$ với n nguyên thì

$$\begin{aligned}36x+20=4n^2+4 \Leftrightarrow 36x+21&=4n^2+4n+1\\ \Leftrightarrow 3(12x+7)&=(2n+1)^2.\end{aligned}$$

Số chính phương $(2n+1)^2$ chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho $3^2=9$. Ta lại có $12x+7$ không chia hết cho 3 nên $3(12x+7)$ không chia hết cho 9.
Mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số nguyên x nào để $9x+5=n(n+1)$.
Cách 2. Giả sử $9x+5=n(n+1)$ với n nguyên.
Biến đổi $n^2+n-(9x+5)=0$.
Để phương trình bậc hai đối với n có nghiệm nguyên, ta phải có Δ là số chính phương.
Ta thấy $\Delta=1+4(9x+5)=36x+21$, chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9, nên không là số chính phương.
Vậy không tồn tại số nguyên n nào để $9x+5=n(n+1)$, tức là không tồn tại số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

B TẠO RA BÌNH PHƯƠNG ĐÚNG

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+4x=19-3y^2$.
Ta có $2x^2+4x+2=21-3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3(7-y^2)$. (1)
Ta thấy $3(7-y^2) \vdots 2 \Rightarrow (7-y^2) \vdots 2 \Rightarrow y$ lẻ.
Ta lại có $7-y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2=1$.

Khi đó (1) có dạng $2(x+1)^2 = 18$.

Ta được $x+1 = 3$ hoặc $x+1 = -3$, do đó $x_1 = 2$; $x_2 = -4$.

Các cặp số $(x;y)$ bằng $(2;1)$, $(2;-1)$, $(-4;1)$, $(-4;-1)$ thỏa mãn (1) nên là nghiệm của phương trình.

> **!** Có thể viết phương trình đã cho dưới dạng phương trình bậc hai đối với ẩn x rồi sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$ để có $7 - y^2 \geq 0$.

C TẠO RA TỔNG CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $4x^2 + 4x + y^2 - 6y = 24$.

Ta có $4x^2 + 4x + y^2 - 6y = 24 \Leftrightarrow (2x+1)^2 + (y-3)^2 = 34$.

Viết 34 dưới dạng $a^2 + b$, trong đó a lẻ, ta có $34 = 1^2 + 33 = 3^2 + 25 = 5^2 + 9$.

Chỉ có hai trường hợp cho b là số chính phương $34 = 3^2 + 5^2 = 5^2 + 3^2$.

Chú ý rằng $2x+1 \geq 3$ và $y - 3 \geq -2$ nên $\begin{cases} 2x+1 = 3 \\ y-3 = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x+1 = 5 \\ y-3 = 3 \end{cases}$

Nghiệm nguyên dương $(x;y)$ của phương trình là $(1;8)$, $(2;6)$.

> **!** Có thể viết phương trình đã cho dưới dạng phương trình bậc hai đối với y rồi sử dụng điều kiện $\Delta' \geq 0$ để có $(2x+1)^2 \geq 34$. Cách này dài hơn.

D XÉT CÁC SỐ CHÍNH PHƯƠNG LIÊN TIẾP

Hiển nhiên giữa hai số chính phương liên tiếp, không có số chính phương nào. Do đó với mọi số nguyên a, thì:

- Không tồn tại số nguyên x nào để $a^2 < x^2 < (a+1)^2$.
- Nếu có số nguyên x sao cho $a^2 < x^2 < (a+2)^2$ thì $x^2 = (a+1)^2$.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^4 - y^4 = 3y^2 + 1$.

Ta có

$$x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 \geq y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2+1)^2 \qquad (1)$$
$$x^4 = y^4 + 3y^2 + 1 < y^4 + 4y^2 + 4 = (y^2+2)^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(y^2+1)^2 \leq x^4 < (y^2+2)^2$.

Do đó $(y^2+1)^2 = x^4$. (3)

Thay x^4 bởi y^4+3y^2+1 vào (3), ta được $y^4+2y^2+1=y^4+3y^2+1 \Leftrightarrow y^2=0 \Leftrightarrow y=0$.
Suy ra $x=1$ hoặc $x=-1$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(1;0)$, $(-1;0)$.

! Có thể giải phương trình đã cho bằng cách đưa về $(2x^2)^2=(2y^2+3)^2-5$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho $x(x+1)=k(k+2)$.
Giả sử $x(x+1)=k(k+2)$ với k nguyên, x nguyên dương. Ta có

$$\begin{aligned} & x^2+x=k^2+2k \\ \Leftrightarrow & x^2+x+1=(k+1)^2. \end{aligned}$$

Do

$$x>0 \Rightarrow x^2<x^2+x+1=(k+1)^2 \tag{1}$$

Cũng do $x>0$ nên

$$(k+1)^2=x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $x^2<(k+1)^2<(x+1)^2$, điều này không xảy ra.
Vậy với k đã cho không tồn tại số nguyên dương x để $x(x+1)=k(k+2)$.

E SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN BIỆT SỐ Δ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Ở những phương trình dạng $f(x,y)=0$ với hệ số nguyên có thể viết được dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, chẳng hạn đối với ẩn x, ngoài điều kiện $\Delta \geq 0$ để phương trình ẩn x có nghiệm, muốn phương trình có nghiệm nguyên còn cần Δ là số chính phương, vì nếu Δ không là số chính phương thì x là số vô tỉ. Chú ý rằng Δ là số chính phương là điều kiện cần nhưng chưa đủ để phương trình có nghiệm nguyên. Do đó phải thử giá trị tìm được vào phương trình đã cho hoặc tìm ra cụ thể nghiệm nguyên của phương trình đó.

Ví dụ 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+2y^2+3xy+2x+3y+4=0. \tag{1}$$

Viết (1) dưới dạng phương trình bậc hai đối với ẩn x được

$$x^2+(3y+2)x+(2y^2+3y+4)=0. \tag{2}$$

Ta có $\Delta = (3y+2)^2 - 4(2y^2+3y+4) = y^2 - 12$. Để phương trình (2) có nghiệm nguyên, cần có $y^2 - 12$ là số chính phương. Đặt $y^2 - 12 = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$, ta có

$$y^2 - m^2 = 12 \Leftrightarrow (y+m)(y-m) = 12.$$

Ta có $y+m$ và $y-m$ là các ước của 12 và $y+m-(y-m) = 2m$ nên $y+m$ và $y-m$ cùng tính chẵn lẻ và $y+m \geq y-m$. Do đó $\begin{cases} y+m=6 \\ y-m=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y+m=-2 \\ y-m=-6. \end{cases}$

Từ đó $y=4$ hoặc $y=-4$.

- Với $y=4$, thay vào (2) được $x^2+14x+48=0$. Từ đó ta có $x_1=-6; x_2=-8$.
- Với $y=-4$, thay vào (2) được $x^2-10x+24=0$. Ta có $x_3=4; x_4=6$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(-6;4), (-8;4), (4;-4), (6;-4)$.

Lưu ý: Nếu chỉ sử dụng điều kiện $\Delta \geq 0$, ta được $y^2 \geq 12$. Chưa chặn được giá trị của y.

F SỬ DỤNG TÍNH CHẤT:

Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương trình mỗi số đều là số chính phương.

Giả sử $ab = c^2$ với $a,b,c \in \mathbb{N}^*, (a,b)=1$.

Nếu trong a và b có một số, chẳng hạn a chứa thừa số nguyên tố p với số mũ lẻ thì b không chứa thừa số p nên c^2 chứa thừa số nguyên tố p với số mũ lẻ, trái với giả thiết c^2 là số chính phương.

Vậy a và b đều chỉ chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, tức là a và b đều là số chính phương.

Ví dụ 7: Giải phương trình ba ẩn x,y,z với nghiệm nguyên dương

$$xy = z^2. \tag{1}$$

Trước hết ta xét ƯCLN $(x,y,z)=1$. Thật vậy nếu bộ ba số $(x_0;y_0;z_0)$ thỏa mãn (1) và có ƯCLN bằng d, giả sử $x_0 = dx_1, y_0 = dy_1, z_0 = dz_1$ thì bộ (x_1,y_1,z_1) cũng là nghiệm của phương trình (1) với ƯCLN $(x_1,y_1,z_1)=1$.

Với ƯCLN $(x,y,z)=1$ thì x,y,z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x,y,z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có $z^2 = xy$ mà $(x,y)=1$ nên $x=a^2, y=b^2$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $z^2 = xy = (ab)^2$, do đó $z = ab$.

Như vậy : $\begin{cases} x = ta^2 \\ y = tb^2 \text{ (với } t,a,b \text{ là các số nguyên dương tùy ý).} \\ z = tab \end{cases}$

Thử lại các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1).

Công thức trên cho ta các nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

Lưu ý: Mệnh đề sau không đúng: Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích chia hết cho một số chính phương thì tồn tại không hai số đó là số chính phương (!)

Chẳng hạn: $7.8 \vdots 4$ nhưng cả 7 và 8 đều không phải là số chính phương.

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT:

Nếu hai số nguyên dương liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó bằng 0.

Giả sử $a(a+1) = k^2 \quad (1)$ với $a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$.

Giả sử $a \neq 0, a+1 \neq 0$ thì $k^2 \neq 0$. Do $k \in \mathbb{N}$ nên $k > 0$.

Từ (1) suy ra $a^a + a = k^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 4a = 4k^2 \Leftrightarrow (2a+1)^2 = 4k^2 + 1.$ (2)

Do $k > 0$ nên $4k^2 < 4k^2 + 1 < 4k^2 + 4k + 1.$ (3)

Từ (2)và (3) suy ra $(2k)^2 < (2a+1)^2 < (2k+1)^2$, điều này không xảy ra.

Vậy nếu $a(a+1) = k^2$ thì tồn tại một trong hai số a hoặc $a+1$ bằng 0.

Lưu ý: Nếu trong hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì chưa thể kết luận mỗi số đều là một số chính phương. Chẳng hạn: hai số -1 và 0.

Ví dụ 8: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2. \quad (1)$$

Thêm xy vào hai vế ta được $x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1)$.

Ta thấy xy và $xy+1$ là hai số chính phương liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

- Xét $xy = 0$. Từ (1) có $x^2 + y^2 = 0$ nên $x = y = 0$.
- Xét $xy + 1 = 0$. Ta có $xy = -1$ nên $(x, y) = (1; -1)$ hoặc $(-1; 1)$.

Thử lại, $(x; y)$ lấy các giá trị $(0; 0), (1; -1), (-1; 1)$ đều là nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Cách giải khác.

Cách 2. Đưa về phương trình ước số:

$$\begin{aligned} &4x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x^2y^2 \\ \Leftrightarrow &4x^2 + 8xy + 4y^2 = 4x^2y^2 + 4xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (2x+2y)^2 = (2xy+1)^2 - 1\\&\Leftrightarrow (2xy+1)^2 - (2x+2y)^2 = 1\\&\Leftrightarrow (2xy+1+2x+2y)(2xy+1-2x-2y) = 1.\end{aligned}$$

Cách 3. Dùng tính chất của số chính phương và đưa về phương trình ước số:

$$\begin{aligned}&4x^2+4xy+4y^2 = 4x^2y^2\\ \Leftrightarrow &(2x+y)^2+3y^2 = 4x^2y^2\\ \Leftrightarrow &(2x+y)^2 = y^2(4x^2-3).\end{aligned}$$

- Nếu $y=0$ thì $x=0$, ta có: $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm.
- Nếu $y \neq 0$ thì $4x^2-3$ phải là số chính phương.

  Ta có $4x^2-3=k^2 (k \in \mathbb{N})$, đưa về phương trình ước số

  $$(2x+k)(2x-k) = 3.$$

  Ta tìm được $x_1 = 1; x_2 = -1$. Từ đó ta tìm được y.

Cách 4. Dùng bất đẳng thức sắp thứ tự các ẩn.
Không mất tính tổng quát giả sử $|x| \leq |y|$, thế thì $x^2 \leq y^2, xy \leq |xy| \leq y^2$.
Do đó $x^2y^2 = x^2+xy+y^2 \leq y^2+y^2+y^2 = 3y^2$.

- Nếu $y=0$ thì $x=0$.
- Nếu $y \neq 0$ thì chia cả hai vế cho y^2 ta được $x^2 \leq 3$. Do đó $x^2 = 1$. Ta có thêm hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1)$ và $(-1;1)$.

Cách 5. Dùng bất đẳng thức xét từng khoảng giá trị của ẩn.
Với $|x| \geq 2$ và $|y| \geq 2$ thì $x^2 \geq 4$ và $y^2 \geq 4$ nên $x^2y^2 \geq 4y^2$ và $x^2x^2 \geq 4x^2$. Do đó

$$\begin{aligned}x^2y^2 \geq 2(x^2+y^2) &= x^2+y^2+x^2+y^2 \geq x^2+y^2+2|xy|\\&= x^2+y^2+|xy|+|xy|\\&\geq x^2+y^2+xy+4 > x^2+y^2 = xy,\end{aligned}$$

Trái với đề bài.
Vậy $|x| < 2$ hoặc $|y| < 2$. Do vai trò x, y trong phương trình là như nhau nên ta chỉ cần xét

$|x| < 2$.
Thử với $x = 0, x = 1, x = -1$ ta được các nghiệm $(x; y)$ là:

$$(0; 0), (1; -1), (-1; 1).$$

Cách 6. Đưa về phương trình bậc hai đối với x.

$$(y^2 - 1)x^2 - yx - y^2 = 0. \tag{2}$$

- Xét $y = 1$ thì (2) có dạng $-x - 1 = 0$ được $x = -1$.
- Xét $y = -1$ thì (2) trở thành $x - 1 = 0$ được $x = 1$.
- Xét $y \neq \pm 1$ thì (2) là một phương trình bậc hai đối với x.

$$\Delta = y^2 + 4y^2(y^2 - 1) = y^2(4y^2 - 3).$$

  Ta phải có Δ là số chính phương.
  Nếu $y = 0$ thì từ (2) suy ra $x = 0$.
  Nếu $y \neq 0$ thì $4y^2 - 3$ là số chính phương.
  Ta có $4y^2 - 3 = k^2 (k \in \mathbb{N})$ nên $(2y + k)(2y - k) = 3$.
  Ta tìm được $y = \pm 1$, loại vì đang xét $y \neq \pm 1$.

BÀI TẬP

Bài 3.1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3x^2 + 4y^2 = 6x + 13$.
Biến đổi: $3x^2 - 6x + 3 = 16 - 4y^2 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 = 4(4 - y^2)$.
Ta có $4 - y^2 \geq 0$ và $(4 - y^2) \vdots 3$ nên $y^2 = 1$ hoặc $y^2 = 4$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(3; 1)$, $(3; -1)$; $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; 2)$, $(1; -2)$.

Bài 3.2: Tìm các số nguyên x thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

a) $2x + 1$ là số chính phương.

b) $4x + 1$ là số chính phương.

c) $8x + 1$ là số chính phương.

d) $16x + 1$ là số chính phương.

a) Đặt $2x + 1 = (2k + 1)^2$ với $k \in \mathbb{N}$.
Từ đó $2x + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow x = 2k(k + 1)$.

b) Đặt $4x + 1 = (2k + 1)^2$ với $k \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow x = k(k + 1)$.

c) Đặt $8x+1=(2k+1)^2$ với $k \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow x = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

d) Đặt $16x+1=(2k+1)^2$ với $k \in \mathbb{N}$.
Ta có $16x = 4k^2+4k \Rightarrow x = \dfrac{k(k+1)}{4}$.
Để x nguyên ta phải có $k \vdots 4$ hoặc $(k+1) \vdots 4$.

- Với $k = 4t$, $(t \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = t(4t+1)$.
- Với $k+1 = 4t$, $(t \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = t(4t-1)$.

Bài 3.3: Chứng minh rằng $2x^2+3$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên x.
Giả sử $2x^2+3 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$.
Ta có $2x^2+2 = y^2-1 = (y-1)(y+1) \Rightarrow y-1$ và $y+1$ phải cùng chẵn.
Đặt $y-1=2k$, $y+1=2k+2$ với $k \in \mathbb{N}$.
Ta có $2x^2+2 = 2k(2k+2)$ nên $x^2+1 = 2k(k+1)$. (1)
Vế phải của (1) chia hết cho 4, còn vế trái chia 4 dư 1 (nếu x chẵn), chia cho 4 dư 2 (nếu x lẻ).
Vậy $2x^2+3$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên x.

Bài 3.4: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^2-6x+y^2+10y=24$.

b) $x^2-3x+y^2-6y+10=0$.

c) $(x+y+1)^2 = 3(x^2+y^2+1)$.

d) $x^2+5y^2-4xy-4y+4=0$.

a) Viết phương trình dưới dạng $(x-3)^2+(y+5)^2=58$.
Viết 58 thành tổng a^2+b trong đó $a^2<b$ ta có

$$58 = 1^2+57 = 2^2+54 = 3^2+49 = 4^2+42 = 5^2+33,$$

chỉ có một trường hợp cho b là số chính phương $58 = 3^2+7^2$.
Ta có bảng giá trị sau

$x-3$	3	3	-3	-3	7	7	-7	-7
$y+5$	7	-7	7	-7	3	-3	3	-3

Nên có các nghiệm $(x;y)$ là

x	6	6	0	0	10	10	-4	-4
y	2	-12	2	-12	-2	-8	-2	-8

b) Viết phương trình dưới dạng $(2x-3)^2+(2y-6)^2=5$.
Số 5 chỉ có một cách viết thành tổng hai số chính phương là 1^2+2^2. Do $2x-3$ là số lẻ nên có bảng giá trị

$2x-3$	1	1	-1	-1
$2y=6$	2	-2	2	-2

Do đó nghiệm $(x;y)$ là

x	2	2	1	1
y	4	2	4	2

c) Viết phương trình dưới dạng $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$.

d) Viết phương trình dưới dạng $(x-2y)^2+(y-2)^2=0$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(4;2)$.

Bài 3.5: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $x^2-y^2=y+1$.
Ta có $x^2=y^2+y+1\le y^2+2y+1$ nên $y^2<x^2\le(y+1)^2$.
Do đó $x^2=(y+1)^2\Leftrightarrow y^2+y+1=y^2+2y+1\Leftrightarrow y=0$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;0)$.

Bài 3.6: Có tồn tại hay không hai số nguyên dương x và y sao cho x^2+y và y^2+x đều là số chính phương?
Giả sử $y\le x$. Ta có: $x^2<x^2+y\le x^2+x<(x+1)^2$. Số x^2+y nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên không thể là số chính phương.

Bài 3.7: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2y^2-xy=x^2+2y^2.$$

Viết phương trình đã cho dưới dạng $(x^2-2)y^2-xy-x^2=0. \qquad (1)$
Vì $x^2-2\ne0$ nên (1) là phương trình bậc hai đối với y.

$$\Delta=x^2+4x^2(x^2-2)=4x^4-7x^2=x^2(4x^2-7).$$

Ta có Δ là số chính phương.
Nếu $x=0$ thì $y=0$. Nếu $x\ne0$ thì $4x^2-7$ phải là số chính phương.
Đặt $4x^2-7=m^2(m\in\mathbb{N})$ ta được
$4x^2-m^2=7\Leftrightarrow(2x+m)(2x-m)=7$. Ta xét bảng giá trị sau

$2x+m$	7	1
$2x-m$	-1	-7

Từ đó suy ra x bằng 2 hoặc -2.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(2;-1),(2;2),(-2;1),(-2;-2)$.
Lưu ý. Nếu viết phương trình đã cho thành phương trình bậc hai với x
$(y^2-1)x^2-yx-2y^2=0$, ta phải xét $y=1, y=-1, y\neq \pm 1$.
Với $y\neq\pm1$ thì $\Delta=y^2(8y^2-7)$. Ta gặp khó khăn khi giải điều kiện $8y^2-7$ là số chính phương.

Bài 3.8: Tìm nghiệm nguyên dương của mỗi phương trình sau:

a) $x(x^2+x+1)=4y(y+1)$; b) $x^4-2y^2=1$.

a) $x(x^2+x+1)=4y(y+1)$. Cộng 1 vào hai vế ta được

$$x^3+x^2+x+1=4y^2+4y+1 \Leftrightarrow (x^2+1)(x+1)=(2y+1)^2.$$

Vế phải là số lẻ nên x^2+1 và $x+1$ cùng lẻ, đồng thời x^2+1 và $x+1$ cùng là số dương. Ta lại thấy $(x^2+1,x+1)=1$. Nên x^2+1 và $x+1$ là số chính phương. Nên x^2 và x^2+1 là hai số liên tiếp và cùng là 2 số chính phương nên $x=0$, từ đó suy ra $y=0$ hoặc $y=-1$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(0;-1)$.

b) Xét phương trình $x^4-2y^2=1$. (1)
x và y chỉ có số mũ chẵn, do đó ta giả sử $x\geq 0, y\geq 0$.

Hiển nhiên x lẻ, do đó x^4 chia 4 dư 1, suy ra y^2 chẵn, do đó y chẵn.

Đặt $x=2a+1, y=2b$ với $a,b\in\mathbb{N}$.

Thay các biểu thức này vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}(4a^2+4a+1)^2-1=8b^2 &\Leftrightarrow (4a^2+4a+2)(4a^2+4a)=8b^2\\ &(2a^2+2a+1)(a^2+a)=b^2.\end{aligned}$$

Đặt $a^2+a=n$, ta có $(2n+1).n=b^2$.

- Với $a=0$ thì $x=1$. Thay vào (1) được $y=0$.
- Với $a\geq 1$ thì n và $2n+1$ là hai số nguyên dương. Vì chúng nguyên tố cùng nhau và tích của chúng là b^2 nên mỗi số đều là số chính phương.

  Đặt $n=k^2 (k\in\mathbb{N})$, ta có $a^2+a=k^2$. Điều này không xảy ra vì

$$a^2<a^2+a<a^2+2a+1=(a+1)^2.$$

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$ và $(-1; 0)$.

Bài 3.9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + y^2 + 3xy = x^2y^2.$$

Giải tương tự ví dụ 8 (ở trang 21). Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$.

Bài 3.10: Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + x)(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + x^2).$$

Ta đặt $(1 + 2 + \cdots + x)(1^2 + 2^2 + \cdots + x^2) = y^2$. Áp dụng các công thức

$$1 + x + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2};$$
$$1^2 + 2^2 + \cdots + x^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

ta được

$$\frac{x(x+1)}{2} . \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} . \frac{2x+1}{3} = y^2.$$

Ta phải có $\frac{2x+1}{3} = (2n+1)^2$ với n là số nguyên. Phương trình này có vô số nghiệm dạng $x = 6n^2 + 6n + 1$ nên có vô hạn số x thỏa mãn điều kiện đề bài.

BÀI 4. PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3 \quad (1)$$

Hiển nhiên $x \vdots 2$. Đặt $x = 2x_1$ với x_1 là số nguyên. Thay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 ta được

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3 \quad (2)$$

Do đó $y \vdots 2$. Đặt $y = 2y_1$ với y_1 là số nguyên. Thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 ta được

$$2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3 \quad (3)$$

Do đó $z \vdots 2$. Đặt $z = 2z_1$ với z_1 là số nguyên. Thay vào (3) rồi chia hai vế cho 2 ta được

$$x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3 \quad (4)$$

Như vậy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của (1) thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1) trong đó $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$.
Lập luận tương tự như trên, $(x_2; y_2; z_2)$ cũng là nghiệm của (1) trong đó $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$.
Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến x, y, z đều chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.
Đó là nghiệm duy nhất của (1).
Lưu ý. Ta gọi phương pháp giải trên là *phương pháp lùi vô hạn.*
Nếu ví dụ 20 được cho dưới dạng: Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3 + 2y^3 = 4z^3 \quad (1)$, ta có thể trình bày chứng minh bằng *nguyên tắc cực hạn.*
Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm nguyên dương của (1), trong đó x_0 là giá trị nguyên dương nhỏ nhất trong các giá trị mà x có thể nhận.
Lập luận như trong cách giải trên ta được $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm nguyên dương của (1) mà $x_0 = 2x_1$, tức là $x_1 < x_0$. Điều này trái với giả thiết x_0 là số nguyên dương nhỏ nhất trong các giá trị nhận được của x.
Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương.

BÀI TẬP

Tìm các nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau (bài 33 - bài 35):

Bài 4.1: $x^3 - 3y^3 = 9z^3$.

Ta có $x^3 - 3y^3 = 9z^3 \Leftrightarrow x^3 = 3y^3 + 9z^3$ (1).

Hiển nhiên $x \vdots 3$. Đặt $x = 3x_1$ với x_1 là số nguyên. Thay vào (1) rồi chia hai vế cho 3 ta được

$$9x_1^3 = y^3 + 3z^3 \tag{2}$$

Do đó $y \vdots 3$. Đặt $y = 3y_1$ với y_1 là số nguyên. Thay vào (2) rồi chia hai vế cho 3 ta được

$$3x_1^3 = 9y_1^3 + z^3 \tag{3}$$

Do đó $z \vdots 3$. Đặt $z = 3z_1$ với z_1 là số nguyên. Thay vào (3) rồi chia hai vế cho 3 ta được

$$x_1^3 = 3y_1^3 + 9z_1^3 \tag{4}$$

Như vậy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của (1) thì $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1) trong đó $x = 3x_1$, $y = 3y_1$, $z = 3z_1$.

Lập luận tương tự như trên, $(x_2; y_2; z_2)$ cũng là nghiệm của (1) trong đó $x_1 = 3x_2$, $y_1 = 3y_2$, $z_1 = 3z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến x, y, z đều chia hết cho 3^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Đó là nghiệm duy nhất của (1).

Bài 4.2:

a) $x^2 + y^2 = 3z^2$;

b) $x^2 + y^2 = 6(z^2 + t^2)$.

Ta thấy x^2, y^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà $(x^2 + y^2) \vdots 3$ nên x^2 và y^2 đều chia hết cho 3. Do đó x và y đều chia hết cho 3.

a) Đặt $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ với x_1, y_1 là các số nguyên. Thay vào phương trình đã cho rồi chia hai vế phương trình cho 3, ta được

$$3x_1^2 + 3y_1^2 = z^2 \tag{1.2}$$

Do đó $z \vdots 3$. Đặt $z = 3z_1$ với z_1 là số nguyên. Thay vào (1.2) rồi chia hai vế cho 3 ta được

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2 \tag{1.3}$$

Như vậy nếu $(x;y;z)$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $(x_1;y_1;z_1)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho trong đó $x = 3x_1$, $y = 3y_1$, $z = 3z_1$.
Lập luận tương tự như trên, $(x_2;y_2;z_2)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho trong đó $x_1 = 3x_2$, $y_1 = 3y_2$, $z_1 = 3z_2$.
Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến x, y, z đều chia hết cho 3^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.
Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) Đặt $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ với x_1, y_1 là các số nguyên. Thay vào phương trình đã cho rồi chia hai vế phương trình cho 3, ta được

$$3x_1^2 + 3y_1^2 = 2(z^2 + t^2) \tag{2.2}$$

Do đó $(z^2 + t^2) \vdots 3$. Suy ra z và t đều chia hết cho 3. Đặt $z = 3z_1$, $t = 3t_1$ với z_1, t_1 là các số nguyên. Thay vào (2.2) rồi chia hai vế phương trình cho 3, ta được

$$x_1^2 + y_1^2 = 6(z_1^2 + t_1^2) \tag{2.3}$$

Như vậy nếu $(x;y;z;t)$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $(x_1;y_1;z_1;t_1)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho trong đó $x = 3x_1$, $y = 3y_1$, $z = 3z_1$, $t = 3t_1$.
Lập luận tương tự như trên, $(x_2;y_2;z_2;t_2)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho trong đó $x_1 = 3x_2$, $y_1 = 3y_2$, $z_1 = 3z_2$, $t_1 = 3t_2$.
Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến x, y, z, t đều chia hết cho 3^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z == t = 0$.
Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 4.3: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
Ta thấy $(x^2 + y^2 + z^2) \vdots 2$. Xảy ra hai trường hợp:

- Trong ba số x, y, z có một số chẵn, hai số lẻ, chẳng hạn x chẵn, y và z lẻ. Khi đó vế trái $x^2 + y^2 + z^2$ chia cho 4 dư 2, còn vế phải $2xyz$ chia hết cho 4, loại.

- Ba số x, y, z đều chẵn. Đặt $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ với x_1, y_1, z_1 là các số nguyên. Thay vào phương trình đã cho rồi chia hai vế phương trình cho 4, ta được

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1 \tag{1}$$

Lập luận như trên, ta có ba số x_1, x_2, x_3 cũng là các số chẵn. Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến x, y, z đều chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.
Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 4.4:

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 = 7z^2$.

b) Chứng minh rằng số 7 không viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai số hữu tỉ.

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 = az^2$, trong đó a là số tự nhiên có dạng $4k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

a) $x^2 + y^2 = 7z^2$ (1).
Một số chính phương chia cho 7 thì dư 0, 1, 2, 4. Theo (1) thì $x^2 + y^2$ chi hết cho 7 nên x và y đều chia hết cho 7. Từ đó z chia hết cho 7.
Đặt $x = 7x_1, y = 7y_1, z = 7z_1$. Thay vào (1) và rút gọn, ta được $x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2$.
Như vậy $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1).
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0)$.

b) Giả sử $7 = \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2$ với x, y, z là các số nguyên và $z \neq 0$.
Suy ra $7z^2 = x^2 + y^2$.
Phương trình trên chỉ có nghiệm là $(0; 0; 0)$ (câu a), trái với điều kiện $z \neq 0$.
Vậy số 7 không viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai số hữu tỉ.

c) $x^2 + y^2 = (4k-1)z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4kz^2$ (2)
Do $x^2 + y^2 + z^2$ là số chẵn nên xảy ra hai trường hợp:

- Trong ba số x, y, z có một số chẵn, hai số lẻ thì vế trái của (2) chia cho 4 dư 2, còn vế phải chia hết cho 4, loại.
- Cả ba số x, y, z đều chẵn. Đặt $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ với x_1, y_1, z_1 là các số nguyên. Thay vào (2) được

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16kz_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4kz_1^2.$$

  Như vậy $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 0; 0)$.

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x-2)(3x-2)(5x-2)(7x-2) = 945$.

Đặt $A = (x-2)(3x-2)(5x-2)(7x-2)$.

- Nếu $x \geq 3$ thì $\begin{cases} x-2 \geq 1 \\ 3x-2 \geq 7 \\ 5x-2 \geq 13 \\ 7x-2 \geq 19 \end{cases} \Rightarrow A \geq 1.7.13.19 = 1729$ (loại).

- Nếu $x \leq -2$ thì $\begin{cases} x-2 \leq -4 \\ 3x-2 \leq -8 \\ 5x-2 \leq -12 \\ 7x-2 \leq -16 \end{cases} \Rightarrow A \geq 4.8.12.16 = 6164$ (loại).

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

- Với $x = -1$ thì $A = (-3).(-5).(-7).(-9) = 945$ (thỏa mãn).
- Với $x = 0$ thì $A = (-2)^4 = 16$ (loại).
- Với $x = 1$ thì $A = (-1).1.3.5 = -15$ (loại).
- Với $x = 2$ thì $A = 0$ (loại).

Kết luận: nghiệm của phương trình là $x = -1$.

!

Kinh nghiệm giải toán:

- Nếu khai triển ta phải giải phương trình bậc cao (bậc bốn), thật không đơn giản chút nào!

!

- Ta thường sử dụng điều kiện x là số nguyên và dùng phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn để giải.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2-1)(x^2-11)(x^2-21)(x^2-31)=-4224.$$

Đặt $A=(x^2-1)(x^2-11)(x^2-21)(x^2-31)$. Vì $A<0$ và là tích của bốn thừa số x^2-1, x^2-11, x^2-21, x^2-31 nên trong bốn thừa số trên phải có một hoặc ba thừa số âm.
Nhận thấy $x^2-1>x^2-11>x^2-21>x^2-31$ nên có hai trường hợp:

- Trường hợp có ba thừa số âm $\Rightarrow x^2-1>0>x^2-11 \Rightarrow 1<x^2<11 \Rightarrow x^2 \in \{4;9\}$.
  - Nếu $x^2=4$ thì $A=3.(-7).(-17).(-27)=-9639$ (loại).
  - Nếu $x^2=9$ thì $A=8.(-2).(-12).(-22)=-4224$ (thỏa mãn).
- Trường hợp có một thừa số âm $\Rightarrow x^2-21>0>x^2-31 \Rightarrow 21<x^2<31 \Rightarrow x^2=25$ $\Rightarrow A=24.14.4.(-6)=-8064$ (loại).

Vậy $x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$.

BÀI TẬP

Bài 1.1: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^4=24x+9$.

b) $x^3-3x^2+490=0$.

a) Xét $x^4-24x-9=x^4-81-24(x-3)=(x^2-9)(x^2+9)-24(x-3)=(x-3)(x^3+3x^2+9x+3)$. Do vậy

$$x^4=24x+9 \Leftrightarrow (x-3)(x^3+3x^2+9x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x^3+3x^2+9x+3=0. \end{array}\right.$$

- Với $x \geq 0 \Rightarrow x^3+3x^2+9x+3>0$ (loại).
- Với $x<0 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow x^3+3x^2+9x+3<-1+3-9+3=-4<0$ (loại).

Vậy $x=3$ là nghiệm nguyên của phương trình.

b) Xét $x^3 - 3x^2 + 490 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = -490 \Leftrightarrow x^2(x-3) = -49.10$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} x^2 = 49 \\ x - 3 = -10 \end{cases} \Rightarrow x = -7$.

Bài 1.2: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1) = 24$.

b) $(x^2-17)(x^2-27)(x^2-37) = -4032$.

a) Đặt $A = (2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)$.

- Nếu $x \geq 2 \Rightarrow A \geq 3.5.7.9 = 945 > 24$ (loại).
- Nếu $x \leq 0 \Rightarrow A \leq (-1)^4 = 1 < 24$ (loại).

Vậy $0 < x < 2$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 1$.

b) Đặt $A = (x^2-17)(x^2-27)(x^2-37)$. Vì $A < 0$ và A là tích của ba số hạng x^2-17, x^2-27, x^2-37 nên có một số hạng hoặc cả ba số hạng trên đều âm.

Ta thấy $x^2 - 17 > x^2 - 27 > x^2 - 37$ nên ta có hai trường hợp sau:

- Trường hợp có một số hạng âm $\Rightarrow x^2 - 27 > 0 > x^2 - 37 \Rightarrow 27 < x^2 < 37$
$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow A = 19.9.(-1) = -171$ (loại).
- Trường hợp có ba số hạng âm $\Rightarrow x^2 - 17 < 0 \Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16\}$.
  - Với $x^2 = 0 \Rightarrow A = (-17).(-27).(-37) = -16983$ (loại).
  - Với $x^2 = 1 \Rightarrow A = (-16).(-26).(-36) = -14976$ (loại).
  - Với $x^2 = 4 \Rightarrow A = (-13).(-23).(-33) = -9867$ (loại).
  - Với $x^2 = 9 \Rightarrow A = (-8).(-18).(-28) = -4032$ (thỏa mãn) $\Rightarrow x = \pm 3$.
  - Với $x^2 = 16 \Rightarrow A = (-1).(-11).(-21) = -231$ (loại).

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $x = \pm 3$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VỚI HAI ẨN

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$11x + 18y = 120. \tag{1}$$

Chú ý đến tính chia hết, ta thấy $11x \vdots 6$ nên $x \vdots 6$. Đặt $x = 6k$ (k nguyên). Thay vào (1) và rút gọn ta được

$$11k + 18y = 20.$$

Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (là y) theo k ta được

$$y = \frac{20 - 11k}{3}$$

Tách riêng giá trị nguyên ở biểu thức này được

$$y = 7 - 4k + \frac{k-1}{3}$$

Lại đặt $\dfrac{k-1}{3} = t$ (t nguyên) suy ra $k = 3t + 1$. Do đó

$$y = 7 - 4(3t+1) + t = 3 - 11t.$$
$$x = 6k - 6(3t+1) = 18t + 6.$$

Thay các biểu thức của x và y vào (1), phương trình được nghiệm đúng.
Vậy nghiệm nguyên của phương (1) được biểu thị bởi công thức

$$\begin{cases} x = 18t + 6 \\ y = 3 - 11t. \end{cases} \text{(với } t \text{ là số nguyên tùy ý).}$$

Lưu ý: Nếu đề bài yêu cầu tìm nghiệm nguyên dương của phương trình (1) thì sau khi được nghiệm nguyên tổng quát, ta giải các điều kiện:

$$\begin{cases} 18t + 6 > 0 \\ 3 - 11t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < t < \frac{3}{11}.$$

Do đó $t = 0$ (vì t nguyên). Nghiệm nguyên dương $(x; y)$ của phương trình (1) là $(6; 3)$.
Trong trường hợp tìm nghiệm nguyên dương của phương trình (1), ta còn có thể giải như sau:

$$11x + 18y = 120$$

Do $y \geq 1$ nên $11x \leq 120 - 18.1 = 102$.

Do x nguyên nên $x \leq 9$.

Mặt khác $x \vdots 6$ và x nguyên dương nên $x = 6$. Suy ra $y = 3$.

▲ Kinh nghiệm giải toán

Có nhiều cách tách giá trị nguyên của biểu thức $y = \dfrac{20 - 11k}{3}$. chẳng hạn:

$$y = 7 - 4k + \frac{k-1}{3} \text{ (cách 1)}$$
$$y = 7 - 3k - \frac{1+2k}{3} \text{ (cách 2)}$$
$$y = 6 - 3k + \frac{2(1-k)}{3} \text{ (cách 3.)}$$

Bạn đọc tự giải theo cách trên để thấy:

- Cách 1 gọn hơn cách 2 vì trong cách 1 hệ số của k ở phân số bằng 1, do đó sau khi đặt $\dfrac{k-1}{3} = t$ ta không cần dùng thêm một ẩn phụ nào nữa.
- Trong cách 3, nhờ đặt được thừa số chung mà hệ số của k ở phân số bằng -1, do đó sau khi đặt $\dfrac{1-k}{3} = t$, ta cũng không cần dùng thêm một ẩn phụ nào nữa.

A CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN $AX + BY = C$ VỚI NGHIỆM NGUYÊN $(A, B, C \in \mathbb{Z})$

- Rút gọn phương trình, chú ý đến tính chia hết của các ẩn.

- Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ, chẳng hạn x, theo ẩn kia.

- Tách giá trị nguyên ở biểu thức của x

- Đặt điều kiện để phân số trong biểu thức của x bằng một số nguyên t_1, ta được một phương trình bậc nhất hai ẩn y và t_1.

- Cứ tiếp tục làm như trên cho đến khi các ẩn đều được biểu thị dưới dạng một đa thức với các hệ số nguyên.

Thực chất của cách giải này là thay việc giải phương trình $ax + by = c$ bởi việc giải lần lượt các phương trình

$$a_1 y + b_1 t_1 = c_1$$
$$a_2 t_1 + b_2 t_2 = c_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

trong đó cách hệ số $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$ có giá trị tuyệt đối nhỏ dần cho đến khi được một hệ số có giá trị tuyệt đối bằng 1.

Lưu ý: Ngoài cách giải bằng phương pháp biểu thị một ẩn theo ẩn kia như trên, còn có thể giải phương trình $ax + by = c$ bằng phương pháp tìm một nghiệm riêng, xem trang 95.

BÀI TẬP

Bài 2.1: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $12x - 7y = 45$;

b) $9x + 20y = 547$;

c) $11x + 8y = 73$;

a) Nhận thấy $y \,\vdots\, 3$, đặt $y = 3k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Rút gọn được $4x - 7k = 15$.
$x = \dfrac{7k+15}{4} = 2k + 4 - \dfrac{k+1}{4}$. Đặt $\dfrac{k+1}{4} = t$ $(t \in \mathbb{Z})$.
Đáp số: $\begin{cases} x = 7t + 2 \\ y = 12t - 3 \end{cases}$ $(t$ là số nguyên tùy ý$)$.

b) $x = \dfrac{547 - 20y}{9} = 61 - 2y - \dfrac{2(1+y)}{9}$. Đặt $\dfrac{1+y}{9} = t$ $(t \in \mathbb{Z})$.
Đáp số $\begin{cases} x = 63 - 20t \\ y = 9t - 1 \end{cases}$ $(t$ là số nguyên tùy ý$)$.

c) $y = \dfrac{73 - 11x}{8} = 8 - x + \dfrac{3(3-x)}{8}$. Đặt $\dfrac{3-x}{8} = t$ $(t \in \mathbb{Z})$.
Đáp số $\begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = 5 + 11t \end{cases}$ $(t$ là số nguyên tùy ý$)$.

Bài 2.2: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương:

$$11x + 1999y = 11.1999.$$

Ta thấy $1999y \,\vdots\, 11 \Rightarrow y \,\vdots\, 11$.
Do y là số nguyên dương nên $y \geq 11$. Do đó $1999y \geq 1999.11$.
Suy ra vế trái của phương trình (là $11x + 1999y$) lớn hơn vế phải (là 11.1999.) Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Lưu ý: Chứng minh tương tự như trên đối với bài toán tổng quát: Nếu số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau thì phương trình $ax + by = ab$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài 2.3: Cho phương trình $19x + 83y = 1983$. (1)
Từ đẳng thức $19.100 + 83.1 = 1983$, hãy viết 100 dưới dạng $83 + a$, viết 1 dưới dạng $b - 19$ rồi tìm a, b và tìm một nghiệm nguyên khác $(x; y) = (100; 1)$ của phương trình (1).
$(x; y) = (100; 1)$ là một nghiệm của phương trình $19x + 83y = 1983$ (1)

$$a = 100 - 83 = 17, b = 19 + 1 = 20.$$

Ta có

$$\begin{aligned}1983 = 19.1000 + 83.1 &= 19(83 + 17) + 83(20 - 19)\\ &= 19.83 + 19.17 + 83.20 - 83.19\\ &= 19.17 + 83.20\end{aligned}$$

Vậy $(x; y) = (17; 20)$ là một nghiệm khác của phương trình (1).
Lưu ý: Phương trình (1) chỉ cho hai nghiệm nguyên dương $(x; y)$ là $(100; 1)$ và $(17; 20)$. Thật vậy, $19x = 1983 - 83y$ nên $x = \dfrac{1983 - 83y}{19} = 100 - \dfrac{83(y-1)}{19}$.
Đặt $\dfrac{y-1}{19} = k$ (k là số nguyên) thì $y = 19k + 1; x = 100 - 83k$.

$$\begin{cases}100 - 83k > 0\\ 19k + 1 > 0\end{cases} \text{nên } -\frac{1}{19} < k < \frac{1}{19}.$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

- Với $k = 0$ thì $x = 100, y = 1$.
- Với $k = 1$ thì $x = 17, y = 20$.

Bài 2.4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$6x + 8y = m + 1,$$

trong đó m là số nguyên cho trước.
Dễ thấy m lẻ. Đặt $m = 2k - 1$ (k là số nguyên). Ta có $3x + 4y = k$.

$$x = \frac{k - 4y}{3} = -y + \frac{k - y}{3}.\text{Đặt}\frac{k - y}{3} = t\ (t \in \mathbb{Z}).$$

Đáp số: $\begin{cases}x = -k + 4t\\ y = k - 3t\end{cases}$
với m là số lẻ, $k = \dfrac{m+1}{2}$, t là số nguyên tùy ý.
Trường hợp m chẵn, phương trình không có nghiệm nguyên.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HAI ẨN

DẠNG 1. $\mathbf{axy + bx + cy + d = 0 (a, b, c, d \in \mathbb{Z})}$

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5x - 3y = 2xy - 11$

Cách 1. Biểu thị y theo x được $(2x+3)y = 5x = 11$.

Dễ thấy $2x + 3 \neq 0$ (vì x nguyên), do đó

$$y = \frac{5x+11}{2x+3} = 2 + \frac{x+5}{2x+3}$$

Để $y \in \mathbb{Z}$ phải có $(x+5) \vdots (2x+3)$

$\Rightarrow 2(x+5) \vdots (2x+3)$

$\Rightarrow (2x+3+7) \vdots (2x+3)$

$\Rightarrow 7 \vdots (2x+3)$

Ta có bảng giá trị tương ứng của $2x+3$, x, y thỏa mãn điều kiện trên.

$2x+3$	1	-1	7	-7
x	-1	-2	2	-5
y	6	-1	3	$2.$

Thử lại các cặp giá trị trên của $(x; y)$ đều thỏa mãn phương trình đã cho.

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} 5x - 3y = 2xy - 11 &\Leftrightarrow 10x - 6y = 4xy - 22 \\ &\Leftrightarrow 4xy - 10x + 6y - 15 = 7 \\ &\Leftrightarrow 2x(2y-5) + 3(2y-5) = 7 \\ &\Leftrightarrow (2y-5)(2x+3) = 7 \end{aligned}$$

$2x+3$ và $2y-5$ là ước của 7 nên có bảng giá trị tương ứng của chúng như sau

$2x+3$	1	-1	7	-7
$2y-5$	7	-7	1	-1

Từ đó suy ra các nghiệm như ở cách 1.

►► ***Kinh nghiệm giải toán***

Khi giải theo cách 1, ta phải thử lại các cặp giá trị $(x; y)$ tìm được vào phương trình đã cho vì từ (1) suy ra (2) chứ không phải $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Khi giải theo cách 2, ta không phải thử lại vì các biến đổi phương trình là tương đương.

DẠNG 2. $\mathbf{ax^2 + by^2 + c = 0 (a, b, c \in \mathbb{Z})}$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau

a) $3x^2+4y^2=84$;

b) $x^2+y^2=9900$.

a) Vì $4y^2 \geq 0$ nên $3x^2 \leq 84$, do đó $x^2 \leq 28$.
Ta lại có $3x^2$ là số chẵn nên x^2 là số chẵn. Suy ra $x^2 \in \{0;4;16\}$.

- Với $x^2=0$ thì $4y^2=84$ nên $y^2=21$, loại.
- Với $x^2=4$ thì $4y^2=72$ nên $y^2=18$, loại.
- Với $x^2=16$ thì $4y^2=36$ nên $y^2=9$, do đó $y_1=3, y_2=-3$.

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ là $(4;3),(4;-3),(-4;3),(-4;-3)$.

b) $x^2+y^2=9900$. x^2,y^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1, mà tổng x^2+y^2 (là 9900) chia hết cho 4 nên x,y đều chẵn.
Đặt $x=2x_1, y=2y_1$ với x_1,y_1 là các số nguyên.
Ta có $(2x_1)^2+(2y_1)^2=9900 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=2475 \quad (2)$
Vế trái của (2) chia cho 4 dư $0,1,2$. Còn vế phải chia cho 4 dư 3. Do đó phương trình (2) không có nghiệm nguyên, tức là phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

►► ***Kinh nghiệm giải toán***

Ta biết rằng x^2+y^2 chia cho 4 không dư 3 nhưng $9900 \,\vdots\, 4$ nên chưa kết luận được phương trình (1) không có nghiệm nguyên. Cần biến đổi tương đương phương trình (1) thành phương trình (2) mới đi đến lời giải.

DẠNG 3. $\mathbf{ax^2+by^2+cx+d=0}$ hoặc $\mathbf{ax^2+by^2+cy+d=0}$ $(\mathbf{a,b,c}\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau

$$x^2-2x-11=y^2 \tag{1}$$

Cách 1. Đưa về phương trình ước số

$$x^2-2x+1-12=y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2-y^2=12$$
$$\Leftrightarrow (x-1+y)(x-1-y)=12$$

Ta có nhận xét:

Vì phương trình (1) không thay đổi khi y thay bởi $-y$ nên ta giả sử $y \geq 0$. Thế thì

$$x-1+y \geq x-1-y.$$

Lại có $(x-1+y)-(x-1-y)=2y$ nên $x-1+y$ và $x-1-y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng chẵn.

Với các nhận xét trên xảy ra hai trường hợp

$\begin{cases} x-1+y=6 \\ x-1-y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1+y=-2 \\ x-1-y=-6 \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ là $(5;2),(5;-2),(-3;2),(-3;-2)$.

Cách 2. Viết thành phương trình bậc hai đối với x được

$$x^2-2x-(11+y^2)=0. \tag{2}$$

Ta có $\Delta'=1+11+y^2=12+y^2$. Xét điều kiện cần để phương trình (2) có nghiệm nguyên. Δ' là số chính phương khi

$$12+y^2=k^2 \ \ (k\in\mathbb{N}) \Leftrightarrow k^2-y^2=12 \Leftrightarrow (k+y)(k-y)=12.$$

Giả sử $y\geq 0$ thì $k+y\geq k-y$ và $k+y\geq 0$.

$(k+y)-(k-y)=2y$ nên $k+y$ và $k-y$ cùng tính chẵn lẻ và phải cùng chẵn.

Từ các nhận xét trên ta có $\begin{cases} k+y=6 \\ k-y=2 \end{cases}$

Do đó $y=2$. Thay vào (2) được $x^2-2x-15=0$. Từ đó $x_1=5; x_2=-3$.

Ta có bốn nghiệm $(5;2),(5;-2),(-3;2),(-3;-2)$.

DẠNG 4. $\mathbf{ax^2+by^2+cxy+d=0(a,b,c,d\in\mathbb{Z})}$

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau $5x^2-y^2+4xy-9=0$.

$$\begin{aligned} 5x^2-y^2+4xy-9=0 &\Leftrightarrow 5x^2+5xy-xy-y^2=9 \\ &\Leftrightarrow 5x(x+y)-y(x+y)=9. \\ &\Leftrightarrow (x+y)(5x-y)=9 \end{aligned}$$

$x+y$ và $5x-y$ là ước của 9 nên có bảng giá trị sau:

$x+y$	1	3	9	-1	-3	-9
$5x-y$	9	3	1	-9	-3	-1
$6x$	10	6	10	-10	-6	-10
x	loại	1	loại	loại	-11	loại
y		2			-2	

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ là $(1;2),(-1;-2)$.

DẠNG 5. $\mathbf{ax^2+by^2+cx+dy=0(a,b,c,d\in\mathbb{Z})}$

Ví dụ 5: Tìm nghiệm nguyên dương phương trình sau $x^2 + y^2 = 5(x - y)$. (1)
Viết phương trình (1) dưới dạng bậc hai đối với x được

$$x^2 - 5x + (5y + 5y^2) = 0. \quad (2)$$

$$\Delta = 25 - 4(5y + y^2) = 25 - 20y - 4y^2.$$

Để (2) có nghiệm ta phải có $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 20y - 25 \leq 0 \Leftrightarrow 4y(y+5) \leq 25$.
Với $y \geq 2$ thì $4y(y+5) \geq 56$, loại. Vậy $y \leq 1$.
Do $y \in \mathbb{N}^*$ nên $y = 1$. Thay vào (2) được $x^2 - 5x + 6 = 0$, ta có $x_1 = 2, x_2 = 3$.
Nghiệm nguyên dương $(x; y)$ của phương trình (1) là $(2; 1), (3; 1)$.

DẠNG 6. $\mathbf{ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 (a, b, c, d, e \in \mathbb{Z})}$

Ví dụ 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $3x^2 + 4y^2 + 12x + 3y + 5 = 0$. (1)
Viết phương trình (1) dưới dạng phương trình bậc hai đối với x được

$$3x^2 + 12x + (4y^2 + 3y + 5) = 0. \quad (2)$$

Ta có $\Delta' = 36 - 3(4y^2 + 3y + 5) = 3(7 - 4y^2 - 3y)$. Để (2) có nghiệm, ta phải có $\Delta' \geq 0$, tức là

$$4y^2 + 3y - 7 \leq 0 \Leftrightarrow (4y + 7)(y - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-7}{4} \leq y \leq 1.$$

- Với $y = -1$ thì $\Delta' = 18$, không phải là số chính phương, loại.
- Với $y = 0$ thì $\Delta' = 21$, không phải là số chính phương, loại.
- Với $y = 16$ thay vào (2) được $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Đáp số. Nghiệm $(x; y)$ là $(-2; 1)$.

DẠNG 7. $\mathbf{ax^2 + by^2 + cxy + dxx + ey = 0 (a, b, c, d, e \in \mathbb{Z})}$

Ví dụ 7: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $x^2 + y^2 = x + y + xy$. (1)
Cách 1. Viết phương trình (1) dưới dạng phương trình bậc hai đối với x ta được

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y) = 0. \quad (2)$$

$$\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y = -3y^2 + 6y + 1$$

Để (2) có nghiệm, ta phải có $\Delta \geq 0$, hay

$$3y^2 - 6y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3(y - 1)^2 \leq 4.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $(y - 1)^2 2 \leq 1$. Suy ra chỉ có thể là $0, 1, 2$.

- Với $y=0$, thay vào (2) được $x^2-x=0$. Ta có $x_1=0; x_2=1$.
- Với $y=1$, thay vào (2) được $x^2-2x=0$. Ta có $x_3=0; x_4=2$.
- Với $y=2$, thay vào (2) được $x^2-3x+2=0$. Ta có $x_5=1; x_6=2$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(1;0),(0;1),(2;1),(1;2),(2;2)$.
Cách 2. Biến đổi được $(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$.
Tổng của ba số chính phương bằng 2 nên tồn tại một số bằng 0.

- Trường hợp $x-1=0$ cho $(x;y)$ là $(1;0),(1;2)$.
- Trường hợp $y-1=0$ cho $(x;y)$ là $(0;1),(2;1)$.
- Trường hợp $x-y=0$ cho $(x;y)$ là $(0;0),(2;2)$.

Ví dụ 8: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$7\left(x^2+xy+y^2\right)=39\,(x+y).$$

Ta thấy $39(x+y)\,\vdots\,7$ mà 39 và 7 nguyên tố cùng nhau nên $(x+y)\,\vdots\,7$.
Đặt $x+y=7m$ (m nguyên) thì $x^2+xy+y^2=29m$.
Suy ra $(x+y)^2-\left(x^2+xy+y^2\right)=(7m)^2-39m$ hay $xy=49m^2-39m$.
Ta có bất đẳng thức $(x+y)^2\geq 4xy$ nên $49m^2\geq 4\left(49m^2-39m\right)$, suy ra $m\,(52-49m)\geq 0$.
Do đó $0\leq m\leq \dfrac{52}{49}$. Do m là số nguyên nên $m\in\{0;1\}$.

- Với $m=0$ thì $\begin{cases}x+y=0\\ xy=0.\end{cases}$ Nghiệm $(x;y)$ bằng $(0;0)$.
- Với $m=1$ thì $\begin{cases}x+y=7\\ xy=10.\end{cases}$ Nghiệm $(x;y)$ bằng $(5;2),(2;5)$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(5;2),(2;5)$.

