ĐOÀN QUANG ĐĂNG

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

QUA CÁC CUỘC THI TRÊN THẾ GIỚI 2022

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Happy New Year

2023

MATHPIAD

ĐOÀN QUANG ĐĂNG
Email: dangdoanquang8@gmail.com

PHƯƠNG TRÌNH HÀM QUA CÁC CUỘC THI TRÊN THẾ GIỚI NĂM 2022

Mathpiad
Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 16 tháng 1 năm 2023

Mục lục

§1 Đề bài

§1.1 Phương trình hàm trên tập số thực

Bài toán 1 (Việt Nam TST 2022). Cho số thực α và xét hàm số $\varphi(x) = x^2 e^{\alpha x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x))$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 2 (District Olympiad 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(y-x) - xf(y)) + f(x) = y(1 - f(x))$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 3 (Iran MO Second Round 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 4 (Kosovo MO 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x-y) - yf(x)) = xf(y)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 5 (Kosovo TST 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2\right) + 2f(xy) = xf(x+y) + yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 6 (IMO 2022 Malaysian Training Camp). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x) + 2y) = f(x)^2 + x + 2f(y)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 7 (IMO 2022 Malaysian Training Camp). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2 + f(x+y)\right) = y + xf(x+1)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 8 (MEMO 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(x+y)) = x + f(f(x) + y))$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 9 (DAMO). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2xy + f(x)) = xf(y) + f(yf(x) + x)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 10 (Nordic 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời

i) $f\left(f(x)f(1-x)\right) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $f\left(f(x)\right) = 1 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 11 (Romania EGMO TST 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 12 (HMMT 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)^2 - f(y)f(z) = x(x + y + z)\left(f(x) + f(y) + f(z)\right)$$

với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$.

Bài toán 13 (China TST 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\{f\left(xf(y) + 1\right), f\left(yf(x) - 1\right)\} = \{xf\left(f(y)\right) + 1, yf\left(f(x)\right) - 1\}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, trong đó $\{a, b\} = \{c, d\} \iff \left[\begin{array}{l} a = c, b = d \\ a = d, b = c \end{array}\right.$.

§1.2 Phương trình hàm trên tập số thực dương

Bài toán 14 (VMO 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 15 (Balkan MO 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3f(y) + f(x)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 16 (PAMO 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

i) $\left(f(x) + y - 1\right)\left(g(y) + x - 1\right) = (x + y)^2 \quad \forall x, y > 0$;

ii) $\left(-f(x) + y\right)\left(g(y) + x\right) = (x + y + 1)(y - x - 1) \quad \forall x, y > 0$.

Bài toán 17 (Iran MO Third Round 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y) + f(f(z))) = z + f(y + f(x))$$

với mọi số thực dương x, y, z.

Bài toán 18 (Czech-Polish-Slovak Match 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(f(x) + \frac{y+1}{f(y)}\right) = \frac{1}{f(y)} + x + 1$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 19 (Switzerland TST 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$x + f(yf(x) + 1) = xf(x + y) + yf(yf(x))$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 20 (Taiwan TST 2022, Round 2). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(x + y^2 f(y)\right) = f(1 + yf(x))f(x)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài toán 21 (USAMO 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x) = f\left(f\left(f(x)\right) + y\right) + f\left(xf(y)\right) f(x + y)$$

với mọi số thực dương x, y.

§1.3 Phương trình hàm trên tập rời rạc

Bài toán 22 (British MO 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$2bf\left(f\left(a^2\right) + a\right)\right) = f(a + 1)f(2ab)$$

với mọi số nguyên dương a, b.

Bài toán 23 (District Olympiad 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$\frac{x^3 + 3x^2 f(y)}{x + f(y)} + \frac{y^3 + 3y^2 f(x)}{y + f(x)} = \frac{(x + y)^3}{f(x + y)}$$

với mọi số nguyên dương x, y.

Bài toán 24 (Francophone MO 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m + n) + f(m)f(n) = n^2(f(m) + 1) + m^2(f(n) + 1) + mn(2 - mn)$$

với mọi số nguyên m, n.

Bài toán 25 (Japan MO Final 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n)$$

với mọi số nguyên dương m, n, trong đó $f^k(n) = \underbrace{f(f(\dots f(}_{k}n)\dots))$.

Bài toán 26 (Taiwan TST 2022, Round 1). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f\left(\left\lfloor \frac{f(x) + f(y)}{2} \right\rfloor\right) + f(x) = f(f(y)) + \left\lfloor \frac{f(x) + f(y)}{2} \right\rfloor$$

với mọi số nguyên x, y, trong đó ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài toán 27 (USA TSTST 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = f(m)$$

với mọi số nguyên dương m, n.

Bài toán 28 (MEMO 2022). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le \dots$ và

$$f(n) + n + 1, \quad f(f(n)) - f(n)$$

đều là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

§1.4 Bất phương trình hàm

Bài toán 29 (IMO 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho với mỗi số thực dương x, tồn tại duy nhất số thực dương y thỏa mãn

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Bài toán 30 (AUS 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : [1; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(2f(x) + y) \geq f\left(x^3\right) + f\left(y^2 f(x) + x^2 + xy\right)$$

với mọi số thực $x, y \geq 1$.

Bài toán 31 (Abel Competition Final 2021-2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - \frac{\sqrt{f(x) f\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} \geq x^2 f(x)$$

với mọi số thực dương x.

Bài toán 32 (Indonesia TST 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

với mọi số thực x, y.

Bài toán 33 (Philippine MO 2022)**.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(a-b)f(c-d) + f(a-d)f(b-c) \leq (a-c)f(b-d)$$

với mọi số thực a, b, c và d.

§2 Lời giải

§2.1 Phương trình hàm trên tập số thực

Bài toán 1 (Việt Nam TST 2022)
Cho số thực α và xét hàm số $\varphi(x) = x^2 e^{\alpha x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x))$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề $f(\varphi(x) + f(y)) = y + \varphi(f(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Đặt $\varphi(f(0)) = c$. Từ $P(0, y)$ thu được

$$f(f(y)) = y + c \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó f là một song ánh. Thay y bởi $f(y)$ vào đẳng thức trên ta suy ra

$$f(y + c) = f(y) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là song ánh nên tồn tại duy nhất $d \in \mathbb{R}$ sao cho $f(d) = 0$. Từ $P(d, y + c)$ thu được

$$f(\varphi(d) + f(y + c)) = y + c \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng $f(f(y)) = y + c$ nên từ đẳng thức trên, kết hợp với f là đơn ánh ta thu được

$$\varphi(d) + f(y + c) = \varphi(d) + f(y) + c = f(y)$$

hay

$$\varphi(d) + c = 0.$$

Chú ý rằng $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra

$$f(0) = d = 0.$$

Khi đó $f(f(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$ và từ $P(x, 0)$ suy ra

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng $\varphi(x)$ nhận mọi giá trị trên tập $[0; +\infty)$ nên ta suy ra $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$. Từ $P(x, f(y))$ ta suy ra

$$f(\varphi(x) + y) = f(y) + f(\varphi(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Với hai số thực x, y, ta chọn z đủ lớn sao cho $z > \max\{-y, 0\}$, khi đó

$$f(x + y) + f(z) = f(x + y + z) = f(x) + f(y + z) = f(x) + f(y) + f(z)$$

hay

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ ta dễ dàng thu được $f(x) = kx \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Thay lại vào phương trình ban đầu ta tìm được $k = 1$. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Bài toán 2 (District Olympiad 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(y-x)-xf(y)\right)+f(x)=y\left(1-f(x)\right)$$

với mọi số thực x,y.

Lời giải. Dễ dàng kiểm ta được hàm $f(x)\equiv 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán, do đó tồn tại số thực c sao cho $f(c)\neq 1$. Từ $P(c,y)$ ta suy ra

$$f\left(f(y-c)-cf(y)\right)=y\left(1-f(c)\right)-f(c)\quad \forall y\in\mathbb{R},$$

chú ý rằng $1-f(c)\neq 0$ nên dễ dàng suy ra f là toàn ánh.

Từ $P(0,y)$ suy ra

$$f\left(f(x)\right)+f(0)=x\left(1-f(0)\right)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Nếu $f(0)=1$ thì ta suy ra $f\left(f(x)\right)=-1\quad \forall x\in\mathbb{R}$. kết hợp với f là toàn ánh thì được $f(x)\equiv -1$, thử lại ta thấy hàm số này không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét trường hợp $f(0)\neq 1$, với hai số thực a,b sao cho $f(a)=f(b)$, từ $P(0,a),P(0,b)$ ta suy ra $a=b$, hay f là đơn ánh.

Từ $P(x,-1)$ ta suy ra $f\left(f(-x-1)-xf(-1)\right)=1\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Do f là toàn ánh nên tồn tại số thực k sao cho $f(k)=1$ hay

$$f\left(f(-x-1)-xf(-1)\right)=1=f(k)\implies f(-x-1)-xf(-1)=k\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đây thay x bởi $-x-1$ thì được

$$f\left(x\right)-(-x-1)f(-1)=k$$

hay $f(x)=ax+b\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Thay lại vào phương trình ban đầu tìm được $f(x)\equiv x$, thử lại thấy hàm số này thỏa mãn. $\square$

Bài toán 3 (Iran MO Second Round 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(y)+f(x)+y)=xy+f(x)+f(y)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ mệnh đề $f(xf(y)+f(x)+y)=xy+f(x)+f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Từ $P(0,-f(0))$ thu được $f(-f(0))=0$. Do đó tồn tại số thực c sao cho $f(c)=0$. Từ $P(c,c)$ suy ra $c^2=0$ hay $c=0$. Như vậy $f(x)=0\iff x=0$.

Từ $P(x,0)$ ta suy ra $f(f(x))=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Với mọi $y\neq 0$, từ $P\left(\frac{-y}{f(y)},y\right)$ ta suy ra

$$f\left(f\left(-\frac{y}{f(y)}\right)\right)=-\frac{y^2}{f(y)}+f\left(-\frac{y}{f(y)}\right)+f(y)$$

$$\implies f(y)=\frac{y^2}{f(y)} \implies f(y)^2=y^2.$$

Từ $P(-1,-1)$ ta được $f(-1)=-1$. Khi đó từ $P(-1,y)$ suy ra

$$f(y-f(y)-1)=f(y)-y-1 \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Nếu tồn tại số thực $a\neq 0$ sao cho $f(a)=-a$ thì từ đẳng thức trên ta suy ra $f(2a-1)=-2a-1$. Điều này dẫn đến $-2a-1=2a-1$ hoặc $-2a-1=-2a+1$, giải cả hai trường hợp ta đều thu được điều vô lý. Như vậy $f(x)\neq x \quad \forall x\neq 0$. Khi đó từ $f(x)^2=x^2$ ta suy ra $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (chú ý rằng $f(0)=0$). Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn. □

Bài toán 4 (Kosovo MO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x-y) - yf(x)) = xf(y)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề $f(f(x-y) - yf(x)) = xf(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Từ $P(0, 0)$ thu được $f(f(0)) = 0$. Từ $P(x, 0)$ suy ra

$$f(f(x)) = xf(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $f(0)$ vào đẳng thức trên ta suy ra $f(0)^2 = f(0)$ hay $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Trường hợp 1. $f(0) = 0$.

Khi đó $f(f(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu tồn tại số $k \neq 0$ sao cho $f(k) = 0$. Khi đó từ $P(k, y)$ ta suy ra

$$kf(y) = f(f(k-y)) = 0 \implies f(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. Nếu $f(x) = 0 \iff x = 0$ thì từ $f(f(x)) = 0$ ta suy ra $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vô ly

Trường hợp 2. $f(0) = 1$.

Khi đó $f(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây ta dễ dàng chứng minh f lả song ánh. Do đó, tồn tại số thực $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$. Từ $P(a, y)$ ta suy ra

$$a - y = f(f(a-y)) = af(y) \implies f(y) = \frac{a-y}{a} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay lại vào phương trình ban đầu ta dễ dàng tìm được $f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy chỉ có hàm số $f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Bài toán 5 (Kosovo TST 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2\right) + 2f(xy) = xf(x+y) + yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề $f\left(x^2\right) + 2f(xy) = xf(x+y) + yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Từ $P(0,0)$ thu được $f(0) = 0$. Khi đó từ $P(x, 0)$ ta suy ra $f\left(x^2\right) = xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây thay x bởi $-x$ ta dễ dàng chứng minh được f là hàm lẻ.

