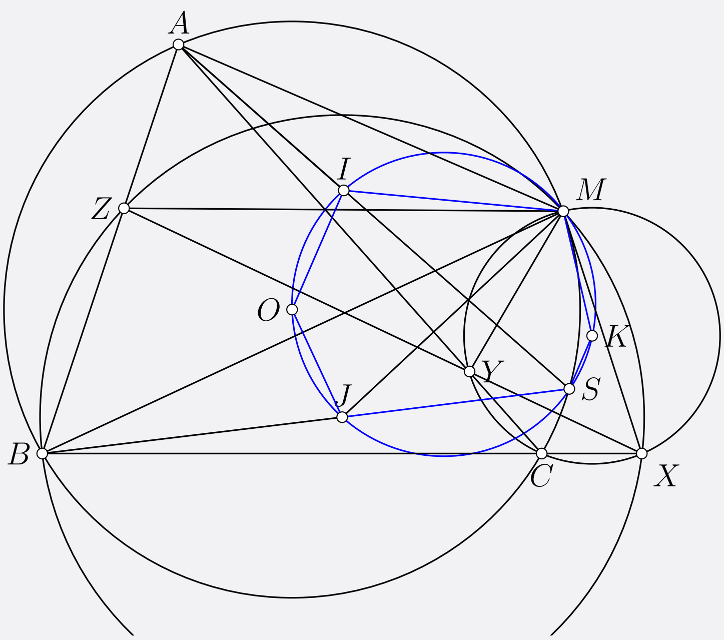
NGUYỄN NGỌC DŨNG và một nhóm giáo viên

PHƯƠNG PHÁP GIẢI
ĐỀ TUYỂN SINH
9

MÔN: TOÁN



(Tài liệu được phát hành tại Nhóm TOÁN QUẬN 7 – fb.com/groups/toanquan7/)

LỜI MỞ ĐẦU

Nhằm giúp cho các em học sinh chuẩn bị thi vào lớp 10 các trường công lập, trường chuyên, chúng tôi biên soạn cuốn sách **"Phương pháp giải đề tuyển sinh 9"**.

Cuốn sách tổng hợp từ các đề thi của các trường trong cả nước, được biên soạn rất tâm huyết từ nhóm giáo viên: Nguyễn Ngọc Dũng, Đặng Thị Bích Tuyền, Nguyễn Xuân Tùng, Nguyễn Thành Điệp, Võ Tấn Đạt, Nguyễn Ngọc Nguyên, Ngô Trâm Anh, Lê Minh Thuần, Trần Nguyễn Vân Nhi, Nguyễn Trung Kiên, Lê Đức Việt, Phạm Tiến Đạt, Lâm Phan, Hang Tran, Skynet Le. Với cuốn sách này hi vọng các em sẽ có thể gặp nhiều dạng toán ôn thi và mức độ ra đề của từng trường để từ đó các em đề ra phương pháp ôn thi tốt nhất cho mình.

Trong quá trình biên soạn tài liệu, dù đã cố gắng hết sức nhưng không tránh khỏi những sai sót, rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của các bạn đọc gần xa để bộ sách hoàn thiện hơn nữa.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về:

Địa chỉ mail: nguyenngocdung1234@gmail.com

Facebook: https://www.facebook.com/ngocdung.nguyen.14268

Hãy tham gia Nhóm **TOÁN QUẬN 7** – https://www.facebook.com/groups/165647350665705/ để được tải tài liệu THCS và THPT miễn phí.

Thay mặt nhóm tác giả!

Nguyễn Ngọc Dũng

Mục lục

Đề 1. Đề thi tuyển sinh lớp 10 sở GD&ĐT Bắc Giang 2016-2017

Bài 1

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{12} - \sqrt{48}$.

b) Tìm m để hàm số $y = (2m - 1)\,x + 5,\ m \neq \frac{1}{2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phân tích. Đối với câu a) chúng ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Đối với câu b) chúng ta chỉ cần nhớ được tính chất đồng biến của hàm số bậc nhất là có thể hoàn tất yêu cầu của bài toán.

Lời giải.

a) Ta có $A = 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{12} - \sqrt{48} = \sqrt{3} + \frac{3}{2}.2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$.

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow 2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Vậy $m > \frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

■

Bình luận. Câu a) là một bài tập đơn giản ở dạng tính giá trị của một biểu thức chứa căn, không yêu cầu quá cao về mặt tư duy.

Câu b) bài toán không mang tính chất đánh đố, nhưng yêu cầu học sinh cần nắm vững kiến thức lý thuyết về tính chất đồng biến và nghịch biến của hàm số bậc nhất.

Bài tập tương tự.

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 2.\sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{8} - \sqrt{18}$.

b) Tìm m đề hàm số $y = (2m - 3)x + 2017,\ m \neq \frac{3}{2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 2

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$.

b) Rút gọn biểu thức

$$B = \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{6x}{x - 1} \right) \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1.$$

c) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (với x là ẩn) (1)

c.1) Giải phương trình (1) với $m = 0$.

c.2) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $\left| \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Phân tích. Câu a) yêu cầu giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cơ bản, chúng ta có thể giải được bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.
Câu b) yêu cầu rút gọn biểu thức chứa căn, thoạt nhìn biểu thức khá cồng kềnh và có nhiều phân thức, chúng ta sẽ nghĩ ngay tới hướng tìm mẫu chung và quy đồng, sau khi quy đồng và rút gọn thì bài toán không còn quá phức tạp.
Câu c) bao gồm hai ý, ở ý c.1) chúng ta có thể giải bằng cách sử dụng công thức nghiệm (công thức nghiệm thu gọn) quen thuộc, hoặc nhẩm nghiệm nhanh bằng cách ứng dụng định lý Viète, ở ý c.2) là dạng bài tập tìm nghiệm của phương trình bậc hai thỏa yêu cầu cho trước có lồng ghép kiến thức về giá trị lớn nhất, tuy nhiên việc vận dụng định lý Viète và một số phương pháp đánh giá bất đẳng thức để giải bài toán là dễ nhận ra.

Lời giải.

a) Cách 1: Từ phương trình thứ hai của hệ phương trình ta có

$$x + 3y = -2 \Leftrightarrow x = -2 - 3y.$$

Thế $x = -2 - 3y$ vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta có

$$3(-2 - 3y) - 2y = 5 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1.$$

Từ $y = -1$ thế vào $x = -2 - 3y$ ta được $x = 1$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1; -1)$.
Cách 2: Ta có

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x - 9y = 6 \end{cases}.$$

Ta lấy hai phương trình $3x-2y=5$ và $-3x-9y=6$ cộng vế theo vế, ta được

$$-11y = 11 \Leftrightarrow y=-1.$$

Thế $y=-1$ vào $x+3y=-2$ ta có $x=-2-3(-1)=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1;-1)$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\frac{6x}{x-1}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+6x}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}\,(x-1)}{\sqrt{x}-1}\\
&= \frac{\left(6x-6\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\\
&= \frac{6\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\\
&= 6x.
\end{aligned}$$

Vậy $B=6x$ với $x\geq 0, x\neq 1$.

c) c.1) Cách 1: Với $m=0$ phương trình (1) trở thành

$$x^2-2x-3=0 \quad (*).$$

Ta có các hệ số của phương trình $(*)$ là $a=1, b=-2, c=-3$, nhận xét rằng $a-b+c=1+2-3=0$. Theo hệ quả của định lý Viète thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm là $x_1=-1$ và $x_2=\dfrac{-c}{a}=3$.

Cách 2: Ta có các hệ số của phương trình $(*)$ là $a=1, b'=-1, c=-3$.

$\Delta' = b'^2-ac = 1+3=4$. Do $\Delta'>0$, áp dụng công thức nghiệm thu gọn, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1-2}{1}=-1,\ x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1+2}{1}=3.$$

c.2) Ta có $\Delta'=(m+1)^2-(2m-3)=m^2+4>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Xét

$$P=\left|\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right|.$$

Theo định lí Viète và công thức nghiệm thu gọn ta có

$$\begin{cases}
x_1+x_2=\dfrac{2(m+1)}{1}=2(m+1)\\
|x_1-x_2|=\left|\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}-\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right|=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}=\dfrac{2\sqrt{m^2+4}}{1}=2\sqrt{m^2+4}
\end{cases}.$$

Thế vào $P = \left|\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right|$ ta được
$$P = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+4}}.$$
Ta có
$$P = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+4}} \le \frac{|m|+1}{\sqrt{m^2+4}}.$$
Theo bất đẳng thức BCS ta có
$$\frac{|m|+1}{\sqrt{m^2+4}} = \frac{|m|.1+2.\dfrac{1}{2}}{\sqrt{m^2+4}} \le \frac{\sqrt{(m^2+2^2).\left(1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)}}{\sqrt{m^2+4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
suy ra
$$P \le \frac{\sqrt{5}}{2}.$$
Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} m.1>0 \\ \dfrac{|m|}{1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ |m|=4 \end{cases} \Leftrightarrow m=4.$

Vậy $m=4$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

■

Bình luận. Câu a) là một bài toán cơ bản, không yêu cầu quá cao về tư duy, tuy nhiên có thể thấy rằng việc lựa chọn phương pháp thế sẽ được ưu tiên hơn khi giải bài toán này.
Câu b) là một bài toán có "độ nhiễu" khá cao và có thể gây mất nhiều thời gian cho các học sinh.
Câu c). Ở ý c.1) đây cũng là một bài toán cơ bản về giải phương trình bậc hai, tuy nhiên có thể thấy rằng việc lựa chọn phương pháp ứng dụng định lý Viète sẽ được ưu tiên hơn. Ở ý c.2) Việc lồng ghép nhiều kiến thức vào một bài toán sẽ đưa đến sự phân loại tốt hơn và gây khó khăn khi học sinh phải biết vận dụng linh hoạt các kiến thức đó.

Bài tập tương tự.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x-6y=12 \\ 2x+y=2 \end{cases}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ với $x>0; x\neq 16$.

c) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-4=0$ (với x là ẩn) (1)

c.1) Giải phương trình với $m=0$.

c.2) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho biểu thức $|x_1+x_2|-|x_1.x_2|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3

Một hiệu sách A có bán hai đầu sách: Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 và Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 10. Trong một ngày của tháng 5 năm 2016, hiệu sách A bán được 60 cuốn mỗi loại trên theo giá bìa, thu được số tiền là 3.300.000đ và lãi được 420.000đ. Biết rằng mỗi cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 lãi 10% giá bìa, mỗi cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn 10 lãi 15% giá bìa. Hỏi giá bìa mỗi cuốn sách đó là bao nhiêu?

Phân tích. Chúng ta có thể dễ dàng dựa trên câu hỏi của đề bài và mô hình hóa bài toán bằng cách đặt giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 là x đồng và giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 10 là y đồng, với $x > 0; y > 0$. Phương trình đầu tiên của hệ được lập dựa trên thông tin về doanh số của hiệu sách bán trong ngày hôm đó. Phương trình thứ hai của hệ được lập dựa trên thông tin về tiền lãi.

Lời giải. Đặt giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 là x đồng $(x > 0)$.
Đặt giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 10 là y đồng $(y > 0)$.
Trong một ngày hiệu sách bán được 60 cuốn sách mỗi loại và thu về được 3300000 đồng nên ta có

$$60x + 60y = 3300000 \quad (1).$$

Số tiền lãi khi bán được 60 cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 là

$$10\%.60x = 6x \text{ đồng}.$$

Số tiền lãi khi bán được 60 cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 10 là

$$15\%.60y = 9y \text{ đồng}.$$

Vì số tiền lãi của ngày hôm đó là 420000 đồng nên

$$6x + 9y = 420000 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 60x + 60y & = 3300000 \\ 6x + 9y & = 420000 \end{cases}.$$

Ta có $60x + 60y = 3300000 \Leftrightarrow x + y = 55000 \Leftrightarrow x = 55000 - y$.
Ta có $6x + 9y = 420000 \Leftrightarrow 2x + 3y = 140000$.
Thế $x = 55000 - y$ vào $2x + 3y = 140000$ ta được

$$2(55000 - y) + 3y = 140000 \Leftrightarrow y = 30000.$$

Thế $y = 30000$ vào $x = 55000 - y$ ta được

$$x = 25000.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(25000; 30000)$.

So sánh với điều kiện rằng buộc $x > 0; y > 0$ ta kết luận:

Giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 là 25000 đồng.

Giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 10 là 30000 đồng. ■

Bình luận. Đây là một bài toán ở dạng giải bài toán thực tế bằng cách lập hệ phương trình, bài toán thực tế này khá dễ vì học sinh chỉ cần dựa vào câu hỏi của bài toán để đặt ẩn và xây dựng một hệ phương trình.

Bài 4

Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, gọi E là một điểm trên cung nhỏ AD (E không trùng với A và D), EC cắt OA tại M, trên tia AB lấy điểm P sao cho $AP = AC$, tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai là Q.

a) Chứng minh: Tứ giác $DEMO$ nội tiếp.

b) Chứng minh: Tiếp tuyến của (O) tại Q song song với AC.

c) Chứng minh: $AM.ED = \sqrt{2}OM.EA$.

d) Nối EB cắt OD tại N, xác định vị trí của E để tổng $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

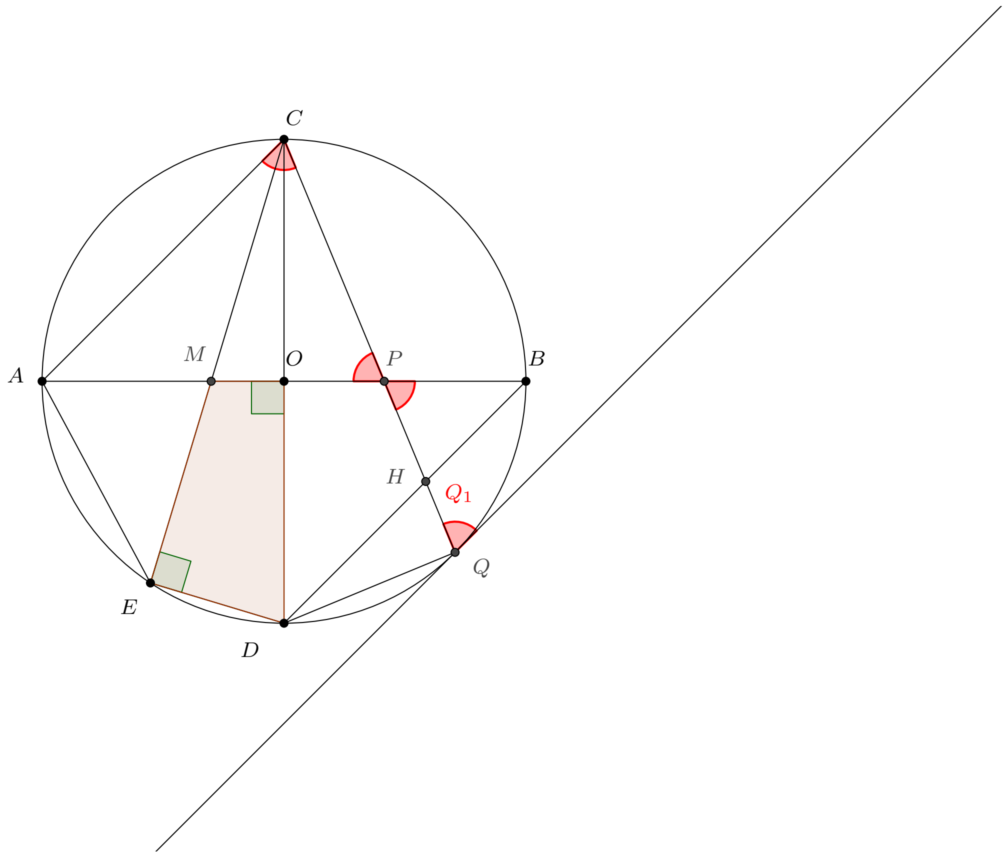
Phân tích. Câu a) yêu cầu chứng minh tứ giác $DEMO$ nội tiếp, theo dữ kiện bài toán ta thấy ngay rằng góc $\widehat{MOD} = 90^\circ$, do đó ta sẽ cần chứng minh thêm góc $\widehat{MED} = 90^\circ$ và điều này thì hiển nhiên vì $\widehat{MED}$ chắn nửa đường tròn. Nếu suy nghĩ theo một hướng khác rằng sẽ chứng minh tổng của hai góc $\widehat{OME} + \widehat{ODE} = 180^\circ$, ta dựa theo định lý về góc nội tiếp và góc có đỉnh nằm trong đường tròn ta cũng có thể giải quyết được bài toán.

Câu b) yêu cầu chứng minh tiếp tuyến tại Q song song với AC, học sinh có thể suy nghĩ theo hướng chứng minh $\widehat{ACP} = \widehat{Q_1}$ (với $\widehat{Q_1}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến của (O) tại Q và dây cung QC như hình vẽ), tuy nhiên phương án chứng minh trực tiếp sẽ bế tắc, do đó chúng ta sẽ tìm một góc khác để chứng minh gián tiếp, dễ thấy rằng tam giác ACP cân tại A nên $\widehat{ACP} = \widehat{APC}$, vậy ta sẽ chứng minh $\widehat{APC} = \widehat{Q_1}$, việc chứng minh khá đơn giản, ta chỉ cần dùng định lý về góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và định lý về góc có đỉnh nằm trong đường tròn.

Câu c) yêu cầu chứng minh $AM.ED = \sqrt{2}OM.EA$, chúng ta nghĩ ngay tới phương án sử dụng tam giác đồng dạng, nhưng chúng ta sẽ bế tắc khi cố gắng tìm hai tam giác đồng dạng có các cạnh tương ứng, do đó chúng ta sẽ chuyển qua ý tưởng chọn hai cặp tam giác đồng dạng. Để ý thấy $\sqrt{2}$ trong đẳng thức cần chứng minh và theo giả thiết của bài toán thì ta có $AC = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}OC$ (áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông AOC) và các góc $\widehat{OAC} = \widehat{AEC}$. Từ đó ta chọn được hai cặp tam giác đồng dạng là $\triangle CEA \backsim \triangle CAM$ và $\triangle COM \backsim \triangle CED$. Sử dụng tỉ lệ đồng dạng và $AC = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}OC$ ta có ngay điều cần chứng minh.

Câu d) yêu cầu xác định vị trí của E để tổng $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Chúng ta nghĩ ngay tới phương án dùng bất đẳng thức Cauchy, để ý rằng tỉ lệ $\dfrac{OM}{AM}$ theo câu c sẽ bằng $\dfrac{ED}{\sqrt{2}EA}$, do đó ta sẽ suy nghĩ tới hướng dùng tam giác đồng dạng để chuyển tỉ lệ $\dfrac{ON}{DN}$ về tỉ lệ $k.\dfrac{EA}{ED}$ (k là hằng số) để áp dụng bất đẳng thức Cauchy, nhưng việc chỉ dùng một cặp tam giác đồng dạng để chuyển tỉ lệ là không khả thi, khi đó ý tưởng là chúng ta sẽ lại chọn hai cặp tam giác đồng dạng như câu c).

Lời giải.



a)

Cách 1: Xét tứ giác $DEMO$ ta có $\widehat{MOD} = 90^\circ$ (vì giả thiết $AB \perp CD$ tại O) và $\widehat{MED} = 90^\circ$ (vì $\widehat{MED}$ chắn nửa đường tròn (O)), suy ra tứ giác $DEMO$ nội tiếp.

Cách 2: Xét tứ giác $DEMO$ ta có

$$\begin{aligned}
\widehat{OME} + \widehat{ODE} &= \frac{1}{2}\left(\widehat{AOC} + \widehat{EOB}\right) + \frac{1}{2}\widehat{EOC} \\
&= \frac{1}{2}\left(\widehat{AOC} + \widehat{EOB} + \widehat{EOC}\right) \\
&= \left(\widehat{AOC} + \widehat{EOD} + \widehat{DOB} + \widehat{EOA} + \widehat{AOC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2.\widehat{AOC} + \widehat{DOB} + \widehat{AOD}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2.90^\circ + 90^\circ + 90^\circ\right) \\
&= 180^\circ
\end{aligned}$$

suy ra tứ giác $DEMO$ nội tiếp.

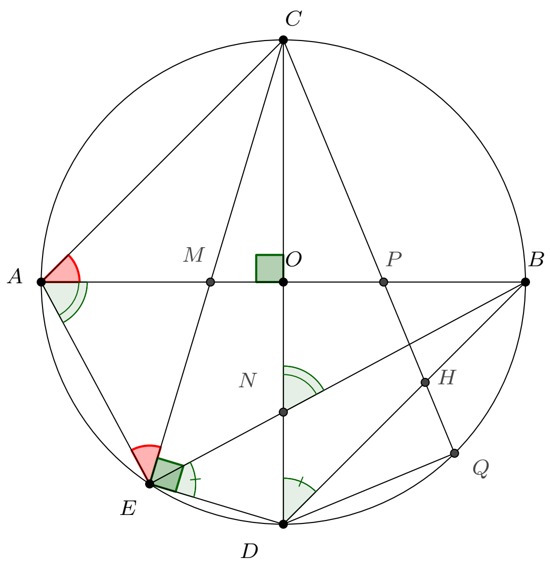
b) Gọi $\widehat{Q_1}$ là góc hợp bởi tiếp tuyến tại Q và dây cung QC (như hình vẽ).

Do $AC = AP$ nên tam giác CAP cân tại A, suy ra $\widehat{ACP} = \widehat{APC}$ (1).

Ta có $\widehat{APC} = \dfrac{1}{2}\left(\overparen{AOC} + \overparen{BOQ}\right)$ và $\widehat{Q_1} = \dfrac{1}{2}\overparen{COQ} = \dfrac{1}{2}\left(\overparen{COB} + \overparen{BOQ}\right)$.

Mà $\overparen{COB} = \overparen{AOC}$, suy ra $\widehat{Q_1} = \widehat{APC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACP} = \widehat{Q_1}$, suy ra tiếp tuyến của (O) tại Q song song với AC.



c)

Ta có $\widehat{CAM} = \widehat{AEC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau là $\overparen{AC} = \overparen{BC}$).

Xét hai tam giác CEA và tam giác CAM có

$$\begin{cases} \widehat{CAM} = \widehat{CEA} \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{ACE} \text{ (góc chung)} \end{cases}$$

suy ra $\triangle CAE \backsim \triangle CMA$, suy ra $\dfrac{AM}{EA} = \dfrac{AC}{EC}$.

Xét hai tam giác COM và tam giác CED có

$$\begin{cases} \widehat{COM} = \widehat{CED} = 90^\circ \text{ (chứng minh ở câu a)} \\ \widehat{ECD} \text{ (góc chung)} \end{cases}$$

suy ra $\triangle COM \backsim \triangle CED$, suy ra $\dfrac{OM}{ED} = \dfrac{CO}{CE}$.

Mặt khác tam giác AOC vuông tại O, theo định lý Pythagoras ta có

$$AC^2 = OC^2 + OA^2 \Leftrightarrow AC^2 = 2OA^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}OC$$

suy ra

$$\frac{AM}{EA} = \frac{\sqrt{2}OC}{CE} = \frac{\sqrt{2}OM}{ED} \text{ hay } AM.ED = \sqrt{2}OM.EA.$$

d) Ta có $\widehat{BAE} = \frac{1}{2}\widehat{EOB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{EOD} + \widehat{DOB}\right)$ và $\widehat{ONB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BOC} + \widehat{EOD}\right)$.
Mà $\widehat{BOC} = \widehat{DOB} = 90°$, suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{ONB}$.
Mặt khác ta có $\widehat{AEB} = 90°$ (vì $\widehat{AEB}$ chắn nửa đường tròn (O)).
Xét hai tam giác BON và tam giác BEA có

$$\begin{cases} \widehat{AEB} = \widehat{BON} = 90° \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{BAE} = \widehat{ONB} \text{ (chứng minh trên)} \end{cases}$$

suy ra $\triangle BON \backsim \triangle BEA$, suy ra $\dfrac{BO}{BE} = \dfrac{ON}{EA}$.
Ta có $\widehat{BDN} = \widehat{BED}$ (vì là hai góc nội tiếp lần lượt chắn hai cung bằng nhau là $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$).
Xét hai tam giác BND và tam giác BED ta có

$$\begin{cases} \widehat{BDN} = \widehat{BED} \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{EBD} \text{ (góc chung)} \end{cases}$$

suy ra $\triangle BND \backsim \triangle BDE$, suy ra $\dfrac{DN}{ED} = \dfrac{\sqrt{2}ON}{EA}$ suy ra $\dfrac{ON}{DN} = \dfrac{EA}{\sqrt{2}ED}$.
Theo câu c) ta có $\dfrac{OM}{AM} = \dfrac{ED}{\sqrt{2}EA}$, suy ra $\dfrac{ON}{DN}.\dfrac{OM}{AM} = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $\dfrac{ON}{DN}$ và $\dfrac{OM}{AM}$ ta có

$$\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN} \geq 2\sqrt{\frac{OM}{AM}.\frac{ON}{DN}} = 2.\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $ED = EA$ hay E là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$.
Vậy $\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$ khi E là điểm nằm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$.

■

Bình luận.

a) Đây là câu hỏi không mang tính đánh đố, học sinh có thể dễ dàng thấy được cách giải quyết bài toán.

b) Ở câu hỏi này, yêu cầu học sinh cần phải biết sắp xếp giả thiết và chuyên hướng tư duy khi gặp phải bế tắc.

c) Ở câu hỏi này, học sinh thấy có thể nhanh chóng nghĩ tới phương án sử dụng phương pháp tam giác đồng dạng để giải bài toán, tuy nhiên việc chọn ra các cặp tam giác đồng dạng là không dễ dàng.

d) Tương tự như câu c) tuy nhiên đây là một câu hỏi nâng cao hơn khi yêu cầu học sinh phải vận dụng thêm kiến thức về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, khiến học sinh gặp không ít khó khăn.

Bài 5

Cho hai số thực $x; y$ thỏa mãn $x \leq 2; x + y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 14x^2 + 9y^2 + 22xy - 42x - 34y + 35$.

Phân tích. Khi nhìn vào biểu thức cần đánh giá, chúng ta sẽ nghĩ ngay tới phương án dùng phương pháp đưa biểu thức về dạng tổng của các bình phương. Tuy nhiên việc đưa biểu thức A về dạng tổng của các bình phương có quá nhiều sự lựa chọn, và việc "mò mẫm" có khả năng dẫn tới bế tắc. Để ý thấy rằng từ điều kiện của hai biến $x; y$ ta thấy rằng $x \leq 2; y \geq 0$, do đó nếu có thể biến đổi hai biến $x; y$ thành hai biến $a; b$ với điều kiện $a \geq 0; b \geq 0$ (hiển nhiên ta nghĩ ngay đến việc đặt $a = 2 - x; b = x + y - 2$) thì bài toán có lẽ sẽ trở nên đơn giản hơn. Và sau khi đổi biến như vậy, cùng với sử dụng phương pháp đưa A về dạng tổng của các bình phương ta có thể giải quyết được bài toán một cách đơn giản hơn.

Lời giải. Đặt $a = 2 - x \geq 0$ và $b = x + y - 2 \geq 0$, suy ra $y = a + b$.
Ta có biểu thức A trở thành

$$\begin{aligned}
A &= 14\left(2-a\right)^2 + 9\left(a+b\right)^2 + 22(2-a)(a+b) - 42(2-a) - 34(a+b) + 35 \\
&= 56 - 56a + 14a^2 + 9a^2 + 18ab + 9b^2 + 44a + 44b - 22a^2 - 22ab - 84 + 42a - 34a - 34b + 35 \\
&= a^2 + 9b^2 - 4ab - 4a + 10b + 7 \\
&= a^2 + 4b^2 + 4 - 4ab - 4a + 8b + 15b^2 + 2b + 3 \\
&= (a - 2b - 2)^2 + 15b^2 + 2b + 3 \\
&\geq 3, \forall a, b \geq 0.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a - 2b - 2 = 0$ và $b = 0$ hay $a = 2$ và $b = 0$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 3, đạt được khi $x = 0; y = 2$. ■

Bình luận. Đây là một bài toán có thể gây mất nhiều thời gian cho học sinh trong quá trình mò mẫm đưa biểu thức A về dạng tổng các bình phương và nhiều khả năng sẽ gặp bế tắc trong việc đánh giá biểu thức để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Ngay sau đây là một phương án giải quyết bài toán một cách "mò mẫm".

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
A &= 14x^2 + 9y^2 + 22xy - 42x - 34y + 35 \\
&= x^2 + 9(x+y)^2 + 4x(x+y) - 8x - 34(x+y) + 35.
\end{aligned}$$

Đặt $x + y = t, t \geq 2$. Ta có

$$\begin{aligned}
A &= x^2 + 9t^2 + 4xt - 8x - 34t + 35 \\
&= (x + 2t - 4)^2 + 5t^2 - 18t + 19 \\
&= (x + 2t - 4)^2 + (t - 2)(5t - 8) + 3 \\
&\geq 3.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x + 2t - 4 = 0$ và $t = 2$ hay $x = 0$ và $t = 2$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 3 khi $x = 0; y = 2$. ■

Đề 2. Đề thi tuyển sinh lớp 10 sở GD & ĐT Bình Dương 2017-2018

Bài 1

Rút gọn biểu thức sau

1) $A = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{27}$;

2) $B = \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

Phân tích. Đối với câu 1) chúng ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Đối với câu 2) chúng ta phải tìm cách đưa biểu thức dưới dấu căn số hai về dạng bình phương của một số, sau đó vận dụng kiến thức cơ bản đã học $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & , A \geqslant 0 \\ -A & , A < 0 \end{cases}$ để trục căn thức và thu gọn.

Lời giải. 1) $A = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{27} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

2) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\ &= \left|3 - \sqrt{5}\right| + \sqrt{\left(1 - \sqrt{5}\right)^2} \\ &= \left(3 - \sqrt{5}\right) + \left|1 - \sqrt{5}\right| \\ &= 3 - \sqrt{5} + \left(\sqrt{5} - 1\right) \\ &= 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

■

Bình luận. Câu 1) là một bài toán đơn giản ở dạng tính giá trị của biểu thức chứa căn, không yêu cầu quá cao về mặt tư duy. Học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay để hỗ trợ.

Câu 2) so với câu 1) có phần nâng cao hơn một chút. Học sinh phải biết cách đưa biểu thức dưới căn về dạng bình phương của một số để trục căn. Lưu ý khi trục căn phải có trị tuyệt đối, khi bỏ trị tuyệt đối phải chú ý dấu của biểu thức. Nhiều học sinh giải sai do quên mất điều này.

Bài tập tương tự.

Rút gọn biểu thức sau

1) $A = 3\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + 7\sqrt{2}$;

2) $B = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{14 - 8\sqrt{3}}$.

Đáp án: 1) $6\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{2}$.

Bài 2

Cho Parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 4x + 9$.

1) Vẽ đồ thị (P).

2) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song (d) và (d_1) tiếp xúc (P).

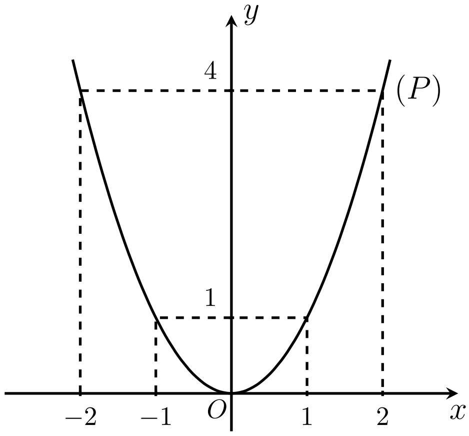
Phân tích. Câu 1) yêu cầu ta vẽ parabol (P) có dạng $y = ax^2\,(a \neq 0)$. Đây là parabol đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Vì vậy, chúng ta cần lấy tối thiểu 5 điểm nằm trên parabol, và chú ý lấy những điểm nằm đối xứng qua trục tung. Từ đó ta có bảng giá trị tương ứng với hàm số, và dựa vào những tọa độ điểm tìm được để vẽ chính xác đồ thị.
Câu 2) yêu cầu ta viết phương trình của đường thẳng. Ta biết rằng phương trình đường thẳng có dạng $y = ax + b$, như vậy để viết phương trình đường thẳng ta phải tìm được các tham số a,b. Từ giả thiết $(d_1) \,//\, (d)$, ta tìm được tham số a. Đường thẳng (d_1) tiếp xúc (P), có nghĩa là (d_1) và (P) chỉ có một giao điểm. Như vậy phương trình hoành độ giao điểm của chúng chỉ có duy nhất 1 nghiệm. Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol là một phương trình bậc 2, với tham số b. Dựa vào điều kiện để phương trình bậc 2 có duy nhất nghiệm, ta tìm được b.

Lời giải. 1) Vẽ đồ thị $(P) : y = x^2$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vậy parabol (P) đi qua 5 điểm: $(-2; 4)$, $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$.



2) Vì đường thẳng (d_1) song song với $(d): y = 4x + 9$ nên (d_1) có dạng $y = 4x + b, (b \neq 9)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (P) là:

$$4x + b = x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - b = 0, (1)$$

(d_1) tiếp xúc $(P) \Leftrightarrow$ phương trình (1) có duy nhất 1 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 2^2 + b = 0 \Leftrightarrow b = -4$ (nhận).

Vậy $(d_1): y = 4x - 4$.

■

Bình luận. Câu 1) là câu đơn giản, chỉ cần nắm được cách vẽ đồ thị hàm số dạng $y = ax^2, (a \neq 0)$ là có thể làm được.

Câu 2) đòi hỏi sự vận dụng kiến thức đã học ở mức cao hơn. Học sinh phải nắm được dạng của phương trình đường thẳng, điều kiện để 2 đường thẳng song song, đường thẳng tiếp xúc với parabol, từ đó giải quyết bài toán.

Bài tập tương tự.

Cho $(P): y = 4x^2$ và $(d): y = 2x - 3$.