DẠNG 8. $\mathbf{ax^2+by^2+cxy+dx+ey+g=0}\ \ (\mathbf{a,b,c,d,e,g}\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2-xy+y^2=2x-3y-2 \tag{1}$$

Cách 1. Viết (1) dưới dạng phương trình bậc hai đối với y được

$$y^2 + (3 - x)y + (x^2 - 2x + 2) = 0 \tag{2}$$
$$\Delta = (3 - x)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) = -3x^2 + 2x + 1$$

Để phương trình (2) có nghiệm, ta phải có

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1.$$

- Với $x = 0$, thay vào (2) được $y^2 + 3y + 2 = 0$, ta có $y_1 = -1, y_2 = -2$.
- Với $x = 1$, thay vào (2) được $y^2 + 2y + 1 = 0$, ta có $y_3 = -1$.

Đáp số: Nghiệm (x, y) là $(0; -1), (0; -2), (1; -1)$.
Cách 2. Viết phương trình (1) dưới dạng

$$(x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

Số 9 có hai cách viết dưới dạng tổng ba số chính phương là $0 + 0 + 9$ và $1 + 4 + 4$. Xét các giá trị của $|x - y|, |x - 2|, |y + 3|$ ta có bảng

$\lvert x-y\rvert$	$\lvert x-2\rvert$	$\lvert y+3\rvert$	Nhận xét
3	0	0	$x = 2, y = -3$, trái với $\lvert x - y\rvert = 3$.
0	3	0	$x = y = -3$, trái với $\lvert x - 2\rvert = 3$.
0	0	3	$x = y = 2$, trái với $\lvert y + 3\rvert = 3$
1	2	2	$x \in \{0; 4\}, y \in \{-1; -5\}$. Chỉ có $x = 0, y = -1$ cho $\lvert x - y\rvert = 1$
2	1	2	$x \in \{3; 1\}, y \in \{-1; -5\}$. Chỉ có $x = 1, y = -1$ cho $\lvert x - y\rvert = 2$
2	2	1	$x \in \{0; 4\}, y \in \{-2; -4\}$. Chỉ có $x = 0, y = -2$ cho $\lvert x - y\rvert = 2$

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; -1), (1; -1), (0; -2)$.

Ví dụ 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0 \tag{1}$$

Cách 1. Viết thành phương trình bậc hai đối với x được

$$x^2 + (3y - 1)x + \left(2y^2 - y + 3\right) = 0 \tag{2}$$
$$\Delta = (3y - 1)^2 - 4(2y^2 - y + 3) = y^2 - 2y - 11$$

Để phương trình (2) có nghiệm nguyên, ta phải có

Δ là số chính phương $\Leftrightarrow y^2-2y-11=k^2\ (k\in\mathbb{N})$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2-k^2=12$$

$$\Leftrightarrow (y-1+k)(y-1-k)=12$$

$y-1+k$ và $y-1-k$ là ước của 12, cùng tính chẵn lẻ nên cùng chẵn và $y-1+k\geq y-1-k$ nên ta có bảng các giá trị của chúng như sau

$y-1+k$	6	-2
$y-1-k$	2	-6
$y-1$	4	-4
y	5	-3

- Với $y=5$, thay vào (2) được $x^2+14x+48=0$. Ta có $x_1=-8, x_2=-6$.
- Với $y=-3$, thay vào (2) được $x^2-10x+24=0$. Ta có $x_3=6; x_4=4$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(-8;5),(-6;5),(6;-3),(4;-3)$.

Cách 2. Đưa về phương trình ước số $(x+y)(x+2y-1)=-3$.

Bạn đọc tự giải tiếp bài toán.

►► ***Kinh nghiệm giải toán***

Để tìm nghiệm nguyên của phương trình bậc hai với hai ẩn, ta thường viết phương trình đó dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, khi đó ẩn kia là tham số, rồi sử dụng điều kiện $\Delta\geq 0$ để chặn giá trị của tham số. Nếu không chặn được giá trị của tham số, ta nghĩ đến điều kiện Δ là số chính phương, điều kiện này có thể giúp tìm được tham số (nếu đưa được về dạng phương trình ước số) hoặc chứng tỏ phương trình đã cho không có nghiệm nguyên (nếu Δ không là số chính phương). Tùy theo cách chọn x hay chọn y làm ẩn mà ta có thể đạt được một trong các yêu cầu nêu trên. Trong trường hợp $\Delta\geq 0$ hoặc Δ là số chính phương chưa giúp giải được phương trình, ta nghĩ đến các phương pháp:

- Biểu thị một ẩn theo ẩn kia.
- Đưa phương trình đã cho về dạng phương trình ước số, hoặc tổng của các số chính phương bằng một hằng số.
- Chứng tỏ phương trình không có nghiệm nguyên bằng cách xét số dư của hai vế khi chia cho cùng một số.

BÀI TẬP

Bài 3.1: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $2xy - 4x - y = 1$

b) $2xy - x - y + 1 = 0$

a) Đưa phương trình ước số $(2x-1)(y-2) = 3$
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;5)$, $(2;3)$, $(0;-1)$, $(-1;1)$

b) Nhân hai vế của phương trình với 2. Đưa về phương trình ước số $(2x-1)(2y-1) = -1$
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;0)$, $(0;1)$

Bài 3.2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $6x^2 + 7y^2 = 229$
Ta có $7y^2 \leq 229$ nên $y^2 \leq 32$. Ta lại thấy y là số lẻ nên
$y^2 \in \{1\ ;\ 9\ ;\ 25\}$. Chỉ có $y^2 = 25$ thỏa mãn.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(3;5)$, $(3;-5)$, $(-3;5)$, $(-3;-5)$

Bài 3.3: Chứng minh rằng mỗi phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $7x^2 - 24y^2 = 41$

b) $7x^2 - 5y^2 = 3$

c) $2x^2 + y^2 = 1007$

d) $3x^2 + 7y^2 = 2002$

a) $7x^2 - 24y^2 = 41$
x^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1 nên $7x^2$ chia cho 4 dư 0 hoặc 3. Vế trái chia cho 4 dư 0 hoặc 3, vế phải (số 41) chia cho 4 dư 1. Phương trình không có nghiệm nguyên.

b) $7x^2 - 5y^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 6y^2 + x^2 + y^2 = 3$
Suy ra $(x^2 + y^2) \vdots 3$
Ta thấy x^2, y^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà $(x^2 + y^2) \vdots 3$ nên x^2 và y^2 đều chia hết cho 3. Do đó x và y đều chia hết cho 3 nên x^2, y^2 đều chia hết cho 9. Vế trái là $(7x^2 - 5y^2)$ chia hết cho 9, còn vế phải (số 3) không chia hết cho 9. Phương trình không có nghiệm nguyên.

c) $2x^2 + y^2 = 1007$
Nhận xét y là số lẻ. Đặt $y = 2a + 1$ (a là số nguyên). Ta có:
$2x^2 + (2a+1)^2 = 1007 \Leftrightarrow x^2 + 2a^2 + 2a = 503$
Suy ra x là số lẻ. Đặt $x = 2b + 1$ (b là số nguyên). Ta có:
$(2b+1)^2 + 2a^2 + 2a = 503 \Leftrightarrow 4b^2 + 4b + 2a^2 + 2a = 502$
$\Leftrightarrow 2b^2 + 2b + a^2 + a = 251 \Leftrightarrow 2b(b+1) + a(a+1) = 251$
Vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ. Phương trình không có nghiệm nguyên.

d) $3x^2 + 7y^2 = 2002$
2002 chia hết cho 7 nên $3x^2$ chia hết cho 7, do đó $x \vdots 7$

Đặt $x = 7k$ (k là số nguyên)

Ta có $3(7k)^2 + 7y^2 = 2002 \Leftrightarrow 21k^2 + y^2 = 286$

Ta thấy y^2 chia cho 7 dư 0,1,2,4 nên vế trái chia cho 7 dư 0,1,2,4. Còn vế phải chia cho 7 dư 6. Phương trình không có nghiệm nguyên.

Bài 3.4: Tìm các số nguyên x để mỗi biểu thức sau là số chính phương:

a) $x^2 - 2x - 14$ b) $x^2 - 4x - 25$ c) $x(x+12)$

a) Đưa về phương trình ước số:

$x^2 - 2x + 1 - 15 = y^2$ (giả sử $y \in \mathbb{N}$)

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x-1+y)(x-1-y) = 15$

Chú ý rằng $x - 1 + y \geq x - 1 - y$ nên ta có bảng giá trị sau:

$x-1+y$	15	-1	5	-3
$x-1-y$	1	-15	3	-5
$x-1$	8	-8	4	-4
x	9	-7	5	-3

b) Đưa về phương trình ước số:

$x^2 - 4x + 4 - 29 = y^2$ (giả sử $y \in \mathbb{N}$)

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - y^2 = 29 \Leftrightarrow (x-2+y)(x-2-y) = 29$

Đáp số: $x_1 = 17$; $x_2 = -13$

c) $x^2 + 12x = y^2$ (giả sử $y \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow (x+6)^2 - y^2 = 36$

$\Leftrightarrow (x+6+y)(x+6-y) = 36$

- Nếu $y = 0$ thì $x_1 = 0$; $x_2 = -12$
- Nếu $y > 0$ thì $x + 6 + y > x + 6 - y$.
  Chú ý rằng $x + 6 + y$ và $x + 6 - y$ phải cùng chẵn.
  Từ đó có thêm $x_3 = 4$; $x_4 = -16$
  Đáp số: 0 ; -12 ; 4 ; -16

Bài 3.5:

a) Tìm các số nguyên x để $x^2 + 7x$ là số chính phương.

b) Tìm các số hữa tỉ x để $x^2 + 7x$ là số chính phương.

a) $x^2+7x=y^2$ (giả sử $y\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 4x^2+28x=4y^2$
$\Leftrightarrow(2x+7)^2-(2y)^2=49\Leftrightarrow(2x+7+2y)(2x+7-2y)=49$

- Xét $y=0$ được $x_1=0\,;\ x_2=-7$
- Xét $y>0$ được $x_3=9\,;\ x_4=-16$

b) *Cách 1:* Trước hết ta chứng minh rằng x phải là số nguyên. Thật vậy, giả sử x không là số nguyên, đặt $x=\dfrac{m}{n}$ trong đó m,n là số nguyên nguyên tố cùng nhau; $m\neq 0\,;\ n\geq 2$
Ta có $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2+7.\dfrac{m}{n}=y^2\Leftrightarrow m^2+7mn=y^2n^2$
Suy ra $m^2\vdots n$, trái với giả thiết $(m,n)=1$
Vậy x phải là số nguyên tố.
Giải tiếp như ở câu a
Cách 2: Đặt $x^2+7x=y^2$ (giả sử $y\in\mathbb{N}$) thì:
$x^2+7x-y^2=0(1)$
$\Delta=49+4y^2$
$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+4y^2}}{2}(2)$
Để x là số hữ tỉ thì phải có $49+4y^2$ là số chính phương.
Đặt $49+4y^2=m^2$ (m là số tự nhiên)
Ta có $(m+2y)(m-2y)=49$
Chú ý rằng $m+2y\geq m-2y$ và $m+2y>0$ nên có bảng giá trị:

$m+2y$	49	7
$m-2y$	1	7
y	12	0

- Với $y=12$ thay vào (2) được $x_1=9\,;\ x_2=-16$
- Với $y=0$, thay vào (1) được $x_3=0\,;\ x_4=-7$

Đáp số: $9\,;\ -16\,;\ 0\,;\ -7$

Bài 3.6:

a) Tìm các số nguyên x để x^2+x+6 là số chính phương.

b) Tìm các số hữu tỉ x để x^2+x+6 là số chính phương.

Giải tương tự như bài trên
Đáp số: $5\,;\ -6$

Bài 3.7: Tìm hai số nguyên dương có hiệu bằng 17 và tích của chúng là một số chính phương.
Cần tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x(x+17) = y^2$. Nhân cả hai vế với 4 và đưa về phương trình ước số
$(2x+17+y)(2x+17-y) = 17^2$. Giải ra được $x = 64, x = 17 = 81$

Bài 3.8: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $8x^2 - 5y^2 + 10x + 4 = 0$;

b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$;

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 0$.

a) $8x^2 - 5y^2 + 10x + 4 = 0$;
Cách 1. Ta coi phương trình là phương trình bậc 2 ẩn x. Khi đó $\Delta' = 25 - 8(4 - 5y^2) = 40y^2 - 7$, do đó chữ số tận cùng của Δ bằng 3 nên không phải là số chính phương. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.
Cách 2. Ta có $8x^2 + 4 = 5y^2 - 10x \Leftrightarrow 4(2x^2+1) = 5(y^2 - 2x)$. Ta thấy $4(2x^2+1) \vdots 5$ nên $(2x^2+1) \vdots 5$. Suy ra $2x^2$ tận cùng bằng 4, do đó x^2 tận cùng bằng 2 hoặc 7. Điều này không xảy ra. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$;
Biến đổi $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7 \Leftrightarrow 2x^2 - xy + 4xy - 2y^2 = 7 \Leftrightarrow (x+2y)(2x-y) = 7$.
Ta có bảng giá trị

$x+2y$	1	-1	7	-7
$2x-y$	7	-7	1	-1
x	3	-3	loại	loại
y	-1	1		

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + (y^2 - 8y) = 0$; Ta có $\Delta' = 1 - y^2 + 8y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (y-4)^2 \leq 0$.
Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $-4 \leq y - 4 \leq 4$, tức là $0 \leq y \leq 8$. Xét bảng giá trị

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Δ'	1	8	13	16	17	16	13	8	1

Để Δ' là số chính phương, chỉ có bốn trường hợp y bằng $0, 3, 5, 8$.

- Với $y = 0$ thay vào phương trình ban đầu ta được $x = 0$ hoặc $x = 2$.

- Với $y = 3$ thay vào phương trình ban đầu ta được $x = -3$ hoặc $x = 5$.
- Với $y = 5$ thay vào phương trình ban đầu ta được $x = -3$ hoặc $x = 5$.
- Với $y = 8$ thay vào phương trình ban đầu ta được $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Đáp số. Nghiệm của phương trình là $(0;0), (2;0), (-3;3), (5;3), (-3;5), (5;5), (0;8), (2;8)$.

Bài 3.9: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$7\left(x^2 + y^2\right) = 25\left(x + y\right).$$

Xét $7\left(x^2 + y^2\right) = 25\left(x + y\right)$ với x, y nguyên dương. Ta thấy $(x + y) \vdots 7$.
Đặt $x + y = 7k (kin\mathbb{N})$ thì $x^2 + y^2 = 25k$.
Ta có bất đẳng thức $(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2)$ nên $49k^2 \le 50k$.
Do $k > 0$ nên $49k \le 50$ suy ra $k = 1$.
Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.
Ta tìm được $(x; y)$ là $(3; 4)$ hoặc $(4; 3)$.

Bài 3.10: Cho phương trình $7y^2 - 6x^2 = x - y$, trong đó x và y là các số nguyên dương và $x > y$.

a) Gọi d là ƯCLN(x, y). Chứng minh rằng $x - y = d^2$.

b) Chứng minh rằng khi d nhỏ nhất thì x nhỏ nhất và y nhỏ nhất. Từ đó tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình trên.

a) $7y^2 - 6x^2 = x - y \Leftrightarrow y^2 = 6x^2 - 6y^2 + x - y \Leftrightarrow y^2 = (x - y)(6x + 6y + 1)$.
Ta có $d = CLN(x, y)$ nên đặt $x = dm, y = dn$, $(m, n) = 1$ và $x - y = d(m - n)$.
Đặt $m - n = k$. Do $x > y$ nên $k > 0$. Ta sẽ chứng minh $d = k$. Thay $x - y = dk$ vào $y^2 = (x - y)(6x + 6y + 1)$ ta được $(dn)^2 - dk(6dm + 6dn + 1)$ nên $dn^2 = k(6dm + 6dn + 1) \Rightarrow dn^2 = 6kdm + 6kdn + k$ (*).
Ta có $(m, n) = 1$ nên $(n, m - n) = 1$ tức là $(n, k) = 1$. Ta lại có $dn^2 \vdots k$ (do (*)) nên $d \vdots k$.
Mặt khác từ (*) suy ra $6kdm + 6kdn + k \vdots d$, do đó $k \vdots d$.
Do k, d là các số tự nhiên nên suy ra $d = k$. Vậy $x - y = dk = d^2$.

b) Chứng minh rằng khi d nhỏ nhất thì x nhỏ nhất và y nhỏ nhất. Từ đó tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình trên.
Theo câu a) ta có $y = dn$, $x = y + d^2 = dn + d^2$.
Ta sẽ chứng minh rằng khi d nhỏ nhất thì n nhỏ nhất.

Ta biểu thị n theo d. Do $d = k$ (chứng minh ở ý a) nên từ (*) suy ra $n^2 = 6m + 6dn + 1$.
Ta lại có $dm = x = dn + d^2$ nên

$$n^2 = 6(dn + d^2) + 6dn + 1 = 6d^2 + 12dn + 1$$

Giải phương trình $n^2 - 12dn - (6d^2 + 1) = 0$ với ẩn n, ta được $n = 6d + \sqrt{42d^2 + 1}$ (với $n > 0$).
Công thức trên chứng tỏ rằng khi d nhỏ nhất thì n nhỏ nhất và do đó dn nhỏ nhất, hay y nhỏ nhất.

- Khi $d = 1$ thì $n = 6 + \sqrt{43}$ (loại).
- Khi $d = 2$ thì $n = 6 \cdot 2 + 13 = 25$, suy ra $x = dn + d^2 = 54$ và $y = dn = 50$.

Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình là $(54; 50)$.

Bài 3.11: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$;

b) $4x^2 + y^2 + 4x - 6y - 24 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - x - y - 8 = 0$.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 0$, do đó $(x; y) = (1; 3)$.

b) $4x^2 + y^2 + 4x - 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 + (y-3)^2 = 34$. Viết 34 dưới dạng $a^2 + b^2$, trong đó a lẻ, ta có

$$34 = 1^2 + 33 = 3^2 + 25 = 5^2 + 9$$

Chỉ có hai trường hợp xảy ra
$\begin{cases} (2x+1)^2 = 3^2 \\ (y-3)^2 = 5^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} (2x+1)^2 = 5^2 \\ (y-3)^2 = 3^2 \end{cases}$
Xét bảng giá trị sau

$2x+1$	3	3	-3	-3	5	5	-5	-5
$y-3$	5	-5	5	-5	3	-3	3	-3

Do đó các nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 8), (1; -2), (-2; 8), (-2; -2), (2; 6), (2; 0), (-3; 6), (-3; 0)$.

c) $x^2+y^2-x-y-8=0 \Leftrightarrow x(x-1)+y(y-1)=8$.
Tích hai số nguyên liên tiếp là số không âm và chỉ tận cùng bằng $0,2,6$. Do đó trong hai tích $x(x-1)$ và $y(y-1)$ có một tích bằng 2, tích còn lại bằng 6.
Giả sử $x(x-1)=2$ và $y(y-1)=6$, ta được $x=2$ hoặc $x=-1$, $y=3$ hoặc $y=-2$. *Đáp số.* Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(2;3),(2;-2),(-1;3),(-1;-2),(3;2),(-2;2),(3;-1),(-2;$

Bài 3.12: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $3\left(x^2-xy+y^2\right)=7(x+y)$;

b) $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7(x+2y)$.

a) $3\left(x^2-xy+y^2\right)=7(x+y)$;
Đặt $\begin{cases} x+y=3m \\ x^2-xy+y^2=7m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3m \\ xy=\dfrac{9m^2-7m}{3} \end{cases}$ (m là số nguyên).
Suy ra x,y là nghiệm của phương trình $3X^2-9mX+(9m^2-7m)=0$ (1)
Ta có $\Delta=-27m^2+84m\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq \dfrac{28}{9}$.
Do m nguyên nên $m\in\{0;1;2;3\}$.
Ta cần $\Delta=3(-9m^2+28m)$ là số chính phương nên suy ra $(-9m^2+28m)\vdots 3 \Rightarrow 28m\vdots 3 \Rightarrow m\vdots 3$. Vậy $m\in\{0;3\}$.

- Với $m=0$, thay vào (1) ta được $X_1=X_2=0$.
- Với $m=3$, thay vào (1) ta được $X_3=5; X_4=4$.

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(0;0),(5;4),(4;5)$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
&5\left(x^2+xy+y^2\right)=7(x+2y)\\
&\Leftrightarrow 5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)\\
&\Leftrightarrow 5x^2+5xy+5y^2=7x+14y\\
&\Leftrightarrow 5y^2+(5x-14)y+(5x^2-7x)=0
\end{aligned}$$

Giải $\Delta\geq 0$ được $75x^2\leq 196$ nên $x^2\leq 2$. Suy ra $x\in\{-1;0;1\}$.
Đáp sô. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(0;0),(1;2),(-1;3)$.

Bài 3.13: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $8y^2-25=3xy+5x$;

b) $xy - 2y - 3 = 3x - x^2$;

c) $4x^2 + 2xy + 4x + y + 3 = 0$;

d) $x^2 + 2y^2 + 2xy + y - 2 = 0$.

a) Ta thấy

$8y^2 - 25 \vdots (3y+5)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 9(8y^2 - 25) \vdots (3y+5) \\ &\Rightarrow \left(8(9y^2 - 25) - 25\right) \vdots (3y+5) \\ &\Rightarrow 25 \vdots (3y+5) \end{aligned};$$

Xét bảng giá trị dưới đây để tìm nghiệm $(x; y)$.

$3y+5$	-1	-5	-25	1	5	25
$3y$	-6	-10	-30	-4	0	20
y	-2	loại	-10	loại	0	loại
x	-7		-31		-5	

b) $xy - 2y - 3 = 3x - x^2$
Cách 1. Biểu thị y theo x rồi tách ra giá trị nguyên, có $y(x-2) = 3 + 3x - x^2$.

- Với $x = 2$ không thỏa mãn phương trình.
- Với $x \neq 2$ thì $y = \dfrac{3 + 3x - x^2}{x - 2} = \dfrac{-x(x-2) + x - 2 + 5}{x - 2} = -x + 1 + \dfrac{5}{x-2}$.
  Ta có bảng giá trị sau

$x-2$	1	-1	5	-5
x	3	1	7	-3
y	3	-5	-5	3

Cách 2. Đưa về phương trình ước số

$$\begin{aligned} &xy - 2y - 3 = 3x - x^2 \\ \Leftrightarrow\ &y(x-2) + x^2 - 2x - x + 2 = 5 \\ \Leftrightarrow\ &(y + x - 1)(x - 2) = 5 \end{aligned}$$

Ta có bảng giá trị

$x-2$	1	-1	5	-5
$x+y-1$	5	-5	1	-1
x	3	1	7	-3
y	3	-5	-5	3

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(3;3),(1;-5),(7;-5),(-3;3)$.

c) $4x^2+2xy+4x+y+3=0$;
Cách 1. $4x^2+2(y+2)x+(y+3)=0$.
Ta có $\Delta'=(y+2)^2-4(y+3)=y^2-8$.
Giải điều kiện $y^2-8=m^2(m\in\mathbf{N})$ được $y\in\{3;-3\}$.
Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(-1;3),(0;-3)$.
Cách 2. Biểu thị y theo x được $y=\dfrac{-4x^2-4x-3}{2x+1}=-2x-1-\dfrac{2}{2x+1}$.
Suy ra $2x+1$ phải là ước lẻ của 2. Do đó $x=0$ hoặc $x=-1$. Ta thu được đáp số như trên.
Cách 3. Đưa về phương trình ước số

$$\begin{aligned}&4x^2+4x+1+2xy+y=-2\\ \Leftrightarrow\ &(2x+1)^2+y(2x+1)=-2\\ \Leftrightarrow\ &(2x+1)(2x+y+1)=-2\end{aligned}$$

d) $x^2+2y^2+2xy+y-2=0\Leftrightarrow x^2+2yx+(2y^2+y-2)=0$.
Ta có $\Delta'=y^2-2y^2-y+2=-y^2-y+2\geq 0\Leftrightarrow -2\leq y\leq 1$.

- Với $y=-2$, thay vào phương trình ban đầu ta được $x=2$.
- Với $y=-1$, thì Δ' không là số chính phương, loại.
- Với $y=0$,thì Δ' không là số chính phương, loại.
- Với $y=1$, thay vào phương trình ban đầu ta được $x=-1$.

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(-1;1),(2;-2)$.

Bài 3.14: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^2+2y^2-2xy+4x-3y-26=0$;

b) $x^2+3y^2+2xy-2x-4y-3=0$;

c) $2x^2+y^2+3xy+3x+2y+2=0$;

d) $3x^2-y^2-2xy-2x-2y+8=0$.

a) $x^2+2y^2-2xy+4x-3y-26=0 \Leftrightarrow x^2+2(2-y)x+(2y^-3y-26)=0$.
Ta có $\Delta'=-y^2-y+30\geq 0 \Leftrightarrow -6\leq y\leq 5$.
Chỉ có 2 trường hợp $y=-6$ và $y=5$ cho Δ' là số chính phương. *Đáp số.* Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(-8;-6),(3;5)$.

b) $x^2+3y^2+2xy-2x-4y-3=0 \Leftrightarrow x^2+2(y-1)x+(3y^2-4y-3)=0$;
Ta có Ta có $\Delta'=-2y^2+2y+4\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq y\leq 2$.

- Với $y=-1$, được $x=2$.
- Với $y=0$, được $x=-1$ hoặc $x=3$
- Với $y=1$, được $x=-2$ hoặc $x=2$
- Với $y=2$, được $x=-1$

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(2;-1),(-1;0),(3;0),(-2;1),(2;1),(-1;2)$.

c) $2x^2+y^2+3xy+3x+2y+2=0$;
Cách 1. $2x^2+y^2+3xy+3x+2y+2=0 \Leftrightarrow y^2+(3x+2)y+(2x^2+3x+2)=0$.
Ta có $\Delta=x^2-4$.
Giải điều kiện $x^2-4=m^2$ ta được $x=2$ hoặc $x=-2$.
Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(2;-4),(-2;2)$.
Cách 2. Đưa về phương trình ước số $(2x+y+1)(x+y+1)=-1$.

d) $3x^2-y^2-2xy-2x-2y+8=0$.
Cách 1. $3x^2-y^2-2xy-2x-2y+8=0 \Leftrightarrow y^2+2(x+1)y-(3x^2-2x+8)=0$.
Ta có $\Delta'=4x^2+9$. Giải điều kiện $4x^2+9=m^2 (m\in\mathbb{N})$ được $x\in\{2;0;-2\}$

- Với $x=2$, được $y\in\{-8;2\}$
- Với $x=0$, được $y\in\{-4;2\}$
- Với $x=-2$, được $y\in\{6;-4\}$

Đáp số. Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(2;-8),(2;2),(0;-4),(0;2),(-2;6),(-2;-4)$.
Cách 2. Đưa về phương trình ước số

$4x^2-(x^2+y^2+2xy+2x+2y+1)=-9$

$\Leftrightarrow (x+y+1)^2-(2x)^2=9$

$\Leftrightarrow (3x+y+1)(y-x+1)=9$

Bài 3.15: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y - 8 = 0$.

a) Ta có

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - 2(x-y) + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

Đáp số. Nghiệm nguyên của phương trình là $(t; t-1)$ với $t \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = 9$$
$$\Leftrightarrow (x+y-1)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1 = 3 \\ x+y-1 = -3 \end{array}\right.$$

Đáp số. Nghiệm nguyên của phương trình là $(t; 4-t)$ và $(k; -k-2)$ với $t, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA HAI ẨN

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = y^3. \tag{1}$$

Ta thấy $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên từ (1) suy ra $x^3 < y^3$. Do đó $x < y$.
Xét hai trường hợp:

a) Trường hợp $y = x + 1$. Thay vào (1) được:
$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)^3$
$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x+1) = 0$
Vậy $x_1 = 0; x_2 = -1$

b) Trường hợp $y > x + 1$. Ta có $y^3 > (x+1)^3$ nên từ (1) ta có:
$x^3 + x^2 + x + 1 > (x+1)^3$
$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x < 0 \Leftrightarrow 2x(x+1) < 0$
$\Leftrightarrow -1 < x < 0$, loại do $x \in \mathbb{Z}$
Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1), (-1; 0)$

Ví dụ 2: Tính nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x^3 - y^3 = xy + 8$ b) $x^3 + y^3 = 3xy + 3$

a) *Cách 1:* $x^3 - y^3 = xy + 8$
$\Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y) = xy + 8$
Đặt $x - y = a, xy = b$ (a, b là các số nguyên), ta có:
$a^3 + 3ab = b + 8 \Leftrightarrow a^3 - 8 = -b(3a - 1)$
Suy ra $(a^3 - 8) \vdots (3a - 1) \Rightarrow 27(a^3 - 8) \vdots (3a - 1) \Rightarrow (27a^3 - 1 - 215) \vdots (3a - 1)$
Do $(27a^3 - 1) \vdots (3a - 1)$ nên $215 \vdots (3a - 1)$
Phân tích ra thừa số nguyên tố: $215 = 5.43$
Do đó $3a - 1 \in \{\pm 1\,;\,\pm 5\,;\,\pm 43\,;\,\pm 215\}$
Do $3a - 1$ chia cho 3 dư 2 nên $3a - 1 \in \{-1\,;\,5\,;\,-43\,;\,215\}$
Ta có bảng giá trị sau:

$3a-1$	-1	5	-43	215
a	0	2	-14	72
$b=\dfrac{a^3-8}{1-3a}$	-8	0	-64	-1736

$\Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)=3xy+3$

Đặt $x+y=a$, $xy=b$ (a,b là các số nguyên) ta có:

$a^3-3ab=3b+3 \Leftrightarrow a^3-3=3b(a+1)$ nên $(a^3-3) \vdots (a+1)$

$\Leftrightarrow (a^3+1-4) \vdots (a+1) \Leftrightarrow 4 \vdots (a+1)$

Do $a^3-3 \vdots 3$ nên $a \vdots 3$, suy ra $a+1$ chia cho 3 dư 1

Ta có bảng giá trị sau:

$a+1$	1	-2	4
a	0	-3	3
$b=\dfrac{a^3-3}{3(a+1)}$	-1	5	2

- Trường hợp $a=0$; $b=-1$ cho $(x;y)$ bằng $(1;-1)$ và hoán vị của nó.
- Trường hợp $a=-3$; $b=5$ không cho nghiệm
- Trường hợp $a=3$; $b=2$ cho $(x;y)$ bằng $(1;2)$ và hoán vị của nó.

Vậy nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(1;2)$, $(2;1)$

b) *Cách 2:* Đặt $x+y=a(a\in\mathbb{Z})$. Ta có

$x^3+(a-x)^3=3x(a-x)+3$

$\Leftrightarrow a^3-3a^2+3ax^2=3ax-3x^2+3$

$\Leftrightarrow 3(a+1)x^2-3a(a+1)x+(a^3-3)=0$

- Với $a=-1$ thì phương trình (1) trở thành $0x=4$, vô nghiệm
- Với $a\neq -1$ ta có:
  $\Delta=9a^2(a+1)^2-12(a+1)(a^3-3)$
  $=3(a+1)[3a^2(a+1)-4(a^3-3)]$
  $=3(a+1)(3a^2-a^3+12)$
  Để phương trình (1) có nghiệm, ta phải có $\Delta\geq 0$
  Xét dấu $3a^2-a^3+12$, tức là $a^2(3-a)+12$ ta thấy:
  - Với $a\leq 3$ thì $a^2(3-a)+12>0$
  - Với $a\geq 4$ thì $a^2(3-a)+12<0$
  Xét dấu $a+1$ ta thấy $a+1\geq 0 \Leftrightarrow a\geq -1$.
  Ta có bảng dấu của Δ

a	...	-2	0	1	2	3	4	...
$3a^2-a^3+12$	+	+	+	+	+	+	-	-
$a+1$	-	-	+	+	+	+	+	+
Δ	-	-	+	+	+	+	-	-

Để $\Delta \geq 0$ ta chỉ xét $a \in \{0;1;2;3\}$

Lần lượt xét a bằng 0;1;2;3 ta tìm được nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(1;2)$, $(2;1)$

Kinh nghiệm giải toán: Ở câu a, do hệ số của xy là 1 nên có thể giải theo cách 2

Ở các phương trình chứa biểu thức x^3+y^3 hoặc x^3-y^3 nên vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ có liên quan. Cũng có thể đặt ẩn phụ cho các biểu thức $x+y$ (hoặc $(x-y)$) và xy.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^3-y^3=13(x^2+y^2)$$

Đặt ƯCLN$(x,y)=d\geq 1$ thì $x=ad$; $y=bd$ với $a>b\geq 1$ và $(a,b)=1$

Ta có $a^3d^3-b^3d^3=13(a^2d^2+b^2d^2)$

$\Leftrightarrow d(a-b)(a^2+ab+b^2)=13(a^2+b^2)$ (1)

Suy ra $13(a^2+b^2) \vdots (a^2+ab+b^2)$ (2)

Ta chứng minh được $(a^2+b^2\ ,\ a^2+ab+b^2)=1$. Thật vậy, nếu a^2+b^2 và a^2+ab+b^2 cùng có ước nguyên tố p thì $ab \vdots p$. Suy ra tồn tại $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$. Giả sử $a \vdots p$ thì $b^2 \vdots p$ nên $b \vdots p$, trái với giả thiết $(a,b)=1$

Do đó từ (2) suy ra $13 \vdots a^2+ab+b^2$. Do $a\geq 2$ và $b\geq 1$ nên: $a^2+ab+b^2=13(3)$ Do $a>b$ nên $a^2+ab+b^2>3b^2$. Từ $3b^2<13$ ta có $b=1$ hoặc $b=2$

- Thay $b=1$ vào (3) được $a^2+a=12 \Rightarrow a(a+1)=12 \Rightarrow a=3$. Thay $a=3, b=1$ vào (1) được $d=5$. Từ đó $x=15, y=5$
- Thay $b=2$ vào (3) được $a^2+2a=9 \Rightarrow a(a+2)=9$ (loại)

Vậy nghiệm $(x;y)$ là $(15;5)$

BÀI TẬP

Bài 4.1: Tìm số nguyên x để x^3+3x là lập phương của một số nguyên

Giả sử $x^3+3x=y^3$ $(y\in\mathbb{Z})$. (1)

Ta có $x^3-3x^2+3x-1<x^3+3x<x^3+3x^2+3x+1$ nên $(x-1)^3<y^3<(x+1)^3$

Suy ra $y^3 = x^3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x^3 + 3x = x^3 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x = 0$ thì $y = 0$

Bài 4.2: Cho phương trình sau với nghiệm nguyên:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = y^3$$

a) Chứng minh rằng $y \le x + 1$

b) Chứng minh rằng $y > x - 1$

c) Giải phương trình trên

a) Ta có $y^3 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - x^2 = (x+1)^3 - x^2 \le (x+1)^3$ suy ra $y \le x + 1$

b) Ta có $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 5x^2 + 2 = (x-1)^3 + 5x^2 + 2 > (x-1)^3$ suy ra $y > x - 1$

c) Từ câu a và b suy ra $x - 1 < y \le x + 1$
Do x, y là các số nguyên nên $y = x$ hoặc $y = x + 1$

- Trường hợp $y = x$, ta có $x^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$
suy ra $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ loại
- Trường hợp $y = x + 1$, ta có $(x+1)^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Suy ra $y = 1$. Nghiệm $(x; y)$ là $(-1; -1)$, $(0; 1)$

Bài 4.3: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^3 - y^3 = xy + 25$

b) $x^3 - y^3 = 2xy + 13$

c) $x^3 - y^3 = 3xy + 1$

d) $x^3 + y^3 = 3xy - 1$

a) Giải tương tự như cách 1 của ví dụ 2a
$x^3 - y^3 = xy + 25 \Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y) = xy + 25$
Đặt $x - y = a$, $xy = b$ (a, b là các số nguyên), ta có:
$a^3 + 3ab = b + 25 \Leftrightarrow a^3 - 25 = b(1 - 3a)$
Suy ra $(a^3 - 25) \vdots (3a - 1)$, nên $27(a^3 - 25) \vdots (3a - 1)$, từ đó $3a - 1$ là ước của 674 và chọn được $3a - 1$ lấy giá trị thuộc $\{-1 ; 2 ; -337 ; 674\}$
Tương ứng với các giá trị trên tìm được:

- $\begin{cases} a = 0 \\ b = -25 \end{cases}$
- $\begin{cases} a = 1 \\ b = 12 \end{cases}$
- $\begin{cases} a = -112 \\ b = -4169 \end{cases}$
- $\begin{cases} a = 225 \\ b = -16900 \end{cases}$

Do phải có $a^2 + 4b \geq 0$ nên chỉ có một trường hợp $a = 1, b = 12$.
Nghiệm $(x; y)$ là $(4; 3)$, $(-3; -4)$.
Lưu ý. Nếu yêu cầu tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3 - y^3 = xy + 25$, ta có cách giải sau:
Từ (1) suy ra $x > y$, do đó $x - y \geq 1$
$(1) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 25$
Do $x - y \geq 1$ và $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên $x^2 + xy + y^2 \leq xy + 25$
Suy ra $x^2 + y^2 \leq 25$ nên $x \leq 4$
Mặt khác do $x > y$ nên $xy \leq 2$. Từ (1) suy ra
$x^3 - y^3 \geq 27 \Rightarrow x^3 > 27 \Rightarrow x > 3$
Từ (2) và (3) suy ra $x = 4$. Do $y < x$ nên $y \in \{1; 2; 3\}$
Chỉ có $y = 3$ thỏa mãn (1)
Nghiệm $(x; y)$ là $(4; 3)$

b) $x^3 - y^3 = 2xy + 13 \Leftrightarrow (x - y)^3 + 3xy(x - y) = 2xy + 13$
Đặt $x - y = a, xy = b$ (a, b là các số nguyên), ta có:
$a^3 + 3ab = 2b + 13 \Leftrightarrow a^3 - 13 = b(2 - 3a)$
Suy ra $(a^3 - 13) \vdots (3a - 2)$ nên $27(a^3 - 13) \vdots (3a - 2)$, từ đó $3a - 2$ là ước của 343 và chọn được $3a - 2$ lấy giá trị thuộc $\{1; 7; 49; 343\}$
Tương ứng với các giá trị trên tìm được

- $\begin{cases} a = 1 \\ b = 12 \end{cases}$
- $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$
- $\begin{cases} a = 17 \\ b = -100 \end{cases}$
- $\begin{cases} a = 115 \\ b = -4434 \end{cases}$

Do phải có $a^2 + 4b \geq 0$ nên chỉ có hai trường hợp đầu thỏa mãn.
Vậy nghiệm $(x; y)$ là $(4; 3)$, $(-3; -4)$, $(1; -2)$, $(2; -1)$.

c) Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

với $a = x$, $b = -y$, $c = -1$ ta có:

$$x^3 - y^3 - 1 - 3xy = \frac{1}{2}(x - y - 1)[(x + y)^2 + (-y + 1)^2 + (-1 - x)^2].$$

Theo đề bài $x^3 - y^3 - 1 - 3xy = 0$
Từ đó suy ra $(x-y-1)[(x+y)^2 + (1-y)^2 + (x+1)^2] = 0$
Nghiệm $(x;y)$ là $(-1;1)$ và $(t;t-1)$ với $t \in \mathbb{Z}$

d) Nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$ và $(t;-t-1)$ với $t \in \mathbb{Z}$

Bài 4.4: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^3 + y^3 = 2013$

b) $x^3 + y^3 = (x+y)^2$

c) $x^3 + y^3 = 6xy - 1$

d) $x^3 + y^3 = 2xy + 11$

a) Ta thấy lập phương của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư 0,1,8
Theo nhận xét trên, $x^3 + y^3$ chia cho 9 chỉ có thể dư là 0,1,8,2,7, còn 2013 chia cho 9 dư 6
Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên

b) $x^3 + y^3 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2$

- Nếu $x + y = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(t;-t)$ với $t \in \mathbb{Z}$
- Nếu $x + y \neq 0$ thì $x^2 - xy + y^2 = x + y$
  $\Leftrightarrow x^2 - (y+1)x + (y^2 - y) = 0$
  $\Delta = (y+1) - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1$
  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3(y-1)^2 \leq 4$
  Do y nguyên nên $(y-1)^2$ lấy giá trị thuộc $\{0\ ;\ 1\}$, do đó $y - 1$ thuộc $\{0\ ;\ 1\ ;\ -1\}$, tức là $y \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 0\}$
  - Thay $y = 1$ vào (1) được $x^2 - 2x = 0$, ta có $x_1 = 0\ ,\ x_2 = 2$
  - Thay $y = 2$ vào (1) được $x^2 - 3x + 2 = 0$, ta có $x_3 = 1\ ,\ x_4 = 2$
  - Thay $y = 0$ vào (1) được $x^2 - x = 0$, ta có $x_5 = 0\ ,\ x_6 = 1$
    Nghiệm $(x;y)$ là $(0;1)\ ,\ (2;1)\ ,\ (1;2)\ ,\ (2;2)\ ,\ (1;0)$

c) $x^3 + y^3 = 6xy - 1 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 6xy - 1$
Đặt $x + y = a\ ,\ xy = b$ (a, b là các số nguyên), ta có:
$a^3 - 3ab = 6b - 1 \Leftrightarrow a^3 + 1 = 3b(a+2)$
Suy ra $(a^3 + 1) \vdots (a+2)$, từ đó $a + 2$ là ước của 7. Ta có bảng giá trị:

$a+2$	1	-1	7	-7
a	-1	-3	5	-9
$b = \dfrac{a^3+1}{3(a+2)}$	0	không nguyên	6	không nguyên

Nghiệm $(x;y)$ là $(0;-1)$, $(-1;0)$, $(2;3)$, $(3;2)$

d) $x^3+y^3=2xy+11 \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)=2xy+11$
Đặt $x+y=a$, $xy=b$ (a,b là các số nguyên), ta có:
$a^3-3ab=2b+11 \Leftrightarrow a^3-11=b(3a+2)$
Suy ra $(a^3-11)\,\vdots\,(3a+2)$, nên $27(a^3-11)\,\vdots\,(3a+2)$ tức là $(27a^3+8-305)\,\vdots\,(3a+2)$
từ đó $3a+2$ là ước của 305
Ta có bảng giá trị:

$3a+2$	-1	5	-61	305
a	-1	1	-21	101
$b=\dfrac{a^3-11}{3a+2}$	12	-2	152	3378

Vì $(x+y)^2 \geq 4xy$ nên loại các trường hợp $a^2<4b$
Nghiệm $(x;y)$ là $(-1;2),(2;-1)$.

Bài 4.5: Giải mỗi phương trình sau:

a) $x^2y-2xy+y=125x$ với nghiệm nguyên dương

b) $x^3-x^2y+2x-y=2$ với nghiệm nguyên

c) $x^2+y^3-3y^2+3y=6$ với nghiệm tự nhiên

d) $x^3-y^3=2(x^2+y^2)+3xy+17$ với nghiệm tự nhiên

e) $x^3+y^3=3(x^2+y^2)$ với nghiệm nguyên dương

a) $x^2y-2xy+y-125x=0 \Leftrightarrow y(x^2-2x+1)=125x$

- $x=1$ không thỏa mãn phương trình
- Với $x\neq 1$ ta có $y=\dfrac{125x}{(x-1)^2}$
  Do x và $x-1$ là nguyên tố cùng nhau nên $5^3\,\vdots\,(x-1)^2$. Từ đó $(x-1)^2$ lấy giá trị thuộc $\{1;25\}$
  Vì x,y nguyên dương nên ta tìm được các nghiệm $(x;y)$ là $(2;250)$, $(6;30)$

b) $x^3-x^2y+2x-y=2 \Leftrightarrow (x^2+1)y=x^3+2x-2$
$\Leftrightarrow (x^2+1)y=x(x^2+1)+(x-2)$
Suy ra $(x-2)\,\vdots\,(x^2+1) \Rightarrow (x^2-4)\,\vdots\,(x^2+1) \Rightarrow 5\,\vdots\,(x^2+1) \Rightarrow x^2+1\in\{1;5\}$

Do đó $x \in \{0; 2; -2\}$
Với $x = 0$ thì $y = -2$
Với $x = 2$ thì $y = 2$
Với $x = -2$ thì y không là số nguyên
Nghiệm $(x; y)$ là $(0; -2)$, $(2; 2)$

c) $x^2 + y^3 - 3y^2 + 3y = 6 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^3 = 5$
Do $x^2 \geq 0$ nên $(y-1)^3 \leq 5$. Suy ra $y - 1 \leq 1$, do đó $y \in \{0; 1; 2\}$
Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 2)$

d) $x^3 - y^3 = 2(x^2 + y^2) + 3xy + 17$
$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 17.$ (1)
Do x, y là các số tự nhiên nên $xy + 17 > 0$
Vì $x = y = 0$ không thỏa mãn (1) nên $x^2 + xy + y^2 > 0$.
Suy ra $x - y - 2 > 0$ do đó $x > y + 2$, vậy $x \geq 3$. (2)
Do $x - y - 2 \geq 1$ nên từ (1) suy ra $x^2 + xy + y^2 \leq xy + 17$ từ đó $x^2 + y^2 \leq 17$ (3)
Từ (2) và (3) suy ra $x \in \{3; 4\}$.
Thử các cặp số $(x; y) = (3; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 1)$ vào phương trình đã cho ta được một nghiệm $(x; y)$ là $(4; 1)$.

e) Giải tương tự ví dụ 4, được $3 \vdots a^2 - ab + b^2$ nên $a^2 - ab + b^2 \in \{1; 3\}$. Giả sử $a \geq b$ thì $b = 1$. Bạn đọc tự giải tiếp để được nghiệm $(x; y)$ là $(3; 3)$.

Bài 4.6: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $9x^2 - 6x = y^3$ b) $9x^3 + 6 = y^3$ c) $54x^3 - 1 = y^3$

a) Ta có:

$$9x^2 - 6x = y^3 \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow (3x-1)^2 = y^3 + 1. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $y^3 + 1 \geq 0$ nên $y^3 \geq -1$, do đó $y \geq -1$

- Thay $y = -1$ vào (2) được $(3x-1)^2 = 0$ nên $x = \dfrac{1}{3}$ loại
- Thay $y = 0$ vào (1) đươc $3x(3x-2) = 0$ nên $x = 0$
- Thay $y = 1$ vào (2) được $(3x-1)^2 = 2$ loại

- Xét $y \geq 2$. Ta có $(3x-1)^2 = (y+1)(y^2-y+1)$
  Đặt $d = \text{ƯCLN}(y+1, y^2-y+1)$
  Do $y^2-y+1 = y(y+1) - 2(y+1) + 3$ nên $3 \vdots d$
  Do $(3x-1)^2$ không chia hết cho 3 nên từ (3) suy ra $d \neq 3$
  Vậy $d = 1$
  Các số nguyên dương $y+1$ và y^2-y+1 nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương nên mỗi số đều là số chính phương, nhưng $(y-1)^2 < y^2-y+1 < y^2$ (do $y \geq 2$) nên (y^2-y+1) không thể là số chính phương.
  Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$

b) $9x^3 + 6 = y^3$. Vế trái chia cho 9 có số dư là 6, còn vế phải chia cho 9 có số dư là 0,1,8. Phương trình không có nghiệm nguyên.

c) $54x^3 - 1 = y^3$. (1)

- Với $x = 0$ thì $y = -1$
- Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế của (1) với $216x^3$ được:
  $216x^3(54x^3-1) = 216x^3y^3 \Leftrightarrow 216x^3.54x^3 - 216x^3 = (6xy)^3$
  $\Leftrightarrow (6.18.x^3)^2 - 2(6.18x^3) = (6xy)^3$
  $\Leftrightarrow (6.18x^3-1)^2 = (6xy)^3 + 1$
  Đặt $a = 18x^3, b = 6xy$ ta có $(6a-1)^2 = b^3 + 1$
  Suy ra $b^3 \geq -1$ nên $b \geq -1$
  Lần lượt xét $b = -1$, $b = 0$, $b = 1$, $b \geq 2$ và giải theo cách ở câu a đều loại
  Nghiệm $(x;y)$ là $(0;-1)$

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN VỚI HAI ẨN

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^4 - 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 9 = 0$$

Ta có: $x^4 - 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2+y\right)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2+y+2x\right).\left(x^2+y-2x\right) = 9.$
Suy ra: $x^2 + y + 2x$ và $x^2 + y - 2x$ là ước của 9 nên ta có bảng giá trị sau:

x^2+y+2x	1	3	9	-1	-3	-9
x^2+y-2x	9	3	1	-9	-3	-1
$2x$	-4	0	4	4	0	-4
x	-2	0	2	2	0	-2
y	1	3	1	-9	-3	-9

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(-2;-1), (0;3), (2;1), (2;-9), (0;-3), (-2;-9)$.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2. \tag{1}$$

Nếu y thỏa mãn phương trình thì $-y$ cũng thỏa mãn, do đó ta giả sử $y \geq 0$, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right) = y^2.$$

Đặt $x^2 + 3x + 1 = a$, ta được:

$$(a-1)(a+1) = y^2 \Leftrightarrow a^2 - 1 = y^2 \Leftrightarrow (a+y)(a-y) = 1.$$

Suy ra $a + y = a - y$, do đó: $y = 0$.
Thay vào (1) được: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2, x_4 = -3$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là: $(0;0), (-1;0), (-2;0), (-3;0)$.

Ví dụ 3: Tìm các số nguyên x để biểu thức: $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$ là một số chính phương
Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$.
Cách 1. Ta thấy $y^2 = \left(x^4+2x^3+x^2\right) + \left(x^2+x+3\right) = (x^2+x)^2 + (x^2+x+3)$.
Ta sẽ chứng minh $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ với $a = x^2 + x$.
Thật vậy: $y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4} > 0$.
$(a+2)^2 - y^2 = (x^2+x+2)^2 - (x^4+2x^3+2x^2+x+3)$

$= 3x^2 + 3x + 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} > 0.$

Do $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ nên $y^2 = (a+1)^2$.

hay là $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = -2$.

Cách 2. Đưa về phương trình ước số:

Nhân hai vế của phương trình đã cho với 4 ta được:

$$\begin{aligned} 4y^2 &= 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 12 \\ &= 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 11 \\ &= \left(2x^2 + (2x+1)\right)^2 = 11 \end{aligned}$$

Do đó $(2x^2 + 2x + 1 + 2y)(2x^2 + 2x + 1 - 2y) = -11$

Ta có $2x^2 + 2x + 1 + 2y \geq 2x^2 + 2x + 1 - 2y$ nên xảy ra hai trường hợp:

TH1. $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 + 2y = 11 \\ 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 = 5 \\ 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. . \\ y = 3 \end{cases}$

TH2. $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 + 2y = 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 = -5 \\ 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 3 = 0 \\ y = 3. \end{cases}$

Hệ này vô nghiệm.

Đáp số: Có hai số nguyên 1 và -2 thỏa mãn.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = 10y + 9. \tag{1}$$

Ta thấy $10y + 9 \geq 0$ nên $y \geq -\dfrac{10}{9}$. Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \geq 0$.

- Xét $y = 0$ thì (1) trở thành $x^4 = 9$ (loại). Ta chỉ xét $y > 0$.
  Vì phương trình (1) không thay đổi khi thay x bởi $-x$, ta giả sử $x \geq 0$.
- Xét $x = 0$ thì (1) trở thành $y^4 = 10y + 9 \Leftrightarrow y(y^3 - 10)$. Suy ra $9 \,\vdots\, y$.
  Lần lượt xét y bằng $1, 3, 9$ không có giá trị nào của y thỏa mãn.
- Xét $x \geq 1$ và $y \geq 1$ thì $x + y \geq 2$. Viết (1) dưới dạng

$$(x+y)(x-y)^2 = \frac{10y+9}{x+y}. \tag{2}$$

Do $x+y \geq 2$ nên $(x+y)(x-y)^2 \geq 2(x-y)^2$. (3)

Ta lại có $\dfrac{10y+9}{x+y} < \dfrac{10y+10x}{x+y} = 10$ (vì $x \geq 1$ nên $10x \geq 10x \geq 10 > 9$). (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra $2(x-y)^2 < 10$ nên $(x-y)^2 < 5$.

Ta lại có $x-y$ lẻ (vì $x-y$ là ước của $10y+9$) nên $(x-y)^2 = 1$.

Thay $(x-y)^2 = 1$ vào (2) được $(x+y)^2 = 10y+9$. (5)

- Với $x-y=1$ thì $x=y+1$. Thay vào (5) được $(2y+1)^2 = 10y+9$.
  $\Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 4 = 0$, loại vì $\Delta = 41$ không là số chính phương.
- Với $x-y=-1$ thì $x=y-1$. Thay vào (5) được $(2y-1)^2 = 10y+9$
  $\Leftrightarrow 2y^2 - 7y - 4 = 0$. Ta có $y_1 = -\dfrac{1}{2}$ (loại); $y_2 = 4$, khi đó $x = 3$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(3;4), (-3;4)$.

►**Kinh nghiệm giải toán:**

- Ta có thể nghĩ đến viết phương trình (1) dưới dạng:

$$x^4 - 2x^2y^2 + (y^4 - 10y - 9) = 0$$

rồi đặt $y^2 = z (z \in \mathbb{N})$ được phương trình bậc hai đối với z là:

$$z^2 - 2y^2z + (y^4 - 10y - 9) = 0$$

Giải các điều kiện $\Delta' \geq 0$ và Δ' là số chính phương đều không có hiệu quả.
Ta sử dụng bất đẳng thức để chặn $(x-y)^2$ như cách giải trên.

- Vì lũy thừa bậc bốn là bình phương của lũy thừa bậc hai nên ta thường tìm nghiệm nguyên của phương trình bậc bốn với hai ẩn theo các cách:
  - Đưa về phương trình bậc hai với hai ẩn.
  - Phân tích thành nhân tử để phát hiện một biểu thức là số chính phương.
  - Phát hiện một số chính phương nằm giữa hai số chính phương.

BÀI TẬP

Bài 5.1: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $(x^2+y)(x+y^2) = (x+y)^3$;

b) $x^4 - 2x^2y + 7y^2 = 55$;

c) $x^2y^2 - 2xy = x^2 + 16y^2$;

d) $3x^2y^2 + x^2 + y^2 = 5xy$.

a) Khai triển rồi rút gọn được $xy(3x + 3y - xy - 1) = 0$.

