NGUYỄN HỮU ĐIỀN

PHƯƠNG PHÁP ĐIRICHLÊ và ứng dụng

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

NGUYỄN HỮU ĐIỂN

PHƯƠNG PHÁP ĐIRICHLÊ VÀ ỨNG DỤNG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 1999

LỜI NÓI ĐẦU

Nguyên lý những cái lồng và các chú thỏ đã được biết đến từ rất lâu. Ngay trong chương trình phổ thông cơ sở chúng ta cũng đã làm quen với phương pháp giải toán này. Thực ra nguyên lý này mang tên nhà bác học người Đức Pête Gutxtap Legien Dirichlet (1805-1859). Nguyên lý phát biểu rất đơn giản: *Nếu chúng ta nhốt thỏ vào các lồng mà số lồng ít hơn số thỏ, thì thể nào cũng có một lồng nhốt ít nhất hai con thỏ*.

Chỉ bằng nguyên lý đơn giản như vậy hàng loạt các bài toán đã được giải.

Cuốn sách được biên soạn lại theo từng chủ đề có liên quan đến nguyên lý, mỗi cách giải trong ví dụ của từng chương là áp dụng điển hình nguyên lý Đirichlê. Bài tập giải trước có liên quan đến bài giải sau nên cần lưu ý khia đọc sách. Với mong muốn cùng bạn đọc thảo luận một phương pháp chứng minh toán học và hy vọng cung cấp một tài liệu bổ ích cho các thầy cô giáo và các em học sinh ham mê tìm tòi trong toán học, tác giả mạnh dạn biên soạn cuốn sách này. Do khả năng và thời gian còn hạn chế, cuốn sách chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong được sự đóng góp ý kiến của đọc giả. Thư góp ý xin gửi về Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS-TSKH Đỗ Hồng Tân đã đọc và đóng góp nhiều ý kiến quí báu trong quá trình hoàn chỉnh bản thảo.

Tác giả

CHƯƠNG 1

NGUYÊN LÝ ĐIRICHLÊ VÀ VÍ DỤ

1.1. Nguyên lý Đirichlê

Nguyên lý Đirichlê nhiều khi người ta gọi là ¨Nguyên lý những ngăn kéo¨. Đây là một nguyên lý rất đơn giản, đặc biệt có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Dùng nguyên lý này người ta dễ dàng chứng minh tồn tại một đối tượng với tính chất xác định. Dạng đơn giản nhất có thể phát biểu như sau:

Nếu có m vật đặt vào n cái ngăn kéo và $m > n$ thì có ít nhất một ngăn kéo chứa ít nhất hai vật.

Tuy rằng với nguyên lý này người ta chỉ chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra được phương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cần chỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.

Nguyên lý Đirichlê là một định lý về tập hợp hữu hạn. Phát biểu chính xác nguyên lý này như sau:

Cho A và B là hai tập hợp không rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phần tử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu với một qui tắc nào đấy, mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử B, thì tồn tại hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với cùng một phần tử của B.

Để dễ hiểu ta cứ cho rằng các phần tử của tập B là ¨Những ngăn kéo¨ và các phần tử của A được đặt vào các ngăn kéo của nó. Trong phát biểu của nguyên lý trên các phần tử hữu hạn được tính bằng số tự nhiên, vì vậy Nguyên lý Đirichlê có liên quan mật thiết tới tập hợp số tự nhiên và các tính chất của tập hợp số này.

1.2. Ví dụ

▷ **1.1.** *Để kỷ niệm 20 năm ngày giải phóng Miền Nam, tại một thành phố người ta tổ chức buổi lễ gặp mặt những người 20 tuổi. Ngày 30 tháng 4 năm đó trong buổi gặp mặt có 400 thanh niên. Chứng minh rằng có ít nhất hai người trong số người tới dự cùng chung một ngày sinh.*