Từ $P(x, -y)$ ta suy ra

$$f\left(x^2\right) - 2f(xy) = xf(x-y) - yf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với $P(x, y)$ thì được

$$xf(x+y) + xf(x-y) = 2f\left(x^2\right) = 2xf(x)$$

hay

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng với $y = 0$ thì đẳng thức vẫn đúng do f là hàm lẻ. Do đó

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $y = 0$ thì được $f(2x) = 2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$f(x+y) + f(x-y) = f(2x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Ta tính $f((x+1)^2)$ bằng hai cách

$$f((x+1)^2) = f(x^2 + 2x + 1) = xf(x) + 2f(x) + f(1)$$
$$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x) + f(1)) = xf(x) + xf(1) + f(x) + f(1)$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra $f(x) = xf(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 6 (IMO 2022 Malaysian Training Camp)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(xf(x)+2y\right)=f(x)^2+x+2f(y)$$

với mọi số thực x,y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f(xf(x)+2y)=f(x)^2+x+2f(y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.
Từ $P(0,0)$ ta suy ra $f(0)=f(0)^2+2f(0) \implies f(0)\in\{-1;0\}$.

Trường hợp 1. $f(0)=0$.

Ta xét các phép thế

$$\begin{aligned} P(0,x) &\implies f(2x)=2f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R};\\ P(x,0) &\implies f(xf(x))=f(x)^2+x\quad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Từ $P(2x,2yf(y))$ ta suy ra

$$f(4xf(x)+4yf(y))=4f(x)^2+2x+2f(2yf(y))=4f(x)^2+2x+4f(yf(y))\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(xf(x)+yf(y))=f(x)^2+\frac{x}{2}+f(yf(y))\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thay đổi vai trò x,y trong đẳng thức trên và đối chiếu với chính nó thì được

$$\begin{gathered} f(x)^2+\frac{x}{2}+f(yf(y))=f(y)^2+\frac{y}{2}+f(xf(x))\quad \forall x,y\in\mathbb{R}\\ \implies f(x)^2+\frac{x}{2}+f(y)^2+y=f(y)^2+\frac{y}{2}+f(x)^2+x \implies x=y\quad \forall x,y\in\mathbb{R} \end{gathered}$$

điều này không thể xảy ra. Do đó không tồn tại hàm số thỏa mãn trong trường hợp này.

Trường hợp 2. $f(0)=-1$.

Ta đặt $g(x)=f(x)+1\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $g(0)=0$ và $P(x,y)$ viết lại thành

$$g(xg(x)-x+2y)=g(x)^2-2g(x)+x+2g(y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ $P(0,y)$ ta suy ra $g(2y)=2g(y)\quad \forall y\in\mathbb{R}$.
Từ $P\left(x,\frac{x}{2}\right)$ ta thu được

$$g(xg(x))=g(x)^2+x-g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ $P(2x,x)$ suy ra

$$\begin{aligned} g(4xg(x))&=4g(x)^2-2g(x)+2x\quad \forall x\in\mathbb{R}\\ \implies g(xg(x))&=g(x)^2-\frac{g(x)}{2}+\frac{x}{2}\quad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Đối chiếu các kết quả thu được, suy ra

$$g(x)=x \implies f(x)=x-1\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x)=x-1\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

□

Bài toán 7 (IMO 2022 Malaysian Training Camp)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2 + f(x+y)\right) = y + xf(x+1)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f\left(x^2 + f(x+y)\right) = y + xf(x+1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Đặt $a = f(0)$. Từ $P(0, x)$ ta thu được $f(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra f là song ánh.
Từ $P(x, f(y) - x)$ ta suy ra

$$f\left(x^2 + y\right) = f(y) + xf(x+1) - x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ký hiệu mệnh đề trên là $Q(x, y)$. Khi đó từ $Q(x, 0)$ ta được $f\left(x^2\right) = xf(x+1) - x + a \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Thay lại vào $Q(x, y)$ thì được

$$f\left(x^2 + y\right) = f\left(x^2\right) + f(y) - a \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - a$, khi đó $g(0) = 0$ và $g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 1. $g(x) + g(y) = g(x+y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Từ đây $y = -x$ thì được $g(x) = -g(-x) \quad \forall x \geq 0$ hay g là hàm lẻ. Khi đó với $x < 0, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$g(x+y) = -g(-x-y) = -g(-x) + -g(-y) = g(x) + g(y).$$

Như vậy $g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét 2. $g(g(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Ta thay $f(x) = g(x) + a$ vào đẳng thức $f(f(x)) = x$ thì được

$$g(g(x) + a) + a = x \implies g(g(x)) = x - g(a) - a \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây thay $x = 0$ và chú ý $g(0) = 0$ ta suy ra $g(a) + a = 0$ hay $g(g(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét 3. $g\left(x^2\right) = xg(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Thay $f(x) = g(x) + a$ vào $P(x, 0)$ ta thu được

$$g\left(x^2 + g(x) + a\right) + a = xg(x+1) + ax \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies g\left(x^2\right) + g(g(x)) + g(a) + a = xg(x) + x(g(1) + a) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta thay $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ vào đẳng thức trên và chú ý $g\left(x^2\right) = xg(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ ta suy ra $g(1) + a = 1$.
Điều này dẫn đến $g\left(x^2\right) = xg(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh hoàn tất. □

Từ các khẳng định trên, ta đi tính $g\left((x+1)^2\right)$ bằng hai cách. Ta có

$$g\left((x+1)^2\right) = (x+1)g(x+1) = xg(x) + xg(1) + g(x) + g(1)$$

và

$$g\left((x+1)^2\right) = g\left(x^2+2x+1\right) = g\left(x^2\right) + g(2x) + g(1) = xg(x) + 2g(x) + g(1).$$

So sánh hai đẳng thức trên ta suy ra $g(x) = g(1)x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = cx + a,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay lại vào phương trình ban đầu ta tìm được $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv 2 - x$. Thử lại ta thấy các hàm số này thỏa mãn.

Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Bài toán 8 (MEMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(x + y)) = x + f(f(x) + y))$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải 1. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề $f(x + f(x + y)) = x + f(f(x) + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Từ $P(x, -f(x))$ ta suy ra

$$f\left(x + f(x - f(x))\right) = x + f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

hay f toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Khi đó tồn tại số thực a sao cho $f(a) = 0$. Từ $P(a, 0)$ ta được

$$a + f(0) = f(a + f(a)) = 0 \implies -f(0) = a.$$

Từ $P(0, y)$ thu được

$$f(f(y)) = f(y + f(0)) \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Từ $P(-f(0), y + f(0))$ ta được

$$f(f(y) - f(0)) = -f(0) + f(y + f(0)) = -f(0) + f(f(y)) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do f toàn ánh trên $\mathbb{R}$ nên từ đẳng thức trên suy ra

$$f(y) = f(y - f(0)) + f(0) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay y bởi $y + f(0)$ vào đẳng thức trên, thu được

$$f(y + f(0)) = f(y) + f(0) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (1) ta suy ra $f(y) = y + f(0) \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = x + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (c \text{ là hằng số}).$$

□

Lời giải 2. Tương tự ta cũng có f toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Từ $P(y, x - y)$ suy ra

$$f(y + f(x)) = y + f(f(y) + x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay vào $P(x, y)$ ta suy ra

$$f(x + f(x + y)) = x + y + f(f(y) + x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Với mỗi $y_0 \in \mathbb{R}$ xét phương trình

$$x + f(x + y_0) = f(y_0) + x - y_0.$$

Phương trình trên luôn có nghiệm x_0 do f toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Thay $x = x_0$ và $y = y_0$ vào (2) thì được $x_0 + y_0 = 0$ hay $x_0 = -y_0$. Thay lại vào phương trình trên ta suy ra

$$-y_0 + f(0) = f(y_0) - 2y_0 \implies f(y_0) = y_0 + f(0).$$

Như vậy $f(y) = y + f(0) \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa.

□

Lời giải 3. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề $f(x + f(x + y)) = x + f(f(x) + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Từ $P(x, y - x)$ thu được

$$f(x + f(y)) = x + f(f(x) - x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ký hiệu mệnh đề trên là $Q(x, y)$. Từ $Q(x, x)$ suy ra

$$f(x + f(x)) = x + f(f(x))$$

$$\implies f(x + f(x)) - (x + f(x)) = f(f(x)) - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Ta có nhận xét rằng nếu a, b là hai số thực thỏa mãn $f(a) - a = f(b) - b$ thì từ $P(a, y)$ và $P(b, y)$ ta suy ra

$$f(f(y) + a) - a = f(f(y) + b) - b \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, từ (3) thu được

$$f(f(y) + x + f(x)) - x - f(x) = f(f(y) + f(x)) - f(x)$$

$$\implies f(f(y) + f(x) + x) - x = f(f(y) + f(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Chú ý rằng từ $P(x, -f(x))$ ta được

$$f(x + f(x - f(x))) = x + f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

hay f toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Khi đó từ (4) suy ra

$$f(y + f(x) + x) - x = f(y + f(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay y bởi $-f(x)$ vào đẳng thức trên thì được

$$f(x) = x + f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.

□

Bài toán 9 (DAMO)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2xy + f(x)) = xf(y) + f(yf(x) + x)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Với $x, y \in \mathbb{R}$, ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề $f(2xy + f(x)) = xf(y) + f(yf(x) + x)$.

Nếu $f(x) \equiv c$ thì thay vào $P(x, y)$ ta suy ra $f(x) \equiv 0$. Xét trường hợp f không là hàm hằng.

Nhận xét 1. $f(0) = 0$.

Chứng minh. Từ $P(x, 0)$ ta được $f(f(x)) = xf(0) + f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ đây suy ra f đơn ánh trên $\mathbb{R}$. Khi đó từ $P(0, 0)$ thu được $f(f(0)) = f(0)$ hay $f(0) = 0$, vô lý. Như vậy $f(0) = 0$. □

Nhận xét 2. $f(x) = 0 \iff x = 0$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$. Khi đó từ $P\left(a, \frac{1}{2}\right)$ ta được

$$af\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(2a.\frac{1}{2}\right) = f(a) = 0 \implies f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Từ $P\left(\frac{1}{2}, y\right)$ ta suy ra $f(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, mâu thuẫn do ta xét f khác hằng. □

Nhận xét 3. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = x$ hoặc $f(x) = 2x$.*

Chứng minh. Với $x \neq 0$, giả sử $f(x) \neq 2x$. Khi đó từ

$$P\left(x, \frac{x - f(x)}{2x - f(x)}\right) \implies xf\left(\frac{f(x) - x}{f(x) - 2x}\right) = 0 \implies f\left(\frac{f(x) - x}{f(x) - 2x}\right) = 0.$$

Kết hợp với **Nhận xét 2** ta suy ra $f(x) = x$. □

Giả sử tồn tại $b \neq 0$ sao cho $f(b) = 2b$. Từ $P(b, y)$ suy ra

$$f(2by + 2b) = bf(y) + f(2by + b) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = -\frac{1}{2}$ vào đẳng thức trên, suy ra

$$2 = f(b) = bf\left(-\frac{1}{2}\right) \implies f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2,$$

vô lý do $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ hoặc $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Như vậy $f(x) \neq 2x \quad \forall x \neq 0$. Suy ra $f(x) \equiv x$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv x.$$

□

Bài toán 10 (Nordic 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời

i) $f\left(f(x)f(1-x)\right)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R};$

ii) $f\left(f(x)\right)=1-f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

Lời giải 1. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ giả thiết ii) ta suy ra

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=1-f\left(f(x)\right)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay x bởi $f(x)$ vào giả thiết i), suy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì

$$f\left(f(x)\right)=f\left(f\left(f(x)\right)f\left(1-f(x)\right)\right)=f\left(f\left(f(x)\right)f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)=f\left(f\left(f(x)\right)f(x)\right). \quad (1)$$

Tiếp tục thay x bởi $f(x)$ vào đẳng thức (1) ta được

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)f\left(f(x)\right)\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f(x)$ ta suy ra

$$f(x)=f\left(f(x)f\left(f(x)\right)\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và ii) ta suy ra

$$f(x)=f\left(f\left(f(x)\right)f(x)\right)=f\left(f(x)\right)=1-f(x)\implies f(x)=\frac{1}{2}\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Lời giải 2. Với c là điểm bất động của hàm số f, nghĩa là $f(c)=c$, thì từ phương trình ii) ta suy ra $c=1-c$ hay $c=+frac12$.
Ta thay x bởi $1-x$ vào phương trình i) và đối chiếu với chính nó thì được

$$f(x)=f(1-x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ phương trình ii), tác động f vào hai vế thì được

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f\left(1-f(x)\right)=f\left(f(x)\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Như vậy $f\left(f(x)\right)$ là điểm bất động của hàm số f hay $f\left(f(x)\right)=\frac{1}{2}\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây, thay vào phương trình ii) ta suy ra $\frac{1}{2}=1-f(x)$ hay $f(x)=\frac{1}{2}\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

□

Bài toán 11 (Romania EGMO TST 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Ta thay y bởi $\frac{x^2-f(x)}{2}$ vào phương trình ban đầu thì được

$$(x^2 - f(x))f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chú ý rằng ta cũng có $f(0) = 0$ và từ $P(0, y)$ thu được $f(y) = f(-y)$ hay f là hàm chẵn.