1) Vẽ đồ thị (P).

2) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song (d) và (d_1) tiếp xúc (P).

Đáp án: 2) $(d_1): y = 2x - \dfrac{1}{4}$.

Bài 3

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$. Tính $P = (x + y)^{2017}$ với x, y vừa tìm được.

2) Cho phương trình $x^2 - 10mx + 9m = 0$ (1), (m là tham số).

   a) Giải phương trình (1) với $m = 1$.

   b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 - 9x_2 = 0$.

Phân tích. Câu 1) yêu cầu giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cơ bản, chúng ta có thể giải được bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số. Sau khi tìm được nghiệm của phương trình, ta dễ dàng tính được P.

Câu 2) bao gồm 2 ý. Ở ý a) chúng ta có thể giải bằng cách sử dụng công thức nghiệm quen thuộc hay nhẩm nghiệm nhanh bằng cách sử dụng hệ quả của định lý Viète. Ở ý b) là dạng tìm nghiệm của phương trình bậc 2 thỏa yêu cầu cho trước. Đây là dạng bài tập vận dụng định lý Viète quen thuộc.

Lời giải. 1) Cách 1: Ta có

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x + 5(2x - 5) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 11x - 25 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$.

Khi đó $P = (2-1)^{2017} = 1^{2017} = 1$.

Cách 2: Ta có

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x - 10y = 6 \end{cases}$$

Ta lấy hai phương trình trên cộng vế theo vế, ta có

$$-11y = 11 \Leftrightarrow y = -1.$$

Thay $y = -1$ vào phương trình $2x - y = 5$, ta được $x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$.

Khi đó $P = (2-1)^{2017} = 1^{2017} = 1.$.

2) a) Với $m = 1$, phương trình (1) trở thành

$$x^2 - 10x + 9 = 0\,(*)\,.$$

Cách 1: Ta có các hệ số của phương trình $(*)$ là $a = 1, b = -10, c = 9$. $\Delta' = b'^2 - ac = (-5)^2 - 1.9 = 16 > 0$.. Áp dụng công thức nghiệm thu gọn ta có phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt là: $x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-(-5) - \sqrt{16}}{1} = 1; x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-(-5) + \sqrt{16}}{1} = 9$.

Cách 2: Ta có các hệ số của phương trình $(*)$ là $a = 1, b = -10, c = 9$. Nhận xét: $a+b+c = 0$. Vậy theo hệ quả của định lý Viète, phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a} = 9$.

b) Ta có $\Delta' = (-5m)^2 - 9m = 25m^2 - 9m$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 25m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{9}{25} \\ m < 0 \end{array}\right.$. Khi đó, theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 10m \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 9m \end{cases}.$$

Như vậy

$$x_1 - 9x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 9x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 18x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1^2 + x_2^2\right) - 18x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 18x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (10m)^2 - 20.9m = 0 \Leftrightarrow 100m^2 - 180m = 0 \Leftrightarrow m\,(100m - 180) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{9}{5} \end{array}\right..$$

So điều kiện ta loại $m = 0$, nhận $m = \frac{9}{5}$.

■

Bình luận. Câu 1) là bài toán cơ bản, không yêu cầu quá cao về mặt tư duy. Tuy nhiên có thể thấy việc lựa chọn phương pháp thế nên được ưu tiên hơn khi giải bài này. Chúng ta có thể tìm y theo x như trong cách 1, hay tìm x theo y bằng cách sử dụng phương trình thứ 2.

Bài tập tương tự.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$. Tính $P = (x - y)^{2017}$ với x, y vừa tìm được.

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 3 = 0$.

   a) Giải phương trình đã cho với $m = 0$.

   b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 - x_2 = 4$.

Đáp án: 1) $x = 1, y = 1, P = 0$; 2) a)$x \in \{-1; 3\}$; b) $m = 0$.

Bài 4

Hai đội công nhân đắp đê ngăn triều cường. Nếu hai đội cùng làm thì trong 6 ngày xong việc. Nếu làm riêng thì đội I hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội đắp xong đê trong bao nhiêu ngày?

Phân tích.

Lời giải. Gọi x, y (ngày) lần lượt là thời gian đội I và đội II đắp xong đê $(x > y > 6)$. Khi đó:
Trong một ngày, đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), đội II làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).
Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 9 \end{cases}$$

■

Bài 5

Tam giác AMB cân tại M nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. Kẻ $MH \perp AB$, $(H \in AB)$. MH cắt đường tròn tại N. Biết $MA = 10cm, AB = 12cm$.

a) Tính MH và bán kính R của đường tròn;

b) Trên tia đối tia BA lấy điểm C. MC cắt đường tròn tại D, ND cắt AB tại E. Chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp và chứng minh các hệ thức sau: $NB^2 = NE.ND$ và $AC.BE = BC.AE$;

c) Chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

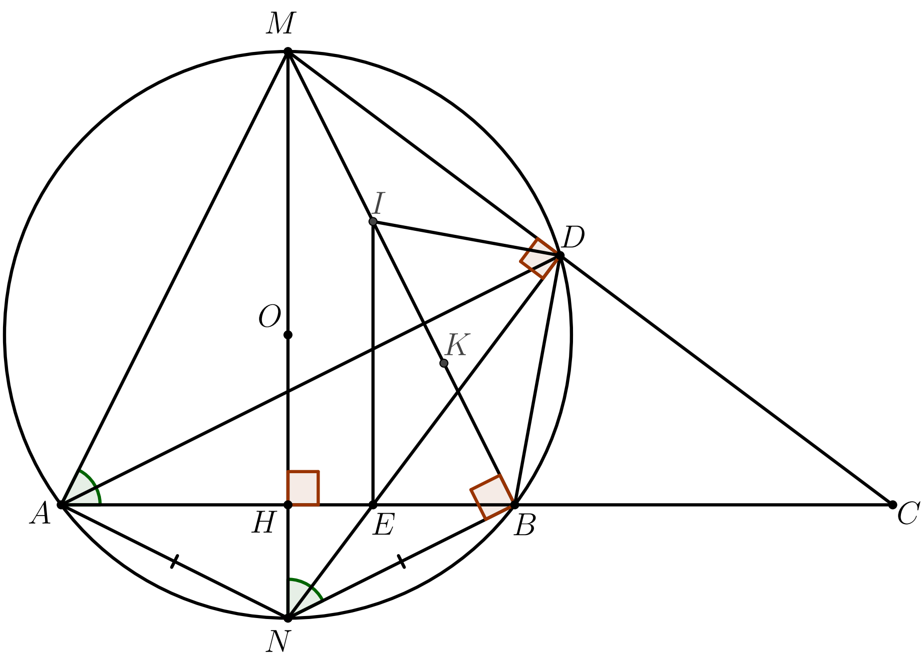
Phân tích. Câu a) yêu cầu tính MH và bán kính R của đường tròn. Ta thấy MH là cạnh góc vuông của tam giác MHA vuông tại H. Trong tam giác này ta đã biết độ dài cạnh MA, và có thể tính độ dài của AH. Áp dụng định lý Pi-ta-go ta sẽ tính được MH.Để tính R, ta sẽ tính độ dài đường kính MN trước. Ta thấy MN là cạnh huyền của tam giác MBN vuông tại B. Trong tam giác này ta đã biết độ dài cạnh MB. Như vậy, ta cần tìm 1 tỷ số lượng giác của $\widehat{MNB}$ hay $\widehat{NMB}$ là sẽ tính được MN.
Câu b) có 3 ý.

1. Ý 1 yêu cầu chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp. Ta thấy ngay rằng $\widehat{MHE} = 90^\circ$, do đó ta sẽ cần chứng minh thêm $\widehat{MDE} = 90^\circ$ và điều này là dễ dàng vì $\widehat{MDE}$ chắn nửa đường tròn.

2. Ý 2 yêu cầu chứng minh hệ thức $NB^2 = NE.ND$. Để chứng minh hệ thức này ta nghĩ đến việc chứng minh 2 tam giác NBE và NDB đồng dạng. Hai tam giác đã có chung $\widehat{MND}$, ta cần chứng minh thêm 2 góc tương ứng bằng nhau nữa là có thể giải quyết được bài toán. Ở đây ta dễ dàng chứng minh $\widehat{EBN} = \widehat{NDB}$ (do đây là hai góc nội tiếp đường tròn chắn hai cung bằng nhau).

3. Ý 3 yêu cầu chứng minh hệ thức $AC.BE = BC.AE$. Ở đây ta thấy các đoạn thẳng AC, BE, BC, AE cùng nằm trên một đường thẳng, do đó việc chứng minh trực tiếp là bế tắc. Ta sẽ chứng minh $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{CB}{CA}$ bằng cách tìm thêm một tỷ số để chứng minh gián tiếp. Ta thấy rằng $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{DB}{DA}$ và $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{DB}{DA}$ do tính chất của đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của tam giác DAB. Như vậy bài toán đã được giải quyết.

Câu c) yêu cầu chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. Như vậy ta cần xác định được tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE và sau đó chứng minh $BK \perp NB$.



Lời giải.

a) Tính MH và bán kính R của đường tròn.

MH là đường cao của ΔMAB cân tại M

$\Rightarrow MH$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow H$ là trung điểm của AB.

$\Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}AB = 6(\text{cm})$.

Trong ΔMAH vuông tại H:

$$MA^2 = MH^2 + AH^2 \text{ (Định lý Pi-ta-go)}$$
$$\Rightarrow MH^2 = MA^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$$
$$\Rightarrow MH = 8(\text{cm}).$$

Lại có: $OA = OB = R \Rightarrow O$ nằm trên đường trung trực của AB, hay $O \in MH$.

$\Rightarrow O \in MN$

$\Rightarrow MN$ là đường kính của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{MBN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta MNB$ vuông tại B. Ta có: $\widehat{MNB} = \widehat{MAB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MB)

$\Rightarrow \sin\widehat{MNB} = \sin\widehat{MAB}$

Mà: $\sin\widehat{MNB} = \dfrac{MB}{MN}$ (trong ΔMNB vuông tại B); $\sin\widehat{MAB} = \dfrac{MH}{MA}$ (trong ΔMAH vuông tại H)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MN} = \dfrac{MH}{MA}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{MB.MA}{MH} = \dfrac{10.10}{8} = \dfrac{25}{2}(\text{cm})$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{25}{4}(\text{cm})$ (MN là đường kính của đường tròn (O)).

b) Chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp và $NB^2 = NE.ND$, $AC.BE = BC.AE$.

Tứ giác $MDEH$ có; $\widehat{MHE} + \widehat{MDE} = 90° + 90° = 180°$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $MDEH$ nội tiếp (tứ giác có hai góc đối bù nhau).

Do $AN = NB$ (N nằm trên đường trung trực của AB) nên suy ra $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB}$.

Trong đường tròn (O), góc $\widehat{ABN}$ chắn cung $\overset{\frown}{AN}$, góc $\widehat{NDB}$ chắn cung $\overset{\frown}{NB}$, mà $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB}$

$\Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{NDB}$.

$\Delta NBE \backsim \Delta NDB (g-g)$ do: $\begin{cases} \widehat{MND} \text{ chung} \\ \widehat{ABN} = \widehat{NDB} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NE}{NB}$

$\Rightarrow NB^2 = ND.NE$.

Trong đường tròn (O), góc $\widehat{ADN}$ chắn cung $\overset{\frown}{AN}$, góc $\widehat{NDB}$ chắn cung $\overset{\frown}{NB}$, mà $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB}$

$\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{NDB}$

$\Rightarrow DE$ là tia phân giác của $\widehat{ADB}$

$\Rightarrow DE$ là đường phân giác trong ΔADB

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{DB}{DA}$ (1).

Mà $DE \perp DC$ (do $\widehat{NDM} = 90°$ - góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow DC$ là đường phân giác ngoài của ΔADB

$\Rightarrow \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{DB}{DA}$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{CB}{CA}$

$\Rightarrow CA.EB = EA.CB$.

c) Chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔBDE.

Gọi I là điểm nằm trên MB sao cho $IE \| MH$, suy ra $IE \perp AB$ tại B (do $MH \perp AB$)

$\Rightarrow \Delta IEB$ vuông tại E.

$\Rightarrow \Delta IEB$ nội tiếp trong đường tròn tâm K, đường kính IB (với K là trung điểm IB).

Ta có: $\widehat{BIE} = \widehat{NMB}$ (hai góc so le trong) $= \widehat{NDB}$ (hai góc cùng chắn cung $\overset{\frown}{NB}$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $IEDB$ nội tiếp trong đường tròn ngoại tiếp ΔIEB

$\Rightarrow$ Tứ giác $IEDB$ nội tiếp trong đường tròn tâm K, đường kính IB

$\Rightarrow \Delta EDB$ nội tiếp trong đường tròn tâm K, bán kính KB.

Mà: $NB \perp MB$ (do $\widehat{NBM} = 90°$)

$\Rightarrow NB \perp KB$

$\Rightarrow NB$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔEDB.

■

Bình luận. Câu a) ý 1 là câu cơ bản, học sinh có thể thấy ngay hướng giải quyết. Ý 2 nâng cao

hơn một chút, học sinh phải nắm vững các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông. Một kinh nghiệm rút ra qua câu này là khi gặp các bài tập yêu cầu tính đoạn thẳng, ta quan sát xem đoạn thẳng đó là cạnh của tam giác vuông nào, từ đó áp dụng các hệ thức thích hợp để tính.
Câu b) ý 1 là câu cơ bản. Ý 2 học sinh có thể nhanh chóng tìm ra hướng giải nhưng gặp khó khăn khi thực hiện. Ở đây ta chọn chứng minh hai tam giác đồng dạng theo trường hợp g-g do ta thấy hai tam giác đã có một góc chung, loại trường hợp c-g-c do hệ thức về cạnh là điều ta cần chứng minh. Ý 3 yêu cầu học sinh phải biết nhận xét và chuyển hướng tư duy khi gặp khó khăn.
Câu c) là một câu nâng cao. Việc tìm tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE là không dễ dàng. Ta có thể nhận xét rằng K phải thuộc MB (do ta cần chứng $BK\perp NB$, mà $BM\perp NB$). Mặt khác, K thuộc trung trực của EB. Như vậy ta có thể xác định được vị trí điểm K.

Đề 3. Đề thi tuyển sinh lớp 10 Chuyên Sở GD và ĐT Bình Định 2017 - 2018 (đề thường)

Bài 1

Cho biểu thức: $A=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A=4$.

Phân tích. Nếu để ý một chút, ta sẽ thấy ngay tử số của hai phân số đầu tiên là một hằng đẳng thức, phân tích nhân tử theo hằng đẳng thức đó ta sẽ rút gọn được mẫu số và đưa cả ba phân số về cùng một mẫu số ngay.

Lời giải. Với điều kiện $x>0, x\neq 1$.

a)

$$\begin{aligned}
A&=\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\\
&=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\\
&=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\\
&=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

b) $A=4\Leftrightarrow \dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=4\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1=0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$ (không thỏa điều kiện xác định).
Vậy không có giá trị nào của x để $A=4$.

■

Bình luận. Đây là một câu khá cơ bản, học sinh chỉ cần nắm vững một số phương pháp rút gọn biểu thức là có thể làm được. Ở bài này, nếu học sinh làm theo thói quen là thấy mẫu số của hai phân số đầu tiên là liên hợp của nhau và cả ba phân số này khi quy đồng thì mẫu chung khá đơn giản thì kết quả vẫn sẽ ra nhưng tính toán khá phức tạp, do đó khi làm bài học sinh cần quan sát kỹ trước khi làm bài.
Ở câu b) nếu học sinh không để ý điều kiện xác định thì sẽ giải ra sai nghiệm.

Bài tập tương tự.
Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right)\dfrac{x-1}{2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A = 2$.

Đáp số:

a) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

b) $x = 9$.

Bài 2

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m-1)x - m + 2$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ thỏa $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Phân tích. a) Đối với dạng toán về sự tương giao (giao điểm của hai đồ thị hàm số) thì số điểm chung của hai đồ thị luôn bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm. Vì vậy, để chứng minh hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt ta chỉ cần chứng minh phương trình hoành độ giao điểm luôn có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là chứng minh biệt thức Δ của phương trình hoành độ giao điểm có giá trị dương với mọi $m \in \mathbb{R}$.

b) Ở câu trước ta đã chứng minh được hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Vì vậy ta chỉ cần giải quyết điều kiện $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$. Do đây là một biểu thức đối xứng nên ta nghĩ ngay đến định lý Vi-ét. Để ý thêm là hai điểm $A, B \in (P)$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$.

Lời giải. a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:
$x^2 = (2m-1)x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x + m - 2 = 0$ (*)
Ta có: $\Delta = (2m-1)^2 - 4m + 8 = 4m^2 - 8m + 9 = (2m-2)^2 + 1 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$.
Do đó (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.
Vậy (d) và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

b) Theo câu a) thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ và x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*).

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1.x_2 = m - 2 \end{cases}$

Do $A, B \in (P)$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$.

Do đó:

$$\begin{aligned} & x_1y_1 + x_2y_2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^3 + x_2^3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 + x_2)\left(x_1^2 - x_1.x_2 + x_2^2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 + x_2 = 0 \text{ (Do phương trình có hai nghiệm phân biệt nên } x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 > 0) \\ \Leftrightarrow\ & 2m - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy $m = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm của m.

■

Bình luận. a) Đây là dạng toán khá dễ và thường gặp, tuy nhiên học sinh cần để ý để không nhầm lẫn về điều kiện của Δ. Ở đây, điều kiện là $\Delta > 0$, tránh nhầm lẫn với $\Delta \geq 0$.

b) Các dạng toán ứng dụng định lí Vi-et trong phương trình bậc hai là các dạng thường gặp và xuất hiện thường xuyên trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10. Đối với bài toán này, cần để ý rằng để tính y_1, y_2 có hai cách là dùng hàm $y = x^2$ hoặc hàm $y = (2m-1)x - m + 2$. Tuy nhiên, vì hàm $y = x^2$ đơn giản hơn nên ta nên tính theo hàm $y = x^2$. Cần chú ý thêm rằng biểu thức có dạng $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$, $(x_1 \neq x_2)$ luôn dương để các phép biến đổi về sau được đơn giản hơn mà không cần phân tích về tổng tích biểu thức này nữa.

Bài tập tương tự.

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(2m+1)x - 3m^2 + 4$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 8$.

Đáp số: b) $m = -1 \vee m = -3$.

Bài 3

Hai thành phố A và B cách nhau 450 km. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi trong một thời gian dự định. Khi đi, ô tô tăng vận tốc hơn dự kiến 5 km/giờ nên đã đến B sớm hơn 1 giờ so với thời gian dự định.

Tính vận tốc dự kiến ban đầu của ô tô.

Phân tích. Ta nhận thấy ngay đây là một câu "giải bài toán bằng cách lập phương trình" quen thuộc. Ở đây vận tốc dự kiến ban đầu của ô tô là đại lượng chưa biết nên ta sẽ đặt là x. Dựa vào mối liên hệ về thời gian dự định và thời gian thực tế khi ô tô tăng vận tốc ta sẽ thiết lập được phương trình theo x.

Lời giải. Gọi vận tốc dự kiến ban đầu của ô tô là x (km/h), $x > 0$.
Vận tốc khi đi của ô tô là $x + 5$ (km/h).
Thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là $\dfrac{450}{x}$ (h)
Thời gian ô tô thực tế đi từ A đến B là $\dfrac{450}{x+5}$ (h)

Vì khi đi ô tô đến B sớm hơn dự định 1 giờ nên:
$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+5} = 1 \Leftrightarrow 450(x+5) - 450x = x(x+5) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 45 \\ x = -50 \end{array}\right. .$$
Do $x > 0$ nên $x = 45$. Vậy vận tốc ô tô dự định ban đầu là 45 (km/h). ■

Bình luận. Để giải được bài toán này, học sinh cần nắm được kiến thức liên quan đến vật lý. Ở đây là mối liên hệ giữa vận tốc, quãng đường và thời gian. Cần chú ý thêm rằng, vì x là đại lượng vận tốc nên luôn nhận giá trị dương, điều này giải thích cho việc cần phải loại nghiệm $x = -50$. Tuy nhiên, nhìn chung thì đây vẫn là một bài toán tương đối cơ bản.

Bài tập tương tự.
Một Ô tô khách và một Ô tô tải cùng xuất phát từ địa điểm A đi đến địa điểm B. Đường dài 180 km, do vận tốc của Ô tô khách lớn hơn Ô tô tải 10 km/h nên Ô tô khách đến B trước Ô tô tải 36 phút. Tính vận tốc của mỗi Ô tô. Biết rằng trong quá trình đi từ A đến B vận tốc của mỗi Ô tô không đổi.
Đáp số: Vận tốc xe khách: 60 km/h. Vận tốc xe tải: 50 km/h.

Bài 4

Cho đường tròn (O), dây BC không phải là đường kính. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở A. Lấy điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C), gọi I, H, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA và AB. Chứng minh:

a) Các tứ giác $BKMI$, $CHMI$ nội tiếp.

b) $MI^2 = MK.MH$.

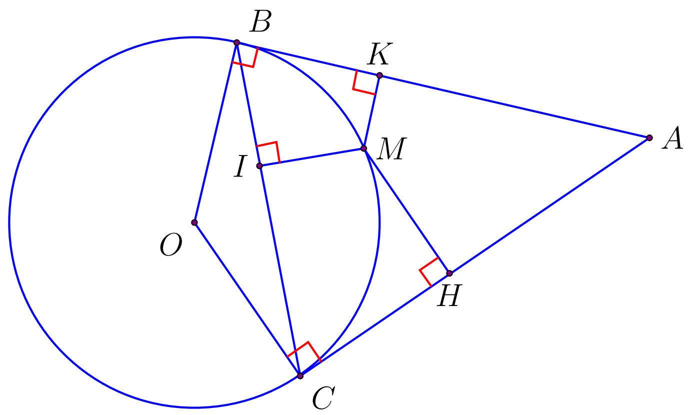
c) BM cắt IK tại D, CM cắt IH tại E. Chứng minh $DE \parallel BC$.

Phân tích. a) Để ý tới các dữ kiện liên quan tới đường vuông góc hạ từ M ta nhận thấy ngay các tứ giác $BKMI, CHMI$ có tổng hai góc đối diện bằng $180°$.

b) Từ đẳng thức $MI^2 = MK.MH$ có thể suy ra một trong hai đẳng thức tương ứng sau:
$\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MK}{MI}$ hoặc $\dfrac{MI}{MK} = \dfrac{MH}{MI}$.
Cả hai đẳng thức đều dẫn ta đến một cặp tam giác đồng dạng. Chẳng hạn ta chọn đẳng thức $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MK}{MI}$ thì dẫn ta đến cặp tam giác đồng dạng là ΔMIK và ΔMHI.
Vận dụng các tứ giác nội tiếp ở câu a) và đường tròn cho trước trong giả thiết ta sẽ thu được các góc nội tiếp tương ứng bằng nhau phục vụ cho việc chứng minh hai tam giác nói trên đồng dạng.

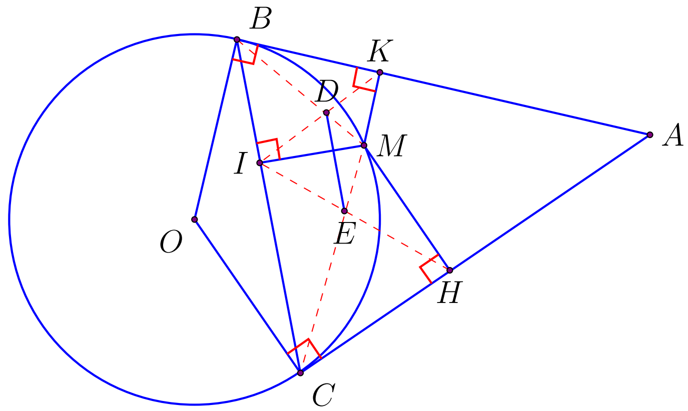
c) Dễ dàng dự đoán được hai góc đồng vị cần chứng minh bằng nhau là $\widehat{MCI} = \widehat{DEM}$. Tuy nhiên, để làm được điều này cần tới tứ giác $IDME$ nội tiếp. Vận dụng mối liên hệ về góc nội tiếp, góc chắn giữa tiếp tuyến và dây cung ở các tứ giác nội tiếp đã được chứng minh trong câu b) và đường tròn tâm O cho sẵn ta có thể chứng minh được tứ giác $IDME$ có tổng hai góc đối $\widehat{DIE} + \widehat{DME} = 180^\circ$.

Lời giải.



a) *Chứng minh các tứ giác $BKMI$, $CHMI$ nội tiếp.*
Vì $\widehat{MKB} = 90^\circ$ và $\widehat{MIB} = 90^\circ$ nên $\widehat{MKB} + \widehat{MIB} = 180^\circ$.
$\Rightarrow BKMI$ là tứ giác nội tiếp.
Vì $\widehat{MHC} = 90^\circ$ và $\widehat{MIC} = 90^\circ$ nên $\widehat{MHC} + \widehat{MIC} = 180^\circ$.
$\Rightarrow CHMI$ là tứ giác nội tiếp.

b) *Chứng minh $MI^2 = MK.MH$.*
Vì tứ giác $MKBI$ nội tiếp nên $\widehat{KIM} = \widehat{KBM}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MK}$).
Trong đường tròn (O) có $\widehat{KBM} = \widehat{MCI}$ (góc nội tiếp với góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung $\overset{\frown}{MB}$).
Vì tứ giác $MHCI$ nội tiếp nên $\widehat{MCI} = \widehat{MHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MI}$).
Suy ra $\widehat{KIM} = \widehat{MHI}$.
Tương tự: $\widehat{MIH} = \widehat{MCH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MH}$).
$\widehat{MCH} = \widehat{IBM}$ (góc nội tiếp với góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung $\overset{\frown}{MC}$).
$\widehat{IBM} = \widehat{IKM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MI}$).
Suy ra: $\widehat{MIH} = \widehat{IKM}$.
Xét ΔMIK và ΔMHI có:
$$\begin{cases} \widehat{KIM} = \widehat{MHI} \\ \widehat{MIH} = \widehat{IKM} \end{cases}$$



$\Rightarrow \Delta MIK \backsim \Delta MHI$ $(g-g)$.

Suy ra: $\dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MK}{MI}$

$\Rightarrow MI^2 = MK.MH$.

c) *Chứng minh $DE \parallel BC$.*

Ta có $\widehat{KIM} = \widehat{MCI}$ (vì cùng bằng $\widehat{MHI}$).

$\widehat{MIH} = \widehat{IBM}$ (vì cùng bằng $\widehat{IKM}$).

Do đó: $\widehat{DIE} + \widehat{DME} = \widehat{KIM} + \widehat{MIH} + \widehat{DME} = \widehat{MCI} + \widehat{IBM} + \widehat{DME} = 180^\circ$ (Tổng ba góc của ΔMBC).

$\Rightarrow$ Tứ giác $MDIE$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{KIM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overparen{MD}$).

Mà $\widehat{KIM} = \widehat{MCI} \Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{MCI}$.

Mặt khác, hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DE \parallel BC$.

■

Bình luận. a) Đây là một trong những dạng điển hình và cơ bản về việc chứng minh một tứ giác là nội tiếp, dạng này thường xuyên xuất hiện trong đề thi vào 10 ở câu hình học.

b) Việc chứng minh một đẳng thức trong hình học lớp 9 thường được quy về việc chứng minh hai tam giác đồng dạng. Đối với dạng toán này, học sinh cần nắm vững các tính chất liên quan đến góc nội tiếp, góc chắn bởi tiếp tuyến và dây cung để vận dụng trong nhiều tứ giác nội tiếp khác nhau nhằm tạo ra mối liên hệ bắc cầu của những góc phục vụ cho việc chứng minh tam giác đồng dạng theo trường hợp g - g. Nhìn chung đây là dạng toán không quá dễ và đòi hỏi học sinh phải nắm kiến thức ở mức độ vận dụng (thấp).

c) Đây vẫn là dạng toán cần tới mối liên hệ giữa các góc nội tiếp và góc chắn bởi tiếp tuyến và dây cung nhưng ở mức độ cao hơn câu trước. Mấu chốt của bài toán này nằm ở chỗ chứng minh được tứ giác $MDIE$ nội tiếp. Để làm được điều đó, đòi hỏi học sinh phải nhận ra được mối liên hệ của tổng $\widehat{DIE} + \widehat{DME} = \widehat{MCI} + \widehat{IBM} + \widehat{DME}$. Đây cũng là chìa khóa của bài toán này.

Bài 5

Cho $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$.

Phân tích. Đây là dạng toán chứng minh bất đẳng thức không đối xứng kèm theo điều kiện biên của các biến. Dựa vào điều kiện biên ta dễ nhận thấy ngay $1-a \geq 0; 1-b \geq 0, 1-c \geq 0$, nhân các đại lượng $1-a; 1-b, 1-c$ với nhau và kết hợp thêm sự đánh giá $b^2 \leq b, c^3 \leq c$ sẽ cho ta lời giải của bài toán trên. Cụ thể ta có lời giải như sau:

Lời giải. Vì $a, b, c \in [0; 1]$ nên: $1 - a \geq 0; 1 - b \geq 0, 1 - c \geq 0$

Do đó: $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc \geq 0$

$\Leftrightarrow a + b + c - ab - bc - ca + abc \leq 1.$ (1)

Vì $a, b, c \in [0; 1]$ nên $b^2 \leq b, c^3 \leq c; a, b, c \geq 0$

$\Rightarrow a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca + abc$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1.$

Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Bình luận. Đây là dạng toán khó, thường xuất hiện trong các câu phân loại trong các kì thi lớn, kể cả kì thi tuyển sinh đại học. Thường thì không có một phương pháp chung nào có thể giải quyết các bài toán như vậy mà tùy thuộc vào sự nhạy bén của người giải. Tuy nhiên, dựa vào dữ kiện đề bài cho ta có thể đưa ra được định hướng ban đầu cho bài toán. Cụ thể, trong bài toán này ta sử dụng phương pháp đánh giá điều kiện biên. Cần chú ý thêm rằng việc nhân các bất đẳng thức cùng chiều chỉ đúng khi các vế của bất đẳng thức không âm.

Đề 4. Đề thi tuyển sinh lớp 10 sở GD và ĐT Bắc Giang 2017-2018

Bài 1

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{25} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{18}$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua điểm $K(2; 3)$.

Phân tích. Đối với câu a) để tính giá trị của biểu thức chứa căn, ta dùng phương pháp đưa thừa số ra ngoài dấu căn và thực hiện rút gọn.

Đối với câu b) ta cần nhớ để đồ thị hàm số đi qua một điểm cho trước thì tọa độ của điểm đó phải thỏa phương trình của hàm số, khi đó ta có thể đưa ra lời giải.

Lời giải.

a) $A = \sqrt{25} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} = 5 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 5.$

Vậy $A = 5$.

b) Vì đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua điểm $K(2; 3)$ nên ta có:

$2.2 + m = 3 \Leftrightarrow m = -1.$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

■

Bình luận. Câu a) là một bài tập khá đơn giản ở dạng tính giá trị của một biểu thức chứa căn, HS chỉ cần nhớ phương pháp đưa thừa số ra ngoài dấu căn và tính toán cẩn thận.
Câu b) khá dễ, yêu cầu HS nhớ được điều kiện để đồ thị hàm số đi qua một điểm cho trước khi biết tọa độ của điểm đó.

Bài tập tương tự.

1. Tính giá trị của biểu thức $B = 3\sqrt{3} + \dfrac{3}{2}\sqrt{12} - \sqrt{48}$.
2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = (2m-1)\,x + 5,\ m \neq \dfrac{1}{2}$ đi qua điểm $A(6;-2)$.

Đáp án

1. $2\sqrt{3}$.
2. $m = -\dfrac{1}{12}$.

Bài 2

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$.
2. Cho biểu thức $B = \left(\dfrac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \dfrac{\sqrt{x} + 3}{1 - \sqrt{x}}\right) . \dfrac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$ và $x \neq \dfrac{1}{4}$). Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 0$.
3. Cho phương trình $x^2 - (2m+5)\,x + 2m + 1 = 0\ \ (1)$, với x là ẩn, m là tham số.
   a) Giải phương trình (1) khi $m = -\dfrac{1}{2}$.
   b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phân tích. Câu 1 yêu cầu giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cơ bản, ta có thể dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.
Đối với câu 2 để tìm các giá trị m thỏa $B < 0$ thì trước hết ta phải rút gọn bểu thức chứa căn. Quan sát thấy biểu thức B chứa nhiều phân thức, ta sẽ nghĩ ngay đến hướng tìm mẫu chung để quy đồng hoặc phân tích thành nhân tử để rút gọn. Đối với bài này, ta thấy việc phân tích thành nhân tử để rút gọn thực hiện dễ dàng hơn.
Câu 3 bao gồm 2 ý, ở ý a) ta có thể giải phương trình bậc 2 bằng cách sử dụng công thức nghiệm, hay phân tích thành nhân tử.
Đối với ý b) là dạng bài tập tìm điều kiện m để nghiệm phương trình bậc hai thỏa yêu cầu cho trước có lồng ghép thêm yếu tố giá trị nhỏ nhất. Trước hết, ta sử dụng điều kiện có nghiệm của

phương trình và vận dụng hệ thức Vi-ét để đánh giá phương trình có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2, đồng thời biến đổi P^2 về biểu thức chỉ chứa m, sau đó đánh giá giá trị nhỏ nhất của biểu thức thông qua việc sử dụng hằng đẳng thức. Bài toán có thể giải quyết một cách dễ dàng.

Lời giải.

1. Cách 1: Dùng phương pháp cộng đại số:

$$\begin{aligned}\begin{cases}3x+y=10\\2x-3y=3\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}9x+3y=30\\2x-3y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}11x=33\\3x+y=10\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\3.3+y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}.\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(3;1)$.