Lời giải. Năm 1995 có 365 ngày. Chúng ta coi mỗi ngày như một ngăn kéo và đánh số từ 1 đến 365 (ngăn kéo cuối cùng là ngày 31 tháng 12 năm 1995). Chúng ta đặt những thanh niên có ngày sinh tương ứng vào các ngăn kéo đó. Nhưng số thanh niên đến dự lễ lớn hơn số ngăn kéo, theo nguyên lý Đirichlê có ít nhất hai người được đặt vào cùng một ngăn kéo. Điều đó có nghĩa là họ sinh cùng một ngày. ☺

▷ **1.2.** *Trong sinh học người ta biết rằng số tóc trên đầu của mỗi người không quá 200.000 cái. Chứng minh rằng trong số người của thành phố Hà nội, với số dân hơn 2.000.000, có ít nhất 11 người có cùng số tóc.*

Lời giải. Chúng ta xét 200.000 ngăn kéo được đánh số từ 0 đến 199.999. Chúng ta ¨đặt¨ mỗi người dân Hà nội vào một ngăn kéo mà số tóc bằng số thứ tự của ngăn kéo. Giả sử không có 11 người có cùng số tóc, như vậy mỗi ngăn có nhiều nhất là 10 người có cùng số tóc, do đó số dân Hà nội nhiều nhất là $200.000 \times 10 = 2.000.000$, điều này không đúng với giả thiết là số dân Hà nội lớn hơn 2 triệu. ☺

▷ **1.3.** *Ba mươi học sinh làm bài viết chính tả. Một trong số học sinh đó bị 14 lỗi, còn các học sinh khác mắc lỗi ít hơn. Chứng minh rằng có ít nhất ba người mắc số lỗi bằng nhau.*

Lời giải. Chúng ta xét 15 ngăn kéo được đánh số từ 0 đến 14. Chúng ta ¨đặt¨ mỗi học sinh vào một ngăn kéo mang số đúng bằng số lỗi của học sinh này. Nếu không có ba học sinh nào có số lỗi bằng nhau, thì trong mỗi ngăn mang số từ 0,1,2,. . . ,13 sẽ có nhiều nhất hai học sinh. Khi đó số lượng của những học sinh này nhiều nhất là 28. Nếu thêm vào đó học sinh mắc 14 lỗi (trong ngăn kéo số 14) chúng ta sẽ nhận được nhiều nhất 29 học sinh viết chính tả, điều này dẫn đến sự vô lý với điều kiện đã cho. ☺

▷ **1.4.** *Chứng minh rằng trong mỗi nhóm bạn 5 người có ít nhất hai người có cùng số lượng người quen giữa những người trong nhóm đos. Chứng minh rằng cùng kết luận như vậy với nhóm bạn có số lượng thành viên bất kỳ.*

Lời giải. Chúng ta xét năm ngăn kéo, đánh số từ 0 đến 4. Mỗi người tham dự được đặt vào ngăn kéo mang số trùng với số người trong nhóm mà người đó quen.

a) Nếu có một người không quen ai cả trong số những người còn lại, thì ngăn số 4 là trống (vì ngược lại thì cả hai ngăn 0 và 4 đều không trống, dẫn đến vô lý). Như vậy, mỗi người trong số 5 người được đặt vào các ngăn mang số 0,1,2,3 với số lượng 4 ngăn. Từ nguyên lý Đirichlê suy ra ít nhất có hai người ở trong một ngăn, hay là, họ có chung số lượng người quen.

b) Nếu mọi người có ít nhất một người quen, mỗi người sẽ được đặt vào các ngăn mang số 1,2,3,4, với số lượng 4 ngăn. Phần còn lại áp dụng nguyên lý Đirichlê. ☺

▷ **1.5.** *Trong một giải bóng đá tham dự 16 đội. Mỗi cặp hai đội phải đấu với nhau. Chứng minh rằng tại mỗi thời điểm của giải có ít nhất 2 đội có số trận đã đấu như nhau.*

Lời giải. Chúng ta xét 16 ngăn kéo đánh số từ 0 đến 15. Chú ý rằng 15 là số lượng lớn nhất các trận bóng mà mỗi đội có thể đấu tại thời điểm đang xét. Hãy đặt mỗi đội bóng vào ngăn kéo mang số bằng số các trận mà đội đã đấu đến thời điểm đó. Chúng ta nhận ra rằng các ngăn 0 và 15 không thể đồng thời không trống được và như vậy có thể áp dụng nguyên lý Đirichlê. ☺