- Nếu $x = 0$ thì y là số nguyên tùy ý.
- Nếu $y = 0$ thì x la số nguyên tùy ý.
- Nếu $xy \neq 0$ thì $3x + 3y - xy - 1 = 0 \Leftrightarrow (3 - x)(y - 3) = 8$

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(11; 4), (4; 11), (7; 5), (5; 7), (2; -5), (-5; 2), (1; -1), (-1; 1), (0; k), (t; 0)$ với k, t là các số nguyên tùy ý.

b) Đặt $x^2 = z(z \in \mathbb{N})$, ta có

$$z^2 - 2yz + (7y^2 - 55) = 0$$
$$\Delta' = y^2 - (7y^2 - 55) = -6y^2 + 55$$
$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 55 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{55}{6}.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 3), (-2; 3)$.

c) $x^2y^2 - 2xy = x^2 + 16y^2 \Leftrightarrow x^2y^2 - 15y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$$\Leftrightarrow y^2(x^2 - 15) = (x + y)^2.$$

- Với $y = 0$ thì $x = 0$.
- Xét $y \neq 0$ thì $x^2 - 15$ phải là số chính phương.

Đặt $x^2 - 15 = a^2 (a \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 15 \Leftrightarrow (x + a)(x - a) = 15$ và $x + a \geq x - a$.
Ta có bảng giá trị

$x + a$	15	5	-1	-3
$x - a$	1	3	-15	-5
x	8	4	-8	-4
y	-1	-2	1	2

d) $3x^2y^2 + x^2 + y^2 = 5xy$ (1)
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 3xy - 3x^2y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 3xy(1-xy)$ (2)
Từ (2) suy ra $xy(1-xy) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1$.
Do xy là số nguyên nên $xy \in \{0;1\}$.

- Với $xy = 0$, thay vào (1) được $x = y = 0$.
- Với $xy = 1$ thì $x = y = 1$ hoặc $x = y = -1$, đều nghiệm đúng (1).

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0), (1;1), (-1;-1)$.

Bài 5.2: Chứng minh rằng mỗi phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 = 3$;

b) $(x+y)^4 + x^4 + y^4 = 3996$.

a) $x^2(x^2 - y^2) - 4y^2(x^2 - y^2) = 3 \Leftrightarrow (x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y) = 3$. (1)

- Nếu $y = 0$ thì $x^4 = 3$, không có nghiệm nguyên.
- Nếu $y \neg 0$ thì vế trái của (1) là tích của bốn thừa số nguyên khác nhau đôi một, còn vế phải chỉ phân tích được thành nhiều nhất là tích của ba thừa số nguyên khác nhau đôi một: $3 = (-3).1.(-1)$.
  Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Biến đổi về dạng $2(x^2 + y^2 + xy)^2 = 2.1998 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + xy)^2 = 1998$.
Số chính phương không thể có tận cùng bằng 8 nên phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 5.3: Tìm nghiệm nguyên dương của mỗi phương trình sau:

a) $(x^2 - y)(x + y^2) = (x+y)^3$

b) $(x+y)^4 = 40y + 1$.

a) Rút gọn phương trình rồi chia hai vế cho $y \neq 0$ được

$$2y^2 + x(3-y)y + x(3x+1) = 0.$$
$$\Delta = x^2(3-x)^2 - 8x(3x+1)$$
$$= x(x^3 - 6x^2 - 15x - 8) = x(x+1)^2(x-8).$$

Do $(x+1)^2 \neq 0$ nên để Δ là số chính phương thì $x(x-8)$ phải là số chính phương.
Đặt $x(x-8) = a^2 (x \in \mathbb{N})$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 = a^2 + 16 \Leftrightarrow (x-4+a)(x-4-a) = 16.$
Ta thấy $x-4+a$ và $x-4-a$ cùng chẵn và $x-4+a \geq x-4-a$ nên có bảng giá trị sau:

$x-4+a$	-2	-4	4	8
$x-4-a$	-8	-4	4	2
$x-4$	-5	-4	4	5
x	-1,loại	0,loại	8	9
x			10	6 hoặc 21

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(8;10), (9;6), (9;21)$.

b) $(x+y)^4 = 40y + 1$ (1)
Theo đề bài $x \geq 1, y \geq 1$. Viết (1) dưới dạng

$$(x+y)^3 = \frac{40y+1}{x+y}.$$

Ta chứng minh được

$$2(x+y)^2 \leq (x+y)^3 = \frac{40y+1}{x+y} < \frac{40y+40x}{x+y} = 40.$$

nên $(x+y)^2 < 20$. Suy ra $x+y \leq 44$.
Ta lại có $x+y$ lẻ (vì $x+y$ là ước của $40y+1$) và $x+y \geq 2$ nên $x+y = 3$, ta tìm được $x = 1.y = 2$.

Bài 5.4: Giải mỗi phương trình sau:

a) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = y^2 + y$ với nghiệm tự nhiên;

b) $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$ với nghiệm nguyên.

a) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = y^2 + y \Leftrightarrow (x^2+x)^2 + 2(x^2+x) = y^2 + y$
$\Leftrightarrow (x^2+x+1)^2 = y^2 + y + 1$ (1)
Với mọi $y \in \mathbb{N}$ ta có $y^2 < y^2 + y + 1 \leq y^2 + 2y + 1$
nên từ (1) suy ra $y^2 < (x^2+x+1)^2 \leq (y+1)^2$.
Do đó $(x^2+x+1)^2 \leq (y+1)^2$.
Từ đó và (1) có $y^2 + y + 1 = (y+1)^2 \Leftrightarrow y = 0$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$.

b) $x^4+x^3+x^2+x=y^2+y$ (1)
$\Leftrightarrow 4x^4+4x^3+4x^2+4x+1=4y^2+4y+1$
$\Leftrightarrow (2x^2+x)^2+3x^2+4x+1=(2y+1)^2.$

- Trước hết, ta tìm các giá trị của x để xảy ra bất đẳng thức
$(2x^2+x)^2<(2x^2+x)^2+3x^2+4x+1<(2x^2+x+2)^2$ (2)
$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+4x+1>0\\(2x^2+x)^2+4(2x^2+x)^2+4-(2x^2+x)^2-3x^2-4x-1>0\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(3x+1)>0\\5x^2+3>0\end{cases}\Leftrightarrow x<-1$ hoặc $x>-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x\neq -1$ (do $x\in\mathbb{Z}$).
- Như vậy, với $x\neq -1$ thì có (2), lúc đó (1) xảy ra khi
$(2y+1)^2=(2x^2+x+1)$ (3)
tức là $(2x^2+x)^2+3x^2+4x+1=(2x^2+x+1)^2$
$\Leftrightarrow (2x^2+x)^2+3x^2+4x+1=(2x^2+x)^2+2(2x^2+x)+1$
$\Leftrightarrow 3x^2+4x=4x^2+2x$
$\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$. Thay vào (3) tìm được y.
- Với $x=-1$, thay vào (1) được $y=0$ hoặc $y=-1$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(0;-1),(2;5),(2;-6),(-1;0),(-1;-1)$.

Bài 5.5: Tìm các số nguyên x để mỗi biểu thức sau là số chính phương:

a) x^4-x^2+2x+2;

b) $x(x+2)(x^2+2x+3)$;

c) $x(x+1)(x+7)(x+8)$;

d) $x^4+x^3+x^2+x+1$.

a) $x^4-x^2+2x+2=y^2(y\in\mathbb{N}$
$\Leftrightarrow (x^2-1)^2+(x+1)^2=y^2\Leftrightarrow (x+1)^2.\left[(x-1)^2+1\right]=y^2.$

- Nếu $x+1=0$, tức là $x=-1$ thì $y=0$, thỏa mãn.
- Nếu $x+1\neq 0$ thì $(x-1)^2+1=k^2(k\in\mathbb{N})$
$\Leftrightarrow k^2-(x-1)^2=1\Leftrightarrow (k+x-1)(k-x+1)=1.$
Suy ra $k+x-1=k-x+1$ nên $x=1$. Khi đó $y=2$.

Đáp số: -1 và 1.

b) $x(x+2)(x^2+2x+3) = y^2 (y \in \mathbb{N})$ (1)
$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+3) = y^2$.
Đặt $x^2+2x = k$ với $k \in \mathbb{Z}$, ta có $k(k+3) = y^2$.

- Xét $y = 0$, từ (1) ta có $x_1 = 0; x_2 = -2$.
- Xét $y > 0$. Biến đổi

$$\begin{aligned} 4k^2+12k = 4y^2 &\Leftrightarrow (2k+3)^2 - 4y^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (2k+3+2y)(2k+3-2k) = 9 \end{aligned}$$

Ta thấy $2k+3+2y > 2k+3-2y$ nên xảy ra hai trường hợp

- Trường hợp 1: $\begin{cases} 2k+3+2k = 9 \\ 2k+3-2y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2k+3 = 5 \Rightarrow k = 1$.
  Khi đó $x(x+2) = 1$, không có nghiệm nguyên.
- Trường hợp 2: $\begin{cases} 2k+3+2y = -1 \\ 2k+3-2 = -9 \end{cases} \Rightarrow 2k+3 = -5 \Rightarrow k = -4$.
  Khi đó $x(x+2) = -4 \Leftrightarrow x^2+2x-4 = 0$, vô nghiệm.
  Đáp số: 0 và -2.

c) $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2 (y \in \mathbb{Z})$ (1)
$\Leftrightarrow (x^2+8x)(x^2+8x+7) = y^2$.
Đặt $x^2+8x = k$ với $k \in \mathbb{Z}$, ta có $k(k+7) = y^2$ (2)

- Xét $y = 0$, từ (1) ta được $x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = -7; x_4 = -8$.
- Xét $y > 0$. Giải (2) được $k_1 = 9; k_2 = -16$.
  Với $k = 9$ ta có $x^2+8x = 9$ được $x_5 = 1; x_6 = -9$.
  Với $k = -16$ ta có $x^2+8x = -16$ được $x_7 = -4$.

Đáp số: $0; -1; -7; -8; 1; -9; -4$.

d) *Cách 1.* Giả sử $y^2 = x^4+x^3+x^2+x+1$ với $y \in \mathbb{N}$ (1)

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4y^2 = 4x^2+4x^3+4x^2+4x+4 \\ &\Leftrightarrow (2y)^2 = (2x^2+x)^2+3x^2+4x+4 \\ &\Leftrightarrow (2y)^2 = (2x^2+x)^2+2x^2+(x+2)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $(2y)^2 > (2x^2+x)^2$, nên $(2y)^2 \geq (2x^2+x+1)^2$. Do đó

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4 \geq 4x^4+x^2+1+4x^3+4x^2+2x$$

$\Leftrightarrow 0 \geq x^2+2x-3 \Leftrightarrow 0 \geq (x+1)(x-3) \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1;0;1;2;3\}$.

- Thay $x=-1$ vào (1) được $y^2=1=1^2$.
- Thay $x=0$ vào (1) được $y^2=1=1^2$.
- Thay $x=2$ vào (1) được $y^2=5$, loại.
- Thay $x=2$ vào (1) được $y^2=31$, loại.
- Thay $x=3$ vào (1) được $y^2=121=11^2$.

Đáp số: $-1;0;3$.
Cách 2. Giả sử $x^4+x^3+x^2+x+1=y^2$ với $y \in \mathbb{N}$ $\quad(2)$
Từ (2) ta có:

$$\begin{aligned}4y^2 &= 4x^4+4x^3+x^2+4x^2+4x+4\\ &= (2x^2+x)^2+3x^2+4x+4\\ &= (2x^2+x)^2+2x^2+(x+2)^2 > (2x^2+x)^2(3)\end{aligned}$$

Đặt $A=2x^2+x$, ta sẽ chứng minh $4y^2 \leq (A+2)^2$.
Xét $(A+2)^2-4y^2=(2x^2+x+2)^2-4y^2$
$=(2x^2+x)^2+4(2x^2+x)+4-(2x^2+x)^2-3x^2-4x-4$
$=8x^2+4x-3x^2-4x=5x^2$ $\quad(4)$

- Nếu $x=0$ thì $A=0$ và từ (2) có $y^2=1$.
- Nếu $x \neq 0$ thì từ (4) suy ra $(A+2)^2>4y^2$. Kết hợp với (3) được

$$A^2<4y^2<(A+2)^2.$$

Suy ra $(2y)^2=(A+1)^2 \Leftrightarrow 4y^2=(2x^2+x+1)^2$
$\Leftrightarrow (2x^2+x)^2+3x^2+4x+4=(2x^2+x)^2+2(2x^2+x)+1$
$\Leftrightarrow 3x^2+4x+4=4x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$. Ta được $x_1=3; x_2=-1$.
Đáp số: $x=0; x=3; x=-1$.
Biểu thức đã cho theo thứ tự bằng $1;121;1$.

Bài 5.6: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

$a)\quad x^2-8xy^3+32y^6=16; \qquad b)\quad x^2+y^3=y^6.$

a) $x^2 - 8y^3x + (32y^6 - 16) = 0$.
$\Delta' = (4x^3)^2 - (32y^6 - 16) = -16y^6 + 16$.
$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 16y^6 - 16 \leq y^6 - 1 \leq 0$.
Do đó $y \in \{0; -1; 1\}$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(4; 0), (-4; 0), (-4; -1), (4; 1)$.

b) $y^6 - y^3 = x^2 \Leftrightarrow y^3(y^3 - 1) = x^2$.
Tích hai số nguyên liên tiếp là số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

- Trường hợp $y^3 = 0$ cho $y = 0; x = 0$.
- Trường hợp $y^3 - 1 = 0$ cho $y = 1; x = 0$.
  Đáp số: Nghiệm của phương trình là $(0; 0), (0; 1)$.

BÀI 6. PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC VỚI BA ẨN TRỞ LÊN

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$6x + 15y + 10z = 3.$$

- Ta thấy $10z \vdots 3$ nên $z \vdots 3$. Đặt $z = 3k$ với $k \in \mathbf{Z}$ ta được

$$6x + 15y + 30k = 3 \Leftrightarrow 2x + 5y + 10k = 1.$$

- Đưa về giải phương trình với hai ẩn là x, y với k là tham số $2x + 5y = 1 - 10k$ nên

$$x = \frac{1 - 10k - 5y}{2} = -5k - 2y + \frac{1 - y}{2}$$

. Đặt $t = \dfrac{1 - y}{2}$ với $t \in \mathbf{Z}$. Ta có $y = 1 - 2t$, $x = -5k + 5t - 2$ và $z = 3k$.

- Vậy nghiệm (x, y, z) của phương trình là $(5t - 5k - 2; 1 - 2t; 3k)$ với t, k là những số nguyên tùy ý.

!

Kinh nghiệm giải toán

Trong cách giải trên, ta đã biến đổi phương trình đã cho về dạng $2x + 5y = 1 - 10k$, ta có các hệ số của x và y là hai số nguyên tố cùng nhau. Sau đó ta giải phương trình bậc nhất với hai ẩn là x và y. (Xem §2 Phương trình bậc nhất hai ẩn.)

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2015.$$

Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chía cho 8 cũng dư 1.
Tổng $x^2 + y^2 + z^2$ là số lẻ nên trong ba số x^2, y^2, z^2 phải có một số lẻ và hai số chẵn, hoặc ba số đều lẻ.

- Trường hợp 1: Có một số lẻ và hai số chẵn thì vế trái của phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2015$ chia cho 4 dư 1, còn vế phải (là 2015) chia cho 4 dư 3, loại.

- Trường hợp 2: Cả ba số đều lẻ thì vế trái của phương trình $x^2+y^2+z^2=2015$ chia cho 8 dư 3, còn vế phải (là 2015) chia cho 8 dư 7, loại.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2xyz = x+y+z+16.$$

Do vai trò bình đẳng của x, y, z ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Khi đó $2xyz \leq 3z+16$. Do z nguyên dương nên $2xy \leq 3+\frac{16}{z} \leq 19$. Từ $2x^2 \leq 2xy \leq 19 \Rightarrow x^2 \leq 9$. Do x nguyên dương nên

$$x \in \{1;2;3\}.$$

- Trường hợp $x=1$: thay vào phương trình $2xyz = x+y+z+16$ ta được $2yz-y-z=17 \Leftrightarrow 4yz-2y-2z=34 \Leftrightarrow (2y-1)(2z-1)=35$. Ta tìm được $(y;z)$ bằng $(1;18)$ và $(3;4)$.

- Trường hợp $x=2$: thay vào phương trình $2xyz = x+y+z+16$ ta được $4yz-y-z=18 \Leftrightarrow 16yz-4y-4z=72 \Leftrightarrow (4y-1)(4z-1)=73$. Ta tìm được $4y-1=1$ nên $4y=2$, loại.

- Trường hợp $x=3$: thay vào phương trình $2xyz = x+y+z+16$ ta được $6yz-y-z=19 \Leftrightarrow 36yz-6y-6z=114 \Leftrightarrow (6y-1)(6z-1)=115$. Ta tìm được $y=1$, $z=4$, loại vì trái giả thiết $x \leq y$.

Vậy nghiệm $(x;y;z)$ của phương trình là $(1;1;18), (1;3;4)$ và các hoán vị của nó.

!

Kinh nghiệm giải toán

Do vài trò bình đẳng của x, y, z trong phương trình $2xyz = x+y+z+16$, ta đã giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$, nhờ đó đã chặn trên được $x \leq 3$.

Ta còn có thể đạt được ước lượng mạnh hơn đó là $x \leq 2$ bằng cách làm như sau:

Với giả sử $z \geq y \geq x \geq 1$, nếu $x \geq 3$ thì $xy \geq 9$ nên $2xyz \geq 18z = 3z+15z$. (1)

Ta lại có $3z \geq x+y+z$ và $15z \geq x+y+z+45$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2xyz \geq x+y+z+45$ trái với đề bài. Vậy $x \leq 2$.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$4xyz = x+2y+4z+3.$$

- Xét $x=1$, thay vào phương trình $4xyz = x+2y+4z+3$ ta được
$$4yz-2y-4z=4 \Leftrightarrow 2yz-y-2z=2 \Leftrightarrow (y-1)(2z-1)=3.$$
Từ đó ta có $\begin{cases} y-1=1 \\ 2z-1=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-1=3 \\ 2z-1=1. \end{cases}$ Suy ra (y,z) bằng $(2;2)$ hoặc $(4;1)$.

- Xét $x \geq 2$. Từ phương trình $4xyz = x+2y+4z+3$ ta có
$$2y+4z+3 = x(4yz-1) \geq 2(4yz-1) = 8yz-2$$
nên $8yz-2y-4z \leq 5 \Leftrightarrow (2y-1)(4z-1) \leq 6$. Do $4z-1 \geq 3$ nên $2y-1 \leq 2$ hay $2y \leq 3$.
Do y nguyên dương nên $y=1$.
Thay vào phương trình $4xyz = x+2y+4z+3$ được $4xz-x-4z=5 \Leftrightarrow (x-1)(4z-1) = 6$.
Do $4z-1$ là ước lẻ của 6 và $4z-1 \geq 3$ nên $\begin{cases} 4z-1=3 \\ x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=3. \end{cases}$

Vậy nghiệm $(x;y;z)$ của phương trình là $(1;2;2), (1;4;1), (3;1;1)$.

!

Kinh nghiệm giải toán

- Do vai trò của x,y,z không bình đẳng nên ta không thể giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Trong ví dụ trên, do x nguyên dương nên trước hết ta xét $x=1$, sau đó xét $x \geq 2$. Nhờ $x \geq 2$ mà ta giới hạn được $2y \leq 3$.
Với bài toán tìm nghiệm nguyên dương của phương trình nhiều ẩn, ta thường xét một hoặc vài giá trị của một ẩn, rồi xét tiếp trường hợp còn lại.

- Ta cũng có thể đặt $t=2y$ và $u=4z$ đưa phương trình về dạng
$$xtu = 2x+2t+2u+6$$
để sắp xếp $1 \leq x \leq t \leq u$ (chú ý rằng có điều kiện $t \vdots 2$ và $u \vdots 4$).

BÀI TẬP

Bài 6.1: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau

a) $2x+5y-z=4$.

b) $2x - 5y - 6z = 4$.

a) Ta có $2x + 5y - z = 4 \Leftrightarrow 5y - z = 4 - 2x$, đặt $x = m$, $y = n$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, thay vào ta được $z = 2m + 5n - 4$. Vậy nghiệm $(x; y; z)$ của phương trình là $(m; n; 2m + 5n - 4)$ với $m, n \in \mathbb{Z}$.

b) Xét phương trình $2x - 5y - 6z = 4$, dễ thấy các hệ số của x, z và hệ số tự do 4 chia hết cho 2, suy ra $5y \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2$. Đặt $y = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$x - 5k - 3z = 2 \Leftrightarrow x = 5k + 3z + 2$$

Đặt $z = t$ với $t \in \mathbb{Z}$. Khi đó nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = 5k + 3t + 2 \\ y = 2k \\ z = t \end{cases}$ với $k, t \in \mathbb{Z}$.

Bài 6.2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{z}{8} = \frac{113}{120}.$$

Phương trình $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{z}{8} = \frac{113}{120} \Leftrightarrow 24x + 20y + 15z = 113$
Ta có $24x \leq 113 - 20 - 15$ nên $x \leq 3$
Thử với trường hợp $x = 1, 2, 3$ chỉ có trường hợp $x = 2, y = 1, z = 3$ thoả mãn.
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(2; 1; 3)$.

Bài 6.3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2y + 2z + 2 = 0.$$

Biến đổi $(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 0$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 1; -1)$.

Bài 6.4: Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm nguyên

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ta thấy $(x; y; z) = (t; 0; 0)$ với t là số nguyên tùy ý thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên.

Bài 6.5: Tìm các số nguyên dương x, y để biểu thức sau là số chính phương.

$$(x + y + 1)^2 - 2x + 2y.$$

Đặt $(x+y+1)^2 - 2x + 2y = z^2$. (1)

Khi đó:

$$z^2 = (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 - 2x + 2y \Leftrightarrow z^2 = (x+y)^2 + 4y + 1.$$

Do $y \geq 1$ nên $z^2 > (x+y)^2$. (2)

Do $x \geq 1$ nên $z^2 = (x+y)^2 + 4y + 1 < (x+y)^2 + 4(x+y) + 4 = (x+y+2)^2$.

Từ đó và (2) suy ra $(x+y)^2 < z^2 < (x+y+2)^2$.

Do đó $z^2 = (x+y+1)^2$. Kết hợp với (1) được

$(x+y+1)^2 - 2x + 2y = (x+y+1)^2 \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$.

Vậy $x = y = m$ với m là số nguyên dương tùy ý.

Bài 6.6: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2003.$$

Với $a \in \mathbb{Z}$ ta thấy số dư trong phép chia của a^3 cho 9 chỉ có thể là $0, 1, 8$. Do đó số dư trong phép chia $x^3 + y^3 + z^3$ cho 9 chỉ có thể là $0, 1, 2, 3, 6, 7, 8$. Trong khi đó 2003 chia cho 9 dư 5 nên phương trình đã cho vô nghiệm (vì hai vế phương trình có số dư khác nhau trong phép chia cho 9).

Bài 6.7: Tìm nghiệm nguyên dương của mỗi phương trình sau

a) $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 13$;

b) $xyz = 3(x+y+z)$;

c) $xyz = 10(x+y+z)$.

a) Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Ta có

$$13 = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 3x^2 + x^3 \geq 4x^2$$

nên $x^2 = 1$ hay $x = 1$. Khi đó

$$12 = y^2 + z^2 + yz \geq 3y^2$$

nên $y^2 \leq 4$ suy ra $y = 1 \vee y = 2$. Thử lại trực tiếp chỉ có $y = 2$ ta được $z = 2$. Vậy phương trình có nghiệm $(1; 2; 2)$ và các hoán vị.

b) Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Ta có $xyz \leq 3 \cdot 3z = 9z$ nên $xy \leq 9$. Suy ra $x^2 \leq 9$, do đó $x \in \{1; 2; 3\}$.

- Với $x = 1$, ta có $yz - 3y - 3z = 3 \Leftrightarrow (y-3)(z-3) = 12$, trong đó $y - 3 \leq z - 3$. Ta có bảng giá trị

$y-3$	1	2	3
$z-3$	12	6	4

  nên có nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 4; 15), (1; 5; 9), (1; 6; 7)$.

- Với $x = 2$, tương tự có nghiệm $(x; y; z)$ là $(2; 2; 12), (2; 3; 5)$.
- Với $x = 3$, tương tự có nghiệm $(x; y; z)$ là $(3; 3; 3)$.

Vậy nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 4; 15), (1; 5; 9), (1; 6; 7), (2; 2; 12), (2; 3; 5), (3; 3; 3)$ và các hoán vị.

c) Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Ta có $xyz = 10(x + y + z) \leq 30z \Rightarrow xy \leq 30$, do đó $x^2 \leq xy \leq 30$. Vậy $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- Với $x = 1$, ta có $yz - 10y - 10z = 10 \Leftrightarrow (y - 10)(z - 10) = 110$. Ta có bảng giá trị

$y-10$	1	2	5	10
$z-10$	110	55	22	11

  nên có nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 11; 120), (1; 12; 65), (1; 15; 32), (1; 20; 21)$.

- Với $x = 2$, tương tự có nghiệm $(x; y; z)$ là $(2; 6; 40), (2; 10; 12)$.
- Với $x = 3$, tương tự có nghiệm $(x; y; z)$ là $(3; 4; 35), (3; 5; 16)$.
- Với $x = 4$, tương tự có nghiệm $(x; y; z)$ là $(4; 5; 9)$.
- Với $x = 5$, phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 11; 120), (1; 12; 65), (1; 15; 32), (1; 20; 21), (2; 6; 40), (2; 10; 12)$, $(3; 4; 35), (3; 5; 16), (4; 5; 9)$ và các hoán vị.

Bài 6.8: Tìm nghiệm nguyên dương của mỗi phương trình sau:

a) $3xyz = x + y + 3z$;

b) $5xyz = x + 5y - 4z + 31$;

c) $3xyz = x + 2y + 3z + 7$;

d) $3xyz = x + 3y + 4z + 5$.

a) Đặt $t = 3z, t \in \mathbb{N}^*, t \vdots 3$ đưa về phương trình $xyt = x + y + t$. Tìm được $t = 3$ (xem thí dụ 7). Nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 2; 1), (2; 1; 1)$.

b)

- Xét $x = 1$, thay vào phương trình ta được

$$5yz - 5y + 4z = 32 \Leftrightarrow (5y+4)(z-1) = 28.$$

Ta có $5y + 4 \geq 9$ và $5y + 4$ chia 5 dư 4 nên

$$\begin{cases} 5y+4 = 14 \\ z-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases}.$$

- Xét $x \geq 2$ ta có

$$5y - 4z + 31 = x(5yz-1) \geq 2(5yz-1) \Leftrightarrow 10yz - 5y + 4z \leq 33$$

hay $(5y+2)(2z-1) \leq 31$. Vì $5y + 2 \geq 7$ nên $2z - 1 \leq 4$. Do đó $z \in \{1; 2\}$.

  – Thay $z = 1$ vào phương trình ta được $5xy - x - 5y = 27 \Leftrightarrow (5y-1)(x-1) = 28$. Ta thấy $5y - 1$ chia cho 5 dư 4 nên

$5y-1$	4	14
$x-1$	7	2

  từ đó nghiệm $(x; y; z)$ là $(8; 1; 1), (3; 3; 1)$.

  – Thay $z = 2$ vào phương trình ta được $10xy - x - 5y = 23 \Leftrightarrow (2x-1)(10y-1) = 47$. Không có nghiệm nguyên.

Vậy nghiệm $(x; y; z)$ là $(8; 1; 1), (3; 3; 1)$.

c)

- Xét $x = 1$, thay vào phương trình ta được

$$3yz - 2y - 3z = 8 \Leftrightarrow (y-1)(3z-2) = 10.$$

Ta có $3x - 2$ chia 3 dư 1 nên

$$\begin{cases} y-1 = 1 \\ 3z-2 = 10 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y-1 = 10 \\ 3z-2 = 1 \end{cases}$$

nên có nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 2; 4), (1; 11; 1)$.

- Xét $x \geq 2$ ta có

$$2y + 3z + 7 = x(3yz - 1) \geq 2(3yz - 1) \Leftrightarrow 6yz - 2y - 3z \leq 9$$

hay $(2y-1)(3z-1) \leq 10$. Vì $3z - 1 \geq 2$ nên $2y - 1 \leq 5$. Do đó $y \in \{1;2;3\}$.

  - Thay $y = 1$ vào phương trình ta được $3xz - x - 3z = 9 \Leftrightarrow (x-1)(3z-1) = 10$. Ta thấy $3z - 1$ chia cho 3 dư 2 nên

$x-1$	2	5
$3z-1$	5	2

    từ đó nghiệm $(x;y;z)$ là $(3;1;2), (6;1;1)$.
  - Thay $y = 2$ và $y = 3$ vào phương trình ta được nghiệm $(x;y;z)$ là $(2;3;1)$.

Vậy nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;2;4), (1;11;1), (3;1;2), (6;1;1), (2;3;1)$.

d) Xét lần lượt $x = 1$ và $x \geq 2$ ta được nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;2;6), (1;3;3), (2;1;5), (6;1;1), (3;2;1)$.

Bài 6.9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 1$$

Ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1 \Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 1.$$

Dễ thấy $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0$ nên chỉ có thể

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=1 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1 \end{cases}$$

nên $xy+yz+zx=0$ do đó $x^2+y^2+z^2=1$. Giả sử $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ suy ra $z=0, y=0, x=1$ hoặc $x=-1$. Thử lại phương trình có nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;0;0)$ và các hoán vị.

Bài 6.10: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau

a) $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$;

b) $x^4+y^4+z^4+t^4=2015$.

a) Xét phương trình $x^2+y^2+z^2=x^2y^2(*)$. Ta có x^2y^2 là số chính phương nên khi chia cho 4 chỉ có số dư là $0,1$. Nếu x^2y^2 chia cho 4 dư 1 thì x,y đều là số lẻ. Khi đó $x^2+y^2+z^2$ chia cho 4 có thể dư 2 hoặc 3. Điều này mâu thuẫn nên x^2y^2 chia hết cho 4 từ đó x,y không thể cùng là số lẻ.

- Trong hai số x,y có một sô chẵn, một số lẻ. Khi đó $x^2+y^2+z^2$ chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 2. Điều này mâu thuẫn vì hai vế của $(*)$ có số dư khi chia cho 4 khác nhau.
- Nếu x,y đều là số chẵn suy ra z chẵn. Đặt $x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1$ với $x_1,y_1,z_1\in\mathbb{Z}$. thay vào phương trình ta được $x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1^2y_1^2$. Lập luận tương tự và sử dụng phương pháp lùi vô hạn phương trình có nghiệm duy nhất là $(0;0;0)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $(0;0;0)$.

b) Với $a\in\mathbb{Z}$ ta thấy số dự trong phép chia của a^4 cho 16 chỉ có thể là 0 hoặc 1 do đó số dư trong phép chia $x^4+y^4+z^4+t^4$ cho 16 chỉ có thể là $0,1,2,3,4$. Trong khi đó 2015 chia cho 16 dư 15 nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7. PHƯƠNG TRÌNH PHÂN THỨC

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}.$$

Nhân hai vế của phương trình với $6xy$ được $6x+6y+1=xy$.
Đưa về phương trình ước số

$$x(y-6)-6(y-6)=37 \Leftrightarrow (x-6)(y-6)=37.$$

Do vai trò bình đẳng của x và y, giả sử $x \geq y \geq 1$ thì $x-6 \geq y-6 \geq -5$.
Chỉ xảy ra một trường hợp

$$\begin{cases} x-6=37 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=43 \\ y=7. \end{cases}$$

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(43;7),(7;43)$.

Ví dụ 2: Tìm các số nguyên x sao cho $\dfrac{x-17}{x-9}$ là bình phương của một số hữu tỉ.
Giả sử $\dfrac{x-17}{x-9}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ với $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$.
Xét $a=0$ thì $x=17$.
Xét $a \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử ƯCLN$(a,b)=1$. Do đó, ƯCLN$(a^2,b^2)=1$ nên

$$\begin{cases} x-17=a^2k & (1) \\ x-9=b^2k. & (2) \end{cases}$$

với k nguyên. Từ (1) và (2) suy ra

$$(x-9)-(x-17)=(b^2-a^2)k \Leftrightarrow 8=(b+a)(b-a)k.$$

Ta thấy $b+a$ và $b-a$ là ước của 8. Chú ý rằng $(b+a)-(b-a)=2a$ và $b+a$ và $b-a$ cùng tính chẵn lẻ. Lại có $b+a>b-a$ và $b+a>0$. Ta có bảng giá trị sau

$b+a$	$b-a$	k	b	a	$x=b^2k+9$
4	2	1	3	1	18
4	-2	-1	1	3	8
2	-2	-2	0, loại		
2	-4	-1	-1, loại		

Vậy ta có ba đáp số

$x = 17$ thì $\dfrac{17-17}{17-9} = \dfrac{0}{8} = 0^2$.

$x = 18$ thì $\dfrac{18-17}{18-9} = \dfrac{1}{9} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$.

$x = 8$ thì $\dfrac{8-17}{8-9} = 9 = 3^2$.

BÀI TẬP

Bài 7.1: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm ?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

Xét phương trình $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10}$. (1)

Với $x \neq 0, y \neq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow xy = 10(x+y) \Leftrightarrow (x-10)(y-10) = 100. \quad (2)$$

Ta thấy $100 = 2^2.5^2$ do đó 100 có 9 ước tự nhiên, có 18 ước nguyên. Phương trình (2) có 18 nghiệm nguyên, trong đó có $(0;0)$. Vậy (1) có 17 nghiệm nguyên.

Bài 7.2: Giải phương trình $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ với x và y là các số tự nhiên khác nhau, p là số nguyên tố cho trước.

Phương trình tương đương với $(x-p)(y-p) = p^2$. Ước của p^2 là $\pm 1, \pm p, \pm p^2$. Giả sử $x > y$ thì $x - p > y - p$.

Xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1. $\begin{cases} x - p = p^2 \\ y - p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p^2 + p \\ y = p + 1. \end{cases}$

Trường hợp 2. $\begin{cases} x - p = -1 \\ y - p = -p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + p \\ y = p - p^2. \end{cases}$ Khi đó $y = p - p^2 < 0$, loại.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(p^2+p; p+1), (p+1; p^2+p)$.

Bài 7.3: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{2xy} = \dfrac{1}{2}$.

Cách 1. Giả sử $x \geq y$ thì $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{2xy} \leq \dfrac{1}{y}$ nên

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2xy} < \frac{3}{y}.$$

Suy ra $y < 6$. Mặt khác $y > 2$. Xét $y \in \{3;4;5\}$, ta được $y = 3$, suy ra $x = 7$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(7;3)$ và $(3;7)$.

Cách 2. Nhân hai vế với $2xy$, ta được: $2y + 2x + 1 = xy$.

Đưa về phương trình ước số: $(x-2)(y-2) = 5$. Xét các ước của 5 để suy ra kết quả.

Bài 7.4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{2003}{2004}$.

Cách 1. Ta thấy $x, y \neq 0$ nên $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{2003}{2004} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1\dfrac{1}{2003}$. (1)

Giả sử $x \leq y$.

- Với $x = 1$, từ (1) suy ra $y = 2003$.
- Với $x \geq 2$, thì $y \geq 2$. Ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, trái với (1).
- Với $x \leq -1$ thì $\dfrac{1}{x} < 0$, còn $\dfrac{1}{y} \leq 1$ nên $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} < 1$, trái với (1).

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;2003)$ và $(2003;1)$.

Cách 2. Đưa về phương trình ước số.

Do $x + y \neq 0$ nên

$$\begin{aligned}\frac{xy}{x+y} = \frac{2003}{2004} &\Leftrightarrow 2004xy - 2003x - 2003y = 0\\ &\Leftrightarrow 2004^2xy - 2003.2004x - 2003.2004y = 0\\ &\Leftrightarrow (2004x - 2003)(2004y - 2003) = 2003^2. \ (1)\end{aligned}$$

Xét $x = y$, từ (1) suy ra $x = \dfrac{2003}{1002}$, loại.

Xét $x > y$ ta có $2004x - 2003 > 2004y - 2003$ nên $2004x - 2003$ bằng 1 hoặc 2003^2.

- Trường hợp $2004 - 2003 = -1$ dẫn đến x không nguyên.
- Trường hợp $2004x - 2003 = 2003^2$ dẫn đến nghiệm $(x;y)$ là $(2003;1)$.

Xét $x < y$, tương tự ta được $x = 1$, suy ra $y = 2003$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;2003)$ và $(2003;1)$.

Bài 7.5: Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{7}$.

Điều kiện $x, y \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7(x^2+y^2) = x^2y^2 \ (1).$$

Suy ra $(xy)^2 \vdots 7$ nên $xy \vdots 7$.
Từ (1) suy ra nếu x chia hết cho 7 thì y cũng chia hết cho 7, do đó $x^2 \geq 49, y^2 \geq 49$ (chú ý rằng x và y khác 0). Suy ra

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{49} + \frac{1}{49} = \frac{2}{49} < \frac{1}{7}.$$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 7.6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{1}{x^2(x^2+y^2)} + \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)} + \frac{1}{x^2(x^2+y^2+z^2)} = 1.$$

Đặt $x^2 = a, x^2+y^2 = b, x^2+y^2+z^2 = c$ thì a, b, c là các số nguyên dương, $1 \leq a \leq b \leq c$. Phương trình trở thành $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} = 1 \Leftrightarrow abc = a+b+c.$ (1)
Do đó $abc = a+b+c \leq 3c$. Chia hai vế của bất đẳng thức $abc \leq 3c$ cho số dương c ta được $ab \leq 3$. Do đó $ab \in \{1; 2; 3\}$

- Với $ab = 1$, ta có $a = 1, b = 1$. Thay vào (1) ta được $2 + c = c$, loại.
- Với $ab = 2$, ta có $a = 1, b = 2$. Thay vào (1) ta được $c = 3$.
- Với $ab = 3$, ta có $a = 1, b = 3$. Thay vào (1) ta được $c = 2$, loại vì trái với giả thiết $b \leq c$.
  Suy ra $a = 1, b = 2, c = 3$. Do đó $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. Vậy phương trình có tám nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 1; 1), (1; 1; -1), (1; -1; 1), (-1; 1; 1), (1; -1; -1), (-1; -1; 1), (-1; -1; -1)$.

Bài 7.7: Tìm ba số tự nhiên khác nhau có tổng các nghịch đảo của chúng là một số nguyên.
Gọi ba số tự nhiên theo thứ tự nhỏ dần là x, y, z. Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = n \text{ với } x > y > z \geq 1 \text{ và } n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1} = 1\dfrac{5}{6}$. Vậy $n = 1$.
Ta được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$. Vì $\dfrac{1}{z} < 1$, nên $z > 1$.
Mặt khác $1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} < \dfrac{3}{z}$ nên $z < 3$. Vậy $z = 2$.
Ta được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$. Vì $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{2}$, nên $y > 2$.
Mặt khác $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} < \dfrac{3}{z}$ nên $y < 4$. Vậy $y = 3$.
Suy ra $x = 6$. Ba số phải tìm là $2; 3; 6$.

Bài 7.8: Cho biểu thức sau, trong đó x, y, z là các số nguyên dương và giá trị biểu thức đó cũng là một số nguyên

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}.$$

a) Chứng minh rằng x, y, z cùng tính chẵn lẻ.

b) Tìm các số x, y, z trong đó $x < y < z$.

a) Ta có

$$\frac{yz+xz+xy+z+x+y}{xyz} = m\,(m \in \mathbb{N}^*)$$
$$\Leftrightarrow x+y+z+xy+yz+zx = mxyz. \quad (1)$$

- Xét x là số chẵn thì từ (1) ta có $y+z+yz$ là số chẵn nên $1+y+z+yz$ là số lẻ. Do đó $(y+1)(z+1)$ là số lẻ nên y và z đều là số chẵn.
  Tương tự, nếu y là số chẵn thì x và z đều là số chẵn. (2)
  Nếu z là số chẵn thì x và y đều là số chẵn. (3)

- Xét x là số lẻ. Do (2) nên y không chẵn. Do (3) nên z không chẵn. Vậy y, z đều là số lẻ.

b) Theo đề bài $x < y < z$. Xét các trường hợp sau

- Trường hợp $x \geq 3$ thì $y \geq 5$ và $z \geq 7$. Khi đó

$$m \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{21}, \text{ trái với } m \geq 1.$$

  Vậy $x \in \{1;2\}$

- Trường hợp $x = 1$ thì $y \geq 3$ và $z \geq 5$. Khi đó

$$m \leq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5} = 2\frac{2}{15}.$$

  Do $m > \dfrac{1}{x} = 1$ nên $m = 2$. Thay vào (1) ta được

$$1+y+z+y+yz+z = 2yz \Leftrightarrow yz-2y-2z = 1 \Leftrightarrow (y-2)(z-2) = 5.$$

  Ta tìm được $y = 3; z = 7$.

- Trường hợp $x = 2$ thì $y \geq 4$ và $z \geq 6$. Khi đó

$$m \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=1\frac{1}{6} \text{ nên } m=1.$$

Thay vào (1) ta được

$$2+y+z+2y+yz+2z=2yz \Leftrightarrow yz-3y-3z=2 \Leftrightarrow (y-3)(z-3)=11.$$

Ta tìm được $y=4; z=14$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;3;7)$ và $(2;4;14)$.

Bài 7.9: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $\dfrac{xyzt+xy+xt+zt+1}{yzt+y+t}=\dfrac{40}{31}$.

Viết mỗi vế dưới dạng tổng của một số tự nhiên và một phân số dương nhỏ hơn 1 ta được $x+\dfrac{zt+1}{yzt+y+t}=1+\dfrac{9}{31}$.

Do có duy nhất một cách viết như trên nên $x=1; \dfrac{zt+1}{yzt+y+t}=\dfrac{9}{31}$. Suy ra $\dfrac{yzt+y+t}{zt+1}=\dfrac{31}{9}$.

Lại tiếp tục làm như trên ta được $y+\dfrac{t}{zt+1}=3+\dfrac{4}{9}$.

Suy ra $y=3; \dfrac{zt+1}{t}=\dfrac{9}{4}$ nên $z+\dfrac{1}{t}=2+\dfrac{1}{4}$. Từ đó $z=2; t=4$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y;z;t)=(1;3;2;4)$.

Bài 7.10:

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1.$$

b) Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên với $n \geq 2$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ đôi một khác nhau:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}=1.$$

a) Nghiệm duy nhất $(x;y;z;t)=(2;2;2;2)$. Chú ý rằng trong bốn số x,y,z,t không thể có số nào bằng 1 và số lớn nhất không thể lớn hơn hoặc bằng 3.

b) Giả sử $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Ta có $x_1 > 1$ nên $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, ..., x_n \geq n+1$.

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}+\frac{1}{t^2} &\leq \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}\\ &< \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1.\end{aligned}$$

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Bài 7.11: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m$$

lần lượt với $m=2, m=3, m=4$.

Xét $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m.$ (1)

Bình phương hai vế được

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{x^2}+2\left(\frac{x}{z}+\frac{xz}{yt}+\frac{t}{y}+\frac{y}{t}+\frac{yt}{xz}+\frac{z}{x}\right)=m^2$$
$$\Rightarrow\quad m^2=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)+\left(\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{x^2}\right)+2\left[\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{t}{y}+\frac{y}{t}\right)+\left(\frac{xz}{yt}+\frac{yt}{xz}\right)\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ với $a>0, b>0$ ta được

$$m^2\geq 2+2+2(2+2+2)=16.$$

Suy ra $m\geq 4$ (Chú ý rằng $m>0$). Như vậy

- Với $m=4$ thì phương trình (1) có vô số nghiệm dương

$$(x;y;z;t)=(a;a;a;a)\text{ (Với } a\in\mathbb{N}^*).$$

- Với $m=3$ hoặc $m=2$ thì phương trình (1) không có nghiệm dương.

Bài 7.12: Tìm các số nguyên x sao cho $\frac{x-3}{4x+6}$ là bình phương của một phân số.

Giả sử $\frac{x-3}{4x+6}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ với $a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}^*$.

Xét $a=0$ thì $x=3$.

Xét $a\neq 0$. Giả sử $(a,b)=1$ thì $(a^2,b^2)=1$. Do đó

$$\begin{cases} x-3=a^2k \\ 4x+6=b^2k.\end{cases}\text{ (}k\text{ là số nguyên).}$$

Suy ra $(4x+6)-(4x-12)=b^2k-4a^2k\Rightarrow 18=(b+2a)(b-2a)k.$

Ta có nhận xét rằng: $b+2a\geq 3; b+2a>b-2a; b+2a$ và $b-2a$ cùng lẻ, tích $(b+2a)(b-2a)$ là ước của 18.

- Xét $b+2a=3$ thì $a=b=1$ và $x=-3$.

- Xét $b+2a>3$, ta có bảng giá trị sau

$b+2a$	$b-2a$	k	$4a$	a	$b>0$	$x=a^2k+3$
9	1	2	8	2	5	11
9	-1	-2	10, loại			

Vậy ta có ba đáp số
$x=3$ thì $\dfrac{3-3}{12+6}=\dfrac{0}{18}=0^2$.
$x=-3$ thì $\dfrac{-3-3}{-12+6}=1=1^2$.
$x=11$ thì $\dfrac{11-3}{44+6}=\dfrac{4}{25}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$.

Bài 7.13: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

Cách 1. $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}=3\,(1)\Rightarrow x^2y^2+y^2z^2+y^2z^2=3xyz\Rightarrow xyz>0$.
Do đó trong x,y,z, hoặc cả ba số đều dương, hoặc có một số dương, hai số âm. Chú ý rằng nếu đổi dấu hai trong ba số x,y,z thì (1) không đổi, do đó có thể giả sử x,y,z đều dương.
Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, ta được

$$3xyz=(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2\geq x^2yz+xyz^2+xy^2z=xyz(x+y+z).$$

Chia hai vế cho số dương xyz được $3\geq x+y+z$.
Do x,y,z đều là số dương nên $x=y=z=1$..
Đổi dấu hai trong ba số x,y,z ta được thêm ba nghiệm nữa.
Vậy nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;1;1),(1;-1;-1),(-1;1;-1),(-1;-1;1)$
Cách 2. Cũng nhận xét như ở cách 1 để giả sử các số x,y,z đều dương. Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy cho hai số dương, ta có

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}\geq 2\sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{xz}{y}}=2x.$$

Tương tự

$$\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq 2z,\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\geq 2y.$$

Suy ra $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}\geq x+y+z\geq 3$ (Vì các số x,y,z đều nguyên dương). Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ nên $x=y=z=1$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;1;1),(1;-1;-1),(-1;1;-1),(-1;-1;1)$
Lưu ý. Nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchuy cho ba số dương, ta có

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z}\frac{xz}{y}\frac{yz}{x}}=3\sqrt[3]{xyz}\geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

BÀI 8. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^x + 3 = y^2$.

• Nếu $x \geq 2$ thì $2^x \vdots 4$, do đó vế trái chia 4 dư 3, còn y lẻ nên vế phải chia 4 dư 1, không thỏa mãn. Vậy $x \in \{0; 1\}$.

• Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 4$, nên $y = 2$.

• Nếu $x = 1$ thì $y^2 = 5$, không có nghiệm tự nhiên.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 2)$.

Kinh nghiệm giải toán

• Trong ví dụ trên, trước hết ta tìm số tự nhiên k để với $x \geq k$ thì phương trình không có nghiệm nguyên. Sau đó xét $x \in \{0; 1; \ldots; k-1\}$.

• Khi tìm số dư trong phép chia lũy thừa của một số nguyên cho một số nguyên, ta thường dùng bổ đề sau với a, b là các số nguyên.

Bổ đề 1. $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$ với n là số tự nhiên.

Bổ đề 2. $(a^n + b^n) \vdots (a + b)$ với n là số tự nhiên lẻ.

Bổ đề 3. $(a + b)^n = ak + b^n$ với n là số tự nhiên, k là số nguyên nào đó.

Ví dụ 2: Giải phương trình với nghiệm tự nhiên

$$2^x + 57 = y^2$$

Xét hai trường hợp:

a) x lẻ. Đặt $x = 2n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Ta có

$$2^x = 2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n = 2(3+1)^n = 2(3k+1) = 6k + 2 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Khi đó vế trái của phương trình đã cho là số chia hết cho 3 dư 2, còn vế phải là số chình phương, chia cho 3 không dư 2, loại.

b) x chẵn. Đặt $x = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ta có

$$y^2 - 2^{2n} = 57 \Leftrightarrow (y - 2^n)(y + 2^n) = 3 \cdot 19$$

Ta thấy $y + 2^n > 0$ nên $y - 2^n > 0$ và $y + 2^n > y - 2^n$.

Từ đó có bảng giá trị sau

$y + 2^n$	57	19
$y - 2^n$	1	3
2^n	28, loại	8
n		3
y		11
$x = 2n$		6

Ta có $2^6 + 57 = 11^2$.

Đáp số: nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(6;11)$.

Lưu ý. Sử dụng bổ đề 2 để chứng minh $2^x + 57$ chia hết cho 3 dư 2 trong trường hợp x là số lẻ như sau.

Vì x là số lẻ nên $(2^x + 1) \vdots (2+1)$, do đó $2^x + 57 = (2^x + 1) + 56$ chia cho 3 dư 2.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$8^x - 37 = y^3$$

$8^x - 37 = y^3 \Leftrightarrow (2^x)^3 - y^3 = 37 \Leftrightarrow (2^x - y)(2^{2x} + y \cdot 2^x + y^2) = 37 \quad (1)$

Do $2^{2x} + y \cdot 2^x + y^2 > 0$ nên $2^x - y$ là ước tự nhiên của 37 và $2^x - y < 2^{2x} + y \cdot 2^x + y^2$. Do đó $2^x - y = 1$. Thay vào (1) được $(y+1)^2 + y(y+1) + y^2 = 37 \Leftrightarrow y^2 + y = 12 \Leftrightarrow y(y+1) = 12$.

Do đó $y = 4$, $x = 2$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(2;3)$.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$2^y = 1 + x + x^2 + x^3 \qquad (1)$$

Cách 1. $(1) \Leftrightarrow 2^y = (x+1)(x^2+1)$.

$x + 1$ và $x^2 + 1$ là các ước tự nhiên của 2^x nên

$$\begin{cases} x + 1 = 2^m & (2) \\ x^2 + 1 = 2^n & (3) \\ m + n = y \end{cases} \quad \text{với } m, n \in \mathbb{N}$$

Rút x từ (2) và thay vào (3) được

$$\begin{aligned} (2^m - 1)^2 + 1 = 2^n &\Leftrightarrow 2^{2m} - 2 \cdot 2^n + 1 + 1 = 2^n \\ &\Leftrightarrow 2^{2m} - 2^{m+1} + 2 = 2^n \qquad (4) \end{aligned}$$

• Nếu $m \geq 2$ thì 2^{2m} và 2^{m+1} chia hết cho 4 nên vế trái của (4) chia hết cho 4 dư 2. Mặt khác $m \geq 2$ nên từ (2) suy ra $x \geq 3$, từ (3) suy ra $2^n = x^2 + 1 \geq 3^2 + 1 = 10$ nên $n \geq 4$, do đó vế phải của (4) chia hết cho 4, không thỏa mãn.

• Nếu $m = 1$ thì từ (2) suy ra $x = 1$. Thay vào (1) được $2^x = 4$ nên $y = 2$.

• Nếu $m = 0$ thì từ (2) suy ra $x = 0$. Thay vào (1) được $2^x = 1$ nên $y = 0$.

Cách 2. $(1) \Leftrightarrow 2^y = (x+1)(x^2+1)$ suy ra $x^2 + 1 = 2^n$ (5). Với $n \in \mathbb{N}$.

• Nếu $n = 0$ thì $x = 0$ nên $y = 0$.

• Nếu $n = 1$ thì $x = 1$ nên $y = 2$.

• Nếu $n \geq 2$ thì vế phải của (5) chia hết chia 4, còn vế phải của (2) chia 4 dư 1 hoặc dư 2. không thỏa mãn.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2)$ hoặc $(0; 0)$.

Ví dụ 5: Giải phương trình sau với nghiệm tự nhiên

$$2^x + 2^y + 2^z = 1024 \tag{1}$$

Do vai trò của x, y, z như nhau, ta giả sử $x \leq y \leq z$.

Chia hai vế của (1) cho $2^x \neq 0$ ta được

$$1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x} \tag{2}$$

Do 2^{10-x} nên 2^{10-x} là bội của 2. Ta lại có $z > x$, vì nếu $z = x$ thì $x = y = z$, khi đó (2) trở thành $1 + 2^0 + 2^0 = 2k$ với k nguyên, loại. Từ đó 2^{10-x} là bội của 2, suy ra $1 + 2^{y-x}$ là bội của 2. Do đó $2^{y-x} = 1$, vậy $y = x$.

Thay vào (2) được

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 2^{z-x} = 2^{10-x} &\Leftrightarrow 2 + 2^{z-x} = 2^{10-x} \\ &\Leftrightarrow 2(1 + 2^{z-x-1}) = 2^{10-x} \Leftrightarrow 1 + 2^{z-x-1} = 2^{9-x} \end{aligned}$$

Do $2^{9-x} > 1$ nên 2^{9-x} là bội của 2. Do đó $2^{z-x-1} = 1$ và $2 = 2^{9-x}$. Từ đó $x = 8; y = 8; z = 9$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(8; 8; 9), (8; 9; 8), (9; 8; 8)$.

Lưu ý.

a) Do 2^{10} là lũy thừa của 2 có số mũ không quá lớn nên có thể giải ví dụ trên bằng cách xét các lũy thừa của 2 với số mũ từ 0 đến 0, đó là: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ rồi bằng lập luận chọn ra $256 + 256 + 512 = 1024$, tức là $2^8 + 2^8 + 2^9 = 1024$.

b) Ta có bài toán tổng quát hơn ví dụ 51.

Giải phương trình sau với nghiệm tự nhiên

$$2^x + 2^y + 2^z = 2^n$$

trong đó n là số tự nhiên cho trước $(n \geq 2)$.

Giải tương tự như trên, ta được $x = y = n - 2, z = n - 1$.