Dễ dàng kiểm tra được hàm số $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ chứng minh không tồn tại hàm thứ ba thỏa mãn. Giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$ và $b \neq 0$ sao cho $f(b) = b^2$. Do f là hàm chẵn nên ta giả sử $b > 0$ (vì nếu không thì ta xét $f(-b) = b^2$). Từ $P(a, -b)$ ta suy ra

$$f(-b) = f(a^2 + b) \implies b^2 = f(b) = f(a^2 + b).$$

Nếu $f(a^2 + b) = 0$ thì $b = 0$, vô lý. Nếu $f(a^2 + b) = (a^2 + b)^2$ thì ta cũng thu được điều vô lý do

$$0 < b < a^2 + b \implies b^2 < (a^2 + b)^2.$$

Như vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x) \equiv x^2$ và $f(x) \equiv 0$. $\square$

Bài toán 12 (HMMT 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)^2 - f(y)f(z) = x(x+y+z)\left(f(x)+f(y)+f(z)\right)$$

với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn. Ký hiệu $P(x, y, z)$ chỉ phương trình ban đầu.

Nhận xét 1. $f(x) \in \left\{0, x^2 - \frac{1}{x}\right\} \quad \forall x \neq 0.$

Chứng minh. Từ $P(1,1,1)$ suy ra $f(1) = 0$. Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} P\left(x, 1, \frac{1}{x}\right) &\implies f(x)^2 = x\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ P\left(1, x, \frac{1}{x}\right) &\implies -f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $f(x)^2 = -xf(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$ hay $f(x) = 0$ hoặc $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{f(x)}{x}$ với mọi $x \neq 0$. Thay vào phương trình thứ nhất thì được

$$f(x)^2 = x\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(f(x) - \frac{f(x)}{x}\right)$$

hay $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$. □

Nhận xét 2. *Nếu tồn tại số thực $t \neq 1$ sao cho $f(t) = 0$ thì $f(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$.*

Chứng minh. Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} P\left(x, t, \frac{1}{xt}\right) &\implies f(x)^2 = x\left(x + \frac{1}{xt} + t\right)\left(f(x) + f\left(\frac{1}{xt}\right)\right) \\ P\left(t, x, \frac{1}{xt}\right) &\implies -f(x)f\left(\frac{1}{xt}\right) = t\left(x + \frac{1}{xt} + t\right)\left(f(x) + f\left(\frac{1}{xt}\right)\right). \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $tf(x)^2 = -xf(x)f\left(\frac{1}{xt}\right)$ hay $f(x) = 0$ hoặc $f\left(\frac{1}{xt}\right) = -\frac{t}{x}f(x)$.
Xét các số thực $x \neq 0$ thỏa mãn $f\left(\frac{1}{xt}\right) = -\frac{t}{x}f(x)$, thay vào đẳng thức thứ nhất thì được

$$f(x)^2 = x\left(x + \frac{1}{xt} + t\right)\left(f(x) - \frac{tf(x)}{x}\right)$$

$$\implies \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = x\left(x + \frac{1}{xt} + t\right)\left(1 - \frac{t}{x}\right) = x^2 - \frac{1}{x} - \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) \end{cases}.$$

Chú ý rằng với $t \neq 1$ thì $x^2 - \frac{1}{x} - \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) \neq x^2 - \frac{1}{x}$ nên $f(x) = 0$. Tóm lại $f(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$. □

Nếu $f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 1$ thì ta suy ra $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$, thử lại ta thấy hàm số này thỏa.
Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0.$$

□

Bài toán 13 (China TST 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\{f(xf(y)+1), f(yf(x)-1)\} = \{xf(f(y))+1, yf(f(x))-1\}$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$, trong đó $\{a,b\}=\{c,d\} \iff \left[\begin{array}{l} a=c, b=d \\ a=d, b=c \end{array}\right.$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định

$$\{f(xf(y)+1), f(yf(x)-1)\} = \{xf(f(y))+1, yf(f(x))-1\} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Từ $P(0,0)$ ta suy ra $\{f(1),f(-1)\}=\{1,-1\}$. Ta xét trường hợp $f(1)=1$ và $f(-1)=-1$, trường hợp còn lại làm tương tự.

Nhận xét 1. *Hàm f là toàn ánh.*

Chứng minh. Từ $P(x,1)$ ta suy ra

$$\{f(x+1), f(f(x)-1)\} = \{x+1, f(f(x))-1\} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra f là toàn ánh. Chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét 2. $f(0)=0$.

Chứng minh. Do f là toàn ánh nên tồn tại số thực a sao cho $f(a)=0$. Khi đó, từ $P(a,a)$ ta suy ra

$$\begin{aligned} \{f(af(a)+1), f(af(a)-1)\} &= \{af(f(a))+1, af(f(a))-1\} \\ \implies \{af(f(a))+1, af(f(a))-1\} &= \{1,-1\}. \end{aligned}$$

Giải hai trường hợp ta đều thu được

$$af(f(a))=0 \implies af(0)=0 \implies \left[\begin{array}{l} a=0 \\ f(0)=0 \end{array}\right..$$

Như vậy $f(0)=0$ trong mọi trường hợp. Chứng minh hoàn tất. □

Dễ dàng kiểm tra được hàm số $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta xét trường hợp tồn tại số thực $x_0\neq 0$ sao cho $f(x_0)\neq x_0$.

Từ $P(x_0-1,1)$ ta suy ra

$$\{f(x_0), f(f(x_0-1)-1)\} = \{x_0, f(f(x_0-1))-1\}.$$

Do $f(x_0)\neq x_0$ nên từ đây suy ra

$$f(x_0)=f(f(x_0-1))-1, \quad x_0=f(f(x_0-1)-1). \tag{1}$$

Từ $P(1,x_0+1)$ thu được

$$\{f(f(x_0+1)+1),\ f(x_0)\} = \{\ f(f(x_0+1))+1,\ x_0\}.$$

Tương tự, ta cũng suy ra

$$f(x_0)=f(f(x_0+1))+1, \quad x_0=f(f(x_0+1)+1). \tag{2}$$

Nhận xét 3. $f(x)=0 \iff x=0$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a)=0$. Từ $P(a,y)$ suy ra với mọi số thực y thì

$$\{f(af(y)+1), f(yf(a)-1)\} = \{af(f(y))+1, yf(f(a))-1\}$$
$$\implies \{f(af(y)+1), -1\} = \{af(f(y))+1, -1\}.$$

Điều này dẫn đến $f(af(y)+1) = af(f(y))+1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Chú ý rằng do f là toàn ánh nên từ đây ta cũng có

$$f(ay+1) = af(y)+1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Tương tự, từ $P(y,a)$ ta suy ra

$$f(ay-1) = af(y)-1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp hai đẳng thức này thì được $f(y+1)-f(y-1)=2 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} f(f(x_0+1)+1) &= f(f(x_0-1)+3) = f(f(x_0-1)-1+4) \\ &= f(f(x_0-1)-1+2)+2 = f(f(x_0-1)-1)+4. \end{aligned}$$

Kết hợp với (1) và (2) ta suy ra $x_0 = x_0+4$, vô lý. Như vậy $f(x)=0 \iff x=0$. □

Nhận xét 4. *Hàm f là đơn ánh.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại các số thực $u \neq v \neq 0$ sao cho $f(u)=f(v)$. Ta có

$$\begin{aligned} P(u,y) &\implies \{f(uf(y)+1), f(yf(u)-1)\} = \{uf(f(y))+1, yf(f(u))-1\} \quad \forall y \in \mathbb{R}. \\ P(v,y) &\implies \{f(vf(y)+1), f(yf(v)-1)\} = \{vf(f(y))+1, yf(f(v))-1\} \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chú ý rằng $f(u)=f(v)$ nên $f(yf(u)-1) = f(yf(v)-1)$ và $yf(f(u))-1 = yf(f(v))-1$.

Giả sử tồn tại $y \neq 0$ sao cho $f(yf(u)-1) \neq yf(f(u))-1$. Khi đó

$$f(yf(u)-1) = uf(f(y))+1, \quad f(yf(v)-1) = uf(f(v))+1$$

hay $(u-v)f(f(y))=0$, vô lý. Như vậy $f(yf(u)-1) = yf(f(u))-1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Tương tự ta cũng thu được $f(yf(u)+1) = yf(f(u))+1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Do f là toàn ánh và $f(u) \neq 0$ nên

$$f(y+1)-f(y-1)=2 \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

mâu thuẫn với phương trình (1) và (2). Vậy f là đơn ánh. □

Từ (1) và (2) suy ra

$$x_0 = f(f(x_0+1)+1) = f(f(x_0-1)-1) \implies f(x_0+1)+1 = f(x_0-1)-1. \tag{3}$$

Đồng thời ta cũng có

$$f(x_0) = f(f(x_0-1)-1 = f(f(x_0+1)+1. \tag{4}$$

Đặt $m = f(x_0+1)+1 = f(x_0-1)-1$. Nếu $f(m) \neq m$ thì lập luận tương tự như trường hợp $f(x_0) \neq x_0$ ta cũng có được $f(m+1)+1 = f(m-1)-1$ hay $f\left(f(x_0-1)+1 = f\left(f(x_0+1)-1\right.\right.$, điều này mâu thuẫn với đẳng thức (4). Như vậy $f(m) = m$ hay

$$f(m) = f\left(f(x_0+1)+1\right) = m = x \implies f(x) = x,$$

vô lý. Như vậy, không tồn tại hàm số thỏa mãn trong trường hợp này.

Vậy tất cả hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

§2.2 Phương trình hàm trên tập các số thực dương

Bài toán 14 (VMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=1+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải 1. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. *Cho các hàm số $f, g, h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(g(x)+y\right)=h(x)+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y. Khi đó hàm $\frac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

Chứng minh. Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f\left(g(x)+y\right)=h(x)+f(y), \forall x,y>0$. Từ $P\left(x, y-g(x)\right)$ ta suy ra

$$f\left(y-g\left(x\right)\right)=f\left(y\right)-h\left(x\right), \forall x>0, y>g(x).$$

Với $x, y>0$ và $p, q\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $pg\left(x\right)-qg\left(y\right)>0$, từ các đẳng thức trên ta dễ dàng chứng minh được

$$f\left(z+pg\left(x\right)-qg\left(y\right)\right)=f\left(z\right)+ph\left(x\right)-qh\left(y\right)$$

với mọi $z>0$. Nếu $ph\left(x\right)-qh\left(y\right)<0$, khi đó ta thay (p,q) bởi (kp,kq) với k nguyên dương đủ lớn thì

$$f\left(z\right)+ph\left(x\right)-qh\left(y\right)<0,$$

vố lý. Như vậy

$$pg\left(x\right)>qg\left(y\right)\implies ph(x)\geq qh(y)\quad\forall x,y>0,$$

hay

$$\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{q}{p}\implies\frac{h(x)}{h(y)}\geq\frac{q}{p}\quad\forall x,y>0.$$

Giả sử $\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{h(x)}{h(y)}$, khi đó ta có thể chọn $p, q\in\mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{q}{p}>\frac{h(x)}{h(y)},$$

điều này mâu thuẫn với chứng minh trên. Vậy

$$\frac{h(x)}{h(y)}\geq\frac{g(x)}{g(y)}\implies\frac{h(x)}{g(x)}\geq\frac{h(y)}{g(y)}\quad\forall x,y>0.$$

Thay đổi vai trò x, y trong đánh giá trên ta thu được $\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h(y)}{g(y)}=c\quad\forall x,y>0.$ □

Trở lại bài toán. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn.
Áp dụng bổ đề trên ta suy ra tồn tại số thực dương c sao cho

$$\frac{f(x)}{x}=c\implies f(x)=cx\quad\forall x>0.$$

Thay lại vào phương trình ban đầu ta suy ra

$$c(c+y) = f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + cy \implies c = 1.$$