▷ **1.6.** *Trên trái đất sống hơn 5 tỷ người, biết rằng không quá 1% sống trên một trăm tuổi. Chứng minh rằng ít nhất có hai người sinh cùng một giây đồng hồ.*

Lời giải. Theo dương lịch hiện hành 100 năm có ít hơn 37000 ngày. Mỗi ngày có 24 giờ, mỗi giờ có 3600 giây. Khi đó 100 năm có ít hơn 3,33 tỷ giây. Từ điều kiện chúng ta tìm được những người trên trái đất không quá 100 tuổi ít nhất là 99% từ 5 tỷ người nghĩa là ít nhất có 4,9 tỷ. Việc còn lại áp dụng nguyên lý Đirichlê: đặt 4,9 tỷ người vào 3,33 tỷ ngăn kéo. ☺

▷ **1.7.** *Trong thời gian kéo dài một năm học một học sinh giải ít nhất một bài tập mỗi ngày. Để tránh căng thẳng học sinh giải hàng tuần không quá 12 bài tập. Chứng minh rằng trong thời gian kéo dài liên tục một số ngày học sinh này phải giải đúng 20 bài tập mỗi ngày.*

Lời giải. Chúng ta ký hiệu a_1 là số lượng bài tập học sinh đã giải trong ngày đầu tiên, a_2 là số lượng bài tập đã giải trong hai ngày đầu, a_3 là số lượng bài tập đã giải trong ba ngày đầu, và v.v. a_{77} là số lượng bài tập đã giải trong 77 ngày đầu (11 tuần). Theo giả thiết $a_{77} \leq 11.12 = 132$. Chúng ta xét tập hợp các số tự nhiên $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{77}, a_1 + 20, a_2 + 20, a_3 + 20, \ldots, a_{77} + 20\}$. Nó chứa 154 phần tử và số lớn nhất trong chúng là $a_{77} + 20 \leq 152$. Theo nguyên lý Đirichlê trong M có ít nhất hai số bằng nhau. Nhưng các số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{77}$ là hoàn toàn khác nhau. suy ra tồn tại a_k và a_l mà $a_k = a_l + 20, l < k \leq 77$. Như vậy $a_k - a_l = 20$, điều này có nghĩa là từ ngày thứ $l + 1$ đến ngày thứ k học sinh này phải giải đúng 20 bài. ☺

▷ **1.8.** *Trong một khu tập thể sống 123 người. Tổng số tuổi của họ là 3813. Chứng minh rằng có thể chọn 100 người sống ở khu tập thể này, mà tổng số tuổi của họ không nhỏ hơn 3100.*

Lời giải. Chúng ta hãy chọn 100 người nhiều tuổi nhất và giả sử tổng số tuổi của họ nhỏ hơn 3100. Khi đó người trẻ nhất trong số người được chọn là 3100:100=31 tuổi. Mặt khác người này không trẻ hơn 23 người còn lại theo cách chọn. Khi đó tổng số tuổi của 23 người này không lớn hơn 23.31=713. Suy ra tổng số tuổi của tất cả mọi người sống trong tập thể nhỏ hơn 3100+713=3813 dẫn đến vô lý. ☺

▷ **1.9.** *Năm cặp vợ chồng tổ chức một buổi gặp mặt. Khi gặp nhau họ bắt tay nhau, nhưng không ai tự bắt tay người trong gia đình mình và người mà chồng mình (hoặc vợ mình) đã bắt tay rồi. Cũng không ai bắt tay cùng một người hai lần. Sau cuộc gặp chúc mừng ban đầu, một người đàn ông tên là Hùng hỏi tất cả những người có mặt, kể cả* *vợ mình, là họ đã bắt tay được bao nhiêu lần. Họ nhận thấy rằng chín người được hỏi đều trả lời các con số khác nhau. Như vậy vợ của Hùng đã bắt tay bao nhiêu lần?*