Cách 2: Dùng phương pháp thế:

$$\begin{cases}y=10-3x\\2x-3y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=10-3x\\2x-3(10-3x)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=10-3x\\11x=33\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(3;1)$.

2. Với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq \dfrac{1}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned}B &= \left(\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}}\right).\frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}\\ &= \left[\frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}\right].\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-1\right)}\\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}\\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}.\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}\\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-1}.\end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}B<0 &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-1}<0\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1<0\ \left(\text{do } 2\sqrt{x}+3>0\right)\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}<\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow 0\leqslant x<\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

So sánh điều kiện đề bài ta có với $0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}$ thì $B<0$.

3. a) Phương trình $x^2-(2m+5)x+2m+1=0$. (1)

Khi $m=-\dfrac{1}{2}$, phương trình (1) trở thành:

$$x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right..$$

Vậy khi $m=-\dfrac{1}{2}$ thì phương trình (1) có tập nghiệm $S=\{0;4\}$.

b) Ta có $\Delta=(2m+5)^2-4(2m+1)=4m^2+12m+21=(2m+3)^2+12>0,\forall m$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m+5\\x_1x_2=2m+1\end{cases}$.

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm dương là:

$$\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+5>0\\2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}P^2&=\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\\&=(x_1+x_2)-2\sqrt{x_1x_2}\\&=2m+5-2\sqrt{2m+1}\\&=\left(2m+1-2\sqrt{2m+1}+1\right)+3\\&=\left(\sqrt{2m+1}-1\right)^2+3\geq 3.\\ \Rightarrow &P\geq\sqrt{3}\quad(\text{do}\;\; P>0).\end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{2m+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{2m+1}=1\Leftrightarrow m=0\quad(\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm. Khi đó $\min P=\sqrt{3}$.

■

Bình luận. Câu 1) là bài toán cơ bản, không yêu cầu cao về mặt tư duy, HS chỉ cần nắm vững và lựa chọn phương pháp phù hợp để giải quyết bài toán một cách gọn nhất.

Câu 2) là bài toán yêu cầu học sinh nhanh mắt và tinh ý khi quan sát để lựa chọn hướng đi để rút gọn biểu thức B một cách nhanh gọn. Đồng thời bài toán cũng lồng ghép thêm giải bất phương trình, tuy nhiên ở mức độ khá đơn giản.

Câu 3 ý a) cũng là bài toán cơ bản về giải phương trình tích. Ở ý b) , việc lồng ghép nhiều kiến thức vào một bài toán sẽ đưa đến sự phân loại tốt hơn và gây khó khăn cho học sinh khi phải biết vận dụng linh hoạt giữa các kiến thức đó.

Bài tập tương tự.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y = 55 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$.

2. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{6x}{x-1}\right) \cdot \dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$). Tìm tất cả các giá trị của x để $A > 0$.

3. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (2), với x là ẩn, m là tham số.

   a) Giải phương trình (2) khi $m = 0$.

   b) Tìm các giá trị của m để phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \left|\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Đáp án

1. $(x; y) = (1; -1)$.

2. $x \geq 0; x \neq 1$.

3. a) $S = -1; 3$.

   b) $m = 4; maxP = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3

Để chuẩn bị cho năm học mới, học sinh hai lớp $9A$ và $9B$ ủng hộ thư viện 738 quyển sách gồm hai loại sách giáo khoa và sách tham khảo. Trong đó mỗi học sinh lớp $9A$ ủng hộ 6 quyển sách giáo khoa và 3 quyển sách tham khảo; mỗi học sinh lớp $9B$ ủng hộ 5 quyển sách giáo khoa và 4 quyển sách tham khảo. Biết số sách giáo khoa ủng hộ nhiều hơn số sách tham khảo là 166 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp.

Phân tích. Trước hết ta dựa vào yêu cầu của bài toán để gọi ẩn và đưa các giả thiết của đề bài biểu diễn thành các phương trình theo hai ẩn đó. Phương trình thứ nhất được lập dựa trên tổng số sách ủng hộ của hai lớp $9A$ và $9B$. Phương trình thứ hai được lập dựa trên số sách giáo khoa ủng hộ nhiều hơn số sách tham khảo.

Lời giải. Gọi số học sinh của lớp $9A$, $9B$ lần lượt là x, y $(x, y \in N^*)$.
Ta có:
Mỗi học sinh lớp $9A$ ủng hộ 6 quyển sách giáo khoa và 3 quyển sách tham khảo nên lớp $9A$ ủng hộ $6x$ quyển sách giáo khoa và $3x$ quyển sách tham khảo.
Mỗi học sinh lớp $9B$ ủng hộ 5 quyển sách giáo khoa và 4 quyển sách tham khảo nên lớp $9B$ ủng hộ $5y$ quyển sách giáo khoa và $4y$ quyển sách tham khảo.

Học sinh hai lớp $9A$ và $9B$ ủng hộ thư viện 738 quyển sách gồm hai loại sách giáo khoa và sách tham khảo nên ta có:

$$6x + 3x + 5y + 4y = 738 \Leftrightarrow 9x + 9y = 738.$$

Số sách giáo khoa ủng hộ nhiều hơn số sách tham khảo là 166 quyển nên ta có:

$$(6x + 5y) - (3x + 4y) = 166 \Leftrightarrow 3x + y = 166.$$

Khi đó, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 9x + 9y = 738 \\ 3x + y = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 82 \\ 3x + y = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 40 \end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy lớp $9A$ có 42 học sinh, lớp $9B$ có 40 học sinh. ■

Bình luận. Đây là bài toán thực tế giải dựa trên phương pháp đặt ẩn và giải phương trình, hệ phương trình. Học sinh cần đọc kĩ đề bài, đặc biệt là yêu cầu của bài toán để đặt ẩn với điều kiện hợp lý, lưu ý các giả thiết của đề bài để tìm ra các mối liên hệ giữa các đại lượng. Đồng thời yêu cầu học sinh thành thạo trong việc giải phương trình, hệ phương trình.

Bài tập tương tự.

Một hiệu sách A có bán hai loại sách: Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 11 và Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 11. Trong một ngày, hiệu sách A bán được 60 cuốn mỗi loại trên theo giá bìa, thu được số tiền là 3 300 000 đồng và lãi được 420 000 đồng. Biết rằng mỗi cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 11 lãi 10% giá bìa, mỗi cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 11 lãi 15% giá bìa. Hỏi giá bìa mỗi cuốn sách đó là bao nhiêu.

Đáp án

Giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Toán lớp 10 là 25000 đồng.
Giá bìa của một cuốn sách Hướng dẫn học tốt môn Ngữ Văn lớp 10 là 30000 đồng.

Bài 4

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R. Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H (với E thuộc BC, K thuộc AC).

a) Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $CE.CB = CK.CA$.

c) Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.

d) Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC nhọn; khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T), biết $R = 3\,\text{cm}$.

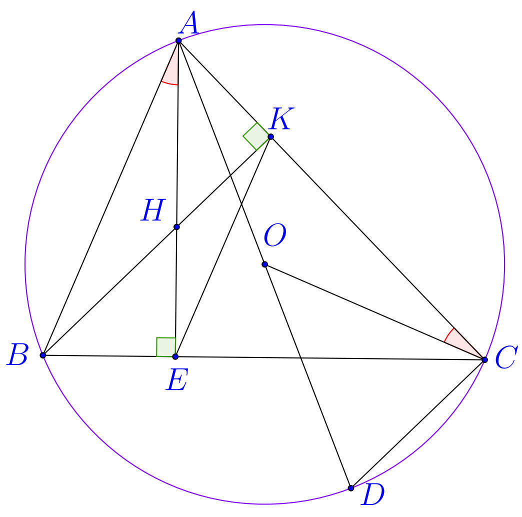
Phân tích. Câu a) dễ nhận ra tại sao tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn, bằng cách dựa trên dấu hiệu của tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại một góc bằng nhau) và giả thiết hai đường cao của tam giác ABC.

Đối với câu b), ta nghĩ ngay đến chứng minh hai tam giác đồng dạng. Khi đó ta thử biến đổi đẳng thức của đề bài về dạng tỉ lệ thức giữa các cặp cạnh của hai tam giác. Đến đây ta thấy ngay cần phải chứng minh $\Delta CEA \backsim \Delta CKB$ (g-g).

Đối với câu c) chứng minh hai góc nội tiếp của đường tròn (C) bằng nhau, ta hướng đến dùng phương pháp bắc cầu qua các góc nội tiếp khác trong các tứ giác nội tiếp, áp dụng linh hoạt các mối quan hệ giữa các góc trong các tam giác đặc biệt. Để làm được dễ dàng ta sẽ vẽ thêm đường kính AD và chú ý các tam giác vuông AEB, ACD, tam giác cân AOC. Ta sẽ thấy được hai góc $\widehat{BAE}$, $\widehat{OCA}$ cùng phụ với cặp góc bằng nhau $\widehat{ABE}$, $\widehat{ADC}$.

Ở câu d) để chứng minh H thuộc một đường tròn cố định, ta cần xác định các yếu tố cố định và tìm được tâm và bán kính của đường tròn đó. Để thực hiện được, ta cần dựng điểm I đối xứng với O qua BC, khi đó I cố định. Dự đoán H thuộc đường tròn tâm I, bán kính bằng R không đổi. Ta lần lượt chứng minh tứ giác $BHCD$, $AHIO$ là hình bình hành, khi đó bài toán sẽ được giải quyết.

Lời giải.



a) *Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.*

Tứ giác $ABEK$ có $\widehat{ABE} = 90^\circ$ (do $AE \perp BC$), $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (do $BK \perp AC$). Khi đó tứ giác $ABEK$ nội tiếp được một đường tròn (theo dấu hiệu: Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại một góc bằng nhau).

b) *Chứng minh $CE.CB = CK.CA$.*

Xét ΔCEA và ΔCKB, ta có: $\widehat{ACB}$ chung, $\widehat{CEA} = \widehat{CKB} = 90^\circ$. Suy ra

$$\Delta CEA \backsim \Delta CKB \text{ (g-g)}.$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CK} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CE.CB = CK.CA.$$

c) *Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.*

Vẽ đường kính AD của (O). Ta có ΔABE vuông tại E nên $\widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 90^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O)) nên

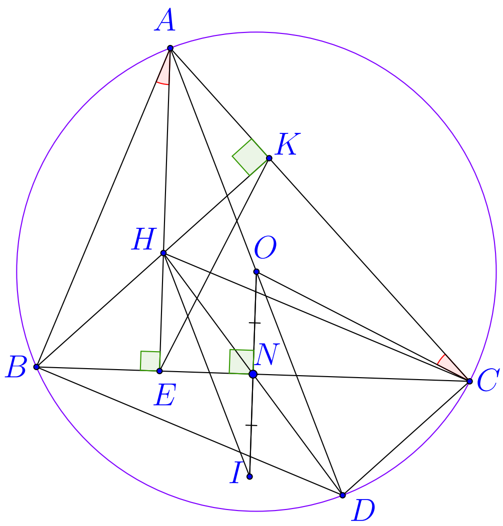
$$\widehat{BAE} + \widehat{ADC} = 90^\circ. \quad (1)$$

Xét ΔACD có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $\widehat{ADC} + \widehat{CAD} = 90^\circ$, mà $\widehat{CAD} = \widehat{OCA}$ (do ΔOAC cân tại O) nên

$$\widehat{ADC} + \widehat{OCA} = 90^\circ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{OCA}$.

d) *Chứng minh H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T).*



Gọi I là điểm đối xứng với O qua BC, OI cắt BC tại N. Khi đó N là trung điểm của OI, BC và các điểm I, N cố định.

Ta có $BH \parallel CD$ (do cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel BD$ (do cùng vuông góc với AB) nên tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Suy ra N là trung điểm BC thì N cũng là trung điểm của DH.

Từ đó suy ra ON là đường trung bình của ΔAHD.

$\Rightarrow AH = 2ON$.

$\Rightarrow AH = OI \ (= 2ON)$.

Ta lại có, $AH \parallel OI$ (cùng vuông góc với BC) nên tứ giác $AHIO$ là hình bình hành. Suy ra $r = IH = OA = R = 3\,\text{cm}$. Do đó, H thuộc đường tròn $(I; 3)$ cố định.

■

Bình luận. Đây là bài toán khá quen thuộc với các dữ kiện tam giác nhọn nội tiếp đường tròn và các đường cao trong tam giác đó. Do đó việc nhận biết và giải quyết các ý a), b) là khá đơn giản không mang tính thách đố cao.

Câu c) để giải quyết được, học sinh phải liên hệ tốt các mối quan hệ giữa các góc nội tiếp trong đường tròn, các góc trong tam giác đặc biệt. Khi đó mới có thể vẽ thêm yếu tố đường kính của đường tròn để hoàn thành lời giải.

Đặc biệt câu d) là câu hỏi nâng cao ở dạng quỹ tích của một điểm khi có yếu tố di động. Học sinh phải quan sát được các yếu tố cố định và dự đoán được H di động trên đường tròn cố định nào, xác định được tâm cố định và bán kính không đổi rồi mới có thể dựng thêm các yếu tố phụ để giải quyết bài toán. Khi nhìn ra được thì quá trình chứng minh hết sức đơn giản với các kiến thức đường trung bình trong tam giác và tích chất của hình bình hành.

Bài 5

Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $2a+3b \leqslant 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=\frac{2002}{a}+\frac{2017}{b}+2996a-5501b.$$

Phân tích. Quan sát từ giả thiết bài toán cho hai số thực dương $a,\ b$ và biểu thức Q, giúp ta hướng ngay đến việc tìm giá trị nhỏ nhất thông qua áp dụng bất đẳng thức Cô-si. Dự đoán dấu "$=$" xảy ra khi $a=\dfrac{1}{2};\ b=1$. Để "bảo toàn" được dấu bằng khi sử dụng Cô-si, ta sẽ chọn số $\alpha,\ \beta$ sao cho $\begin{cases}\dfrac{2002}{a}=\alpha a\\ \dfrac{2017}{b}=\beta b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=8008\\ \beta=2017\end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} Q&=\frac{2002}{a}+\frac{2017}{b}+2996a-5501b\\ &=\left(\frac{2002}{a}+8008a\right)+\left(\frac{2017}{b}+2017b\right)-2506\left(2a+3b\right).\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si và sử dụng giả thiết $2a+3b\leqslant 4$, ta có:

$$Q\geq 2.\sqrt{\frac{2002}{a}.8008a}+2.\sqrt{\frac{2017}{b}.2017b}-2506.4\geq 8008+4034-10024=2018.$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}\dfrac{2002}{a}=8008a\\ \dfrac{2017}{b}=2017b\\ 2a+3b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=1\end{cases}$.

Vậy $\min Q=2018 \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=1\end{cases}$. ■

Bình luận. Với dạng toán này, khi chọn được điểm rơi thì việc biến đổi tương đối đơn giản, áp dụng bất đẳng thức Cô-si quen thuộc và từ giả thiết của bài toán để hoàn thành bài giải.

Bài tập tương tự.

Cho $a \geq 10,\ b \geq 100,\ c \geq 1000$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}.$$

Đáp án

Min $P = \dfrac{1110111}{1000}$ đạt được khi $a - 10,\ b = 100,\ c = 1000$.

Đề 5. Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 tỉnh Bắc Ninh 2017

Bài 1

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 5. \end{cases}$

2) Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{x-2}{x + 2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$, với $x > 0$.

Phân tích.

1) Đây là một hệ phương trình quen thuộc, đã được đưa về dạng tổng quát của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Theo như chương trình học thì có 2 phương pháp để giải hệ này: cộng đại số và phương pháp thế. Nhưng trong trường hợp cụ thể này ta nên dùng phương pháp thế bởi từ phương trình đầu tiên ta có thể dễ dàng tìm được x rồi thế vào phương trình thứ hai để tìm y.

2) Khi quan sát mẫu của các các hạng tử trong biểu thức P, ta thấy tích của mẫu phân thức thứ hai và thứ ba chính là mẫu của phân thức thứ nhất. Thấy được mối liên hệ này, ta có thể đoán ngay phương pháp giải bài này là đi theo con đường quy đồng rồi rút gọn.

Lời giải.

1)

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Tập nghiệm của hệ phương trình: $S = \{(2;3)\}$.

2)

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\
&= \frac{x-2-\sqrt{x}-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Vậy $P = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. ■

Bình luận. Bài này nhằm mục đích "khởi động làm nóng não" cho học sinh.

Bài tập tương tự.

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x = 9 \\ 2x + 5y = 11. \end{cases}$

2) Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{x-12}{x+3\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$.

Bài 2

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

1) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

2) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), lập phương trình bậc hai nhận $x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2$ và $x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2$ là nghiệm.

Phân tích.

1) Khi thay $m = 2$ vào phương trình (1), ta được một phương trình bậc hai một ẩn dạng tổng quát. Ở đây nếu học sinh nào tinh ý nhìn ra tổng 3 hệ số a, b, c bằng 0 thì ta có thể giải rất nhanh phương trình này bằng công thức nhẩm nghiệm.

2) Đối với ý thứ nhất: Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Để ý rằng hệ số của x^2 là $1 \neq 0$ do đó phương trình (1) chắc chắn là phương trình bậc hai (không cần chia 2 trường hợp), theo cách giải phương trình bậc hai thì ta chỉ cần chứng minh $\triangle > 0$ là giải quyết xong ý này.

Đối với ý thứ hai: Lập phương trình bậc hai nhận 2 nghiệm cho trước. Đây là dạng toán áp dụng định lý Vi-ét đảo, học sinh sẽ nghĩ ngay đến việc tính tổng và tích 2 nghiệm của phương trình cần lập, nhưng ở đây tính toán hơi khó khăn do người ra đề cố tình cho bậc cao (bậc 3). Chính vì thế học sinh phải tinh ý lựa chọn cách làm ngắn gọn và đỡ mất thời gian nhất.

Lời giải. 1) Khi $m = 2$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Vì $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Vậy khi $m = 2$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

2) $\triangle' = (-m)^2 - 1.(m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m$.

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

Biến đổi phương trình:

$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = 1$

$\Rightarrow x^3 - 2mx^2 + m^2x = x$

$\Leftrightarrow x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2 = x - 2$

Vì x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình nên:

$$\begin{aligned}(x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2) + (x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2) &= (x_1 - 2) + (x_2 - 2)\\ &= x_1 + x_2 - 4\\ &= 2m - 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2).(x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2) &= (x_1 - 2)(x_2 - 2)\\ &= x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4\\ &= m^2 - 1 - 2.2m + 4\\ &= m^2 - 4m + 3\end{aligned}$$

Vậy phương trình cần lập là:

$$x^2 - (2m - 4)x + m^2 - 4m + 3 = 0$$

■

Bình luận. Ý thứ 2 có nhiều cách giải, ngoài cách đã nêu ở trên học sinh có thể làm theo một số hướng như sau:

i) Hướng thứ nhất: Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai tính cụ thể $x_1 = m + 1$, $x_2 = m - 1$ sau đó đặt $\begin{cases} y_1 = x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2 \\ y_2 = x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2 \end{cases}$ rồi tính tổng và tích của $y_1; y_2$ sau đó lập phương trình theo định lí Vi-et đảo.

Cách này cũng khá ok nhưng có thể làm cho người ra đề thất vọng do không sử dụng định lý Vi-ét thuận (ý kiến riêng)

ii) Hướng thứ 2: Dùng định lý Vi-ét thuận tính tổng và tích của $x_1; x_2$ sau đó tính $y_1 + y_2$; $y_1.y_2$ bằng cách đưa về tổng tích theo $x_1; x_2$.

Cách làm theo hướng truyền thống này vẫn áp dụng được cho bài này nhưng khá dài và biến đổi khó, tốn nhiều thời gian và công sức của học sinh. Cách này phù hợp với những học sinh theo xu hướng "cần cù bù thông minh".

Bài tập tương tự.

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ (1), với m là tham số.

1) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

2) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), lập phương trình bậc hai nhận $x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 8$ và $x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 8$ là nghiệm.

Bài 3

Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.

Một nhóm gồm 15 học sinh (cả nam và nữ) tham gia buổi lao động trồng cây. Các bạn nam trồng được 30 cây, các bạn nữ trồng được 36 cây. Mỗi bạn nam trồng được số cây như nhau và mỗi bạn nữ trồng được số cây như nhau. Tính số học sinh nam và nữ của nhóm, biết rằng mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây.

Phân tích. Dạng toán này rất thường hay gặp trong các bài tập SGK cũng như SBT. Mấu chốt ở đây là ta phải biểu diễn được số cây mỗi bạn nam trồng được và số cây mỗi bạn nữ trồng được theo ẩn mà ta gọi để có thể tận dụng được ý cuối của đề "mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây".

Lời giải. Gọi số học sinh nam là x ($x \in \mathbb{N}^*, x < 15$).

$\Rightarrow$ Số học sinh nữ là $15 - x$.

Mỗi bạn nam trồng được $\dfrac{30}{x}$ (cây), mỗi bạn nữ trồng được $\dfrac{36}{15 - x}$ (cây).

Vì mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây nên ta có phương trình:

$\dfrac{30}{x} - \dfrac{36}{15 - x} = 1$

$\Rightarrow 30(15 - x) - 36x = x(15 - x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 81x + 450 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 75(\text{loại}) \\ x = 6(\text{nhận}) \end{array}\right.$

Vậy nhóm có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. ■

Bình luận. Đối với bài này, chúng ta cũng có thể giải bằng cách lập hệ phương trình với 2 ẩn $x; y$. Tuy nhiên khi giải hệ ta lại sử dụng phương pháp thế để đưa về phương trình một ẩn như trên. Do đó cách giải bằng cách lập phương trình vẫn tối ưu hơn.

Bài tập tương tự.

Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình.

Một phân xưởng gồm 500 công nhân (cả nam và nữ) tham gia may quần áo. Biết rằng trong 1 ngày các công nhân nam may được 400 bộ quần áo, các công nhân nữ may được 900 bộ quần áo. Mỗi công nhân nam may được số bộ quần áo như nhau và mỗi công nhân nữ may được số bộ quần áo như nhau. Tính số công nhân nam và nữ của phân xưởng, biết rằng mỗi công nhân nam may được ít hơn mỗi công nhân nữ 1 bộ quần áo.

Bài 4

Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không trùng với A và B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB, CE vuông góc với MA, CF vuông góc với MB ($D \in AB$, $B \in MA$, $F \in MB$). Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng

1) Tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn.

2) Hai tam giác CDE và CFD đồng dạng.

3) Tia đối của tia CD là tia phân giác $\widehat{ECF}$.

4) Đường thẳng IK song song với đường thẳng AB.

Phân tích.

1) Ta nhận thấy tổng hai góc đối của tứ giác $ADCE$ bằng 180° nên tứ giác nội tiếp.

2) Với ý thứ hai này đòi hỏi học sinh phải thành thạo khả năng nhận biết các góc bằng nhau bằng nhiều cách: tứ giác nội tiếp, các góc nội tiếp cùng chắn một cung, các góc nội tiếp và các góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung. Sau đó nối kết các ý lại ta sẽ chứng minh được hai tam giác đồng dạng theo trường hợp góc-góc.

3) Ý này ta dựa vào câu b) và tổng 2 góc kề bù bằng 180° là giải quyết được.

4) Khi gặp câu hỏi này, học sinh sẽ lúng túng không biết phải chứng minh song song theo cách nào: hai góc so le trong bằng nhau, hai góc đồng vị bằng nhau, định lý Ta-let đảo,... Nhưng nếu ta đi từ kết quả lên: Nếu $IK \| AB \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{I_1}$

Mà $\widehat{A_2} = \widehat{D_2}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{D_2}$.

Do đó ta nghĩ ngay đến hướng chứng minh tứ giác $ICKD$ nội tiếp. Bài toán đã được giải quyết xong.

Lời giải. 1) Tứ giác $ADCE$ có:

$\widehat{ADC} = 90^\circ (CD \perp AB)$

$\widehat{AEC} = 90^\circ (CE \perp MA)$

$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{AEC} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADCE$ nội tiếp.

2) Tứ giác $ADCE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ và $\widehat{A_2} = \widehat{E_1}$

Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{B_2} = \widehat{D_2}$ và $\widehat{B_1} = \widehat{F_1}$

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{AC}$ và $\widehat{A_2} = \widehat{B_2} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{F_1}$ và $\widehat{D_2} = \widehat{E_1}$

$\Rightarrow \triangle CDE \backsim \triangle CFD$ (g.g).

3) Vẽ Cx là tia đối của tia CD

$\triangle CDE \backsim \triangle CFD \Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{DCF}$

Mà $\widehat{C_1} + \widehat{DCE} = \widehat{C_2} + \widehat{DCF} = (180^\circ)$

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

$\Rightarrow Cx$ là tia phân giác của $\widehat{ECF}$.

4) Tứ giác $CIDK$ có:

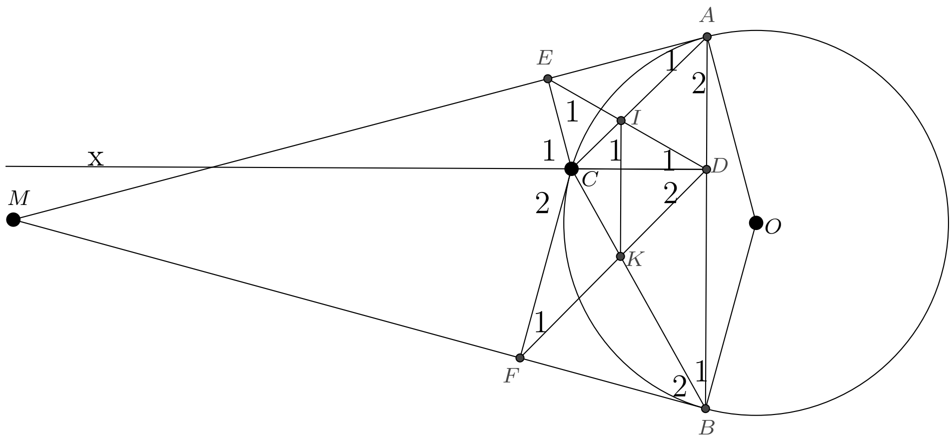
$\widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{ICK} + \widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ CIDK là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{D_2}$

$\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow IK \parallel AB$.



■

Bài 5

1) Giải phương trình $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 6x^2$.

2) Cho bốn số thực dương x, y, z, t thỏa mãn $x + y + z + t = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{(x+y+z)(x+y)}{xyzt}$.

Phân tích.

1) Đây là một phương trình khó, đòi hỏi học sinh phải tinh ý biến đổi để có thể đặt ẩn phụ. Điểm mấu chốt của bài là ta phải nhìn ra được biểu thức $x^2 + 1$ có ở trong cả 2 nhân tử của vế trái, từ

đó ta lựa chọn cách biến đổi đặt ẩn phụ phù hợp.

2) Nhìn vào biểu thức A ta đoán ngay giá trị nhỏ nhất biểu thức A đạt được khi các biến x, y, z, t có giá trị không bằng nhau. Do đó ta rất khó đoán được điểm rơi của bài toán, bài tập này đòi hỏi học sinh phải giải nhiều bài Cô-si trước đó mới có kinh nghiệm làm bài này.

Lời giải. 1) Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 6x^2$

Đặt $y = x^2 + 1$, phương trình trở thành:

$(y - x)(y + 4x) = 6x^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 3xy - 4x^2 = 6x^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 3xy - 10x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 2x)(y + 5x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -5x \end{array}\right.$

- **Với** $y = 2x$ **thì** $x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

- **Với** $y = -5x$ **thì** $x^2 + 1 = -5x \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2} \vee x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1; \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

2) Cho 4 số thực dương x,y,z,t thỏa mãn $x + y + z + t = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{(x+y+z)(x+y)}{xyzt}$.

Với $x, y, z, t > 0$, theo bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$(x+y) + z \geq 2\sqrt{(x+y)z}$$

$$(x+y+z) + t \geq 2\sqrt{(x+y+z)t}$$

Suy ra $(x+y)(x+y+z)(x+y+z+t) \geq 8\sqrt{xyzt(x+y)(x+y+z)}$

Mà $x + y + z + t = 2$, suy ra

$(x+y)(x+y+z).2 \geq 8\sqrt{xyzt(x+y)(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+z) \geq 4\sqrt{xyzt(x+y)(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y)(x+y+z)} \geq 4\sqrt{xyzt}$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+z) \geq 16xyzt$

Nên $A = \dfrac{(x+y+z)(x+y)}{xyzt} \geq \dfrac{16xyzt}{xyzt} = 16$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ x + y = z \\ x + y + z = t \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{4} \\ z = \dfrac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$

Vậy $MinA = 16 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{2}; t = 1.$ ■

Bình luận.

1) Ngoài cách giải trên, ta còn một cách giải khác cũng khá hay như sau:

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên ta có thể chia 2 vế của phương trình cho x^2 được một phương trình tương đương: $(x - 1 + \frac{1}{x})(x + 4 + \frac{1}{x}) = 6$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (ĐK: $|t| \geq 2$) thì phương trình trên trở thành:

$$(t-1)(t+4) = 6$$

Đây là một phương trình bậc hai thuần túy đã biết cách giải, ta tìm t, nhận loại so với ĐK của t rồi giải tiếp tìm x.

2) Học sinh phải thành thục bất dẳng thức Cô-si cộng thêm một chút may mắn để giải được bài này.

Đề 6. Đề thi tuyển sinh lớp 10 Sở GD&ĐT Quảng Ngãi 2017-2018

Bài 1

1. Thực hiện phép tính:$\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2} - \sqrt{5}$.

2. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = -x + 2$ có đồ thị là (d).

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) biết hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B. Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác $ABDC$.

Phân tích. Ở câu 1 ta cần lưu ý tính chất $\sqrt{A^2} = |A|$, sau đó xét dấu của A để có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ở câu 2a) ta cần lập bảng giá trị của từng đồ thị rồi vẽ các điểm tương ứng lên hệ trục tọa độ, sau đó nối lại ta sẽ được đồ thị cần vẽ. Lưu ý để vẽ parabol ta cần tìm ít nhất 5 điểm và đường thẳng cần ít nhất 2 điểm. Ta cũng nên chọn những điểm có hoành độ hoặc tung độ bằng 0 để tìm tọa độ điểm dễ dàng hơn.

Ở câu 2b) ta cần qui về phương trình hoành độ giao điểm rồi sử dụng điều kiện của đề bài để tìm ra tọa độ của A và B. Từ hình vẽ ta dễ dàng thấy được $ABDC$ là hình thang vuông cũng như độ dài 2 đáy và chiều cao của hình thang đó. Tiếp theo ta áp dụng công thức để tính diện tích hình thang vuông $ABDC$.

Lời giải. **1.** $\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}-\sqrt{5}=|\sqrt{5}+2|-\sqrt{5}=\sqrt{5}+2-\sqrt{5}=2$ (vì $\sqrt{5}+2>0$).

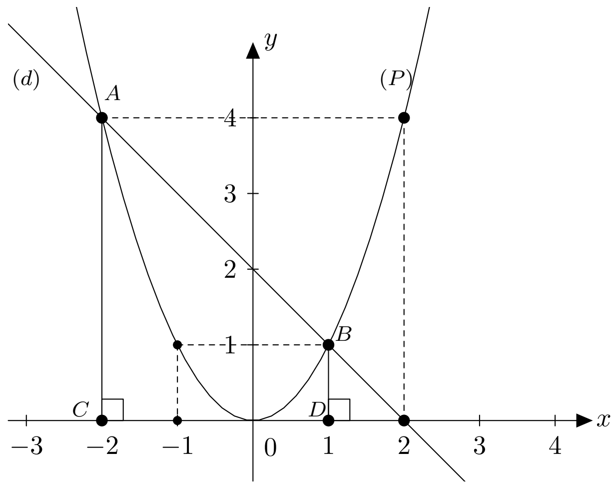
2. a) Bảng giá trị của $(P): y=x^2$:

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4

Bảng giá trị của $(d): y=-x+2$:

x	0	2
$y=-x+2$	2	0

Vẽ (P) và (d) lên cùng một hệ trục tọa độ:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$x^2=-x+2 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$.

Vì hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B nên

$x_A=-2 \Rightarrow y_A=4 \Rightarrow A(-2;4)$

$x_B=1 \Rightarrow y_B=1 \Rightarrow B(1;1)$

Ta có C, D là hình chiếu của A, B nên $AC \perp CD$ và BD $\perp CD$. Do đó tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông có $AC=4; CD=3; BD=1$

$\Rightarrow S_{ABDC}=\dfrac{(AC+BD).CD}{2}=7,5$ (đvdt).

■

Bình luận. Câu 1 tương đối đơn giản, ta chỉ cần lưu ý việc xét dấu của biểu thức chứa giá trị tuyệt đối.

Câu 2a) là một bài toán quen thuộc, ta lưu ý việc chọn điểm để vẽ dễ dàng hơn. Câu 2b) có 2 ý. Ý đầu tiên là bài toán về phương trình hoành độ giao điểm, không mấy khó khăn để ta có thể giải và tìm tọa độ của 2 giao điểm. Ý tiếp theo tương đối lạ vì nó lồng ghép bài toán về hình học vào trong bài toán đồ thị. Ta chỉ cần nhìn hình vẽ ở câu a để suy ra được tính chất của tứ giác đó, kết hợp với công thức đã học để hoàn thành yêu cầu của đề bài.

Bài tập tương tự.

1. Thực hiện phép tính: $\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}+1$.

2. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = 3x - 1$ có đồ thị là (d).

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A, B của (P) và (d) biết hoành độ của A lớn hơn hoành độ của B. Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác $ABDC$.

Bài 2

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^4 + 2017x^2 - 2018 = 0$. b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$.

2. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = -1$. Tính nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Phân tích. Câu 1a) là phương trình trùng phương, ta đặt $t = x^2$ (lưu ý điều kiện của t) để đưa về phương trình bậc 2 rồi sử dụng công thức nghiệm để giải, hoặc có thể nhẩm nghiệm nhanh bằng cách sử dụng hệ quả của định lí Vi-ét.
Câu 1b) là một hệ phương trình bậc nhất cơ bản có thể giải được bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số.
Câu 2a) ta đã biết một nghiệm là -1 thì ta sẽ thế ngay vào phương trình để tìm giá trị m, sau đó thế ngược lại giá trị m vào phương trình để giải phương trình tìm nghiệm còn lại. Hoặc sau khi tìm được m ta có thể sử dụng ngay định lí Vi-ét để tìm nghiệm còn lại.
Câu 2b) yêu cầu tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn một biểu thức. Trước tiên ta sử dụng biệt thức Δ để tìm điều kiện có 2 nghiệm phân của phương trình, sau đó biến đổi biểu thức về tổng,tích 2 nghiệm để áp dụng định lí Vi-ét và giải.

Lời giải. **1.** a) $x^4 + 2017x^2 - 2018 = 0$.

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2017t - 2018 = 0.(*)$

Cách 1: Ta thấy các hệ số của phương trình $(*)$ lần lượt là:

$a = 1, b = 2017, c = -2018$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2017^2 - 4.1.(-2018) = 4076361 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt là:

$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1; t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -2018$.

Do điều kiện $t \geq 0$ nên ta nhận $t = 1$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$.

Cách 2: Ta thấy các hệ số của phương trình $(*)$ lần lượt là $a = 1, b = 2017, c = -2018$ và $a + b + c = 1 + 2017 + (-2018) = 0$ nên theo hệ quả của định lí Vi-ét thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm là $t = 1$ hoặc $t = \dfrac{c}{a} = -2018$.

Do điều kiện $t \geq 0$ nên ta nhận $t = 1$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$.

b) Cách 1: $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x. \\ x - 2(-1 - 2x) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x. \\ 5x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x = -3. \\ x = 1 \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -3)$

Cách 2: $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ x - 2y = 7 \end{cases}.$

Cộng vế theo vế 2 phương trình trên ta được: $5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Từ $x = 1$, thay vào phương trình thứ nhất ta được: $y = -1 - 2x = -3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -3)$.

2. $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ (1) (m là tham số).

a) -1 là nghiệm của phương trình nên:

$(-1)^2 - 2(-1) + m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -6$

Cách 1: Thay $m = -6$ vào phương trình (1) ta được phương trình:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là 3.

Cách 2: Ta có các hệ số của phương trình là $a = 1, b = -2, c = 3$.

Theo định lí Vi-ét: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2 \Rightarrow -1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là 3.

b) $\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (m + 3) = -(m + 2)$.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -(m + 2) > 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = m + 3 \end{cases}.$

Xét $x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = 8$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = 8 \Leftrightarrow 2.(2^2 - 3(m + 3)) = 8 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa điều kiện có nghiệm). Vậy $m = -3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

■

Bình luận. Câu 1a) là các phương trình và hệ phương trình rất cơ bản, áp dụng các kiến thức đã học thì ta sẽ giải quyết được bài toán không mấy khó khăn.

Câu 2a) ta cần nắm vững kiến thức về nghiệm của phương trình thì mới có thể giải quyết được yêu cầu bài toán. Câu 2b) yêu cầu việc biến đổi biểu thức theo tổng và tích rồi áp dụng định lí Vi-ét để tìm ra giá trị của m. Việc biến đổi này cũng không quá khó nhưng ta cần nhớ lại các hằng đẳng thức đã học thì mới thực hiện được việc biến đổi.

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$.

2. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 4x + 1 - m = 0$ (m là tham số).

a. Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 3$. Tính nghiệm còn lại.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = m$.

Bài 3

Một phòng họp có 250 chỗ ngồi được chia thành từng dãy, mỗi dãy có số chỗ ngồi như nhau. Vì có đến 308 người dự họp nên ban tổ chức phải kê thêm 3 dãy ghế, mỗi dãy ghế phải kê thêm 1 chỗ ngồi nữa thì vừa đủ. Hỏi lúc đầu ở phòng họp có bao nhiêu dãy ghế và mỗi dãy ghế có bao nhiêu chỗ ngồi?

Phân tích. Thoạt nhìn ta sẽ tưởng rằng bài toán cần đặt 2 ẩn, đó là số dãy ghế và số chỗ ngồi mỗi dãy. Nhưng khi xem xét kĩ bài toán ta nhận thấy ngay 2 đại lượng này có mối liên hệ với nhau. Nếu ta lấy số dãy ghế nhân với số chỗ ngồi mỗi dãy ta sẽ được tổng số chỗ ngồi, bài toán đã cho ta dữ kiện này rồi. Do đó ta chỉ cần 1 ẩn là số dãy ghế hoặc số ghế mỗi dãy.

Lời giải. Gọi x là số dãy ghế ($x \in \mathbb{N}^*$ và $x \in$Ư(250)).
Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc đầu là $\dfrac{250}{x}$ (chỗ).
Số dãy ghế lúc sau là $x + 3$ (dãy).
Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc sau là $\dfrac{250}{x} + 1$ (chỗ).
Vậy ta có phương trình:
$(x+3)\left(\dfrac{250}{x} + 1\right) = 308 \Leftrightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$.
$\Delta = 55^2 - 4.750 = 25 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt:
$x_1 = \dfrac{-55 + \sqrt{25}}{2} = 30$ (loại)
$x_2 = \dfrac{-55 - \sqrt{25}}{2} = 25$ (nhận)
Vậy ban đầu phòng họp có 25 dãy ghế và mỗi dãy có $\dfrac{250}{25} = 10$ chỗ ngồi. ■

Bình luận. Đây là một bài toán không khó nhưng dữ kiện cho khá nhiều, ta cần đọc và hiểu đề thật kĩ để tìm ra cách đặt ẩn hợp lí.

Bài 4

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Một điểm M cố định thuộc đoạn thẳng OB (M khác B và M khác O). Đường thẳng d vuông góc với AB tại M cắt nửa đường tròn đã cho tại N. Trên cung NB lấy điểm E bất kì (E khác B và E khác N). Tia BE cắt đường thẳng d tại C. Đường thẳng AC cắt nửa đường tròn tại D. Gọi H là giao điểm của AE và đường thẳng d.

a) Chứng minh tứ giác $BMHE$ nội tiếp được đường tròn.

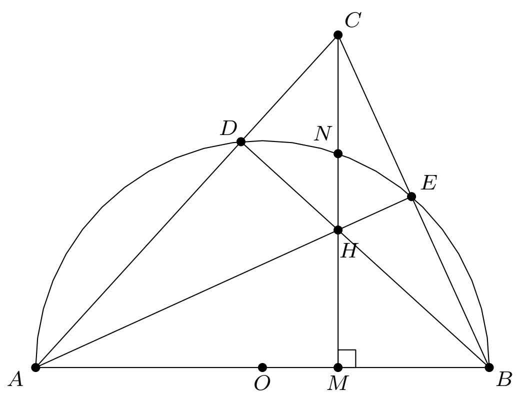
b) Chứng minh 3 điểm B, H, D thẳng hàng.

c) Tính giá trị biểu thức $BN^2 + AD.AC$ theo R.

d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt AB tại K. Chứng minh rằng khi E di động trên cung NB thì độ dài đoạn thẳng BK không đổi.

Phân tích. Câu a) để chứng minh tứ giác nội tiếp ta cần nhớ lại các dấu hiệu đã học. Ở đây tứ giác $BMHE$ đã có 1 góc vuông, không mấy khó khăn để ta có thể đi tìm yếu tố còn lại.
Câu b) là bài toán về chứng minh 3 điểm thẳng hàng. Nhìn hình vẽ có thể đoán được ngay H là trực tâm và BD là đường cao của tam giác ABC, từ đó suy ra điều phải chứng minh.
Câu c) yêu cầu tính giá trị một biểu thức gồm có 2 phần rất rõ ràng. Ý đầu tiên ta sử dụng hệ thức lương trong tam giác vuông và ý còn lại được suy ra từ tam giác đồng dạng. Câu d) yêu cầu chứng minh độ dài một đoạn thẳng không đổi, tức là độ dài đó phải bằng một độ dài cố định nào đó. Trong bài toán ta đã có các điểm A, B, O, M là những điểm cố định. Ta cần chứng minh độ dài BK có liên hệ với độ dài của một đoạn thẳng nào đó đi qua 2 trong số những điểm trên.

Lời giải.



a) *Chứng minh tứ giác $BMHE$ nội tiếp được đường tròn.*
$\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{AEB} + \widehat{BMH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow BMHE$ nội tiếp (tổng 2 góc đối bằng 180°).

b) *Chứng minh 3 điểm B, H, D thẳng hàng.*

Xét $\triangle ABC$ có CM và AE là hai đường cao nên H là trực tâm của $\triangle ABC$ (1).

Mà $\widehat{ADB} = 90^\circ$(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow BD$ là đường cao của $\triangle ABC$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $H \in BD$ hay B, H, D thẳng hàng.

c) *Tính giá trị biểu thức $BN^2 + AD.AC$ theo R.*

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ADB$

$$\begin{cases} \widehat{AMC} = \widehat{ADB} = 90^\circ \\ \widehat{MAD} \text{ là góc chung} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle AMC \backsim \triangle ADB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$ (cạnh tương ứng)$\Rightarrow AD.AC = AB.AM = 2R.AM$ (3).

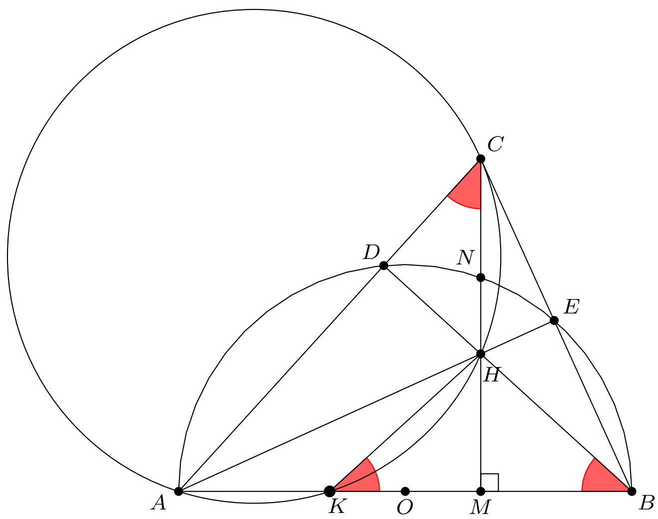
Ta có $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Xét $\triangle ANB$ vuông tại N, có NM là đường cao nên

$BN^2 = BM.BA = 2R.BM$ (4)

Từ (3),(4) ta được $BN^2 + AD.AC = 2R.BM + 2R.AM = 2R.(AM + BM) = 2R.AB = 2R.2R = 4R^2$.

d) *Đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt AB tại K. Chứng minh rằng khi E di động trên cung NB thì độ dài đoạn thẳng BK không đổi.*



Tứ giác $AKHC$ nội tiếp nên $\widehat{ACH} = \widehat{HKM}$(góc ngoài và góc đối trong của tứ giác nội tiếp).

Mà $\widehat{ACH} = \widehat{HBM}(\triangle AMC \backsim \triangle ADB) \Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{HBM} \Rightarrow \triangle BHK$ cân tại H.

Lại có $HM \perp BK$ (giả thiết) nên HM cũng là đường trung tuyến của $\triangle BHK$

$\Rightarrow M$ là trung điểm BK hay $BK = 2BM$.

Mà B, M cố định nên BM không đổi, do đó $BK = 2BM$ không đổi.

Vậy khi E di động trên cung NB thì độ dài đoạn thẳng BK không đổi.

■

Bình luận. Câu a) là bài toán chứng minh tứ giác nội tiếp quen thuộc mà đề bài đã gợi ý một góc vuông trong tứ giác đó, không mấy khó khăn để ta có thể đi tìm yếu tố còn lại.
Câu b) là một bài toán về thẳng hàng, dạng toán tương đối khó. Nhưng ở hình vẽ của bài toán này ta dễ dàng nhận ra được mối liên hệ của 3 điểm đã cho từ đó đi tìm các yếu tố cần thiết để chứng minh.
Câu c) xoay quanh vấn đề về tam giác đồng dạng và hệ thức lượng, ta cần xem xét kĩ đề bài để phán đoán đúng hệ thức lượng nằm trong tam giác nào hoặc cặp tam giác nào sẽ đồng dạng.
Câu d) chứng minh yếu tố độ dài không đổi. Đây là vấn đề tương đối khó vì ta cần phải hiểu được thế nào là độ dài không đổi và vấn đề khó hơn là tìm kiếm sự liên quan với các yếu tố đã cho.

Bài 5

Cho a là số thực dương lớn hơn 1 và $x = \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}$.

Tính giá trị biểu thức $P = x^3 - 2x^2 - 2(a+1)x + 4a + 2021$.

Phân tích. Ta phải biến đổi x thành một biểu thức đơn giản hơn. Chúng ta có thể tách hằng đẳng thức hoặc để ý kĩ hơn ta thấy đây là tổng của 2 biểu thức chỉ sai khác nhau 1 dấu nên ta có thể bình phương lên để giải quyết.

Lời giải. Cách 1:

$$
\begin{aligned}
& x = \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}} \\
& \Leftrightarrow x\sqrt{2} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-1}} \\
& = \sqrt{a+1+2\sqrt{(a-1)(a+1)}+a-1} + \sqrt{a+1-2\sqrt{(a-1)(a+1)}+a-1} \\
& = \sqrt{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})^2} + \sqrt{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1})^2} \\
& = \sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1} \\
& = 2\sqrt{a+1} \\
& \Leftrightarrow x = \sqrt{2(a+1)} \Leftrightarrow x^2 = 2(a+1) \\
& \Leftrightarrow x^2.x = 2(a+1)x \Leftrightarrow x^3 = 2(a+1)x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= x^3 - 2x^2 - 2(a+1)x + 4a + 2021 = 2(a+1)x - 2(2a+2) - 2(a+1)x + 4a + 2021 \\
&= -4a - 4 + 4a + 2021 = -4 + 2021 = 2017.
\end{aligned}
$$

Vậy $P = 2017$ khi $x = \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} & x = \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}} \\ & \Leftrightarrow x^2 = a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1}+2\sqrt{(a+\sqrt{a^2-1})(a-\sqrt{a^2-1})} \\ & = 2a+2\sqrt{a^2-a^2+1} = 2a+2 = 2(a+1) \\ & \Leftrightarrow x^2.x = 2(a+1)x \Leftrightarrow x^3 = 2(a+1)x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= x^3-2x^2-2(a+1)x+4a+2021 = 2(a+1)x-2(2a+2)-2(a+1)x+4a+2021 \\ &= -4a-4+4a+2021 = -4+2021 = 2017. \end{aligned}$$

Vậy $P = 2017$ khi $x = \sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}$. ■

Bình luận. Đây chẳng qua là một bài toán rút gọn nhưng ở mức độ nâng cao. Ta cần nắm vững kĩ thuật thêm bớt hằng đẳng thức hoặc xem xét kĩ biểu thức có gì đặc biệt, từ đó đưa ra hướng giải quyết phù hợp. Đối với bài toán này, cách 1 dễ tiếp cận hơn vì nó quen thuộc, thường gặp trong các bài toán rút gọn. Cách 2 tuy ít gặp nhưng lại tỏ ra hiệu quả hơn trong việc tính toán và nhìn cũng đỡ rối hơn.

Đề 7. Đề thi tuyển sinh Lớp 10 Sở GD và ĐT Cà Mau

Bài 1

Cho biểu thức $A = \dfrac{2a^2+4}{1-a^3} - \dfrac{1}{1+\sqrt{a}} - \dfrac{1}{1-\sqrt{a}}$ (với $a \geq 0; a \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Phân tích. Với câu a) ta có thể quy đồng phân thức, sau đó rút gọn tử và mẫu.
Câu b) hướng tới việc tìm giá trị nhỏ nhất của hàm phân thức, ta kết hợp với ĐKXĐ của a.

Lời giải. ĐKXĐ: $a \geq 0; a \neq 1$.

a) Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{(1-\sqrt{a})(1+a+a^2)}{1+\sqrt{a}} - \frac{(1+\sqrt{a})(1+a+a^2)}{1-\sqrt{a}} \\ &= \frac{2a^2+4-(1+a+a^2-\sqrt{a}-a\sqrt{a}-a^2\sqrt{a})-(1+a+a^2+\sqrt{a}+a\sqrt{a}+a^2\sqrt{a})}{(1-a)(1+a+a^2)} \\ &= \frac{2-2a}{(1-a)(1+a+a^2)} \\ &= \frac{2}{1+a+a^2}. \end{aligned}$$

b) Do $a \geq 0; a^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + a + a^2 \geq 1$.

Do đó $\dfrac{1}{1+a+a^2} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{2}{1+a+a^2} \leq 2$ hay $A \leq 2$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $1 + a + a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 2 khi $a = 0$.

■

Bình luận. a) Đây là dạng bài cơ bản, học sinh chỉ cần nắm vững phương pháp rút gọn, vận dụng các hằng đẳng thức và cẩn thận tính toán là có thể làm được.

b) Tìm giá trị lớn nhất của phân thức có tử là một hằng số và mẫu là một biểu thức, ta chỉ cần tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức ở mẫu.

Bài tập tương tự.

Cho biểu thức $A = \dfrac{6a^2+12}{1-a^3} - \dfrac{3}{1+\sqrt{a}} - \dfrac{3}{1-\sqrt{a}}$ (với $a \geq 0; a \neq 1$).

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

Đáp án:

a) $A = \dfrac{6}{1+a+a^2}$

b) Giá trị lớn nhất của A là 2 khi $a = 0$.

Bài 2

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ mx + y = 1 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

b) Xác định giá trị của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đường thẳng $y = -mx + 1$ tại một điểm nằm trên parabol $y = -2x^2$.

Phân tích. a) Thay giá trị $m = 2$ thì ta được một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Ta có thể giải hệ này bằng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế.

b) Đối với bài toán này ta sẽ đi tìm giao điểm của 2 đường thẳng bằng cách lập phương trình hoành độ giao điểm. Ta cần tìm tham số m để giao điểm thỏa phương trình Parabol.

Lời giải. a) Với $m = 2$ hệ phương trình trở thành

$$(I) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Cách 1: $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 2x+(2-x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}.$

Cách 2: $\begin{cases} x+y=2 & (1) \\ 2x+y=1 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) − (1) ta được: $x=-1$.

Thay $x=-1$ vào (1), ta có: $-1+y=2 \Rightarrow y=3$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(-1;3)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $(d_1): y=-x+m$ và đường thẳng $(d_2): y=-mx+1$ là:

$$\begin{aligned} & -x+m=-mx+1 \\ & \Leftrightarrow (m-1)x=1-m \\ & \Leftrightarrow x=\frac{1-m}{m-1} \quad (\text{vì } m\neq 1) \\ & \Leftrightarrow x=-1. \end{aligned}$$

Với $x=-1 \Rightarrow y=1+m$.

Do giao điểm nằm trên Parabol $(P): y=-2x^2$ nên thay $x=-1, y=1+m$ vào (P), ta được: $1+m=-2.(-1)^2 \Leftrightarrow 1+m=-2 \Leftrightarrow m=-3$.

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm.

■

Bình luận. a) Đối với bài toán có hệ số của x hoặc y là 2 số bằng nhau hoặc đối nhau thì phương pháp cộng đại số sẽ được ưu tiên. Ngoài ra nếu bài toán có thể rút y theo x hoặc ngược lại thì ta sẽ ưu tiên phương pháp thế. Đối với bài toán này ta có thể lựa chọn một trong hai phương pháp thế và cộng đại số để giải đều được.

b) Đây là bài toán về sự tương giao của 2 đường. Ta cần tìm tham số m để giao điểm của 2 đường thỏa phương trình Parabol.

Bài tập tương tự.

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x+y=m \\ mx+y=5 \end{cases}.$

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b) Xác định giá trị của m để đường thẳng $y=mx+5$ cắt đường thẳng $y=2x+2m+1$ tại một điểm nằm trên parabol $y=3x^2$.

Đáp án :

$a)$ $(x,y)=(-3;11)$

$b)$ $m=\dfrac{7}{2}$.

Bài 3

Người ta hòa 8kg chất lỏng loại I với 6kg chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700kg/m^3. Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng. Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II là 200kg/m^3.

Phân tích. Đây là bài toán thực tế liên quan đến các đại lượng vật lý như khối lượng, khối lượng riêng và thể tích. Ta cần nhớ công thức $m = D.V$, với m, D, V lần lượt là khối lượng, khối lượng riêng và thể tích của một chất. Đề bài không đề cập đến thể tích của hỗn hợp nên ta giả sử thể tích hỗn hợp được bảo toàn. Ta sẽ giải quyết bài toán này bằng cách lập phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng trên thông qua sự bảo toàn thể tích các chất trong một hỗn hợp.

Lời giải. Gọi khối lượng riêng của chất lỏng loại I là x (kg/m^3), $(x > 200)$.
Khi đó khối lượng riêng của chất lỏng loại II là $(x-200)$(kg/m^3).
Do thể tích hỗn hợp được bảo toàn nên

$$\begin{aligned}
&\frac{8}{x}+\frac{6}{x-200}=\frac{14}{700}\\
\Leftrightarrow&\frac{8x-1600+6x}{x^2-200x}=\frac{1}{50}\\
\Leftrightarrow&14x-1600=0,02.(x^2-200x)\\
\Leftrightarrow&0,02x^2-18x+1600=0\\
\Leftrightarrow&x=800 \vee x=100
\end{aligned}$$

Vì $x > 200$ nên ta nhận $x = 800$.
Vậy khối lượng riêng của chất loại lỏng I là 800kg/m^3
và khối lượng riêng của chất lỏng loại II là 600kg/m^3. ■

Bình luận. Thực tế thì khi trộn 2 chất lỏng với nhau thể tích của hỗn hợp sẽ nhỏ hơn tổng thể tích của 2 chất. Nhưng do đề bài không đề cập đến nên ta có thể xem như sự thay đổi không đáng kể và sử dụng sự bảo toàn thể tích để giải bài toán. Bài toán có sự lồng ghép giải phương trình bậc 2 và khi giải cần chú ý điều kiện của x để dễ dàng chọn nghiệm.

Bài tập tương tự.

Người ta hòa 5kg chất lỏng loại I với 3kg chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 800kg/m^3. Tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng. Biết rằng khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II là 400kg/m^3.
Đáp án : Khối lượng riêng của chất loại lỏng I là 1000kg/m^3
và khối lượng riêng của chất lỏng loại II là 600kg/m^3.

Bài 4

Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(k-2)x - 2k - 5 = 0$ (với k là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của k.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị k sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 18$.

Phân tích. a) Là dạng toán về phương trình bậc hai luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của tham số k ta chỉ cần chứng minh $\Delta > 0$, $\forall k$.

b) Với một phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt ta sẽ sử dụng Định lý Vi-ét để tìm mối liên hệ tổng, tích của 2 nghiệm theo tham số k. Biểu diễn biểu thức đã cho theo tổng và tích 2 nghiệm của phương trình.

Lời giải. a) $x^2 - 2(k-2)x - 2k - 5 = 0$ (1).

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta'_{(1)} &= (k-2)^2 + 2k + 5\\ &= k^2 - 2k + 9\\ &= (k-1)^2 + 8 > 0, \forall k\end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của k.

b) Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1).

Áp dụng Định lý Vi-ét cho (1), ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(k-2)}{1} = 2(k-2) \\ x_1.x_2 = \dfrac{-2k-5}{1} = -2k-5 \end{cases}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}& x_1^2 + x_2^2 = 18\\ \Leftrightarrow & (x_1+x_2)^2 - 2.x_1x_2 = 18\\ \Leftrightarrow & 4(k-2)^2 - 2.(-2k-5) = 18\\ \Leftrightarrow & 4k^2 - 12k + 8 = 0\\ \Leftrightarrow & k = 1 \vee k = 2\end{aligned}$$

Vậy $k = 1;\ k = 2$ là giá trị cần tìm.

■

Bình luận. Đây là dạng toán thường gặp trong kì thi vào lớp 10. Các kiến thức về nghiệm của phương trình bậc hai. Ngoài ra, bài toàn còn kết hợp sử dụng Định lý Vi-ét trong phương trình bậc hai, tìm k để các nghiệm thỏa một điều kiện cho trước.

Bài tập tương tự.

Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2mx + 2m - 10 = 0$ (với m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị m sao cho $2(x_1^2 + x_2^2) = 38$.

Đáp án : b) $m = \dfrac{1}{2}$

Bài 5

Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kỳ trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

a) Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và tia MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.

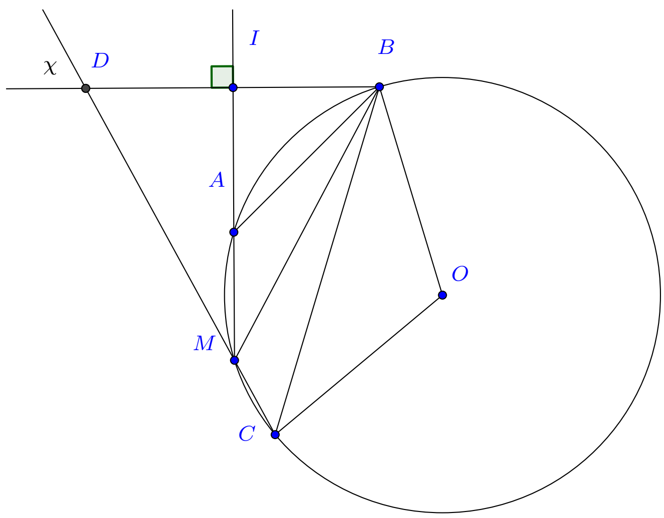
b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và $\widehat{BDC}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

c) Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

Phân tích. a) Ta sẽ dựa vào tính chất của góc nội tiếp, và dữ kiện đề bài A là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chia $\overset{\frown}{BC}$ thành 2 cung nhỏ bằng nhau. Ta sẽ chứng minh các góc tương ứng bằng nhau.

b) Dựa vào tính chất tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác chính là điểm cách đều các đỉnh của tam giác đó. Để chứng minh độ lớn của 1 góc không phụ thuộc vào điểm thay đổi, ta sẽ đi chứng minh góc đó bằng với 1 góc cố định nào đó.

c) Để chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn ta chứng minh đường thẳng đó vuông góc với bán kính của đường tròn tại tiếp điểm.



Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AMD} &= \widehat{MCA} + \widehat{MAC} \text{ (vì} \widehat{AMD} \text{ là góc ngoài của } \Delta ACM) \\ &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{MA} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{MC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.\end{aligned}$$

Mặt khác $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp (O) chắn $\overset{\frown}{AC}$).

Do đó $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (1).

Ta lại có:

$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp (O) chắn $\overset{\frown}{AC}$)

$\widehat{BMA} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp (O) chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Mà $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$ (vì A là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$)

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{BMA}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{BMA}$

Hay MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$

b) Xét ΔAMB và ΔAMD, ta có

$$\begin{cases} AM \text{ chung} \\ \widehat{BMA} = \widehat{AMD} \text{ (chứng minh ở câu } a.) \\ MB = MD \text{ (} \Delta BMD \text{ có đường cao đồng thời là đường phân giác nên } \Delta BMD \text{ cân tại M)} \end{cases}$$

Vậy $\Delta AMB = \Delta AMD$ (c.g.c).

$\Rightarrow AB = AD$.

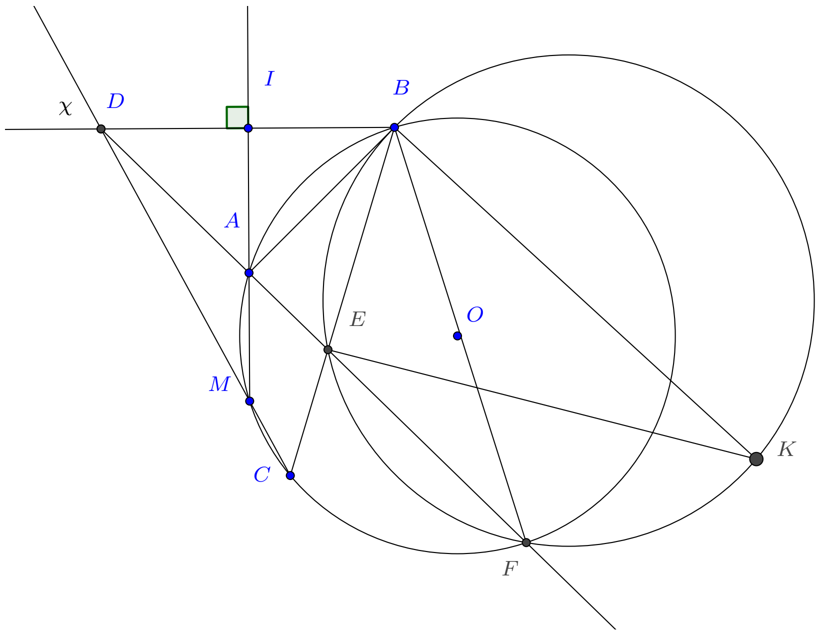
Mà $AB = AC$ (2 dây cung chắn 2 cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{AC}$ bằng nhau)

Nên $AB = AC = AD$.

Do đó A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của đường tròn (BCD) cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$).

Ta lại có $\widehat{BAC}$ có số đo không đổi (do A, B, C cố định), suy ra $\widehat{BDC}$ có số đo không đổi và không phụ thuộc vào vị trí điểm M.



c)

Gọi BK là đường kính của đường tròn (BEF).

Ta có:

$\widehat{ABE} = \widehat{AFB}$ $(= \dfrac{1}{4}\overset{\frown}{BC})$

Mà $\widehat{AFB} = \widehat{BKE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$ của BEF).

và $\widehat{BKE} + \widehat{EBK} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{ABE} = \widehat{EBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} = 90^\circ$

Hay $AB \perp BK$.

Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn (BEF).

■

Bình luận. a) Là bài toán chứng minh các cặp góc bằng nhau, ta sử dụng tính chất của góc nội tiếp để chứng minh các cặp góc tương ứng bằng nhau.

b) Là bài toán về tâm đường tròn ngoại tiếp một tam giác, ta sử dụng tính chất cách đều các đỉnh của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

c) Là bài toán liên quan đến tiếp tuyến của đường tròn, ta dựa vào định nghĩa một tiếp tuyến và kết hợp các yếu tố đề bài là có thể giải quyết được.

Các kiến thức trong bài toán này tương đối dễ, các câu có sự liên kết với nhau, câu sau là sự vận dụng kết quả của câu trước để chứng minh, chủ yếu là sử dụng kiến thức góc nội tiếp một đường tròn để chứng minh.

Đề 8. Đề thi tuyển sinh lớp 10, Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Đồng Nai

Bài 1

1. Giải phương trình $x^2 - 9x + 20 = 0$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$.
3. Giải phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Phân tích. Câu 1 là giải phương trình bậc hai. Ta có nhiều cách làm đối với câu này, như dùng định lý về công thức nghiệm, hay phân tích đa thức thành nhân tử rồi giải phương trình tích.
Câu 2 là hệ phương trình bậc nhất theo hai ẩn x, y quen thuộc. Có hai cách giải cho bài này: một là dùng phương pháp thế, hai là phương pháp cộng đại số.
Câu 3 là giải phương trình bậc 4 trùng phương. Cách giải đầu tiên ta nghĩ đến là đặt ẩn phụ và đưa về phương trình bậc hai kèm điều kiện của ẩn phụ để giải, sau đó dựa vào giá trị tìm được của ẩn phụ để tìm nghiệm của phương trình ban đầu.

Lời giải.

1.

$$x^2 - 9x + 20 = 0. \tag{1}$$

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$.

- **Cách 1:**
  Phương trình (1) có: $a = 1$, $b = -9$, $c = 20$.
  $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4.1.20 = 1 > 0$
  $\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-1}{2} = 4; \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+1}{2} = 5.$$

- **Cách 2:**

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5x + 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-4) - 5(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)(x-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x - 4 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x = 4 \\ x = 5 \end{aligned}\right. .\end{aligned}$$

- **Cách 3:**

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^2 - 2.\frac{9}{2}.x + \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{9}{2} = \dfrac{1}{2}\\ x - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5\\ x = 4\end{array}\right. .\end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 4$ và $x_2 = 5$.

2.

$$\begin{cases} 7x - 3y = 4\\ 4x + y = 5\end{cases}. \tag{I}$$

ĐKXĐ: $x, y \in \mathbb{R}$.

- **Cách 1:**

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3y = 4\\ y = 5 - 4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3(5 - 4x) = 4\\ y = 5 - 4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x - 15 = 4\\ y = 5 - 4x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 19x = 19\\ y = 5 - 4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\\ y = 5 - 4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1\\ y = 1\end{cases}.\end{aligned}$$

- **Cách 2:**

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 28x - 12y = 16\\ 28x + 7y = 35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19y = -19\\ 28x = 35 - 7y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1\\ 28x = 35 - 7\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1\\ 28x = 28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1\\ x = 1\end{cases}.\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm $(x = 1; y = 1)$.

3.

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0. \tag{1}$$

ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$.

- **Cách 1:**

  Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$.

  Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \text{ (ĐK: } t \geq 0). \tag{2}$$

  Phương trình (2) có: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$.

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0$

  $\Rightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ (loại)}; \qquad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ (nhận)}.$$

  Khi đó:

  $(1) \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

- **Cách 2:**

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + x^2 - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) + (x^2 - 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \ \text{ (do } x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow x^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right..
\end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = \sqrt{3}$ và $x_2 = -\sqrt{3}$.

■

Bình luận. Bài này gồm những câu đơn giản, không yêu cầu cao về tư duy. Ta chỉ cần chú ý về cách trình bày và lập luận để không bị mất điểm.