Như vậy $f(x) = x \quad \forall x > 0$ là tất cả hàm số cần tìm $\square$

Lời giải 2. Giả sử $\frac{f(x)}{x}$ không là hàm hằng. Khi đó tồn tại $a, b > 0$ phân biệt cho cho $\frac{f(b)}{b} > \frac{f(a)}{a}$. Khi đó

$$f\left(\frac{f(a)}{a} + y\right) = f\left(\frac{f(b)}{b} + y\right) = f(y) + 1 \quad \forall y > 0.$$

Đặt $k = \frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}$, như vậy $f(x) = f(x+K) \quad \forall x > \frac{f(a)}{a}$.
Mặt khác, từ giả thiết, ta có

$$f\left(y + n\frac{f(a)}{a}\right) = f(y) + n > n$$

hay $f(x) > n$ với mọi $x > n\frac{f(a)}{a}$. Với $x > 0$ cố định, chọn $n = \lfloor f(x) \rfloor + 2 > f(x)$ và số nguyên dương m sao cho $x + mK > n\frac{f(a)}{a}$, như vậy $f(x+mK) > n > f(x) = f(x+mK)$, vô lý.
Do đó $f(x) = cx \quad \forall x > 0$. Thay lại vào ta cũng tìm được $c = 1$. $\square$

Bài toán 15 (Balkan MO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x)$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải 1. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. *Cho hàm số $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ và các số thực dương a_i, b_i, c_i, d_i với $i = 1, 2$ thỏa mãn*

$$g(x + a_1) + b_1 = g(x + c_1) + d_1$$

và

$$g(x + a_2) + b_2 = g(x + c_2) + d_2$$

với mọi $x > 0$. Khi đó tồn tại số thực $\lambda \geq 0$ sao cho $d_i - b_i = \lambda(a_i - c_i)$ với $i \in \{1; 2\}$.

Chứng minh. Nếu $a_1 = c_1$ thì $b_1 = d_1$, $a_2 = c_2$ thì $b_2 = d_2$. Ta xét trường hợp $a_i \neq c_i$ với $i = 1, 2$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $a_i > c_i$ với $i = 1, 2$.

Ta chứng minh $d_i \geq b_i$ với $i = 1, 2$.
Giả sử $d_1 < b_1$, từ giả thiết, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$g(x + N(a_1 - c_1)) = g(x) + N(b_1 - d_1) \quad \forall x > 0, N \in \mathbb{N}^*.$$

Cố định $x > 0$ và cho $N \to +\infty$ thì $N(b_1 - d_1) \to -\infty$ điều này mâu thuẫn với $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.
Ta chứng minh bằng phản chứng, không giảm tính tổng quát ta giả sử

$$\frac{d_1 - b_1}{a_1 - c_1} > \frac{d_2 - b_2}{a_2 - c_2} \geq 0.$$

Nếu $d_2 = b_2$ thì $g(x + a_2) = g(x + c_2) \quad \forall x > 0$. Khi đó, bằng quy nạp ta chỉ ra được

$$g(x) = g(x + N(a_2 - a_2)) = g(x + N(a_2 - c_2) - M(a_1 - c_1)) + M(d_1 - b_1) > M(d_1 - b_1)$$

với M, N là các số nguyên dương sao cho $x + N(a_2 - c_2) - M(a_1 - c_1) > 0$.
Chú ý rằng với $M > 0$ thì ta có thể chọn N đủ lớn sao cho $x + N(a_2 - c_2) - M(a_1 - c_1) > 0$.
Khi đó, cố định x đủ lớn và cho $M \to +\infty$ thì $g(x) \to +\infty$, điều này mâu thuẫn.
Như vậy $d_2 > b_2$.
Lúc đó, ta có $\frac{d_1 - b_1}{d_2 - b_2} > \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} > 0$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho

$$\frac{d_1 - b_1}{d_2 - b_2} > \frac{m}{n} > \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} > 0.$$

Điều này dẫn đến với $x > 0$ đủ lớn thì

$$g(x) = g(x + m(a_2 - c_2)) - m(d_2 - b_2) = g(x + m(a_2 - c_2) - n(a_1 - c_1)) + n(d_1 - b_1) - m(d_2 - b_2).$$

Do $u = m(a_2 - c_2) - n(a_1 - c_1) > 0, v = n(d_1 - b_1) - m(d_2 - b_2) > 0$ nên ta suy ra

$$g(x) = g(x + u) + v \quad \forall x > 0.$$

Khi đó, bằng quy nạp ta chỉ ra được $g(x) = g(x + nu) + nv > nv$ với mọi số nguyên dương n. Từ đây, cố định $x > 0$ và cho $n \to +\infty$ ta thấy ngay điều vô lý. Như vậy, tồn tại $\lambda \geq 0$ sao cho $d_i - b_i = \lambda(a_i - c_i)$ với $i \in \{1; 2\}$. Chứng minh hoàn tất. □

Trở lại bài toán. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f\left(yf(x)^3+x\right)=x^3f(y)+f(x)\quad \forall x,y>0$.
Từ $P(1,y)$ suy ra $f\left(yf(1)^3+1\right)=f(y)+f(1)\quad \forall y>0$. Nếu $f(1)<1$ thì từ đây, ta thay y bởi $\frac{1}{1-f(1)^3}$ thì được $f(1)=0$, vô lý. Vậy $f(1)\geq 1$.
Từ $P\left(x,yf(z)^3+z\right)$ và $P(z,y)$ ta suy ra với mọi số thực x,y,z thì

$$f\left(yf(z)^3f(x)^3+zf(x)^3+x\right)=x^3z^3f(y)+x^3f(z)+f(x). \tag{1}$$

Từ (1), ta thay đổi vai trò x,z thì được

$$f\left(yf(x)^3f(z)^3+xf(z)^3+z\right)=z^3x^3f(y)+z^3f(x)+f(z). \tag{2}$$

Từ hai đẳng thức (1), (2) ta suy ra với mọi $x,y,z>0$ thì

$$f\left(yf(x)^3f(z)^3+xf(z)^3+z\right)+x^3f(z)+f(x)=f\left(yf(z)^3f(x)^3+zf(x)^3+x\right)+z^3f(x)+f(z)$$

từ đây thay y bởi $\frac{y}{f(x)^3f(z)^3}$ thì được

$$f\left(y+\underbrace{xf(z)^3+z}_{a}\right)+\underbrace{x^3f(z)+f(x)}_{b}=f\left(y+\underbrace{zf(x)^3+x}_{c}\right)+\underbrace{z^3f(x)+f(z)}_{d}.$$

Áp dụng bổ đề trên ta suy ra tồn tại số thực $\alpha\geq 0$ sao cho

$$\left(z^3f(x)+f(z)\right)-\left(x^3f(z)+f(x)\right)=\alpha\left(xf(z)^3+z-zf(x)^3-x\right)\quad \forall x,z>0. \tag{3}$$

Nếu $\alpha=0$ từ (3), thay $z=1$ ta được $f(1)-x^3f(1)=0\quad \forall x>0$, vô lý. Như vậy $\alpha\neq 0$, khi đó đặt $a=\frac{1}{\alpha}$ và thay $z=1$ vào (3) ta suy ra với mọi $x>0$ thì

$$af(1)-af(1)x^3=xf(1)^3+1-f(x)^3-x$$
$$\implies f(x)^3=af(1)x^3+x\left(f(1)^3-1\right)+1-af(1).$$

Giả sử $1-af(1)<0$, khi đó cho $x\to 0^+$ thì $f(x)^3\to 1-af(1)<0$, vô lý. Vậy $1-af(1)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\sqrt[3]{1-af(1)}=k$. Hiển nhiên f liên tục $\mathbb{R}^+$, từ $P(x,y)$ ta cố định $x>0$ và cho $y\to 0^+$ thì được $f(x)=x^3k+f(x)$ hay $k=0$. Như vậy $af(1)=1$.
Thay vào ta được $f(x)^3=x^3+\left(f(1)^3-1\right)x\quad \forall x>0$. Đặt $f(1)=b\geq 1$. Từ $P(1,1)$ suy ra $f\left(1+b^3\right)=2b$. Chú ý rằng ta cũng có

$$f(1+b^3)^3=b^9+4b^6+3b^3,$$

khi đó

$$b^9+4b^6+3b^3=8b^3\iff b^3(b^6+4b^3-5)=0\iff b=1,$$

Điều này dẫn đến $f(x)^3=x^3$ hay $f(x)=x\quad \forall x>0$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn.
Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x)=x\quad \forall x>0$. □

Lời giải 2. Ta nhắc lại bổ đề :

Bổ đề. *Giả sử các hàm số $f,g,h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(x+g(y)\right)=f(x)+h(y)\quad \forall x,y>0.$$

Khi đó $\frac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng

Nhận xét 1. *Hàm f tăng nghiêm ngặt.*

Chứng minh. Với hai số thực $y > x > 0$, từ $P\left(x, \frac{y-x}{f(x)^3}\right)$ ta suy ra

$$f(y) = x^3 f\left(\frac{y-x}{f(x)^3}\right) + f(x) > f(x),$$

chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét 2. $f(1) = 1$.

Chứng minh. Giả sử $f(1) < 1$, khi đó từ $P\left(1, \frac{1}{1-f(1)^3}\right)$ ta suy ra $f(1) = 0$, vô lý. Như vậy $f(1) \geq 1$. Giả sử $f(1) > 1$, từ $P(1,1)$ suy ra $f\left(1 + f(1)^3\right) = 2f(1)$. Khi đó từ $P\left(1 + f(1)^3, 1\right)$ ta được

$$f\left(9f(1)^3 + 1\right) = f(1)\big(f(1)^3 + 1\big)^3 + 2f(1).$$

Mặt khác, từ $P(1,9)$ cũng có $f\left(9f(1)^3 + 1\right) = f(9) + f(1)$. Như vậy

$$f(9) = f(1)\big(f(1)^3 + 1\big)^3 + f(1) = f(1)\left(\big(f(1)^3 + 1\big)^3 + 1\right) > f(1)\left((1+1)^3 +\right) = 9f(1).$$

Từ $P(1,y)$ ta suy ra $f(y) + f(1) = f\left(yf(1)^3 + 1\right) > f(y+1) \implies f(9) < 9f(1)$, mâu thuẫn. Do đó ta phải có $f(1) = 1$. □

Nhận xét 3. $f(y+n) = f(y) + n \quad \forall y > 0, n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Từ $P(1,y)$ ta suy ra $f(y+1) = f(y) + 1 \quad \forall y > 0$. Từ đây bằng quy nạp ta chứng minh được $f(y+n) = f(y) + n \quad \forall y > 0$ với mọi n nguyên dương. □

Nhận xét 4. $f\left(y + f(x)^3\right) = f(y) + x^3 \quad \forall x, y > 0$.

Chứng minh. Từ $P(x, y+1)$ ta thu được

$$f\left(yf(x)^3 + x + f(x)^3\right) = x^3 f(y) + f(x) + x^3 = f\left(yf(x)^3 + x\right) + x^3 \quad \forall x, y > 0.$$

Với hai số thực $y > x > 0$ ta thay y bởi $\frac{y-x}{f(x)^3}$ thì được

$$f\left(y + f(x)^3\right) = f(y) + x^3.$$

Với $x, y > 0$ bất kỳ, ta chọn số nguyên dương n đủ lớn sao cho $y + n > x$, khi đó

$$f\left(y + n + f(x)^3\right) = f(y+n) + x^3 \Rightarrow f\left(y + f(x)^3\right) = f(y) + x^3.$$

□

Áp dụng bổ đề ta suy ra $f(x)^3 = kx^3 \implies f(x) = ax \quad \forall x > 0$. Thay lại vào ta dễ dàng tìm được $f(x) = x \quad \forall x > 0$, thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Lời giải 3. Từ $P\left(x, \frac{t}{f(x)^3}\right)$ ta suy ra

$$f(x+t) = x^3 f\left(\frac{t}{f(x)^3}\right) + f(x) \quad \forall x, y > 0. \tag{*}$$

Đặt $f(1) = c$. Nếu $c < 1$ thì từ $P\left(1, \frac{1}{1-c^3}\right)$ ta suy ra $f(1) = c = 0$, vô lý.