BÀI TẬP

Bài 8.1: Tìm các số tự nhiên x sao cho

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Phương trình không có nghiệm $x = 0$, $x = 1$.
Phương trình có nghiệm $x = 2$.
Với $x \geq 3$, viết phương trình dưới dạng $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$.
Ta có: $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$ suy ra $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$.
Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 8.2: Giải mỗi phương trình trình sau với nghiệm tự nhiên

a) $5^x + 48 = y^2$.
b) $3^x + 8 = y^2$.
c) $2^x - 1 = y^2$.
d) $4^x + 5 = y^2$.
e) $2^x + 45 = y^2$.

a) Với $x = 0$ thì $y^2 = 49$ nên $y = 7$.
Với $x \geq 1$ thì vế trái tận cùng bằng 3 nên y^2 tận cùng bằng 3 loại.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 7)$.

b) Với $x = 0$ thì $y = 3$.
Với $x \geq 1$ thì $3^x + 8$ chia 3 dư 2, không là số chính phương, loại.
Đáp số : Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 3)$.

c) Lần lượt xét $x = 0$, $x = 1$, $x \geq 2$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(1; 1)$.

d) Lần lượt xét $x = 0$, $x = 1$, $x \geq 2$.
Chú ý rằng với $x \geq 2$ thì vế trái chia cho 8 dư 5, do đó vế phải là số lẻ và chia 8 dư 1.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(1; 3)$.

e) Lần lượt xét $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x \geq 3$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 7)$.

Bài 8.3: Giải mỗi phương trình trình sau với nghiệm tự nhiên

a) $x^4 = x^y$.
b) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.
c) $(2^x + 1)(2^x + 2) + 3^y = 307$.

a) Nếu $x = 0$, ta có $0 = 0^y$, đúng với mọi số y nguyên dương (chú ý 0^0 không có nghĩa).
Nếu $x = 1$, ta có $1 = 1^y$, đúng với mọi số tự nhiên y.
Nếu $x \geq 2$, ta có $y = 4$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; t)$; $(1; k)$; $(m; 4)$ với $t \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ và $m \geq 2$.

b) Giả sử $x \geq y$. Chia cả hai vế cho 2^y được

$$2^{x-y} + 1 = 2^x \qquad (1)$$

Nếu $x = y$ thì $2 = 2^x$ nên $x = 1$.
Nếu $x > y$ thì vế trái của (1) lẻ, còn vế phải chẵn. Điều này không xảy ra.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$.

c) $(2^x + 1)(2^x + 2) + 3^y = 307 \quad (1)$
Xét tích ba số tự nhiên liên tiếp $2^x, 2^x + 1, 2^x + 2$, có ít nhất một số chia hết cho 3, mà 2^x không chia hết cho 3 nên $(2^x + 1)(2^x + 2) \vdots 3$.
Nếu $y \geq 1$ thì $3^y \vdots 3$ nên vế trái của (1) chia hết cho 3 còn vế phải không chia hết cho 3, loại.
Nếu $y = 0$ thì $3^y = 1$ nên $(2^x + 1)(2^x + 2) = 307 - 1 = 306 = 17 \cdot 18$. Vậy $2^x + 1 = 17$, suy ra $x = 4$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(4; 0)$.

Bài 8.4: Tìm số tự nhiên n để $3^n + 1$ là số chính phương.
Đặt $3^n + 1 = a^2$ với $a \in \mathbb{N} \quad (1)$
Thử thấy $a = 0$, $a = 1$ không thỏa mãn (1) nên $a \geq 2$.
Viết (1) dưới dạng

$$3^n = (a-1)(a+1).$$

$a - 1$ và $a + 1$ là các ước tự nhiên của 3^n. Các ước tự nhiên của 3^n là $3^0; 3^1; 3^2; \ldots; 3^n$.
Vì $(a+1) - (a-1) = 2$ nên chỉ có thể là $\begin{cases} a - 1 = 3^0 \\ a + 1 = 3^1 = 3 \end{cases}$ nên $a = 2$. Khi đó $n = 1$.
Đáp số: $n = 1$.

Bài 8.5: Giải mỗi phương trình trình sau với nghiệm tự nhiên

a) $2^x + 33 = y^2$.
b) $3^x + 55 = y^2$.
c) $5^x + 51 = y^2$.
d) $7^x - 1 = 2^y$.
e) $3^x + 1 = 2^y$.

a) $2^x + 33 = y^2$.
Xét hai trường hợp: x lẻ và x chẵn. Giải tương tự như ví dụ 48.
Ta tìm được $x = 4$ và $x = 8$. Khi đó

$$2^4 + 33 - 7^2; 2^8 + 33 = 17^2$$

b) $3^x + 55 = y^2 \quad (1)$
Xét hai trường hợp sau
Nếu x lẻ, thì theo bổ đề 2, ta có $(3^x + 1) \vdots (3 + 1)$ nên $3^x + 55 = (3^x + 1) + 54$ chia cho 4 dư 2.
Vế trái của (1) chia cho 4 dư 2 còn vế phải chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1, vậy đẳng thức trên không xảy ra.
Nếu x chẵn, đặt $x = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$, ta có
$(1) \Leftrightarrow 3^{2n} + 55 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - (3^n)^2 = 55 \Leftrightarrow (y + 3^n)(y - 3^n) = 55$.
Ta có bảng giá trị

$y + 3^n$	55	11
$y - 3^n$	1	5
3^n	27	3
n	3	1
x	6	2

Ta tìm được $x = 6$ và $x = 2$. Khi đó $3^6 + 55 = 28^2$; $3^2 + 55 = 8^2$.

c) $5^x + 51 = y^2 \quad (1)$.
Nếu x lẻ, thì $(5^x + 1) \vdots (5 + 1)$ nên $5^x + 51 = (5^x + 1) + 50$ chia cho 3 dư 2. Vế trái của (1) chia cho 3 dư 2 nên không là số chính phương, loại.
Nếu x chẵn, đặt $x = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$, đưa về $(y + 5^x)(y - 5^x) = 51$.
Xét các ước của 51, ta tìm được $5^n = 25 \Leftrightarrow n = 2$.
Khi đó $x = 4$ và $5^4 + 51 = 26^2$.

d) Sử dụng bổ đề 1. Phương trình không có nghiệm nguyên vì vế trái chia hết cho 3, vế phải không chia hết cho 3.

e) Dễ thấy $y > 0$. Với $y = 1$ thì $x = 0$; với $y = 2$ thì $x = 1$.
Chú ý rằng với $y \geq 3$ thì vế phải chia hết cho 8, còn vế trái chia hết cho 8 dư 2 nếu x là số chẵn, hoặc dư 4 nếu x là số lẻ (sử dụng bổ đề 3).
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 1)$, $(1; 2)$.

Bài 8.6: Giải mỗi phương trình trình sau với nghiệm tự nhiên

a) $3^x + 7 = y^3$.

b) $8^x + 61 = y^3$.

a) Lần lượt xét $x = 0$, $x = 1$, $x \geq 2$.
Chú ý rằng với $x \geq 2$ thì vế trái chia 9 dư 7, còn vế phải chia 9 dư $0, 1, 8$ (xem giải thích ở lời giải của bài 12).
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 2)$.

b) Giải tương tự ví dụ 49. Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 5)$.

Bài 8.7: Giải mỗi phương trình trình sau với nghiệm tự nhiên

a) $3^y = 5x^3 - 317$.

b) $10^y = 81x + 1$.

a) $3^y = 5x^3 - 317$. $\quad (1)$
Với $y = 0$ thì vế phải không chia hết cho 5, loại.
Với $y = 1$ thì $x = 4$, thỏa mãn.
Với $y \geq 2$. Xét vế phải của (1) có x^3 chia 9 dư $0, 1, 8$ (xem giải thích ở lời giải của bài 12) nên $5x^3$ chia cho 9 dư $0, 5, 4$ còn vế phải của (1) có $3^y \vdots 9$ nên $3^y + 317$ chia cho 9 dư 2.
Đẳng thức (1) không thể xảy ra.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(4; 1)$.

b) $10^y = 81x + 1 \Leftrightarrow 10^y - 1 = 81x$.
Nếu $y = 0$ thì $x = 0$.
Nếu $y \geq 1$, ta có $\underbrace{99\ldots9}_{y \text{ chữ số}} = 81x$.
Đặt $t = \underbrace{99\ldots9}_{y \text{ chữ số}} = 9\ldots\underbrace{11\ldots1}_{y \text{ chữ số}}$ thì $t \vdots 81 \Leftrightarrow y \vdots 9$.
Chia số gồm toàn chữ số 9 cho 81, lấy đến chín chữ số 9 đem chia ta được thương là $A = 123456789$ và số dư bằng 0.
Đáp số : Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(\underbrace{123456789\ldots123456789}_{k \text{ lần } 123456789}; 9k)$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Bài 8.8: Tìm các số tự nhiên n để mỗi biểu thức sau là lập phương của một số tự nhiên

a) $3^n + 5$.

b) $3^n - 1$.

a) Đặt $3^n + 5 = a^3$, $a \in \mathbb{N}$.
Lần lượt xét $n = 1$, $n = 1$, chỉ có $n = 1$ thỏa mãn: $3^1 + 5 = 2^3$.
Nếu $n \geq 2$ thì vế trái chia 9 dư 5, còn vế phải a^3 chia 9 dư $0, 1, 8$ (xem giải thích ở lời giải của bài 12) nên đẳng thức trên không xảy ra.
Đáp số: $n = 1$.

b) Đặt $3^n - 1 = a^3, a \in \mathbb{N}$.
Ta có $3^n = a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$.
Các số nguyên dương $a + 1$ và $a^3 - a + 1$ là ước của 3^n nên

$$\begin{cases} a + 1 = 3^x & (2) \\ a^2 - a + 1 = 3^y & (3) \quad \text{với } x, y \in \mathbb{N} \\ x + y = a \end{cases}$$

Rút a từ (2) thay vào (3) được

$$\begin{aligned}(3^x - 1)^2 - (3^x - 1) + 1 = 3^y &\Leftrightarrow 3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 - 3^x + 1 + 1 = 3^y \\ &\Leftrightarrow 3^{2x} - 3^{x+1} + 3 = 3^y \qquad (4)\end{aligned}$$

Nếu $x \geq 2$ thì $(3^{2x} - 3^{x+1}) \vdots 9$ nên vế trái của (4) chia cho 9 dư 3. Do $x \geq 2$ nên $3^{2x} - 3^{x+1} + 3 = 3^x(3^x - 3) + 3 \geq 9 \cdot 6 + 3 = 57$ nên $y \geq 4$, do đó vế phải của (4) chia hết cho 9. Đẳng thức (4) không xảy ra.
Nếu $x = 1$ thì từ (2) suy ra $a = 2$. Khi đó $3^n = a^3 + 1 = 9$ nên $n = 2$.
Nếu $x = 0$ thì từ (2) suy ra $a = 0$. Khi đó $3^n = a^3 + 1 = 1$ nên $n = 0$.
Đáp số $n = 2$ và $n = 0$.

Bài 8.9: Giải mỗi phương trình trình sau với nghiệm tự nhiên

a) $3^y = x^2 - 5x + 7$.

b) $3^y = x^3 + x^2 + x + 1$.

c) $2^y = x^3 + 1$.

d) $2^y = x^4 + x^3 + x + 1$.

a) $3^y = x^2 - 5x + 7$.
Nếu $x \geq 2$ thì vế trái chia hết cho 9, ta sẽ chứng minh vế phải không chia hết cho 9.Thật vậy, giả sử $(x^2 - 5x + 7) \vdots 9$ (1) thì $(x^2 - 5x + 7) \vdots 3 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) \vdots 3 \Rightarrow (x-1)^2 \vdots 3 \Rightarrow (x-1) \vdots 3$ (vì 3 là số nguyên tố).
Đặt $x = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Khi đó $x^2 - 5x + 7 = (3k+1)^2 = 5(3k+1) + 7 = 9k^2 - 9k + 3$, không chia hết cho 9, mâu thuẫn với (1).
Xét $y = 0$, ta được $x = 2$ và $x = 3$.
Xét $y = 1$, ta được $x = 1$ và $x = 4$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 0)$, $(3; 0)$, $(1; 1)$, $(4; 1)$.

b) $3^x = x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 3^y = (x+1)(x^2+1)$.
Giải tương tự cách 2 của ví dụ 50. Suy ra $x^2 + 1 = 3^n$ (1).
Xét $n = 0$ thì $x = 0, y = 0$.

Xét $n \geq 1$ thì vế phải của (1) chia hết cho 3, còn vế trái chia hết cho 3 dư 1 hoặc dư 2, loại.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$.

c) Giải tương tự cách 1 của ví dụ 50

$$2^y = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$x + 1$ và $x^2 - x + 1$ là các ước tự nhiên của 2^y nên

$$\begin{cases} x+1 & (1) \\ x^2 - x + 1 = 2^y & (2) \\ m + n = y \end{cases} \quad \text{với } m, n \in \mathbb{N}$$

Rút x từ (1) rồi thay vào (2) được

$$\begin{aligned} (2^m - 1)^2 - (2^m - 1) + 1 = 2^n &\Leftrightarrow 2^{2m} - 2 \cdot 2^m + 1 - 2^m + 1 + 1 = 2^n \\ &\Leftrightarrow 2^m(2^m - 3) + 3 = 2^n \quad (3) \end{aligned}$$

Nếu $m \geq 2$ thì vế trái của (3) chia 4 dư 3. Ta có

$$2^m(2^m - 3) + 3 \geq 4 \cdot 1 + 3 = 7 \text{ nên } 2^n \geq 7$$

do đó vế phải của (3) chia hết cho 4 loại.
Xét $m = 0$, ta được $x = 0, y = 0$.
Xét $m = 1$, ta được $x = 1, y = 1$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(1; 1)$.

d) $2^y = x^4 + x^3 + x + 1 \Leftrightarrow 2^y = (x+1)(x^3+1)$ (1)
$x + 1$ và $x^3 + 1$ là các ước tự nhiên của 2^y nên

$$\begin{cases} x+1 & (2) \\ x^3 + 1 = 2^y & (3) \\ m + n = y \end{cases} \quad \text{với } m, n \in \mathbb{N}$$

Rút x từ (1) rồi thay vào (2) được

$$\begin{aligned} (2^m - 1)^3 + 1 = 2^n &\Leftrightarrow 2^{3m} - 3 \cdot 2^{2m} + 3 \cdot 2^m = 2^n \\ &\Leftrightarrow 2^m(2^{2m} - 3 \cdot 2^m + 3) = 2^n \end{aligned}$$

Nếu $m \geq 2$ thì $2^{2m} - 3 \cdot 2^m + 3 = 2^m(2^m - 3) + 3 \geq 4 \cdot 1 + 3 = 7$.
Khi đó $2^m(2^m - 3) + 3$ là số lẻ lớn hơn 1 nên không thể là ước của 2^n, loại.
Xét $m = 0$, ta được $x = 0, y = 0$.
Xét $m = 1$, ta được $x = 1, y = 2$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(1; 2)$.

Bài 8.10: Giải mỗi phương trình trình sau với nghiệm tự nhiên

a) $7^x + 13^y = 19^z$.

b) $2^x + 2^y = 2^z$.

c) $2^x + 2^y + 2^z = 552$ $(x < y < z)$

d) $x^y + 1 = z^2$ (x là số nguyên tố)

a) Phương trình không có nghiệm tự nhiên. Hãy xét số dư khi chia cho 3 của mỗi số $7^x, 13^y, 19^z$.

b) Giả sử $x \geq y$. Chia hai vế cho $2^y \neq 0$ được.

$$2^{x-y} + 1 = 2^{z-y} \tag{1}$$

Từ đề bài suy ra $x = y = k$ (k là số tự nhiên). Thay vào (1) được

$$2 = 2^{z-k} \Leftrightarrow 1 = z - k \Leftrightarrow z = k + 1$$

Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(k; k; k + 1)$ với k là số tự nhiên tùy ý.

c) $2^x + 2^y + 2^z = 552 \Leftrightarrow 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$.
Do $y > x, z > x$ nên $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ là số lẻ, suy ra $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.
Tự giải tiếp.
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(3; 5; 9)$.

d) $x^y = (z - 1)(z + 1)$
Do đó x là số nguyên tố nên $z + 1, z - 1$ là các lũy thừa của x. Đặt $z - 1 = x^m, z + 1 = x^{m+n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$(z + 1) - (z - 1) = x^{m+n} - x^m \Leftrightarrow 2 = x^m(x^n - 1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^m = 2 \\ x^n - 1 = 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x^m = 1 \\ x^n - 1 = 2 \end{cases}$$

Từ đó $x = 2, m = 1, n = 1$ hoặc $x = 3, m = 2, n = 1$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(2; 3; 3)$, $(3; 1; 2)$.

Bài 8.11: Tìm các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn mỗi điều kiện sau

a) $x^y + x^z = x^t$. b) $x^x + y^y + z^z = t^t$.

a) $x^y + x^z = x^t \quad (1)$.
Do vai trò của y, z như nay, ta giả sử $y \leq z < t$. Chia cả hai vế cho x^y được

$$1 + x^{z-y} = x^{t-y} \tag{2}$$

Nếu $x > y$ thì từ (2) suy ra $1 \vdots x$, do đó $x = 1$, không thỏa mãn (1). Vậy $z = y$. Đặt $z = y = k$ (k là số nguyên dương).
Thay vào (2) được $2 = x^{t-k}$ nên $x = 2$, $t - k = 1$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z; t)$ là $(2; k; k; k+1)$ với số nguyên dương k tùy ý.

b) $x^x + y^y + z^z = t^t. \quad (1)$
Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z < t$.
Nếu $z = 1$ thì $x = y = 1$. Ta có $3 = t^3$, loại.
Nếu $z = 2$ thì $t \geq 3$. Khi đó $t^t \geq 3^3 > 3 \cdot 2^3 \geq x^x + y^y + z^z$, trái với (1).
Nếu $z \geq 3$ thì $t^t \geq (z+1)^{z+1} < z^{z+1} = z \cdot z^z \geq 3 \cdot z^z \geq x^x + y^x + z^z$, trái với (1).
Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Bài 8.12: Tìm các số nguyên dương x và y khác nhau sao cho

$$x^y = y^x.$$

Giả sử $1 \leq x < y$. Chia cả hai vế của phương trình cho x^x được

$$x^{y-x} = \frac{y^x}{x^x}$$

Ta có $y^x \vdots x^x$ mà x là số nguyên dương nên $y \vdots x$. Đặt $y = kx$ với $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Theo đề bài thì $x^{kx} = (kx)^x \Leftrightarrow (x^k)^x = (kx)^x \Leftrightarrow x^k = kx \Leftrightarrow x^{k-1} = k$ (1)
Ta thấy $x \geq 2$ vì nếu $x = 1$ thì $k = 1$, loại. Do đó $x^{k-1} \geq 2^{k-1}$.
Từ (1) và (2) suy ra $k \geq 2^{k-1}$, do đó $2k \geq 2^k$ (3).
Ta thấy với $k \geq 3$ thì bất đẳng thức (3) không thể xảy ra (có thể chứng minh điều này bằng quy nạp toán học)
Do đó $k = 2$. Thay $k = 2$ vào (1) được $x = 2$.
Suy ra $y = kx = 2 \cdot 2 = 4$.
Thử lại có $2^4 = 4^2$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 4)$ hoặc $(4; 2)$.

BÀI 9. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.$$

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}} \\ &= \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right| \\ &= \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|. \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp:

a) Với $x=1$ thì $y=2$.

b) Với $x \geq 2$ thì $y=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$.
Do đó $y^2=4(x-1)$. Do $x \geq 2$ nên có thể đặt $x-1=t^2$ với t là số nguyên dương.
Ta có $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=2t. \end{cases}$

Kết luận: Nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình là $(1;2)$ và $(t^2+1;2t))$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=y.$$

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$. Khi đó thì

$$\begin{gathered} \sqrt{x}+\sqrt{x+3}=y \qquad (1) \\ \Leftrightarrow x+x+3+2\sqrt{x(x+3)}=y^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+3)}=y^2-2x-3 \end{gathered}$$

Đặt $y^2-2x-3=m$ (với $m \in \mathbb{N}$) thì $2\sqrt{x(x+3)}=m$. (2)

- Xét $m=0$, từ (2) suy ra $x=0$ (vì $x \in \mathbb{N}$), thay vào (1) được $y=\sqrt{3}$ (loại).

- Xét $m > 0$. Bình phương hai vế của (2) được

$$\begin{aligned} 4x(x+3) = m^2 &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - m^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (2x+3+m)(2x+3-m) = 9. \end{aligned}$$

Vì $2x+3+m$ và $2x+3-m$ là các ước tự nhiên của 9 và $2x+3+m > 2x+3-m$ nên

$$\begin{cases} 2x+3+m = 9 \\ 2x+3-m = 1 \end{cases}$$

Ta có $2x+3 = 5 \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó $y = 3$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;3)$.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\sqrt{9x^2+16x+96} = 3x - 16y - 24 \tag{1}$$

Đặt $m = 3x - 16y - 24$ với $m \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 9x^2 + 16x + 96 = m^2 \\ &\Leftrightarrow 81x^2 + 9 \cdot 16x + 864 = 9m^2 \\ &\Leftrightarrow (9x+8)^2 - (3m)^2 = -800. \end{aligned} \tag{2}$$

Thay $m = 3x - 16y - 24$ vào (2) rồi rút gọn được

$$\begin{aligned} &(18x - 48y - 64)(48y + 80) = -800 \\ \Leftrightarrow\ &(9x - 24y - 32)(3y + 5) = -25. \end{aligned}$$

Ta thấy $3y+5$ là ước của 25 và chia 3 dư 2 nên có bảng giá trị sau

$3y+5$	-1	5	-25
y	-2	0	-10
x	1	3	-23

Loại $x = 3, y = 0$ vì khi đó $m < 0$.

Với $x = 1, y = -2$ và $x = -23, y = -10$ thì $m > 0$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;-2), (-23;-10)$.

►► ***Kinh nghiệm giải toán***

- Ở ví dụ 53 ta đặt $y^2 - 2x - 3 = m$ để đưa đến phương trình $4x(x+3) = m^2$ và được $(2x+3+m)(2x+3-m) = 9$. Giải phương trình này gọn hơn so với cách thay m bởi $y^2 - 2x - 3$.

- Ở ví dụ 54, ta đặt $3x - 16y - 24 = m$ để đưa đến phương trình $9x^2 + 16x + 96 = m^2$ và được $(9x+8)^2 - (3m)^2 = -800$. Giải phương trình này phức tạp vì phải xét nhiều trường hợp. Ta đã thay $m = 3x - 16y - 24$ để đưa về phương trình đơn giản hơn: $(9x - 24y - 32)(3y+5) = -25$.

- Như vậy, khi giải toán cần biết vận dụng linh hoạt cách đặt ẩn phụ cho phù hợp với từng bài toán cụ thể.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980} \tag{1}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{1980} - \sqrt{y} \tag{2}$$

Với điều kiện $0 \le x \le 1980, 0 \le y \le 1980$, ta có

$$(2) \Leftrightarrow x = 1980 + y - 2\sqrt{1980y} \Leftrightarrow x = 1980 + y - 12\sqrt{55y}.$$

Do x, y nguyên nên $12\sqrt{55y}$ nguyên.
Ta biết rằng với y nguyên thì $\sqrt{55y}$ hoặc là số nguyên, hoặc là số vô tỉ. Chỉ có thể $\sqrt{55y}$ là số nguyên, tức là $55y$ là số chính phương nên $11 \cdot 5 \cdot y = k^2 (k \in \mathbb{N})$.
Do đó $y = 11 \cdot 5 \cdot a^2 = 55a^2 (a \in \mathbb{N})$. Tương tự $x = 55b^2 (b \in \mathbb{N})$.
Thay vào (1) được

$$a\sqrt{55} + b\sqrt{55} = 6\sqrt{55} \Leftrightarrow a + b = 6.$$

Giả sử $y \le x$ thì $a \le b$. Ta có bảng giá trị sau

a	b	$x = 55a^2$	$y = 55b^2$
0	6	0	1980
1	5	55	1375
2	4	220	880
3	3	495	495

Có bảy nghiệm $(x;y)$ là $(0;1980)$, $(1980;0)$, $(55;1375)$, $(1375;55)$, $(220;880)$, $(880;220)$, $(495;495)$.
Lưu ý. Ta có nhận xét: Nếu các số $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ với $x, y \in \mathbb{N}$ có tổng là số vô tỉ $6\sqrt{55}$ thì $\sqrt{x} = b\sqrt{55}$, $\sqrt{y} = a\sqrt{55}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a + b = 6$.

Ví dụ 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = y.$$

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$.
Bình phương hai vế rồi chuyển vế được

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = y^2 - x = k(k \in \mathbb{N}).$$

Lại bình phương hai vế rồi chuyển vế được

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = k^2 - x = m(m \in \mathbb{N}).$$

Lại bình phương hai vế được

$$x + \sqrt{x} = m^2.$$

Ta biết rằng x nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do $x + \sqrt{x} = m^2 (m \in \mathbb{N})$ nên $\sqrt{x}$ không là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên và là số tự nhiên.
Ta có $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = m^2$. Hai số tự nhiên liên tiếp $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x}+1$ có tích là một số chính phương nên số nhỏ bằng 0 tức là $\sqrt{x} = 0$.
Suy ra $x = 0; y = 0$, thõa mãn phương trình đã cho.
Nghiệm $(x;y)$ của phương trình là $(0;0)$.

Ví dụ 6: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$y = \sqrt[3]{2+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{x}} \qquad (1)$$

Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, ta lập phương hai vế của (1) được

$$\begin{aligned} y^3 &= 2+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+3\cdot\sqrt[3]{4-x}\cdot y && (2)\\ \Leftrightarrow y^3 &= 4+3y\sqrt[3]{4-x} \\ \Leftrightarrow y(y^2 &- 3\sqrt[3]{4-x}) = 4. && (3) \end{aligned}$$

Với x nguyên thì $3\sqrt[3]{4-x}$ là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Từ (3) ta thấy $3\sqrt[3]{4-x}$ không thể là số vô tỉ nên phải là số nguyên. Do đó từ (3) suy ra y là ước của 4. Do $y > 0$ nên ta có bảng giá trị sau

y	1	2	4
$y^2 - 3\sqrt[3]{4-x}$	4	2	1
$3\sqrt[3]{4-x}$	-3	2	15
$\sqrt[3]{4-x}$	-1	loại	5
$4-x$	-1		125
x	5		-121 (loại)

Thử lại, giá trị $x = 5, y = 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(5; 1)$.

Lưu ý: Ở phương trình (2), ta đã thay $\sqrt[3]{2+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{x}}$ nên (1) và (2) có thể không tương đương. Vì thế sau khi tìm được nghiệm $(x; y) = (5; 1)$ của phương trình (3), ta vẫn thử lại vào phương trình (1).

∗ **Kinh nghiệm giải toán**

Khi giải phương trình vô tỉ với nghiệm nguyên, ta thường biến đổi để trong phương trình chỉ chứa một căn thức của một số nguyên, từ đó dẫn đến căn thức ấy cũng là số nguyên (xem các ví dụ $55, 56, 57$).

BÀI TẬP

Bài 9.1: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $x^3 + 1 = \sqrt{3x+1}$; b) $x^3 + 3 = \sqrt{15x+1}$.

a) Do x nguyên nên để $\sqrt{3x+1}$ có nghĩa, ta phải có $x \geq 0$.

Cách 1. Với $x \geq 2$ thì

$$\sqrt{3x+1} < \sqrt{3x+x} = 2\sqrt{x} < 2x < x^3 < x^3 + 1, \text{ loại.}$$

Xét $x = 0, x = 1$ đều thỏa mãn.

Cách 2. $x^3 + 1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \left(x^3+1\right)^2 = 3x + 1$,

đưa về $x(x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 3\right) = 0$.

Do $x \geq 0$ nên nghiệm của phương trình là 0 và 1.

b) Giải tương tự như câu a. *Đáp số:* $x = 1$.

Kinh nghiệm giải toán

Nghiệm nguyên (nếu có) của các phương trình $x^3 + 1 = \sqrt{3x+1}$ và $x^3 + 3 = \sqrt{15x+1}$ chỉ có thể lấy một vài giá trị tự nhiên nhỏ, vì khi x tăng thì vế trái của các phương trình trên tăng rất nhanh, trong khi vế phải chỉ tăng từ từ. Nhận xét đó giúp ta có cách giải 1 nói trên.

Bài 9.2: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-4x+7}=x-y$;
b) $y^2=1+\sqrt{9-x^2-4x}$;
c) $2y^2=1+\sqrt{49-x^2-2x}$
d) $x^2-y^2=\sqrt{y+1}$.

a) $\sqrt{x^2-4x+7}=x-y$.
Đặt $x-y=m\geq 0$, đưa về $(x-2)^2-m^2=-3$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1),(3;1)$.

b) $y^2=1+\sqrt{13-(x^2+4x+4)}=1+\sqrt{13-(x+2)^2}\leq 1+\sqrt{13}$.
Suy ra $1\leq y^2\leq 4$.

- Với $y^2=1$ thì $13=(x+2)^2$, không có nghiệm nguyên.
- Với $y^2=4$ thì $3=\sqrt{13-(x+2)^2}\Leftrightarrow (x+2)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(0;2),(0;-2),(-4;2),(-4;-2)$.

c) $2y^2=1+\sqrt{50-(x+1)^2}\leq 1+\sqrt{50}<1+8=9$.
Suy ra $y^2\leq 4$. Do $y^2\neq 0$ nên $y^2\in\{1;4\}$.

- Xét $y^2=1$, ta tìm được $x_1=6, x_2=-8$.
- Xét $y^2=4$, ta tìm được $x_3=0, x_4=-2$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(6;1),(6;-1),(-8;1),(-8;-1),(0;2),(0;-2),(-2;2),(-2;-2)$.

d) Xét phương trình $x^2-y^2=\sqrt{y+1}$. (1)
Điều kiện $y+1\geq 0$, nên $y\geq -1$.

- Xét $y=-1$, thay vào (1) được $x=\pm 1$.
- Xét $y=0$, thay vào (1) được $x=\pm 1$.
- Xét $y\geq 1$ thì $y+1\geq 2$. Ta biết rằng với $a\geq 2$ thì $\sqrt{a}<a$ nên $\sqrt{y+1}<y+1$. Từ (1) có
$$x^2=y^2+\sqrt{y+1}<y^2+y+1<(y+1)^2. \tag{2}$$
Mặt khác từ (1) có $x^2>y^2$. (3)
Từ (2) và (3) suy ra $y^2<x^2<(y+1)^2$, loại.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1),(-1;-1),(1;0),(-1;0)$.

Bài 9.3: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = \sqrt{48}$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = y$

a) Xét phương trình $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4\sqrt{3}$. (1)
Điều kiện: $y \geq 0; x \geq 0$.
Rút $3\sqrt{y}$ từ (1) được $3\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4\sqrt{3}$
Với điều kiện $x \geq 12$, bình phương hai vế được $9y = 4x + 48 - 16\sqrt{3x}$
Suy ra $3x$ là số chính phương nên $x = 3a^2$ $(a \in \mathbb{N})$.
Rút $2\sqrt{x}$ từ (1) và cũng lập luận tương tự như trên ta được $y = 3b^2$ $(b \in \mathbb{N})$.
Thay vào (1) ta được $2a\sqrt{3} - 3b\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 2a - 3b = 4$.
Ta thấy $b \vdots 2$. Đặt $b = 2t$ $(t \in \mathbb{N})$ thì $a - 3t = 2$ nên $a = 3t + 2$.
Khi đó
$x = 3a^2 = 3(3t+2)^2$ (thỏa mãn $x \geq 12$)
$y = 3b^2 = 12t^2$ với $t \in \mathbb{N}$.
Đáp số $\begin{cases} x = 3(3t+2)^2 \\ y = 12t^2 \end{cases}$ với t là số tự nhiên tùy ý.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = y \quad (1) \\ \Leftrightarrow &2x + 4 + 2\sqrt{x(x+4)} = y^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+4)} = y^2 - 2x - 4. \end{aligned}$$

Đặt $y^2 - 2x - 4 = m$ với $(m \in \mathbb{N})$ ta có
$4x(x+4) = m^2 \Leftrightarrow (2x+4)^2 - m^2 = 16 \Leftrightarrow (2x+4+m)(2x+4-m) = 16$
Ta tìm được $x = 0$, thay vào (1) được $y^2 = 4$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y) = (0; 2)$
Lưu ý. Có thể giải phương trình $4x(x+4) = m^2$ với $x \geq 1$ như sau:
Từ $4x(x+4) = m^2$, suy ra $x(x+4)$ là số chính phương. Điều này không xảy ra đối với $x \geq 1$, vì khi đó $(x+1)^2 < x^2 + 4x < (x+2)^2$.

Bài 9.4: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên?

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2000}. \quad (1)$$

Lập luận như ví dụ 4 (ở trang 106), ta đưa về

$$a\sqrt{5} + b\sqrt{5} = 20\sqrt{5} \ (a; b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a + b = 20. \quad (2)$$

Ứng với một cặp số tự nhiên $(a; b)$ có một cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn (1). Ta thấy a nhận các giá trị $0; 1; 2; \ldots; 20$, tương ứng b nhận các giá trị $20; 19; 18; \ldots; 0$.
Phương trình (2) có 21 nghiệm nguyên, do đó phương trình (1) có 21 nghiệm nguyên.

Bài 9.5: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $y = x + \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}}$.

b) $y\sqrt{2} = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

c) $y = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x-2}}$.

a) Đặt $t = \sqrt{x+1}$ $(t \in \mathbb{N})$ thì $x = t^2 - 1$.

Ta có $y = t^2 - 1 + \sqrt{t^2 + 1 + 2t} = t^2 - 1 + t + 1 = t^2 + t$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(t^2 - 1; t^2 + t)$ với t là số tự nhiên tùy ý.

b) $2y = \sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2x-1} + 1 + \left|\sqrt{2x-1} - 1\right|$.

Điều kiện: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$. Do x là số nguyên nên $x \geq 1$.

Do đó $2y = \sqrt{2x-1} + 1 + \sqrt{2x-1} - 1 = 2\sqrt{2x-1}$ nên $y = \sqrt{2x-1}$.

Đặt $2x - 1 = (2t+1)^2$ $(t \in \mathbb{N})$ thì $x = 2t^2 + 2t + 1$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(2t^2 + 2t + 1; 2t + 1)$ với $t \in \mathbb{N}$.

c) Điều kiện: $x \geq 2$. Rút gọn được $y = \left|\sqrt{x-2} - 1\right| + \left|\sqrt{x-2} - 2\right|$.

Ta thấy $\sqrt{x-2} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$ và $\sqrt{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 6$.

Xét các trường hợp sau:

- Với $x = 2$ thì $y = 1 + 2 = 3$.
- Với $3 \leq x < 6$ thì $y = \sqrt{x-2} - 1 + 2 - \sqrt{x-2} = 1$.

  Ta có các nghiệm $(x; y)$ là $(3; 1), (4; 1), (5; 1)$.
- Với $x \geq 6$ thì $y = \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{x+2} - 2 = 2\sqrt{x-2} - 3$.

  Đặt $x - 2 = t^2$ $(t \in \mathbb{N}, t \geq 2$ để $x \geq 6)$ thì $x = t^2 + 2; y = 2t - 3$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 3), (3; 1), (4; 1), (5; 1)$ và $(t^2 + 2; 2t - 3)$ với $t \in \mathbb{N}, t \geq 2$.

Bài 9.6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} = y.$$

trong mỗi trường hợp sau:

a) Vế trái có 100 dấu căn.

b) Vế trái có n dấu căn.

a) Giải tương tự như thí dụ 5 (ở trang 107), ta được $x = 0; y = 0$.

b) Nếu $n = 1$ ta có $\sqrt{x} = y$.

Nghiệm $(x; y)$ là $(t^2; t)$ với $t \in \mathbb{N}$.

Nếu $n \geq 2$, giải như ở câu $a)$ ta được nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$.

Bài 9.7: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình sau:

a) $y = \sqrt{6x + \sqrt{5x + \sqrt{4x + \sqrt{x}}}}$.

b) $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x + \dfrac{1}{4}}}$.

a) $y = \sqrt{6x + \sqrt{5x + \sqrt{4x + \sqrt{x}}}}$.

Điều kiện $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

Phương trình tương đương $\sqrt{5x + \sqrt{4x + \sqrt{x}}} = y^2 - 6x$.

Bình phương hai vế rồi chuyển vế ta được $\sqrt{4x + \sqrt{x}} = k^2 - 5x$.

Đặt $\sqrt{4x + \sqrt{x}} = m$ $(m \in \mathbb{N})$. Suy ra $4x + \sqrt{x} = m^2$.

Đặt $\sqrt{x} = a$ $(a \in \mathbb{N})$. Đưa về phương trình ẩn a ta được $4a^2 + a - m^2 = 0$.

Ta có $\Delta = 1 + 4m^2$.

Δ là số chính phương $\Leftrightarrow 1 + 4m^2 = n^2$ $(n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (n + 2m)(n - 2m) = 1$.

Ta tìm được $m = 0, a = 0, x = 0, y = 0$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$.

b) $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x + \dfrac{1}{4}}}$ (1)

Đặt $\sqrt{x + \dfrac{1}{4}} = k$ (với $k \geqslant 0$) thì $x + \dfrac{1}{4} = k^2$. Thay vào (1) được

$y = \sqrt{k^2 + \dfrac{1}{4} + k} = k + \dfrac{1}{2}$. (2)

Để $y \in \mathbb{N}$ thì $k = t + \dfrac{1}{2}$ với $t \in \mathbb{N}$.

Khi đó $y = t + 1, x = k^2 - \dfrac{1}{4} = \left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = t^2 + t = t(t + 1)$.

Đáp số: $\begin{cases} x = t(t + 1) \\ y = t + 1 \end{cases}$ với t là số tự nhiên tùy ý.

Bài 9.8: Tìm nghiệm nguyên dương của mỗi phương trình sau:

a) $y = \sqrt[3]{7+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{x}}$. b) $y = \sqrt[3]{x+13} - \sqrt[3]{x-13}$.

Giải tương tự thí dụ 6 (ở trang 107).

a) Ta tìm được y là ước của 14. Chỉ có $y = 2$ thỏa mãn phương trình.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(50; 2)$.

b) Ta tìm được y là ước của 26. Chỉ có $y = 2$ thỏa mãn phương trình.
Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(14; 2)$.

Bài 9.9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x+4\sqrt{x+4\sqrt{x+...+4\sqrt{x+4\sqrt{5x}}}}} = x$ trong đó vế trái có 100 dấu căn.

$$\sqrt{x+4\sqrt{x+4\sqrt{x+\ldots+4\sqrt{x+4\sqrt{5x}}}}} = x \quad (1)$$

Ta thấy $x \geqslant 0$. Xét các trường hợp sau:

- $x = 0$ thì (1) được nghiệm đúng.
- $x = 5$ thì (1) được nghiệm đúng.
- $0 < x < 5$. Ta có $x^2 < 5x \Rightarrow x < \sqrt{5x} \Rightarrow 4x < 4\sqrt{5x} \Rightarrow 5x < x + 4\sqrt{5x} \Rightarrow \sqrt{5x} < \sqrt{x+4\sqrt{5x}}$. Cứ như thế thì ở phương trình (1) giá trị vế trái lớn hơn $\sqrt{5x}$, mà $x < \sqrt{5x}$ nên giá trị vế phải nhỏ hơn giá trị vế trái. Loại.
- $x > 5$. Lập luận tương tự, ở phương trình (1) giá trị vế trái nhỏ hơn $\sqrt{5x}$, mà $x > \sqrt{5x}$ nên giá trị vế phải lớn hơn giá trị vế trái. Loại.
  Đáp số: $x = 0$ và $x = 5$.

Bài 9.10: Tìm nghiệm nguyên dương của mỗi phương trình sau:

a) $2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-3} + 2\sqrt{z} = x + y + z$.

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z + 2\sqrt{2}}$.

a) Đưa về $(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-3}-1)^2 + (\sqrt{z}-1)^2 = 0$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 4; 1)$.

b) Giả sử $x \geqslant y$. Từ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z+2\sqrt{2}}$ ta có
$$x + y + 2\sqrt{xy} = z + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} = z - x - y + 2\sqrt{2} \quad (1)$$
Với điều kiện $z - x - y + 2\sqrt{2} \geqslant 0$ $\quad (2)$
thì $(1) \Leftrightarrow 4xy = (z-x-y)^2 + 8 + 4\sqrt{2}(z-x-y)$.
Do $z - x - y$ nguyên nên chỉ có thể $z - x - y = 0$ thỏa mãn điều kiện (2).
Khi đó $4xy = 8 \Leftrightarrow xy = 2$. Do $x \geqslant y$ nên $x = 2, y = 1$.
Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(2; 1; 3), (1; 2; 3)$.

BÀI 10. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VỚI NGHIỆM NGUYÊN

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$$

Sử dụng hằng đẳng thức $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$ ta có

$$27-3=3(x+y)(y+z)(z+x) \Leftrightarrow 8=(x+y)(y+z)(z+x)$$

Đặt $x+y=c, y+z=a, z+x=b$ thì $abc=8$.
Giả sử $x \le y \le z$ thì $a \ge b \ge c$.
Ta có $a+b+c=2(x+y+z)=6$ nên $a \ge 2$.
Ta lại có $abc=8$ nên $a \in \{2;4;6\}$.
Xét các trường hợp sau:

- Với $a=2$ ta có $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases}$
  Suy ra $b=c=2$. Ta được $x=y=z=1$.
- Với $a=4$ ta có $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=2 \end{cases}$
  Không có nghiệm nguyên.
- Với $a=8$ ta có $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases}$
  Suy ra $b=c=-1$. Ta được $x=-5; y=4; z=4$.
  Đáp số: Nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;1;1),(-5;4;4),(4;4;-5),(4;-5;4)$.

BÀI TẬP

Bài 10.1: Tìm nghiệm nguyên của mỗi hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5y+3z=1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 3x+5y=2 \\ 2x-3z=4 \end{cases}$.

a) $\begin{cases} x+y+z=3 & (1) \\ x^3+y^3+z^3=9 & (2) \end{cases}$

Từ (1) có y là số chẵn. Đặt $y=2k$(k là số nguyên) được $x=4-3k$.

Thay $y=2k$ vào (2) được $10k+3z=1$ nên $z=\dfrac{1-10k}{3}=-3k+\dfrac{1-k}{3}$.

Đặt $\dfrac{1-k}{3}=t$ (t là số nguyên) thì $k=1-3t$. Khi đó

$x=4-3(1-3t)=1+9t$

$y=2(1-3t)=2-6t$

$z=-3(1-3t)+t=10t-3.$

Đáp số: Nghiệm $(x;y;z)$ là $(1+9t;2-6t;10t-3)$ với t là số nguyên tùy ý.

b) $\begin{cases} x=15t-1 \\ y=1-9t \quad \text{với } t \text{ là số nguyên tùy ý.} \\ z=10t-2 \end{cases}$

Bài 10.2: Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{1}{y}\right) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ z=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$.

Biến đổi:

$\begin{cases} 2x=y+\dfrac{1}{y} \ (1) \\ 2y=z+\dfrac{1}{z} \ (2) \\ 2z=x+\dfrac{1}{x} \ (3) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{y}$ nguyên, do đó $y=1$ hoặc $y=-1$.

Tương tự $z=1$ hoặc $z=-1$; $x=1$ hoặc $x=-1$.

Chú ý rằng x,y,z cùng dấu.

Đáp số: Nghiệm $(x;y;z)$ là $(1;1;1),(-1;-1;-1)$.

Bài 10.3: Tìm nghiệm nguyên của mỗi hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=9 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x+y+z=25 \\ x^2+y^2+z^2=209 \end{cases}$.

a) Giải tương tự ví dụ 1 ở trang 114.

Đưa về $6 = abc$ với $a = y + z, b = x + z, c = x + y$.

Ta tìm được $a = 3; b = 2; c = 1$.

Suy ra $x = 0; y = 1; z = 2$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(0; 1; 2)$ và các hoán vị của nó.

b) $\begin{cases} x + y + z = 25 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 209 & (2) \end{cases}$

Cách 1. Rút z từ (1) được $z = 25 - x - y$.

Thay vào (2) được $x^2 + y^2 + (25 - x - y)^2 = 209$.

Rút gọn được $x^2 + (y - 25)x + (y^2 - 25y + 208) = 0$. (3)

$\triangle \geq 0 \Leftrightarrow (y - 25)^2 - 4(y^2 - 25y + 208) \geq 0$

$\Leftrightarrow -3y^2 + 50y - 207 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{23}{3} \leq y \leq 9$.

Do y là số nguyên nên $y = 8$ hoặc $y = 9$.

• Với $y = 8$, thay vào (3) được $x^2 - 17x + 72 = 0$ nên có $x_1 = 8; x_2 = 9$.

• Với $y = 9$, thay vào (3) được $x^2 - 16x + 64 = 0$ nên có $x_3 = 8$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(8; 8; 9), (9; 8; 8), (8; 9; 8)$.

Cách 2. Từ (1) suy ra $(x + y + z)^2 = 625$.

Trừ đi (2) được $2(xy + yz + zx) = 416$. (4)

Nhân (2) với 2 được $2(x^2 + y^2 + z^2) = 418$. (5)

Lấy (5) trừ (4) được $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2$.

Ba số chính phương có tổng bằng 2 nên tồn tại một số bằng 0.

Bạn đọc tự giải tiếp.

Bài 10.4: Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình $\begin{cases} xy + 2zt = 0 \\ xt - yz = 1 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} xy + 2zt = 0 & (1) \\ xt - yz = 1 & (2) \end{cases}$.

Suy ra $(xy + 2zt)^2 + 2(xt - yz)^2 = 2$.

Rút gọn được $(x^2 + 2z^2)(y^2 + 2t^2) = 2$. Xét hai trường hợp:

a) $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 1 \\ y^2 + 2t^2 = 2 \end{cases}$

Suy ra $x = \pm 1; z = 0; y = 0; t = \pm 1$.

Từ (2) có $xt = yz + 1 = 1$ nên x và t cùng dấu.

Ta được nghiệm $(x; y; z; t)$ là $(1; 0; 0; 1)$ và $(-1; 0; 0; -1)$.

b) $\begin{cases} x^2+2z^2=2 \\ y^2+2t^2=1 \end{cases}$

Suy ra $x=0; z=\pm 1; y=\pm 1; t=0$.

Từ (2) có $yz=xt-1=-1$ nên y và z trái dấu.

Ta được nghiệm $(x;y;z;t)$ là $(0;1;-1;0)$ và $(0;-1;1;0)$.

BÀI 11. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM NGUYÊN

Ví dụ 1: Tìm giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm nguyên dương:

$$x^2 + mx + 2 = 0. \qquad (1)$$

Cách 1. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nguyên dương của phương trình (1).
Theo hệ thức Vi-et $x_1 + x_2 = -m$ nên m là số nguyên.
Ta có $\Delta = m^2 - 8$. Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương.
Đặt $m^2 - 8 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (m+k)(m-k) = 8$.
$m + k$ và $m - k$ là ước của 8, cùng tính chẵn lẻ nên cùng chẵn và $m + k \geq m - k$. Ta có bảng giá trị sau

$m+k$	4	-2
$m-k$	2	-4
m	3	-3

- Với $m = 3$, thay vào (1) được $x^2 + 3x + 2 = 0$, ta có $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, không thỏa mãn $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.
- Với $m = -3$, thay vào (1) được $x^2 - 3x + 2 = 0$, ta có $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, thỏa mãn bài toán. Vậy $m = -3$.

Cách 2. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nguyên dương của phương trình (1).
Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m & (2) \\ x_1 x_2 = 2 & (3) \end{cases}$
Giả sử $x_1 \leq x_2$. Do x_1, x_2 nguyên dương nên từ (3) suy ra $x_1 = 1, x_2 = 2$.
Từ (2) suy ra $m = -3$.

> **!** *Kinh nghiệm giải toán* Ở cách 1, sau khi nhận xét m phải là số nguyên, ta giải phương trình với nghiệm nguyên x và m, tìm được hai giá trị của m là 3 và -3. Sau đó ta tìm giá trị của x để chọn ra x nguyên dương. Cách 1 được giải theo suy nghĩ thông thường.
> Giải theo cách 2 gọn hơn. Ta chú ý đến tích của hai nghiệm nguyên dương bằng 2 nên hai nghiệm đó là 1 và 2. Từ đó tìm được $m = -3$.
> Còn có thể giải thí dụ trên theo một hướng khác. Trước hết, chưa chú ý đến điều

! kiện x_1 và x_2 là các số nguyên, ta tìm điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm dương, điều kiện đó là

$$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ x_1x_2 > 0\\ x_1+x_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-8>0\\ 2>0\\ -m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>8\\ m<0.\end{cases}$$

Do chưa sử dụng điều kiện x_1, x_2 nguyên nên chưa chặn được giá trị của m. Giải theo cách này không gọn bằng các cách trên.

Ví dụ 2: Tìm giá trị của m để các nghiệm của phương trình sau đều là số nguyên.

$$x^2-mx+(m+2)=0. \qquad (2)$$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nguyên của (1). Theo hệ thức Vi-et, ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m+2.\end{cases}$$

Do đó $x_1x_2-(x_1+x_2)=2 \Leftrightarrow x_1(x_2-1)-(x_2-1)=3 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=3$.
x_1-1 và x_2-1 là ước của 3. Giả sử $x_1 \geq x_2$ thì $x_1-1 \geq x_2-1$.
Xảy ra hai trường hợp:

a) $\begin{cases}x_1-1=3\\ x_2-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=4\\ x_2=2\end{cases}$. Khi đó $m=6$.

b) $\begin{cases}x_1-1=-1\\ x_2-1=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=0\\ x_2=-2\end{cases}$. Khi đó $m=-2$.

! *Lưu ý*. Cũng có thể giải thí dụ trên bằng cách nhận xét m là số nguyên, tìm Δ được m^2-4m-8, rồi giải điều kiện $m^2-4m-8=k^2 (k\in\mathbb{N})$ để đưa về $(m-2+k)(m-2-k)=12$, tìm được $m=6$ và $m=-2$.

BÀI TẬP

Bài 11.1: Tìm các số nguyên dương k để phương trình sau có nghiệm nguyên: $x^2-y^2=k$.
Xét bốn trường hợp: $k=4n$; $k=4n+1$; $k=4n+2$; $k=4n+3$ với n là số tự nhiên.

- Với $k = 4n$ thì phương trình $x^2 - y^2 = k(1)$ có nghiệm nguyên, chẳng hạn $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2n \end{cases}$ cho $\begin{cases} x = n + 1 \\ y = n - 1. \end{cases}$

- Với $k = 4n + 1$ thì (1) có nghiệm nguyên, chẳng hạn $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 4n + 1 \end{cases}$ cho $\begin{cases} x = 2n + 1 \\ y = 2n. \end{cases}$

- Với $k = 4n + 3$ thì (1) có nghiệm nguyên, chẳng hạn $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 4n + 3 \end{cases}$ cho $\begin{cases} x = 2n + 2 \\ y = 2n + 1. \end{cases}$

- Với $k = 4n + 2$, xét $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Tích này chia hết cho 4 khi x, y cùng chẵn, và tích này lẻ khi x, y có tính chẵn lẻ khác nhau, do đó tích này khi chia cho 4 không có dư bằng 2. Vậy $k \neq 4n + 2 (n \in \mathbb{N})$.

Bài 11.2: Tìm các số nguyên a để phương trình sau có nghiệm nguyên dương: $|4 - 3x| = 5 - a$.

$|4 - 3x| = 5 - a \qquad (1)$

Với $a \leq 5$ thì $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - 3x = 5 - a \\ 4 - 3x = a - 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3x + 1 \\ a = 9 - 3x. \end{array}\right.$

$3x + 1 \leq 5 (x \in \mathbb{N}^*)$ nên $x = 1$, khi đó $a = 4$.

$9 - 3x \leq 5 (x \in \mathbb{N}^*)$ nên $x \in \{2; 3; 4; \cdots\}$. Vậy $a = 4$ hoặc $a = 9 - 3t$ với $t \in \mathbb{Z}, t \geq 2$.

> **!** Công thức $a = 9 - 3t$ với $t \in \mathbb{Z}, t \geq 2$ có thể viết dưới dạng $a = 3k$ với $k \in \mathbb{Z}, k \leq 1$.

Bài 11.3: Tìm giá trị của m để các nghiệm của mỗi phương trình sau là số nguyên:

a) $x^2 + mx + 6m = 0$.

b) $x^2 + m^2x + (m - 1) = 0$.

a) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + mx + 6m = 0$.

Theo hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = 6m. \end{cases}$

Đưa về phương trình ước số: $(x_1 + 6)(x_2 + 6) = 36$.

Giả sử $x_1 \geq x_2$. Xét bảng giá trị của $x_1 + 6$ và $x_2 + 6$, có 10 trường hợp xảy ra:

x_1+6	36	18	12	9	6	-1	-2	-3	-4	-6
x_2+6	1	2	3	4	6	-36	-18	-12	-9	-6
x_1	30	12	6	3	0	-7	-8	-9	-10	-12
x_2	-5	-4	-3	-2	0	-42	-24	-18	-15	-12
m	-25	-8	-3	-1	0	49	32	27	25	24

b) $x^2+m^2x+(m-1)=0$.
$\Delta=m^4-4(m-1)=m^4-4m+4$.
Ta phải có Δ là số chính phương. Xét các trường hợp sau:

- Với $m\leq -3$ thì $(m^2)^2<\Delta<(m^2+1)^2$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}\Delta-m^4&=4-4m\geq 4+12=16>0;\\(m^2+1)^2-\Delta&=m^4+2m^2+1-m^4+4m-4\\&=2m^2+4m-3=2(m+1)^2-5\geq 2\cdot 4-5=3>0.\end{aligned}$$

  Do đó Δ không là số chính phương.
- Với $m=-2$ thì $\Delta=28$, không là số chính phương.
- Với $m=-1$ thì $\Delta=9=3^2$. Từ $x^2+x-2=0$ có $x_1=1; x_2=-2$.
- Với $m=0$ thì $\Delta=4=2^2$. Từ $x^2-1=0$ có $x_3=1; x_4=-1$.
- Với $m=1$ thì $\Delta=1=1^2$. Từ $x^2+x=0$ có $x_5=0; x_6=-1$.
- Với $m>1$ thì $(m^2-1)^2<\Delta<(m^2)^2$. Thật vậy:
  $m^4-\Delta=4m-4>0$;
  $\Delta-(m^2-1)^2=m^4-4m+4-m^4+2m^2-1=2m^2-4m+3=2(m-1)^2+1>0$.
  Do đó Δ không là số chính phương.
  Đáp số: $m=0; m=1; m=-1$.

Bài 11.4: Tìm các số nguyên a và b sao cho $a+2b=25$ và các nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$ đều là số nguyên. Tìm các nghiệm đó.