Với câu 1, ta thường sẽ lựa chọn cách 1 (*giải bằng công thức nghiệm*) để làm, vì khả năng giải quyết mọi phương trình bậc hai của cách này, cùng với bước giải ngắn.
Cách 2 (*phân tích đa thức thành nhân tử, đưa về phương trình tích*) cũng là một cách giải hiệu quả trong trường hợp ta biết rằng phương trình có nghiệm "đẹp" (không phải nghiệm vô tỉ, có căn). Cách giải này không đòi hỏi phải viết lập luận mà vẫn đảm bảo tính logic, mạch lạc, tự nhiên của bài giải.
Cách 3 (*chính phương hóa biểu thức chứa x*) có lẽ là cách ít được sử dụng nhất. Cách này không có thế mạnh nổi trội gì hơn so với hai cách nêu trên; nếu dùng để chứng minh phương trình vô nghiệm (chẳng hạn $x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 4 = 0$) thì cách 1 có thể làm nhanh gọn khi tính ra $\Delta < 0$; nếu

để tìm nghiệm vô tỉ, có căn (chẳng hạn $x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}+1 \vee x=-\sqrt{2}+1$) thì cách 1 cũng nhanh hơn với công thức nghiệm có sẵn!
Nói chung, để giải nhanh và chính xác phương trình bậc hai, trước tiên ta cần bấm máy tính để tìm nghiệm trước, tùy vào phương trình có nghiệm "đẹp" hay "xấu" hay vô nghiệm để quyết định cách giải phù hợp.

Tương tự với câu 3, sau khi đưa được phương trình về dạng bậc hai, ta cũng có thể giải phương trình bậc hai đó theo cách nào tùy thích, chỉ cần lưu ý điều kiện để nhận nghiệm. Cách 2 của câu này có sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, không cần phải đặt ẩn phụ.

Với câu 2, ta hoàn toàn có thể lựa chọn một trong hai cách đã trình bày để giải, một cách sử dụng phương pháp thế và cách còn lại là phương pháp cộng đại số. Trong bài này, do ta dễ dàng tính y theo x từ phương trình dưới nên có lẽ phương pháp thế sẽ được ưu tiên nhiều hơn.

Bài tập tương tự.

1. Giải phương trình $2x^2+11x+9=0$.
   Đáp án: $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{9}{2}$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} -5x+2y=-2 \\ x+3y=10 \end{cases}$.
   Đáp án: $\left(x=\dfrac{26}{17}; y=\dfrac{48}{17}\right)$.
3. Giải phương trình $x^4-x^2-20=0$.
   Đáp án: $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$.

Bài 2

Cho hai hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ và $y=x-4$ có đồ thị lần lượt là (P) và (d).

1. Vẽ hai đồ thị (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
2. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và (d).

Phân tích. Câu 1 đưa ra yêu cầu vẽ đồ thị hàm số bậc hai (dạng $y=ax^2$) và hàm số bậc nhất (dạng $y=ax+b$), nghĩa là vẽ một đường parabol và một đường thẳng trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
Vẽ parabol (P):
- Bước 1: Lập bảng giá trị: Ta cần biết tối thiểu 5 điểm nằm trên parabol, nên ta chọn 5 giá trị hoành độ để thế vào phương trình của parabol tìm tung độ, và chú ý lấy những điểm đối xứng qua trục tung;

- Bước 2: Vẽ;
- Bước 3: Kết luận parabol đi qua những điểm nào.

Vẽ đường thẳng (d):

- Bước 1: Lập bảng giá trị: Ta cần biết tối thiểu 2 điểm nằm trên đường thẳng, nên ta chọn 2 giá trị hoành độ thế vào phương trình đường thẳng tìm tung độ;
- Bước 2: Vẽ;
- Bước 3: Kết luận đường thẳng đi qua những điểm nào.

Câu 2 yêu cầu tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d). Đề bài không nói rõ rằng tìm bằng đồ thị hay bằng phép toán, tuy nhiên ta sẽ tìm thông qua giải phương trình hoành độ giao điểm để đảm bảo tính chính xác và khoa học:

- Bước 1: Viết phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d);
- Bước 2: Giải phương trình hoành độ giao điểm: Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng là một phương trình bậc hai, nên cốt lõi của câu này là giải phương trình bậc hai tìm hoành độ giao điểm;
- Bước 3: Tìm tung độ của giao điểm: thế hoành độ tìm được vào một trong hai hàm số để có tung độ giao điểm của hai đồ thị;
- Bước 4: Kết luận tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và (d).

Lời giải.

1. Vẽ đồ thị $(P): y = -\dfrac{1}{2}x^2$:

   Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\dfrac{1}{2}x^2$	-2	$-\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	-2

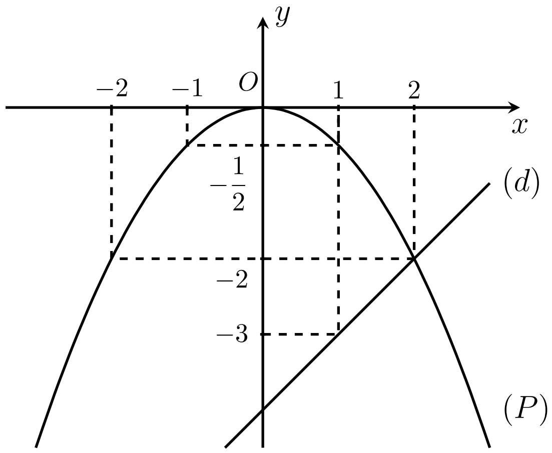
   Vậy đồ thị (P) đi qua 5 điểm có tọa độ $(-2;-2)$, $(-1;-\dfrac{1}{2})$, $(0;0)$, $(1;-\dfrac{1}{2})$, $(2;-2)$.

   Vẽ đồ thị $(d): y = x - 4$:

   Bảng giá trị:

x	0	1
$y = x - 4$	-4	-3

   Vậy đồ thị (d) đi qua 2 điểm có tọa độ $(0;-4)$ và $(1;-3)$.



2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}x^2 = x - 4 \\
& \Leftrightarrow -x^2 = 2x - 8 \\
& \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 = 0 \\
& \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 2x + 8 = 0 \\
& \Leftrightarrow -x(x+4) + 2(x+4) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+4)(-x+2) = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = 0 \\ -x + 2 = 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (P)$ cắt (d) tại hai điểm $A(-4; y_A)$ và $B(2; y_B)$.

$A(-4; y_A) \in (d) \Rightarrow y_A = -4 - 4 = -8$;

$B(2; y_B) \in (d) \Rightarrow y_B = 2 - 4 = -2$.

Vậy (P) cắt (d) tại hai điểm $A(-4; -8)$ và $B(2; -2)$.

■

Bình luận. Bài này đưa ra những yêu cầu rất cơ bản, ta chỉ cần nắm vững phương pháp là có thể hoàn thành tốt.

Để ý rằng ở câu 2, do đề bài không chỉ rõ phải tìm tọa độ giao điểm bằng phép toán, ta có thể khéo léo tận dụng bước lập bảng giá trị ở câu 1 để làm xuất hiện điểm chung của hai đồ thị:

Đầu tiên, ta bấm máy tính giải phương trình hoành độ giao điểm để tìm nghiệm. Sau đó, khi lập bảng giá trị, ta dùng cả hai nghiệm vừa tìm được để xác lập tọa độ những điểm thuộc đồ thị. Khi đó, ở hai bảng giá trị liệt kê những điểm mà đồ thị đi qua sẽ có tọa độ hai điểm chung của (P) và (d). Vậy để trình bày câu 2 ta chỉ cần chỉ ra hai điểm chung trên bảng giá trị là xong!

Tuy nhiên, thủ thuật này chỉ thực hiện được khi đường thẳng và parabol cắt nhau tại hai điểm phân biệt; tức số giao điểm giữa chúng là tối đa, ta chỉ ra được 2 giao điểm thì chúng là tất cả giao điểm cần tìm. Nếu đường thẳng tiếp xúc với parabol tại một điểm hoặc không có điểm chung với parabol, ta buộc phải giải phương trình hoành độ giao điểm để có lập luận chặt chẽ nhất.

Bài tập tương tự. Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = 6x - 9$ có đồ thị lần lượt là (P) và (d).

1. Vẽ hai đồ thị (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

2. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị (P) và (d).
   Đáp án: $A(3;9)$.

Bài 3

1. Cho $a > 0$ và $a \neq 4$.
   Rút gọn biểu thức $T = \left(\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \dfrac{4}{\sqrt{a}}\right)$.

2. Một đội xe dự định chở 120 tấn hàng. Để tăng sự an toàn nên đến khi thực hiện, đội xe được bổ sung thêm 4 chiếc xe, lúc này số tấn hàng của mỗi xe chở ít hơn số tấn hàng của mỗi xe dự định chở là 1 tấn. Tính số tấn hàng của mỗi xe dự định chở; biết số tấn hàng của mỗi xe khi dự định là bằng nhau, khi thực hiện là bằng nhau.

Phân tích. Câu 1 yêu cầu rút gọn biểu thức chứa căn, tuy nhiên ta có thể thấy rõ hướng đi ban đầu. Biểu thức T sẽ là tích của hai phân thức (sau khi thực hiện quy đồng), nên để rút gọn T ta cần làm xuất hiện ở tử và mẫu của các phân thức những biểu thức giống nhau. Vậy ta cứ quy đồng các biểu thức trong ngoặc và xem xét các bước đi tiếp theo.
Câu 2 là một vấn đề thực tế được yêu cầu giải quyết theo phương pháp toán học. Với dạng bài này, đề bài yêu cầu tìm hoặc tính gì thì tốt nhất ta nên đặt ẩn là đối tượng đó luôn, sau đó kết hợp các giả thiết để đặt ra phương trình hoặc hệ phương trình rồi giải tìm giá trị của ẩn, cũng chính là đáp án của bài toán. Trong câu này, ta sẽ đặt x là số tấn hàng mỗi xe dự định chở.

Lời giải.

1. Ta có:

$$\begin{aligned}
T &= \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right) \\
&= \left[\frac{(\sqrt{a}-2)^2 - (\sqrt{a}+2)^2}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)}\right] \cdot \left(\frac{a-4}{\sqrt{a}}\right) \\
&= \left(\frac{a - 4\sqrt{a} + 4 - a - 4\sqrt{a} - 4}{a-4}\right) \cdot \left(\frac{a-4}{\sqrt{a}}\right) \\
&= \frac{-8\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = -8.
\end{aligned}$$

2. - **Cách 1:**

   Gọi x (tấn) là số tấn hàng của mỗi xe dự định chở (ĐK: $x > 1$).

   Suy ra số xe dự định là: $\dfrac{120}{x}$ (chiếc).

   Vì khi thực hiện, mỗi xe chở $(x-1)$ (tấn) nên số xe khi này là: $\dfrac{120}{x-1}$ (chiếc).

   Theo đề bài, số xe khi thực hiện nhiều hơn số xe dự định là 4 chiếc. Từ đó ta có phương trình:

   $$\frac{120}{x-1} - \frac{120}{x} = 4 \text{ (ĐK: } x > 1). \tag{1}$$

   Giải phương trình:

   $$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 120x - 120(x-1) = 4x(x-1)\\ &\Leftrightarrow 120x - 120x + 120 = 4x^2 - 4x\\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 120 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ (nhận)}\\ x = -5 \text{ (loại)}\end{array}\right. .\end{aligned}$$

   Vậy số tấn hàng mỗi xe dự định chở là 6 tấn.

   - **Cách 2:**

   Gọi x (tấn) là số tấn hàng mỗi xe dự định chở (ĐK: $x > 1$); y (chiếc) là số xe dự định (ĐK: $y \in \mathbb{N}^*$).

   Suy ra số tấn hàng mỗi xe chở khi thực hiện là $x - 1$ (tấn), số xe chở khi thực hiện là $y + 4$ (chiếc).

   Ta có hệ phương trình sau:

   $$\begin{cases} xy = 120\\ (x-1)(y+4) = 120\end{cases} \text{ (ĐK: } x > 1; y \in \mathbb{N}^*). \tag{I}$$

   Giải hệ phương trình:

   $$\begin{aligned}(\mathrm{I}) &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 120\\ xy + 4x - y - 4 = 120\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 120\\ 4x - y - 4 = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 120\\ y = 4x - 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x-4) = 120\\ y = 4x - 4\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x - 120 = 0\\ y = 4x - 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ (nhận) hoặc } x = -5 \text{ (loại)}\\ y = 4x - 4\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6\\ y = 20\end{cases} .\end{aligned}$$

   Vậy số tấn hàng mỗi xe dự định chở là 6 tấn.

■

Bình luận. Câu 1 yêu cầu rút gọn biểu thức đơn giản, ta thử làm theo hướng nghĩ ban đầu và sẽ đi đến kết quả một cách tự nhiên. Ta chỉ cần lưu ý tính toán, khai triển và rút gọn chính xác là được.

Phương pháp giải quyết của câu 2 không có gì mới mẻ: đặt ẩn và thành lập phương trình để giải. Nhưng thoạt nhìn với đề bài nhiều chữ và nhiều giả thiết, vẫn có khả năng ta không thành lập đúng được phương trình để giải tìm đáp án chính xác của bài toán. Ta cần đọc thật kĩ đề bài để tìm ra mối quan hệ giữa những đại lượng, những đối tượng gặp phải. Cũng nên lưu ý thêm rằng khi đặt ẩn thay cho một đối tượng thực tế, ta phải gắn ẩn đó với điều kiện sao cho hợp lý. Nhiều khi ta sẽ không để ý chuyện đặt điều kiện, dẫn tới bối rối khi phải nhận hoặc loại các nghiệm tìm được.

Bài tập tương tự.

1. Cho $x > 0$, $x \neq 4$. Rút gọn biểu thức: $Q = \left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{2-\sqrt{x}} - 1\right)$.

   Đáp án: $Q = 1$.

2. Một đội xe dự định chở 160 tấn hàng. Tuy nhiên, đến ngày thực hiện, có 8 xe gặp trục trặc không thể khởi hành được. Để kịp tiến độ, người ta quyết định chất thêm 1 tấn hàng lên mỗi xe để có thể chở hết số hàng đi trong ngày hôm đó. Biết rằng việc chất thêm hàng lên xe vẫn đảm bảo tính an toàn và số lượng hàng mỗi xe chở khi dự định là bằng nhau, khi thực hiện là bằng nhau. Tính số xe đã chở hàng đi khi thực hiện.

   Đáp án: 32 xe.

Bài 4

Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $R = (x_1)^2 + (x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phân tích. Với bài này, ta sẽ xử lí lần lượt từng yêu cầu của đề bài: tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt; sau đó tìm m sao cho biểu thức R đạt giá trị nhỏ nhất.

Yêu cầu đầu tiên tương đương với tìm m sao cho $\Delta > 0$. Yêu cầu tiếp theo liên quan đến giá trị nhỏ nhất của R, nên ta cần chứng minh R luôn lớn hơn hoặc bằng một số thực và tìm ra một giá trị của m để R đạt bằng số thực ấy. Để ý rằng R là biểu thức đối xứng theo hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình, nên ta sẽ biểu diễn R theo tổng và tích của hai nghiệm, rồi dùng Định lý Vi-ét để đưa m vào biểu thức, từ đó lập luận theo các giá trị m để tìm giá trị nhỏ nhất của R. Kĩ thuật thường dùng nhất ở đây là "ép" m vào một bình phương của tổng.

Lời giải. Xét phương trình:

$$x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có: $a = 1$, $b = 2m - 1$, $c = m^2 - 1$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (2m-1)^2 - 4.1.(m^2-1)\\ &= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4\\ &= -4m + 5.\end{aligned}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}. \quad (*)$$

Khi đó, theo Định lý Vi-ét:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} = 1 - 2m;\\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} = m^2 - 1.\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}R &= (x_1)^2 + (x_2)^2\\ &= (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\\ &= (1-2m)^2 - 2(m^2-1)\\ &= 1 - 4m + 4m^2 - 2m^2 + 2\\ &= 2m^2 - 4m + 3\\ &= 2(m^2 - 2m + 1) + 1\\ &= (m-1)^2 + 1.\end{aligned}$$

$(m-1)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow R = (m-1)^2 + 1 \geq 1, \forall m \in \mathbb{R}$.

Dấu $" = "$ xảy ra $\Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa (*)).

Vậy với $m = 1$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức $R = (x_1)^2 + (x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1. ■

Bình luận. Ở yêu cầu đầu tiên, việc tìm m sao cho $\Delta > 0$ là khá đơn giản, do Δ tính ra là nhị thức bậc nhất theo m. Nếu Δ là một tam thức bậc hai theo m thì ta cần nắm chắc kiến thức về dấu của tam thức bậc hai để kết luận đúng nghiệm của bất phương trình $\Delta > 0$.

Yêu cầu thứ hai đòi hỏi kiến thức về áp dụng Định lý Vi-ét để biểu diễn biểu thức đối xứng của hai nghiệm theo tổng và tích; kiến thức này không quá khó. Tuy nhiên để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức theo m thì ta phải biết chút ít kĩ thuật chính phương hóa biểu thức chứa m, cộng với lập luận chặt chẽ và trình bày đầy đủ, chính xác.

Bài tập tương tự.

Tìm các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$x^2 - 2(m-2)x + 8 - m = 0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $V = {x_1}^2 x_2 + {x_2}^2 x_1$ đạt giá trị lớn nhất.

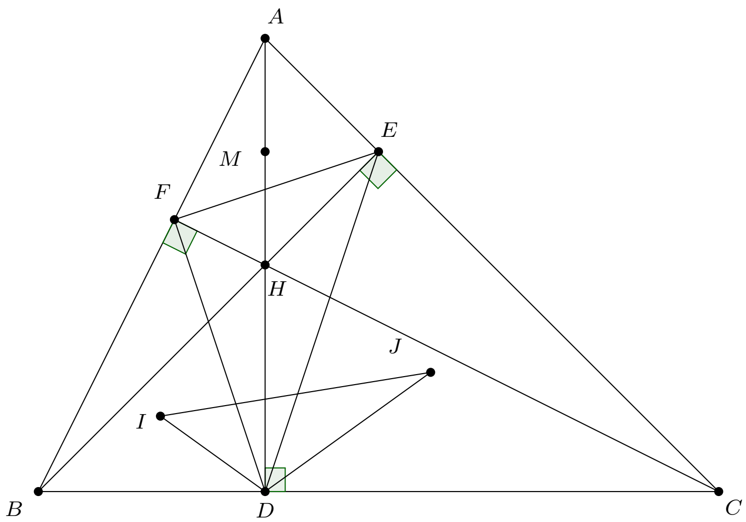
Đáp án: $m = 5$.

Bài 5

Cho ΔABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm H. Biết ba góc $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ đều là góc nhọn. Gọi M là trung điểm của đoạn AH.

1. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $CE.CA = CD.CB$.
3. Chứng minh EM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của ΔBEF.
4. Gọi I, J tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của ΔBDF và ΔEDC. Chứng minh $\widehat{DIJ} = \widehat{DFC}$.

Phân tích.



Đầu tiên, bài toán tam giác nhọn có ba đường cao cắt nhau tại trực tâm là bài toán rất kinh điển. Trước khi làm ta nên nhớ lại một số kết quả có được từ đề bài này, chẳng hạn các tứ giác nội tiếp có trong hình, các góc bằng nhau, các tam giác đồng dạng...

Ở câu 1, rất dễ để nhận ra tại sao tứ giác $AEHF$ nội tiếp: tổng hai góc trong đối nhau bằng $180°$. Mà đặc biệt hơn ta thấy rằng đây cũng là trường hợp hai góc cùng nhìn một cạnh dưới một góc vuông; lúc này ta có thể chỉ ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH, tâm là M. Việc chỉ ra càng nhiều thông tin về đường tròn ngoại tiếp tứ giác có thể sẽ có lợi với những câu tiếp theo, vì thế ta nên ưu tiên trình bày chứng minh tứ giác nội tiếp theo dấu hiệu này.

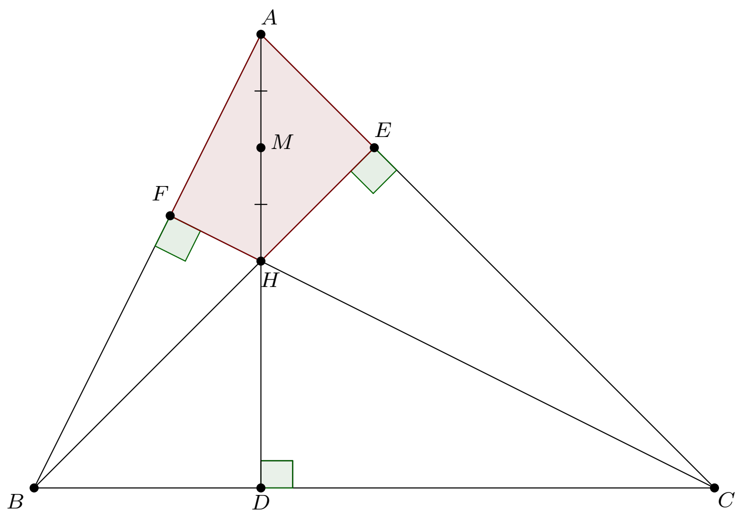
Điều phải chứng minh ở câu 2 làm ta liên tưởng đến chứng minh tam giác đồng dạng, nên ta thử biến đổi đẳng thức của đề bài về dạng tỉ lệ giữa các cặp cạnh của hai tam giác. Đến đây ta thấy ngay cần phải chứng minh $\Delta CAD \backsim \Delta CBE$.

Ở câu 3, để chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF, ta nghĩ đến chuyện chứng minh ME vuông góc với bán kính tại điểm E nằm trên đường tròn. Cái khó ở đây là tìm tâm để có bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF. Đến đây ta cần nhớ một kết quả dễ dàng có được, rằng tứ giác $BFEC$ nội tiếp, nên đường tròn ngoại tiếp ΔBFE cũng chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$. Và không khó để chỉ ra tâm của đường tròn này! Việc cuối cùng là chứng minh ME vuông góc với bán kính qua E để có điều phải chứng minh.

Ở câu 4, ta cần phải để ý rằng, vai trò của các cặp điểm I và J, F và E là tương đương nhau. Nghĩa là nếu ta chứng minh được $\widehat{DIJ} = \widehat{DFC}$, thì ta cũng phải đồng thời chứng minh được $\widehat{DJI} = \widehat{DEB}$. Kết hợp hai kết quả này lại, ta thấy rằng chúng tương đương với việc $\Delta DIJ \backsim \Delta HFE$, nên ta sẽ chứng minh hai tam giác này tương đương. Vì yếu tố tương ứng mà ta cần suy ra từ sự đồng dạng của hai tam giác này là hai cặp góc bằng nhau, nên nghiễm nhiên không thể chứng minh hai tam giác này đồng dạng theo trường hợp $g - g$ mà phải theo trương hợp $c - g - c$ hay $c - c - c$. Đề bài lại cho nhiều giả thiết về góc (tâm đường tròn nội tiếp đồng nghĩa với chuyện có đường phân giác của góc), nên có lẽ hướng chứng minh đồng dạng $c - g - c$ sẽ khả thi hơn.

Lời giải.

1. *Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.*

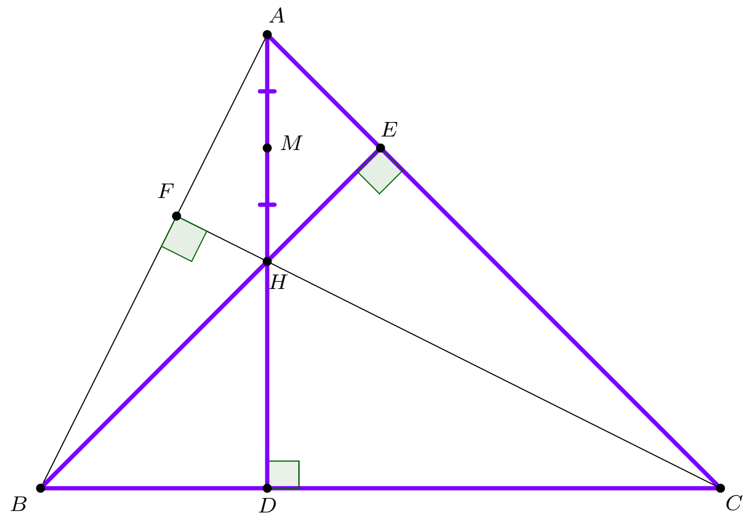


Ta có: $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$

$\Rightarrow A, E, H, F$ cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

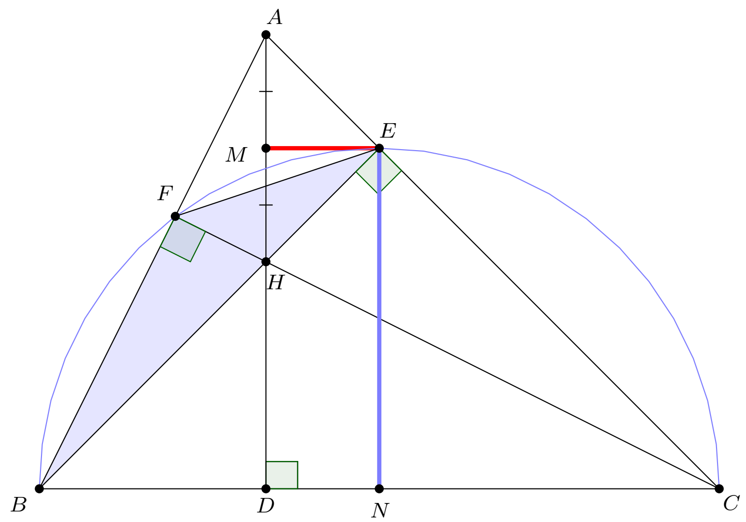
2. *Chứng minh $CE.CA = CD.CB$.*



$\Delta CAD \backsim \Delta CBE$ $(g-g)$ do: $\begin{cases} \widehat{ACB} \text{ chung} \\ \widehat{ADC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CE} \Rightarrow CE.CA = CD.CB.$

3. *Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của ΔBEF*



Gọi N là trung điểm BC.

Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow B, F, E, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow \Delta BEF$ nội tiếp đường tròn tâm N, đường kính BC.

ΔAEH vuông tại E, có EM là trung tuyến (M là trung điểm AH)

$\Rightarrow EM = MH = MA = \dfrac{AH}{2}$

$\Rightarrow \Delta MEH$ cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MEH} = \widehat{MHE} = \widehat{BHD}$ (đối đỉnh) (1).

ΔBEC vuông tại E, có EN là trung tuyến (N là trung điểm BC)

$\Rightarrow EN = NB = NC = \dfrac{BC}{2}$

$\Rightarrow \Delta NEB$ cân tại N

$\Rightarrow \widehat{NEB} = \widehat{NBE}$ (2).

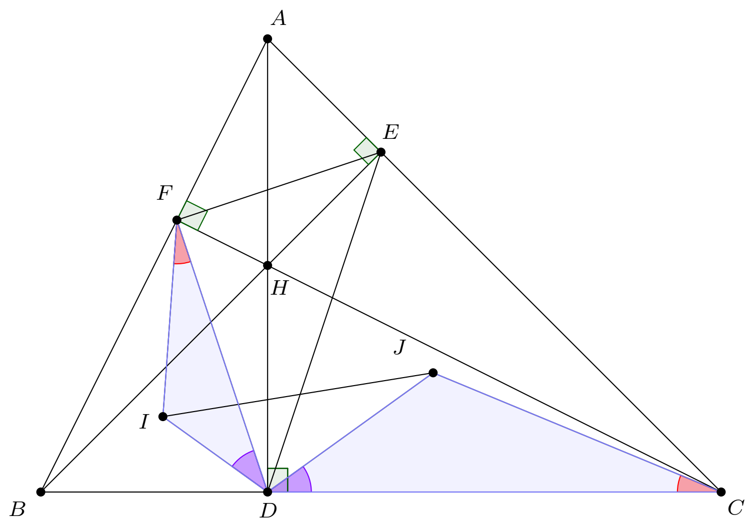
(1), (2) $\Rightarrow \widehat{MEH} + \widehat{NEB} = \widehat{BHD} + \widehat{NBE} = 90^\circ$ (do ΔBHD vuông tại D)

$\Rightarrow \widehat{MEN} = 90^\circ$

$\Rightarrow ME \perp NE$ tại E

$\Rightarrow$ ME là tiếp tuyến của đường tròn tâm N, bán kính NE, tức đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

4. *Chứng minh* $\widehat{DIJ} = \widehat{DFC}$



Do I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của ΔBDF và ΔEDC, nên suy ra DI là phân giác của $\widehat{BDF}$, CJ là phân giác của $\widehat{ACB}$.

Ta có: $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ A, E, D, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow$ $AEDB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{BAC}$ (góc ngoài bằng góc trong đối diện)

$\Rightarrow \widehat{JDC} = \dfrac{1}{2}\widehat{EDC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ (3).

Ta có: $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ A, F, D, C cùng thuộc đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow$ $AFDC$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC}$ (góc ngoài bằng góc trong đối diện)

$\Rightarrow \widehat{IDF} = \dfrac{1}{2}\widehat{BDF} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ (4).

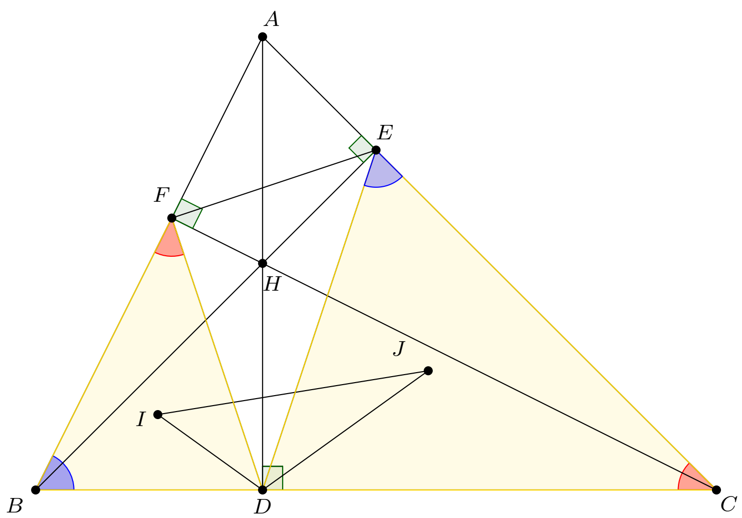
(3), (4) $\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{JDC}$.

Mặt khác, cũng do tứ giác $AFDC$ nội tiếp đường tròn, ta có: $\widehat{BFD} = \widehat{ACB}$ (góc ngoài bằng góc trong đối diện)

$\Rightarrow \widehat{IFD} = \dfrac{1}{2}\widehat{BFD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} = \widehat{JCD}$.

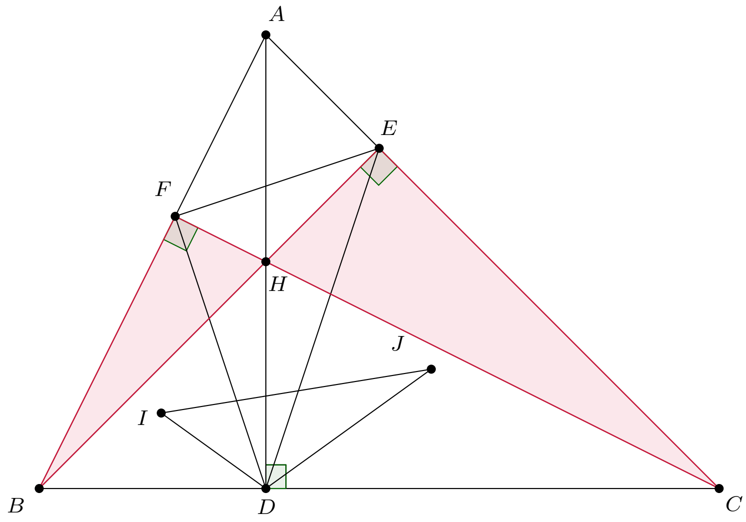
$\Delta DFI \backsim \Delta DCJ$ $(g-g)$ do: $\begin{cases} \widehat{IDF} = \widehat{JDC} \\ \widehat{IFD} = \widehat{JCD} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{DI}{DJ} = \dfrac{DF}{DC}$ (5).



$\Delta DBF \backsim \Delta DEC$ $(g-g)$ do: $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{DEC} \text{ (tứ giác AEDB nội tiếp)} \\ \widehat{BFD} = \widehat{ACB} \text{ (tứ giác AFDC nội tiếp)} \end{cases}$

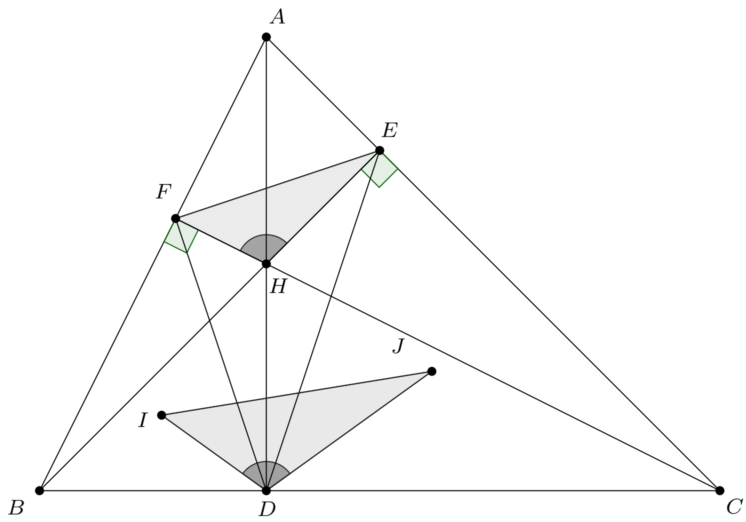
$\Rightarrow \dfrac{DF}{DC} = \dfrac{FB}{EC}$ (6).



$\Delta HFB \backsim \Delta HEC$ $(g-g)$ do: $\begin{cases} \widehat{FHB} = \widehat{EHC} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{FBE} = \widehat{ECF} \text{ (tứ giác BFEC nội tiếp)} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{FB}{EC} = \dfrac{HF}{HE}$ (7).