Giả sử $c > 1$, ta chứng minh

$$f\left(1 + c^3 + ... + c^{3n}\right) = (n+1)c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 0$ mệnh đề hiển nhiên đúng. Giả sử mệnh đề đúng đến n, ta thay $x = 1$ và $t = c^3 + c^6 + ... + c^{3(n+1)}$ vào đẳng thức (*) thì được

$$f\left(1 + c^3 + ... + c^{3(n+1)}\right) = f\left(\frac{c^3 + c^6 + ... + c^{3(n+1)}}{c^3}\right) + c = f\left(1 + c^3 + ... + c^{3n}\right) + c = (n+2)c,$$

chứng minh hoàn tất. Với $n \geq 1$, thay $x = 1 + c^3 + ... + c^{3(n-1)}$ và $t = c^{3n}$ vào (*) thì được

$$(n+1)c = f\left(1 + c^3 + ... + c^{3n}\right) = \left(1 + c^3 + ... + c^{3(n-1)}\right) f\left(\frac{c^{3n}}{(cn)^3}\right) + nc$$

hay

$$f\left(\frac{c^{3n-3}}{n^3}\right) = \frac{c}{\left(1 + c^3 + ... + c^{3n}\right)^3} < c = f(1) \Rightarrow \frac{c^{3n-3}}{n^3} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây ta cho $n \to +\infty$ thì sẽ tới điều mâu thuẫn do $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{c^{3n-3}}{n^3} = +\infty$. Vậy $c = f(1) = 1$.

Từ $P(1, y)$ suy ra $f(y+1) = f(y) + 1 \quad \forall y > 0$ kết hợp với $f(1) = 1$ ta dễ dàng chứng minh được $f(n) = n$ với mọi số nguyên dương n. Xét số hữu tỷ $q = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*, \gcd(m, n) = 1$, từ $P\left(n, \frac{m}{n}\right)$ ta suy ra

$$mn^2 + n = f\left(qn^3 + n\right) = n^3 f\left(\frac{m}{n}\right) + n \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} \Rightarrow f(q) = q.$$

Như vậy $f(q) = q \quad \forall q \in \mathbb{Q}^+$. Kết hợp với hàm f tăng nghiêm ngặt ta dễ dàng chứng minh được $f(x) = x \quad \forall x > 0$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x) = x \quad \forall x > 0$.

□

Bài toán 16 (PAMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

i) $(f(x) + y - 1)(g(y) + x - 1) = (x + y)^2 \quad \forall x, y > 0;$

ii) $(-f(x) + y)(g(y) + x) = (x + y + 1)(y - x - 1) \quad \forall x, y > 0.$

Lời giải. Giả sử tồn tại các hàm số f, g thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thay y bởi $x + 1$ vào phương trình ii) ta suy ra

$$(-f(x) + x + 1)(g(x + 1) + x) = 0,$$

chú ý rằng $g(x + 1) + x > 0$ nên từ đây suy ra $f(x) = x + 1 \quad \forall x > 0$. Thay vào i) ta suy ra $g(y) = y + 1 \quad \forall y > 0$. Thử lại ta thấy cặp hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

Bài toán 17 (Iran MO Third Round 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y) + f(f(z))) = z + f(y + f(x))$$

với mọi số thực dương x, y, z.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y, z)$ chỉ mệnh đề $f(x + f(y) + f(f(z))) = z + f(y + f(x)) \quad \forall x, y, z > 0$.
Dễ dàng chứng minh được f đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Từ $P(x, f(y), z)$ ta suy ra

$$f\left(x + f(f(y)) + f(f(z))\right) = z + f(f(y) + f(x)) \quad \forall x, y, z > 0.$$

Thay đổi vai trò x, y trong đẳng thức trên và đối chiếu với chính nó, suy ra

$$f\left(x + f(f(y)) + f(f(z))\right) = f\left(y + f(f(x)) + f(f(z))\right) \quad \forall x, y, z > 0.$$

Do f đơn ánh nên từ đây suy ra

$$x + f(f(y)) = y + f(f(x)) \quad \forall x, y > 0$$

hay $f(f(x)) = x + c \quad \forall x > 0$ với $c \geq 0$ là hằng số (nếu $c < 0$ thì ta có thể chọn x sao cho $x + c < 0$, vô lý). Khi đó từ $P(1, 1, x)$ ta suy ra

$$f(x + c + f(1) + 1) = x + f(1 + f(1)) \quad \forall x > 0.$$

Do đó $f(x) = x + u \quad \forall x > m$ với $m = c + f(1) + 1$ và $u = f(1 + f(1)) - c - f(1) - 1$. Ta chọn x đủ lớn sao cho $x > m$ và $x + u > m$, khi đó $P(x, y, z)$ trở thành

$$x + f(y) + f(f(z)) + u = z + y + x + 2u \implies f(y) = y + u - c. \quad \forall y > 0.$$

Thay lại vào phương trình ban đầu ta tìm được $f(x) = x \quad \forall x > 0$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = x \quad \forall x > 0.$$

□

Bài toán 18 (Czech-Polish-Slovak Match 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)+\frac{y+1}{f(y)}\right)=\frac{1}{f(y)}+x+1$$

với mọi số thực dương x,y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ mệnh đề

$$f\left(f(x)+\frac{y+1}{f(y)}\right)=\frac{1}{f(y)}+x+1\quad\forall x,y>0.$$

Dể thấy hàm f đơn ánh trên $\mathbb{R}^+$. Từ $P(x,1)$ suy ra

$$f\left(f(x)+\frac{2}{f(1)}\right)=\frac{1}{f(1)}+x\quad\forall x>0.$$

Do đó $f(x)\to+\infty$ khi $x\to+\infty$. Với mọi $y>0$, từ $P(x,y)$ ta suy ra hàm f nhận mọi giá trị trên $\left(\frac{1}{f(y)}+1;+\infty\right)$. Từ đây cho $y\to+\infty$ ta suy ra hàm f nhận mọi giá trị trên $(1;+\infty.)$

Với mọi $\delta\in(0;1)$, ta viết $\delta=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$ với $A>B>1$. Khi đó tồn tại $y_1,y_2>0$ sao cho $f(y_1)=A$ và $f(y_2)=B$. Với $x>0$ bất kỳ, đặt $x_1=x$ và $x_2=x+\delta$. Ta có

$$\frac{1}{f(y_1)}+x_1+1=\frac{1}{f(y_2)}+x_2+1.$$

Suy ra

$$f\left(f(x_1)+\frac{y_1+1}{f(y_1)}\right)=f\left(f(x_2)+\frac{y_2+1}{f(y_2)}\right)$$

hay

$$\left(f(x_1)+\frac{y_1+1}{f(y_1)}\right)=\left(f(x_2)+\frac{y_2+1}{f(y_2)}\right).$$

Do đó $f(x+\delta)=f(x)+\varepsilon_\delta$ với $\varepsilon_\delta=\frac{y_1+1}{f(y_1)}-\frac{y_2+1}{f(y_2)}$ phụ thuộc vào δ. Từ đây bằng quy nạp ta cũng thu được $f(x+n\delta)=f(x)+n\varepsilon_\delta$ với mọi số nguyên dương n.

Nhận xét 1. *Hàm f tuyến tính trên $\mathbb{Q}^+$.*

Chứng minh. Trước hết, với mọi số nguyên $k>1$ ta có

$$f(2)=f\left(1+k.\frac{1}{k}\right)=f(1)+k.\varepsilon_{\frac{1}{k}}\implies\varepsilon_{\frac{1}{k}}=\frac{f(2)-f(1)}{k}.$$

Với $x\in\mathbb{Q}^+$, ta viết $x=\frac{m}{n}$ với $m,n\in\mathbb{Z}^+$, khi đó

$$\begin{aligned}f(x)=f\left(1+\frac{m-n}{n}\right)&=f(1)+(m-n)\varepsilon_{\frac{1}{n}}=f(1)+\frac{(m-n)(f(2)-f(1))}{n}\\&=f(1)+(x-1)(f(2)-f(1)).\end{aligned}$$

□

Nhận xét 2. *Hàm f không giảm trên $\mathbb{R}^+$.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $y > x > 0$ sao cho $f(x) > f(y)$. Khi đó ta chọn số nguyên dương k đủ lớn sao cho $\delta = \dfrac{y-x}{k} < 1$. Từ đó suy ra

$$f(y) = f(x + k\delta) = f(x) + k\varepsilon_\delta \implies \varepsilon_\delta = \frac{f(y) - f(x)}{k} < 0.$$

Cố định $t > 0$, lúc đó

$$f(t + n\delta) = f(t) + n\varepsilon_\delta \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Từ đây cho $n \to +\infty$ ta suy ra ngay điều vô lý. Vậy hàm f không giảm. □

Từ các khẳng định trên ta suy ra hàm f tuyến tính trên $\mathbb{R}^+$ hay $f(x) = ax + b \quad \forall x > 0$ với a, b là các hằng số. Thay lại vào phương trình ban đầu thì tìm được $a = 1$ và $b = 0$ hay $f(x) = x \quad \forall x > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = x \quad \forall x > 0.$$

□

Bài toán 19 (Switzerland TST 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$x + f(yf(x) + 1) = xf(x + y) + yf(yf(x))$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $x + f(yf(x) + 1) = xf(x + y) + yf(yf(x)) \quad \forall x, y > 0$.
Từ $P\left(x, \frac{x}{f(x)}\right)$ ta thu được

$$x + f(x + 1) = xf\left(x + \frac{x}{f(x)}\right) + x \Rightarrow f(x + 1) = f\left(x + \frac{x}{f(x)}\right) \quad \forall x > 0. \tag{1}$$

Ta chứng minh f là đơn ánh. Giả sử tồn tại các số thực $u > v > 0$ sao cho $f(u) = f(v)$. Khi đó từ $P(u, y)$ và $P(v, y)$ ta suy ra

$$u(f(u + y) - 1) = v(f(v + y) - 1) \quad \forall y > 0.$$

Từ đây, thay y bởi $y - v$ và đặt $C = u - v > 0$ thì được

$$u(f(C + y) - 1) = v(f(y) - 1) \Rightarrow f(y + C) - 1 = \frac{v}{u}(f(y) - 1) \quad \forall y > v. \tag{2}$$

Từ (2), bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f(y + nC) = \left(\frac{v}{u}\right)^n .(f(y) - 1) \quad \forall y > v, n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Cố định $y_0 > v$, từ (3), cho $n \to +\infty$ thì được

$$\lim_{n\to+\infty} (f(y_0 + nC) - 1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{v}{u}\right)^n .(f(y_0) - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(y_0 + nC) = 1.$$

Như vậy, với mọi $y_0 > v$ ta đều có $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_0 + nC) = 1$.

Với $y_0 > v$ cố định, xét dãy số $a_n = y_0 + nC \quad \forall n \geq 1$. Từ $P\left(x, \frac{a_n}{f(x)}\right)$ ta suy ra

$$x + f(a_n + 1) = xf\left(x + \frac{a_n}{f(x)}\right) + \frac{a_n}{f(x)}.f(a_n) \quad \forall x > 0, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{4}$$

Cố định $x = c > 0$. Cho $n \to +\infty$, khi đó

$$c + f(a_n + 1) \to c + 1$$

vì $f(a_n + 1) = f\left((y_0 + 1) + nC\right)$. Mặt khác

$$cf\left(c + \frac{a_n}{f(c)}\right) + \frac{a_n}{f(c)}.f(a_n) \to +\infty$$

vì

$$\frac{a_n}{f(c)}.f(a_n) \to +\infty, \quad cf\left(c + \frac{a_n}{f(c)}\right) > 0.$$

Do đó từ (4) ta thu được điều vô lý. Như vậy f là đơn ánh, khi đó từ (1) suy ra

$$x + 1 = x + \frac{x}{f(x)} \implies f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài toán 20 (Taiwan TST 2022, Round 2)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(x + y^2 f(y)\right) = f(1 + yf(x))f(x)$$

với mọi số thực dương x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ mệnh đề $f\left(x + y^2 f(y)\right) = f(1 + yf(x))f(x) \quad \forall x, y > 0$

Đặt $\mathcal{S} = \{k > 0 \mid f(k + y) = f(k + y^2 f(y) \quad \forall y > 0\}$.

Từ $P(1, 1)$ ta suy ra $f(1) = 1$. Từ $P(1, y)$ suy ra $f(1 + y) = f(1 + y^2 f(y) \quad \forall y > 0$ hay $1 \in \mathcal{S}$.

Nếu f là đơn ánh thì từ đây ta suy ra ngay $f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$, thử lại thấy hàm số này thỏa mãn. Xét trường hợp f không là đơn ánh.