Lời giải. Mỗi một người khách bắt tay không quá 8 lần. Vì câu trả lời của 9 người là các số khác nhau nên các số đó phải là 0,1,2,3,4,5,6,7 và 8. Người bắt tay 8 lần phải là vợ (hoặc chồng) của người không bắt tay lần nào (nếu ngược lại thì người đó không bắt tay 8 lần mà nhiều nhất chỉ là 7 lần thôi). Tương tự như vậy người bắt tay 7 lần có người vợ (hoặc chồng) bắt tay một lần, người bắt tay 6 lần có người vợ (hoặc chồng) bắt tay 2 lần, người bắt tay 5 lần có người vợ (hoặc chồng) bắt tay 3 lần. Chỉ còn lại một người duy nhất bắt tay 4 lần, đó chính là người vợ của Hùng. ☺

▷ **1.10.** *Một câu chuyện cổ tích kể lại rằng: Một lần vua Hùng vương 18 có mời các quan trong triều họp ngồi quanh một cái bàn tròn. Theo lệnh của vua, một cận thần đã viết tên của mỗi quan trên bàn trước chiếc ghế mà ông ta phải ngồi. Các quan trong triều không được báo trước nên họ đã ngồi không theo sắp xếp đã định mà chiếm chỗ một cách bất kỳ. Chứng minh rằng ông cận thần có thể quay chiếc bàn sao cho ít nhất có hai ông quan ngồi đúng vị trí tên của mình ?*

Lời giải. Đặt số lượng các quan là n. Khi đó mặt bàn có n trạng thái, với các trạng thái này đối diện với các quan là biển đề tên nào đó. Ngoài ra với mỗi một ông quan chỉ có một trạng thái, mà khi ngồi đúng thì ông ấy đối diện với chính tên của mình trên biển đề sẵn. Nghĩa là, nếu mỗi trạng thái của bàn (vì bàn có thể xoay được) ta cho tương ứng với một số bằng số lượng các quan ngồi đúng vị trí tên mình, thì tổng của tất cả những số nhận được (mọi trạng thái bàn) sẽ không nhỏ hơn n. Nhưng một trạng thái đầu tiên của sắp xếp bàn cho tương ứng với 0 (không ai ngồi đúng chỗ). Nếu giả sử trong $n-1$ trạng thái mặt bàn còn lại tương ứng với số nhỏ hơn 2 (tức là chỉ có số 1 hoặc 0), thì tổng của n số nhận được sẽ nhỏ hơn n, điều đó không thể được. Suy ra từ $n-1$ trạng thái mặt bàn còn lại có ít nhất một trạng thái mà hai người sẽ đối diện với chính tên của mình. ☺

1.3. Bài tập

▷ **1.11.** Trong sân cung điện nhà vua hội họp $2n(n \geq 2)$ ông quan, mỗi ông quan đã quen biết không ít hơn n ông có mặt tại đó. Chứng minh rằng người xếp bàn tròn có thể xếp được mỗi bàn 4 người sao cho mỗi người đứng giữa hai người quen của mình.

▷ **1.12.** Một khu rừng thông có dạng hình vuông mỗi chiều 1km. Trong rừng có 4500 cây thông, cây to nhất có đường kính 0,5m. Chứng minh rằng trong khu rừng có ít nhất 60 mảnh đất, diện tích mỗi mảnh $200m^2$, không có một cây thông nào.

▷ **1.13.** Trong một giá sách có 25 ngăn. Ta thấy có một ngăn chứa 10 cuốn, còn các ngăn khác chứa số sách ít hơn. Chứng minh rằng có ít nhất ba ngăn sách chứa cùng số sách như nhau (kể cả những ngăn không có sách).

▷ **1.14.** Tại một thành phố biển xe ôtô được đánh số bằng tổ hợp chữ cái rồi đến dãy số. Chứng minh rằng trên một đoạn đường cứ có 11 chiếc ôtô đi qua thì bao giờ cũng có hai chiếc ôtô có cùng chữ số tận cùng.