(5), (6), (7) $\Rightarrow \dfrac{DI}{DJ} = \dfrac{HF}{HE} \Rightarrow \dfrac{DI}{HF} = \dfrac{DJ}{HE}$.



Ta có:

$$\widehat{IDJ} = 180^\circ - \widehat{IDB} - \widehat{JDC}$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BDF} - \frac{1}{2}\widehat{EDC}$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} \text{ (các tứ giác AFDC, AEDB nội tiếp)}$$

$$= 180^\circ - \widehat{BAC}$$

$$= \widehat{FHE} \text{ (tứ giác AFHE nội tiếp).}$$

$\Delta DIJ \backsim \Delta HFE\ (c-g-c)$ do: $\begin{cases} \dfrac{DI}{HF} = \dfrac{DJ}{HE} \\ \widehat{IDJ} = \widehat{FHE} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{DIJ} = \widehat{HFE}$.

Ta có: $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90^\circ$

$\Rightarrow B, F, H, D$ cùng thuộc đường tròn đường kính BH

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFHD$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{EBC}$; mà $\widehat{EBC} = \widehat{EFC}$ (tứ giác BFEC nội tiếp) và $\widehat{EFC} = \widehat{DIJ}$

$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{DIJ}$.

■

Bình luận. Đề bài này có thể gây khó ngay từ câu 3, bởi thiếu sự vận dụng các kết quả của hai câu dễ phía trước với hai câu khó phía sau. Ta phải nhớ nhiều những kết quả sẵn có đối với dạng bài tam giác nhọn có ba đường cao này thì mới thấy được hướng giải quyết cho hai câu khó.
Đặc biệt ở câu 4, giả thiết cho tâm đường tròn nội tiếp tam giác, là một yếu tố không thường gặp đối với học sinh. Nhiều người có thể sẽ loay hoay với giả thiết này và cố gắng vẽ ra đường tròn nội tiếp, trong khi điều cần thiết nhất cần nhận ra là giả thiết cho tâm đường tròn nội tiếp nghĩa là cho ba đường phân giác (đường thẳng nối từ đỉnh đến tâm đường tròn nội tiếp tam giác là đường phân giác trong tam giác).

Đề 9. Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT tỉnh Hưng Yên

Bài 1

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + 6$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số $y = mx + 3$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Phân tích. Đối với câu a) chúng ta sẽ rút gọn bằng cách đưa số thừa số ra khỏi dấu căn.
Đối với câu b) chúng ta sẽ giải bằng cách sử dụng tính chất giao điểm của đường thẳng với trục hoành.
Đối với câu c) chúng ta sẽ giải bằng cách cộng đại số, cụ thể là lấy phương trình dưới nhân với -1 cộng cho phương trình trên, hoặc ta có thể sử dụng phương pháp thế.

Lời giải. a) $A = \sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + 6 = \sqrt{3} + |2-\sqrt{3}| + 6 = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 6 = 2 + 6 = 8$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5 nên ta có phương trình: $0 = 5m + 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{-3}{5}$.

c) Lấy phương trình dưới nhân với -1 rồi cộng với phương trình trên ta được phương trình: $4y = 8 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Hoặc rút $x = 9 - 3y$ thay vào phương tình dưới ta được phương trình:

$9 - 3y - y = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9 - 3.2 = 3$.

■

Bình luận. Các ý của câu 1 chủ yếu là các câu cơ bản, không khó và gài bẫy, dùng để cho học sinh lấy điểm nên khi làm phải nắm chắc điểm, không để mất.

Bài tập tương tự.

a) Rút gọn biểu thức $A = 3 + \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - \sqrt{10}$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số $y = mx + 5$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

Đáp án:

a) 0.

b) $\dfrac{-5}{3}$.

c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$.

Bài 2

Cho phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình với $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $(x_1x_2 + 1)^2 - 2(x_1 + x_2) = 0$.

Phân tích. Đối với câu a) ta chỉ cần thay $m = 3$ vào phương trình rồi giải phương trình bậc 2. Đối với câu b) ta sử dụng định lý Vi-ét thay vào điều kiện sẽ tìm được phương trình theo m, giải phương trình sẽ tìm được m.

Lời giải. a) Thay $m = 3$ vào phương trình ta có $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Ta có $\Delta' = b'^2 - a.c = 1 + 3 = 4$.

Theo công thức nghiệm, ta có: $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta}}{a} = \dfrac{1-2}{1} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta}}{a} = \dfrac{1+2}{1} = 3 \end{array}\right.$.

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1+m>0 \Leftrightarrow m>-1$.

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=2 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-m \end{cases}$.

Thay vào điều kiện ta có:

$(-m+1)^2-2.2=0 \Leftrightarrow (1-m)^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=3 & \text{(Nhận)} \\ m=-1 & \text{(Loại)} \end{array}\right.$.

■

Bình luận. Đây cũng là dạng bài tập cơ bản để cho học sinh lấy điểm. Đối với dạng bài này, học sinh cần nắm chắc cách giải phương trình bậc hai, chú ý hai cách tính Δ và Δ' để tránh nhầm lẫn.

Định lý Viét thường được sử dụng rất nhiều trong các dạng bài như ở câu b) nên học sinh cần nhớ kĩ công thức Viét. Chú ý phải có điều kiện phương trình có 2 nghiệm phân biệt trước khi áp dụng định lý Vi-ét.

Bài tập tương tự. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2+5=0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m=2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$.

Trích đề thi vào lớp 10 THPT tỉnh Thừa Thiên Huế - 2017

Đáp án:

a) $x=3$.

b) $m=4$.

Bài 3

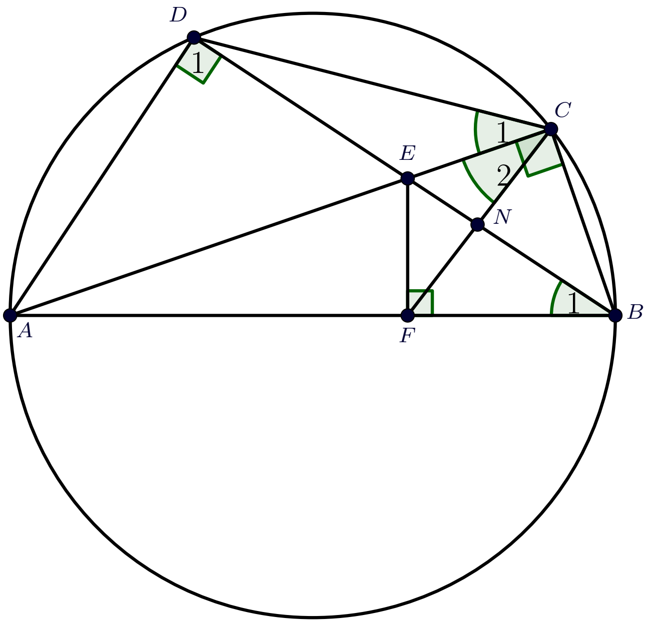
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E, F là hình chiếu vuông góc của E trên AB.

a) Chứng minh tứ giác $ADEF$ nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của CF và BD. Chứng minh $BN.ED = BD.EN$.

Phân tích. Đối với câu a) ta chỉ cần chứng minh tam giác ABD vuông tại D rồi sử dụng dấu hiệu của tứ giác nội tiếp.

Đối với câu b) khi nhìn yêu cầu đề bài cho đẳng thức $BN.ED = BD.EN$ ta sẽ nghĩ ngay đến tam giác đồng dạng nhưng sử dụng tam giác đồng dạng sẽ không ra, nhưng ta có thể thấy được $\widehat{DCA}=\widehat{ACF}$ nên CA là phân giác góc $\widehat{DCF}$, mặt khác $AC \perp BC$ nên BC sẽ là phân giác ngoài, từ đó ta sử dụng hệ thức của đường phân giác sẽ giải được bài toán.



Lời giải.

a) $\triangle ADB$ nội tiếp đường tròn và có cạnh AB là đường kính nên $\triangle ADB$ vuông tại $D \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^0$.

Mặt khác $EF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFE} = 90^0$.

Xét tứ giác $ADEF$ có: $\widehat{ADE} + \widehat{AFE} = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Vậy tứ giác này nội tiếp đường tròn.

b) Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (1) do cùng chắn cung AD.

Chứng minh tương tự câu a) cho tứ giác $FECB$ thì tứ giác nãy cũng nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{B_1}$ (2) do cùng chắn cung EF.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow CA$ là tia phân giác của $\widehat{DCF}$.

Xét $\triangle DCN$ có CE là đường phân giác của góc C. Theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{EN}{ED}$ (3).

Mặt khác, ta có $CA \perp CB$ ($\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn có đường kính AB) mà CA là tia phân giác trong $\Rightarrow CB$ là tia phân giác ngoài của $\triangle DCN$, theo tính chất của tia phân giác ngoài $\Rightarrow \dfrac{BN}{BD} = \dfrac{CN}{CD}$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{EN}{ED} = \dfrac{BN}{BD} \Rightarrow BN.ED = EN.BD$ (đpcm).

■

Bình luận. Ở câu a) đây là dạng bài tập cơ bản của phần tứ giác nội tiếp, có kết hợp nhiều kiến thức liên quan đến đường tròn. Học sinh cần nhớ kĩ các dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp và một số trường hợp đặc biệt của nó.

Ở câu b) đây là dạng bài tập cực kì phổ biến trong các đề thi, nó thường sẽ yêu cầu chứng mình các đẳng thức. Khi nhìn vào dạng này, học sinh sẽ chủ yếu nghĩ tới sử dụng tam giác đồng dạng, nhưng khi không giải quyết được vấn đề thì cần phải nhanh chóng thay đổi cách làm chẳng hạn như sử dụng đường phân giác như bài ở trên.

Bài tập tương tự. Cho đường tròn (O), dây BC không phải là đường kính. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại A. Lấy điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C), gọi I, H, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA và AB. Chứng minh:

a) Các tứ giác $BKMI$, $CHMI$ nội tiếp.

b) $MI^2 = MK.MH$.

Trích đề thi vào lớp 10 THPT tỉnh Bình Định - 2017

Bài 4

Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2}{x^2+y^2} + \dfrac{35}{xy} + 2xy$

Phân tích. Khi nhìn vào biểu thức P ta có thể nhận thấy ngay đây là biểu thức đối xứng. Khi ta thay đổi vị trí của x và y cho nhau thì biểu thức không thay đổi, vì vậy ta nghĩ ngay đến giải bằng cách xác định điểm rơi rồi dùng Cauchy. Mặt khác ta có $x + y \leq 4$ kết hợp biểu thức P là đối xứng nên ta có thể biết ngay điểm rơi là $x = y = 2$. Sau khi biết điểm rơi, ta chỉ cần thêm bớt vào biểu thức P một vài biểu thức khác phù hợp để sử dụng Cauchy. Lấy điểm rơi thay vào P ta sẽ biết được trước giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu, ở đây thì $\min P = 17$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy \\
&= \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} + 2xy - \frac{x^2+y^2}{32} - \frac{35xy}{16} \\
&= \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{32} + \frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} - \frac{(x+y)^2}{32} - \frac{xy}{8}
\end{aligned}$$

Sử dụng Cauchy cho các cặp sau $\dfrac{2}{x^2+y^2}; \dfrac{x^2+y^2}{32}$ và $\dfrac{35}{xy}; \dfrac{35xy}{16}$, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{32} &\geq 2\sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{2} \\
\frac{35}{xy} + \frac{35xy}{16} &\geq 2\sqrt{\frac{35^2}{16}} = \frac{35}{2}
\end{aligned}$$

Mặt khác $x + y \leq 4 \Rightarrow x.y \leq 4$ nên $\dfrac{xy}{8} \leq \dfrac{1}{2}, \dfrac{(x+y)^2}{32} \leq \dfrac{1}{2}$.

Vậy ta có $\min P = \dfrac{1}{2} + \dfrac{35}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 17$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$.

Cách khác:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{35}{xy} + 2xy \\ &= \frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2}{2xy} + \frac{34}{xy} + \frac{17xy}{8} - \frac{xy}{8} \\ &\geq \frac{2.4}{x^2+y^2+2xy} + 2\sqrt{\frac{34.17}{8}} - \frac{(x+y)^2}{32} \\ &\geq \frac{8}{16} + 17 - \frac{1}{2} = 17 \end{aligned}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$. ■

Bình luận. Đây là dạng bài khó, dùng để chặn điểm 10 trong bài thi. Sẽ rất mất thời gian nếu học sinh không có hướng giải mà ngồi mò mẫm. Học sinh không nên tập trung câu này, chỉ giải câu này khi đã hoàn thành và kiểm tra kĩ lưỡng các câu trước.

Bài tập tương tự. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x; y > 0$; $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = xy + \dfrac{1}{xy}$.

Đáp án:

GTNN là $\dfrac{17}{4} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Đề 10. Đề thi tuyển sinh lớp 10 tỉnh Hải Dương năm học 2017-2018

Bài 1

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

1) $(2x-1)(x+2) = 0$.

2) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3 - x = y \end{cases}$.

Phân tích. 1) Đây là dạng phương trình tích.

2) Đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, có thể giải bằng phương pháp rút thế.

Lời giải. 1) $(2x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$.

2) $\begin{cases} 3x + y = 5(1) \\ 3 - x = y(2) \end{cases}$.

Lấy (2) thay vào (1), ta được: $3x + (3 - x) = 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay vào (2), được $y = 2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bình luận. Các ý của câu 1 chủ yếu là các câu cơ bản, không khó và gài bẫy, cho học sinh lấy điểm nên khi làm phải nắm chắc điểm, không nên để mất điểm oan uổng.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1) $(5x - 3)(x + 7) = 0$.

2) $\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ 2x + 5y = 45 \end{cases}$.

Bài 2

1) Cho hai đường thẳng $(d): y = -x + m + 2$ và $(d'): y = (m^2 - 2)x + 3$.
Tìm m để (d) và (d') song song nhau.

2) Rút gọn biểu thức:

$$P = \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}}\right) : \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} \text{ với } x > 0,\ x \neq 1,\ x \neq 4.$$

Phân tích. 1) Áp dụng điều kiện để hai đường thẳng song song.

2) Đối với dạng bài tập này, ta thường sẽ qui đồng mẫu và rút gọn biểu thức trong ngoặc trước, rồi mới thức hiện phép chia.

Lời giải. 1)

$$(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = m^2 - 2 \\ m + 2 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right. \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1\,.$$

Vậy: $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2)

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2}-\frac{x}{x-2\sqrt{x}}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \\
&= \left(\frac{x-\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \\
&= \left(\frac{x-\sqrt{x}+2-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \\
&= \frac{-2\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \\
&= \frac{2\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}.$$

Vậy $P=\dfrac{-2}{\sqrt{x}+1}$.

■

Bình luận. Ở ý thứ nhất của bài toán, học sinh cần phải ghi nhớ điều kiện để hai đường thẳng song song. Tuy đây không phải là một mảng kiến thức khó nhưng học sinh thường dễ bỏ qua phần này. Còn ở ý còn lại của bài toán, là một dạng bài toán rút gọn căn thức thường xuất hiện trong các đề thi vào lớp 10, đã được thầy cô quan tâm, rèn luyện cho các em học sinh hàng ngày, nên nếu nắm kỹ cách làm và cẩn thận, các em sẽ dễ dàng ghi điểm ở phần này.

Bài tập tương tự.

1) Rút gọn biểu thức sau:
$Q=\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

2) Tìm m để đồ thị hai hàm số sau vuông góc: $y=2x-1; y=(m-2)x+m+3$.

Bài 3

1) Tháng đầu, hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai, do cải tiến kỹ thuật nên tổ I vượt mức 10% và tổ II vượt mức 12% so với tháng đầu, vì vậy, hai tổ đã sản xuất được 1000 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

2) Tìm m để phương trình $x^2+5x+3m-1=0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3-x_2^3+3x_1x_2=75$.

Phân tích. 1) Nếu gọi số chi tiết máy của mỗi tổ lần lượt là x và y thì ta sẽ được hệ hai phương trình ẩn x và y dựa theo hai dữ kiện của đề bài (với điều kiện $x, y>0$), giải hệ này ta sẽ tìm đươc giá trị của x và y, kết hợp với việc kiểm tra lại điều kiện, ta sẽ suy ra được đáp án của bài toán.

2) Phương trình $x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$ (2) KHÔNG là phương trình đối xứng theo x_1, x_2. Như vậy, để có một phương trình theo m thì ta phải tìm hai nghiệm x_1, x_2 theo m và thay vào phương trình. Tuy nhiên, ta đã biết tổng và tích hai nghiệm theo công thức của định lý Vi-ét, vì vậy ta sẽ biến đổi phương trình (2) theo tổng, tích và hiệu trước, sau đó áp dụng định lý Vi-ét vào để giải.

Lời giải. 1) Gọi x là số chi tiết máy tổ I sản xuất được trong tháng đầu, y là số chi tiết máy tổ II sản xuất được trong tháng đầu $(x, y \in \mathbb{N})$.

Theo giả thiết, ta có:

$x + y = 900$ (1) Mặt khác:

Số chi tiết máy tổ I sản xuất được ở tháng thứ hai là: $x + 0,1x = 1,1x$.

Số chi tiết máy tổ II sản xuất được ở tháng thứ hai là: $y + 0,12y = 1,12y$.

Như vậy ta có phương trình: $1,1x + 1,12y = 1000$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ 1,1x + 1,12y = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases}.$$

Các giá trị này của x và y đều thỏa mãn điều kiện ban đầu của bài toán.

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất đươc 400 chi tiết máy và tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

2) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \Delta \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 25 - 4(3m - 1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 29 - 12m \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & m \leq \frac{29}{12} \end{aligned}.$$

Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1x_2 = 3m - 1 \end{cases}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= (-5)^2 - 4(3m - 1) \\ &= 29 - 12m \end{aligned}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 \\ &= (x_1 - x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right) + 3x_1x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(25 - (3m - 1)) + 3(3m - 1) \\ &= (x_1 - x_2)(26 - 3m) + 9m - 3 \end{aligned}.$$

Mà:

$$
\begin{aligned}
&P = 75\\
&\Rightarrow (x_1 - x_2)(26 - 3m) + 9m - 3 = 75\\
&\Rightarrow (x_1 - x_2)(26 - 3m) = 78 - 9m\\
&\Rightarrow (x_1 - x_2) = 3\\
&\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9\\
&\Rightarrow 29 - 12m = 9\\
&\Rightarrow m = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

So với điều kiện và thử lại, ta kết luận: $m = \dfrac{5}{3}$.

■

Bình luận. Ở ý thứ nhất của bài toán, là một dạng bài toán thực tế đã bắt đầu xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi vào lớp 10 gần đây, cần nhận được sự quan tâm, rèn luyện hơn của các em học sinh, đặc biệt là kỹ năng đọc hiểu, tư duy phản biện và logic để giải các dạng toán này. Còn ở ý thứ hai của bài toán, học sinh cần ghi nhớ định lý Vi-ét và cách tính biệt thức delta, biện luận số nghiệm của phương trình bậc hai. Dạng toán này thường được rèn luyện thường xuyên trong chương trình học, tuy vậy các em vẫn dễ mắc sai lầm trong việc tính toán, ghi nhớ các công thức của phương trình bậc hai.

Bài tập tương tự.

1) Hai công nhân cùng làm một công việc sau 10 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 1 giờ, sau đó hai người cùng làm tiếp trong 2 giờ thì được 25% công việc. Tính thời gian mỗi người làm một mình xong công việc.

2) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho ${x_1}^2 - {x_2}^2 = 3$.

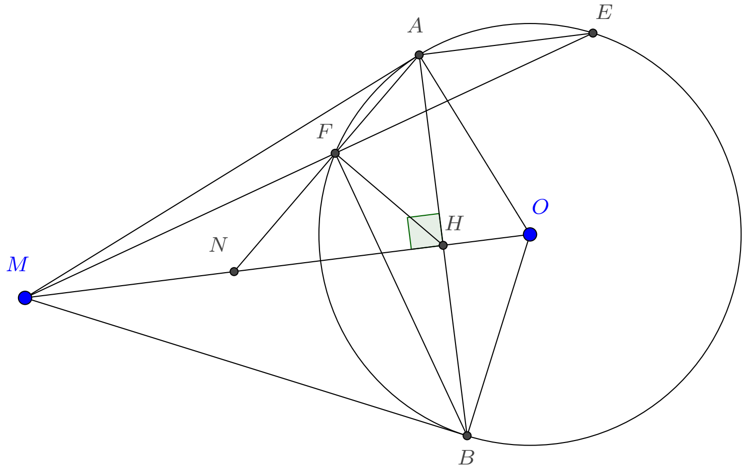
Bài 4

Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A, kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

1) Chứng minh: Tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$.

3) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.



Phân tích. a) Ở câu này, ta chỉ cần sử dụng tính chất của tiếp tuyến của đường tròn là sẽ được ngay điều cần chứng minh.

b) Ở ý đầu tiên, ta thấy đề yêu cầu chứng minh một hệ thức về độ dài, vì vậy ta nghĩ ngay đến tam giác đồng dạng. Bằng phép biến đổi tương đương $MN^2 = NF.NA \Leftrightarrow \dfrac{MN}{NA} = \dfrac{NF}{MN}$, ta đi đến ý tưởng chứng minh hai tam giác MNF và ANM đồng dạng theo trường hợp góc góc, từ đó đi đến điều phải chứng minh. Ở ý thứ hai, ta có được gợi ý từ ý đầu tiên rằng $MN^2 = NF.NA$, do đó ta sẽ tìm cách chứng minh $NH^2 = NF.NA$, từ đó suy ra được điều phải chứng minh.

c) Đây là một hệ thức tương đối khó, là hiệu của hai thương số, do đó ta sẽ tìm các thương số tương ứng bằng hai thương số đó để đơn giản hóa bài toán. Mục đích của ta khi tìm ra hai thương số này là chúng phải có cùng mẫu để tiện cho việc trừ phân số, và khi trừ tử số thì được kết quả bằng với mẫu số, từ đó chứng minh được thương số cuối cùng bằng 1.

Lời giải. a) Ta có: MA, MB là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $MA \perp AO$ và $MB \perp BO$.

Suy ra: $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$.

Vậy tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

b) **Chứng minh:** $MN^2 = NF.NA$.

Xét tam giác MNF và tam giác ANM có:

$\widehat{N}$ là góc chung.

$\widehat{MAN} = \widehat{AEF} = \dfrac{1}{2}$ số đo cung AF.

$\widehat{AEF} = \widehat{FMN}$ so le trong.

Từ đó ta suy ra: $\widehat{MAN} = \widehat{FMN}$.

Vậy $\Delta MNF \backsim \Delta ANM$.

Suy ra: $\dfrac{MN}{NA} = \dfrac{NF}{MN} \Rightarrow MN^2 = NF.NA$.

Chứng minh: $MN = NH$.

$MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB = R$

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AB.

$\Rightarrow AH \perp MO$ và $HA = HB$

ΔMAF và ΔMEA có: $\widehat{AME}$ chung; $\widehat{MAF} = \widehat{AEF}$

$\Rightarrow \Delta MAF \backsim \Delta MEA$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MF}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ME.$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông MAO

Có: $MA^2 = MH.MO$.

Do đó: $ME.MF = MH.MO \Rightarrow \dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MO}{MF}$

$\Rightarrow \Delta MFH \backsim \Delta MOE$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{MHF} = \widehat{MEO}$.

Vì $\widehat{BAE}$ là góc vuông nội tiếp (O) nên E, O, B thẳng hàng.

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FAB} = \dfrac{1}{2}$số đo cung$EB$.

$\Rightarrow \widehat{MHF} = \widehat{FAB}$.

$\Rightarrow \widehat{ANH} + \widehat{NHF} = \widehat{ANH} + \widehat{FAB} = 90^0$

$\Rightarrow HF \perp NA$.

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông NHA, có: $NH^2 = NF.NA$

$\Rightarrow NM^2 = NH^2 \Rightarrow NM = NH$.

c) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông NHA, có:

$HA^2 = FA.NA$ và $HF^2 = FA.FN$.

Mà $HA = HB$.

$\Rightarrow HB^2 = AF.AN$ (vì $HA = HB$).

$\Rightarrow \dfrac{HB^2}{HF^2} = \dfrac{HA^2}{HF^2} = \dfrac{FA.NA}{FA.FN} = \dfrac{NA}{NF}$.

Vì $AE \parallel MN$ nên $\dfrac{EF}{MF} = \dfrac{FA}{NF}$ (hệ quả của định lí Ta-let).

$\Rightarrow \dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = \dfrac{NA}{NF} - \dfrac{FA}{NF} = \dfrac{NF}{NF} = 1.$

■

Bài tập tương tự. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN. Gọi I là trung điểm của MN.

a) Chứng minh: Tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AB^2 = AM.AN$.

c) Gọi T là giao điểm của BC và AI. Chứng minh rằng: $IB.TC = IC.TB$.

Bình luận. Ý a) của bài toán là một câu hỏi quen thuộc về chứng minh tứ giác nội tiếp, học sinh dễ dàng làm được câu này nếu được ôn luyện kỹ và ghi nhớ các cách để chứng minh tứ giác nội tiếp. Ý b) của bài toán bao gồm 2 phần, phần thứ nhất là một dạng bài toán chứng minh hệ thức độ dài thường xuất hiện trong các đề thi vào lớp 10, đã được thầy cô quan tâm, rèn luyện cho các em học sinh hàng ngày, nên nếu nắm kỹ cách làm và cẩn thận, các em sẽ dễ dàng ghi điểm ở phần này (chủ yếu ta sẽ sử dụng tam giác đồng dạng hoặc hệ thức lượng trong tam giác vuông để giải). Ý sau của câu b) đã được gợi ý bởi ý đầu tiên, ta sẽ chứng minh $NH^2 = NF.NA$, từ đó suy ra điều phải chứng minh. Câu khó nhất ở bài toán này là câu c), ở câu này học sinh cần có tư duy tốt, phối hợp và sử dụng nhuần nhuyễn các dự kiện của đề bài, hệ thức lượng, định lý Ta-lét để đưa ra lời giải.

Bài 5

Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{x+1}{1+y^2} + \dfrac{y+1}{1+z^2} + \dfrac{z+1}{1+x^2}$.

Phân tích. Đây là một bài toán tìm GTNN của một biểu thức khi biết một điều kiện cho trước (tạm gọi là điều kiện ban đầu). Ta nhận thấy biểu thức Q có dạng đối xứng (nghĩa là khi lần lượt thay $x = y, y = z, z = x$ thì giá trị biểu thức không thay đổi, do đó ta sẽ đi đến kết luận theo hướng giải bằng việc sử dụng BĐT Cauchy nhằm xuất hiện điều kiện $x = y = z$. Tuy vậy, biểu thức Q khá phức tạp và không có dạng cơ bản, nên ta sẽ cố gắng thêm bớt và tách mỗi hạng tử nhỏ về các biểu thức quen thuộc và đơn giản hơn để đánh giá.

Lời giải.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{x+1}{1+y^2} + \frac{y+1}{1+z^2} + \frac{z+1}{1+x^2} \\ &= \left(\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}\right) + \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) = M + N \end{aligned}$$

.

Xét $M = \dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+z^2} + \dfrac{z}{1+x^2}$, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$\dfrac{x}{1+y^2} = \dfrac{x(1+y^2) - xy^2}{1+y^2} = x - \dfrac{xy^2}{1+y^2} \geq x - \dfrac{xy^2}{2y} = x - \dfrac{xy}{2}$.

Tương tự: $\dfrac{y}{1+z^2} \geq y - \dfrac{yz}{2}$; $\dfrac{z}{1+x^2} \geq z - \dfrac{zx}{2}$; suy ra:

$M = \dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+z^2} + \dfrac{z}{1+x^2} \geq x + y + z - \dfrac{xy+yz+zx}{2} = 3 - \dfrac{xy+yz+xz}{2}$.

Lại có:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz) \Rightarrow xy + yz + xz \leq 3$.

Suy ra: $M \geq 3 - \dfrac{xy+yz+zx}{2} \geq 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Xét $N = \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+z^2} + \dfrac{1}{1+x^2}$, ta có:

$3 - N = \left(1 - \dfrac{1}{1+y^2}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{1+z^2}\right) + \left(1 - \dfrac{1}{1+x^2}\right)$
$= \dfrac{y^2}{1+y^2} + \dfrac{z^2}{1+z^2} + \dfrac{x^2}{1+x^2} \leq \dfrac{y^2}{2y} + \dfrac{x^2}{2x} + \dfrac{z^2}{2z} = \dfrac{x+y+z}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra: $N \geq 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Từ đó suy ra: $Q \geq 3$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy $Q_{\min} = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$. ■

Bình luận. Đây là một bài toán về chứng minh bất đẳng thức, luôn là bài toán được đánh giá là khó nhất trong các bài toán trong đề tuyển sinh lớp 10, thậm chí vẫn là khó khi xuất hiện trong đề tuyển sinh đại học. Để làm được dạng toán này, thường thì các em phải được học chương trình chuyên, hoặc có tiếp xúc và cọ xát với các dạng toán về tìm GTLN, GTNN của một biểu thức khi biết một điều kiện cho trước. Kiến thức dùng để giải bài toán dạng này là các bất đẳng thức thường dùng như BĐT Cauchy, Bunhiacopski, giá trị tuyệt đối, ... Câu hỏi này nằm ở phần cuối đề thi, dùng để phân loại học sinh giỏi, nên các em trung bình khá nên tập trung vào các câu trên và có thể bỏ câu này nếu không cần số điểm quá cao trong kỳ thi.

Bài tập tương tự.

Cho x, y, z là các số thực dương và $x.y.z = 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{x+y+1} + \dfrac{1}{y+z+1} + \dfrac{1}{x+z+1} \leq 1$.

Đề 11. Đề thi tuyển sinh Sở GD&ĐT Hà Tĩnh 2017 - 2018

Bài 1

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $P = \sqrt{48} - \sqrt{3}$.

b) $Q = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \dfrac{1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Phân tích. a) Với dạng này, ta dùng phương pháp đưa thừa số ra ngoài dấu căn, biến đổi $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = 4\sqrt{3}$, sau đó thu gọn.

Vấn đề ở đây là: Tại sao ta phân tích $48 = 16.3$ mà không phải 8.6 hay 4.12?

Bởi vì, giả sử $48 = 8.6$ thì ta khó có thể đưa 8 hay 6 ra khỏi dấu căn, do đó việc phân tích là vô nghĩa. Nếu $48 = 4.12$, sau khi đưa thừa số ra khỏi dấu căn ta sẽ có $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$ và khi này ta không thể rút gọn tiếp tục với $\sqrt{3}$.

b) Ta thấy có một phép cộng trong ngoặc, sau đó là một phép chia. Theo quy tắc tính toán, ta sẽ quy đồng và thực hiện phép cộng trước rồi thực hiện phép chia cho phần tử bên ngoài. Để ý rằng mẫu chung của hai biểu thức trong ngoặc là $(x-1)$, khi đó ta thấy có thể rút gọn $(x-1)$ với phần tử bên ngoài để được kết quả cuối cùng. Xem cách 1 trong phần lời giải.

Mặt khác, phép chia cho phân thức chính là phép nhân nghịch đảo, và nếu phân tích $x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$ thì khi nhân phân phối vào phép cộng trong ngoặc, ta sẽ dễ dàng rút gọn được và từ đó ta có một cách làm khác. Xem cách 2 trong phần Lời giải.

Lời giải. a) $P = \sqrt{48} - \sqrt{3} = \sqrt{16.3} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

b) Cách 1.

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{x-1}(x-1) \\ &= 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{1}{x-1} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)(x-1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right) \\ &= \sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1 \\ &= 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

■

Bình luận. a) Câu này tương đối đơn giản, dễ lấy trọn điểm, tuy nhiên học sinh cần lưu ý trình bày cụ thể và rõ ràng, đừng để bị mất điểm một cách oan uổng.

b) Ở câu này ta thấy cả hai cách làm đều được, như vậy kinh nghiệm làm toán cho học sinh là hãy cứ đặt bút và tính toán thì tất nhiên sẽ có kết quả, không cần mất thời gian phân vân nên cộng trước rồi chia, hay chia trước rồi cộng.

Bài tập tương tự.

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $P = -5\sqrt{2} + \sqrt{72}$.

b) $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2x}+3} + \frac{1}{\sqrt{2x}-3}\right) : \frac{1}{2x-9}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{2}$.

Bài 2

a) Cho đường thẳng $(d): y = mx + m - 2$ và đường thẳng $(d_1): y = 2x - 1$. Tìm giá trị m để đường thẳng d và d_1 song song với nhau.

b) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 13$.

Phân tích. a) Điều kiện để hai đường thẳng $y = a_1x + b_1$ và $y = a_2x + b_2$ song song với nhau là:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

b) $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 13$ là dạng điều kiện có tính đối xứng nên không quá khó, ta sẽ biến đổi nó thành tổng $x_1 + x_2$ và tích x_1x_2, rồi áp dụng định lý Vi-ét để giải bài toán.

Lời giải. a) (d) song song với (d_1) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m & = 2 \\ m - 2 & \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m & = 2 \\ m & \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = m^2 \end{cases}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 13 \\ \Leftrightarrow\ & 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 = 13 \\ \Leftrightarrow\ & 4m^2 + 4m - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} m &= 1 \\ m &= -2 \end{aligned}\right. \end{aligned} \qquad (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $m = 1$.

■

Bình luận. a) Nhiều học sinh thường quên mất điều kiện $m - 2 \neq -1$, khi đó vẫn có kết quả đúng nhưng sẽ không có trọn điểm.

Ngoài điều kiện để hai đường thẳng song song, học sinh cần ôn lại các điều kiện hai đường thẳng vuông góc với nhau, trùng nhau.

b) Lưu ý rằng đối với dạng này nên chia ra 2 bước cụ thể để tính toán: một là tìm m để phương trình có nghiệm, hai là tìm m để các nghiệm đó thỏa điều kiện khác, như vậy sẽ dễ nắm chắc điểm số hơn.