Với $a, b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$. Từ $P(a, x)$ và $P(b, x)$ thu được

$$f(a + x^2 f(x)) = f(b + x^2 f(x)) \quad \forall x > 0.$$

Do đó, với $k \in \mathcal{S}$ ta suy ra $k + y^2 f(y) \in \mathcal{S}$ với mọi $y > 0$. Nói riêng $1 + y^2 f(y) \in \mathcal{S} \quad \forall y > 0$.

Nhận xét 1. *Nếu $k \in \mathcal{S}$ thì*

$$f\big(1 + yf(k + x)\big)f(k + x) = f\big(1 + xf(k + y)\big)f(k + y)$$

với mọi $x, y > 0$. Ký hiệu mệnh đề này là $Q(k, x, y)$.

Chứng minh. Ta có $k + x^2 f(x) \in \mathcal{S} \quad \forall x > 0$. Khi đó

$$f(k + y + x^2 f(x)) = f(k + y^2 f(y) + x^2 f(x)) \quad \forall x, y > 0.$$

Thay đổi vai trò x, y thì được

$$f(k + y + x^2 f(x)) = f(k + x + y^2 f(y)) \quad \forall x, y > 0.$$

Kết hợp với $P(x + k, y)$ và $P(y + k, x)$ ta suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 2. *Nếu $k > l \in \mathcal{S}$ thì*

$$f(1 + yf(k + x))f(k + x) = f(1 + (y + k - l)f(l + x))f(l + x)$$

với mọi $x, y > 0$.

Chứng minh. Từ $Q(l, x, k - l + y)$ ta suy ra

$$f\left(1 + (y + k - l)f(l + x)\right) f(l + x) = f\left(1 + xf(k + y)\right) f(k + y) \quad \forall x, y > 0.$$

Kết hợp với $Q(k, x, y)$ ta suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3. *Với mọi $k > l \in \mathcal{S}$ ta đều có $f(k + x) \leq f(l + x) \quad \forall x > 0$. Nếu đẳng thức xảy ra với x, k, l nào đó thì đẳng thức cũng đúng với mọi x, k, l.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại x, k, l sao cho $f(k+x) > f(l+x)$. Khi đó tồn tại $y > 0$ sao cho

$$yf(k+x) = (y+k-l)f(l+x).$$

Kết hợp với **Nhận xét 2** ta suy ra $f(l+x) = f(k+x)$, vô lý.

Giả sử $f(l+x) = f(k+x)$ với x, k, l nào đó. Khi đó từ **Nhận xét 2** thu được

$$f(yf(k+x)+1) = f\left(yf(k+x)+1+(k-l)f(k+x)\right) \quad \forall y > 0.$$

Do đó $f(y) = f(y+T) \quad \forall y > 1$ với $T = (k-l)f(k+x) > 0$. Giả sử tồn tại x_1, k_1, l_1 (chú ý $k_1 > l_1$) sao cho $f(k_1+x_1) \neq f(l_1+x_1)$. Khi đó tồn tại $y > 0$ đủ lớn và $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$yf(k_1+x_1) - (y+k_1-l_1)f(l_1+x_1) = nT.$$

Kết hợp với **Nhận xét 2** ta suy ra $f(l_1+x_1) = f(k_1+x_1)$, mâu thuẫn. □

Trở lại bài toán. Do f không là đơn ánh nên tồn tại $c_1 \neq c_2$ sao cho $f(c_1) = f(c_2)$. Từ $P(c_1, 1)$ và $P(c_2, 1)$ thu được $f(c_1+1) = f(c_2+1)$. Khi đó

$$f(1+c_1^2f(c_1)) = f(1+c_1) = f(1+c_2) = f(1+c_2^2f(c_2)).$$

Tương tự, ta cũng thu được $f(2+c_1^2f(c_1)) = f(2+c_2^2f(c_2))$. Do $c_1^2f(c_1) \neq c_2^2f(c_2)$ và

$$1+c_1^2f(c_1), 1+c_2^2f(c_2) \in \mathcal{S}$$

nên theo **Nhận xét 3** ta suy ra

$$f(x+l) = f(x+k) \quad \forall x > 0, k > l \in \mathcal{S}.$$

Sử dụng đẳng thức trên với $x = 1, k = 1+y^2f(y) \in \mathcal{S}, l = 1 \in \mathcal{S}$, thu được

$$f(2+y^2f(y)) = f(2) \quad \forall y > 0.$$

Khi đó từ $P\left(2, \frac{y}{f(2)}\right)$ ta suy ra $f(y+1) = 1 \quad \forall y > 0$. Kết hợp với $P(x, 1)$ ta thu được $f(x) = 1 \quad \forall x > 0$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0, \quad f(x) = 1 \quad \forall x > 0.$$

□

Bài toán 21 (USAMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x)=f\left(f\left(f(x)\right)+y\right)+f\left(xf(y)\right)f(x+y)$$

với mọi số thực dương x,y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với số nguyên dương n, ký hiệu $f^n(x)=f\left((\ldots f(x)\ldots)\right)$ gồm n lần tác động f vào x.

Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f(x)=f\left(f\left(f(x)\right)+y\right)+f\left(xf(y)\right)f(x+y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

Nhận xét 1. $f\left(f(x)\right)\geq x\quad \forall x>0$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x>0$ sao cho $f\left(f(x)\right)<x$, khi đó từ $P\left(x,x-f\left(f(x)\right)\right)$ ta suy ra

$$f\left(xf\left(x-f\left(f(x)\right)\right)\right)f\left(2x-f\left(f(x)\right)\right)=0,$$

vô lý. Vậy $f(x)\geq x\quad \forall x>0$. □

Nhận xét 2. $f^{2k}(x)=f\left(f(x)\right)\quad \forall x>0$ *với mọi số nguyên dương* k.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $k\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $f^{2k}(x)>f\left(f(x)\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Dễ thấy, từ **Nhận xét 1** ta có

$$f^{2k}(x)\geq f^{2k-2}(x)\geq\ldots\geq f\left(f(x)\right)\geq x,$$

từ đây thay x bởi $f(x)$ thì được $f^{2k+1}(x)\geq f(x)\quad \forall x>0$.

Từ $P\left(x,f^{2k}(x)-f\left(f(x)\right)\right)$ ta suy ra

$$f(x)=f^{2k+1}(x)+f\left(xf\left(f^{2k}(x)-f\left(f(x)\right)\right)\right)f\left(x+f^{2k}(x)-f\left(f(x)\right)\right)\quad \forall x>0.$$

Kết hợp với $f^{2k+1}(x)\geq f(x)\quad \forall x>0$ ta suy ra

$$f\left(xf\left(f^{2k}(x)-f\left(f(x)\right)\right)\right)f\left(x+f^{2k}(x)-f\left(f(x)\right)\right)\leq 0,$$

điều này mâu thuẫn. Như vậy $f^{2k}(x)\leq f\left(f(x)\right)\quad \forall x>0$ với mọi số nguyên dương k. Kết hợp với $f^{2k}(x)\geq f\left(f(x)\right)$ từ **Nhận xét 1** ta suy ra điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3. *Hàm f đơn ánh trên* $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại hai số thực dương $a>b$ sao cho $f(a)=f(b)$. Từ $P\left(f\left(f(x)\right),y\right)$ kết hợp với $f^4(x)=f\left(f(x)\right)$ ta suy ra

$$f^3(x)=f\left(f\left(f(x)\right)+y\right)+f\left(f\left(f(x)\right)f(y)\right)f\left(f\left(f(x)\right)+y\right)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+.\tag{1}$$

Lần lượt thay $y=a,y=b$ vào phương trình (1) và đối chiếu hai phương trình, ta suy ra

$$f\left(f\left(f(x)\right)+a\right)=f\left(f\left(f(x)\right)+b\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

Từ phương trình (2) kết hợp với $P(x,a),P(x,b)$ ta suy ra

$$f(x+a)=f(x+b)\implies f(x)=f(x+a-b)\quad \forall x>b.$$

Với $x>b$, thay $y=a-b>0$ vào (1) và chú ý rằng $f\left(f(x)\right)\geq x>b$, ta thu được

$$f^3(x)=f^3(x)+f\left(f\left(f(x)\right)f(a-b)\right)f^3(x)\implies f\left(f\left(f(x)\right)f(a-b)\right)=0,$$

vô lý. Vậy f là đơn ánh, chứng minh hoàn tất. □

Do f là đơn ánh nên từ **Nhận xét 2** ta suy ra $f(f(x)) = x \quad \forall x > 0$.
Khi đó $P(x, y)$ viết lại thành

$$Q(x, y) : f(x) = (1 + f(xf(y)))\, f(x + y) \quad \forall x, y > 0.$$

Từ $Q(1, x - 1)$ ta suy ra

$$f(1) = (1 + f(f(x - 1)))\, f(x) \implies f(x) = \frac{f(1)}{x} \quad \forall x > 1.$$

Với mọi $x > 1$, từ $Q\left(x, f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ suy ra

$$\frac{f(1)}{x} = f(x) = \left(1 + f\left(xf\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right) f\left(x + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = (1 + f(1))\, \frac{f(1)}{x + f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

hay $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1)x$. Với $t < 1$, ta thay x bởi $\frac{1}{t} > 1$ thì được $f(t) = \frac{f(1)}{t} \quad \forall t < 1$.

Vậy $f(x) = \frac{c}{x} \quad \forall x > 0$ với $c = f(1)$ là hằng số dương. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

§2.3 Phương trình hàm trên tập rời rạc

Bài toán 22 (British MO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$2bf\left(f\left(a^2\right)+a\right)=f(a+1)f(2ab)$$

với mọi số nguyên dương a,b.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(a,b)$ chỉ khẳng định $2bf\left(f\left(a^2\right)+a\right)=f(a+1)f(2ab)\quad\forall a,b\in\mathbb{Z}^+$.'
Từ $P(1,b)$ ta suy ra

$$2bf(f(1)+1)=f(2)f(2b)\Rightarrow f(2b)=2bc\quad\forall b\in\mathbb{Z}^+$$

với $c=\frac{f(f(1)+1)}{f(2)}$ là hằng số.
Với số nguyên dương k, từ $P(2k,1)$ ta thu được

$$2f\left(f\left(4k^2\right)+2k\right)=f(2k+1)f(4k)\Rightarrow f(2k+1)=2kc+1.$$

Với a lẻ, b chẵn, từ $P(a,b)$ ta suy ra $(a-1)c+1=ac$ hay $c=1$. Do đó $f(x)=x$ với mọi số nguyên $x\geq 2$.

Chú ý rằng ta có $f(f(1)+1)=f(2)$ suy ra $f(1)+1=2$ hay $f(1)=1$. Từ đó, ta kết luận được $f(x)=x\quad\forall x\in\mathbb{Z}^+$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x)=x\quad\forall x\in\mathbb{Z}^+.$$

□

Bài toán 23 (District Olympiad 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$\frac{x^3 + 3x^2 f(y)}{x + f(y)} + \frac{y^3 + 3y^2 f(x)}{y + f(x)} = \frac{(x+y)^3}{f(x+y)}$$

với mọi số nguyên dương x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định

$$\frac{x^3 + 3x^2 f(y)}{x + f(y)} + \frac{y^3 + 3y^2 f(x)}{y + f(x)} = \frac{(x+y)^3}{f(x+y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^+.$$

Đặt $a = f(1) \in \mathbb{Z}^+$. Từ $P(1, 1)$ suy ra

$$\frac{2(1+3a)}{1+a} = \frac{8}{f(2)} \implies \frac{4(a+1)}{1+3a} = f(2) \implies 1 + 3a \mid 4a + 4.$$

Khi đó $1 + 3a \mid 3(4a + 4) - 4(3a + 1) \implies 1 + 3a \mid 8 \implies 1 + 3a = 4 \implies a = f(1) = 1$.
Từ $P(x, 1)$ suy ra

$$\frac{x^3 + 3x^2}{x + 1} + \frac{1 + 3f(x)}{1 + f(x)} = \frac{(x+1)^3}{f(x+1)} \quad \forall x \in \mathbb{Z}^+.$$

Ta chứng minh $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp

- Với $n = 1$ ta có $f(1) = 1$ hiển nhiên đúng theo chứng minh trên;
- Giả sử khẳng định đúng đến $n = k$, với $n = k + 1$, từ $P(k, 1)$ ta suy ra

$$\frac{(k+1)^3}{k+1} = \frac{k^3 + 3k^2}{k+1} + \frac{1 + 3k}{1 + k} = \frac{k^3 + 3k^2}{k+1} + \frac{1 + 3f(k)}{1 + f(k)} = \frac{(k+1)^3}{f(k+1)} \implies f(k+1) = k+1.$$