Xét phương trình $x^2+ax+b=0$. (1)

Để các nghiệm của phương trình (1) là số nguyên, ta phải có $\Delta=a^2-4b$ là chính phương, tức là

$$a^2-4b=m^2(m\in\mathbb{N})\Leftrightarrow a^2-4(25-a)=m^2\Leftrightarrow a^2+4a-(100+m^2)=0. \quad (2)$$

Để phương trình (2) có nghiệm nguyên ta phải có:

$$m^2+104=n^2(n\in\mathbb{N})\Leftrightarrow(n+m)(n-m)=8\cdot 13.$$

Ta thấy $n+m$ và $n-m$ cùng chẵn. Có hai trường hợp xảy ra:

a) $\begin{cases} n+m=52 \\ n-m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=27 \\ m=25. \end{cases}$

Khi đó nghiệm của phương trình (2) là $a_1 = 25, a_2 = -29$ nên $\begin{cases} a_1 = 25 \\ b_1 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 = -29 \\ b_1 = 54. \end{cases}$

Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ là

$x^2 + 25x = 0$ có nghiệm $x_1 = 0; x_2 = -25$.

$x^2 - 29x + 54 = 0$ có nghiệm $x_3 = 2; x_4 = 27$.

b) $\begin{cases} n+m=26 \\ n-m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ m=11. \end{cases}$

Khi đó nghiệm của phương trình (2) là $a_3 = 13, a_4 = -17$ nên $\begin{cases} a_3 = 13 \\ b_3 = 12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_4 = -17 \\ b_4 = 42. \end{cases}$

Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ là

$x^2 + 13x + 12 = 0$ có nghiệm $x_5 = -1; x_6 = -12$.

$x^2 - 17x + 42 = 0$ có nghiệm $x_7 = 14; x_8 = 3$.

Bài 11.5: Tìm các số nguyên a và b $(a \geq b)$ sao cho $a + 2b = 25$ và các nghiệm của phương trình sau đề là số nguyên:

$$x^2 - abx + (a+b) = 0.$$

$x^2 - abx + (a+b) = 0 \qquad (1)$

Gọi m, n là các nghiệm của phương trình (1).

Giả sử $m \geq n$. Theo hệ thức Vi-et, ta có

$$\begin{cases} m+n = ab \\ mn = a+b \end{cases} \qquad (2)$$

Do a, b là các số nguyên dương nên m, n là các số nguyên dương.

Trước hết ta có *Bổ đề*: Nếu hai số lớn hơn 2 thì tích của chúng lớn hơn tổng của chúng.

Thật vậy, giả sử $a > 2, b > 2$ thì $ab > 2a$, $ab > 2b$ nên $2ab > 2(a+b)$, do đó $ab > a+b$.

Theo Bổ đề trên, nếu cả bốn số a, b, m, n đều lớn hơn 2 thì $ab > a+b$, $mn > m+n$, không thể xảy ra (2). Do đó trong bốn số a, b, m, n tồn tại một số không quá 2.

Không mất tính tổng quát, giả sử $n \leq 2$.

Theo đề bài $a \geq b$. Có hai trường hợp xảy ra:

a) Xét $n = 1$. Từ (2) ta có $\begin{cases} ab = m+1 \\ a+b = m. \end{cases}$

Do đó $ab - a - b = 1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 2$.

Ta có $\begin{cases} a-1=2 \\ b-1=1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. Khi đó $m=5$.

b) Xét $n=2$. Từ (2) ta có $\begin{cases} ab=m+2 \\ a+b=2m. \end{cases}$

Do đó $2ab-a-b=4 \Leftrightarrow 4ab-2a-2b=8 \Leftrightarrow (2a-1)(2b-1)=9$.

Xảy ra hai trường hợp:

$\begin{cases} 2a-1=9 \\ 2b-1=1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$. Khi đó $m=3$.

$\begin{cases} 2a-1=3 \\ 2b-1=3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$. Khi đó $m=2$.

Kết luận: Phương trình (1) có nghiệm nguyên khi $(a;b)$ là $(3;2)$, $(5;1)$, $(2;2)$.

Bài 11.6: Cho a và b là các số nguyên.

a) Gọi x_0, y_0 là các số nguyên sao cho biểu thức ax_0+by_0 có giá trị nguyên dương nhỏ nhất là n. Gọi r là số dư của phép chia a cho n. Chứng minh rằng r cũng viết được dưới dạng $ax+by$ trong đó x và y là các số nguyên.

b) Chứng minh rằng $r=0$.

c) Cho biết a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các phương trình $ax+by=1$ và $ax+by=c$ (c nguyên) có nghiệm nguyên.

a) $ax_0+by_0=n$. Giả sử $a=nk+r$ (k là số nguyên) thì

$$r=a-nk=a-k(ax_0+by_0)=a-akx_0-bky_0=a(1-kx_0)+b(-ky_0).$$

Đặt $1-kx_0=x$; $-ky_0=y$, ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử $r\neq 0$ thì r là số nguyên dương. Do r là số dư của phép chia a cho n nên $r<n$.
Như vậy tồn tại số nguyên dương r nhỏ hơn n mà vẫn viết được dưới dạng $ax+by$, trái với giả thiết n là giá trị nguyên dương nhỏ nhất của $ax+by$.
Vậy $r=0$.

c) Gọi r' là số dư của phép chia b cho n.
Chứng minh tương tự như trên, ta được $r'=0$.
Do đó $a \vdots n$ và $b \vdots n$. Vậy n là ước chung của a và b. Nếu $(a,b)=1$ thì $n=1$.
Điều đó chứng tỏ rằng phương trình $ax+by=c$ có một trong các nghiệm nguyên là $(cx_0;cy_0)$.

!

Cách khác chứng minh phương trình $ax + by = 1$ có nghiệm nguyên nếu $(a, b) = 1$ như sau.

Không mất tính tổng quát, chỉ cần chứng minh phương trình $ax + by = 1$ có nghiệm nguyên, trong đó có thể giả sử $a, b \in \mathbb{N}$. Để chứng minh điều này, ta sẽ chứng minh tồn tại một bội của a có dạng $by + 1$, tức là chia cho b dư 1.

Xét các bội của a dạng ka với $1 \leq k \leq b - 1$.

Trong $b - 1$ bội đó của a, không có số nào chia hết cho b. Thật vậy giả sử $ka \vdots b$ thì do $(a, b) = 1$ nên $k \vdots b$, điều này trái với $1 \leq k \leq b - 1$.

Ta sẽ chứng minh trong $b - 1$ bội của a nói trên, tồn tại một số chia cho b dư 1.

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử không tồn tại số nào chia cho b dư 1 thì các số dư khi chia ka cho b chỉ có thể là $2, 3, 4, \ldots, b - 1$ (không có số dư 0 như đã chứng minh ở trên). Có $b - 2$ số dư, mà có $b - 1$ số ka nên tồn tại hai số có số dư bằng nhau, chẳng hạn hai số đó là ma và na, trong đó $1 \leq n < m \leq b - 1$. Thế thì $(ma - na) \vdots b$ nên $(m - n)a \vdots b$. Lại do $(a, b) = 1$ nên $(m - n) \vdots b$, điều này trái với $0 < m - n < b - 1$.

BÀI TOÁN ĐƯA VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Trăm trâu trăm cỏ
Bài toán từ xưa
Đã từng chắp cánh
Cho nhiều ước mơ

BÀI 1. BÀI TOÁN VỀ SỐ TỰ NHIÊN VÀ CÁC CHỮ SỐ

Ví dụ 1: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp, mỗi số có hai chữ số, biết rằng nếu viết số lớn trước số nhỏ thì ta được một số chính phương.
Gọi hai số tự nhiên phải tìm là x và $x+1$, số chính phương là n^2, trong đó x, n thuộc $\mathbb{N}$. Do x và $x+1$ đều là các số có hai chữ số và n^2 là số có bốn chữ số nên

$$10 \leq x \leq 98;\ 32 \leq n \leq 99 \tag{3.1}$$

Từ giả thiết ta có

$$100(x+1)+x = n^2 \Leftrightarrow 101x+100 = n^2 \Leftrightarrow (n+10)(n-10) = 101x \tag{3.2}$$

Chú ý rằng $(n+10)(n-10)$ chia hết cho số nguyên tố 101, do đó tồn tại một thừa số chia hết cho 101.
Từ (3.1) ta có

$$22 \leq n-10 \leq 89,$$
$$42 \leq n+10 \leq 109.$$

Từ đó và (3.2) chỉ có thể là $n+10 = 101$.
Suy ra $n = 91$; $n^2 = 91^2 = 8281$.
Vậy hai số phải tìm là 81 và 82.

Ví dụ 2: Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số và bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.
Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ (với $a \neq 0$, và a, b, c, d thuộc $\mathbb{N}$). Ta có

$$\overline{abcd} = (a+b+c+d)^3 \tag{3.3}$$

Đặt $a+b+c+d = m$. Số $\overline{abcd}$ và tổng các chữ số của nó khi chia cho 9 có cùng số dư nên $\left(\overline{abcd}-m\right) \vdots 9$ hay $\overline{abcd} = 9k+m$ $(k \in \mathbb{N})$.
Thay vào (3.3) được $9k+m = m^3$.
Do đó $\left(m^3-m\right) \vdots 9$, tức là $(m-1)m(m+1) \vdots 9$.
Trong ba số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 3. Tích của chúng chia hết cho 9 nên có một và chỉ một số chia hết cho 9.
Ta có

$$\begin{aligned} 1000 \le \overline{abcd} \le 9999 &\Rightarrow 1000 \le m^3 \le 9999 \\ &\Rightarrow 10 \le m \le 21. \end{aligned}$$

Do đó $9 \le m-1 \le 20$; $11 \le m+1 \le 22$.
Xét ba trường hợp sau:

a) $m \vdots 9 \Rightarrow m = 18$. Khi đó

$$\overline{abcd} = 18^3 = 5832 = (5+8+3+2)^3.$$

b) $(m+1) \vdots 9 \Rightarrow m+1 = 18 \Rightarrow m = 17$. Khi đó

$$\overline{abcd} = 17^3 = 4913 = (4+9+1+3)^3.$$

c) $(m-1) \vdots 9 \Rightarrow m-1 = 18 \Rightarrow m = 19$. Khi đó

$$\overline{abcd} = 19^3 = 6859, \text{ loại vì tổng các chữ số không bằng } 19.$$

Vậy số phải tìm là 5832 và 4913.

►► ***Kinh nghiệm giải toán***

- Nếu khai triển hai vế của $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^3$ thì ta sẽ được một phương trình bậc ba với bốn ẩn a, b, c, d; giải phương trình này rất phức tạp.
  Nhờ đặt $a+b+c+d = m$ và sử dụng dấu hiệu chia hết cho 9, ta đi đến $\left(m^3-m\right) \vdots 9$. Cùng với việc chặn giá trị của m (là $10 \le m \le 21$), ta tìm được giá trị của m.

- Khi giải các bài toán về số tự nhiên và các chữ số, nên lưu ý:
  - Chọn một nhóm chữ số làm ẩn phụ.
  - Chặn giá trị của ẩn một cách hợp lí và sử dụng các tính chất về chia hết, về số nguyên tố để giảm bớt trường hợp phải xét.

Ví dụ 3: Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số và bằng tổng các bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu và số tạo bởi hai chữ số cuối, biết rằng hai chữ số cuối giống nhau.

Gọi số phải tìm là $\overline{abcc}$ (với $a \neq 0$, và a, b, c thuộc $\mathbb{N}$). Ta có $\overline{abcc} = \overline{ab}^2 + \overline{cc}^2$.

Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cc} = y$ trong đó x, y thuộc $\mathbb{N}$; $10 \leq x \leq 99$ và $0 \leq y \leq 99$.

Ta có $100x + y = x^2 + y^2$.

Ta lại có $x^2 + y^2 \geq 2xy$ nên $100x + y \geq 2xy \Leftrightarrow (2x - 1)(y - 50) \leq 50$.

Do $x \geq 10$ nên $2x - 1 \geq 19$.

Suy ra $y - 50 \leq \dfrac{50}{19} < 3 \Rightarrow y < 53$.

Dễ thấy $y \neq 0$ và $y \,\vdots\, 11$ nên $y \in \{11; 22; 33; 44\}$.

Xét các giá trị của y:

y	$y^2 - y$	Δ'	Nhận xét
11	110	2390	Δ' không là số chính phương, vì $2390 \,\vdots\, 5$ nhưng $2390 \not\vdots\, 25$.
22	462	2038	Δ' không là số chính phương.
33	1056	$1444 = 38^2$	$x_1 = 50 - 38 = 12$ $x_2 = 50 + 38 = 88$.
44	1892	608	Δ' không là số chính phương.

Vậy số phải tìm là 1233 và 8833.

BÀI TẬP

Bài 1.1: Tìm các số tự nhiên $\overline{abc}$ với các chữ số khác nhau sao cho

$$9a = 5b + 4c.$$

Ta có

$$9a = 5b + 4c \Leftrightarrow 9a - 9c = 5b - 5c \Leftrightarrow 9(a - c) = 5(b - c).$$

Suy ra $5(b - c) \,\vdots\, 9 \Rightarrow (b - c) \,\vdots\, 9$.

Theo đề bài, $b \neq c$ nên ta có hai trường hợp:

- $\begin{cases} b = 9 \\ c = 0. \end{cases}$
  Thay vào biểu thức $9a = 5b + 4c$ ta được $a = 5$. Do đó ta có số phải tìm là 590.

- $\begin{cases} c = 9 \\ b = 0. \end{cases}$
  Thay vào biểu thức $9a = 5b + 4c$ ta được $a = 4$. Do đó ta có số phải tìm là 409.

Vậy các số phải tìm là 590 và 409.

Bài 1.2: Tìm các số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng nếu cộng chữ số hàng trăm với n $(n \in \mathbb{N})$, trừ các chữ số hàng chục và đơn vị cho n thì được một số gấp n lần số ban đầu với n là số tự nhiên nhỏ hơn chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của số ban đầu.

Gọi số phải tìm là x với $x \in \mathbb{N}^*$.

Khi thêm n vào hàng trăm, bớt n ở hàng chục và hàng đơn vị, số đó sẽ tăng thêm

$$100n - 10n - n \text{ hay } 89n.$$

Ta có $nx - x = 89n \Rightarrow (n-1)x = 89n$.

Suy ra

$$\begin{aligned} 89n \,\vdots\, (n-1) &\Rightarrow 89 \,\vdots\, (n-1) \text{ (do } n \text{ và } n-1 \text{ nguyên tố cùng nhau)} \\ &\Rightarrow n - 1 = 1 \text{ (chú ý } 1 \le n \le 9) \\ &\Rightarrow n = 2. \end{aligned}$$

Vậy số phải tìm là $x = 178$.

Bài 1.3: Tìm hai số chính phương có bốn chữ số, biết rằng mỗi chữ số của số thứ nhất đều lớn hơn chữ số cùng hàng của số thứ hai cùng bằng một số.

Gọi số chính phương thứ nhất là $x^2 = \overline{abcd}$, với x, a, b, c, d thuộc $\mathbb{N}$ và $a \ne 0$.

Gọi số chính phương thứ hai là $y^2 = \overline{a'b'c'd'}$, với y, a', b', c', d' thuộc $\mathbb{N}$ và $a' \ne 0$.

Trong đó $a - a' = b - b' = c - c' = d - d' = m$, với $m \le 8$.

Ta có $32 \le y < x \le 99$.

$$x^2 - y^2 = 1111m \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 11 \cdot 101m.$$

Do 11 và 101 đều là số nguyên tố và

$$\begin{aligned} x - y &\le 99 - 32 = 67 \\ x + y &\le 99 + 98 = 197 \end{aligned}$$

nên $\begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 11m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{101 + 11m}{2} \\ y = \dfrac{101 - 11m}{2}. \end{cases}$

$$y \ge 32 \Leftrightarrow 101 - 11m \ge 64 \Leftrightarrow m \le 3\frac{4}{11}.$$

Mặt khác, số m là số lẻ để y là số nguyên, do đó $m \in \{1; 3\}$.

- Với $m = 1$ thì $\begin{cases} x = 56 \\ y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3136 \\ y^2 = 2025. \end{cases}$

- Với $m = 3$ thì $\begin{cases} x = 67 \\ y = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4489 \\ y^2 = 1156. \end{cases}$

Bài 1.4: Tìm các số tự nhiên có hai chữ số và bằng bình phương của tổng các chữ số của nó.

Cách 1

Gọi số cần tìm là $\overline{xy}$, với x, y thuộc $\mathbb{N}$ và $x \neq 0$.

Ta có

$$\overline{xy} = (x+y)^2 \Leftrightarrow 10x + y = (x+y)^2 \Leftrightarrow 9x = (x+y)^2 - (x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x+y-1) = 9x.$$

Hai số nguyên tố cùng nhau có tích chia hết cho 9 nên tồn tại một số chia hết cho 9.

Ta có $10 \leq (x+y)^2 \leq 99 \Rightarrow 4 \leq x+y \leq 9 \Rightarrow 3 \leq x+y-1 \leq 8$.

Suy ra $(x+y) \vdots 9$. Khi đó $x + y = 9$.

Vậy số cần tìm là $\overline{xy} = 9^2 = 81$.

Cách 2

Xét các số chính phương có hai chữ số: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Chỉ có duy nhất số 81 thỏa mãn vì $16 \neq (1+6)^2; 25 \neq (2+5)^2; 36 \neq (3+6)^2; 49 \neq (4+9)^2; 64 \neq (6+4)^2; 81 = (8+1)^2$.

Bài 1.5: Tìm các số tự nhiên có ba chữ số và bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Cách 1

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$ (với $a \neq 0$, và a, b, c thuộc $\mathbb{N}$). Ta có

$$\overline{abc} = (a+b+c)^3 \tag{3.4}$$

Đặt $a + b + c = m$. Số $\overline{abc}$ và tổng các chữ số của nó khi chia cho 9 có cùng số dư nên $\left(\overline{abc} - m\right) \vdots 9$ hay $\overline{abc} = 9k + m$ $(k \in \mathbb{N})$.

Thay vào (3.4) được $9k + m = m^3$.

Do đó $\left(m^3 - m\right) \vdots 9$, tức là $(m-1)m(m+1) \vdots 9$.

Trong ba số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 3. Tích của chúng chia hết cho 9 nên có một và chỉ một số chia hết cho 9.

Ta có

$$100 \leq \overline{abc} \leq 999 \Rightarrow 100 \leq m^3 \leq 999$$
$$\Rightarrow 5 \leq m \leq 9.$$

Do đó $4 \leq m - 1 \leq 8$; $6 \leq m + 1 \leq 10$.

Xét hai trường hợp sau:

a) $m \vdots 9 \Rightarrow m = 9$. Khi đó

$$\overline{abc} = 9^3 = 729, \text{ loại vì tổng các chữ số không bằng 9.}$$

b) $(m+1) \vdots 9 \Rightarrow m+1 = 9 \Rightarrow m = 8$. Khi đó

$$\overline{abc} = 8^3 = 512 = (5+1+2)^3.$$

Vậy số phải tìm là 512.

Cách 2

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$ (với $a \neq 0$, và a, b, c thuộc $\mathbb{N}$).

Ta có $\overline{abc} = (a+b+c)^3$.

Suy ra $100 \leq (a+b+c)^3 < 1000 \Rightarrow 5 \leq a+b+c \leq 9$.

Xét các trường hợp $a+b+c$ lần lượt lấy các giá trị từ 5 đến 9:

- $a+b+c = 5$ thì $(a+b+c)^3 = 125$ loại vì $1+2+5 \neq 5$.
- $a+b+c = 6$ thì $(a+b+c)^3 = 216$ loại vì $2+1+6 \neq 6$.
- $a+b+c = 7$ thì $(a+b+c)^3 = 343$ loại vì $3+4+3 \neq 7$.
- $a+b+c = 8$ thì $(a+b+c)^3 = 512$ thỏa mãn vì $5+1+2 = 8$.
- $a+b+c = 9$ thì $(a+b+c)^3 = 729$ loại vì $7+2+9 \neq 9$.

Vậy số phải tìm là 512.

Bài 1.6: Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số và bằng lũy thừa bậc bốn của tổng các chữ số của nó.

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ (với $a \neq 0$, và a, b, c, d thuộc $\mathbb{N}$).

Ta có $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^4$.

Suy ra $1000 \leq (a+b+c+d)^4 \leq 9999 \Rightarrow 6 \leq a+b+c+d \leq 9$.

Xét các trường hợp $a+b+c+d$ lần lượt lấy các giá trị từ 6 đến 9:

- $a+b+c+d = 6$ thì $(a+b+c+d)^4 = 1296$ loại vì $1+2+9+6 \neq 6$.
- $a+b+c+d = 7$ thì $(a+b+c+d)^4 = 2401$ thỏa mãn vì $2+4+0+1 = 7$.
- $a+b+c+d = 8$ thì $(a+b+c+d)^4 = 4096$ loại vì $4+0+9+6 \neq 8$.
- $a+b+c+d = 9$ thì $(a+b+c+d)^4 = 6561$ loại vì $6+5+6+1 \neq 9$.

Vậy số phải tìm là 2401.

Bài 1.7: Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số và bằng bình phương của tổng của số tạo bởi hai chữ số đầu và số tạo bởi hai chữ số cuối của số đó (viết theo thứ tự cũ).

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ (với $a \neq 0$, và a, b, c, d thuộc $\mathbb{N}$).
Ta có $\overline{abcd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2$.
Đặt $\overline{ab} = x$, $\overline{cd} = y$ trong đó x, y thuộc $\mathbb{N}$; $10 \leq x \leq 99$ và $0 \leq y \leq 99$.
Ta có $100x + y = (x+y)^2 \Leftrightarrow 99x = (x+y)^2 - (x+y) \Leftrightarrow 99x = (x+y)(x+y-1)$.
Xét hai trường hợp sau:

- Một trong hai thừa số $x+y$, $x+y-1$ chia hết cho 99.
  Do $32 \leq x+y \leq 99$ nên $31 \leq x+y-1 \leq 98$. Suy ra $(x+y) \vdots 99$. Cho nên $x+y = 99$.
  Ta có $99^2 = 9801$, thỏa mãn vì $9801 = (98+01)^2$.

- Trong hai thừa số $x+y$, $x+y-1$ không có thừa số nào chia hết cho 99. Chú ý rằng chúng nguyên tố cùng nhau nên phải có một số chia hết cho 11 và số kia chia hết cho 9.
  Từ đó ta xét hai trường hợp:

  ◦ $\begin{cases}(x+y) \vdots 11\\(x+y-1) \vdots 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y) \in \{33; 44; 55; 66; 77; 88\}\\(x+y-1) \in \{36; 45; 54; 63; 72; 81; 90\}\end{cases} \Leftrightarrow x+y = 55.$
  Ta có $55^2 = 3025$, thỏa mãn vì $3025 = (30+25)^2$.

  ◦ $\begin{cases}(x+y) \vdots 9\\(x+y-1) \vdots 11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y) \in \{36; 45; 54; 63; 72; 81; 90\}\\(x+y-1) \in \{33; 44; 55; 66; 77; 88\}\end{cases} \Leftrightarrow x+y = 45.$
  Ta có $45^2 = 2025$, thỏa mãn vì $2025 = (20+25)^2$.

Vậy các số phải tìm là 9801; 3025 và 2025.

Bài 1.8: Tìm các số tự nhiên có bốn chữ số, hai chữ số đầu như nhau, hai chữ số cuối như nhau sao cho số đó thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

a) Bằng tổng các bình phương của số tạo bởi hai chữ số đầu và số tạo bởi hai chữ số cuối của số đó (viết theo thứ tự cũ).

b) Bằng tích của hai số, mỗi số gồm hai chữ số như nhau.

a) Gọi số cần tìm là $\overline{xxyy}$ (với x, y thuộc $\mathbb{N}$ và $x \neq 0$).
Ta có

$$\begin{aligned}\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2 &\Leftrightarrow 1100x + 11y = (11x)^2 + (11y)^2\\ &\Leftrightarrow 100x + y = 11(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 99x + x + y = 11(x^2 + y^2). \tag{*}$$

Suy ra $(x+y) \vdots 11$, chỉ có thể là $x + y = 11$.
Thay vào $(*)$ ta được

$$\begin{aligned} 9x + 11 = 11(x^2 + y^2) &\Leftrightarrow 9x + 1 = x^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow 9x + 2xy + 1 = (x+y)^2 \\ &\Leftrightarrow x(9 + 2y) + 1 = 121 \\ &\Leftrightarrow x(9 + 2y) = 120. \end{aligned}$$

Ta thấy $9 + 2y$ là số lẻ nên $x \vdots 8$, do đó $x = 8$. Suy ra $y = 3$.
Thử lại ta thấy $8833 = 88^2 + 33^2$.
Vậy số phải tìm là 8833.

b) Gọi số cần tìm là $\overline{xxyy}$ (với x, y thuộc $\mathbb{N}$ và $x \neq 0$).
Ta có

$$\begin{aligned} \overline{xxyy} = \overline{aa} \cdot \overline{bb} &\Leftrightarrow 1100x + 11y = 11a \cdot 11b \text{ (với } a, b \text{ thuộc } \mathbb{N}^*) \\ &\Leftrightarrow 100x + y = 11ab \\ &\Leftrightarrow 99x + x + y = 11ab. \end{aligned}$$

Suy ra $(x+y) \vdots 11$, chỉ có thể là $x + y = 11$.
Xét các số $\overline{x0y}$ có $x + y = 11$, ta thấy

$\overline{x0y}$	209	308	407	506	605	704	803	902
$ab = \dfrac{\overline{x0y}}{11}$	19	28	37	46	55	64	73	82

Ta có hai trường hợp viết được thành tích của hai số có một chữ số:

$$28 = 4 \cdot 7; \quad 64 = 8 \cdot 8.$$

Vậy các số phải tìm là $3388 = 44 \cdot 77$; $7744 = 88 \cdot 88$.

Bài 1.9: Tìm các số nguyên dương n sao cho trong mỗi trường hợp sau tổng các chữ số của n bằng:

a) $94 - n$. b) $n - 36$. c) $n^2 - 71n + 8$.

Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của n.

a) Ta có $S(n) = 94 - n$.
Do $S(n) > 0$ nên $n < 94$
Từ $n < 94$ suy ra $S(n) \leq 9 + 3$ hoặc $S(n) \leq 8 + 9$, do đó $S(n) \leq 17$. Suy ra

$$n = 94 - S(n) \geq 94 - 17 = 77$$

Cho nên $n = \overline{7a}$ hoặc $n = \overline{8b}$ hoặc $n = \overline{9c}$.

- Với $n = \overline{7a}$ ta được $7 + a = 94 - \overline{7a}$ hay $2a = 17$ (loại).
- Với $n = \overline{8b}$ ta được $8 + b = 94 - \overline{8b}$ hay $b = 3$ (nhận).
- Với $n = \overline{9c}$ ta được $9 + c = 94 - \overline{9c}$ hay $2c = -5$ (loại).

Vậy số phải tìm là 83.

b) Ta có $S(n) = n - 36$ nên $n - S(n) = 36$ (*)
• Xét n có một chữ số. Khi đó $S(n) = n$ trái với (*).
• Xét n có hai chữ số. Đặt $n = \overline{ab}$, thay vào (*) được $\overline{ab} - (a + b) = 36$. Ta được $a = 4$ và $b \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
• Xét n có k chữ số ($k \geq 3, k \in \mathbb{Z}$). Ta có $S(n) \leq 9k$ và $n > \underbrace{9\ldots9}_{k-1 \text{ chữ số}}$, do đó

$$n - S(n) > \underbrace{9\ldots9}_{k-1 \text{ chữ số}} - 9k = 9\left(\underbrace{1\ldots1}_{k-1 \text{ chữ số}} - k\right)$$

Với $k = 3$ thì $n - S(n) > 9(11 - 3) = 72$, trái với (*).
Trong biểu thức $\underbrace{1\ldots1}_{k-1 \text{ chữ số}} - k$, khi số trừ k tăng thêm 1 đơn vị thì số bị trừ $\underbrace{1\ldots1}_{k-1 \text{ chữ số}}$ tăng thêm nhiều hơn 1 đơn vị, nên với mọi $k \geq 4$ thì $n - S(n) > 72$, trái với (*).
Vậy các số phải tìm là 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 49.

c) Do n là số nguyên dương nên $0 < S(n) \leq n$.

$$S(n) \leq n \Rightarrow n^2 - 71n + 8 \leq n \Rightarrow n^2 + 8n \leq 72n \Rightarrow n + \frac{8}{n} \leq 72 \Rightarrow n < 72 \quad (1)$$

$$S(n) > 0 \Rightarrow n^2 - 71n + 8 > 0 \Rightarrow n^2 + 8n > 71n \Rightarrow n + \frac{8}{n} > 71 \Rightarrow n \geq 71 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $n = 71$ thỏa mãn $S(n) = n^2 - 71n + 8$.

Bài 1.10: Có tồn tại hay không một số tự nhiên nào mà khi xóa một chữ số đầu thì số đó giảm đi một số lần trong mỗi trường hợp sau:

a) 146 lần?

b) 145 lần?

a) Giải sử có số $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$, xóa chữ số a_1 được số $B = \overline{a_2a_3\ldots a_n}$ và $A = 146B$ thì $a_1 \cdot 10^{n-1} + B = 146B$. Suy ra $a_1 \cdot 10^{n-1} = 145B = 5 \cdot 29B$. Do đó $a \vdots 29$. Điều này không xảy ra. Vậy không tồn tại số A.

b) Giải sử có số $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$, xóa chữ số a_1 được số $B = \overline{a_2a_3\ldots a_n}$ và $A = 145B$.
Lập luận như trên đi đến $a_1 \cdot 10^{n-1} = 144B = 9 \cdot 16B$.
Vì 9 và 10^{n-1} nguyên tố cùng nhau nên $a_1 = 9$ và $B = \dfrac{10^{n-1}}{16} = \dfrac{10^{n-1}}{2^4}$.
Ta chọn $n = 5$ thì $B = \dfrac{10^4}{2^4} = 5^4 = 625$.
Như thế tồn tại số $A = 90625 = 145 \cdot 625$.

Bài 1.11: Đầu năm mới, thầy giáo dạy Toán của lớp 9C chúc cả lớp bằng một bài toán điền chữ số như sau:

$$9\text{C} + \text{CỐ} + \text{HỌC} = \text{GIỎI}.$$

Bạn hãy giải bài toán trên, biết rằng:

- Các chữ Ố, Ọ, Ỏ biểu thị cùng một chữ số.
- Các chữ khác nhau biểu thị các chữ số khác nhau, chúng cũng có thể bằng 9.

Ta kí hiệu các chữ Ọ, Ỏ và Ố đều là Ô (để khỏi lẫn với số 0).
Xét ba trường hợp:

$$\begin{array}{r} 9\text{C} \\ +\ \text{CÔ} \\ \text{HÔC} \\ \hline \text{G I Ô I} \end{array}$$

Trường hợp 1: H = 9 và cột hàng trăm được nhớ 1 ở chục sang.
Như vậy G = 1, I = 0. Ta có

$$\begin{array}{r} 9\text{C} \\ +\ \text{CÔ} \\ 9\text{ÔC} \\ \hline 10\text{Ô}0 \end{array}$$

Suy ra $90 + \text{C} + 10\text{C} + \text{Ô} + 900 + 10\text{Ô} + \text{C} = 1000 + 10\text{Ô}$
Hay $12\text{C} + \text{Ô} = 10$ (loại).
Trường hợp 2: H = 9 và cột hàng trăm được nhớ 2 ở chục sang.
Như vậy G và I đều bằng 1 (loại).
Trường hợp 3: H = 8 và cột hàng trăm được nhớ 2 ở chục sang.
Như vậy G = 1, I = 0. Ta có

$$\begin{array}{r} 9C \\ +\, C\hat{O} \\ 8\hat{O}C \\ \hline 10\hat{O}0 \end{array}$$

Suy ra $90 + C + 10C + \hat{O} + 800 + 10\hat{O} + C = 1000 + 10\hat{O}$
Hay $12C + \hat{O} = 110$. Do $C > 7$ và khác 8 nên $C = 9$; $\hat{O} = 2$.
Vậy bài toán của thầy giáo là $99 + 92 + 829 = 1020$.

Bài 1.12: Tìm số $A = \overline{a_0a_1 \dots a_9}$ biết rằng:

a_0 bằng số chữ số 0 của số A,

a_1 bằng số chữ số 1 của số A,

....

a_9 bằng số chữ số 9 của số A.

$A = \overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$.
Số A có 10 chữ số nên

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 10 \tag{3.5}$$

Đặt $a_0 = k$ ($k \geq 1$). Số A có k chữ số 0.
Chia 10 chữ số của A thành hai nhóm:
- Nhóm I gồm chữ số đầu (là k) và k chữ số 0. Nhóm này chiếm $k + 1$ vị trí và có tổng các chữ số bằng k.
- Nhóm II gồm các chữ số còn lại. Nhóm này chiếm $10 - (k + 1) = 9 - k$ vị trí và có tổng các chữ số bằng $10 - k$.
Ở nhóm II, tổng các chữ số lớn hơn số chữ số của nó là $10 - k - (9 - k) = 1$. Điều này chỉ xảy ra khi trong $9 - k$ chữ số ở nhóm II, có một chữ số 2, còn lại là $8 - k$ chữ số đều là 1.
Ta sẽ chứng minh các chữ số 2 và 1 chỉ thuộc nhóm II tức là chứng minh a_0 khác 2 và a_0 khác 1.
Thật vậy:

- Nếu $a_0 = 2$ (tức $k = 2$) thì số chữ số 1 (của nhóm II cũng là của A) là $8 - 2 = 6$. Suy ra $a_1 = 6$. Chỉ riêng a_1 và sáu chữ số 1 đã có tổng $6 + 6 = 12 > 10$ (loại).

- Nếu $a_0 = 1$ (tức $k = 1$) thì số chữ số 1 của nhóm II là $8 - 1 = 7$. Số chữ số 1 của A là $a_1 = 8$. Chỉ riêng a_1 và tám chữ số 1 đã có tổng $8 + 8 = 16 > 10$ (loại).

- Vậy A có một chữ số 2 và $8 - k$ chữ số 1, tức là $a_2 = 1$ và $a_1 = 8 - k$.

Ta có $a_0 + a_1 + a_2 = k + (8 - k) + 1 = 9$ nên

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 1 \tag{3.6}$$

Chỉ xảy ra (3.6) khi vế trái của (3.6) có một số bằng 1 và sáu số 0. (*)
Ta thấy $a_1 \neq 0$ vì A có chữ số 1 là $a_2 = 1$. Do a_0, a_1, a_2 khác 0 nên từ (*) suy ra A có sáu chữ số 0, tức là $a_0 = 6$.
Suy ra $a_1 = 8 - k = 8 - 6 = 2$.
Do A có một chữ số 6 nên $a_6 = 1$, từ (3.6) suy ra

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = 0.$$

Vậy số phải tìm là 6 210 001 000.

Bài 1.13: Tìm số $A = \overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ biết rằng:

a_0 bằng số chữ số 0 của số A,

a_1 bằng số chữ số 1 của số A,

....

a_6 bằng số chữ số 6 của số A.

$A = \overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Số A có 7 chữ số nên

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = 7 \tag{3.7}$$

Đặt $a_0 = k$ $(k \geq 1)$. Số A có k chữ số 0.
Chia 7 chữ số của A thành hai nhóm:
- Nhóm I gồm chữ số đầu (là k) và k chữ số 0. Nhóm này chiếm $k + 1$ vị trí và có tổng các chữ số bằng k.
- Nhóm II gồm các chữ số còn lại. Nhóm này chiếm $7 - (k + 1) = 6 - k$ vị trí và có tổng các chữ số bằng $7 - k$.
Ở nhóm II, tổng các chữ số lớn hơn số chữ số của nó là $7 - k - (6 - k) = 1$. Điều này chỉ xảy ra khi trong $6 - k$ chữ số ở nhóm II, có một chữ số 2, còn lại là $5 - k$ chữ số đều là 1.
Ta sẽ chứng minh các chữ số 2 và 1 chỉ thuộc nhóm II tức là chứng minh a_0 khác 2 và a_0 khác 1. Thật vậy:

- Nếu $a_0 = 2$ (tức $k = 2$) thì số chữ số 1 (của nhóm II cũng là của A) là $5 - 2 = 3$. Suy ra $a_1 = 3$. Ta thấy a_0, a_1 và ba chữ số 1 đã có tổng $2 + 3 + 3 = 8 > 7$ (loại).

- Nếu $a_0 = 1$ (tức $k = 1$) thì số chữ số 1 của nhóm II là $5 - 1 = 4$. Số chữ số 1 của A là $a_1 = 5$. Chỉ riêng a_1 và năm chữ số 1 đã có tổng $5 + 5 = 10 > 7$ (loại).

- Vậy A có một chữ số 2 và $5 - k$ chữ số 1, tức là $a_2 = 1$ và $a_1 = 5 - k$.

Ta có $a_0 + a_1 + a_2 = k + (5 - k) + 1 = 6$ nên

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 \tag{3.8}$$

Chỉ xảy ra (3.8) khi vế trái của (3.8) có một số bằng 1 và ba số 0. (*)

Ta thấy $a_1 \neq 0$ vì A có chữ số 1 là $a_2 = 1$. Do a_0, a_1, a_2 khác 0 nên từ (*) suy ra A có ba chữ số 0, tức là $a_0 = 3$.

Suy ra $a_1 = 5 - k = 5 - 3 = 2$.

Do A có một chữ số 3 nên $a_3 = 1$, từ (3.8) suy ra

$$a_4 = a_5 = a_6 = 0.$$

Vậy số phải tìm là 3 211 000.

BÀI 2. BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHIA HẾT VÀ SỐ NGUYÊN TỐ

Ví dụ 1: Tìm các số nguyên dương x và y sao cho x^2-2 chia hết cho $xy+2$.

Cách 1:

Có $(x^2-2) \vdots (xy+2)$ (1)

$\Rightarrow y(x^2-2) \vdots (xy+2) \Rightarrow x(xy+2)-2(x+y) \vdots (xy+2) \Rightarrow 2(x+y) \vdots (xy+2)$ (2)

Vì $x+y$ và $xy+2$ đều là số nguyên dương nên (2) $\Rightarrow xy+2 \leq 2x+2y$

$\Rightarrow y(x-2) \leq 2x-2$ (3)

Xét các giá trị của x như sau:

- Với $x=1$, thay vào (1) ta được $-1 \vdots (y+2)$, không xảy ra vì $y+2 \geq 3$.
- Với $x=2$, thay vào (1) ta được $2 \vdots (2y+2)$ nên $1 \vdots (y+1)$, không xảy ra vì $y+1 \geq 2$.
- Với $x \geq 3$, từ (3) suy ra $y \leq \dfrac{2x-2}{x-2} = 2+\dfrac{2}{x-2} \leq 4$, suy ra $x \in \{3;4\}$.
  - Với $x=3$, thay vào (1), ta được $7 \vdots (3y+2) \Rightarrow 3y+2=7 \Rightarrow 3y=5$ (loại).
  - Với $x=4$, thay vào (1), ta được $14 \vdots (4y+2) \Rightarrow 7 \vdots (2y+1) \Rightarrow 2y+1=7 \Rightarrow y=3$, thử lại thấy đúng.

Vậy cặp số cần tìm là $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

Cách 2:

Ta có $(x^2-2) \vdots (xy+2)$ (1)

Biến đổi tương tự **cách 1** ta được $2(x+y) \vdots (xy+2)$ (2)

Đặt $2(x+y)=k(xy+2)$ với $k \in \mathbb{N}^*$ (3)

- Nếu $k=1$ thì từ (3) có $xy+2-2x-2y=0 \Leftrightarrow (x-2)(y-2)=2$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ y-2=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2=2 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.
  Thử lại ta nhận cặp số $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.
- Nếu $k \geq 2$ thì từ (3) có $2(x+y) \geq 2(xy+2) \Leftrightarrow (x-1)(y-1)+1 \leq 0$ (vô lý)

Vậy cặp số cần tìm là $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, biết rằng x, y là các số nguyên dương và x^2+y^2 chia hết cho xy.

Cách 1:

Đặt $m = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ với m là số nguyên dương.

Ta có: $x^2+y^2 = mxy \Leftrightarrow x^2 - mxy + y^2 = 0$ (1)

$\Delta = m^2y^2 - 4y^2 = y^2(m^2-4)$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương.

Do $y \geq 0$ nên phải có m^2-4 là số chính phương.

Đặt $m^2-4=k^2$, với $k \in \mathbb{N}$, ta có $m^2-k^2=4 \Leftrightarrow (m-k)(m+k)=4$.

Do $m+k$, $m-k$ cùng tính chẵn lẻ và cùng là ước của 4 nên chúng cùng chẵn.

Ta lại có $m+k$ nguyên dương nên $\begin{cases} m+k=2 \\ m-k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ k=0 \end{cases}$.

Vậy $\dfrac{x^2+y^2}{xy} = 2$, khi đó $x=y$.

Cách 2:

Gọi $d = \text{ƯCLN}(x,y)$. Đặt $x=da$, $y=db$, với a, b nguyên tố cùng nhau. Theo đề bài $x^2+y^2 \,\vdots\, xy$ nên $d^2(a^2+b^2) \,\vdots\, d^2ab \Rightarrow a^2+b^2 \,\vdots\, ab$.

Suy ra $\begin{cases} a^2 \,\vdots\, b \\ b^2 \,\vdots\, a \end{cases}$. Do a, b nguyên tố cùng nhau nên $a \,\vdots\, b$ và $b \,\vdots\, a$.

Vì a, b nguyên dương nên $a=b$. Khi đó $x=y \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

Ví dụ 3: Tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x+1$ chia hết cho y và $y+1$ chia hết cho x.

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \leq x \leq y$.

Đặt $x+1=ky$, với k là số nguyên dương (1)

Ta có $ky = x+1 \leq y+1 \leq 2y$, suy ra $k \leq 2$.

- Xét $k=1$, thay vào (1) ta được $x+1=y$
  Từ $(y+1) \,\vdots\, x$ ta có $(x+2) \,\vdots\, x \Rightarrow 2 \,\vdots\, x \Rightarrow x \in \{1;2\}$.
  - Với $x=1$ thì $y=2$. Thử lại thấy đúng.
  - Với $x=2$ thì $y=3$. Thử lại thấy đúng.
- Xét $k=2$, thay vào (1) ta được $x+1=2y$
  Từ $(y+1) \,\vdots\, x$ ta có $(2y+2) \,\vdots\, x \Rightarrow (x+3) \,\vdots\, x \Rightarrow 3 \,\vdots\, x \Rightarrow x \in \{1;3\}$.
  - Với $x=1$ thì $y=1$. Thử lại thấy đúng.
  - Với $x=3$ thì $y=2$, loại vì trái với giả sử $x \leq y$.

Do giả thiết có tính đối xứng của x và y nên các cặp số thỏa mãn bài toán là $(1;1)$, $(1;2)$, $(2;1)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

!

1. Khi có quan hệ chia hết $(x+1) \vdots y$, ta nên viết thành đẳng thức $x+1 = ky$.
2. Trong cách giải trên, việc sắp thứ tự các ẩn $x \le y$ góp phần quan trọng để đi đến $k \le 2$. Sau đó ta đã biến đổi không tương đương nên sau khi tìm được các giá trị của x và y, ta cần phải thử lại.

Ví dụ 4: Tìm ba số nguyên dương x, y, z lớn hơn 1 sao cho $\begin{cases} xy+1 \text{ chia hết cho } z \\ xz+1 \text{ chia hết cho } y \\ yz+1 \text{ chia hết cho } x \end{cases}$.

Cách 1:

Từ giả thiết suy ra $(xy+1)(yz+1)(zx+1) \vdots xyz \Rightarrow xy+yz+zx+1 \vdots xyz$ (1)

Vì vai trò bình đẳng của x, y, z, giả sử $x \ge y \ge z \ge 2$. Ta có

$$xyz \le xy+yz+zx+1 \le 3xy+1 < 3xy+xy = 4xy \Rightarrow z < 4$$

Vậy $z \in \{2;3\}$. Xét hai trường hợp sau

a) Với $z = 2$, thay vào (1) ta được $xy+2x+2y+1 \vdots 2xy$ (2)
$\Rightarrow 2xy \le xy+2x+2y+1 \Rightarrow xy \le 2x+2y+1 \le 4x+1 < 4x+x = 5x \Rightarrow y < 5$.
Do $y \ge z = 2$ nên $y \in \{2;3;4\}$.

- Thay $y = 2$ vào (2) ta được $(2x+2x+4+1) \vdots 4x \Rightarrow 5 \vdots 4x$, loại vì $x \ge y = 2$.
- Thay $y = 3$ vào (2) ta được $(3x+2x+6+1) \vdots 6x \Rightarrow 5x+7 \vdots 6x \Rightarrow 7 \vdots x$.
Do $x \ge y = 3$ nên $x = 7$. Thử lại, bộ số $(7;3;2)$ thỏa mãn bài toán.
- Thay $y = 4$ vào (2) ta được $(8x+2x+8+1) \vdots 8x \Rightarrow 10x+9 \vdots 8x \Rightarrow 9 \vdots 2x$, loại.

b) Với $z = 3$, thay vào (1) được $xy+3x+3y+1 \vdots 3xy$ (3)
$\Rightarrow 3xy \le xy+3x+3y+1 \Rightarrow 2xy \le 3x = 3y+1 \le 6x+1 < 6x+x = 7x \Rightarrow 2y < 7 \Rightarrow y \le 3$.
Kết hợp với $y \ge z = 3$ nên $y = 3$.
Thay $y = 3$ vào (3) được $(3x+3x+9+1) \vdots 9x \Rightarrow 6x+10 \vdots 9x \Rightarrow 10 \vdots 3x$, loại.
Vậy bộ số thỏa mãn là $(7;3;2)$ và các hoán vị của nó.

Cách 2:

Từ giả thiết suy ra $(xy+1)(yz+1)(zx+1) \vdots xyz \Rightarrow (xy+yz+zx+1) \vdots xyz$.

Giả sử $x \geq y \geq z \geq 2$. Đặt $xy + yz + zx + 1 = kxyz$, với $k \in \mathbb{N}^*$ (1)

Ta có $kxyz = xy + yz + zx + 1 < xyz + xyz + xyz + xyz = 4xyz \Rightarrow k < 4 \Rightarrow k \in \{1;2;3\}$.

a) Với $k = 1$, thay vào (1) ta được $xyz = xy + yz + zx + 1$ (2)

Ta có $xyz = xy + yz + zx + 1 < 4xy$ nên $z < 4$. Do đó $z \in \{2;3\}$.

- Thay $z = 2$ vào (2) được $2xy = xy + 2x + 2y + 1$
  $\Leftrightarrow xy - 2x - 2y = 1 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 5$.
  Ta có $x - 2 \geq y - 2 \geq 0$ nên $\begin{cases} x - 2 = 5 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$.
  Vậy bộ số $(7;3;2)$ thỏa mãn bài toán.
- Thay $z = 3$ vào (2) được $3xy = xy + 3x + 3y + 1$
  $\Leftrightarrow 2xy - 3x - 3y = 1 \Leftrightarrow 4xy - 6x - 6y = 2 \Leftrightarrow (2x-3)(2y-3) = 11$
  Ta có $\begin{cases} 2x - 3 = 11 \\ 2y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$, loại vì phải có $y \geq z$.

b) Với $k = 2$, thay vào (1) ta được $2xyz = xy + yz + zx + 1 < 4xy$
$\Rightarrow z < 2$, loại vì phải có $z \geq 2$.

c) Với $k = 3$, thay vào (1) ta được $3xyz = xy + yz + zx + 1 < 4xy$
$\Rightarrow 3z < 4$, loại vì phải có $z \geq 2$.

Vậy các bộ số $(7;3;2)$ và các hoán vị của nó thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 5: Tìm các số nguyên dương n và các số nguyên tố p sao cho $p = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.

Cách 1:

- Với $n = 1$ thì $p = 0$, không là số nguyên tố.
- Với $n = 2$ thì $p = 2$ là số nguyên tố.
- Với $n = 3$ thì $p = 5$ là số nguyên tố.
- Với $n \geq 4$, ta viết p dưới dạng $p = \dfrac{n^2 + n - 2}{2} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.
  Xét hai trường hợp:
  - Nếu n lẻ $(n \geq 5)$ thì $p = \dfrac{n-1}{2} \cdot (n+2)$, là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên p là hợp số.
  - Nếu n chẵn $(n \geq 4)$ thì $p = (n-1) \cdot \dfrac{n+2}{2}$, là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên p là hợp số.

Vậy các cặp số thỏa mãn là $\begin{cases} n = 2 \\ p = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} n = 3 \\ p = 5 \end{cases}$.

Cách 2: Để p là một số nguyên tố, ta có hai trường hợp:

- Trong hai thừa số $n-1$ và $n+2$, có một thừa số bằng 1 và một thừa số chia hết cho 2
  Do $n+2 > 2 \Rightarrow n-1 = 1 \Leftrightarrow n = 2 \Rightarrow p = 2$.

- Trong hai thừa số $n-1$ và $n+2$ có một thừa số bằng 2.
  Do $n+2 > 2 \Rightarrow n-1 = 2 \Leftrightarrow n = 3 \Rightarrow p = 5$.

BÀI TẬP

Bài 2.1: Tìm các số nguyên x thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

a) $x+3$ chia hết cho x^2+1;

b) $2x^3 - 8x^2 + 3x$ chia hết cho x^2+1;

c) $(x+2)(x+3)$ chia hết cho $3x$;

d) $4x - 6$ chia hết cho $x^2 + x + 1$.

a) $(x+3) \vdots (x^2+1) \Rightarrow (x^2-9) \vdots (x^2+1) \Rightarrow (x^2+1-10) \vdots (x^2+1) \Rightarrow 10 \vdots (x^2+1)$.
Đáp số: $0; 1; -1; 2; -3$.

b) $2x^3 - 8x^2 + 3x \vdots x^2 + 1 \Rightarrow (2x^3 + 2x - 8x^2 - 8 + x + 8) \vdots x^2 + 1$
$\Rightarrow \left(2x\left(x^2+1\right) - 8\left(x^2+1\right) + x + 8\right) \vdots x^2 + 1$
$\Rightarrow x + 8 \vdots x^2 + 1$
$\Rightarrow (x+8)(x-8) \vdots x^2 + 1$
$\Rightarrow x^2 + 1 - 65 \vdots x^2 + 1$
$\Rightarrow 65 \vdots x^2 + 1$.
Đáp số: $-8; 0; 2$.

c) $(x+2)(x+3) \vdots 3x \Rightarrow x^2 + 5x + 6 \vdots 3x \Rightarrow x^2 - x + 6 \vdots 3x$
Từ $x^2 - x + 6 \vdots x \Rightarrow 6 \vdots x \Rightarrow x \in \{1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6\}$ (1)
Từ $x^2 - x + 6 \vdots 3 \Rightarrow x(x-1) \vdots 3 \Rightarrow x \in \{1 - 2; 3; -3; 6; -6\}$ (2)
Ta xét từng trường hợp (1), (2) suy ra kết quả.
Đáp số: $1; -2; -3; 6$.

d) $(4x-6) \vdots (x^2+x+1) \Rightarrow 2(2x-3) \vdots (x^2+x+1)$. (1)

Do $x^2+x+1 = x(x+1)+1$ là số lẻ nên

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow (2x-3) \vdots (x^2+x+1) && (2)\\ &\Rightarrow (2x^2-3x) \vdots (x^2+x+1)\\ &\Rightarrow \left[2\left(x^2+x+1\right)-(5x+2)\right] \vdots (x^2+x+1)\\ &\Rightarrow (5x+2) \vdots (x^2+x+1) && (3)\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$[2(5x+2)-5(2x-3)] \vdots (x^2+x+1) \Rightarrow 19 \vdots (x^2+x+1)$.

Do $x^2+x+1 > 0$ nên x^2+x+1 chỉ có thể là 1 hoặc 19. Ta thử từng trường hợp được $x=0$ hoặc $x=-1$.

Đáp số: $0, -1$.

Bài 2.2: Tìm các số nguyên dương x và y thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

a) $4x^2+8x+3$ chia hết cho $4xy-1$;

b) $2xy-1$ chia hết cho $(x-1)(y-1)$;

c) x^2+2 chia hết cho $xy+1$;

d) x^3+x chia hết cho $xy-1$.

a) $(4x^2+8x+3) \vdots (4xy-1)$ (1)

$\Rightarrow y(4x^2+8x+3) \vdots (4xy-1)$

$\Rightarrow [x(4xy-1)+2(4xy-1)+x+3y+2] \vdots (4xy-1)$

$\Rightarrow (x+3y+2) \vdots (4xy-1)$. (2)

Do $x+3y+2$ và $4xy-1$ là các số nguyên dương nên từ (2) suy ra

$$4xy-1 \le x+3y+2 \Rightarrow x(4y-1) \le 3y+3.$$

$\Rightarrow x \le \dfrac{3y+3}{4y-1} = \dfrac{12y+12}{4(4y-1)} = \dfrac{3(4y-1)+15}{4(4y-1)} \le \dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4.3} = 2.$

Vậy $x \in \{1;2\}$.

• Thay $x=1$ vào (1) ta được $15 \vdots (4y-1)$. Ta tìm được $y=1$ và $y=4$.

• Thay $x=2$ vào (1) ta được $35 \vdots (8y-1)$. Ta tìm được $y=1$.

Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(1;1), (1;4), (2;1)$.

b) $2xy - 1 \vdots (x-1)(y-1)$ (1)

Đặt $a = x - 1, b = y - 1$. Từ (1) ta có cả a và b đều lẻ, giả sử $a \geq b$.

$(1) \Leftrightarrow 2(a+1)(b+1) - 1 \vdots ab \Leftrightarrow 2(ab + a + b + 1) \vdots ab \Leftrightarrow (2a + 2b + 1) \vdots ab.$ (2)

Do a, b là các số nguyên dương nên từ (2) suy ra

$ab \leq 2a + 2b + 1 \Leftrightarrow ab - 2a - 2b \leq 1 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) \leq 5.$

Do $a - 2$ lẻ nên $a - 2 \in \{-1; 1; 3; 5\} \Rightarrow a \in \{1; 3; 5; 7\}$.

• Xét $a = 1$, do giả sử $a \geq b$ nên $b = 1$, thỏa mãn (2).

• Xét $a = 3$, thay vào (2) được $(7 + 2b) \vdots 3b$ nên $7 \vdots b$. Do $b \leq a = 3$ nên $b = 1$, thỏa mãn (2).

• Xét $a = 5$, thay vào (2) được $(11 + 2b) \vdots 5b$ nên $11 \vdots b$. Do $b \leq a = 5$ nên $b = 1$, không thỏa mãn (2).