Bài tập tương tự.

a) Cho đường thẳng $(d) : y = mx + 2m - 1$ và đường thẳng $(d_1) : y = x - 1$. Tìm giá trị m để đường thẳng d và d_1 vuông góc với nhau.

b) Cho phương trình $x^2 + (2m - 1)x + m^2 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -1$.

Bài 3

Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 90km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường, do điều kiện thời tiết không thuận lợi nên trên quãng đường còn lại người đó phải đi với vận tốc ít hơn so với vận tốc dự định ban đầu 10km/h. Tính vận tốc dự định và thời gian người đó đi từ A đến B biết người đó đến muộn hơn dự định 18 phút.

Phân tích. Với dạng bài tập này, ta cần nhớ công thức $s = v.t$, trong đó s, v, t lần lượt là quãng đường, vận tốc và thời gian đi được.
Đặt v_1(km/h) là vận tốc ban đầu của người đó và v_2(km/h) là vận tốc lúc sau ($v_1 > v_2 > 0$) thì ta có $v_1 = v_2 + 10$.
Dựa vào các điều kiện cho trước ta sẽ lập hệ phương trình có ẩn là v_1, v_2 và giải để tìm kết quả.

Lời giải. Đặt v_1(km/h) là vận tốc ban đầu của người đó và v_2(km/h) là vận tốc lúc sau, $v_1 > v_2 > 0$ thì ta có

$$v_1 = v_2 + 10. \tag{$*$}$$

Quãng đường người đó đi với vận tốc v_1 là 30km, quãng đường người đó đi với vận tốc v_2 là 60km. Người đó đến muộn hơn dự định 18 phút $\left(\frac{3}{10} \text{ giờ}\right)$ nên ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{90}{v_1} = \frac{30}{v_1} + \frac{60}{v_2} - \frac{3}{10} \\ \Leftrightarrow & \frac{60}{v_1} = \frac{60}{v_2} - \frac{3}{10} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} - \frac{1}{200}. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} v_1 - v_2 & = 10 \\ -\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} & = \frac{1}{200} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 & = 10 \\ \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} & = \frac{1}{200} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 & = 10 \\ \frac{10}{v_1 v_2} & = \frac{1}{200} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 & = 10 \\ -v_1 v_2 & = -2000 \end{cases}$$

Khi đó v_1 và $-v_2$ lần lượt là nghiệm của phương trình $X^2 - 10X - 2000 = 0$.
Giải phương trình này ta được hai nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l} X_1 = 50 \\ X_2 = -40 \end{array}\right. .$$

Do $v_1 > v_2 > 0$ nên ta chọn

$$\begin{cases} v_1 = 50 \\ -v_2 = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 50 \\ v_2 = 40 \end{cases}$$

Vậy, vận tốc dự định là 50km/h, thời gian người đó đi từ A đến B là

$$\frac{30}{50} + \frac{60}{40} = \frac{21}{10} \text{ (giờ)}.$$

■

Bình luận. Khi giải bài này, học sinh cần lưu ý:

- Đặt điều kiện $v_1 > v_2 > 0$ để dễ dàng chọn nghiệm ở phần sau.
- Đổi 18 phút thành $\frac{3}{10}$ giờ.
- Nếu xem $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$, là tổng của v_1 và $-v_2$ thì tích của chúng là $v_1(-v_2) = -v_1v_2$, ta áp dụng định lý Vi-ét đảo để giải tiếp. Ngoài ra, vẫn có thể giải hệ phương trình này bằng phương pháp thế.
- Trọng bài này ta còn một cách làm khác là gọi v(km/h) là vận tốc dự định của người đó ($v > 0$) rồi biểu diễn các đại lượng còn lại theo v, sau đó lập phương trình với một ẩn v và giải.

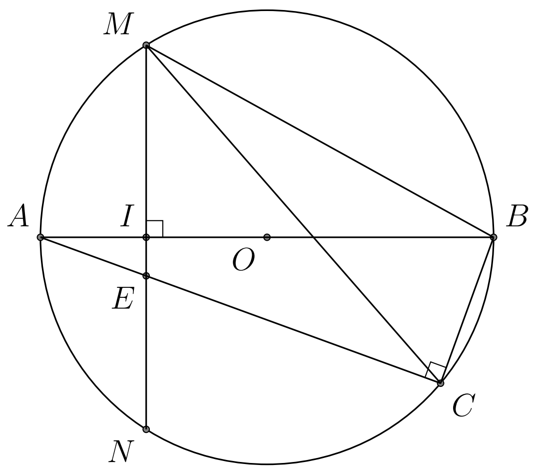
Bài 4

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB cố định. I là điểm cố định thuộc đoạn OA (I không trùng O và A). Qua I vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tâm O tại M và N. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C không trùng các điểm M, N và B). Gọi E là giao điểm của AC và MN.

a) Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $AE.AC = AI.AB$.

c) Chứng minh khi điểm C thay đổi trên cung lớn MN của đường tròn tâm O thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định.



Phân tích. a) Ta có $\widehat{EIB}$ là góc vuông của tứ giác $IECB$, để chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp đường tròn thì ta cần chứng minh thêm một góc đối diện với nó là góc vuông nữa, đó là góc $\widehat{ECB}$.

b) Do tứ giác tứ giác $IECB$ nội tiếp đường tròn, để ý rằng IB cắt EC tại A nên ta luôn chứng minh được đẳng thức $AE.AC = AI.AB \Leftrightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AI}{AC}$ bằng cách chứng minh một cặp tam giác đồng dạng, trong bài này ta chứng minh $\triangle AIE \backsim \triangle ACB$.

c) Đầu tiên ta dự đoán đường thẳng cố định được nhắc đến trong đề bài là MB (để có được dự đoán này, ta có thể giả vờ lấy một điểm C ở vị trí khác trên hình, rồi vẽ hình theo các trình tự để xem thử đường thẳng chứa các tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle EMC$ là đường thẳng nào).

Từ đó ta có một cách làm như sau: gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle EMC$, chứng minh B, S, M thẳng hàng.

Lời giải. a) Xét tứ giác $IECB$ ta có:

$$\begin{cases} \widehat{EIB} = 90^\circ \\ \widehat{ECB} = 90^\circ \ (\widehat{ACB} \text{ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{EIB} + \widehat{ECB} = 180^\circ$$

Do đó $IECB$ là tứ giác nội tiếp.

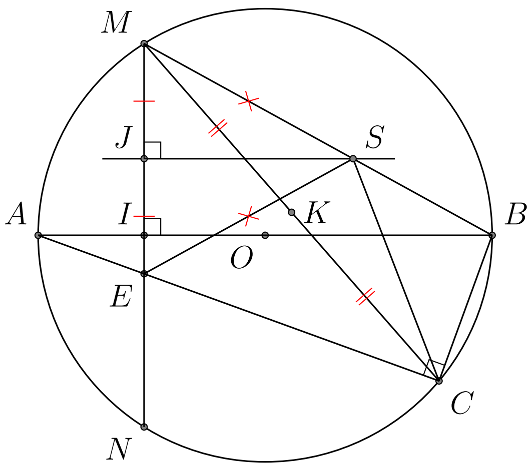
b) Xét $\triangle AIE$ và $\triangle ACB$, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{I} = \widehat{C} = 90^\circ \\ \widehat{AEI} = \widehat{ABC} \ (\widehat{AEI} \text{ là góc ngoài của tứ giác nội tiếp } IECB) \end{cases}$$

Do đó $\triangle AIE \backsim \triangle ACB$ (g.g).

Suy ra $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AI}{AC} \Leftrightarrow AE.AC = AI.AB.$

c) $AB \perp MN \Rightarrow A$ là điểm chính giữa cung $MN \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$



Lại có $\widehat{ACM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AM}$; $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AN}$

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AMN}$

$\Rightarrow AM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle EMC$.

Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle EMC \Rightarrow SM \perp AM$.

Mặt khác, $BM \perp AM$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó, B, S, M thẳng hàng hay $S \in MB$

Mà BM là đường thẳng cố định $\Rightarrow$ đpcm.

■

Bài 5

Cho x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh

$$x + 2y + z \geq 4(1 - x)(1 - y)(1 - z).$$

Lời giải. Đặt $a = x + y, b = y + z, c = x + z$ thì bài toán trở thành:

Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh $a + b \geq 4abc$.

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} 4(a + b) &= (a + b)(a + b + c)^2 \\ &\geq (a + b)4(a + b)c \text{ (áp dụng bất đẳng thức } (x + y)^2 \geq 4xy) \\ &\geq 4(a + b)^2 c \\ &\geq 4ab.4c = 16abc \end{aligned}$$

Vậy, $a + b \geq 4abc$

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} 2 = a+b+c \geq 2\sqrt{(a+b)c} &\geq 2\sqrt{2\sqrt{abc}} \\ \Leftrightarrow 1 &\geq \sqrt{2\sqrt{abc}} \\ \Leftrightarrow 1 &\geq 2\sqrt{abc} > 0 \end{aligned}$$

Mà $a+b \geq 2\sqrt{ab} > 0$, nhân vế theo vế ta có $a+b \geq 4abc$.

Đẳng thức xảy ra khi $a+b=c$ và $a=b$, khi đó

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{1}{2} \\ y+z = \dfrac{1}{2} \\ x+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

∎

Đề 12. Đề thi tuyển sinh Sở GD và ĐT Thừa Thiên Huế 2017

Bài 1

a) Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{x-1}$ có nghĩa.

b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức $B = \sqrt{3^2.2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{5^2.2}$.

c) Rút gọn biểu thức $C = \dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-1}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

Phân tích. a) Với dạng toán tìm điều kiện để một biểu thức có nghĩa hoặc tìm điều kiện xác định của một biểu thức, ta cần nhớ một số kiến thức cơ bản sau:

- $\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$.
- $\dfrac{A}{B}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B \neq 0$.

b) Với dạng toán này ta cần nhớ tới lý thuyết sau : $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$.

c) Với dạng toán này thông thường ta sẽ giải quyết bằng cách kết hợp các phương pháp: đặt nhân tử chung , dùng hằng đẳng thức để trục căn thức, thêm bớt hạng tử,...

Lời giải. a) Biểu thức $A = \sqrt{x-1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

b) Biểu thức $B = \sqrt{3^2.2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{5^2.2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{2}(3+2-5) = 0$.

c) Biểu thức

$$\begin{aligned}
C &= \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} - \frac{a\sqrt{a}-1}{a-1} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a^3}-1}{a-1} \\
&= \sqrt{a}+1 - \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\
&= \sqrt{a}+1 - \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1} \\
&= \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+1} \\
&= \frac{a+2\sqrt{a}+1-a-\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \\
&= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}.
\end{aligned}$$

Vậy $C = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

■

Bình luận. Những bài này thông thường cho khá đơn giản, ta chỉ cần nắm được các kiến thức cơ bản trong phân tích ở trên là có thể giải quyết dễ dàng.

Bài tập tương tự.

1. Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{5x-2}$ có nghĩa.

2. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức $B = \sqrt{3^2.6} + \sqrt{6^3} - \sqrt{5^2.6}$.

3. Rút gọn biểu thức $C = \dfrac{a-1}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{a\sqrt{a}+1}{a-1}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

Đáp án:

1. $x \geq \dfrac{5}{2}$.

2. $4\sqrt{6}$.

3. $\dfrac{-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$.

Bài 2

a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y &= 4 \\ 3x-y &= 5 \end{cases}$.

b) Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P)

i) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

ii) Cho đường thẳng $y = mx+n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $(d): \ y = -2x+5$ và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P).

Phân tích. a) Dạng bài hệ phương trình ta thường dùng hai phương pháp để giải: phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số đã được học trong SGK.

b) Với dạng bài i) , khi cho hàm số có dạng $y = ax^2$ và yêu cầu vẽ đồ thị hàm số đó, thì ta phải xem dấu của a để xác định đang đồ thị để vẽ trục tọa độ cho cân xứng với đồ thị, nếu $a < 0$ thì bề lõm của đồ thị quay xuống thì ta nên vẽ phần giá trị dương của trục Oy ngắn lại và ngược lại nếu $a > 0$ thì bề lõm của đồ thị quay lên thì ta vẽ phần giá trị âm của trục Oy ngắn lại . Để vẽ đồ thị dạng Parabol này thì ta cần chọn ít nhất 5 điểm nằm trên đồ thị, nên chọn các điểm đối xứng nhau qua trục tung.

Còn dạng ii) thì ta cần nhớ kiến vẽ hai đường thẳng song song. Cho hai đường thẳng $(d): \ y = ax+b$ và $(d'): \ y = cx+d$

$(d) \parallel (d')$ khi $a = c$ và $b \neq d$.

Lời giải. a) Ta sẽ giải bằng cách cộng đại số để tham khảo, phương pháp thế bạn đọc tự giải.

Ta có:

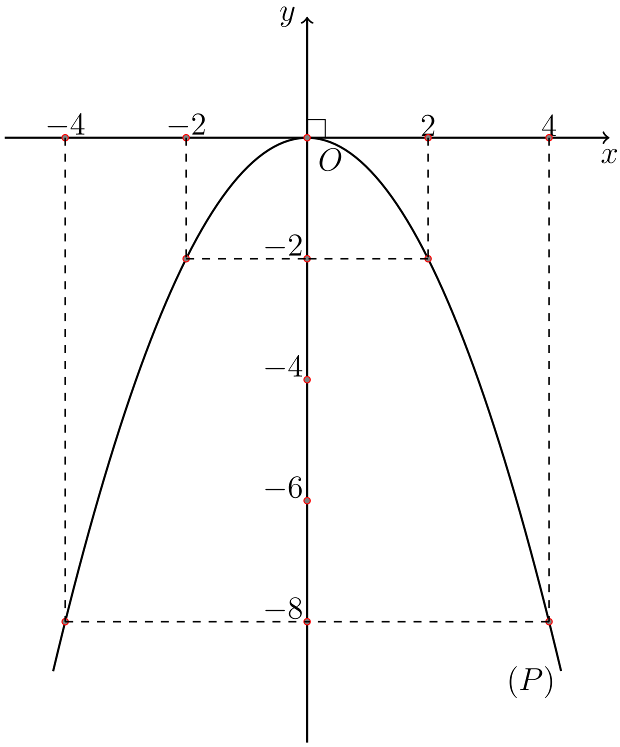
$$\begin{cases} x+2y &= 4 \\ 3x-y &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y &= 4 \\ 6x-2y &= 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x &= 14 \\ 3x-y &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 \\ 3.2-y &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2; 1)$.

b) i) Bảng giá trị :

x	-4	-2	0	2	4
y	-8	-2	0	-2	-8

Vậy đồ thị (P) đi qua 5 điểm có tọa độ $(-4; -8)$, $(-2; -2)$, $(0; 0)$, $(2; -2)$, $(4; -8)$.



ii) Do đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng (d) nên ta có $m = -3$

Suy ra đường thẳng (Δ) sẽ có dạng $y = -2x + n$ (ĐK : $n \neq 5$).

Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (P) là:

$-\dfrac{1}{2}x^2 = -2x + n \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + n = 0\ (*)$

(Δ) và (P) có duy nhất một điểm chung khi phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm.

Phương trình $(*)$ có duy nhất một nhgiệm khi và chỉ khi

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4.(\dfrac{1}{2}).n = 0 \Leftrightarrow n = 2$ (nhận)

Vậy $m = -2,\ n = 2$ thõa mãn yêu cầu bài toán.

■

Bình luận. Các bài dạng này thông thường là câu dễ trong đề thi, chỉ cần nắm được phương pháp đã nêu phần phân tích thì sẽ giải quyết được dễ dàng.

Bài tập tương tự.

a) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x + 4y &= -16 \\ 6x - 2y &= -2 \end{cases}$.

b) Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P)

i) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

ii) Cho đường thẳng $y = mx + n$ (Δ). Tìm m, n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $(d):\ y = 3x + 5$ và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P).

Đáp án:

a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

b) $m = 3,\ n = -9$.

Bài 3

Cho hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 5 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ rồi đóng lại, sau đó mở vòng thứ hai chảy trong 1 giờ thì ta được $\frac{1}{4}$ bể. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bễ là bao nhiêu?

Phân tích. Đây là dạng bài toán thực tế thường được giải bằng phương pháp mô hình hóa bài toán thành phương trình, hệ phương trình. Với những dạng hỏi hai đối tượng như bài này thì thông thường ta sẽ giải quyết bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn thông qua các dữ kiện của đề bài đã cho, và lời khuyên là khi đề bài hỏi gì ta sẽ đặt ẩn là đối tượng đó. Trong bài này ta sẽ đặt thời gian mở riêng vòi thứ nhất và vòi thứ hai để đầy bể lần lượt là x và y.

Lời giải. Gọi x, y (giờ) (ĐK: $x, y > 0$) lần lượt là thời gian mở riêng của vòi thứ nhất và vòi thứ hai để chảy đầy bể.
Suy ra thời gian chảy trong 1 giờ lần lượt của vòi thứ nhất và vòi thứ hai là $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ (giờ).
Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{5}{y} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{4} \end{cases} \quad (1)$$
Với hệ phương trình này ta sẽ dùng phương pháp đặt ẩn phụ sau đó giải bằng một trong hai phương pháp: cộng đại số hoặc thế.
Đặt $\begin{cases} X = \frac{1}{x} \\ Y = \frac{1}{y} \end{cases}$
Hệ phương trình (1) trở thành :
$$\begin{cases} 5X + 5Y &= 1 \\ 2X + Y &= \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5X + 5Y &= 1 \\ -10X - 5Y &= -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5X &= -\frac{1}{4} \\ 2X + Y &= \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X &= \frac{1}{20} \\ Y &= \frac{3}{20} \end{cases}.$$
Với $X = \frac{1}{20}$, ta có $\frac{1}{x} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow x = 20$.
Với $Y = \frac{3}{20}$, ta có $\frac{1}{y} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow y = \frac{20}{3}$.
Vậy thời gian chảy đầy bể khi mở riêng từng vòi lần lượt là 20 giờ và $\frac{20}{3}$ giờ. ■

Bình luận. Để giải được các dạng này thì bạn phải biết được các cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, phương trình bậc nhất, bậc hai một ẩn. Khi làm bài, ta cần bình tĩnh đọc đề đễ phân tích hướng làm, lọc ra các dữ kiện của đề cho để liên hệ chúng tạo ra những phương trình tương ứng.

Bài tập tương tự.

Cho hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ rồi đóng lại, sau đó mở vòng thứ hai chảy trong 3 giờ thì ta được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bễ là bao nhiêu?

Đáp án: 10 giờ và 15 giờ.

Bài 4

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ (1), với x là ẩn số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn đẳng thức sau:

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0.$$

Phân tích. a) Khi thay $m = 2$ vào phương trình (1) thì ta thu được một phương trình bậc hai theo ẩn x dễ dàng giải bằng công thức nghiệm. Đối với bài này đặc biệt khi thay m vào phương trình thì phương trình sẽ đưa về dạng hằng đẳng thức , nếu để ý ta sẽ tiết kiệm được thời gian giải.

b) Dạng bài này thì trước tiên ta phải tìm điều kiện để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt thông qua biệt thức đenta (Δ) , sau đó biến đổi đẳng thức về dạng có x_1x_2 và $x_1 + x_2$ để áp dụng Định lý Viète để tìm giá trị m thỏa mãn.Đối với bài thì này đã có sẵn x_1x_2 và $x_1 + x_2$ nên ta chỉ thế Hệ thức Viète vào là sẽ ra kết quả.

Lời giải. a) Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta được phương trình $x^2 - 6x + 9 = 0$ $(*)$

Bài này ta có thể giải bằng hai cách:

Cách 1: Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai, với các hệ số

$a = 1, b = -6, c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.1.9 = 0$

$\Delta = 0$ Suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2} = 3$ Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm là $x = 3$

Cách 2: Để ý ta sẽ thấy phương trình $(*)$ có dạng hằng đẳng thức $(a - b)^2$.

Phương trình $(*)$ $\Leftrightarrow x^2 - 2.3.1x + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$.

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta > 0$

Hay $[-2(m+1)]^2 - 4.(m^2+5) > 0$

$\Leftrightarrow 4(m^2+2m+1) - 4m^2 - 20 > 0$

$\Leftrightarrow 8m - 16 > 0$

$\Leftrightarrow m > 2.$

Áp dụng Định lý Viète ta có hệ thức $\begin{cases} x_1 + x_2 &= \dfrac{-b}{a} = 2m+2 \\ x_1x_2 &= \dfrac{c}{a} = m^2+5 \end{cases}$ $(**)$.

Thay $(**)$ vào đẳng thức $2x_1x_2 - 5(x_1+x_2) + 8 = 0$.

Ta được phương trình :

$2(m^2+5) - 5(2m+2) + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0$ $(***)$.

Ta nhận thấy phương trình $(***)$ có hệ số $a = 2, b = 10, c = 8$ và $a + b + c = 0$.

Theo hệ quả của Định lý Viète nên phương trình $(***)$ có hai nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

Do điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $m > 2$ nên nhận $m = 4$ và loại $m = 1$.

Vậy $m = 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn đẳng thức $2x_1x_2 - 5(x_1+x_2) + 8 = 0$.

■

Bình luận. a) Bài toán này kiến thức tương đối cơ bản, nếu làm nhiều có kinh nghiệm thì sẽ thấy hằng đẳng thức và ra kết quả nhanh chóng.

b) Bài yêu cầu phải nắm được Định lý Viète, biết áp dụng biệt thức đenta để biện luận nghiệm của phương trình bậc hai và thông thạo việc biến đổi hằng đẳng thức tạo ra dạng của hệ thức Viète.

Bài tập tương tự.

Cho phương trình ẩn x : $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ (1)

1. Giải phương trình (1) khi $m = -4$.

2. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}\right) = 3.$$

Đáp án:

1. $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

2. $m = 6$.

Bài 5

Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và D là hình chiếu vuông góc của B trên OA sao cho D nằm giữa A và O. Gọi M là trung điểm BC, N là giao điểm của BD và AC, F là giao điểm của MD và AC, E là giao điểm thứ hai của BD với đường tròn (O), H là giao điểm của BF và AD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BDOM$ nội tiếp và $\widehat{MOD} + \widehat{NEA} = 180^\circ$.

b) DF song song với CE, từ đó suy ra $NE.NF = NC.ND$.

c) CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCE}$.

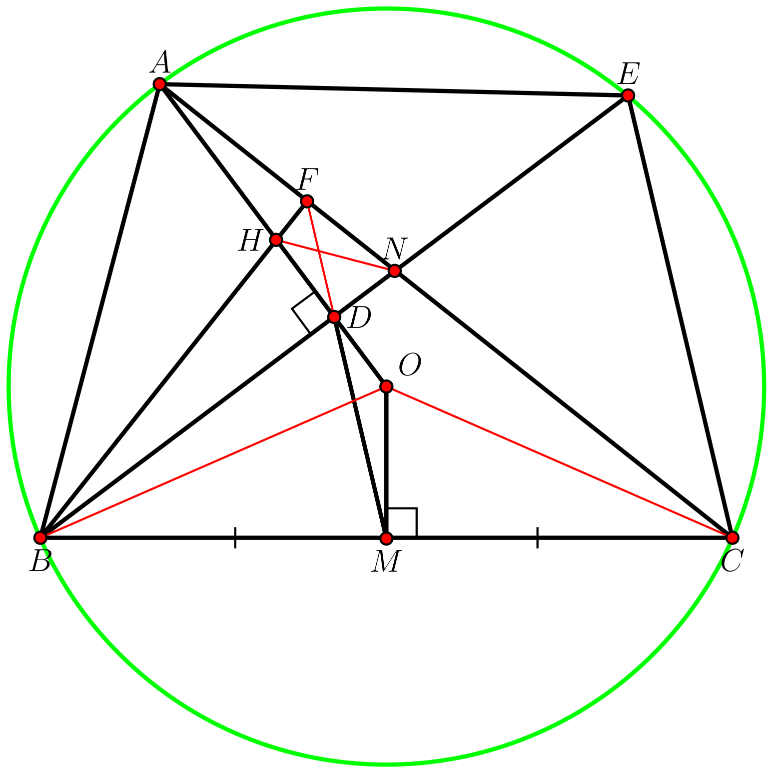
d) HN vuông góc với AB.

Phân tích. a) Để chứng minh tứ giác nội tiếp ta cần nhớ lại bốn dấu hiệu chứng minh tứ giác nội tiếp. Trong tứ giác $BDOM$ ta sử dụng dấu hiệu *"Tứ giác có tổng hai góc đối bằng* 180° *là tứ giác nội tiếp"*. Ta thấy có góc $\widehat{BDO}$ là góc vuông do $BD \perp OA$ và M là trung điểm BC nên dùng liên hệ giữa đường kính và dây cung ta suy ra được $OM \perp BM$. Từ đó suy ra $\widehat{MOD} + \widehat{NEA} = 180^\circ$.

b) Để chứng minh song song ta hay sử dụng các dấu hiệu như: hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau, hai góc ở vị trí đồng vị bằng nhau, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba,... Thường trong bài hình học các kết quả của câu trên sẽ là gợi ý để dùng làm dữ kiện giải quyết câu dưới. Đi ngược từ đề bài thì ta sẽ thấy góc $\widehat{BDM} = \widehat{BEC}$ do đồng vị, vậy ta sẽ thử chứng minh cho hai góc đó bằng nhau. Để chứng minh ta dựa vào kết quả tứ giác $BDOM$ nội tiếp ở câu a. Và áp dụng Định lý Thales (Ta-lét) sẽ suy ra được điều cần chứng minh.

c) Để chứng minh phân giác ta cần chứng minh đường thẳng đó chia góc thành hai góc bằng nhau và bằng một nữa góc đó. Sử dụng kết quả của câu a và áp dụng các tính chất góc nội tiếp , góc ở tâm thì ta sẽ chứng minh được CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCE}$.

d) Nếu vẽ hình đúng, nhìn hình ta sẽ dự đoán được hướng làm. Tư duy ngược từ đề bài yêu cầu chứng minh HN vuông góc với AB , nên ta dự đoán H là trực tâm của tam giác ABN và BF cũng vuông góc với AN. Nên giờ ta định hướng là cần chứng minh BF vuông với AN.



Lời giải.

a) Ta có M là trung điểm của BC nên suy ra $OM \perp BC$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung).

Ta có $\widehat{BDO} + \widehat{BMO} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $BDOM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MOD} + \widehat{DBM} = 180^\circ$.

Mà $\widehat{DBM} = \widehat{NAE}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{EC}$) nên $\widehat{MOD} + \widehat{NAE} = 180^\circ$ (đpcm).

b) Ta có tứ giác $BDOM$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BOM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BM}$).

Do tam giác BOC cân tại O và OM là đường cao $\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{MOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$.

Nên $\widehat{BDM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$.

Mà $\widehat{BEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$

Suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{BEC}$.

Mặt khác hai góc này đồng vị

$\Rightarrow DM \parallel EC$ hay $DF \parallel CE$ (đpcm).

c) Ta có:

$\widehat{BMD} = \widehat{BOD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDOM$)

Tam giác ABE cân tại A (tam giác có đường cao vừa là trung tuyến)

$\Rightarrow AB = AE \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AE} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BE}$

$\Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{BCE} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BE}$ (tính chất góc nội tiếp, góc ở tâm)

Mà $\widehat{BOD} = 2\widehat{BCN}$ nên $\widehat{BCE} = 2\widehat{BCN}$.

Suy ra CA là tia phân giác của $\widehat{BCE}$.

d) Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = \widehat{CFM}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung, hai góc so le trong)

Nên tứ giác $ABDF$ nội tiếp.

Lại có $\widehat{ADB}$ vuông nên $\widehat{AFB}$ vuông.

Xét tam giác ABN có AD và BF là đường cao nên H là trực tâm suy ra NH vuông góc với AB.

■

Bình luận. Để làm được những bài tập hình học như thế nào, ta cần rèn luyện thật nhiều những bài tập cơ bản trước vì một bài hình trong đề tuyển sinh là tổng hợp từ các ý nhỏ để tạo nên độ khó nhất định. Vì vậy ta nên luyện thật nhiều để nắm vững các kiến thức cơ bản, phương pháp chứng minh, các dấu hiệu đặc biệt của các hình....

Bài 6

Một cốc nước có dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 3cm, chiều cao bằng 12cm và chứa một lượng nước cao 10cm. Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thủy tinh có cùng đường kính bằng 2cm vào cuốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này là bao nhiêu.

Phân tích. Để tính được mực nước trong cốc lúc này ta phải biết được thể tích nước dâng lên, và do cốc nước là một hình trụ nên ta có thể dùng công thức tính thể tích hình trụ để tính được chiều cao dâng lên của mực nước từ đo suy ra mực nước hiện tại.
Công thức tính thể tích hình câu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
Công thức tính diện tích hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.
Công thức tính thể tích hình trụ có đường cao h và diện tích đáy B là $V = B.h$.

Lời giải. Ta có viên bi bằng thủy tinh là vật không thấm nước nên lượng nước dâng lên chính là thể tích 3 viên bi.
Ta có thể tích ba viên bi là: $3.\frac{4}{3}\pi 1^3 = 4\pi(\text{cm}^3)$.
Diện tích đáy hình trụ là: $\pi.3^2 = 9\pi(\text{cm}^2)$.
Mực nước dâng lên là: $9\pi.h = 4\pi \Rightarrow h = \frac{4}{9}(\text{cm})$.
Mực nước trong cốc là: $10 + \frac{4}{9} = \frac{94}{9} \approx 10,44(\text{cm})$. ■

Bình luận. Để làm được bài dạng này ta cần nắm rõ các công thức tính thể tích của các hình đặc biết như: trụ, cầu,... diện tích hình tròn.

Bài tập tương tự.

Một cốc nước có dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 3cm, chiều cao bằng 14cm và chứa một lượng nước là $282,6(\text{cm}^3)$. Người ta thả từ từ 3 viên bi làm bằng thủy tinh có cùng đường kính bằng 2cm vào cuốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này là bao nhiêu.

Đáp án: $10,44(\text{cm})$.

Đề 13. Đề thi tuyển sinh lớp 10 Sở GD& ĐT Kiên Giang 2017 - 2018

Bài 1

a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm nghiệm dương của phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$.

b) Rút gọn biểu thức $P(a) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{a}+1}\right) : \dfrac{a+1}{a-1}$(với $a > 0, a \neq 1$).

Phân tích. Câu a) kiểm tra kiến thức của học sinh về công thức nghiệm phương trình bậc 2. Câu b) rút gọn biểu thức bằng cách quy đồng.

Lời giải. a) Tìm nghiệm dương của phương trình

Giải bài toán bằng cách lập biệt thức denta và chọn nghiệm lớn hơn 0

$$\Delta = 3^2 - 4.1.(-10) = 49$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{49}}{2.1} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{49}}{2.1} = -5 \end{array}\right. .$$

Vậy nghiệm dương của phương trình là $x = 2$.

b) Với điều kiện $(a > 0, a \neq 1)$, ta có:

$$P(a) = \frac{(\sqrt{a}+1)+(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}.\frac{a-1}{a+1} = \frac{2\sqrt{a}}{a-1}.\frac{a-1}{a+1} = \frac{2\sqrt{a}}{a+1}.$$

■

Bài tập tương tự.

a) Tìm nghiệm âm của phương trình $x^2 - 5x - 14 = 0$.

b) Rút gọn biểu thức $Q(a) = \left(\dfrac{1}{a-\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right) : \dfrac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$.

Đáp số a) -2. b)$\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$

Bài 2

a) Cho hàm số $y = (3a - 6)x - 2017$. Tìm điều kiện của a để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Vẽ đồ thị hàm số $(P) : y = x^2$ và $d : y = -x + 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

Phân tích. Đối với câu a, ta có thể giải bài toán một cách tổng quát theo định nghĩa hàm số nghịch biến hay sử dụng tính chất nghịch biến của hàm số bậc nhất. Đối với câu b, lập bảng giá trị cho mỗi hàm số và vẽ.

Lời giải. a) Tìm a

Cách 1

Xét hàm số $y = f(x) = (3a - 6)x - 2017$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{[(3a-6)x_1 - 2017] - [(3a-6)x_2 - 2017]}{x_1 - x_2} < 0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(3a-6)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow 3a - 6 < 0 \Leftrightarrow a < 2.
\end{aligned}$$

Cách 2: Hàm số bậc nhất nghịch biến trên tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi hệ số góc của đường thẳng $y = (3a - 6)x - 2007$ âm tức là

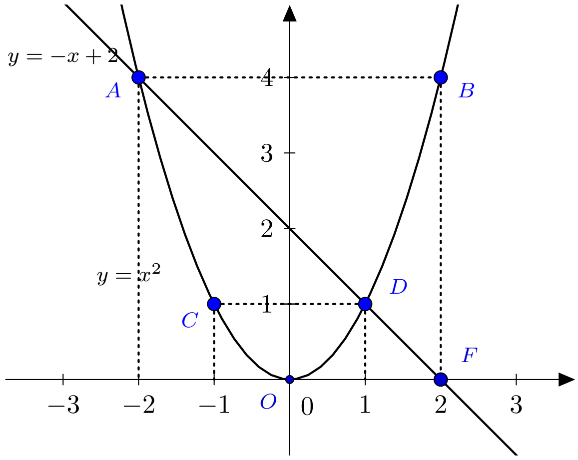
$$3a - 6 < 0 \Leftrightarrow a < 2.$$

b) Vẽ đồ thị

Lập bảng giá trị cho 2 hàm số

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

x	1	2
$y = -x + 2$	1	0



■

Bài tập tương tự.

a) Cho hàm số $y = m(x + 1) - 2017x$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. (Đáp số: $m > 2017$).

b) Vẽ đồ thị hàm số $(P) : y = -x^2$ và $d : y = x - 2$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

Bài 3

a) Tìm các giá trị m để phương trình $x^2+2(m+1)x+m^2+2m-1=0$ (m là tham số) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}=2$.

b) Mỗi ngày Ba của bạn An chở bạn ấy từ nhà đến trường mất 30 phút. Vì hôm nay là ngày thi tuyển sinh nên nên Ba bạn ấy muốn con mình đến trường sớm hơn, do đó ông ấy đã tăng vận tốc xe lên thêm 15 km/h và đến sớm hơn thường ngày 10 phút. Hỏi quảng đường từ nhà bạn An đến trường là bao nhiêu km?