Như vậy $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. □

Bài toán 24 (Francophone MO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(m+n)+f(m)f(n)=n^2(f(m)+1)+m^2(f(n)+1)+mn(2-mn)$$

với mọi số nguyên m,n.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(m,n)$ chỉ mệnh đề

$$f(m+n)+f(m)f(n)=n^2(f(m)+1)+m^2(f(n)+1)+mn(2-mn)\quad\forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Đặt $a=f(0), b=f(1)$, khi đó từ $P(1,n)$ ta suy ra

$$f(n+1)=(1-b)f(n)+bn^2+2n+1\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

hay

$$f(n+1)-(n+1)^2=(1-b)(f(n)-n^2)\quad\forall n\in\mathbb{Z}.$$

Nếu $b=0$ thì từ đẳng thức trên ta suy ra

$$f(n+1)^2-(n+1)^2=f(n)-n^2\quad\forall n\in\mathbb{Z}$$

hay $f(n)=n^2+a\quad\forall n\in\mathbb{Z}$. Thay lại vào $P(m,n)$ ban đầu ta tìm được $k=0$ hoặc $k=-1$.
Nếu $b=1$ thì $f(n)=n^2\quad\forall n\in\mathbb{Z}$, thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.
Nếu $b=2$ thì $f(n)=n^2+(-1)^na$. Thay lại vào $P(m,n)$ ta tìm được $a=0$ hoặc $a=-1$.
Ta xét các trường hợp còn lại, nghĩa là $|1-b|\geq 2$. Dễ thấy

$$f(n)-n^2=a(1-b)^n\quad\forall n\in\mathbb{Z}.$$

Cho $n\to-\infty$ ta suy ra $\lim\limits_{n\to-\infty}(f(n)-n^2)=0$. Do đó, tồn tại n_0 sao cho $f(n)=n^2\quad\forall n\leq n_0$.
Khi đó ta suy ra ngay $a=0$ hay $f(n)=n^2\quad\forall n\in\mathbb{Z}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.
Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(n)=n^2\quad\forall n\in\mathbb{Z},\quad f(n)=n^2-1\quad\forall n\in\mathbb{Z},\quad f(n)=n^2+(-1)^{n+1}\quad\forall n\in\mathbb{Z}.$$

□

Bài toán 25 (Japan MO Final 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f^{f(n)}(m)+mn=f(m)f(n)$$

với mọi số nguyên dương m,n, trong đó $f^k(n)=\underbrace{f(f(\dots f(}_{k}n)\dots))$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(m,n)$ chỉ khẳng định $f^{f(n)}(m)+mn=f(m)f(n)\quad\forall m,n\in\mathbb{Z}^+$.

Nhận xét 1. *f là đơn ánh.*

Chứng minh. Giả sử a,b là hai số nguyên dương sao cho $f(a)=f(b)$, khi đó, từ $P(m,a)$ và $P(m,b)$ ta suy ra

$$ma=mb\Rightarrow a=b.$$

Do đó, f là đơn ánh. □

Nhận xét 2. $f(n)>1\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Chứng minh. Giả sử phản chứng, khi đó tồn tại $n_0\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $f(n_0)=1$. Cố định m, từ $P(m,n_0)$ suy ra

$$f(m)+mn_0=f(m).1\Rightarrow mn_0=0,$$

điều này không thể xảy ra. Như vậy $f(n)\neq 1\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+$. □

Nhận xét 3. *Nếu a,b là hai số nguyên dương sao cho $f^a(n)=f^b(n)\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+$ thì $a=b$.*

Chứng minh. Giả sử $a>b$, đặt $c=a-b>0$. Khi đó chú ý rằng f là đơn ánh nên từ

$$f^a(n)=f^b(n)\Rightarrow f^c(n)=n\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+.$$

Do đó tồn tại n_1 sao cho $f(n_1)=1$, điều này mâu thuẫn với **Nhận xét 2**. Do đó, ta phải có $a=b$. Chứng minh hoàn tất. □

Trở lại bài toán, từ $P(m,n)$ và $P(n,m)$ ta suy ra

$$f^{f(n)}(m)=f^{f(m)}(n)\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+.$$

Ta thay m bởi $f(n)$ vào phương trình trên thì được

$$f^{f^2(n)}(n)=f^{f(n)+1}(n)\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+.\tag{1}$$

Áp dụng **Nhận xét 3**, suy ra

$$f^2(n)=f(n)+1\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+.$$

Khi đó, với m,n nguyên dương, ta có

$$f^{m+1}(n)=f^m(n)+1=f^{m-1}(n)+2=\dots=f(n)+m.\tag{2}$$

Thay m bởi $f(n)-1$ vào phương trình (2) thì được

$$f^{f(n)}(n)=2f(n)-1\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+.\tag{3}$$

Khi đó, từ (1) và (3) ta suy ra

$$f(n)^2 - 2f(n) + 1 = n^2 \Rightarrow f(n) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(n) = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

□

Bài toán 26 (Taiwan TST 2022, Round 1)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f\left(\left\lfloor\frac{f(x)+f(y)}{2}\right\rfloor\right)+f(x)=f(f(y))+\left\lfloor\frac{f(x)+f(y)}{2}\right\rfloor$$

với mọi số nguyên x,y, trong đó ký hiệu $\lfloor x\rfloor$ chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(u,v)$ chỉ việc thay bộ (x,y) bởi bộ (u,v) vào phương trình ban đầu.
Ký hiệu $\operatorname{Im}(f)=\{f(x)\mid x\in\mathbb{Z}\}$. Từ $P(x,y)$ và $P(y,x)$ ta suy ra

$$f(f(x))+f(x)=f(f(y))+f(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{Z}.$$

Do đó, tồn tại hằng số $N\in\mathbb{Z}$ sao cho $f(f(x))+f(x)=N\quad\forall x\in\mathbb{Z}$ hay

$$f(x)+x=N\quad\forall x\in\operatorname{Im}(f).$$

Khi đó, phương trình ban đầu viết lại thành

$$f\left(\left\lfloor\frac{a+b}{2}\right\rfloor\right)-\left\lfloor\frac{a+b}{2}\right\rfloor=N-a-b\quad\forall a,b\in\operatorname{Im}(f).\tag{*}$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng với $a,b\in\operatorname{Im}(f)$ thì

$$N-a-b+\left\lfloor\frac{a+b}{2}\right\rfloor=N-\left\lceil\frac{a+b}{2}\right\rceil\in\operatorname{Im}(f).$$

Mặt khác,từ $f(x)=N-x\quad\forall x\in\operatorname{Im}(f)$ ta suy ra với $x\in\operatorname{Im}(f)$ thì $N-x\in\operatorname{Im}(f)$. Điều này dẫn đến với $a,b\in\operatorname{Im}(f)$ thì

$$N-\left(N-\left\lceil\frac{a+b}{2}\right\rceil\right)=\left\lceil\frac{a+b}{2}\right\rceil\in\operatorname{Im}(f).$$

Ta chứng minh $\operatorname{Im}(f)$ có duy nhất một phần tử. Giả sử phản chứng, khi đó tồn tại $u>v$ sao cho $m,n\in\operatorname{Im}(f)$. Đặt $u=v+k$ với $k\in\mathbb{Z}^+$. Nếu $k\geq 2$ thì theo nhận xét trên ta suy ra

$$\left\lceil\frac{u+v}{2}\right\rceil=v+\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil\in\operatorname{Im}(f).$$

Tiến hành tương tự, ta suy ra $v+k_n\in\operatorname{Im}(f)$ với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$, trong đó dãy (k_n) xác định bởi

$$k_1=k,\quad k_{n+1}=\left\lceil\frac{k_n}{2}\right\rceil\quad\forall n\geq 1.$$

Dễ thấy (k_n) là dãy giảm và bị chặn dưới nên hội tụ, do vậy, tồn tại số nguyên m đủ lớn sao cho $k_m=k_{m+1}=\ldots$ Chú ý rằng với $k_m=\left\lceil\dfrac{k_m}{2}\right\rceil$ ta suy ra $k_m=1$. Như vậy $v,v+1\in\operatorname{Im}(f)$.

Thay $a=v+1$ và $b=u$ vào phương trình (*) thu được

$$N-2u=f(u)-u=f\left(\left\lfloor\frac{u+u+1}{2}\right\rfloor\right)-\left\lfloor\frac{u+u+1}{2}\right\rfloor=N-2u-1,$$

vô lý. Như vậy $\operatorname{Im}(f)$ chỉ chứa một phần tử hay f là hàm hằng. Thử lại ta thấy hàm hằng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\square$

Bài toán 27 (USA TSTST 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = f(m)$$

với mọi số nguyên dương m, n.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ký hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay bộ $(m.n)$ bởi bộ (u, v) vào phương trình ban đầu.

Xét dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = \dfrac{f(n!)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Với mọi số nguyên dương n, từ $P(n!, n+1)$ ta suy ra

$$\left\lfloor \frac{f((n+1)!)}{n+1} \right\rfloor = f(n!) \implies \frac{f((n+1)!)}{n+1} - 1 < f(n!) \le \frac{f((n+1)!)}{n+1}$$

hay $a_n \le a_{n+1} < a_n + \dfrac{1}{n!}$. Khi đó với mọi n nguyên dương ta có

$$a_{n+1} < a_n + \frac{1}{n!} < a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < \ldots < a_1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < a_1 + e.$$

Như vậy (a_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi $a_1 + e$, do đó (a_n) có giới hạn hữu hạn α.

Nếu tồn tại k nguyên dương sao cho $a_k = \alpha$ thì từ

$$\alpha = a_k \le a_\ell \le \alpha \implies a_\ell = \alpha \quad \forall \ell > k.$$

Với m nguyên dương bất kỳ, ta chọn $\ell > k$ sao cho $m \mid \ell!$, khi đó tồn tại n nguyên dương sao cho $mn = \ell!$ và từ $P(m, n)$ ta suy ra

$$f(m) = \left\lfloor \frac{f(\ell!)}{\frac{\ell!}{m}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f(\ell!)}{\ell!}.m \right\rfloor = \lfloor \alpha m \rfloor.$$

Như vậy $f(m) = \lfloor \alpha m \rfloor \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$.

Ta xét trường hợp không tồn tại k sao cho $a_k = \alpha$, khi đó $a_k < \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$. Với m nguyên dương bất kỳ, ta chọn ℓ nguyên dương đủ lớn sao cho $m \mid \ell!$ và $a_\ell = \alpha - x$ với x đủ bé. Điều này dẫn đến tồn tại n nguyên dương sao cho $mn = \ell!$ và từ $P(m, n)$ suy ra

$$f(m) = \left\lfloor \frac{f(\ell!)}{\frac{\ell!}{m}} \right\rfloor = \lfloor \alpha m - mx \rfloor.$$

Nếu αm là số nguyên thì ta chọn ℓ nguyên dương đủ lớn sao cho $mx < 1$, khi đó

$$f(m) = \lfloor \alpha m - mx \rfloor = \alpha m - 1 = \lceil \alpha m \rceil - 1.$$

Nếu αm không là số nguyên thì ta chọn ℓ nguyên dương đủ lớn sao cho $mx < \{\alpha m\}$, khi đó $\{\alpha m\} - mx \in (0; 1)$ và

$$f(m) = \lfloor \lfloor \alpha m \rfloor + \{\alpha m\} - mx \rfloor = \lfloor \alpha m \rfloor = \lceil \alpha m \rceil - 1.$$

Từ các khẳng định trên suy ra $f(m) = \lceil \alpha m \rceil - 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$.