• Xét $a = 7$, thay vào (2) được $(15 + 2b) \vdots 7b$ nên $15 \vdots b$. Do $b \leq a = 7$ nên $b \in \{1; 3; 5\}$. Thử vào (2) chỉ có $b = 3$ thỏa mãn.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(2; 2), (4; 2), (2; 4), (8; 4), (4; 8)$.

c) Đặt $x^2 + 2 = m(xy + 1)$ với m là số nguyên dương.

Ta có $x^2 - mxy = m - 2$ nên $x(x - my) = m - 2$. (1)

• Nếu $m = 1$ thì từ (1) ta có $x(x - y) = -1$ nên $x = 1, y = 2$.

• Nếu $m = 2$ thì từ (1) ta có $x(x - 2y) = 0$. Do $x \neq 0$ nên $x = 2y$.

• Nếu $m > 2$, do (1) có $(m-2) \vdots x$ nên $m - 2 \geq x \Rightarrow m > x \Rightarrow x - my < x - xy < 0$, nhưng $x - my = \dfrac{m-2}{x} \geq 0$. Trường hợp này không xảy ra.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2), (2t; t)$ với t là số nguyên dương.

d) $(x^3 + x) \vdots (xy - 1) \Rightarrow x(x^2 + 1) \vdots (xy - 1)$.

Ta có x và $xy - 1$ nguyên tố cùng nhau nên $(x^2 + 1) \vdots (xy - 1)$

$\Rightarrow (x^2 + 1 + xy - 1) \vdots (xy - 1) \Rightarrow x(x + y) \vdots (xy - 1)$.

Do x và $xy - 1$ nguyên tố cùng nhau nên $(x + y) \vdots (xy - 1)$.

Đặt $x + y = z(xy - 1)$ với z là số nguyên dương, ta có $x + y + z = xyz$.

Ba số nguyên dương có tổng bằng tích là $1; 2; 3$.

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1), (2; 3), (3; 2)$ với t là số nguyên dương.

Bài 2.3: Tìm các số tự nhiên x, y lớn hơn 1 thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

a) $x + 2$ chia hết cho y và $y + 2$ chia hết cho x;

b) $2x + 1$ chia hết cho y và $2y + 1$ chia hết cho x.

a) Đặt $x + 2 = ky$ (1) với số k nguyên dương. Giả sử $2 \leq x \leq y$.

Ta có $ky = x + 2 \leq y + 2 \leq y + y = 2y$ nên $k \leq 2$.

• Thay $k = 1$ vào (1) ta được $x + 2 = y$.
Từ $(y+2) \vdots x$ có $(x+4) \vdots x$ suy ra $4 \vdots x$ nên $x \in \{2;4\}$.
Ta tìm được $x = 2, y = 4$ và $x = 4, y = 6$.
• Thay $k = 2$ vào (1) ta được $x + 2 = 2y$.
Từ $(y+2) \vdots x$ có $(2y+4) \vdots x$ suy ra $(x+2+4) \vdots x \Rightarrow 6 \vdots x$ nên $x \in \{2;3;6\}$.
Ta tìm được $x = y = 2$.
Đáp số: Nghiệm $(x;y)$ là $(2;4), (4;2), (4;6), (6;4), (2;2)$.

b) Đặt $2x + 1 = ky$ (1) với k lẻ. Giả sử $2 \le x \le y$.
Ta có $ky = 2x + 1 < 2y + y = 3y$ (2) nên $k < 3$, do k lẻ nên $k = 1$.
Thay $k = 1$ vào (1) ta được $2x + 1 = y$.
Từ $(2y+1) \vdots x$ có $[2(2x+1)+1] \vdots x \Rightarrow 3 \vdots x$.
Do $x \ge 2$ nên $x = 3$, khi đó $y = 7$. *Đáp số*: Nghiệm $(x;y)$ là $(3;7), (7;3)$.

Bài 2.4: Tìm các số tự nhiên n sao cho mỗi biểu thức sau là số nguyên tố:

a) $n^3 + n^2 - n + 2$.

b) $n^3 - 4n^2 + 4n - 1$.

c) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$.

d) $(n^2 - 8)^2 - 36$.

e) $n^4 + n^2 + 1$.

f) $n^5 + n + 1$.

a) Phân tích thành nhân tử $n^3 + n^2 - n + 2 = (n+2)(n^2 - n + 1)$.
Cách 1: Phải có một nhân tử bằng 1 hoặc -1.
Xét bốn trường hợp sau: $n + 2 = 1; n + 2 = -1; n^2 - n + 1 = 1; n^2 - n + 1 - 1$ rồi suy ra kết quả.
Cách 2: $n^3 + n^2 - n + 2 = (n+2)[n(n-1)+1]$.
Xét $n = 0; n = 1; n \ge 2$ để suy ra kết quả.
Đáp số: $n = 0; n = 1$.

b) Biến đổi $n^3 - 4n^2 + 4n - 1 = (n-1)[n(n-3)+1]$. Giải tương tự như bài trên.
Đáp số: $n = 3$.

c) Biến đổi $p = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1 = \dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$
Do $n(n+1)(n+2) \vdots 6$ (tích 3 số tự nhiên liên tiếp) nên p là số tự nhiên.
Do đó $(n+3)(n^2+2) \vdots 6$.
• Với $n = 1; 2; 3$ ta được $p = 2; 5; 11$, thỏa mãn.
• Với $n \ge 4$ thì $\dfrac{n+3}{6} > 1, \dfrac{n^2+2}{6} > 1$. Do đó p viết được thành tích của hai thừa số lớn

hơn 1 nên p là hợp số.
Đáp số: $n = 1; n = 2; n = 3$.

d) Biến đổi $\left(n^2-8\right)^2+36 = \left(n^2+10\right)^2 - 36n^2 = (n^2+10+6n)(n^2+10-6n)$.
Thừa số nhỏ phải bằng 1, tức là $n^2+10-6n = 1 \Leftrightarrow (n-3)^2 = 0$.
Đáp số: $n = 3$.

e) $n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$.
Thừa số nhỏ phải bằng 1, tức là $n^2-n+1 = 1$.
Đáp số: $n = 1$.

f) $n^5+n^2+1 = (n^2+n+1)\left[n^2(n-1)+1\right]$.
Đáp số: $n = 1$.

Bài 2.5: Tìm các số tự nhiên n sao cho mỗi biểu thức sau là số nguyên tố:

a) n^4+4;

b) n^4+4^n.

a) $n^4+4 = (n^2+2n+2)\left[(n-1)^2+1\right]$.
Đáp số: $n = 1$.

b) Hiển nhiên n lẻ, đặt $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N})$. Ta có

$$\begin{aligned} p = n^4+4^n &= n^4+2n^2\cdot 2^n+4^n-2n^2\cdot 2^n \\ &= \left(n^2+2^n\right)^2-\left(n\cdot 2^{k+1}\right)^2 \\ &= \left(n^2+2^n+n\cdot 2^{k+1}\right)\left(n^2+2^n-n\cdot 2^{k+1}\right) \end{aligned}$$

Với $k = 0$ thì $n = 1; p = 5$.
Với $k > 0$ ta sẽ chứng minh rằng $n^2+2^n-n\cdot 2^{k+1} > 1$.
Thật vậy
$n^2+2^n-n\cdot 2^{k+1} = n^2+2^{2k+1}-n\cdot 2^{k+1} = n^2+2^{2k}-2\cdot 2^k\cdot n+2^{2k} = \left(n-2^k\right)^2+2^{2k} \geq 2^{2k} > 1$.
Khi đó p là hợp số.
Đáp số: $n = 1$.

Bài 2.6: Tìm các số nguyên tố p sao cho mỗi biểu thức sau là số nguyên tố:

a) $8p^2+1$;

b) $p^3 + p^2 + 11p + 2$;

c) $2^p + p^2$.

a) Xét p dưới các dạng $3k, 3k+1, 3k-1$.
Đáp số: $p = 3$.

b) Xét p dưới các dạng $3k, 3k+1, 3k-1$.
Đáp số: $p = 3$.

c) $A = 2^p + p^2$.
• Với $p = 2$ thì $A = 8$, loại.
• Với $p = 3$ thì $A = 17$, nên A là số nguyên tố.
• Với $p > 3$, ta viết A dưới dạng $A = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$.
Vì p là số lẻ nên $(2^p + 1) \vdots (2 + 1)$.
Vì p không chia hết cho 3 nên $(p^2 - 1) \vdots 3$.
Số p chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên A không là số nguyên tố.

Bài 2.7: Tìm các số tự nhiên n biết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

a) n chứa đúng 3 thừa số nguyên tố $2, 5, 7$;

b) $5n$ có nhiều hơn n là 8 ước số;

c) $8n$ có nhiều hơn n là 18 ước số.

Đặt $n = 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ $(x, y, z \in \mathbb{N}^*)$ thì $5n = 2^x \cdot 5^{y+1} \cdot 7^z$, $8n = 2^{x+3} \cdot 5^y \cdot 7^z$. Khi đó:

$$\begin{cases} (x+1)(y+2)(z+1) - (x+1)(y+1)(z+1) = 8 \\ (x+4)(y+1)(z+1) - (x+1)(y+1)(z+1) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(z+1) = 8 \\ (y+1)(z+1) = 6. \end{cases}$$

$z + 1$ là ước chung của 8 và 6 mà $z + 1 \geq 2$ nên $z + 1 = 2$, suy ra $z = 1$.
Ta có $x = 3, y = 2, z = 1$ và $n = 1400$.

Bài 2.8: Tìm các số nguyên tố p để $4p + 1$ là số chính phương.
Đặt $4p + 1 = (2k+1)^2$ $(k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow p = k(k+1)$.
Do $k(k+1)$ là số chẵn nên p là số chẵn. Mặt khác do p là số nguyên tố nên $p = 2$. Khi đó $4p + 1 = 9 = 3^2$.

Bài 2.9: Tìm các số chính phương sao cho chia nó cho 39 ta được thương là một số nguyên tố và số dư bằng 1.

Gọi số chính phương phải tìm là x^2 ($x \in \mathbb{N}$).

Ta có $x^2 = 39p + 1$ (p là số nguyên tố).

Biến đổi ta được $(x+1)(x-1) = 3 \cdot 13 \cdot p$. Ta có $x+1 > x-1$ nên xảy ra các trường hợp:

$x-1$	$x+1$	Tính p
1	$39p$	$39p = 3$, loại
3	$13p$	$13p = 5$, loại
13	$3p$	$3p = 15 \Rightarrow p = 5$
p	39	$p + 2 = 39 \Rightarrow p = 37$
39	p	$p = 41$
$3p$	13	$3p + 2 = 13$, loại

- Với $p = 5$ thì $x = 14; x^2 = 196$.
- Với $p = 37$ thì $x = 38; x^2 = 1444$.
- Với $p = 41$ thì $x = 40; x^2 = 1600$.

Bài 2.10: Tìm ba số nguyên tố liên tiếp a, b, c biết rằng $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố.

Tồn tại một trong ba số a, b, c chia hết cho 3 vì nếu cả ba số không chia hết cho 3 thì mỗi số a^2, b^2, c^2 chia cho 3 dư 1 nên $(a^2 + b^2 + c^2) \,\vdots\, 3$ và vì tổng đó lớn hơn 3 nên không là số nguyên tố.

Xét hai trường hợp:

$2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, là hợp số, loại.

$3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$, là số nguyên tố.

Đáp số: $3; 5; 7$.

Bài 2.11: Tìm các nghiệm nguyên tố của phương trình:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xyzt$;

c) $5(x + y + z) = xyz$.

a) Tồn tại một trong ba số x, y, z chia hết cho 3. Thật vậy nếu cả ba số không chia hết cho 3 thì vế trái chia hết cho 3, vế phải không chia hết cho 3.

Giả sử $z \vdots 3$ thì $z = 3$.

Ta có $x^2 + y^2 + 9 = 3xy \Rightarrow (x^2 + y^2) \vdots 3$. Khi đó ta chứng minh được $x = y = 3$.

Thử lại ta có $3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Vậy $(x; y; z) = (3; 3; 3)$.

b) Tồn tại một trong bốn số x, y, z, t chia hết cho 2.

Giả sử $t \vdots 2$ thì $t = 2$, khi đó ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 2xyz$.

Suy ra $(x^2 + y^2 + z^2) \vdots 2$. Tồn tại một trong ba số x, y, z chia hết cho 2, giả sử $z \vdots 2$ thì $z = 2$.

Ta có $x^2 + y^2 + 8 = 4xy$.

Do đó $x^2 + y^2$ chia hết cho 4. Khi đó chứng minh được $x = y = 2$.

Thử lại ta có $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

c) $xyz \vdots 5$, tồn tại một trong ba số x, y, z chia hết cho 5, chẳng hạn $z \vdots 5$ khi đó $z = 5$.

Ta có $x + y + 5 = xy \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 6$.

Giả sử $x \geq y$ thì $\begin{cases} x = 4 \text{ (loại)} \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 7 \\ y = 2. \end{cases}$

Đáp số: Nghiệm $(x; y; z)$ là $(7; 2; 5)$ và các hoán vị của nó.

Bài 2.12: Chứng minh rằng không có các số nguyên tố a, b, m, n, p thỏa mãn mỗi phương trình:

a) $a^2 = m^2 + n^2$;

b) $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 + p^2$.

a) Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, m, n sao cho $a^2 = m^2 + n^2$.

Hiển nhiên a phải là số lẻ. Khi đó trong hai số m và n, có một số chẵn và một số lẻ, chẳng hạn m chẵn (do đó $m = 2$), n lẻ.

Ta có $(a + n)(a - n) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a + n = 4 \\ a - n = 1. \end{cases}$ Suy ra $a = \dfrac{5}{2}$ vô lý.

Vậy không có các số nguyên tố a, m, n thỏa mãn đẳng thức trên.

b) Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, m, n, p sao cho $a^2 + b^2 = m^2 + n^2 + p^2$ (1)

Ta có nhận xét: Mỗi số ở vế trái khác các số ở vế phải. Thật vậy, giả sử $b = p$ thì $a^2 = m^2 + n^2$, không có nghiệm nguyên tố (theo câu a).

Xét hai số a và b ở vế trái:

• Nếu có một số chẵn, chẳng hạn là a thì $a = 2$. Theo nhận xét trên thì m, n, p phải khác 2 nên đều lẻ, do đó b lẻ. Khi đó vế trái chia cho 4 dư 1, vế phải chia cho 4 dư 3, điều này không xảy ra.

• Nếu a và b đều lẻ thì $a^2 + b^2$ chia cho 8 dư 2, nên số $m^2 + n^2 + p^2$ chẵn. Trong ba số

m, n, p hoặc một số bằng 2, hoặc cả ba số bằng 2. Trong trường hợp thứ nhất, vế phải của (1) chia cho 8 dư 6, không xảy ra. Trong trường hợp thứ hai, vế phải của (1) là 12, chia cho 8 dư 4, cũng không xảy ra.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên tố.

Bài 2.13: Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $a > b$ và $a^2 + b^2$ chia hết cho $a^2 - b^2$.

Đặt $a^2 + b^2 = m(a^2 - b^2)$ với m nguyên dương. Ta có

$$mb^2 + b^2 = ma^2 - a^2 \Leftrightarrow (m+1)b^2 = (m-1)a^2 \quad (1)$$

Gọi d là ƯCLN của a và b thì $a = dx, b = dy$ với x và y nguyên tố cùng nhau.

Từ (1) suy ra $(m+1)d^2y^2 = (m-1)d^2x^2 \Leftrightarrow (m+1)y^2 = (m-1)x^2$.

Do x và y nguyên tố cùng nhau nên $(m+1) \vdots x^2$.

Đặt $m + 1 = kx^2$ (k là số nguyên dương) thì

$$m - 1 = \frac{(m+1)y^2}{x^2} = \frac{kx^2y^2}{x^2} = ky^2$$

nên $(m+1)(m-1) = k^2x^2y^2 \Rightarrow m^2 - 1 = n^2$ (với $n = kxy$) suy ra $(m+n)(m-n) = 1 \Rightarrow m+n$ là ước của 1, không xảy ra.

Vậy không tồn tại các số nguyên dương a, b như trên.

Bài 2.14: Tìm các số tự nhiên n lớn hơn 1 sao cho $(n-1)!$ chia hết cho n

Nếu n là số nguyên tố thì không xảy ra $(n-1)! \vdots n$. Vậy n là hợp số, do đó $n \geq 4$, và viết được $n = a \cdot b$ với a, b là các số nguyên dương và $a \leq a \leq b$.

Xét hai trường hợp sau:

a) trường hợ $a < b$ thì a và b phân biệt. Ta thấy $n - 1 \geq b$ (vì $n - 1 \geq b \Leftrightarrow ab - 1 \geq b \Leftrightarrow ab - b \geq 1 \Leftrightarrow 9a - 1)b \geq 1$, điều này đúng do $2 \leq a \leq b$).

$(n-1)!$ chứa các thừa số a và b phân biệt nên $(n-1)! \vdots ab \Rightarrow (n-1)! \vdots n$.

b) Trường hợp $a = b$ thì $n = a^2$. Lại xét hai trường hợp:

- Nếu $a = 2$ thì $n = 4$, không xảy ra $3! \vdots 4$, loại.
- Nếu $a \geq 3$ thì $(a-1)^2 \geq 4 \Rightarrow a^2 - 2a \geq 3 \Rightarrow a^2 - 1 > 2a \Rightarrow n - 1 > 2a$. Do đó $(n-1)! \vdots a \cdot 2a \Rightarrow (n-1)! \vdots a^2 \Rightarrow (n-1)! \vdots n$.

Từ hai trường hợp trên, ta kết luận: Số n phải tìm là mọi hợp số khác 4.

Bài 2.15: Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Tìm các số tự nhiên n thỏa mãn mỗi điều kiện sau:

a) n chia hết cho $\left[\sqrt{n}\right]$;

b) n chia hết cho $\left[\sqrt[3]{n}\right]$.

a) Ta phải có $n \neq 0$. Đặt $\left[\sqrt{n}\right] = a$ thì $a \in \mathbb{N}^*$ và $a \leq \sqrt{n} \leq a + 1$.
Suy ra $a^2 \leq n \leq a^2 + 2a + 1$.
Do n chia hết cho $\left[\sqrt{n}\right] = a$ nên $n = ka$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, ta có

$$a^2 \leq ka \leq a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 \leq ka \leq a^2 + 2a \Leftrightarrow a \leq k \leq a + 2.$$

Do vậy $k \in \{a; a+1; a+2\}$.
Tương ứng ta có $n \in \{a^2; a(a+1); a(a+2)\}$ với a là số nguyên dương.

b) Ta phải có $n \neq 0$. Đặt $\left[\sqrt[3]{n}\right] = a$ thì $a \in \mathbb{N}^*$ và $a \leq \sqrt[3]{n} \leq a + 1$.
Suy ra $a^3 \leq n \leq a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.
Đặt $n = ka$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, ta có

$$a^3 \leq ka \leq a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \Leftrightarrow a^3 \leq ka \leq a^3 + 3a^2 + 3a \Leftrightarrow a^2 \leq k \leq a^2 + 3a + 3.$$

Do vậy $k \in \{a^2; a^2+1; a^2+2; \ldots; a^2+3a+3\}$.
Tương ứng ta có $n \in \{a^3; a(a^2+1); a(a^2+2); \ldots; a(a^2+3a+3)\}$ với a là số nguyên dương.

BÀI 3. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Ví dụ 1: *Một trăm con trâu,*
Một trăm bó cỏ.
Trâu đứng ăn năm,
Trâu nằm ăn ba,
Ba con trâu già
Chỉ ăn một bó.
Tính xem trong đó
Mỗi loại mấy trâu?

Gọi số trâu đứng là x, số trâu nằm là y, số trâu già là z. Ta có hệ hai phương trình ba ẩn với nghiệm nguyên dương

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ 15x+9y+z=300. \end{cases}$$

Suy ra $14x+8y=200 \Leftrightarrow 7x+4y=100$.

Ta thấy $7x \vdots 4$ nên $x \vdots 4$. Đặt $x=4k$ (k là số nguyên dương), ta có

$7k+y=25 \Leftrightarrow y=25-7k$

$z=100-4k-(25-7k)=75+3k$.

Ta phải có: $\begin{cases} x=4k>0 \\ y=25-7k>0 \Leftrightarrow 0<k<3\dfrac{4}{7}. \\ z=75+3k \end{cases}$

Có ba đáp số: 4 trâu đứng, 18 trâu nằm, 78 trâu già;

8 trâu đứng, 11 trâu nằm, 81 trâu già;

12 trâu đứng, 4 trâu nằm, 84 trâu già;

Lưu ý. Sách Đại thành toán pháp của Lương Thế Vinh từ thế kỉ XV đã có bài toán *Trăm trâu trăm cỏ* nói trên.

Ví dụ 2: Anh Tâm và bác Đức là hai công nhân của một xí nghiệp. Một ngày đầu năm 1999, bác Đức hỏi anh Tâm:

- Năm nay cháu bao nhiêu tuổi rồi?

Anh Tâm hóm hỉnh trả lời:

- Tuổi cháu năm nay đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh. Bác Đức tính ra ngay tuổi của anh Tâm. Bác gật gù nói:

- Lúc tuổi bác bằng tuổi cháu hiện nay, bác đang là chiến sĩ quân giải phóng miền Nam và cũng có tuổi bằng tổng các chư số của năm sinh.

Anh Tâm cũng tính đúng tuổi của bác Đức.

Hãy tính xem anh Tâm và bác Đức sinh năm nào?

Gọi năm sinh của anh Tâm là $\overline{19xy}$, ta có

$$1999-\overline{19xy}=1+9+x+y \Leftrightarrow 99-(10x+y)=10+x+y$$

$$\Leftrightarrow 89 = 11x + 2y$$

Ta thấy $0 \leq 2y \leq 18$ nên $71 \leq 11x \leq 89$, do đó $7 \leq x \leq 8$.

• $x = 7$ thì $y = 6$.

• $x = 8$ thì $2y = 1$, loại.

Anh Tâm sinh năm 1976, đến năm 1999 thì 23 tuổi.

Bác Đức 23 tuổi năm $\overline{19ab}$ và $1 + 9 + a + b = 23$.

Do đó $a + b = 13$. Vì $1960 \leq \overline{19ab} \leq 1975$ nên $\overline{ab} = 67$.

Bác Đức sinh năm $1967 - 23 = 1944$.

Kinh nghiệm giải toán

Có thể giải phương trình $11x + 2y = 89$ theo cách giải phương trình nghiệm nguyên được $(x; y)$ là $(2t + 1; 39 - 11t)$ với t nguyên, kết hợp với $2t + 1 \geq 0$ và $39 - 22t \geq 0$ được $(x; y)$ là $(1; 39)$, $(3; 28)$, $(5; 17)$, $(7; 6)$. Do đó x và y là các chữ số nên $x = 7$ và $y = 6$.

Cách giải này dài do không tận dụng được x và y là các số tự nhiên nhỏ hơn 10 ngay từ ban đầu.

BÀI TẬP

Bài 3.1: Đầu năm mới 1997, Thành vui vẻ nói với các bạn:

Năm nay là năm may mắn với mình: Tuổi của mình đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh.

Bạn tính xem Thành sinh năm nào?

Thành sinh năm 1995, đến năm 1997 thì tròn 22 tuổi $(1 + 9 + 7 + 5 = 22)$.

Bài 3.2: Một ngày đầu năm 2010, bé Hải Chi (chưa đến 10 tuổi) nói với bạn rằng năm nay mình có tuổi bằng tổng các chữ số của năm sinh.

a) Hải Chi sinh năm nào?

b) Những người sinh năm nào ở thế kỉ XX đến năm 2010 cũng có tuổi bằng tổng các chữ số của năm sinh?

a) Hải Chi sinh năm 2004, đến năm 2010 tròn 6 tuổi $(2 + 0 + 0 + 4 = 6)$.

b) Những người sinh năm 1986 đến năm 2010 tròn 24 tuổi $(1 + 9 + 8 + 6 = 24)$.

Bài 3.3: Ngày đầu năm mới, Thủy tính tuổi của mẹ và của mình, chợt phát hiện ra:

- Mẹ ơi, tổng các chữ số của tuổi mẹ đúng bằng tuổi con.

Mẹ Thủy hỏi lại:

- Thế tổng các chữ số của tuổi con bằng tuổi ai?

- A, đúng bằng tuổi của em Tuấn!

Tuổi của mỗi người là bao nhiêu, nếu tuổi của ba mẹ con cộng lại là 54.

Gọi tuổi của mẹ Thủy là $\overline{ab}$ thì tuổi của Thủy là $a+b$. Tuổi của Thủy là một số có hai chữ số, vì nếu là một số có một chữ số thì tuổi của Thủy bằng tuổi của bé Tuấn.

Ta lại có $a+b \leq 18$ nên Thủy $\overline{1m}$ tuổi, bé Tuấn $1+m$ tuổi, ít hơn Thủy 9 tuổi. Tuổi của bé Tuấn là $a+b-9$. Ta có $\overline{ab}+(a+b)+(a+b-9) = 54$. Rút gọn được $4a+b = 21$. Xét các trường hợp:

$a = 3$ và $b = 9$, thỏa mãn $a+b \geq 10$.

$a = 4$ và $b = 5$, loại vì $a+b < 10$.

$a = 5$ và $b = 1$, loại vì $a+b < 10$.

Đáp số: Mẹ của Thủy 39 tuổi, Thủy 12 tuổi, bé Tuấn 3 tuổi.

Bài 3.4: Nhân dịp Tết, các cụ phụ lão, các anh chị thanh niên và các em thiếu nhi tất cả gồm 15 người, mang 50 chiếc bánh chưng đến tặng đơn vị bộ đội. Mỗi cụ phụ lão mang 4 chiếc bánh, mỗi anh chị thanh niên mang 6 chiếc bánh, mỗi em thiếu nhi mang 1 chiếc bánh. Có bao nhiêu phụ lão, thanh niên, thiếu nhi?

Gọi số phụ lão, số thanh niên, số thiếu nhi theo thứ tự là x, y, z. Theo đề bài thì x, y, z là các số nguyên lớn hơn 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z = 15 \\ 4x+6y+z = 50 \end{cases}$ với nghiệm nguyên lớn hơn 1.

Đáp số: Có 5 phụ lão, 4 thanh niên, 6 thiếu nhi.

Bài 3.5: Các bạn Tuấn, Hùng, Cường cùng với các anh chị của mình là Mai, Vân, Nga (không nhất thiết viết đúng thứ tự) dạo chơi hội hoa xuân. Cô bán hàng nói với họ rằng ai mua bông hoa nào giá bao nhiêu nghìn (giá mỗi bông hoa là một số nguyên nghìn) thì phải mua từng ấy bông hoa đó. Tính ra mỗi bạn đều mua ít hơn chị của mình là 48 nghìn đồng. Ngoài ra Tuấn mua ít hơn chị Vân 9 bông, Hùng mua ít hơn chị Mai 7 bông.

Hãy xác định các cặp chị em và tính xem mỗi người mua bao nhiêu bông hoa, biết rằng mỗi người chỉ mua một loại hoa?

Nếu một bạn nào đó mua x bông hòa thì phải trả x^2 (nghìn đồng). Chị của bạn đó my bông hoa thì phải trả y^2 (nghìn đồng). Ta có $y^2 - x^2 = 48$. Giải phương trình trên với nghiệm nguyên dương ta được $\begin{cases} x_1 = 11 \\ y_1 = 13 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 7 \end{cases}$.

Tuấn mua ít hơn chị Vân 9 bông nên Tuấn mua 4 bông, chị Vân mua 1 bông, Hùng mua ít hơn chị Mai 7 bông nên Hùng mua 1 bông, chị Mai mua 8 bông. Còn lại Cường mua 11 bông, chị Nga mua 7 bông.

Các cặp chị em là: Vân - Cường, Mai - Tuấn, Nga - Hùng.

Bài 3.6: Tân và Hùng gặp nhau trong hội nghị học sinh giỏi Toán. Tân hỏi số nhà của Hùng. Hùng trả lời:

- Nhà mình ở chính giữa đoạn phố, đoạn phố ấy có tổng các số nhà bằng 161, và không có số nhà nào đánh a, b,...

Nghĩ một chút, Tân nói:

- Bạn ở số nhà 23 chứ gì!

Hỏi Tân đã tìm ra như thế nào?

Cách 1: Gọi n là số nhà của dãy $x+2, x+4, x+6, ..., x+2n$.

Ta có $(x+2)+(x+4)+...+(x+2n)=161 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2+x+2n)\cdot n}{2}=161$

$\Leftrightarrow (x+n+1)\cdot n=161$.

Ta có $x+n+1>n>1$ nên $\begin{cases} x+n+1=23 \\ n=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ n=7 \end{cases}$.

Các số nhà của đoạn phố là $17, 19, 21, 23, 25, 27, 29$.

Số nhà ở chính giữa là 23.

Cách 2: Gọi số nhà của Hùng (ở chính giữa đoạn phố) là x. Trung bình cộng của hai số nhà cách đều nhà Hùng cũng bằng x. Gọi số các số nhà là n thì $x\cdot n=161$.

161 có bốn ước tự nhiên là $1, 7, 23, 161$.

Loại các trường hợp:

Có 1 nhà, số nhà là 161;

Có 23 nhà, số nhà ở chính giữa là 7;

Có 161 nhà, số nhà ở chính giữa là 1;

Còn một trường hợp: Có 7 số nhà, số nhà ở chính giữa là 23.

Bài 3.7: Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng là các số nguyên dương khác nhau và số đo chu vi (tính bằng mét) bằng số đo diện tích (tính bằng mét vuông). Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật theo thứ tự là x và y (mét).

Ta có $2(x+y)=xy \Leftrightarrow xy-2x-2y=0 \Leftrightarrow (x-2)(y-2)=4$.

Ta tìm được $x=6, y=3$.

Chiều dài là 6m, chiều rộng là 3m.

Bài 3.8: Tìm hai số nguyên dương, biết rằng tổng của chúng, hiệu của chúng (số lớn trừ số nhỏ), tích của chúng, thương của chúng (số lớn chia số nhỏ) cộng lại bằng 50.

Gọi số lớn và số nhỏ theo thứ tự là x và y. Ta có

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=50 \Leftrightarrow x(y+1)^2=50y.$$

Ta có $50 \vdots (y+1)^2$, mà y và $y+1$ nguyên tố cùng nhau nên $50 \vdots (y+1)^2$. Ta có bảng giá trị sau

$(y+1)^2$	1	25
$y+1$	1	5
y	0, loại	4

Với $y=4$ thì $x=8$.

Bài 3.9: Ba người bạn đi câu được một số cá. Buổi tối họ ngủ lại bên bờ sông. Nữa đêm, người thứ nhất thức dậy, muốn về trước, thấy số cá chia cho 3 dư 1 nên quẳng một con xuống nước, lấy một phần ba mang về. Người thứ hai thức dậy tưởng hai người bạn còn ngủ, đếm thấy số cá chia 3 dư 1 nên cũng vứt một con xuống nước, lấy một phần ba mang về. Người thứ ba thức dậy, cũng vứt một con cá xuống nước, lấy một phần ba mang về.
Hỏi cả ba người câu được bao nhiêu con cá, biết rằng họ là những người câu cá tồi?
Cách 1: Gọi x là số cá cả ba người câu được.
Số cá còn lại sau khi người I lấy là $\frac{2}{3}(x-1)$ tức là $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$.
Số cá còn lại sau khi người II lấy là $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-1\right)$ tức là $\frac{4}{9}x-\frac{10}{9}$.
Số cá còn lại sau khi người III lấy là $\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}x-\frac{10}{9}-1\right)$ tức là $\frac{8}{27}x-\frac{38}{27}$.
Gọi số cá còn lại sau khi người III lấy là y.
Ta phải giải phương trình sau với nghiệm nguyên dương $\frac{8}{27}x-\frac{38}{27}=y$ tức là $8x-27y=38$ (1).
Do $y\vdots 2$, đặt $y=2k\,(k\in\mathbb{N}^*)$. Thay vào (1) được $4x-27k=19 \Leftrightarrow x=\frac{27k+19}{4}=7k+5-\frac{k+1}{4}$.
Đặt $\frac{k+1}{4}=t\,(t\in\mathbb{N}^*)$ thì $k=4t-1 \Rightarrow x=7(4t-1)+5-t=27t-2$.
Vì ba chàng câu cá tồi, chọn $t=1$ để x nhận giá trị nguyên dương và nhỏ nhất, ta có $x=25$.
Ba chàng câu được 25 con cá.
Số cá họ mang về theo thứ tự là 8 con, 5 con, 3 con.
Cách 2: Gọi x là số cá câu được. Gọi a,b,c theo thứ tự là số cá người I, người II, người III mang về. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x-1=3a & (1)\\ 2a-1=3b & (2)\\ 2b-1=3c & (3)\end{cases}$$

Từ (3) suy ra c lẻ. Đặt $c = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$.
Thay vào (3) được $b = 3k + 2$.
Thay vào (2) được $2a = 9k + 7$.
Đặt $k = 2t + 1 (t \in \mathbb{N})$ thì $2a \approx 18t + 16$ nên $a = 9t + 8$.
Thay vào (1) được $x = 27t + 25$.
Vì ba chàng câu cá tồi, chọn $t = 0$, số cá họ câu là 25 con.

Bài 3.10: Trong một đợt thi đua, An làm vượt mức 10 sản phẩm, Bách vượt mức 13 sản phẩm, Dũng vượt mức 26 sản phẩm. Số sản phẩm vượt mức của mỗi người gồm loại I và loại II. Số sản phẩm vượt mức của ba người khác nhau nhưng do sản phẩm loại II được thưởng ít tiền hơn loại I nên ai cũng được thưởng 140 nghìn đồng. Tính xem mỗi người làm vượt mức bao nhiêu sản phẩm từng loại và tiền thưởng cho một sản phẩm mỗi loại bao nhiêu?
Gọi số sản phẩm làm vượt mức loại I của An, Bách, Dũng theo thứ tự là x, y, z chiếc $(1 \le x < 10; 1 \le y < 16; 1 \le z < 26)$ và $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, tiền thưởng cho một sản phẩm loại I là t nghìn đồng, loại II là u nghìn đồng.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} tx + u(10 - x) = 140 & (1) \\ ty + u(16 - y) = 140 & (2) \\ tz + u(26 - z) = 140 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - u)x + 10u = 140 \\ (t - u)y + 16u = 140 \\ (t - u)z + 26u = 140 \end{cases}$$

Lấy hai phương trình trên lần lượt trừ đi phương trình cuối được

$$\begin{cases} (t - u)(x - z) = 16u & (4) \\ (t - u)(y - z) = 10u & (5) \end{cases}$$

Do đó $\dfrac{x - z}{y - z} = \dfrac{8}{5}$ (6)
Suy ra $(x - z) \vdots 8$. Theo đề bài, $t > u$ nên từ (4) suy ra $x > z$.
Ta lại có $1 \le x \le 9$ nên $1 \le x - z \le 8$. Do đó $x - z = 8$.
Vậy $x = 9; z = 1$. Thay vào (6) được $y = 6$.
Thay các giá trị của x và z vào (1) và (3) được $\begin{cases} 9t + u = 140 \\ t + 25u = 140 \end{cases}$.
Hệ phương trình này cho $t = 15; u = 5$.

Bài 3.11: Hiện tại là 0 giờ, các kim giờ, kim phút, kim giây đều chập nhau. Ngoài thời điểm trên, trong khoảng từ 0 giờ đến 12 giờ, còn các thời điểm nào để:

a) Kim giờ và kim phút chập nhau?

b) Cả ba kim đều chập nhau?

a) Trong một giờ, kim phút quay được 1 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng.
Khoảng thời gian để kim phút gặp lại kim giờ lần tiếp theo là $1 : \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{12}{11}$ (giờ).
Các thời điểm để kim giờ và kim phút chập nhau là $\frac{12}{11}m$ (giờ) với $m \in \mathbb{N}$. Do $0 \leq \frac{12}{11}m \leq 12$ nên $0 \leq m \leq 11$. Ngoài thời điểm 0 giờ, còn 11 thời điểm khác nhau mà kim giờ và kim phút chập nhau là $1\frac{1}{11}$ giờ, $2\frac{2}{11}$ giờ, $3\frac{3}{11}$ giờ,...,$10\frac{10}{11}$ giờ, 12 giờ.

b) Trong một giờ, kim giây quay được 60 vòng, kim giờ quay được $\frac{1}{12}$ vòng. Khoảng thời gian để kim giây gặp lại kim giờ lần tiếp theo là $1 : \left(60 - \frac{1}{12}\right) = \frac{12}{719}$ (giờ).
Các thời điểm để kim giờ và kim giây chập nhau là $\frac{12}{719}n$ (giờ) với $n \in \mathbb{N}$.
Để tìm thời điểm cả ba kim đồng hồ chập nhau, ta phải giải phương trình sau với nghiệm tự nhiên $\frac{12m}{11} = \frac{12n}{719} \Leftrightarrow 719m = 11n$.
Ta có $719m \vdots 11$, mà $(719, 11) = 1$ nên $m \vdots 11$.
Như vậy, ngoài thời điểm 0 giờ, chỉ có thời điểm 12 giờ là cả ba kim đồng hồ đều chập nhau.

Lưu ý. Có các thời điểm mà kim giờ và kim phút chập nhau, còn kim giờ lệch đi một chút. Ta xét tất cả các thời điểm mà kim giờ và kim phút chập nhau, trừ lúc 0 giờ và lúc 12 giờ, đó là:
$1\frac{1}{11}$ giờ $=$ 1 giờ 5 phút $27\frac{3}{11}$ giây; $2\frac{2}{11}$ giờ $=$ 2 giờ 10 phút $54\frac{6}{11}$ giây $3\frac{3}{11}$ giờ $=$ 3 giờ 16 p hút $21\frac{9}{11}$ giây; $4\frac{4}{11}$ giờ $=$ 4 giờ 21 phút $49\frac{1}{11}$ giây $5\frac{5}{11}$ giờ $=$ 5 giờ 27 phút $16\frac{4}{11}$ giây; $6\frac{6}{11}$ giờ $=$ 6 giờ 32 phút $43\frac{7}{11}$ giây; $7\frac{7}{11}$ giờ $=$ 7 giờ 38 phút $10\frac{10}{11}$ giây; $8\frac{8}{11}$ giờ $=$ 8 giờ 43 phút $38\frac{2}{11}$ giây; $9\frac{9}{11}$ giờ $=$ 9 giờ 49 phút $5\frac{5}{11}$ giây;$10\frac{10}{11}$ giờ $=$ 10 giờ 54 phút $32\frac{8}{11}$ giây.
Xét các thời điểm trên, ta thấy vào lúc 3 giờ 16 phút $21\frac{9}{11}$ giây và 8 giờ 43 phút $38\frac{2}{11}$ giây thì kim giờ và kim phút chập nhau, còn kim giây lệch đi một chút.
Tại các thời điểm 3 giờ 16 phút 16 giây và 8 giờ 43 phút 43 giây, trong ba kim đồng hồ không có hai kim nào hoàn toàn chập nhau, nhưng cả ba kim rất sát nhau.
Bạn đọc từ tìm các thời điểm kim giờ và kim giây chập nhau, còn kim phút lệch đi một chút; kim phút và kim giây chập nhau, còn kim giờ lệch đi một chút.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN MANG TÊN CÁC NHÀ TOÁN HỌC

BÀI 1. THUẬT TOÁN EUCLIDE VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM RIÊNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A MỞ ĐẦU

Giả sử phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ có nghiệm nguyên. Trong nhiều trường hợp, ta có thể tìm được ngay một nghiệm của phương trình, ta gọi đó là một *nghiệm riêng*. Có công thức biểu thị tất cả các nghiệm của phương trình theo nghiệm riêng nói trên.
Lấy lại ví dụ 23: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$11x + 18y = 120. \tag{1}$$

Bằng các thử chọn, ta tìm được $x = 6$; $y = 3$ là một nghiệm riêng của (1). Ta có

$$11x + 18y = 120$$

$$11 \cdot 6 + 18 \cdot 3 = 120$$

Trừ theo từng vế của hai đẳng thức trên được

$$11(x-6) + 18(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11(x-6) = 18(3-y)$$

Vì $(11; 18) = 1$ nên $(x-6) \vdots 18$. Đặt $x - 6 = 18t$ (t nguyên) ta được $x = 6 + 18t$. Thay vào (2) ta được

$$11t = 3 - y$$

Suy ra $y = 3 - 11t$.
Có thể chứng minh được rằng công thức cho mọi nghiệm nguyên của phương trình (1) (các hệ sô của x, y nguyên tố cùng nhau) là:

$$\begin{cases} x = 6 + 18t \\ y = 3 - 11t \end{cases} (t \text{ là số nguyên tùy ý}).$$

B CÁCH GIẢI TỔNG QUÁT

Xét phương trình $ax + by = c$

trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$ và ƯCLN$(a, b, c) = 1$.

Ta luôn giả thiết được ƯCLN$(a, b, c) = 1$, vì nếu ƯCLN$(a, b, c) = d \neq 1$ thì chia hai vế của phương trình cho d.

Ta có hai định lý sau:

Định lí 1: Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì $(a, b) = 1$. $(*)$

Chứng minh

Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình (1) thì $ax_0 + by_0 = c$.

Nếu a và b có ước chung là $d \neq 1$ thì $c \,\vdots\, d$, trái với giả thiết ƯCLN$(a, b, c) = 1$.

Vậy $(a, b) = 1$.

Định lí 2: Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình (1) thì phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên và mọi nghiệm nguyên của phương trình đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

trong đó t là một số nguyên tùy ý $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

Chứng minh

a) Bước 1: Mỗi cặp số $(x; y)$ dạng $(x_0 + bt; y_0 - at)$ với $t \in \mathbb{Z}$ đều là nghiệm của phương trình (1).

   Thật vậy, do $(x_0; y_0)$ là nghiệm của phương trình (1) nên $(ax_0 + by_0 = c)$.

   Ta có $ax + by = a(x_0 + bt) + b(y_0 - at) = ax_0 + by_0 = c$.

b) Bước 2: Mỗi nghiệm $(x; y)$ của phương trình (1) đều có dạng

$$(x_0 + bt; y_0 - at), t \in \mathbb{Z}.$$

   Thật vậy, do $(x_0; y_0)$ và $(x; y)$ đều là nghiệm của phương trình (1) nên

$$ax + by = c$$

$$ax_0 + by_0 = c \text{ (2)}$$

   Ta có $a(x - x_0) \,\vdots\, b$ mà $a \neq 0$ và $(a, b) = 1$ (theo định lý 1) nên $(x - x_0) \,\vdots\, b$.

   Vậy tồn tại số nguyên t sao cho $x - x_0 = bt$, tức là $x = x_0 + bt$.

   Thay vào (2) được $abt = b(y_0 - y)$

Vì $b \neq 0$ nên $at = y_0 - y \Rightarrow y = y_0 - at$.

Vậy tồn tại số nguuyên t sao cho

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

C VÍ DỤ

Ví dụ 1: Bằng phương pháp tìm một nghiệm riêng, hãy tìm một nghiệm nguyên của phương trình

$$3x - 2y = 5.$$

Cách 1: Ta thấy $x_0 = 3; y_0 = 2$ là một nghiệm riêng.

Theo định lý 2, mọi nghiệm nguyên của phương trình là

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} (t \text{ là số nguyên tùy ý})$$

Cách 2: Ta thấy $x_0 = 1; y_0 = -1$ (ứng với $t = 1$ ở cách 1). Mọi nghiệm nguyên của phương trình là

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases} (t \text{ là số nguyên tùy ý})$$

Cách 2: Ta thấy $x_0 = 5; y_0 = 5$ (ứng với $t = -1$ ở cách 1). Mọi nghiệm nguyên của phương trình là

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 5 - 3t \end{cases} (t \text{ là số nguyên tùy ý})$$

Lưu ý: Qua ba cách giải trên, ta thấy công thức biểu thị tập hợp các nghiệm của cùng một phương trình có thể có các dạng khác nhau tùy theo cách chọn nghiệm riêng.

D CÁCH TÌM MỘT NGHIỆM RIÊNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH $AX + BY = C$

Để tìm một nghiệm riêng của phương trình $ax + by = c$, ta có thể dùng phương pháp thử chọn: Lần lượt cho x bằng các số có giá trị tuyệt đối nhỏ $(0, \pm1, \pm2, \cdots)$ rồi tìm giá trị tương ứng của y. Cách này đơn giản đối với phương trình $3x - 2y = 5$ ở ví dụn 7 nhưng không thích hợp với những phương trình mà phép thử chọn phải tiến hành quá nhiều lần.

Có một thuật toán cho phép chúng ta tìm được ngay một nghiệm riêng của phương trình $ax + by = c$. Đó là thuật toán tìm ƯCLN của hai số, mang tên nhà toán học Hy Lạp *Euclide*.

Xét phương trình $40x - 31y = 1$ (chú ý vế phải của phương trình bằng 1).

Dùng thuật toán Euclid tìm ƯCLN$(40, 31)$ như sau

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & 40 & \vert\ 31 \\
 & & 31 & \vert\ 9 & \vert\ 1 \\
 & 9 & \vert\ 4 & \vert\ 3 & \\
4 & \vert\ 1 & \vert\ 2 & & \\
0 & \vert\ 4 & & &
\end{array}$$

Ta viết thương của các phép chia trên theo thứ tự các phép chia, không kể thương cuối cùng là 4, được $1, 3, 2$.

Gọi các thuong trên là $a_1, a_2, \cdots, a_k$ (thương cuối cùng là a_{k+1}), ta tính giá trị liên phân số

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Người ta chứng minh được rằng tồn tại một nghiệm riêng $(x_0; y_0)$ của phương trình mà $\begin{cases} |x_0| = m \\ |y_0| = n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |x_0| = n \\ |y_0| = m \end{cases}$ Trong ví dụ trên, $1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{9}{7}$.

Tồn tại một nghiệm riêng $(x_0; y_0)$ mà $\begin{cases} |x_0| = 7 \\ |y_0| = 9. \end{cases}$

(Do $\|40\| > \| - 31\|$ nên ta chọn $\|x_0\| < \|y_0\|$).

Ở phương trình $40x - 31y = 1$, không thể có x và y trái dấu. Ta chỉ cần thử với nhiều nhất là hai cặp số $(7; 9)$ và $(-7; -9)$ thì chọn được nghiệm riêng, đó là $(7; 9)$.

Các nghiệm nguyên của phương trình $40x - 31y = 1$ có dạng

$$\begin{cases} x = 7 - 31t \\ y = 9 - 40t \end{cases} (t \text{ là số nguyên tùy ý}).$$

Lưu ý: Bằng cách dùng thuật toán Euclid, ta lần lượt có các thương $1, 3, 2, 4$. ta cũng có thể có các số $1, 3, 2, 4$ bằng cách viết $\dfrac{40}{31}$ dưới dạng liên phân số

$$\frac{40}{31} = 1 + \frac{9}{31} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{9}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Ví dụ 2: Bằng phương pháp tìm một nghiệm riêng, hãy tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình

$$47x + 162y = 2. \tag{1}$$

Trước hết ta tìm một nghiệm riêng của phương trình

$$47x + 162y = 1. \tag{2}$$

Dùng thuật toán Euclid tìm ƯCLN$(162, 47)$ như sau

$$\begin{array}{ccccc} & & & 162 & 47 \\ & & 47 & 21 & 3 \\ & 21 & 5 & 2 & \\ 5 & 1 & 4 & & \\ 0 & 5 & & & \end{array}$$

Ta có $3 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{31}{9}$.

Tồn tại một nghiệm riêng của phương trình (2) là $(x_0; y_0)$ mà $|x_0| = 31$, $|y_0| = 9$ (do $|47| < |162|$ nên ta chọn $|x_0| > |y_0|$).

Ở phương trình (2), không thể có x_0, y_0 cùng dấu. Bằng thử chọn, ta được $(x_0; y_0) = (-62; 18)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$47x + 162y = 2.$$

Các nghiệm nguyên của phương trình (1) có dạng

$$\begin{cases} x = -62 + 162t \\ y = 18 - 47t \end{cases} (t \text{ là số nguyên tùy ý}).$$

BÀI TẬP

Bài 1.1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $17x - 39y = 4$ bằng hai cách

a) Cách 1. Dùng phương pháp tìm một nghiệm riêng.

b) Cách 2. Dùng phương pháp biểu thị một ẩn theo ẩn kia.

a) Cách 1. Dùng phương pháp tìm một nghiệm riêng.

Trước hết ta tìm một nghiệm riêng của phương trình

$$17x - 39y = 1. \tag{1}$$

Dùng thuật toán Euclid tìm ƯCLN$(39, 17)$ như sau

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & 39 & 17 \\
 & & 17 & 5 & 2 \\
 & 5 & 2 & 3 & \\
2 & 1 & 2 & & \\
0 & 2 & & &
\end{array}$$

Khi đó $2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{2}} = 2 + \dfrac{2}{7} = \dfrac{16}{7}$.

Tồn tại một nghiệm riêng $(x_0; y_0)$ của (1) mà $|x_0| = 16$, $|y_0| = 7$ (do $|17| < |-39|$ nên ta chọn $|x_0| > |y_0|$).

Chú ý rằng ở (1), x_0 và y_0 không thể trái dấu.

Bằng cách thử chọn ta tìm được $x_0 = -16$; $y_0 = -7$. Do đó $(-64; -28)$ là một nghiệm riêng của phương trình $17x - 39y = 4$. (2)

Mọi nghiệm nguyên của phương trình (2) có dạng

$$\begin{cases} x = -64 - 39t \\ y = -28 - 17t \end{cases} (t \in \mathbb{Z}). \tag{I}$$

b) Cách 2. Dùng phương pháp biểu thị một ẩn theo ẩn kia. Từ (2), ta có

$$x = \frac{39y + 4}{17} = 2y + \frac{5y + 4}{17}.$$

Đặt $\dfrac{5y + 4}{17} = k$, $k \in \mathbb{Z}$ thì $5y = 17k - 4$ nên

$$y = \frac{17k - 4}{5} = 3k + \frac{2(k - 2)}{5}.$$

Đặt $\dfrac{k - 2}{5} = t$, $t \in \mathbb{Z}$ thì $k = 5t + 2$. Ta có

$$\begin{aligned} y &= 3(5t + 2) + 2t = 17t + 6 \\ x &= 2(17t + 6) + (5t + 2) = 39t + 14. \end{aligned}$$

Mọi nghiệm nguyên của phương trình (2) có dạng

$$\begin{cases} x = 14 + 39t \\ y = 6 + 17t \end{cases} (t \in \mathbb{Z}). \tag{II}$$

Bài 1.2: Cũng câu hỏi trên đối với phương trình $2x - 7y = 3$

a) Cách 1:
Tồn tại một nghiệm riêng của phương trình $2x - 7y = 3$ là $(x; y) = (5; 1)$.
Mọi nghiệm nguyên của phương trình có dạng $(5 - 7t; 1 - 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$

b) Cách 2:

$$2x - 7y = 3 \Rightarrow x = \frac{7y+3}{2} = 3y + 1 + \frac{y+1}{2}.$$

Đặt $\frac{y+1}{2} = k, k \in \mathbb{Z}$ thì $y = 2k - 1$.
Khi đó $x = 3(2k-1) + 1 + k = 7k - 2, k \in \mathbb{Z}$.
Khi đó mọi nghiệm của phương trình đã cho có dạng

$$\begin{cases} x = 7k - 2 \\ y = 2k - 1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH PELL

A MỞ ĐẦU

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - 2y^2 = 1$ (1)

a) Hãy tìm nghiệm nguyên dương $(x_1; y_1)$ của phương trình (1) với giá trị y_1 nhỏ nhất.

b) Tính $\left(3+2\sqrt{2}\right)^k\left(3-2\sqrt{2}\right)^k$ với $k = 1, 2, 3$.

Từ đó hãy tìm ba nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

a) Xét $y = 1$, thay vào (1) được $x^2 = 3$, không tìm được x nguyên.

Xét $y = 2$, thay vào (1) được $x^2 = 9$, tìm được $x = 3$, nghĩa là $3^2 - 2\cdot 2^2 = 1$. Vậy $(x_1; y_1) = (3; 2)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (1) với giá trị nguyên dương $y = 2$ nhỏ nhất.

b) • Với $k = 1$ có $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) = 1$.

• Với $k = 2$ có $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)^2 = 1^2 = 1$.

Mặt khác $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2 = \left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right) = 17^2 - 2\cdot 12^2$ do đó $17^2 - 2\cdot 12^2 = 1$, nghĩa là $(x_2; y_2) = (17; 12)$ cũng là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

• Tương tự như trên ta có $\left(3+2\sqrt{2}\right)^3\left(3-2\sqrt{2}\right)^3 = \left(\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)^3 = 1^3 = 1$.

Mặt khác $\left(3+2\sqrt{2}\right)^3\left(3-2\sqrt{2}\right)^3 = \left(99+70\sqrt{2}\right)\left(99-70\sqrt{2}\right) = 99^2 - 2\cdot 70^2$ do đó $90^2 - 2\cdot 70^2 = 1$, nghĩa là $(x_3; y_3) = (99; 70)$ cũng là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

Ta đã chỉ ra ba nghiệm nguyên dương $(x; y)$ của phương trình (1) là $(3; 2)$, $(17; 12)$, $(99; 70)$.

★ ***Kinh nghiệm giải toán***

Ở ví dụ 1, để tìm một số nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - 2y^2 = 1$, ta đã sử dụng một biểu thức chứa căn bậc hai là $\left(3+2\sqrt{2}\right)^k\left(3-2\sqrt{2}\right)^k$ rồi lần lượt cho $k = 1, 2, 3$.

Nét độc đáo của cách làm trên là để tìm nghiệm nguyên dương của một phương trình với các hệ số nguyên, ta lại sử dụng một biểu thức vô tỉ.

B PHƯƠNG TRÌNH PELL

Phương trình $x^2 - Py^2 = 1$, với P là số nguyên dương không chính phương, gọi là phương trình Pell, mang tên nhà toán học Anh là *John Pell* $(1610 - 1685)$.

Nhà toán học Pháp *Lagrange* là người đầu tiên công bố lời giải đầy đủ của phương trình trên năm 1766.

Phương trình Pell có vô số nghiệm nguyên. Ngoài nghiệm tầm thường $(x; y)$ là $(1; 0)$, $(-1; 0)$, để tìm các nghiệm nguyên có giá trị khác 0 của phương trình, ta chỉ cần tìm nghiệm nguyên dương của nó.