Phân tích. Đối với câu a) ứng dụng công thức Vi-ét. Đối với câu b) giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình và nhớ công thức vật lý cơ bản sau: quãng đường = Vận tốc . thời gian.

Lời giải. a) Tìm m

Ta có pương trình $x^2+2(m+1)x+m^2+2m-1=0$ (*).

Điều kiện để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{aligned}&\Delta'>0 \Leftrightarrow b'^2-ac>0\\&\Leftrightarrow (m+1)^2-(m^2+2m-1)>0\\&\Leftrightarrow 2>0,\ \text{luôn đúng } \forall m\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt $\forall m\in\mathbb{R}$.

Theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=-2(m+1)\\P=x_1.x_2=m^2+2m-1\end{cases}.$$

Dựa vào đề bài ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}=2\\&\Leftrightarrow \frac{x_2-1+x_1-1}{(x_1-1).(x_2-1)}=2\\&\Leftrightarrow \frac{S-2}{P-S+1}=2\\&\Leftrightarrow \frac{-2m-4}{m^2+4m+2}=2\\&\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-2m-4}{2}=m^2+4m+2\\m^2+4m+2\neq 0\end{cases}\\&\Leftrightarrow \begin{cases}m^2+5m+4=0\\m^2+4m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m_1=-1\\m_2=-4\end{array}\right..\end{aligned}$$

Vậy $m_1 = -1$ và $m_2 = -4$ là các giá trị cần tìm.

b) Tính quãng đường

Gọi s (km) ($s > 0$) là quãng đường từ nhà đến trường, v (km/h) ($v > 0$) là vận tốc ngày thường.

Theo đề bài, thời gian đi từ nhà đến trường thường ngày là $\dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$ giờ.

Ngày đi thi, Bố An đi từ nhà đến trường với vận tốc $(v + 15)$ km/h trong khoảng thời gian $\dfrac{30 - 10}{60} = \dfrac{1}{3}$ (giờ) (vì đi nhanh hơn thường ngày 10 phút)

Theo công thức vật lý về vận tốc, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} s = v.\dfrac{1}{2} \\ s = (v + 15).\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{v}{2} \\ \dfrac{v}{2} = \dfrac{v + 15}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 30 \\ s = \dfrac{30}{2} = 15 \end{cases}.$$

Vậy quãng đường từ nhà bạn An đến trường là 15 km.

■

Bài tập tương tự.

a) Định m để phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phận biệt x_1, x_2 thỏa

$$(1 + x_1)(2 - x_2) + (1 + x_2)(2 - x_1) = x_1^2 + x_2^2 + 2.$$

b) Một người dự định đi xe máy từ A đến B với quãng đường 90 km. Thực tế vì có việc gấp nên người đó đã tắng vận tốc thêm 10 km/h so với vận tốc dự định nên đã đến B sớm hơn 45 phút so với dự định. Hãy tính vận tốc người đó dự định đi từ A đến B.

Đáp số: a)$m = 1, m = \dfrac{-1}{2}$. b) 30 km/h.

Bài 4

Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các cạnh DE và DC lần lượt tại H và K.

a) Chứng minh tứ giác $BHCD$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh tam giác KHC đồng dạng với tam giác KDB.

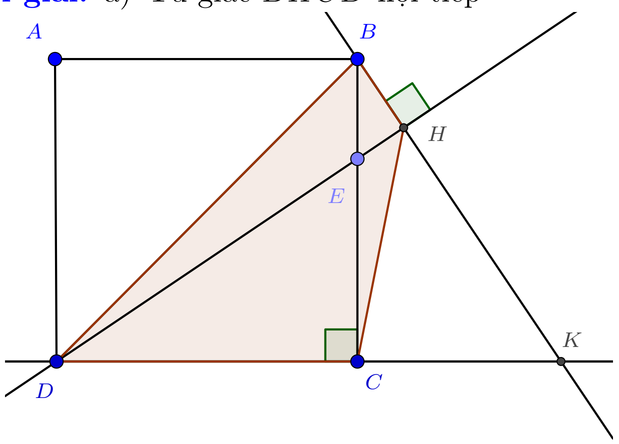
c) Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3 cm. Tính độ dài cung CH có số đo bằng 40^o của đường tròn đường kính BD (làm tròn kết quả đến 1 chữ số thập phân).

Phân tích. Đối với câu a), dễ thấy chứng minh tứ giác nội tiếp bằng tính chất 2 đỉnh cùng nhìn một cạnh một góc bằng nhau; cụ thể là bằng 90^o nên ta có thể chỉ rõ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp từ giác $BHCD$ luôn để thuận tiện cho các câu sau.

Đối với câu b), chứng minh 2 tam giác đồng dạng bằng trường hợp góc-góc, trong đó 1 cặp góc bằng nhau do tính chất của tứ giác nội tiếp $BHCD$ đã chứng minh ở câu a).

Đối với câu c), đầu tiên là xác định đường tròn với tâm và bán kính; sau đó nhớ lại công thức tính độ dài cung tròn. Ta cũng có thể suy luận công thức bằng cách sau: chu vi $(2.\pi.r)$ là độ dài của cung 360^o, theo tính chất tỷ lệ thuận, ta sẽ có độ dài cung 40^o là $\dfrac{2.\pi.r}{360}.40$

Lời giải. a) Tứ giác $BHCD$ nội tiếp

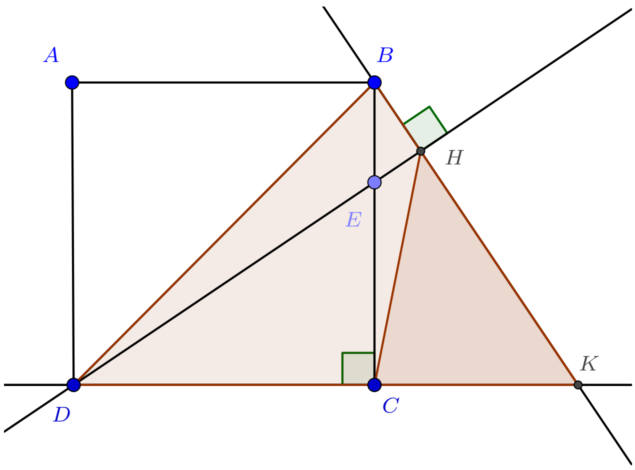


Ta có

$$\begin{cases} \widehat{BHD} = 90^o \ (BH \perp DE) \\ \widehat{BCD} = 90^o \ (ABCD \text{ là hình vuông}) \end{cases}.$$

$\Rightarrow H, C$ thuộc đường tròn đường kính BD.

$\Rightarrow BHCD$ nội tiếp.

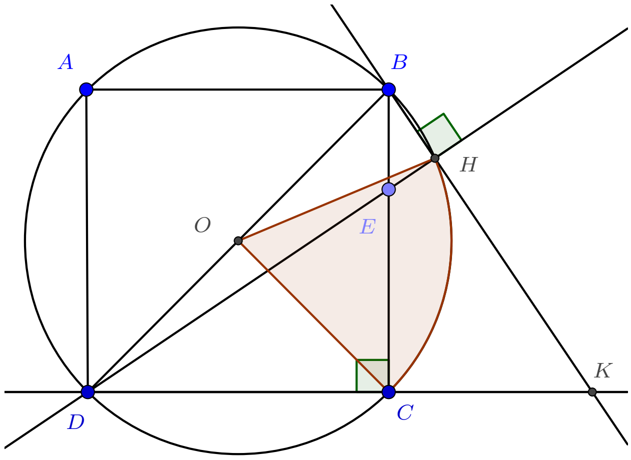


b) Chứng minh $\Delta KHC \backsim \Delta KDB$

Xét ΔKHC và ΔKDB có

$$\begin{cases} \widehat{K} \text{ chung} \\ \widehat{KDB} = \widehat{KHC} \text{ (góc và góc đối ngoài của tứ giác nội tiếp } BHCD) \end{cases}.$$

$\Rightarrow \Delta KHC \backsim \Delta KDB$ (g-g).



c) Tính độ dài cung CH

Gọi O là trung điểm của BD. Ta có tứ giác $BHCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD có bán kính là

$$OB = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Độ dài cung CH là

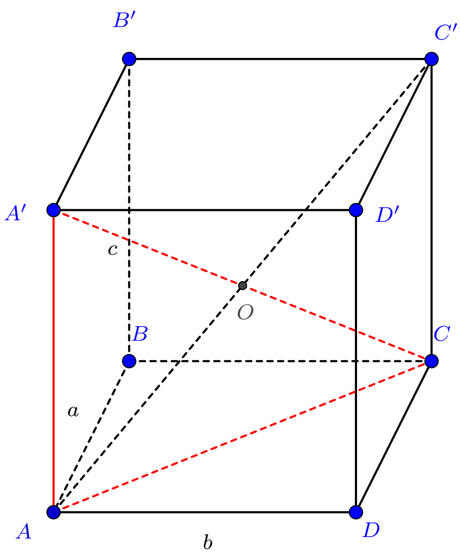
$$2\pi.OB.\frac{40}{360} = 2\pi.3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{40}{360} = \pi\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ (cm)}.$$

■

Bài 5

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp mặt cầu tâm O (các đỉnh của hình hộp chữ nhật nằm trên mặt cầu). Các kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c. Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật, S_2 là diện tích của mặt cầu. Tìm mối quan hệ giữa a, b, c để tỉ lệ $\dfrac{S_1}{S_2}$ lớn nhất.

Phân tích. Đầu tiên sử dụng các công thức tính diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật và diện tích mặt cầu để suy ra tỷ lệ $\dfrac{S_1}{s_2}$ rồi từ đó liên hệ tỷ lệ này với bất đẳng thức Cô-si căn bản.



Lời giải.

Vì các đỉnh hình hộp nằm trên mặt cầu nên tâm O của mặt cầu là tâm hình chữ nhật và cũng là giao điểm của $A'C$ và AC'. Dựa vào định lý Pytago ta tính được bán kính mặt cầu là:

$$OA = \frac{1}{2}A'C = \frac{1}{2}\sqrt{AA'^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \sqrt{a^2+b^2}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật và diện tích mặt cầu lần lượt là :

$$S_1 = 2S_{ABCD} + 2S_{BCC'B'} + 2S_{ABB'A'} = 2ab + 2bc + 2ca$$
$$S_2 = 4\pi OA^2 = \pi(a^2+b^2+c^2).$$

Dựa vào bất đẳng thức Cô-si cho các số dương a, b, c ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$
$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$
$$c^2 + a^2 \geq 2ca$$
$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{2}{\pi}.$$

Vậy tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ lớn nhất là $\frac{2}{\pi}$.
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = b = c$ (dấu "=" trong các bất đẳng thức Cô-si xảy ra).

■

Đề 14. Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Tỉnh Khánh Hòa

Bài 1

(Không sử dụng máy tính cầm tay)

a) Tính giá trị biểu thức $T = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

b) Giải phương trình $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$.

Phân tích. a) Biểu thức T có ba hạng tử. Hạng tử thứ nhất ta tạm thời để nguyên. Nhưng hạng tử thứ hai có tử và mẫu rút gọn được, vì ta thấy khi rút $\sqrt{2}$ ra thì biểu thức trong ngoặc thu được chính là tử. Còn hạng tử thứ ba là dạng "căn chồng căn". Hướng biến đổi chính của dạng này là ta làm xuất hiện bình phương ở trong căn thức "to" nhất, từ đó phá một lớp căn.

b) Ta nhận thấy sự xuất hiện của x và $\sqrt{x}$ ở trong phương trình. Điều này làm ta liên tưởng đến việc đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x} \quad (t \geq 0)$, vì khi đặt như thế, ta có thể biểu diễn $x = t^2$, từ đó đưa về một phương trình bậc hai theo ẩn phụ t và dễ dàng tiến hành các bước tiếp theo.

Lời giải. a) Ta có:

$$\begin{aligned}T &= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} - \sqrt{2-2.1.\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - \left(\sqrt{2}-1\right) = 1\end{aligned}$$

b) Đặt $t = \sqrt{x} \quad (t \geq 0)$. Khi đó, $x = t^2$ và phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

Giải phương trình này ta thu được hai nghiệm $t_1 = 5$ (nhận) và $t_2 = -2$ (loại).

Với $t = 5$, ta có $x = 5^2 = 25$. Vậy phương trình có nghiệm $x = 25$.

■

Bình luận. Cả hai ý của câu này đều ở dạng cơ bản. Với ý a), ta cần chú ý các phép biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai. Với ý b), việc đặt ẩn phụ giúp ta giải quyết bài toán.

Bài tập tương tự.

a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

b) Giải phương trình $x + 4\sqrt{x} - 21 = 0$

Đáp số:

a) $P = 2$

b) Phương trình có nghiệm $x = 9$.

Bài 2

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = -3x^2$ và hai điểm $A(1;-3)$ và $B(2;3)$.

a) Chứng tỏ rằng điểm A thuộc parabol (P).

b) Tìm tọa độ điểm C (C khác A) thuộc parabol (P) sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Phân tích. Ý a) là một bài toán cơ bản. Điểm A thuộc parabol (P) khi tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình của (P).

Ở ý b), để xác định điểm C sao cho A, B, C thẳng hàng và C thuộc (P), C phải nằm trên đường thẳng AB và C là giao điểm của đường thẳng AB và parabol (P). Do đó, ta sẽ lập phương trình đường thẳng AB rồi xác định giao điểm của (P) và đường thẳng AB.

Lời giải. a) Thay $x = 1$, $y = -3$ vào $(P): y = -3x^2$ ta có $-3 = -3.1^2$ (thỏa mãn).

Vậy $A \in (P)$.

b) A, B, C thẳng hàng và $C \in (P)$, vậy C là giao điểm của đường thẳng AB và parabol (P). Phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$, trong đó a, b là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} -3 = a + b \\ 3 = 2a + b \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có $a = 6; b = -9$. Vậy phương trình AB là $y = 6x - 9$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng AB và parabol (P) là:

$$6x - 9 = -3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

Giải phương trình này, ta có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -3$. Vì C không trùng với A và A có hoành độ bằng 1, nên C có hoành độ -3. Từ đó suy ra tọa độ điểm C là $C(-3; -27)$

■

Bình luận. Ý a) là một bài toán cơ bản. Ý b) có cách phát biểu bài toán "lạ", đòi hỏi học sinh cần vận dụng linh hoạt kiến thức đã học để giải. Đây là một bài toán hay.

Bài tập tương tự.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = 2x^2$ và hai điểm $A(-1; 2)$ và điểm $B(0; 5)$.

a) Chứng tỏ rằng điểm A thuộc parabol (P).

b) Tìm tọa độ điểm C (C khác A) thuộc parabol (P) sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Đáp số:

a) Tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình parabol.

b) $C\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{2}\right)$.

Bài 3

a) Tìm hai số, biết tổng của chúng bằng 7 và tích của chúng bằng 12.

b) Một hội trường có 300 ghế ngồi (loại ghế một người ngồi) được xếp thành nhiều dãy với số lượng ghế mỗi dãy như nhau để tổ chức một sự kiện. Vì số người dự lên đến 351 người nên người ta phải xếp thêm 1 dãy ghế có số lượng ghế như dãy ghế ban đầu và sau đó xếp mỗi dãy 2 ghế (kể cả dãy ghế xếp thêm) để vừa đủ mỗi người ngồi một ghế. Hỏi ban đầu hội trường đó có bao nhiêu dãy ghế?

Phân tích. Ở ý a), ta có thể áp dụng trực tiếp hệ thức Vi-ét để tìm hai số đề cho. Còn bài toán ở ý b) có cách giải tương tự như ví dụ ở trang 57, SGK Toán 9 tập 2.

Lời giải. a) Hai số cần tìm có tổng bằng 7 và tích bằng 12. Do đó hai số này là nghiệm (nếu có) của phương trình

$$X^2 - 7X + 12 = 0$$

Giải phương trình này, ta thu được hai nghiệm $X_1 = 3$ và $X_2 = 4$. Vậy hai số cần tìm là 3 và 4.

b) Gọi x là số dãy ghế ban đầu của hội trường ($x \in \mathbb{N}^*$).
Từ đó suy ra số ghế của mỗi dãy ban đầu là $\dfrac{300}{x}$.
Thực tế, số dãy ghế là $x+1$ và số ghế của một dãy là $\dfrac{351}{x+1}$.
Vì phải xếp thêm 2 ghế mỗi dãy nên ta có phương trình:

$$\frac{351}{x+1} - 2 = \frac{300}{x}$$

Giải phương trình này, ta thu được hai nghiệm $x_1 = 12$ (nhận) và $x_2 = \dfrac{25}{2}$ (loại).
Vậy số dãy ghế ban đầu là 12 dãy.

■

Bình luận. Ý a) là bài toán cơ bản, áp dụng trực tiếp hệ thức Vi-ét. Ý b) là bài toán giải quyết bằng cách lập phương trình ở mức độ cơ bản.

Bài tập tương tự.

a) Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 1 và tích của chúng bằng -30.

b) Trong chiến dịch "Trồng cây gây rừng", đội thanh niên xung kích dự kiến trồng 551 cây theo một số hàng nhất định, mỗi hàng có số cây như nhau. Trong thực tế, số cây giống đội được nhận là 672 cây. Do đó, đội quyết định trồng thêm 3 hàng, mỗi hàng trồng thêm 2 cây. Hỏi ban đầu, đội thanh niên xung kích dự kiến trồng bao nhiêu hàng cây?

Đáp số:

a) Hai số cần tìm là 6 và -5.

b) Đội thanh niên xung kích dự kiến trồng 29 hàng cây.

Bài 4

Cho đường tròn $(O; OA)$. Trên bán kính OA lấy điểm I sao cho $OI = \dfrac{1}{3}OA$. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại điểm I và vẽ đường kính BD. Gọi E là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh DA là tia phân giác của $\widehat{BDC}$.

b) Chứng minh OE vuông góc với AD.

c) Lấy điểm M trên đoạn IB (M khác I và B). Tia AM cắt đường tròn (O) tại điểm N. Tứ giác $MNDE$ có phải là một tứ giác nội tiếp hay không? Vì sao?

Phân tích. Ở ý a), ta chỉ cần chỉ ra $\widehat{BDA} = \widehat{ADC}$. Điều này có thể thực hiện bằng cách chứng minh A là trung điểm $\widehat{BC}$ rồi sử dụng tính chất góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau.

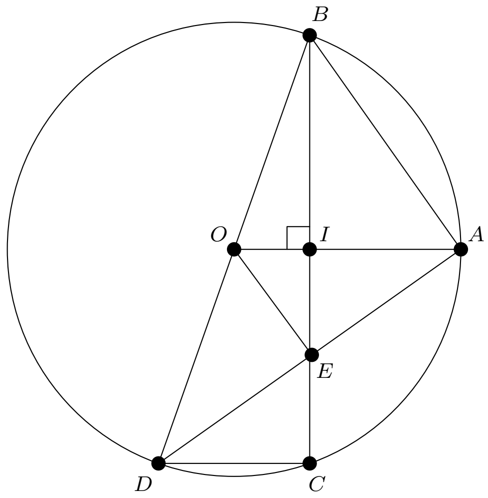
Ở ý b), ta nhận thấy $BA \perp AD$ do BD là đường kính và O là trung điểm BD. Vì vậy, ta sẽ chứng minh E là trung điểm AD để suy ra OE là đường trung bình của ΔBAD, từ đó có $OE \parallel AB$, hay $OE \perp AD$

Ở ý c), ta chỉ ra được tứ giác $MNDE$ có một cặp góc đối có tổng bằng 180^0, từ đó suy ra tứ giác này nội tiếp.

Lời giải. a) Ta có: $BC \perp OA$ tại I nên I là trung điểm BC. Xét ΔBOI và ΔCOI có $\Delta BOI = \Delta COI$ (c.g.c). Vậy $\widehat{BOA} = \widehat{COA}$, suy ra $\widehat{BA} = \widehat{CA}$.

Các góc $\widehat{BDA}$ và $\widehat{CDA}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BA}$ và $\widehat{CA}$ nên chúng bằng nhau.

Từ đây suy ra DA là tia phân giác của $\widehat{BDC}$.



b) Ta có:

Ta có $\widehat{DAB}$ vuông do BD là đường kính. Vậy $BA \perp DA$. (1)

Do $BC \perp OA$ tại I nên I là trung điểm BC. Vậy OI là đường trung bình của ΔBDC. Từ đây ta có $DC = 2OI = \dfrac{2}{3}OA$.

Mặt khác $IA = OA - OI = \dfrac{2}{3}OA$. Vậy $IA = DC$.

Xét ΔIAE và ΔCDE có:

$\widehat{IAE} = \widehat{CDE}$ (hai góc ở vị trí so le trong)

$\widehat{AIE} = \widehat{DCE} (= 90^0)$

$IA = CD$ (chứng minh trên).

Suy ra $\Delta IAE = \Delta CDE$ (g.c.g). Từ đó ta có $AE = DE$ (cạnh tương ứng), hay E là trung điểm của AD. Vậy OE là đường trung bình của ΔBAD, suy ra $OE \| AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OE \perp DA$.

c) Ta có:

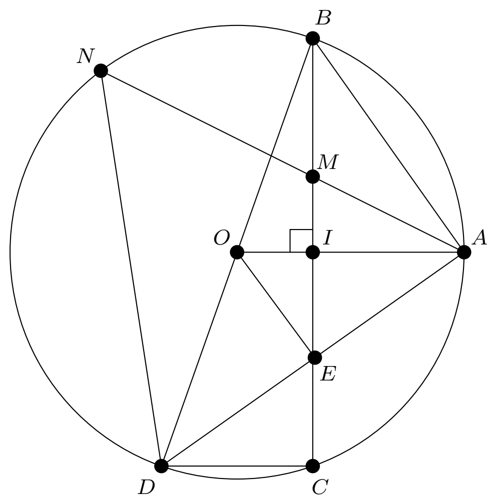
$\widehat{MED} = \widehat{BED} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BND} + \text{sđ}\overset{\frown}{AC}\right)$ (góc có đỉnh nằm trong đường tròn)

$$\begin{aligned}\widehat{MND} &= \widehat{AND} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ACD} \text{ (góc nội tiếp)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right)\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{MED} + \widehat{MND} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BND} + \text{sđ}\overset{\frown}{DC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CA} + \text{sđ}\overset{\frown}{AB}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot 360^0 = 180^0$

Suy ra tứ giác $MNDC$ nội tiếp.

■



Bình luận.

Ý a) là một ý cơ bản, áp dụng trực tiếp tính chất góc nội tiếp chắn cung và quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây. Ở ý b), ta cần khéo léo hơn trong việc quan sát. Vì ta cần chứng minh $OE \perp AD$ nên ta quan sát các đường khác vuông góc với AD rồi chứng minh OE song song với đường đó. Còn ý c), ta vận dụng định lý đảo: "Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn".

Ở bài toán này, ý b) và ý c) tương đối hay khi ta phải vận dụng linh hoạt nhiều kiến thức khác nhau để giải quyết yêu cầu bài toán.

Bài tập tương tự.

Cho đường tròn $(O; OA)$. Trên bán kính OA lấy điểm I sao cho $OI = \dfrac{1}{3}OA$. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại điểm I và vẽ đường kính BD. Gọi E là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh $\widehat{OAD} = \widehat{ADC}$.

b) Chứng minh $OE = \dfrac{1}{2}AB$.

c) Vẽ đường kính AF. Lấy điểm M trên cung nhỏ BF (M không trùng B, M không trùng F). Gọi giao điểm của AM và BC là N. Chứng minh tứ giác $NMDE$ nội tiếp.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh $OA \| DC$.

b) Ta chứng minh OE là đường trung bình của ΔBAD.

c) Ta chỉ ra tứ giác $NMDE$ có một cặp góc có tổng bằng 180^0.

Bài 5

Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 16cm và chiều cao là 5cm.

Phân tích. Bài toán này ở mức độ cơ bản. Ta chỉ cần tính ra bán kính hình tròn đáy và áp dụng các công thức tương ứng để ra kết quả.

Lời giải. Ta có bán kinh đáy của hình trụ là: $r = \dfrac{16}{2\pi} = \dfrac{8}{\pi}$.
Vậy diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \dfrac{8}{\pi} \cdot 5 = 80\ (\text{cm}^2)$
Diện tích toàn phần là $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 80 + 2\pi r^2 = 80 + 2\pi.\left(\dfrac{8}{\pi}\right)^2 = 80 + \dfrac{128}{\pi}\ (\text{cm}^2)$
Thể tích là $V = \pi.r^2.h = \pi.\left(\dfrac{8}{\pi}\right)^2.5 = \dfrac{320}{\pi}\ (\text{cm}^3)$

■

Bình luận. Bài toán này ở dạng cơ bản. Ta chỉ cần nhớ và áp dụng các công thức thích hợp sau khi đã tính ra bán kính của đáy.

Bài tập tương tự.
Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 8π cm và chiều cao là 10cm.
Đáp số: $S_{xq} = 80\pi\ (\text{cm}^2)$, $S_{tp} = 112\pi\ (\text{cm}^2)$, $V = 16\pi\ (\text{cm}^3)$

Đề 15. ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 SỞ GD VÀ ĐT NGHỆ AN 2017-2018

Bài 1

a) Tính giá trị của biểu thức $A = (1 - \sqrt{7})\dfrac{7 + \sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$.

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}\right)\dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}A&=(1-\sqrt{7})\frac{7+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}\\&=\frac{\sqrt{7}(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{2\sqrt{7}}\\&=\frac{1-7}{2}\\&=-3\end{aligned}$$

Vậy $A=-3$.

b) Điều kiện xác định của P là:

$$\begin{cases}x & \geq 0\\ 1-\sqrt{x} & \neq 0\\ 1+\sqrt{x} & \neq 0 \text{ (luôn đúng)}\\ \sqrt{x} & \neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}$$

Rút gọn P

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{x-1}{\sqrt{x}}\\&=\frac{2\sqrt{x}}{1-x}.\frac{x-1}{\sqrt{x}}\\&=-2\end{aligned}$$

Vậy $P=-2$. ■

Bài 2

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y=4\\4x+y=-1\end{cases}$.

b) Giải phương trình: $2x^2-5x+2=0$.

c) Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=2x+m-6$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ dương.

Lời giải.

a)

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x &= 3 \\ y &= 2x - 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$.

b)

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x + 2 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x-1)(x-2) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = 2 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = \dfrac{1}{2}$ và $x_2 = 2$.

c) Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d):

$$\begin{aligned} & x^2 &&= 2x + m - 6 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 6 - m &&= 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ dương

$\Leftrightarrow$Phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt là x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Phương trình } (*) \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ phân biệt} \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1.x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - (6 - m) > 0 \\ x_1 + x_2 = 2 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ x_1.x_2 = 6 - m > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 5 < m < 6$

Vậy đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ dương khi và chỉ khi $5 < m < 6$. ■

Bài 3

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 15m. Nếu giảm chiều dài 2m và tăng chiều rộng 3m thì diện tích mảnh vườn tăng thêm 44 m^2. Tính diện tích của mảnh vườn.

Phân tích. Các đại lượng được nói đến là chiều dài, diện tích đều có thể tích được nếu biết chiều rộng, do đó chỉ cần đặt chiều rộng là x rồi thiết lập và giải phương trình theo x dựa theo các giả thiết.

Lời giải. Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m). Khi đó, chiều dài và diện tích của mảnh vườn lần lượt là $x+15$(m) và $x^2+15x(\mathrm{m}^2)$. Nếu giảm chiều dài 2m và tăng chiều rộng 3m thì diện tích mảnh vườn là: $(x+3)(x+13) = x^2+16x+39$ (m^2). Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} & x^2+16x+39 && = x^2+15x+44 \\ \Leftrightarrow \ & x && = 5 \end{aligned}$$

Vậy diện tích của mảnh vườn là $5^2+15.5 = 100$ (m^2). ■

Bài 4

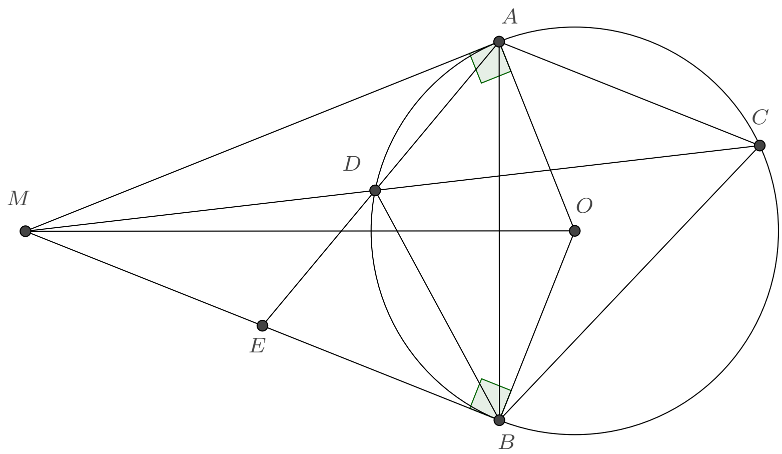
Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O,R). Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A, B là tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn (O,R) tại C. Nối MC cắt (O,R) tại D. Tia AD cắt MB tại E.

a) Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $EM = EB$.

c) Xác định vị trí của điểm M để $BD \perp MA$.

Phân tích.
b) Dựa vào tính chất tiếp tuyến, ta thấy ngay $\widehat{EBD} = \widehat{EAB}$, từ đó suy ra tam giác đồng dạng, và tính được $EB^2 = ED.EA$. Do đó cần tập trung chứng minh $ME^2 = ED.EA$
c) Bài toán liên quan đến vuông góc, mà lại có song song rồi nội tiếp nên ta cần hướng đến việc xử lý các góc bằng nhau. Ta cũng có thể dự đoán được D sẽ nằm trên MO, từ đó hướng đến việc chứng minh $MC \perp AB$ hay chứng minh $\widehat{CMO} = 0^o$. Khi có được vị trí của D thì việc suy ra M sẽ đơn giản.



Lời giải.

a) Xét tứ giác $MAOB$ có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^o \Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^o$.

Vậy $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có: $\begin{cases} \widehat{ACM} = \widehat{MAD} \quad \text{(tính chất của tiếp tuyến } MA) \\ \widehat{ACM} = \widehat{BMC} \quad \text{(do } AC//MB) \end{cases} \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{BMC}$

Do vậy: $\triangle EMD \backsim \triangle EAM$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{ED}{EM}$

$\Rightarrow EM^2 = ED.EA$

Mặt khác, theo tính chất tiếp tuyến MB: $\widehat{EBD} = \widehat{EAB}$ nên $\triangle EBD \backsim \triangle EAB$ (g-g).

Từ đó ta có: $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = ED.EA$

Như vậy ta được: $EM^2 = EB^2$ hay $EM = EB$.

c) Ta có: $\begin{cases} MA = MB \\ OA = OB \end{cases} \Rightarrow OM$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow MO \perp AB$

Để $BD \perp MA$ thì $\widehat{MAD} + \widehat{EAB} + \widehat{ABD} = 90^o \Rightarrow \widehat{BMC} + \widehat{EBD} + \widehat{ABD} = 90^o$

Suy ra: $MC \perp AB$.

Ta có: MO và MC cùng vuông góc với AB nên $MO \equiv MC$.

Khi đó: D nằm trên đường trung trực MO của AB nên $DA = DB$.

Để $BD \perp MA$ thì $AO//BD$. Suy ra: $\widehat{DBA} = \widehat{OAC} = \widehat{OCA}$. Khi đó, AB vừa là đường cao kẻ từ B, vừa là đường phân giác của góc B trong $\triangle OBD$, cho nên $\triangle OBD$ cân tại B hay $BO = BD$. Như vậy: $AO = OB = BD = DA \Rightarrow OBDA$ là hình thoi $\Rightarrow AD//OB$. Hơn nữa, đường thẳng AD đi qua trung điểm E của MB. Do đó, D là trung điểm của MO hay $MO = 2OD = 2R$.

Vậy để $BD \perp MA$ thì M phải nằm trên đường tròn $(O, 2R)$. ■

Bài 5

Giải phương trình: $x + \dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$.

Phân tích. Việc nhẩm nghiệm có lẽ không khả thi. Ta thấy rằng, khi chuyển x qua vế phải, rồi nhân căn ở mẫu lên, sau đó đem bình phương ta sẽ được phương trình bậc bốn, từ đây có thể tìm cách phân tích thành tích hai đa thức bậc hai.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& x + \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}} && = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{2}x && = (1-x)\sqrt{1+x^2} \\
\Rightarrow\ & 8x^2 && = (1+x^2-2x)(1+x^2) \\
\Leftrightarrow\ & 9x^2 && = (1+x^2)^2 - 2x(1+x^2) + x^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x^2-x+1)^2 - (3x)^2 && = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x^2-4x+1)(x^2+2x+1) && = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 2+\sqrt{3} \text{ hoặc } x = 2-\sqrt{3} && \text{hoặc } x = -1
\end{aligned}$$

Thử lại, ta chỉ nhận được nghiệm $x = 2-\sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2-\sqrt{3}$. ■

Bình luận. Bài này khi ra phương trình bậc bốn lại khá đẹp, do đó dễ giải quyết. Tuy nhiên cần lưu ý là khi bình phương mà không đặt điều kiện gì cả thì nhất định phải ghi dấu $\Rightarrow$, không ghi dấu $\Leftrightarrow$. Sau đó, cần thử lại các nghiệm để nhận, loại.