Ta chứng minh hai họ hàm số trên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Trước hết ta chứng minh với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$ thì

$$\left\lfloor \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Đặt $x = A + \epsilon$ với $A \in \mathbb{Z}$ và $\epsilon \in (0; 1)$. Nếu $\epsilon < \dfrac{1}{n}$ thì $\lfloor xn \rfloor = An$ hay

$$\left\lfloor \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \right\rfloor = A = \lfloor x \rfloor.$$

Nếu tồn tại số nguyên $i \in [1; n-1]$ sao cho $\dfrac{i+1}{n} > \epsilon \geq \dfrac{i}{n}$ thì $\lfloor xn \rfloor = An + i$ hay

$$\left\lfloor \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor A + \frac{i}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Chứng minh hoàn tất. Như vậy, với hàm số $f(m) = \lfloor \alpha m \rfloor$ ta có

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \alpha mn \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor \alpha m \rfloor = f(m) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Xét hàm số $f(m) = \lceil \alpha m \rceil - 1$. Nếu αmn không là số nguyên thì $\lceil \alpha mn \rceil - 1 = \lfloor \alpha m \rfloor$ và

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \alpha mn \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor \alpha m \rfloor = f(m).$$

Nếu $\alpha mn, \alpha m$ là số nguyên thì (chú ý $n \mid \alpha mmn$)

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lceil \alpha mn \rceil - 1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha mn - 1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha mn}{n} \right\rfloor - 1 = \lceil \alpha m \rceil - 1 = f(m).$$

Nếu αmn là số nguyên và αm không là số nguyên thì (chú ý $n \nmid \alpha mn$)

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha mn - 1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha mn}{n} \right\rfloor = \lfloor \alpha m \rfloor = \lceil \alpha m \rceil - 1 = f(m).$$

Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(m) \equiv \lfloor \alpha m \rfloor, \quad f(m) \equiv \lceil \alpha m \rceil - 1 \quad (\alpha \text{ là hằng số thực}).$$

$\square$

Bài toán 28 (MEMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le \ldots$ và

$$f(n) + n + 1, \quad f(f(n)) - f(n)$$

đều là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Đặt $b_n = \sqrt{f(n) + n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Vì

$$f(n) + n + 1 > f(n-1) + n - 1 + 1 \quad \forall n > 1$$

nên dãy (b_n) tăng thực sự, chú ý rằng $b_1 \ge 2$ nên ta suy ra

$$b_n \ge b_{n-1} + 1 \ge \ldots \ge b_1 + n - 1 \ge n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Hay nói cách khác $f(n) \ge n^2 + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$.
Với số nguyên dương n bất kỳ, theo giả thiết, tồn tại số nguyên dương j, k sao cho

$$f(f(n)) + f(n) + 1 = j^2, \quad f(f(n)) - f(n) = k^2.$$

Dễ thấy $j > k$ và

$$2f(n) + 1 = (f(f(n)) + f(n) + 1) - (f(f(n)) - f(n)) = j^2 - k^2 = (j-k)(j+k).$$

Vì $j > k$ nên $j \ge k + 1$ và $j + k \ge 2k + 1$, khi đó

$$2f(n) + 1 \ge 2k + 1 \implies f(n) \ge k$$

hay

$$f(f(n)) - f(n) \ge f(n)^2.$$

Từ các kết quả trên ta suy ra

$$f(f(n)) = f(n)^2 + f(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Khi đó

$$b_{f(n)} = \sqrt{f(f(n)) + f(n) + 1} = \sqrt{f(n)^2 + 2f(n) + 1} = f(n) + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Với số nguyên dương n_0 bất kỳ, ta chọn n đủ lớn sao cho $f(n) > n_0$ (hiển nhiên chọn được do $f(n) \to +\infty$ khi $n \to +\infty$). Ta có

$$f(n) + 1 = b_{f(n)} \ge b_{f(n)-1} + 1 \ge f(n) + 1 \implies b_{f(n)-1} = f(n).$$

Tiến hành tương tự ta thu được $b_i = i + 1 \quad \forall i < f(n)$ hay $b_{n_0} = n_0 + 1$.
Như vậy $b_n = n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Thay vào ta suy ra $f(n) = n^2 + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(n) = n^2 + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

□

§2.4 Bất phương trình hàm

Bài toán 29 (IMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho với mỗi số thực dương x, tồn tại duy nhất số thực dương y thỏa mãn
$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Với $x > 0$, ký hiệu $g(x)$ là số thực dương duy nhất thỏa mãn mệnh đề
$$P(x) : xf(g(x)) + g(x)f(x) \leq 2.$$
Từ $P(x)$ và $P(g(x))$ ta dễ dàng suy ra $g(g(x)) = x \quad \forall x > 0$.

Nhận xét 1. *Với mọi $x > 0$ thì $yf(x) + xf(y) > 2 \quad \forall y \neq g(x)$.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $y \neq g(x)$ sao cho $yf(x) + xf(y) \leq 2$, khi đó tồn tại hai số thực dương phân biệt là y và $g(x)$ cùng thỏa mãn $P(x)$, mâu thuẫn với tính duy nhất của $g(x)$. □

Nhận xét 2. $g(x) = x \quad \forall x > 0$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x > 0$ để $g(x) \neq x$, khi đó theo **Nhận xét 1** ta suy ra
$$2xf(x) = xf(x) + xf(x) > 2 \implies f(x) > \frac{1}{x}.$$
Tương tự ta cũng có, chú ý rằng $g(x) \neq g(g(x))$
$$2g(x)f(g(x)) = g(x)f(g(x)) + g(x)f(g(x)) > 2 \implies f(g(x)) > \frac{1}{g(x)}.$$
Từ hai đánh giá trên ta suy ra
$$2 \geq xf(g(x)) + g(x)f(x) > x.\frac{1}{g(x)} + g(x).\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{g(x)}.\frac{g(x)}{x}} = 2,$$
vô lý. Như vậy $g(x) = x$ với mọi $x > 0$. □

Ta viết $P(x)$ lại thành $xf(x) \leq 1 \quad \forall x > 0$. Với $t > 0$ cố định, xét $x \neq t$, từ **Nhận xét 1** suy ra
$$xf(t) + tf(x) > 2 \implies f(t) > \frac{2 - tf(x)}{x} \geq \frac{2 - t.\frac{1}{x}}{x} = \frac{2x - t}{x^2} \quad \forall x \neq t.$$
Từ đây cho $x \to t$ ta suy ra $f(t) \geq \frac{1}{t}$. Kết hợp với $P(t)$ ta suy ra $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài toán 30 (AUS 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : [1;+\infty) \to [0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f(2f(x)+y) \geq f\left(x^3\right) + f\left(y^2 f(x) + x^2 + xy\right)$$

với mọi số thực $x, y \geq 1$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f(2f(x)+y) \geq f(x^3) + f(y^2f(x)+x^2+xy) \quad \forall x, y \geq 1$.
Dễ dàng kiểm tra được hàm số $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét trường hợp f không đồng nhất 0.

Nhận xét 1. $f(x) > 0 \quad \forall x > 1$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại số thực $a > 1$ sao cho $f(a) = 0$. Từ $P(a,a)$ ta suy ra

$$0 = f(a) \geq f\left(a^3\right) + f\left(2a^2\right) \geq f\left(a^3\right) \geq 0 \implies f\left(a^3\right) = 0.$$

Từ đây bằng quy nạp ta cũng chứng minh được $f(a^{3n}) = 0$ với mọi số nguyên dương n.
Với $x \geq 1$ cố định ta chọn số nguyên dương n đủ lớn sao cho $a^{3n} \geq 2f(x)+1$ (hiển nhiên chọn được do $a > 1$). Khi đó từ $P(x, a^{3n} - 2f(x))$ ta suy ra

$$0 = f\left(a^{3^n}\right) \geq f\left(x^3\right) + f\left(\left(a^{3n} - 2f(x)\right)^2 f(x) + x^2 + x\left(a^{3n} - 2f(x)\right)\right) \geq f\left(x^3\right) \geq 0$$

hay $f(x^3) = 0$. Do đó $f(x) = 0 \quad \forall x \geq 1$, mâu thuẫn. Như vậy $f(x) > 0 \quad \forall x > 1$. □

Nhận xét 2. $f(x) < x^2 + x - 1 \quad \forall x > 1$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $b > 1$ sao cho $f(b) \geq b^2 + b - 1$. Xét phương trình ẩn y

$$2f(b) + y = y^2 f(b) + b^2 + by \iff y^2 f(b) + (b-1)y + b^2 - 2f(b) = 0.$$

Xét hàm số $g(t) = t^2 f(b) + (b-1)t + b^2 - 2f(b)$, có $g(1) = b^2 + b - 1 - f(b) \leq 0$ nên phương trình trên có nghiệm $y_0 \geq 1$. Khi đó từ $P(b, y_0)$ ta suy ra $f(b^3) \leq 0$, điều này mâu thuẫn với chứng minh trên. □

Từ **Nhận xét 2** ta suy ra tồn tại $x_0 > 1$ đủ lớn sao cho $x_0^3 \geq 2f(x)+1$, đặt $y_1 = x_0^3 - 2f(x_0) \geq 1$, khi đó từ $P(x_0, y_1)$ thu được

$$0 \geq f\left(y_1^2 f(x_0) + x_0^2 + x_0 y_1\right) \geq 0 \implies f\left(y_1^2 f(x_0) + x_0^2 + x_0 y_1\right) = 0,$$

điều này mâu thuẫn với **Nhận xét 1** do $y_1^2 f(x_0) + x_0^2 + x_0 y > 2$. Như vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn trong trường hợp này. Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x) = 0 \quad \forall x \geq 1$. □

Bài toán 31 (Abel Competition Final 2021-2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - \frac{\sqrt{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} \geq x^2 f(x)$$

với mọi số thực dương x.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ký hiệu $P(x)$ chỉ khẳng định

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - \frac{\sqrt{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} \geq x^2 f(x) \quad \forall x > 0.$$

Từ $P(x)$ và $P\left(\frac{1}{x}\right)$ ta suy ra

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq x^2 f(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x^{-1}}\right) \geq x^2 \cdot \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x > 0.$$

Đẳng thức xảy ra hay $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f(x)$, thay vào $P(x)$ ta suy ra

$$1 - f(x) = 1 - \frac{\sqrt{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} = x^2 f(x) \implies f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \forall x > 0.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 32 (Indonesia TST 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right) \leq (f(x) + y)(x - f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Từ $P(0, 0)$ ta suy ra

$$f(0)^2 \leq 0 \implies f(0) = 0.$$

Từ $P(x, 0)$ suy ra

$$f\left(x^2\right) \leq xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, từ $P(0, x)$ ta cũng có

$$-f\left(x^2\right) \leq -xf(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f\left(x^2\right) = xf(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây, thay x bởi $-x$ ta dễ dàng chứng minh được f là hàm lẻ. Thay lại vào $P(x, y)$ ta được

$$f(x)f(y) \leq xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ký hiệu mệnh đề trên là $Q(x, y)$. Từ $Q(x, -y)$ suy ra

$$-f(x)f(y) \leq -xy \implies f(x)f(y) \geq xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp hai bất phương trình này ta suy ra

$$f(x)f(y) = xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Thay $y = 1$ thu được $f(x)f(1) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $f(1) = 0$ thì $x = 0$ với mọi x, vô lý. Như vậy $f(1) \neq 0$ hay $f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$ với $c \neq 0$ là hằng số. Từ đó dễ dàng tìm được $c = 1$ hoặc $c = -1$. Thử lại ta thấy các hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Bài toán 33 (Philippine MO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(a-b)f(c-d)+f(a-d)f(b-c)\le (a-c)f(b-d)$$

với mọi số thực a,b,c và d.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(a,b,c,d)$ chỉ mệnh đề

$$f(a-b)f(c-d)+f(a-d)f(b-c)\le (a-c)f(b-d)\quad \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

Từ $P(0,0,0,0)$ cho ta $2f(0)^2\le 0$ hay $f(0)=0$. Dễ dàng kiểm tra được hàm $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét trường hợp tồn tại $a\neq 0$ thỏa $f(k)\neq 0$.

Từ $P(a,a,0,d)$ ta thu được

$$f(a-d)f(a)\le af(a-d)\quad \forall a,d\in\mathbb{R}. \tag{*}$$

Thay d bởi $a-k$ vào đẳng thức (*) thì được

$$f(k)f(a)\le af(k)\quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

Trường hợp 1. $f(k)>0$.

Khi đó $f(a)\le a\quad \forall a\in\mathbb{R}$. Với $h<0$, ta thay d bởi $a-h$ vào (*) thì được

$$f(h)f(a)\le af(h)\quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

Chú ý rằng $f(h)\le h<0$ nên ta suy ra $f(a)\ge a\quad \forall a\in\mathbb{R}$. Như vậy $f(a)=a\quad \forall a\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.

Trường hợp 2. $f(k)<0$.

Khi đó $f(a)\ge a\quad \forall a\in\mathbb{R}$. Với $h>0$, ta thay d bởi $a-h$ vào (*) thì được

$$f(h)f(a)\le af(h)\quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

Chú ý rằng $f(h)\ge h>0$ nên ta suy ra $f(a)\le a\quad \forall a\in\mathbb{R}$. Như vậy $f(a)=a\quad \forall a\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.

Vậy tất cả hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$f(x)\equiv x,\quad f(x)\equiv 0.$$

□

– Hết –