Ta gọi $(x_1; y_1)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell nếu nó là nghiệm không tầm thường và $x_1 + y_1\sqrt{P}$ là số nhỏ nhất trong tập hợp

$$\left\{x + y\sqrt{P} | x, y \in \mathbb{N}^*, x^2 - Py^2 = 1\right\}.$$

Bảng sau cho ta các nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $(x_1; y_1)$ của một số phương trình Pell.

P	$x^2 - Py^2 = 1$	x_1	y_1
2	$x^2 - 2y^2 = 1$	3	2
3	$x^2 - 3y^2 = 1$	2	1
5	$x^2 - 5y^2 = 1$	9	4
6	$x^2 - 6y^2 = 1$	5	2
7	$x^2 - 7y^2 = 1$	8	3
8	$x^2 - 8y^2 = 1$	3	1
10	$x^2 - 10y^2 = 1$	19	6
11	$x^2 - 11y^2 = 1$	10	3
12	$x^2 - 12y^2 = 1$	7	2
13	$x^2 - 13y^2 = 1$	649	180

Người ta đã chứng minh được rằng: Nếu $(x_1; y_1)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell thì mọi nghiệm nguyên dương $(x_k; y_k)$ của phương trình được xác định bởi công thức

$$x_k + y_k\sqrt{P} = \left(x_1 + y_1\sqrt{P}\right)^k \text{ với } k = 1, 2, 3, \ldots$$

BÀI TẬP

Bài 2.1:

a) Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất rồi tìm thêm hai nghiệm nguyên dương khác của phương trình $x^2 - 15y^2 = 1$.

b) Một đội quân được chia đều thành 15 nhóm, mỗi nhóm đều có thể xếp thành một khối vuông có số người ở hàng ngang bằng số người ở hàng dọc và không ai lẻ hàng. Có thêm một chiến binh tham gia đội quân này. Khi đó toàn bộ đội quân lúc sau (kể cả người mới vào) vẫn xếp được thành một khối vuông có số người ở hàng ngang bằng số người ở hàng dọc (số hàng này nhỏ hơn 200) và không ai lẻ hàng. Tính số người của đội quân lúc đầu.

a) Kiểm tra ta được $(x; y) = (4; 1)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình $x^2 - 15y^2 = 1$. Từ đó có $\left(4 + \sqrt{15}\right)^2 = 31 + 8\sqrt{15}$ và $\left(4 + \sqrt{15}\right)^3 = 244 + 63\sqrt{15}$. Hai nghiệm nguyên dương $(x; y)$ khác của phương trình trên là $(31; 8)$ và $(244; 63)$.

b) Giả sử đội quân lúc sau xếp thành x hàng (dọc hoặc ngang), mỗi nhóm của đội quân lúc đầu

xếp thành y hàng ($x < 200$, $y > 1$).
Ta có $x^2 - 15y^2 = 1$.
Theo câu a), ba nghiệm $(x; y)$ nhỏ nhất của phương trình là $(4; 1)$, $(31; 8)$, $(244; 63)$. Do $x < 200$ và $y > 1$ nên $x = 31$, $y = 8$.
Số người của đội quân lúc đầu là $31^2 - 1 = 960$ người.

Bài 2.2: Tìm ba số nguyên dương x sao cho $2x - 1$, $2x$, $2x + 1$ là số đo (cùng đơn vị đo) độ dài ba cạnh của một tam giác có số đo diện tích là một số nguyên dương.
Theo công thức Héron $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ với S là diện tích, p là nửa chu vi của tam giác có cạnh là a, b, c.
Thay $a = 2x - 1$, $b = 2x$, $c = 2x + 1$, ta được $p = 3x$ và rút gọn được

$$S^2 = 3x^2(x^2 - 1).$$

Suy ra $3(x^2 - 1)$ phải là số chính phương, do đó $x^2 - 1 = 3y^2$ với số y nguyên dương.
Ta có phương trình Pell $x^2 - 3y^2 = 1$. (1)
Nghiệm nguyên dương $(x; y)$ nhỏ nhất của phương trình (1) là $(2; 1)$. Từ đó $(\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ cho nghiệm $(x; y)$ là $(7; 4)$, $(\left(2+\sqrt{3}\right)^3 = 26 + 15\sqrt{3}$ cho nghiệm $(x; y)$ là $(26; 15)$.
Ta chỉ ra ba giá trị của x là $2; 7; 26$. Tương ứng với các giá trị đó ta được các tam giác có độ dài ba cạnh là $(3; 4; 5)$, $(13; 14; 15)$, $(51; 52; 53)$.

Bài 2.3: Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm nguyên

$$x^2 - 8y^2 = 1.$$

Xét phương trình $x^2 - 8y^2 = 1$. (1)
Gọi $(a; b)$ là nghiệm nguyên của phương trình (1) thì

$$\begin{aligned}
a^2 - 8b^2 = 1 \Rightarrow \left(a + b\sqrt{8}\right)\left(a - b\sqrt{8}\right) = 1 \Rightarrow\Rightarrow \left(a + b\sqrt{8}\right)^2\left(a - b\sqrt{8}\right)^2 = 1 \\
\left(a^2 + 8b^2 + 2ab\sqrt{8}\right)\left(a^2 + 8b^2 - 2ab\sqrt{8}\right) = 1 \\
\left(a^2 + 8b^2\right)^2 - 8\left(2ab\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Như vậy, nếu cặp số $(x; y)$ bằng $(a; b)$ là nghiệm của (1) thì cặp số $\left(a^2 + 8b^2; 2ab\right)$ cũng là nghiệm của (1).
Ta thấy $(x; y)$ bằng $(3; 1)$ là một nghiệm dương của (1), do đó $(x; y)$ bằng $\left(3^2 + 8; 2 \cdot 3\right) = (17; 6)$ cũng là nghiệm dương của (1) và lớn hơn nghiệm cũ. Cứ tiếp tục như vậy, phương trình (1) có vô số nghiệm.

Bài 2.4: Chứng minh có vô hạn số nguyên y để $2y^2+1$ là số chính phương.

Đặt $2y^2+1=x^2$. (1)

Gọi $(a;b)$ là nghiệm nguyên của phương trình (1) thì $a^2-2b^2=1$. Giải tương tự bài 2.3, hãy chứng minh rằng $(a^2+2b^2;2ab)$ cũng là nghiệm của (1) và lớn hơn nghiệm cũ.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH PYTHAGORE

A MỞ ĐẦU

Ví dụ 1: Cho phương trình

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{4.1}$$

với nghiệm x, y, z nguyên tố cùng nhau.

a) Chứng minh rằng hai trong số x và y phải có một số chẵn, một số lẻ.

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình (4.1).

a) Với x, y, z nguyên tố cùng nhau thì chúng đôi một nguyên tố cùng nhau vì hai trong ba số ấy có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta thấy x và y không thể cùng chẵn (vì chúng nguyên tố cùng nhau), không thể cùng lẻ (vì nếu x và y cùng lẻ thì z chẵn, khi đó $x^2 + y^2$ chia 4 dư 2, còn $z^2 \vdots 4$). Như vậy trong hai số x và y có một số chẵn một số lẻ.

b) Giả sử x lẻ, y chẵn thì z lẻ. Ta viết (4.1) dưới dạng

$$x^2 = (z + y)(z - y)$$

Ta có $z + y$, $z - y$ là các số lẻ, chúng nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, giả sử $(z + y) \vdots d$, $(z - y) \vdots d$ (d lẻ) thì $(z + y) + (z - y) = 2z \vdots d$ và $(z + y) - (z - y) = 2y \vdots d$.

Do $(2, d) = 1$ nên $z \vdots d$ và $y \vdots d$.

Do $(y, z) = 1$ nên $d = 1$. Vậy $(z + y, z - y) = 1$.

Hai số nguyên dương $(z + y)$, $(z - y)$ nguyên tố cùng nhau, có tích số là số chính phương x^2 nên mỗi số $(z + y)$, $(z - y)$ cũng là số chính phương.

Đặt $z + y = m^2$, $z - y = n^2$, với m, n là các số nguyên lẻ, nguyên tố cùng nhau, $m > n > 0$.

Ta được: $\begin{cases} x = mn \\ y = \dfrac{m^2 - n^2}{2} \\ z = \dfrac{m^2 + n^2}{2} \end{cases}$ (công thức **I**)

với m, n là các số nguyên lẻ, nguyên tố cùng nhau, $m > n > 0$.

Đảo lại, dễ thấy bộ ba $(x; y; z)$ nói trên thỏa mãn phương trình (4.1).

Lưu ý:

- Trong đề bài, ta đã giả thiết x, y, z nguyên tố cùng nhau. Điều này không làm mất tính tổng quát của việc giải phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.
  Thật vậy, nếu bộ ba số x_0, y_0, z_0 thỏa mãn phương trình và có ƯCLN là d, giả sử $x_0 = dx_1, y_0 = dy_1, z_0 = dz_1$ thì $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ trong đó ƯCLN $(x_1, y_1, z_1) = 1$.
- Ta còn có thể viết công thức (**I**) dưới dạng $\begin{cases} x = 2mn \\ y = (m^2 - n^2) \\ z = (m^2 + n^2) \end{cases}$ (công thức **II**)
  với m và n là các số nguyên tố cùng nhau, có tính chẵn lẻ khác nhau, $m > n > 0$.
- Ta gọi bộ ba số (x, y, z) trong công thức **I** và công thức **II** là *bộ ba số Pythagore gốc*. Nhân bộ ba này với mọi số nguyên dương, ta được tất cả các bộ ba số Pythagore, đó là tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

1. Phương trình Pythagore

Ta gọi phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ với nghiệm nguyên dương x, y, z là phương trình Pythagore. Nghiệm tổng quát của phương trình Pythagore là:

a) Tính theo công thức **I**:

$$\begin{cases} x = tmn \\ y = t \cdot \dfrac{m^2 - n^2}{2} \\ z = t \cdot \dfrac{m^2 + n^2}{2} \end{cases}$$

với t, m, n là các số nguyên dương bất kì; m và n là các số lẻ, nguyên tố cùng nhau, $m > n$.

b) Tính theo công thức **II**:

$$\begin{cases} x = 2mn \\ y = t(m^2 - n^2) \\ z = t(m^2 + n^2) \end{cases}$$

với t, m, n là các số nguyên dương bất kì; m và n là các số nguyên tố cùng nhau và chẵn lẻ khác nhau, $m > m$.

Dưới đây là một số bộ ba Pythagore gốc:

a) Tính theo công thức **I**:

m	n	$x = mn$	$y = \dfrac{m^2 - n^2}{2}$	$z = \dfrac{m^2 + n^2}{2}$
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	18	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65

b) Tính theo công thức **II**:

m	n	$x = 2mn$	$y^2 = m^2 - m^2$	$z^2 = m^2 + n^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

BÀI TẬP

Bài 3.1:

a) Hãy chứng minh cách chỉ ra bộ ba số Pythagore gốc do Pythagore đưa ra: Chọn số nhỏ nhất là số lẻ k ($k \geq 3$) thì hai số kia là hai số tự nhiên liên tiếp có tổng bằng k^2.

$x = k$	k^2	$y = \dfrac{k^2 - 1}{2}$	$z = \dfrac{k^2 + 1}{2}$
3	9	4	5
5	25	12	13
7	49	24	25

b) Từ ba nghiệm của phương trình Pythagore, hãy chỉ ra ba nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + y^2 = 2z^2$ với $x \neq y$.

a) Dễ dàng chứng minh được $k^2 + \left(\dfrac{k^2-1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{k^2+1}{2}\right)^2$

b) Giả sử $x > y$ (không xảy ra $x = y$).
Ta có: $x^2 + y^2 = 2z^2$ (1) nên $z^2 = \dfrac{x^2+y^2}{2} = \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.
Đặt $\dfrac{x-y}{2} = a$ và $\dfrac{x+y}{2} = b$ thì $a^2 + b^2 = z^2$.
Do $x^2 + y^2$ là số chẵn nên x và y cùng chẵn hoặc cùng lẻ, do đó a và b là các số nguyên.
Từ $x - y = 2a$ và $x + y = 2b$ suy ra $x = b + a$ và $y = b - a$.
Như vậy, nếu $(a; b; z)$ là bộ ba số Pythagore ($a^2 + b^2 = z^2$, trong đó $a < b$) thì bộ ba số $(b + a; b - a; z)$ là nghiệm của (1).
Từ bộ ba số Pythagore $(3; 4; 5)$ ta có $(7; 1; 5)$ là một nghiệm của (1).
Từ bộ ba số Pythagore $(5; 12; 13)$ ta có $(17; 7; 13)$ là một nghiệm của (1).
Từ bộ ba số Pythagore $(7; 24; 25)$ ta có $(31; 17; 25)$ là một nghiệm của (1).

Bài 3.2: Hãy chứng minh cách chỉ ra bộ ba số Pythagore gốc do Platon (nhà Toán học Hy Lạp thế kỷ IV trước công nguyên) đưa ra: Chọn $x = 4k$ ($k \geq 1$) thì $y = 4k^2 - 1$, $z = 4k^2 + 1$.

k	$x = 4k$	$4k^2$	$y = 4k^2 - 1$	$z = 4k^2 + 1$
1	4	4	3	5
2	8	16	15	27
3	12	36	35	37

Chứng minh hằng đẳng thức $(4k)^2 + (4k^2 - 1)^2 = (4k^2 + 1)^2$.

Bài 3.3: Không dùng công thức nghiệm của phương trình Pythagore, hãy chứng minh rằng trong ba số của bộ ba Pythagore thì:

a) Tồn tại một số là bội của 3;

b) Tồn tại một số là bội của 4;

c) Tồn tại một số là bội của 5.

a) Một số chính phương chia cho 3 thì dư 0 hoặc 1.
Nếu cả ba số x^2, y^2, z^2 đều không chia hết cho 3 thì chúng chia cho 3 dư 1. Khi đó $x^2 + y^2$ chia cho 3 dư 2, loại.
Vậy tồn tại một trong ba số x^2, y^2, z^2 chia hết cho 3, tức là một trong ba số x, y, z là bội của 3.

b) Một số chính phương chia cho 4 thì dư 0 hoặc 1 nên chia cho 8 thì dư 0, 1, 4.
Nếu cả ba số x^2, y^2, z^2 đều không chia hết cho 8 thì chúng chia cho 8 dư 1 hoặc 4. Xét ba trường hợp:

- Nếu x^2 và y^2 đều chia cho 8 dư 1 thì z^2 chia cho 8 dư 2, loại.
- Nếu x^2 và y^2 đều chia cho 8 dư 4 thì $z^2 \vdots 8$, loại.
- Nếu trong x^2 và y^2 có một số chia cho 8 dư 1, một số chia cho 8 dư 4 thì z^2 chia cho 8 dư 5, loại.

  Vậy tồn tại một trong ba số x^2, y^2, z^2 chia hết cho 8, tức là một trong ba số x, y, z là bội của 4.

c) Một số chính phương chia cho 5 thì dư là 0 hoặc 1 hoặc 4.
Bạn đọc tự giải theo cách ở câu b).

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH FERMAT

A ĐỊNH LÍ NHỎ FERMAT

Với số nguyên a, ta chứng minh được $(a^3 - a) \vdots 3$, $(a^5 - a) \vdots 5$, $(a^7 - a) \vdots 7$, nhưng không có $(a^9 - a) \vdots 9$ (chẳng hạn $2^9 - 2 = 510$, không chia hết cho 9).

Nhà toán học Pháp *Pierre de Fermat* $(1601 - 1665)$ đã nêu lên mệnh đề sau, được gọi là *định lí nhỏ Fermat*:

Nếu p là một số nguyên tố và a là một số nguyên thì $a^p - a$ chia hết cho p.

Ta chứng minh định lí trên bằng cách cố định p và chứng minh bằng quy nạp theo số tự nhiên a (do $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$ nên nếu mệnh đề đúng với số dương a thì cũng đúng với số âm $(-a)$).

Trước hết, ta thấy mệnh đề đúng với $a = 0$ vì $0^p - 0$ chia hết cho p.

Giả sử mệnh đề đúng với $a = k$, tức là ta đã có $A_k = k^p - k$ chia hết cho p. Ta cần chứng minh rằng $A_{k+1} = (k+1)^p - (k+1)$ chia hết cho p.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} A_{k+1} - A_k &= [(k+1)^p - k - 1] - (k^p - k) \\ &= \left[k^p + pk^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2!}k^{p-2} + \ldots + \frac{p(p-1)}{2!}k^2 + pk + 1 - k - 1\right] - (k^p - k) \\ &= pk^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2!}k^{p-2} + \ldots + \frac{p(p-1)}{2!}k^2 + pk \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét dạng chung của các hệ số trong biểu thức (1), đó là các số nguyên có dạng

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!} \qquad (2)$$

Chú ý rằng số nguyên tố p lớn hơn k nên không rút gọn được p với một thừa số nào trong tích $k!$, chứng tỏ rằng biểu thức (2) chia hết cho p, do đó $A_{k+1} - A_k$ chia hết cho p.

Ta lại có A_k chia hết cho p theo giả thiết quy nạp. Vậy A_{k+1} chia hết cho p. Như thế mệnh đề trên đúng cho mọi số tự nhiên a.

Kết luận: Mệnh đề đúng với mọi số nguyên a.

Lưu ý. Định lí nhỏ Fermat còn được diễn đạt dưới dạng sau:

Nếu a là một số nguyên không chia hết cho số nguyên tố p thì $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p.

B ĐỊNH LÍ LỚN FERMAT

Ta biết có vô số bộ ba số nguyên dương thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$. Đương nhiên xuất hiện một câu hỏi: Có ba số nguyên dương nào thỏa mãn phương trình $x^3 + y^3 = z^3$ không?

Vào năm 1637, *Fermat* đã nêu lên mệnh đề sau, được gọi là *định lí lớn Fermat*:

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ với n là số nguyên lớn hơn 2 không có nghiệm nguyên dương.
Fermat đã viết vào lề cuốn *Số học* của *Diophante*, ở cạnh mục giải phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ những dòng chữ sau: "Không thể phân tích được một lập phương đúng thành tổng của hai lập phương, không thể phân tích được một lũy thừa bậc bốn thành tổng của hai lũy thừa bậc bốn và nói chung với bất cứ lũy thừa nào lớn hơn hai thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã tìm được cách chứng minh kì diệu mệnh đề này nhưng lề sách này quá chật nên không thể ghi lại được".
Năm 1670, sau khi *Fermat* mất 5 năm, con trai ông đã công bố mệnh đề trên.

C LỊCH SỬ VỀ CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ LỚN FERMAT

Người ta đã tìm thấy chứng minh của *Fermat* với $n = 3$ và $n = 4$, nhưng không biết được ông đã giải bài toán tổng quát thế nào. Liệu lời giải của ông có sai lầm hay không?
Chỉ biết rằng phải đến hơn một thế kỉ sau, năm 1753 trong thư gửi *Goldbach*, *Euler* mới chứng minh được bài toán với $n = 3$. Năm 1828 bằng những phát minh mới về lí thuyết số, *Dirichlet* chứng minh được với $n = 5$. Năm 1839 *Lamé* chứng minh được với $n = 7$. Sau đó khoảng năm 1850 *Kummer* chứng minh được với mọi $n \le 100$. Nhờ máy tính điện tử người ta đã chứng minh được bài toán với mọi $n \le 125000$ vào năm 1978 và với mọi $n \le 4000000$ vào năm 1992.
Phương trình $x^n + y^n = z^n$ được gọi là *phương trình Fermat*. Nó đã lôi cuốn các nhà toán học chuyên nghiệp và nghiệp dư suốt hơn ba thế kỉ. Trên con đường tìm cách giải phương trình đó, nhiều lí thuyết toán học mới đã được sáng tạo ra. Kể từ giữa thế kỉ XX, nhiều nhà toán học đã đạt được những kết quả quan trọng. Và để chứng minh định lí lớn Fermat, chỉ còn cần chứng minh giả thuyết do *Taniyama* nêu ra: Mọi đường cong elliptic đều là đường cong Weil.
Chúng ra tìm hiểu đôi chút điều này.
Ta xem mỗi nghiệm của phương trình là một điểm có tọa độ nguyên của một đường cong. Đường cong elliptic được *Taniyama* đưa ra năm 1955 trong một Hội nghị Quốc tế ở Nhật Bản, đó là đường cong cho bởi phương trình

$$y^2 = x^3 + mx^2 + nx + p$$

thỏa mãn điều kiện "không có điểm kì dị".
Nhà toán học Đức *Frey* là người đầu tiên gắn việc chứng minh định lí lớn Fermat với các đường cong elliptic: Giả sử định lí lớn Fermat không đúng thì tồn tại các số nguyên a, b, c khác 0 và số tự nhiên n sao cho $a^n + b^n = c^n$. Khi đó tồn tại một đường cong elliptic đặc biệt dạng Frey.
Năm 1986, *Ribet* chứng minh được rằng: Đường cong elliptic dạng Frey nếu tồn tại thì nó không phải là đường cong Weil.
Như thế, nếu định lí lớn Fermat không đúng thì tồn tại một đường cong elliptic mà không phải là đường cong Weil, trái với giả thuyết Taniyama. Điều đó có nghĩa là, nếu chứng minh được

giả thuyết Taniyama thì cũng chứng minh được định lí lớn Fermat.

Ngày 23 tháng 6 năm 1993, trong một Hội nghị Toán học Quốc tế ở Anh, nhà toán học Anh *Andrew Wiles*, sinh năm 1953, công bố chứng minh giả thuyết Taniyama cho các đường cong elliptic dạng Frey dày 200 trang, tức là đã chứng minh được định lí lớn Fermat.

Tháng 12 năm ấy, người ta tìm thấy một "lỗ hổng" trong chứng minh của *Wiles*. Tuy nhiên, các chuyên gia trong lĩnh vực này cho rằng con đường đi của *Wiles* là hợp lí, sai lầm của *Wiles* là có thể khắc phục được.

Đúng như vậy, một năm sau, tháng 10 năm 1994, *A. Wiles* cùng với *R. Taylor* công bố một bài báo dài 25 trang hoàn thiện cách chứng minh của *Wiles* trước đây.

Tháng 5 năm 2016, *Wiles* được nhận giải thưởng *Abel* (mang tên nhà toán học Na Uy *Henrik Abel*) với số tiền thưởng 700000 USD.

Việc *A. Wiles* chứng minh được định lí lớn Fermat, cũng như việc GS *Ngô Bảo Châu* chứng minh được bổ đề cơ bản của chương trình Langlanads (xem ở trang 185), cho thấy bộ óc của con người thật diệu kì. Bất cứ đỉnh cao trí tuệ nào, con người cũng có thể vươn tới. Không có bài toán nào mà con người không giải được, chỉ có sớm hay muộn mà thôi.

D CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ LỚN FERMAT VỚI N=4

Để chứng minh định lí lớn Fermat với $n = 4$ tức là chứng minh tổng của hai lũy thừa bậc bốn không bằng một lũy thừa bậc bốn, ta chỉ cần chứng minh tổng của hai lũy thừa bậc bốn không bằng một số chính phương, tức là chỉ cần chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên dương

$$x^4 + y^4 = z^2.$$

Chứng minh điều này ở bài tập 4.3 ở trang 178.

BÀI TẬP

Bài 4.1: Dùng định lí nhỏ Fermat, tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^7 + y^7 = 7z.$$

$$x^7 + y^7 = 7z \tag{1}$$

$x^7 + y^7$ chia hết cho số nguyên tố 7.

Theo định lí nhỏ Fermat: $(x^7 - x) \vdots 7$, $(y^7 - y) \vdots 7$.

Viết (1) dưới dạng $(x^7 - x) + (y^7 - y) + (x + y) = 7z$.

Ta có $(x + y) \vdots 7$. Đặt $x + y = 7k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Nghiệm $(x; y; z) = \left(t; 7k - t; \dfrac{t^7 + (7k - t)^7}{7}\right)$ $(t, k$ là các số nguyên tùy ý). (Dễ thấy biểu thức của z cho một số nguyên).

Bài 4.2:

a) Dùng định lí nhỏ Fermat chứng minh *Bổ đề: Nếu các số nguyên a và b có* a^2+b^2 *chia hết cho số nguyên tố p mà p có dạng* $4k+3$ $(k \in \mathbb{N})$ *thì a và b đều chia hết cho p.*

b) Dùng *Bổ đề* trên, chứng minh rằng phương trình $y^2 = x^3 + 7$ không có nghiệm nguyên.

a) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử một trong hai số a và b không chia hết cho p thì theo giả thiết số kia cũng không chia hết cho p.
Theo định lí nhỏ Fermat $(a^{p-1}-1) \vdots p$ và $(b^{p-1}-1) \vdots p$.
Suy ra $(a^{p-1}+b^{p-1}-2) \vdots p$. Do $p = 4k+3$ nên $(a^{4k+2}+b^{4k+2}-2) \vdots p$.
Ta có $a^{4k+2}+b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}$ nên chia hết cho a^2+b^2 mà a^2+b^2 chia hết cho p nên $2 \vdots p$. Do p là số nguyên tố nên $p=2$, trái với $p = 4k+3$. Bổ đề được chứng minh.

b) $y^2 = x^3+7 \quad (1) \Leftrightarrow y^2+1 = x^3+8 \quad (2)$.
Giả sử tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn (2). Xét hai trường hợp:

- Nếu x chẵn thì y lẻ. Khi đó vế trái của (2) chia cho 4 dư 2, còn vế phải chia hết cho 4, điều này không xảy ra.
- Nếu x lẻ, ta có $(2) \Leftrightarrow y^2+1 = (x+2)(x^2-2x+4)$.
  Ta thấy $x^2-2x+4 = (x-1)^2+3$ chia cho 4 dư 3, nên có ước nguyên tố p dạng $4k+3$. Do đó y^2+1 có ước nguyên tố p dạng $4k+3$.
  Theo bổ đề trên, $1 \vdots p$, điều này không xảy ra.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 4.3: Chứng minh rằng phương trình $x^4+y^4 = z^2$ không có nghiệm với x, y, z là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau.
Hướng dẫn: Dùng nguyên tắc cực hạn.
Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình đã cho có $x_0^4+y_0^4$ nhỏ nhất. Hãy chứng minh tồn tại nghiệm của phương trình là $(x_1; y_1; z_1)$ mà $x_1^4+y_1^4 < x_0^4+y_0^4$.
Sử dụng công thức nghiệm của phương trình Pythagore: Để các số x, y, z nguyên tố cùng nhau là nghiệm nguyên dương của phương trình Pythagore $x^2+y^2 = z^2$, điều kiện cần và đủ là

$$x = 2mn;\ y = m^2-n^2;\ z = m^2+n^2 \text{ (giả sử } x \text{ chẵn, } y \text{ lẻ)}$$

trong đó m và n là hai số nguyên dương tùy ý, nguyên tố cùng nhau và có tính chẵn lẻ khác nhau, $m > n$.

$x^4 + y^4 = z^2 \quad (1)$.

Giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm nguyên của phương trình (1) có $x_0^4 + y_0^4$ nhỏ nhất. Ta có $x_0^4 + y_0^4 = z_0^2$, trong đó ƯCLN$(x_0, y_0, z_0) = 1$.

Bộ ba số $(x_0^2; y_0^2; z_0)$ nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình Pythagore nên tồn tại các số nguyên dương m, n nguyên tố cùng nhau, có tính chẵn lẻ khác nhau, $m > n$ sao cho

$$\begin{cases} x_0^2 = 2mn & \text{(chẵn)} \\ y_0^2 = m^2 - n^2 & \text{(lẻ)} \\ z_0 = m^2 + n^2 & \text{(lẻ)} \end{cases}$$

Ta có $y_0^2 = m^2 - n^2$ nên $y_0^2 + n^2 = m^2$.

Vậy bộ ba số $(y_0; n; m)$ thỏa mãn phương trình Pythagore.

Do m, n nguyên tố cùng nhau nên y_0, n, m nguyên tố cùng nhau. Ở phương trình Pythagore trong hai số y_0 và n có một số chẵn, một số lẻ. Do y_0 lẻ nên n chẵn.

Bộ ba số $(y_0; n; m)$ nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình Pythagore nên tồn tại các số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau, chẵn lẻ khác nhau, $a > b$ sao cho $\begin{cases} y_0^2 = a^2 - b^2 & \text{(lẻ)} \\ n = 2ab & \text{(chẵn)} \\ m = a^2 + b^2 & \text{(lẻ).} \end{cases}$

Ta có $x_0^2 = 2mn = 2(a^2 + b^2).2ab = 4ab(a^2 + b^2)$.

Do đó $ab(a^2 + b^2)$ là số chính phương. Dễ dàng chứng minh được ab và $a^2 + b^2$ nguyên tố cùng nhau nên ab và $a^2 + b^2$ đều là số chính phương.

Ta lại có a và b nguyên tố cùng nhau nên a và b đều là số chính phương.

Vậy tồn tại các số nguyên dương x_1, y_1, z_1 sao cho $a = x_1^2$, $b = y_1^2$, $a^2 + b^2 = z_1^2$.

Suy ra $x^4 + y^4 = (x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = a^2 + b^2 = z_1^2$.

Do a, b nguyên tố cùng nhau nên x_1, y_1 nguyên tố cùng nhau, do đó x_1, y_1, z_1 nguyên tố cùng nhau.

Ta có $(x_0; y_0; z_0)$ và $(x_1; y_1; z_1)$ đều là nghiệm của phương trình (1).

Lại có $x_1^4 + y_1^4 = a^2 + b^2 = m < m^2 + n^2 = z_0 = x_0^4 + y_0^4$.

Ta đã giả sử $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của (1) mà $x_0^4 + y_0^4$ nhỏ nhất, ta lại có $(x_1; y_1; z_1)$ cũng là nghiệm của (1) mà $x_1^4 + y_1^4$ nhỏ hơn $x_0^4 + y_0^4$.

Điều trên không thể xảy ra, chứng tỏ phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương.

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH DIONPHANTE

Phương trình Diophante là phương trình có dạng

$$f(x,y,z,\ldots)=0,$$

trong đó vế trái là đa thức với hệ số nguyên và các ẩn $x,y,z,\ldots$ nhận các giá trị nguyên hoặc giá trị tự nhiên (số ẩn từ 2 trở lên).

Trong số 23 bài toán mà nhà toán học Đức *Hilbert* chọn ra để "gửi tới thế kỉ XX", có bài toán thứ mười: "Có một phương pháp nào mà nhờ đó, sau một số hữu hạn các phép toán, có thể khẳng định rằng một phương trình Diophante có nghiệm nguyên hay không?"

Năm 1970 nhà toán học trẻ người Nga là *Matiasevic* đã giải quyết được bài toán này. Câu trả lời là: Không tồn tại phương pháp chung để khẳng định được mọi phương trình Diophante cho trước có nghiệm nguyên hay không.

Diophante là nhà toán học Hy Lạp thế kỉ III, tác giả cuốn sách *Số học*. Chính tại bên lề của một trang trong cuốn sách này, *Fermat* đã ghi những dòng chữ nổi tiếng mở đầu cho một thời kì chứng minh định lí lớn Fermat.

Có thể hiểu thêm về tiểu sử *Diophante* qua bài thơ ghi trên mộ ông (xem bài tập dưới đây).

BÀI TẬP

Bài 5.1: Hỡi khách qua đường,
Cho hay *Diophante* thọ bao nhiêu tuổi?
Biết thời thơ ấu của ông chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời,
$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi,
Đến khi lập gia đình thì lại thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời.
5 năm nữa trôi qua,
Và một cậu con trai đã được sinh ra.
Nhưng số mệnh buộc con chỉ sống bằng nửa tuổi cha.
Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất.
Diophante thọ bao nhiêu, hãy tính cho ra
Gọi x là tuổi thọ của *Diophante*, ta có phương trình

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x \Leftrightarrow x=84.$$

Diophante thọ 84 tuổi.

Bài 5.2: Tìm các số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó bằng hai lần tích các chữ số của nó.

(Bài toán của *Diophante*)

Gọi số phải tìm là $10x+y$ với x,y là các số tự nhiên, $1 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$.
Ta có $10x+y=2xy \quad (1)$.

- *Cách 1.* (1)$\Leftrightarrow (2x-1)(y-5)=5$. Ta tìm được $(x;y)=(3;6)$. Số phải tìm là 36.

- *Cách 2.* Từ (1) ta có $10x=y(2x-1)$ nên $10x \vdots (2x-1)$. Ta lại có x và $2x-1$ nguyên tố cùng nhau nên $10 \vdots (2x-1)$. Do $2x-1$ là ước lẻ của 10 nên $2x-1 \in \{1;5\}$. Bạn đọc tự giải tiếp.

- *Cách 3* (Theo cách giải của *Diophante*). Từ (1) ta có $y \vdots 2x$. Đặt $y=2xn$ (n là số tự nhiên) ta được $5+n=2xn$ nên $5 \vdots n$. Do đó $n \in \{1;5\}$.

  - Với $n=1$ thì $x=3, y=6$.
  - Với $n=5$ thì $x=1, y=10$ (loại).

  Số phải tìm là 36.

Bài 5.3: Tìm ba số nguyên dương x,y,z biết rằng $x+y$, $y+z$, $x+y+z$ theo thứ tự là ba số chính phương liên tiếp, còn $x+z$ cũng là một số chính phương.

(Theo một bài toán của *Diophante*)

Theo đề bài ta có
$$\begin{cases} x+y=(a-1)^2 & (1) \\ y+z=a^2 & (2) \\ x+y+z=(a+1)^2 & (3) \\ x+z=b^2 & (4) \end{cases}$$
trong đó x,y,z,a,b là các số nguyên dương.
Từ (1), (2) và (3) ta tìm được $x=2a+1, y=a^2-4a, z=4a$. Thay vào (4) ta được $6a+1=b^2$ nên $a=\dfrac{b^2-1}{6}$.
Để $a \in \mathbb{N}^*$ thì $b=6k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Suy ra
$$a=2k(3k-1) \text{ hoặc } a=2k(3k+1).$$
Kết hợp với $a>4$ để $y>0$, ta tìm được nghiệm $(x;y)=(2a+1;a^2-4a;4a)$ trong đó $a=2k(3k-1)$, với $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$ hoặc $a=2k(3k+1), k \in \mathbb{N}^*$.

NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN CHƯA CÓ LỜI GIẢI

BÀI 1. CÒN NHIỀU PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN CHƯA GIẢI ĐƯỢC

Trong cuốn sách này, chúng ta đã giải khá nhiều phương trình nghiệm nguyên. Các phương trình này có thể do con người tự nghĩ ra, nhưng rất nhiều phương trình được đặt ra do nhu cầu nghiên cứu của nhiều ngành khoa học, trong đó còn nhiều phương trình chưa có lời giải.

A PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI HAI ẨN

a) Fecmat (Thế kỷ XVII) viết rằng ông đã chứng minh được phương trình

$$y^2 = x^3 - 2$$

chỉ có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(3; 5)$ và $(3; -5)$ nhưng người ta không tìm thấy cách chứng minh của ông.

Đến năm 1875, Peipin sử dụng kiến thức đại số cận đại mới chứng minh được khẳng định trên.

*) Với phương trình dạng

$$y^2 = x^3 - 999$$

năm 1986, R.P. Stanna đã chứng minh phương trình này có 12 nghiệm nguyên, ứng với x bằng

$$10; 12; 40; 147; 174; 22480.$$

*) Với dạng tổng quát

$$y^2 = x^3 + k; k \in \mathbb{Z}$$

Năm 1930, T. Neiker tìm được nghiệm với $k = 17$; năm 1963, W. Lungeh tìm được nghiệm với $k = -7$ và $k = -15$.

b) Với phương trình dạng

$$y^2 = x^3 - 7x + 10$$

năm 1953, A. Winman đưa ra 24 nghiệm nguyên; năm 1983, A. Bremne đã chứng minh được phương trình này các nghiệm nguyên ứng với x bằng

$$-1; -2; -3; 1; 2; 3; 5; 9; 13; 31; 41; 67; 302.$$

c) Năm 1982 do yêu cầu của kĩ thuật mã hóa, A.Bremne đã đề nghị tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y^2 = 4x^3 + 13.$$

Không lâu sau, Tôn Kỳ đã chứng minh phương trình đó có bốn nghiệm ứng với x bằng -1 và 3.

d) Năm 1961, L. J. Mordell khi nghiên cứu về tổ hợp số đã đề nghị tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$6y^2 = (x+1)(x^2 - x + 6)$$

và chỉ ra 11 nghiệm ứng với x bằng $-1; 0; 2; 7; 15; 74$.

Năm 1987, Lã Minh tìm thêm được hai nghiệm nữa ứng với $x = 767$.

B PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN VỚI HAI ẨN

Từ thế kỷ XVIII, người ta đã biết phương trình

$$x^2 = 2y^4 - 1$$

có hai nghiệm nguyên dương $(x; y)$ là $(1; 1)$ và $(239; 13)$ nhưng không tìm thấy chứng minh. Năm 1942, W. Ljunggren dùng lí thuyết số hiện đại khá phức tạp đã chứng minh được điều trên.

C PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO VỚI HAI ẨN

*) Từ thế kỷ XIX, người ta đã chứng minh được phương trình $x^m - y^2 = 1$ với m là số nguyên tố không có nghiệm nguyên dương.

*) Từ thế kỷ XVIII, Euler đã chứng minh được phương trình

$$x^2 - y^3 = 1$$

chỉ có một nghiệm nguyên dương $(x; y)$ là $(3; 2)$.

*) Năm 1962, Kha Triệu đã chứng minh được phương trình $x^2 - y^n = 1$ với n là số nguyên tố khác 3, không có nghiệm nguyên dương.

*) Năm 1842, E. Catalan đưa ra phỏng đoán rằng phương trình $x^m - y^n = 1$ với $m > 1, n > 1, x > y$ chỉ có nghiệm nguyên dương khi phương trình đó có dạng

$$x^2 - y^3 = 1$$

.

D PHƯƠNG TRÌNH VỚI BA ẨN TRỞ LÊN

a) Euler đã đưa ra phỏng đoán rằng phương trình

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4$$

không có nghiệm nguyên dương.
Năm 1967, Lander đã chứng minh được phỏng đoán đó đúng với mọi $t \leq 220000$.
Sau đó N. Elkies và R.Frye đã tìm được nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $(x; y; z; t)$ của phương trình trên là

$$(95800; 217519; 414560; 422481).$$

b) Năm 1911, Noli chứng minh được phương trình

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = u^4$$

có nghiệm nguyên dương, chẳng hạn

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4.$$

c) Năm 1966, Lander chứng minh được phương trình

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = u^5$$

có nghiệm nguyên dương, chẳng hạn

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

(trước đây Euler đã phỏng đoán phương trình này vô nghiệm.)

d) Năm 1974, L.J.Mordell nêu câu hỏi: Phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{xyzt} = 0$$

có nghiệm nguyên hay không?
Người ta đã chứng minh được phương trình trên có vô số nghiệm nguyên nhưng vẫn chưa tìm ra được mọi nghiệm nguyên của phương trình này.

BÀI 2. NHỮNG BƯỚC ĐỘT PHÁ

Trong nghiên cứu tìm nghiệm nguyên của một phương trình, người ta đã tìm cách sử dụng nhiều công cụ mới.

Trước hết người ta tìm cách qui bài toán số học về bài toán hình học trong hệ tọa độ. Chẳng hạn tập nghiệm của phương trình $y = 2x + 1$ là một đường thẳng, tập nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 = 5$ là một đường tròn. Tuy nhiên, ngôn ngữ hình học chưa cho phép phân biệt được những điểm có tọa độ nguyên và những điểm có tọa độ bất kỳ nên chưa mô tả được nghiệm nguyên của phương trình *Diophante* một cách thuận tiện.

Đến thế kỷ XIX, nhà toán học Pháp gốc Đức *Alecxander Grothendieck* đã gán được *Biểu diễn Galois* với bất kỳ một phương trình *Diophante* nào và đã cho phép dịch ngược bài toán số học - hình học sang bài toán thuần túy đại số. Năm 1966, ông đã được nhận giải thưởng toán học danh giá nhất thế giới (cho các nhà toán học không quá 40 tuổi): Huy chương Fields mang tên nhà toán học người Canada *John Charles Fields* (1863 -1932).

Từ đó, nhiều nhà toán học đã tìm cách chuyển đổi từ ngôn ngữ đại số sang ngôn ngữ giải tích, vì các công cụ giải tích với các biến và các hàm cho phép ta biết một cách hoàn hảo cấu trúc của đối tượng trong đại số đó.

Nhà toán học Áo *Emil Artin* đã thực hiện được một phần của sự phiên dịch đó, ông đã lập được sự tương ứng giữa *Biểu diễn Galois giao hoán* với các hàm tuần hoàn đặc biệt, nhưng vẫn chưa tìm được một công thức chung để lập sự tương ứng giữa một hàm giải tích với các *Biểu diễn Galois không giao hoán*, mà các biểu diễn này có nhiều hơn và quan trong hơn.

Năm 1967, nhà toán học Mỹ gốc Canada *Robert Langlands* (sinh năm 1930) đã đưa ra một phương pháp chung xác lập sự tương ứng đó, ông nêu ra một tập hợp các hàm điều hòa đặc biệt có tương ứng 1 - 1 với các *Biểu diễn Galois không giao hoán*. Năm 1979, bằng trực giác và tài năng lỗi lạc ông đã đề xuất một chương trình toán học đồ sộ, gọi là *Chương trình Langlands* có mục đích tầm xa là thống nhất lí thuyết số, hình học - đại số và lí thuyết biểu diễn, tức là tạo ra nhịp cầu nối giữa số học, hình học, đại số và giải tích , lập một cuốn "từ điển" giữa các ngôn ngữ toán học khác nhau.

Việc *A.Wiles* chứng minh được định lí lớn Fermat năm 1994 (xem ở trang 176) là một thí dụ chứng tỏ hướng đi đúng của *Chương trình Langlands*.

Năm 2000, nhà toán học Pháp *Laurent Lafforgue* (sinh năm 1966) đã giải quyết được một phần của *Chương trình Langlands* khi đã thống nhất được các ngôn ngữ đại số và giải tích, do đó năm 2002 ông được nhận huy chương Fields.

Trong *Chương trình Langlands* có một *Bổ đề cơ bản* chưa được chứng minh. Suốt 30 năm, nhiều nhà khoa học, trong đó có *Langlands* tìm cách chứng minh bổ đề đó nhưng vẫn bó tay. Năm 2004, nhà toán học Pháp *Gérard Laumon* và nhà toán học Việt Nam *Ngô Bảo Châu* (sinh năm 1972) đã chứng minh được các bổ đề đó đúng với các *Nhóm unita*. Bốn năm sau Giáo sư *Ngô*

Bảo Châu đã chứng minh trọn vẹn bổ đề cơ bản đó trong một công trình dày 169 trang, và được nhận Huy chương Fields đúng vào ngày $19-8-2010$. Việt Nam trở thành nước thứ 11 trên thế giới có công dân được nhận Huy chương này.
Một loạt công trình toán học trước đây đã được xây dựng trên *Bổ đề cơ bản* trong *Chương trình Langlands*, đến nay chính thức công nhận thành công của Giáo sư *Ngô Bảo Châu* có thể ví như đã bắc được cây cầu đến một thành phố mà nếu không có cây cầu ấy thì thành phố ấy chỉ là một thành phố ảo.
Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands* cũng giúp cho việc tìm nghiệm nguyên của một phương trình bước sang một giai đoạn mới.

BÀI TẬP

Bài 2.1: Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{xyzt}=0$$

có vô số nghiệm nguyên.
Chọn $x=1, y=-1, z=a, t=1-a$ với a là số nguyên tùy ý khác 0 và khác 1. Điều đó chứng tỏ rằng phương trình đã cho có vô số nghiệm nguyên.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN QUA CÁC KỲ THI

BÀI 1. TRONG CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10

Bài 1.1 (Đề thi vào chuyên 10, Sở giáo dục Hà Nội, 2017):

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^3+y^3-9xy=0$.

Ta có

$$\begin{aligned} x^3+y^3-9xy=0 &\Leftrightarrow x^3+y^3+27-9xy=27 \\ &\Leftrightarrow (x+y+3)(x^2+y^2+9-3x-3y-xy)=27 \\ &\Leftrightarrow (x+y+3)\left[(x+y)^2-3(x+y)-3xy+9\right]=27. \qquad (*) \end{aligned}$$

Vì vậy $x+y+3 \mid 27$. Mà $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên $x+y+3\geq 5$.

Vì vậy ta có $\left[\begin{array}{l} x+y+3=9 \\ x+y+3=27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=6 \\ x+y=24 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: Nếu $x+y=6$ thay vào $(*)$ suy ra $xy=8$.

Do đó x,y là nghiệm của phương trình $t^2-6t+8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y)=(2,4) \\ (x,y)=(4,2). \end{array}\right.$

Trường hợp 2: Nếu $x+y=24$ thay vào $(*)$ ta có $xy=\dfrac{512}{3}$ (loại).

Bài 1.2 (Đề thi vào 10 chuyên Hùng Vương, Gia Lai, 2017):

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2-24n-15$ là một số chính phương.

Giả sử $n^2-24n-15$ là một số chính phương. Khi đó tồn tại số tự nhiên k sao cho

$$n^2-24n-15=k^2 \Leftrightarrow (n+k-12)(n-k-12)=159.$$

Do $159=53.3$ và $n+k-12>n-k-12$ nên ta xét các trường hợp sau

$n+k-12$	53	-3	159	-1
$n-k-12$	3	-53	1	-159
n	40	-16	92	-168
k	25	25	79	79

Vậy có hai số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu là $n = 92, n = 40$.

Bài 1.3 (Đề thi vào 10, Chuyên Toán Hùng Vương Phú Thọ, 2017):

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^3 + 2x^2y + x^2 + 2xy = x + 10$.

Ta có:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2x^2(x+y) + 2x(x+y) - (x^2+x) = 10\\ &\Leftrightarrow 2(x+y)(x^2+x) - (x^2+x) = 10\\ &\Leftrightarrow (x^2+x)\left[2(x+y)-1\right] = 10.\end{aligned}$$

Nhận xét:

+) $10 = 1.10 = 2.5 = (-1)(-10) = (-2)(-5)$;

+) $x^2 + x = x(x+1)$ là số chẵn; $2(x+y) - 1$ là số lẻ;

+) $x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} > -1 \Rightarrow x^2 + x \geq 0$.

Từ các nhận xét trên ta thấy chỉ có các trường hợp (TH) sau:

$\begin{cases} x^2 + x = 10 \\ 2(x+y) - 1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ 2(x+y) - 1 = 5 \end{cases}$.

*TH1 $\begin{cases} x^2 + x = 10 \\ 2(x+y) - 1 = 1 \end{cases}$.

Phương trình $x^2 + x = 10$ không có nghiệm nguyên.

*TH2 $\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ 2(x+y) - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy có hai bộ số $(x; y)$ thỏa mãn là: $(1; 2)$, $(-2; 5)$.

Bài 1.4 (Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hưng Yên, 2017):

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $y^3 - 2x - 2 = x(x+1)^2$.

Ta có $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$. Rõ ràng $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8} > 0$. Do đó $y^3 > x^3$.

Mặt khác, xét $|x| > 1$.

Khi đó $y^3 = (x+1)^3 + 1 - x^2 \leq (x+1)^3$, mẫu thuẫn vì $x^3 < y^3 < (x+1)^3$.

Vậy $|x| \leq 1$. Khi đó $x = \pm 1$ hoặc $x = 0$.

TH1. $x = -1$. Thay vào pt được $y = 1$.

TH2. $x = 1$. Thay vào pt được $y = 2$.

TH3. $x = 0$. Thay vào pt được $y = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Z}$, loại.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $(x;y)$ là $(-1;1),(1;2)$.

Bài 1.5 (Đề thi vào 10, Chuyên KHTN Hà Nội, vòng 1, 2017):

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x,y thỏa mãn đẳng thức:

$$12x^2+26xy+15y^2=4617.$$

Đẳng thức đã cho được viết lại:

$$\begin{aligned}&x^2+4y^2+4xy+11x^2+11y^2+22xy=4617\\ \Leftrightarrow&(x+2y)^2+11(x+y)^2=4617. \qquad (1)\end{aligned}$$

Ta có $VT(1)\equiv 0,1,3,5,9 (\text{mod } 11)$

mà $4617\equiv 8 (\text{mod } 11)$

Vậy không có số nguyên x,y nào thỏa mãn đẳng thức đã cho.

Bài 1.6 (Thi vào 10, Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, 2017):

Cho biểu thức

$$A=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

a) Rút gọn biểu thức A.

$$\begin{aligned}A&=\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{x}+1}:\frac{1}{\sqrt{x}-2}\\
&=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.\end{aligned}$$

b) $A = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}$. Để A nhận giá trị nguyên khi $\dfrac{-3}{\sqrt{x}+1}$ đạt giá trị nguyên.
Hay $-3 ⋮ (\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ là ước của -3.
Nên $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn).
$\sqrt{x}+1=-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-2$ (không thỏa mãn).
$\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn).
$\sqrt{x}+1=-3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-4<0$ (không thỏa mãn).
Vậy $x=0$ hoặc $x=4$ thì A nhận giá trị nguyên.

Bài 1.7 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị, 2017):

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $7(x+y) = 3\left(x^2+xy+y^2\right)$.
Ta có $7(x+y) = 3(x^2+xy+y^2) \Rightarrow 3 \mid x+y$. Từ giả thiết suy ra $0 \le x+y \le 3$ do đó $x+y=0$ hoặc $x+y=3$.

- Với $x+y=0$ ta được $x=y=0$.
- Với $x+y=3$ suy ra $y=3-x$ thay vào phương trình ta được $x^2-3x+2=0$. Giải ra ta được $x=1, x=2$.

Vậy ta được 3 nghiệm nguyên $(0;0)$, $(1;2)$, $(2;1)$.

Bài 1.8 (Đề thi vào Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, 2017):

Tìm các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy-4x+8y+7=0$.
Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$x^2-2(y+2)x+2y^2+8y+7=0. \tag{1}$$

Vì (1) có nghiệm nguyên x nên $\Delta' = -y^2-4y-3$ là số chính phương.
Ta có $-y^2-4y-3 \ge 0$ khi $-3 \le y \le -1$, mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-3;\ -2;\ -1\}$.
Từ đây ta tìm được các cặp nghiệm là $(x;\ y) \in \{(-1;\ -3),\ (\pm1;\ -2),\ (1;\ -1)\}$.

Bài 1.9 (Đề thi vào 10, Chuyên Sư phạm Hà Nội vòng 1, 2017):

a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2=b^3, c^3=d^4$ và $a=d+98$.

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho tron 4 số $x-\sqrt{2};\ x^2+2\sqrt{2};\ x-\dfrac{1}{x};\ x+\dfrac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.

a) Giả sử p là ước nguyên tố của a, vậy dễ thấy p cũng sẽ là ước nguyên tố của b, Vậy ta có $a^2 ⋮ p^3$ vậy trong biểu diễn ước nguyên tố của a thì số mũ của p phải chia hết cho 3, từ đó

$a = x^3, b = x^2, x \in \mathbb{N}$. Tương tự ta có $d = y^3, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $a = d + 98 \Leftrightarrow x^3 = y^3 + 98 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 98$, ta luôn có $(x-y) \leq (x-y)^2 < x^2+xy+y^2$ vậy ta sẽ có 2 trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = 98 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y^2 + 3y - 97 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \notin \mathbb{Z}$(Loại)

TH2: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y+2)^2 + (y+2)y + y^2 = 49 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 + 2y - 15 = 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ \left[\begin{array}{l} y = -5 < 0 (\text{Loại}) \\ y = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy $a = 5^3 = 125; d = 3^3 = 27; b = 25; c = 81$.

b) Nếu $x - \dfrac{1}{x}; x + \dfrac{1}{x}$ là nguyên ta có $x - \dfrac{1}{x} + x + \dfrac{1}{x} = 2x \in \mathbb{Q}$ suy ra $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2}$ đều không phải là số hữu tỷ do vậy một trong hai số $x - \dfrac{1}{x}; x + \dfrac{1}{x}$ không là số nguyên, khi đó $x - \sqrt{2}; x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - \sqrt{2} + x^2 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

Đặt $x - \sqrt{2} = a; (a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2} = \left(a + \sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} = a^2 + 2 + 2\sqrt{2}(a+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\sqrt{2}(a+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Thử lại đúng vậy $x = \sqrt{2} - 1$.

Bài 1.10 (Thi vào 10, Chuyên Bạc Liêu, 2017):

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy.$$

Cách 1. Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2xy + y^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60 \\ \Leftrightarrow & (x-y)^2 = 5(-x^2y^2 + 7xy - 12). \end{aligned} \quad (*)$$

Vì $(x-y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ nên $-x^2y^2 + 7xy - 12 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. (1)

Đặt $t = xy \ (t \in \mathbb{Z})$. Từ (1) ta có $-t^2 + 7t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 4$.

Mà $t \in \mathbb{Z}$ nên ta có $t = 3 \vee t = 4$ hay $xy = 3 \vee xy = 4$.

Khi đó $5(-x^2y^2 + 7xy - 12) = 0$ nên từ $(*)$ ta cũng có $(x-y)^2 = 0$ hay $x = y$.

- $\begin{cases} xy = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x = y \end{cases}$ (không tồn tại $x \in \mathbb{N}$) .

- $\begin{cases} xy = 4 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$.

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình trên là: $(2; 2), (-2; -2)$.

Cách 2. Xét trường hợp $x, y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm x^2, y^2 ta có:

$$\begin{aligned} & 37xy \geqslant 2xy + 5x^2y^2 + 60 \\ \Leftrightarrow\ & 35xy \geqslant 5x^2y^2 + 60 \\ \Leftrightarrow\ & 7xy \geqslant x^2y^2 + 12 \\ \Rightarrow\ & 8xy \geqslant x^2y^2 + 12 \\ \Leftrightarrow\ & 4 \geqslant (xy - 4)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \geqslant xy - 4 \geqslant -2 \\ \Leftrightarrow\ & 6 \geqslant xy \geqslant 2. \end{aligned}$$

Suy ra, $xy \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Mặt khác, phương trình ban đầu tương đương với:

$$(x + y)^2 = 39xy - 5x^2y^2 - 60. \qquad (*)$$

Ta xét các trường hợp:

- TH1: $xy = 2$. Từ $(*)$ suy ra $(x + y)^2 = -6$ (vô lí).
- TH2: $xy = 3$. Từ $(*)$ suy ra $(x + y)^2 = 12$ (loại vì $(x + y)^2$ là số chính phương).
- TH3: $xy = 4$. Từ $(*)$ suy ra $(x + y)^2 = 16$. Giải ra ta được $x = y = 2$.
- TH4: $xy = 5$. Từ $(*)$ suy ra $(x + y)^2 = 10$ (loại vì $(x + y)^2$ là số chính phương).
- TH5: $xy = 6$. Từ $(*)$ suy ra $(x + y)^2 = -6$ (vô lí).