▷ **1.15.** Một chiếc hồ lớn được bọc bởi 4 trạm chuyển tiếp sóng thông tin. Giữa hai trạm người ta xây dựng các trung tâm phát sóng và nhận sóng, đường sóng bao phủ lớn nhất là đường tròn có tâm ở trung tâm và đi qua hai trạm. Chứng minh rằng với bốn trung tâm ở các đoạn giữa của từng cặp trạm thì toàn bộ mặt hồ sẽ được phủ sóng thông tin.

CHƯƠNG 2

SỐ HỌC

2.1. Phép chia số tự nhiên

Trong các phép tính trên số nguyên: cộng, trừ, nhân, chia, thì phép chia là rất đặc biệt. Phép chia có hàng loạt tính chất mà tất cả các phép tính còn lại không có. Ví dụ các phép toán đều thực hiện với số 0 được, nhưng riêng phép chia cho số 0 thì không được. Phép chia không chỉ đặc biệt với phép chia cho 0. Với các phép tính cộng, trừ, nhân trên số nguyên cho ta số nguyên, nhưng với phép chia thì tính chất đó không còn đúng vì không phải lúc nào ta cũng nhận được số nguyên sau phép chia. Nhờ những dị biệt của phép chia mà trong toán học xây dựng hẳn một lý thuyết về phép chia những số nguyên. Những ví dụ và bài tập chương này có liên quan mật thiết giữa phép chia và nguyên lý Đirichlê, nên chúng ta nhắc lại định nghĩa phép chia:

Cho a và b là những số nguyên, với $b > 0$. Chúng ta nói rằng a chia hết cho b, ký hiệu là $b|a$, khi tồn tại một số nguyên q sao cho đẳng thức sau đúng $a = bq$.

Chúng ta thường gọi số a là *bội* của b, hoặc b là *ước* của a. Số q gọi là *thương số* của phép chia a cho b. Trong phát biểu định nghĩa trên, nếu không tồn tại một số q nào cả, thì chúng ta nói rằng a

không chia hết cho b và ký hiệu là $b \not| a$.

Từ định nghĩa chúng ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau

1) Với mọi số nguyên $a > 0$ chúng ta có $a|a$, Phép chia hết có tính phản xạ.

2) Nếu $b|a$ và $a|c$ thì $b|c$- phép chia hết có tí nh bắc cầu.

3) Nếu $b|a$ và $b|c$, thì $b|(ac)$.

4) Nếu a, b, m, n là những số nguyên và nếu $c|a$ và $c|b$, thì $c|(ma + nb)$.

Định lý sau đây giữ vai trò quan trọng cho phép chia một số nguyên cho một số nguyên.

Với hai số nguyên bất kỳ a và b sao cho $b > 0$, tồn tại duy nhất những số nguyên q và r thỏa mãn $a = bq + r$ và $0 \leq r < b$.

Còn rất nhiều tính chất khác của số nguyên cũng như số thực nhưng chúng ta không đi theo hướng này, mà chỉ dùng các tính chất của số học và Nguyên lý Đirichlê để giải các bài toán.

2.2. Vídụ

▷ **2.1.** *Cho k là một số tự nhiên, A là tập hợp gồm $k + 1$ số tự nhiên. Chứng minh rằng có ít nhất một hiệu hai phần tử trong A chia hết cho k.*

Lời giải. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ là các phần tử của A, còn $b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}$ là những số dư của phép chia các số trên cho k. Khi đó $a_1 = kc_1 + b_1, a_2 = kc_2 + b_2, \ldots, a_{k+1} = kc_{k+1} + b_{k+1}$,với các số nguyên $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}$ sao cho $0 \leq b_1 \leq k - 1, 0 \leq b_2 \leq k - 1, \ldots, 0 \leq b_{k+1} \leq k - 1$. Một phần tử bất kỳ a_s thuộc A cho tương ứng với số dư b_s của nó.Gọi tập hợp các số dư là B. Như vậy, mỗi phần tử của A được đặt tương ứng với một phần tử của tập hợp B, gồm tất cả các số nguyên từ 0 đến $k-1$. Nhưng số lượng phần tử của A theo giả thiết là $k+1$, còn B có số lượng k. Theo nguyên lý Đirichlê suy ra tồn tại hai phần tử khác nhau của A có cùng số dư. Điều đó nghĩa là, tồn tại hai chỉ số khác nhau s và t với $a_s = kc_s + b_s$ và $a_t = kc_t + b_s$ sau khi trừ đi cho nhau ta được $a_t - a_s = k(c_t - c_s)$. ☺

▷ **2.2.** *Cho A một tập hợp bất kỳ gồm 101 số tự nhiên, mỗi số không lớn hơn 200. Chứng minh rằng trong A có ít nhất hai số mà một số này chia hết cho số kia.*

Lời giải. Mỗi số a của A có thể biểu diễn dưới dạng $a = 2^k b$ với k là số nguyên không âm, còn b là một số lẻ. Với mỗi số a thuộc A cho tương ứng với số b trong sự biểu diễn ở trên. Bằng cách này, mỗi phần tử a của A được đặt tương ứng với một phần tử của tập hợp B gồm các số lẻ giữa 1 và 200. Nhưng tập hợp B chỉ có 100 phần tử vì vậy số phần tử của A lớn hơn số phần tử của B. Ta có thể áp dụng nguyên lý Đirichlê, suy ra tồn tại hai phần tử khác nhau a_1 và a_2 thuộc A mà chúng tương ứng với cùng một số của tập hợp B. Nghĩa là, $a_1 = 2^{k_1} b, a_2 = 2^{k_2} b$ và nếu $k_1 < k_2$, thì số a_2 chia hết cho a_1. ☺

▷ **2.3.** *Cho M là tập hợp bất kỳ gồm 75 số tự nhiện mà mỗi số không lớn hơn 100. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên l nhỏ hơn hoặc bằng 49 tồn tại hai phần tử của M có hiệu là l.*

Lời giải. Gọi các phần tử của M là $x_1, x_2, \ldots, x_{75}$. Ký hiệu A là tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 150. Với mỗi số $1, 2, 3 \ldots, 75$ cho tương ứng với các số $x_1, x_2, \ldots, x_{75}$, còn các số $76, 77, 78, \ldots 150$ lần lượt ứng với $x_1 + l, x_2 + l, \ldots, x_{75} + l$. Vì $x_m \leq 100 (m = 1, 2, \ldots, 75)$ và

$l \leq 49$ thì $x_m + l < 150$. Suy ra mỗi phần tử của A tương ứng với một phần tử của B gồm những số tự nhiên từ 1 đến 149. Vì số phần tử của A lớn hơn số phần tử của B, theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai phần tử khác nhau của A, mà chúng tương ứng với cùng một phần tử của B. Nhưng với các giá trị khác nhau của m từ 1 đến 75 được cho tương ứng với các giá trị khác nhau của x_1 đến x_{75} trong B. Tương tự các giá trị của m ở khoảng 76 đến 150 tương ứng với các giá trị khác nhau trong khoảng còn lại. Từ đó suy ra tồn tại x_m và x_n mà $x_m = x_n + l$, nghĩa là $x_m - x_n = l$. ☺

▷ **2.4.** *Cho $k \geq 1$ và $n \geq 1$ là những số tự nhiên và A là tập hợp gồm $(k-1)n + 1$ số nguyên dương, mỗi số này đều nhỏ hơn hoặc bằng kn. Chứng minh rằng ít nhất có một phần tử của A có thể biểu diễn như tổng của k phần tử trong A.*

Lời giải. Với $k = 1$ bài toán hiển nhiên là đúng, chúng ta giả thiết $k \geq 2$. Ký hiệu m là số nhỏ nhất thuộc A. Dễ thấy rằng $m \leq n$ và tồn tại đúng $n - m$ số thuộc A mà chúng lớn hơn m nhưng không vượt quá kn.