Thử lại ta thấy $(x; y) = (2; 2)$ là nghiệm của phương trình.

Do xy và $(-x).(-y)$ có vai trò như nhau trong phương trình ban đầu nên nghiệm của phương trình là $(2; 2), (-2; -2)$.

Bài 1.11 (Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bình Dương, 2017):

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn: $x^2 - y^2 = xy + 8$.

$x^2 - y^2 = xy + 8 \Rightarrow x^2 - xy - (y^2 + 6) = 0 \Rightarrow \Delta = y^2 + 4(y^2 + 8) = 5y^2 + 32$. Để (x, y) là cặp số nguyên suy ra $\Delta = a^2$. a^2 là số chính phương nên chia cho 5 dư $0, 1, 4$ mà theo Δ, a^2 chia 5 dư 2. Vậy không có cặp số nào thoả mãn.

Bài 1.12 (Đề thi vào 10 Chuyên, Sở giáo dục Bình Phước, 2017):

Chứng minh biểu thức $S = n^2(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) \\ &= n[(n^2 - 1)(n^2 + 6) + 5n(n^2 - 1)] \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Ta có S là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp chia cho 5! nên chia hết cho 120.

Bài 1.13 (Đề thi vào 10, Chuyên Đắk Lắk, 2017):

1. Tìm các số nguyên tố p sao cho $13p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.
2. Tìm hai số x, y nguyên dương sao cho $(x+2)^2 - 6(y-1)^2 + xy = 24$.

1. Giả sử $13p + 1 = a^3$ $(a \in \mathbb{N}, a \geq 3)$.
   Phương trình $\Leftrightarrow 13p = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$.
   Do 13 và p đều là các số nguyên tố, nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:
   $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 1 = 13 \\ a^2 + a + 1 = p \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 = p \\ a^2 + a + 1 = 13 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 14 \\ p = 211 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 = p \\ (a-3)(a+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ a = 3 \end{cases} \end{array}\right..$$
   Vậy $p = 2$ hoặc $p = 211$.

2. Ta có:
   $(x+2)^2 - 6(y-1)^2 + xy = 24 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 6y^2 + 12y + xy = 26$
   $\Leftrightarrow \left(x^2 - 2xy + 4x\right) + \left(3xy - 6y^2 + 12y\right) = 26 \Leftrightarrow x(x - 2y + 4) + 3y(x - 2y + 4) = 26$
   $\Leftrightarrow (x - 2y + 4)(x + 3y) = 2.13 = 1.26$
   Vì x, y nguyên dương do đó $x + 3y$ nguyên dương nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

- $\begin{cases} x+3y=1 \\ x-2y+4=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ x-2y=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{68}{5} \\ y=-\dfrac{21}{5} \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} x+3y=26 \\ x-2y+4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=26 \\ x-2y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{43}{5} \\ y=\dfrac{29}{5} \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} x+3y=2 \\ x-2y+4=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ x-2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{31}{5} \\ y=\dfrac{7}{5} \end{cases}$ (loại).
- $\begin{cases} x+3y=13 \\ x-2y+4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=13 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ (nhận).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất: $(x;y)=(4;3)$.

Bài 1.14 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi, 2017):

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện

$$2x^2+4y^2-4xy+2x+1=2017.$$

Ta có:

$$2x^2+4y^2-4xy+2x+1=2017 \Leftrightarrow (x-2y)^2+(x+1)^2=2017.$$

Ta có $2017=9^2+44^2$. Như vậy có các trường hợp sau:

$x-2y$	9	9	-9	-9	44	44	-44	-44
$x+1$	44	-44	44	-44	9	-9	9	-9
x	43	-45	43	-45	8	-10	8	-10
y	17	-27	26	-18	-18	-27	26	17

Bài 1.15 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng, 2017):

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $5^x.3^y+1=z(3z+2)$.

Ta có $5^x.3^y=(z+1)(3z-1)$, mà $3(z+1)-(3z-1)=4 \Rightarrow (z+1),(3z-1)$ là 2 số nguyên dương lớn hơn 1 và không có ước chung lẻ khác 1.

Lại có $(3z-1)$ không chia hết cho 3 nên ta có $3z-1=5^x$ và $z+1=3^y$ (do 3 và 5 là nguyên tố).

Khử z hai phương trình trên ta được: $3^{y+1}=4+5^x$. (1)

Từ (1) suy ra 3^{y+1} chia 4 dư 1 (vì 5^x chia cho 4 dư 1). (2)

Nếu $y+1$ là số lẻ thì $y=2k$ (k nguyên dương), suy ra $3^{y+1}=3^{2k+1}=3.9^k$. Do đó 3^{y+1} chia cho 4 dư 3. Điều này mâu thuẫn với (2) nên $y+1$ phải là số chẵn, từ đó $y+1=2h$ với h là số nguyên dương. Từ (1) ta có $(3^h-2)(3^h+2)=5^x$. Mà $(3^h+2)-(3^h-2)=4$ nên $(3^h-2),(3^h+2)$ không có ước chung lẻ khác 1.
Lại có $3^h+2>3^h-2\geq 1$ nên $3^h-2=1$ (do 5 là số nguyên tố). Từ đó suy ra $h=1\Rightarrow y=1$.
Từ (1) suy ra $x=1$ và $z=2$. Vậy $(x,y,z)=(1,1,2)$.

Bài 1.16 (Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, 2017):

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+5y^2-4xy+4x-4y+3=0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $(x,\ y)$ thỏa mãn: x^2+3y và y^2+3x là số chính phương.

a) Ta viết lại phương trình như sau

$$x^2+4(1-y)x+5y^2-4y+3=0. \qquad (*)$$

Vì (*) có nghiệm x nê $\Delta'=5-(y+2)^2\geq 0\Leftrightarrow (y+2)^2\leq 5$.
Do y nguyên nên $y\in\{0;-1;-2;-3;-4\}$.

+) Với $y=0$ thay vào (*) ta được: $x^2+4x+3=0\Leftrightarrow x=-1;\ x=-3$.

+) Với $y=-1$ thay vào (*) ta được: $x^2+8x+12=0\Leftrightarrow x=-6;\ x=-2$.

+) Với $y=-2$ thay vào (*) ta được: $x^2+12x+31=0\Leftrightarrow x=-6\pm\sqrt{5}$ (loại).

+) Với $y=-3$ thay vào (*) ta được: $x^2+16x+60=0\Leftrightarrow x=-10;\ x=-6$.

+) Với $y=-4$ thay vào (*) ta được: $x^2+20x+99=0\Leftrightarrow x=-11;\ x=-9$.

Vậy phương trình có các cặp nghiệm nguyên là:

$$(-1;\ 0),\ (-3;\ 0),\ (-6;\ -1),\ (-2;\ -1),\ (-10;\ -3),\ (-6;\ -3),\ (-9;\ -4),\ (-11;\ -4).$$

b) Nếu $x=y$ thì $x^2+3y=y^2+3x=x^2+3x$. Đặt $x^2+3x=a^2$ với $x,\ a\in\mathbb{N}*$.
Ta có:

$$4x^2+12x-4a^2=0\Leftrightarrow (2x+3)^2-(2a)^2=9\Leftrightarrow (2x+3-2a)(2x+3+2a)=9=1\cdot 9.$$

Do $2x+3-2a<2x+3+2a$ nên ta có

$$\begin{cases}2x+3-2a=1\\ 2x+3+2a=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ a=2\end{cases}.$$

Suy ra $x = y = 1$ thỏa mãn.
Nếu $x \neq y$, do vai trò của x, y như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x < y$.
Khi đó $y^2 < y^2 + 3x < y^2 + 3y < (y+2)^2$.
Do x, y nguyên dương suy ra

$$y^2 + 3x = (y+1)^2 \Leftrightarrow y^2 + 3x = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3x-1}{2}$$

Ta có: $x^2 + 3y = \dfrac{2x^2 + 9x - 3}{2}$. Đặt $\dfrac{2x^2 + 9x - 3}{2} = b^2$ với x, $b \in \mathbb{N}*$. Ta có

$$\begin{aligned} 2x^2 + 9x - 3 = 2b^2 &\Leftrightarrow 16x^2 + 72x - 24 - 16b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (4x+9)^2 - (4b)^2 = 105 \\ &\Leftrightarrow (4x+9-4b)(4x+9+4b) = 105 = 1.105 = 3.35 = 5.21 = 7.15. \end{aligned}$$

Vì $4x + 9 - 4b < 4x + 9 + 4b$ nên có các trường hợp sau:

+) $\begin{cases} 4x+9-4b = 1 \\ 4x+9+4b = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \Rightarrow y = 16 \\ b = 13 \end{cases}$ (thỏa mãn).

+) $\begin{cases} 4x+9-4b = 3 \\ 4x+9+4b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ 2b = 2x+3 \end{cases}$ (loại).

+) $\begin{cases} 4x+9-4b = 5 \\ 4x+9+4b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ (loại).

+) $\begin{cases} 4x+9-4b = 7 \\ 4x+9+4b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ 2b = 2x+1 \end{cases}$ (loại).

Vậy các số nguyên dương $(x;\ y)$ thỏa mãn là $(1;\ 1)$, $(11;\ 16)$, $(16;\ 11)$.

Bài 1.17 (Đề thi vào 10, Chuyên Tiền Giang, 2017):

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + p + 6$ là một số chính phương.
Vì $p^2 + p + 6$ là số chính phương nên $p^2 + p + 6 = k^2$ (k nguyên dương).
Ta có $p^2 + p + 6 = k^2 \Rightarrow 4p^2 + 4p + 24 = 4k^2 \Rightarrow (2k)^2 - (2p+1)^2 = 23$.
Suy ra $(2k + 2p + 1)(2k - 2p - 1) = 23$.
Vì $2k + 2p + 1 > 2k - 2p - 1$ nên $\begin{cases} 2k + 2p + 1 = 23 \\ 2k - 2p - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 6 \\ p = 5. \end{cases}$
Vậy $p = 5$ thì $p^2 + p + 6$ là số chính phương.

Bài 1.18 (Đề thi vào 10, SoGiaoDucHaNoi-ChuyenTin, 2017):

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$ và $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 13$.

Ta có

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x^2+2y^2-z^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y-2 & (1) \\ 3x^2+2y^2-z^2=13. & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được:
$3x^2+2y^2-(x+y-2)^2=13$
$\Leftrightarrow 2x^2+y^2-2xy+4x+4y-17=0$
$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x+2)^2=21-4y$
Vì x,y,z là số nguyên dương nên $(x-y)^2 \geq 0$ và $(x+2)^2 \geq (1+2)^2=9$
Suy ra $VT \geq 9 \Rightarrow 21-4y \geq 9 \Rightarrow 3 \geq y \geq 1$
Với $y=3$ ta có: $2x^2+9-6x+4x+12-17=0 \Leftrightarrow 2x^2-2x+4=0$ (vô nghiệm)
Với $y=2$ ta có: $2x^2+4-4x+4x+8-17=0 \Leftrightarrow 2x^2-5=0$ (loại)
Với $y=1$ ta có:

$$2x^2+1-2x+4x+4-17=0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow z=1.$$

Vậy $x=2; y=1; z=1$ thỏa yêu cầu đề bài.

Bài 1.19 (Đề thi vào 10, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng năm 2017):

Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z sao cho $x^{16}+y^{16}+2017=z^{16}$.
Giả sử tồn tại các số tự nhiên x, y, z thoả mãn bài toán.

- Trường hợp 1: z là số chẵn.
  Khi đó x, y khác tính chẵn lẻ. Ta có thể coi x lẻ, y chẵn. Suy ra

  $$x^{16}+2017 \equiv z^{16}-y^{16} \equiv 0 \pmod{2^{16}} \Rightarrow x^{16}+2017 \equiv 0 \pmod{64}.$$

  Vì x lẻ nên $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, do đó $x^{16} \equiv 1 \pmod{64}$. Suy ra $x^{16}+2017 \equiv 34 \pmod{64}$. Ta gặp mâu thuẫn.

- Trường hợp 2: z là số lẻ.
  Khi đó x, y cùng tính chẵn lẻ. Nếu x, y cùng lẻ thì

  $$1 \equiv z^{16} \equiv x^{16}+y^{16}+2017 \equiv 2019 \pmod{64}.$$

  hay $64 \mid 2018$. Vô lí.
  Do đó x, y cùng chẵn. Suy ra

  $$1 \equiv z^{16} \equiv x^{16}+y^{16}+2017 \equiv 2017 \pmod{64}.$$

  hay $64 \mid 2016$. Vô lí.

Vậy không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thoả mãn bài toán.

Bài 1.20 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long, 2017):

Tìm tất cả số nguyên x sao cho $2x^2 + x - 2$ chia hết cho $x^2 + 1$.

Ta có: $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+1} = 2 + \dfrac{x-4}{x^2+1}$

Xét $x = 4 \Rightarrow 2x^2 + x - 2$ chia hết cho $x^2 + 1$

Xét $x \neq 4$ để $(x-4) \vdots (x^2+1) \Rightarrow |x-4| \geq x^2 + 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4 \geq x^2+1 \\ x-4 \leq -x^2-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+5 \leq 0\,(1) \\ x^2+x-3 \leq 0\,(2) \end{array}\right.$

Ta nhận thấy (1) vô nghiệm còn (2) kết hợp với điều kiện x là số nguyên suy ra $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$

Thử lại ta nhận giá trị $x = 0$.

Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì $2x^2 + x - 6$ chia hết cho $x^2 + 1$

Bài 1.21 (Đề thi vào 10, Chuyên Vĩnh Phúc Vòng 2, 2017):

Cho phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \tag{1}$$

Mỗi bộ số $(x; y; z)$ trong đó x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn (1) được gọi là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương có dạng $(x; y; y)$ của phương trình (1).

b) Chứng minh rằng tồn tại nghiệm nguyên dương $(a; b; c)$ của phương trình (1) và thỏa mãn điều kiện $\min\{a; b; c\} > 2017$. Trong đó kí hiệu $\min\{a; b; c\}$ là số nhỏ nhất trong các số $a; b; c$.

a) Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x; y; y)$. Khi đó ta có
$x^2 + 2y^2 = 3xy^2$ từ đó x chia hết cho y hay $x = ty$ từ đó hay vào phương trình ta có
$t^2 + 2 = 3ty$ từ đó 2 chia hết cho t tức là $t \in \{1; 2\}$.
Với $t = 1$ thì $y = 1; x = 1$
Với $t = 2$ thì $y = 1; x = 2$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương có dạng $(x; y; y)$ đó là $(1; 1; 1); (2; 1; 1)$.

b) Dễ thấy (1;2;5) là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.
Gọi nghiệm đầu tiên đó có dạng là $(a; b; c)$ ta sẽ xây dựng nên nghiệm mà giá trị $\min\{a; b; c\}$ là cao hơn. Thật vậy ta tìm nghiệm ở dạng $(a + d; b; c)$ tức là d thỏa mãn:

$$(a+d)^2 + b^2 + c^2 = 3(a+d)bc \Rightarrow d = 3bc - 2a \in \mathbb{N}^*.$$

Ta chọn được d khi đó ta sẽ có nghiệm $(a';b;c)$ mà $\min\{a';b;c\} > \min\{a;b;c\}$. Lặp lại quá trình này không quá 2017 lần ta có sẽ tìm được một nghiệm của phương trình thỏa mãn $\min\{a;b;c\} > 2017$.

Bài 1.22 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Vĩnh Long, 2017):

a) Tìm tất cả số nguyên x sao cho $2x^2+x-2$ chia hết cho x^2+1.

b) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thoả $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}$.

a) Ta có: $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2+1}=2+\dfrac{x-4}{x^2+1}$
Xét $x=4 \Rightarrow 2x^2+x-2$ chia hết cho x^2+1
Xét $x \neq 4$ để $(x-4)\vdots(x^2+1) \Rightarrow |x-4| \geq x^2+1$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4 \geq x^2+1 \\ x-4 \leq -x^2-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+5 \leq 0\,(1) \\ x^2+x-3 \leq 0\,(2) \end{array}\right.$
Ta nhận thấy (1) vô nghiệm còn (2) kết hợp với điều kiện x là số nguyên suy ra $x \in \{-2,-1,0,1\}$
Thử lại ta nhận giá trị $x=0$.
Vậy $x \in \{0;4\}$ thì $2x^2+x-6$ chia hết cho x^2+1

b) Điều kiện: $x, y \geq 0$
Ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21} \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{21}-\sqrt{x} \Rightarrow y=21+x-2.\sqrt{21.x} \Rightarrow \sqrt{21.x} \in \mathbb{N}$
Vì $21=3.7$; 3 và 7 là các số nguyên tố nên $x=3.7.a^2=21.a^2$ $(a \in \mathbb{N})$
Lập luận tương tự ta có $y=21.b^2$. Thay vào $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{21}$ ta được $a+b=1$
Kết luận phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;21)$ hoặc $(21;0)$

Bài 1.23 (Đề thi vào 10 Chuyên, Sở giáo dục Bến Tre, 2016):

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $A=n^2+n+2$ là một số chính phương.

Ta có $A=n^2+n+2$ là một số chính phương khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} & n^2+n+2=k^2 \ (k \in \mathbb{N}) \\ \Leftrightarrow & 4n^2+4n+8=4k^2 \\ \Leftrightarrow & (2n+1)^2-4k^2=-7 \\ \Leftrightarrow & (2n+1+2k)(2n+1-2k)=-7. \end{aligned}$$

Vì $k, n \in \mathbb{N}$ và $2n+1+2k > 2n+1-2k$ nên ta có các trường hợp sau:

- $\begin{cases} 2n+1+2k=1 \\ 2n+1-2k=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-2 \\ k=2 \end{cases}$ (không thỏa điều kiện)

- $\begin{cases} 2n+1+2k=7 \\ 2n+1-2k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ k=2 \end{cases}$

Vậy $n=1 \Rightarrow A=4$ là số chính phương.

Bài 1.24 (Đề thi vào 10, Chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, v2 , 2016):

Tìm các cặp số $(x;y)$ nguyên dương thoả mãn

$$(x^2+4y^2+28)^2-17(x^4+y^4)=238y^2+833.$$

$$\begin{aligned} & (x^2+4y^2+28)^2-17(x^4+y^4)=238y^2+833 \\ \Leftrightarrow\ & [x^2+4(y^2+7)]^2=17[x^4+(y^2+7)^2] \\ \Leftrightarrow\ & [4x^2-(y^2+7)]^2=0 \Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+y)(2x-7)=7(1) \end{aligned}$$

Vì $x,y\in\mathbb{N}^*$ nên $2x+y>2x-y$ và $2x+y>0$. Từ (1) suy ra $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

Bài 1.25 (Đề thi vào 10, Chuyên Hà Nội, 2016):

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn $2^x.x^2=9y^2+6y+16$.

Ta có $2^x.x^2=(3y+1)^2+15$.

Do $x,y\in\mathbb{N}$ và $\begin{cases} 3y+1\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 15\equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases} \Rightarrow (3y+1)^2+15\equiv 1(\text{mod } 3)$.

Vì $x\in\mathbb{N}$ nên x^2 là số chính phương $\Rightarrow x^2\equiv 1(\text{mod } 3)$ hoặc $x^2\equiv 0(\text{mod } 3)$.

Do $2^x.x^2\equiv 1(\text{mod } 3)$ nên $x^2\equiv 1(\text{mod } 3) \Rightarrow 2^x\equiv 1(\text{mod } 3) \Rightarrow x=2k\ (k\in\mathbb{N})$.

Vậy ta có $2^{2k}.(2k)^2-(3y+1)^2=15 \Leftrightarrow (2^k.2k-3y-1)(2^k.2k+3y+1)=15$. Vì $k,y\in\mathbb{N}$ nên $2^k.2k+3y+1>0 \Rightarrow 2^k.2k-3y-1>0$ nên ta có các trường hợp sau:

- $\begin{cases} 2^k.2k+3y+1=15 \\ 2^k.2k-3y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+1=7 \\ 2^k.k=4 \end{cases}$ (vô lí).

- $\begin{cases} 2^k.2k+3y+1=5 \\ 2^k.2k-3y-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+1=1 \\ 2^k.k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ k=1 \end{cases}$.

Vậy $(x;y)=(2;0)$.

Bài 1.26 (Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Hòa Bình, 2016):

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^2+xy-x-2y-5=0$.

Xét phương trình $x^2 + xy - x - 2y - 5 = 0$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow y(x-2) = -x^2 + x + 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{-x^2+x+5}{x-2}$ (vì $x = 2$ không thỏa mãn (1)).

Khi đó ta có:

$$y = \frac{-x^2+x+5}{x-2} = \frac{-x^2+x+2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = -x - 1 + \frac{3}{x-2}.$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 2$ là ước của 3, tức là:

$$\left[\begin{array}{l} x-2=3 \\ x-2=1 \\ x-2=-1 \\ x-2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=3 & (\Rightarrow y=-1) \\ x=5 & (\Rightarrow y=-5) \\ x=1 & (\Rightarrow y=-5) \\ x=-1 & (\Rightarrow y=-1). \end{array}\right.$$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là: $(3;-1), (5;-5), (1;-5), (-1;-1)$.

Bài 1.27 (Đề thi vào 10 chuyên toán, Chuyên Hùng Vương Gia Lai, 2016):

Tìm các số nguyên x, y sao cho $x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y$.

Ta có

$$\begin{aligned} & x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y \\ \Leftrightarrow & (x^3-1)y = x^3 + 1 + 2x(x+1) \\ \Leftrightarrow & (x-1)(x^2+x+1)y = (x+1)(x^2-x+1) + 2x(x+1) \\ \Leftrightarrow & (x-1)(x^2+x+1)y = (x+1)(x^2+x+1). \qquad (1) \end{aligned}$$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ nên (1) $\Leftrightarrow (x-1)y = x+1$. (2)

Ta thấy $x = 1$ không thỏa phương trình (2). Xét $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq 1$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Ta có $y \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $(x-1)$ là ước của 2. Do đó $x - 1 = 2$ hoặc $x - 1 = -2$ hoặc $x - 1 = 1$ hoặc $x - 1 = -1$. Như vậy $x = 3$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 0$. Vậy các cặp $(x;y)$ với x, y là những số nguyên cần tìm là $(0;-1)$, $(-1;0)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

Bài 1.28 (Đề thi vào 10, Chuyên khoa học Tự nhiên vòng 1, năm 2016):

Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 + mxy^2 = 3m \\ 2 + m(x^2+y^2) = 6m \end{cases}$$

$\begin{cases} 2+mxy^2=3m \\ 2+m(x^2+y^2)=6m \end{cases} \Rightarrow m(x^2+y^2-xy^2=3)=3m$

Dễ thấy $m \neq 0 \Rightarrow x^2+y^2-xy^2=3$

$\Leftrightarrow x^2-1+y^2(1-x)=2$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1-y^2)=2$

Để x,y nguyên $\Leftrightarrow (x-1)$ và $(x+1-y^2)$ là ước của 2.

TH1: $\begin{cases} x-1=1 \\ x+1-y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1;-1 \end{cases}$ (tm)

TH2: $\begin{cases} x-1=2 \\ x+1-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\sqrt{3};-\sqrt{3} \end{cases}$ (loại)

TH3: $\begin{cases} x-1=-1 \\ x+1-y^2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3};-\sqrt{3} \end{cases}$ (loai)

TH4: $\begin{cases} x-1=-2 \\ x+1-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1;-1 \end{cases}$ (tm)

Với $(x;y)=(2;1) \Rightarrow m=2$

Với $(x;y)=(-1;1);(-1;-1) \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$

Vậy với $m=2$ hoặc $m=\dfrac{1}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm (x,y) nguyên.

Bài 1.29 (Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2, 2016):

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^4+2x^2=y^3$.

Ta có $(x^2+1)^2=(y+1)(y^2-y+1)=(y+1)((y+1)^2-3(y+1)+3)$. Gọi d là ước chung của $y+1$ và $(y+1)^2-3(y+1)+3$, dễ thấy $d=1$ hoặc $d=3$, x^2+1 không chia hết cho 3 cho nên $d=1$. Ta có $y+1=a^2, y^2-y+1=b^2$ (*).

(*) $\iff y^2-y+1=b^2 \iff (2b-2y+1)(2b+2y-1)=3$, ta có hai trường hợp

i) $\begin{cases} 2b+2y-1=3 \\ 2b-2y+1=1 \end{cases} \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow a^2=2$ (loại)

ii) $\begin{cases} 2b+2y-1=1 \\ 2b-2y+1=3 \end{cases} \Longrightarrow y=0 \Longrightarrow x=0.$

Vậy nghiệm của phương trình $x=0, y=0$.

Bài 1.30 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Vũng Tàu, 2016):

Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn $p^2-5q^2=4$.

Ta có $p^2-5q^2=4 \Leftrightarrow p^2-4=5q^2 \Leftrightarrow (p-2)(p+2)=5q^2$.

Vì $0<p-2<p+2$ và q nguyên tố nên $p-2$ chỉ có thể nhận các giá trị $1, 5, q, q^2$.

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$p-2$	$p+2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
q	$5q$	3	1
q^2	5	3	1

Do p, q là các số nguyên tố nên chỉ có cặp $(p;q) = (7;3)$ thỏa mãn.

Bài 1.31 (Đề thi vào 10, chuyên Ninh Bình, 2016):

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$.

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$

Ta có $4+4x+4x^2+4x^3+4x^4 = (2y)^2 \Rightarrow 4+4x+4x^2+4x^3+4x^4 = (2x^2+x)^2+2x^2+(x+2)^2$
$\Rightarrow (2x^2+x)^2 < (2y)^2$.

Với $x = 0$ ta được $y = 1$ ta được cặp nghiệm nguyên $(0;1), (0;-1)$.

Với $x \neq 0$, ta có $4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 \leq 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 4x^2 = (2x^2 + x + 2)^2$.

Do đó $(2x^2 + x)^2 \leq (2y)^2 \leq (2x^2 + x + 2)^2$

$\Rightarrow (2y)^2 = (2x^2 + x + 1)^2$

$\Rightarrow 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 = (2x^2 + x + 1)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$. Do đó, ta được các cặp nghiệm nguyên là $(-1, 1); (-1, -1); (3, 11); (3, -11)$.

Vậy các cặp nghiệm nguyên cần tìm là: $(0, 1); (0, -1); (-1, 1); (-1, -1); (3, 11); (3, -11)$.

Bài 1.32 (Đề thi vào 10, Chuyên Thái Bình, 2016):

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

$$9x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x + 2y - 35 = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&9x^2 + 3y^2 + 6xy - 6x + 2y - 35 = 0\\
\Leftrightarrow &9x^2 + y^2 + 1 + 6xy - 6x - y + 2y^2 + 4y + 2 = 38\\
\Leftrightarrow &(3x + y - 1)^2 + 2(y + 1)^2 = 38.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $(3x + y - 1)^2$ là số chính phương chẵn và nhỏ hơn 38, nên ta có

- $(3x + y - 1)^2 = 0 \Rightarrow (y + 1)^2 = 19$ (loại),
- $(3x + y - 1)^2 = 4 \Rightarrow (y + 1)^2 = 17$ (loại),

- $(3x+y-1)^2 = 16 \Rightarrow (y+1)^2 = 11$ (loại),
- $(3x+y-1)^2 = 36 \Rightarrow (y+1)^2 = 1$ (thỏa mãn).

Giải hệ $\begin{cases} (3x+y-1)^2 = 36 \\ (y+1)^2 = 1 \end{cases}$ ta được các cặp nghiệm nguyên: $(-1;-2);(3;-2)$.

Bài 1.33 (Đề thi vào 10 chuyên Thái Nguyên, 2016):

Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình:

$$2xy + x + y = 87.$$

Ta có $2xy + x + y = 83 \Leftrightarrow 4xy + 2x + 2y = 166 \Leftrightarrow (2x+1)(2y+1) = 167$.
Do 167 là số nguyên tố nên $2x+1$ chỉ có thể là một trong 4 số $\pm 1, \pm 167$.

- Với $2x+1 = 1$ ta được $x = 0, y = 83$.
- Với $2x+1 = -1$ ta được $x = -1, y = -84$.
- Với $2x+1 = 167$ ta được $x = 83, y = 0$.
- Với $2x+1 = -167$ ta được $x = -84, y = -1$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên (x,y) là $(0;83),(-1;-84),(83;0),(-84;-1)$.

Bài 1.34 (Đề thi vào 10 chuyên Thái Nguyên, 2016):

Tìm tất cả các số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ sao cho $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$.
Ta có: $\overline{abcde} = 1000\overline{ab} + \overline{cde}$.
Ta lại có $1000\overline{ab} + \overline{cde} = (\overline{ab})^3$. Đặt $m = \overline{ab}, n = \overline{cde}$ ta được

$$1000m + n = m^3 \Rightarrow m^3 \geq 1000m \Rightarrow m^2 \geq 1000 \Rightarrow m \geq 32 \ (1)$$

Vì $n < 1000$ nên $m^3 < 1000m + 1000 \Rightarrow m(m^2 - 1000) < 1000$.
Nếu $m \geq 33$ thì $m(m^2 - 1000) \geq 33.89 = 2937 \geq 1000$ (vô lý).
Do đó $m < 33$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $m = 32$.
Vậy $\overline{abcde} = 32^3 = 32768$.

Bài 1.35 (Đề thi vào 10 chuyên Hưng Yên, 2015):

Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $(x+2)^2(y-2) + xy^2 + 26 = 0$.

Đặt $z = y - 2$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} &(x+2)^2z + (z+2)^2x + 26 = 0 \\ \Leftrightarrow &(x^2+4x+4)z + (z^2+4z+4)x + 26 = 0 \\ \Leftrightarrow &(x+z+8)(xz+4) = 6 \end{aligned}$$

Do $x+z+8$ và $xz+4$ là các số nguyên nên chỉ có các trường hợp $(x+z+8; xz+4)$ bằng

$$(6;1), (1;6), (-6;-1), (-1;-6), (3;2), (2;3), (-3;-2), (-2;-3)$$

Sử dụng định lí Viet đảo ta đươc x, z, từ đó ta có các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình đã cho là

$$(1;-1), (-3;3), (-10;3), (1;-8).$$

Bài 1.36 (Đề thi vào 10 chuyên, Sở giáo dục Bạc Liêu, 2016):

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2 - xy = x^2 + 3y^2$.

Ta có $x^2y^2 - xy = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow (x^2-3)y^2 - xy - x^2 = 0$. (1)

Vì $x^2 - 3 \neq 0$ nên (1) là phương trình bậc hai đối với y, có $\Delta = x^2 + 4x^2(x^2-3) = x^2(4x^2-11)$.

Phương trình (1) có nghiệm nguyên khi Δ là số chính phương.

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$. Nếu $x \neq 0$ thì $4x^2 - 11$ phải là số chính phương.

Đặt $4x^2 - 11 = z^2$ $(z \in \mathbb{N})$ ta được:

$4x^2 - z^2 = 11 \Leftrightarrow (2x-z)(2x+z) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z = 11 \\ 2x-z = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x+z = -1 \\ 2x-z = -11 \end{cases}$.

Suy ra $x = 3$ hoặc $x = -3$.

Với $x = 3$, ta được $2y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \dfrac{3}{2}$. (loại)

Với $x = -3$, ta được $2y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -\dfrac{3}{2}$. (loại)

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(3; -1)$ và $(-3; 1)$.

Bài 1.37 (Đề thi vào 10,chuyên đại học Vinh vòng 2, 2016):

Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm $(a; b)$ thỏa mãn

$$(a^3+b)(a+b^3) = (a+b)^4$$

Phương trình đã cho tương đương với $ab(a^2b^2+1) = ab(4a^2+6ab+4b^2)$

Với $ab = 0$ ta được nghiệm $(0; m), (m; 0)$ trong đó m là số tự nhiên bất kì.

Với $ab > 0$ phương trình đã cho trở thành $a^2b^2 + 1 = 4a^2 + 6ab + 4b^2 \Leftrightarrow (ab+1)^2 = 4(a+b)^2$

$\Leftrightarrow ab + 1 = 2(a+b) \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 3$.

Từ đó giải ra ta được nghiệm $(3; 5)$ và $(5; 3)$.

Vậy các cặp số nguyên không âm cần tìm là $(0; m), (m; 0), (5; 3), (3; 5)$ trong đó m là số tự nhiên bất kì.

Bài 1.38 (Đề thi vào 10, Chuyên Hưng Yên Vòng 2, 2016):

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của phương trình

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2015$$

thỏa mãn $x \geq y \geq z \geq 8$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2015 \\
\Leftrightarrow &xy(z+1) + y(z+1) + x(z+1) + z + 1 = 2016 \\
\Leftrightarrow &(z+1)(xy + y + x + 1) = 2016 \\
\Leftrightarrow &(x+1)(y+1)(z+1) = 16.14.9.
\end{aligned}$$

Do $x \geq y \geq z \geq 8$ nên (x, y, z) cần tìm là $(15, 13, 8)$.

Bài 1.39 (Đề thi vào 10, Chuyên Lâm Đồng, 2016):

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2 = (x-1)(y+1)$.

Ta có: $(x+y)^2 = (x-1)(y+1) \Leftrightarrow (x-1+y+1)^2 = (x-1)(y+1)$.

Đặt $\begin{cases} x - 1 = a \\ y + 1 = b \end{cases}$. Ta có phương trình:

$(a+b)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \dfrac{b}{2} = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{(1; -1)\}$.

Bài 1.40 (Đề thi vào 10, Chuyên Lam Sơn - Vòng 2, 2016):

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+1)(x+2)(x+8)(x+9) = y^2$.

Xét $x \geq 1$: vì $2016^x \equiv 0 (\text{mod } 4)$ và $2017^y \equiv 1 (\text{mod } 4)$ nên $2018^z \equiv 1 (\text{mod } 4)$ (vô lí).

Xét $x = 0$: vì $2016^x + 2017^y = 1 + 2017^y \equiv 2 (\text{mod } 4) \Rightarrow 2018^z \equiv 2 (\text{mod } 4) \Rightarrow z = 1$.

Vậy các số tự nhiên cần tìm là $(x; y; z) = (0; 1; 1)$.

Bài 1.41 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, vòng 1, 2016):

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + y^2 + xy$.

$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 - 2y^2x + xy + 2y^2 - x - y = 1$

$\Leftrightarrow x\left(-2y^2 + y + x\right) - \left(-2y^2 + y + x\right) = 1 \Leftrightarrow (-2y^2 + y + x)(x - 1) = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\-2y^2+x+y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1\\-2y^2+x+y=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\-2y^2+x+y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\-2y^2+x+y=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=21\\2y^2-y-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\2y^2-y-1=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\y=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\y=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;1)$ và $(2;1)$.

Bài 1.42 (Đề thi vào 10, Sở giáo dục Đà Nẵng, 2017):

a) Tìm các số nguyên dương k và số thực x sao cho $(k-1)x^2+2(k-3)x+k-2=0$.

b) Tìm các số nguyên dương x và số nguyên tố p sao cho $x^5+x^4+1=p^2$.

a)
- Nếu $k=1$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{-1}{4}$.
- Nếu $0\le k\ne 1$ thì phương trình đã cho là phương trình bậc hai. Phương trình có nghiệm khi

$$\Delta\ge 0\Leftrightarrow (k-3)^2-(k-1)(k-2)\ge 0\Leftrightarrow 0\le k\le \frac{7}{3}.$$

Khi đó $x=\dfrac{3-k\pm\sqrt{7-3k}}{k-1}$.
Với $k=0\Rightarrow x=3\pm\sqrt{7}$.
Với $k=2\Rightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

b) Ta có $x^5+x^4+1=p^2\Leftrightarrow (x^2+x+1)(x^3-x+1)=p^2$.
Vì p là số nguyên tố, x nguyên dương nên chỉ có 3 trường hợp:
Trường hợp 1: xét $x^2+x+1=x^3-x+1=p$ giải được 1 nghiệm nguyên dương $x=2$ thế vào $p=7$ thoả mãn yêu cầu bài toán.
Trường hợp 2: xét $x^3-x+1=1$ được $x=1$ suy ra $p=\sqrt{3}$ (loại).
Trường hợp 3: xét $x^2+x+1=1\Leftrightarrow x(x+1)=0$ không có nghiệm dương.
Vậy có một cặp $(x;p)=(2;7)$.

Bài 1.43 (Đề thi vào 10, Chuyên Lê Quí Đôn Ninh Thuận, 2016):

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy$

Ta có: $x^2y^2 - x^2 - 7y^2 = 4xy \Leftrightarrow x^2y^2 - 3y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow y^2(x^2-3) = (x+2y)^2. \quad (1).$

- Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0$ nên $(0,0)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- Nếu $y \neq 0$ thì $x^2 - 3$ phải là số chính phương. Giả sử

$$x^2 - 3 = k^2 (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x-k)(x+k) = 3 = 1.3 = -1.(-3).$$

Vì $x - k < x + k$ suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-k=1 \\ x+k=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-k=1 \\ x+k=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ k=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ k=1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Lần lượt thay $x = 2$ và $x = -2$ vào phương trình (1) ta được $y = -2$ và $y = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên: $(0,0)$, $(2,-2)$ và $(-2,2)$

Bài 1.44 (Đề thi vào 10, Chuyên Quốc học Huế, vòng 2, năm 2016):

a) Cho $x, y > 0$ và $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 6x^2 + 4y^2 + 10xy + \dfrac{4x}{y} + \dfrac{3y}{x} + 2016$.

b) Tìm các bộ số nguyên dương (x,y,z) biết $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ và $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

a) Ta có

$$M = (x+y)\left(6x + 4y + \frac{4}{y} + \frac{3}{x}\right) + 2009$$
$$\geq 3(3x + \frac{3}{x} + y + \frac{4}{y} + 3x + 3y) + 2009$$
$$\geq 3(6+4+9) + 2009 = 2066$$

Dấu = xảy ra khi $x = 1; y = 2$.

b) $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} \Leftrightarrow y - \sqrt{xy} - \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} - \sqrt{z}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = z \\ y = x \end{array}\right.$$

TH1: $x = y = z$ suy ra $(x, y, z) = (3; 3; 3)$.

TH2: $y = z \neq x$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-2) = 2$ suy ra $(x, y, z) = (2; 4; 4)$.

TH3: $x = y \neq z$ tìm được $(x, y, z) = (4; 4; 2)$.

Vậy có 3 bộ thỏa mãn $(3; 3; 3)(2; 4 : 4)(4; 4; 2)$.

BÀI 2. TRONG CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA VÀ QUỐC TẾ.

Bài 2.1 (Olympic Châu Á Thái Bình Dương lần thứ nhất, 1989):

Chứng minh rằng phương trình $5n^2 = 36a^2 + 18b^2 + 6c^2$ (4 ẩn) không có nghiệm nguyên, ngoại trừ $a = b = c = n = 0$.

Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(a; b; c; n)$ khác $(0; 0; 0; 0)$. Dễ thấy vế phải của phương trình

$$5n^2 = 36a^2 + 18b^2 + 6c^2 \tag{1}$$

là bội của 3, do đó n chia hết cho 3. Từ đó, $5n^2 - 36a^2 - 18b^2$ chia hết cho 9, và do

$$6c^2 = 5n^2 - 36a^2 - 18b^2$$

nên c chia hết cho 3. Như thế có thể chia hai vế của phương trình cho 9 và được:

$$5m^2 = 4a^2 + 2b^2 + 6d^2. \tag{2}$$

Vì phương trình (1) có nghiệm nên phương trình (2) phải có nghiệm. Nếu (2) có nghiệm thì sẽ có nghiệm với $a, b, d, m \geq 0$. Gọi $(a; b; d; m)$ là một nghiệm nguyên không âm của phương trình với giá trị m là số tự nhiên nhỏ nhất. Ta xét số dư modulo 16. Do một số bình phương có dư $0,\ 1,\ 4,$ hay 9 modulo 16 và từ phương trình (2), suy ra m là số chẵn nên $5m^2 \equiv 0$ hay 4 (mod 16). Tương tự, $4a^2 \equiv 0$ hay 4 (mod 16). Suy ra

$$2b^2 + 6d^2 \equiv 0,\ 4 \text{ hay } 12 \pmod{16}. \tag{3}$$

Mà $2b^2 \equiv 0,\ 2$ hay 8 (mod 16) và $6d^2 \equiv 0,\ 6$ hay 8 (mod 16). Do đó

$$2b^2 + 6d^2 \equiv 0,\ 2,\ 6,\ 8,\ 10 \text{ hay } 14 \pmod{16}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$2b^2 + 6d^2 \equiv 0 \pmod{16}. \tag{5}$$

Suy ra b và d đều là những số chẵn. Do vậy số a không thể là số chẵn vì nếu ngược lại thì

$$\frac{m}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{d}{2}$$

sẽ là nghiệm của phương trình (2) với $\frac{m}{2} < m$, vô lí. Như vậy ta có thể chia hai vế cho 4 và được phương trình

$$5k^2 = a^2 + 2e^2 + 6f^2 \tag{6}$$

với a là số lẻ. Suy ra k cũng là số lẻ. Do đó $5k^2 - a^2 \equiv 4$ hay 12 (mod 16). Từ phương trình (6) suy ra, $2e^2 + 6f^2 \equiv 4$ hay 12 (mod 16). Điều này không thể xảy ra do (5). Vậy phương trình 4 ẩn đã cho không có nghiệm nguyên, ngoại trừ $a = b = c = n = 0$.

Bài 2.2 (Olympic Châu Á Thái Bình Dương lần thứ năm, 1993):
Tìm tất cả các số nguyên dương n để phương trình

$$x^n + (x+2)^n + (2-x)^n = 0$$

có nghiệm nguyên.
Hiển nhiên phương trình vô nghiệm nếu n chẵn vì khi đó tất cả các số hạng ở vế trái đều không âm và có ít nhất một số hạng dương. Ngoài ra, bằng cách kiểm tra trực tiếp ta thấy khi $n = 1$, phương trình có nghiệm là $x = -4$.
Xét n lẻ và $n > 3$.
Nếu x dương, ta có

$$x^n + (x+2)^n > (x+2)^n > (x-2)^n \Rightarrow x^n + (x+2)^n + (2-x)^n > 0$$

nên phương trình vô nghiệm. Từ đó, nghiệm x nếu có phải là số âm.
Đặt $y = -x$. Rõ ràng $x = -1$ không phải là một nghiệm với mọi n, do vậy, nếu $x = -y$ là một nghiệm của phương trình thì $(x+2) = -(y-2) \leq 0$. Ta có

$$(y+2)^n - (y-2)^n = y^n. \tag{1}$$

Bây giờ, vì $4 = [(y+2) - (y-2)]$ chia hết $(y+2)^n - (y-2)^n$ nên từ phương trình (1) suy ra 2 chia hết y. Đặt $y = 2z$, ta được

$$(2z+2)^n = (2z)^n + (2z-2)^n$$
$$\Leftrightarrow (z+1)^n - (z-1)^n = z^n. \tag{2}$$

Ta có 2 chia hết $(z+1)^n - (z-1)^n$ nên từ phương trình (2) suy ra 2 chia hết z, do đó $z+1$ và $z-1$ là hai số lẻ. Ta lại có

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}).$$

Nếu cả a lẫn b đều là các số lẻ thì mỗi số hạng trong tổng

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

là một số lẻ và do n lẻ nên các số hạng là số lẻ, suy ra

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

là một số lẻ. Từ đây, đặt $a = z+1,\ b = z-1$, ta thấy rằng số

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 2(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

là số không chia hết cho 4, tức là vế trái của (2) không chia hết cho 4. Nhưng vế phải của (2) là z^n chia hết cho 4 vì z là số chẵn. Do đó phương trình vô nghiệm.
Tóm lại, chỉ có $n = 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 2.3 (Đề thi chọn đội tuyển Quốc gia Singapore, 1998 - 1999):
Tìm tất cả các số nguyên m sao cho phương trình

$$x^3 - mx^2 + mx - (m^2+1) = 0$$

có nghiệm nguyên.
Giả sử p là một số nguyên sao cho

$$\begin{aligned} & p^3 - mp^2 + mp - (m^2+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (p^2+m)(p-m) = 1. \end{aligned}$$

Do p và m là các số nguyên, một trong hai trường hợp sau phải xảy ra

$$(1) \quad \begin{cases} p^2 + m = -1 \\ p - m = -1 \end{cases},$$

$$(2) \quad \begin{cases} p^2 + m = -1 \\ p - m = 1 \end{cases}.$$

Trong trường hợp (1), ta có $m = p+1$, suy ra $p^2 + p + 1 = -1$ hay $p^2 + p + 2 = 0$, vô nghiệm.
Ở trường hợp (2), ta có $m = p-1$, suy ra $p^2 + p - 1 = 1$, suy ra $p^2 + p - 2 = 0$, cho ta $p = -2$ và $p = 1$. Ta được hai cặp $(m = -3;\ p = -2)$ và $(m = 0;\ p = 1)$.
Vậy với $m = -3$ hoặc $m = 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Bài 2.4 (Đề thi vô địch Quốc gia Hàn Quốc, 1997):
Tìm tất cả các số nguyên $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện

$$x^2+y^2+z^2-2xyz=0.$$

Ta chứng minh phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $x=y=z=0$. Trước hết, để ý rằng các số $x,\ y,\ z$ không thể đồng thời là ba lẻ, vì nếu ngược lại thì

$$x^2+y^2+z^2-2xyz$$

sẽ là số lẻ, do đó không thể bằng 0 được. Vậy phải có ít nhất một số chẵn, khi đó xyz chia hết cho 2. Suy ra $x^2+y^2+z^2$ chia hết cho 4. Vì tất cả các số bình phương đều đồng dư với 0 hoặc 1 (mod 4) nên từ $x^2+y^2+z^2 \vdots 4$, suy ra $x,\ y,\ z$ phải đồng thời là những số chẵn. Ta viết $x=2x_1,\ y=2y_1,\ z=2z_1$, suy ra

$$\begin{aligned}&4x_1^2+4y_1^2+4z_1^2=16x_1y_1z_1\\ \Leftrightarrow\ &x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1.\end{aligned}$$

Do vế phải chia hết cho 4 nên lí luận tương tự như trên, ta được $x_1,\ y_1,\ z_1$ phải là các số chẵn, như vậy ta có thể viết $x_1=2x_2,\ y_1=2y_2,\ z_1=2z_2$, từ đó ta được

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2.$$

Tổng quát, nếu $n\geq 1$ thì $x_n^2+y_n^2+z_n^2=2^{n+1}x_ny_nz_n$, suy ra các số $x_n,\ y_n,\ z_n$ đều là các số chẵn. Như vậy ta có thể viết

$$x_n=2x_{n+1},\ y_n=2y_{n+1},\ z_n=z_{n+1},$$

và lại có

$$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2+z_{n+1}^2=2^{n+2}x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}.$$

Lặp lại lí luận này nhiều lần, ta được dãy vô hạn các số nguyên $(x_1,\ x_2,\ \cdots)$ thỏa mãn $x_i=2x_{i+1}$. Lúc đó, $x=2^nx_n$, nên 2^n chia hết x với mọi $n\geq 1$, cho nên $x=0$. Tương tự cũng có $y=z=0$.

Bài 2.5 (Đề thi vô địch Quốc gia Đài Loan, 1999):
Xác định tất cả các số nguyên dương $(x;y;z)$ sao cho

$$(x+1)^{y+1}+1=(x+2)^{z+1}.$$

Đặt $a = x+1,\ b = y+1,\ c = z+1$. Ta có $a,\ b,\ c \geq 2$ và

$$\begin{aligned} a^b + 1 &= (a+1)^c && (1)\\ \Leftrightarrow\ [(a+1)-1]^b + 1 &= (a+1)^c. && (2)\end{aligned}$$

Từ hai phương trình trên suy ra $(-1)^b + 1 \equiv 0 \pmod{a+1}$, suy ra b là số lẻ. Ta có

$$[(a+1)-1]^b = (a+1)^b - C_b^{b-1}(a+1)^{b-1} + C_b^{b-2}(a+1)^{b-2} + \cdots + C_b^1(a+1) - 1$$

Đưa phương trình (2) về phương trình đồng dư $(\text{mod } (a+1)^2)$ ta được

$$C_b^1(a+1) - 1 + 1 \equiv 0 \pmod{(a+1)^2} \Leftrightarrow b(a+1) \equiv 0 \pmod{(a+1)^2}$$

suy ra $(a+1)$ chia hết b và do đó a là số chẵn. Mặt khác,

$$(a+1)^c = a^c + C_c^{c-1}a^{c-1} + C_c^{c-2}a^{c-2} + \cdots + C_c^1 a + 1$$

Đưa phương trình (1) về phương trình đồng dư $(\text{mod } a^2)$ ta được

$$1 \equiv C_c^1 a + 1 \pmod{a^2} \Leftrightarrow ca \equiv 0 \pmod{a^2}$$

từ đó c chia hết cho a, suy ra c là số chẵn. Đặt $a = 2a_1,\ c = 2c_1$, ta có

$$2^b a_1^b = a^b = (a+1)^c - 1 = \Big[(a+1)^{c_1} - 1\Big]\Big[(a+1)^{c_1} + 1\Big]. \qquad (3)$$

Chú ý rằng $\text{UCLN}\Big((a+1)^{c_1} - 1, (a+1)^{c_1} + 1\Big) = \text{UCLN}\Big((a+1)^{c_1} + 1, 2\Big) \leq 2$ nên từ (3) suy ra

$$\text{UCLN}\Big((a+1)^{c_1} - 1, (a+1)^{c_1} + 1\Big) = 2$$

Từ đó, do $2a_1$ là một ước số của $(a+1)^{c_1} - 1$ (theo (1)), nên ta có thể kết luận:

$$(a+1)^{c_1} - 1 = 2a_1^b, \quad (a+1)^{c_1} + 1 = 2^{b-1}.$$

Ta phải có $2^{b-1} > 2a_1^b$ nên suy ra $a_1 = 1$. Từ đó, các phương trình trên cho ta $c_1 = 1$ và $b = 3$. Nghiệm duy nhất của bài toán là $(x; y; z) = (1; 2; 1)$.

Bài 2.6 (Đề dự tuyển IMO lần thứ 32, năm 1991):

Tìm nghiệm nguyên dương $x,\ y,\ z$ của phương trình

$$3^x + 4^y = 5^z.$$

Ta có $4^n \equiv 1 \pmod 3$ với mọi n nguyên dương nên từ $3^x + 4^y = 5^z$, suy ra

$$5^z \equiv 1 \pmod 3.$$

Mà $5^z \equiv 2^z \pmod 3$ nên

$$2^z \equiv 1 \pmod 3$$

suy ra z chẵn. Đặt $z = 2z_1$ thì phương trình trở thành

$$3^x + 4^y = 5^{2z_1} \Leftrightarrow (5^{z_1} - 2^y)(5^{z_1} + 2^y) = 3^x.$$

Vì

$$\text{UCLN}\left(5^{z_1} - 2^y, 5^{z_1} + 2^y\right) = \text{UCLN}\left(2 \cdot 2^y, 5^{z_1} + 2^y\right) \not\vdots\, 3$$

Và

$$5^{z_1} - 2^y < 5^{z_1} + 2^y$$

Nên từ phương trình trên suy ra

$$5^{z_1} + 2^y = 3^x \quad \text{và} \quad 5^{z_1} - 2^y = 1 \tag{*}$$

Chú ý rằng $5^{z_1} \equiv (-1)^{z_1} \pmod 3$ và $2^y \equiv (-1)^y \pmod 3$ nên từ $(*)$ suy ra

$$(-1)^{z_1} + (-1)^y \equiv 0 \pmod 3 \text{ và } (-1)^{z_1} - (-1)^y \equiv 1 \pmod 3$$

nên z_1 lẻ và y chẵn. Do đó $y \geq 2$. Ta có

$$2^y \equiv 0,\ 3^x \equiv (-1)^x,\ 5^x \equiv 1 \pmod 4$$

từ đó phương trình $5^{z_1} + 2^y = 3^x$ có thể đưa được về đồng dư thức $1 \equiv (-1)^x \pmod 4$, suy ra x cũng chẵn.

Bây giờ, giả sử $y \geq 4$. Chú ý rằng z_1 lẻ, x chẵn nên

$$5^{z_1} \equiv 5,\ 2^y \equiv 0,\ 3^x \equiv 1 \pmod 8$$

Do đó có thể đưa phương trình $5^{z_1} + 2^y = 3^x$ về dạng $5 \equiv 1 \pmod 8$, điều này mâu thuẫn. Suy ra $y = 2,\ z_1 = 1,\ x = 2$.

Vậy $x = y = z = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2.7 (Đề dự tuyển IMO thứ 38, năm 1997):

Gọi $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương sao cho a và b là các số nguyên tố cùng nhau và c nguyên tố cùng nhau với a hay với b. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ ba $(x;y;z)$ các số nguyên dương phân biệt $x,\ y,\ z$ sao cho

$$x^a + y^b = z^c.$$

Cho $P \geq 3$ là một số nguyên dương, thế thì $Q = P^c - 1 > 1$.

Ta tìm một nghiệm có dạng

$$x = Q^m;\ y = Q^n; z = PQ^k.$$

Vì $x^a + y^b = Q^{ma} + Q^{nb};\ z^c = P^c Q^{kc} = Q^{kc-1} - Q^{kc}$ nên một nghiệm như thế sẽ tìm được nếu một trong các hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} ma = kc + 1 \\ nb = kc \end{cases}, \qquad \begin{cases} nb = kc + 1 \\ ma = kc \end{cases}$$

Từ các điều kiện, suy ra rằng hoặc $\text{UCLN}(a,\ bc) = 1$, hoặc $\text{UCLN}(b,\ ac) = 1$. Giả sử rằng $\text{UCLN}(a,\ bc) = 1$. Ta sẽ chứng minh rằng hệ thứ nhất có một nghiệm. Đặt $k = bt$ và $n = ct$ thỏa mãn phương trình thứ hai của hệ này. Thay $k = bt$ vào phương trình đầu của hệ ta được $ma = tbc + 1$. Do $\text{UCLN}(a,\ bc) = 1$ nên các số nguyên dương như m và t có thể tìm được, điều đó nghĩa là hệ nói trên có nghiệm. Rõ ràng là ta có $m \neq n$, vì $\text{UCLN}(kc,\ kc + 1) = 1$. Do đó $x \neq y$. Số z khác x và y vì nó nguyên tố cùng nhau với cả hai số ấy. Vì P bất kì nên ta thu được vô số nghiệm.