Để chứng minh bài toán chúng ta tìm hai số x và y thuộc A sao cho $x = y + (k-1)m$; nghĩa là biểu diễn một số nào đó thuộc A thành tổng k số hạng thuộc A trong đó có $k-1$ số hạng bằng m. Chỉ cần tìm số x thuộc A mà $x > (k-1)m$ và $x - (k-1)m$ thuộc A.

Thật vậy, trong khoảng $\Delta = ((k-1)m, kn]$ có $kn - (k-1)m = k(n-m) + m$ số nguyên. Vì $k \geq 2$, nên $(k-1)m \geq m$, theo nhận xét ban đầu suy ra có nhiều nhất $n - m$ số trong Δ không thuộc A. Điều này nghĩa là A chứa ít nhất $s = k(n-m) + m - (n-m) = (k-1)(n-m) + m$ số. Nhưng $s \geq n$, vì $(k-2)(n-m) \geq 0$. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_s$ thuộc A, với $(k-1)m < a_i \leq kn, i = 1, 2, \ldots, s$. Khi đó những hiệu $a_1 - (k-1)m, a_2 - (k-1)m, \ldots, a_s - (k-1)m$ là những số nguyên khác nhau trong khoảng $[1, kn]$. Nếu một số nào đó trong chúng không thuộc A, thì theo nguyên lý Đirichlê chúng ta nhận được $s \leq n-1$, vì ngoài A có đúng $n-1$ số trong khoảng này. Như vậy trái với bất đẳng thức đã chứng minh $s \geq n$. Suy ra tồn tại một hiệu $a_i - (k-1)m$ thuộc A. ☺

▷ **2.5.** *Chứng minh rằng từ $n+1$ số dương khác nhau nhỏ hơn $2n$, có thể chọn được ba số sao cho tổng hai số trong chúng bằng số thứ ba.*

Lời giải. Ký hiệu $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ là những số đã cho. Chúng ta xét các hiệu số $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ và các số $a_2, a_3 \ldots, a_{n+1}$. Vì tất cả các số này đều nhỏ hơn $2n$ nên các số trên chỉ nằm trong khoảng $1, 2, \ldots, 2n-1$. Như vậy chúng ta sẽ tìm được một số ở nhóm thứ nhất bằng một số ở nhóm thứ hai: $a_k - a_1 = a_l$, suy ra $a_k = a_1 + a_l$. ☺

▷ **2.6.** *Chứng minh rằng với một số bất kỳ n tồn tại một số có dạng $\underbrace{111\ldots000}_{n \text{ chữ số}}$ mà chia hết cho n.*

Lời giải. Chúng ta xét những số $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots111}_{n \text{ chữ số}}$ và những số dư khi chia dãy số trên cho n. Vì dãy số đã cho gồm n phần tử, nên những số dư dương khác nhau khi chia chúng cho n có số lượng $n-1$. Có thể giả thiết không có một số nào trong dãy trên chia hết cho n vì nếu ngược lại thì bài toán đã được giải. Khi đó sẽ có hai số trong chúng, ví dụ $\underbrace{111\ldots111}_{k \text{ chữ số}}$ và $\underbrace{111\ldots111}_{l \text{ chữ số}}$, $l > k$, mà khi chia chúng cho n sẽ cho cùng một số dư. Do đó $l - k =$

$$\underbrace{111\ldots000}_{\text{(l-k chữ số 1, k chữ số 0)}} \quad \text{sẽ chia hết cho } n.$$ ☺

▷ **2.7.** *Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng $111\ldots111$ mà chia hết cho p.*

Lời giải. Ta xét dãy số $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{\text{(p chữ số)}}$. Nếu trong dãy trên không có số nào chia hết cho p, thì ta cho tương ứng mỗi số với số dư của phép chia. Tập hợp các số dư chỉ có $1, 2, \ldots, p-1$ gồm $p-1$ phần tử (vì 0 không thể có trong tập này). Nhưng vì chúng ta có p số ở dạng trên, nên theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai số có cùng số dư. Giả sử các số đó là $\underbrace{111\ldots1}_{\text{(m chữ số)}}$ và $\underbrace{111\ldots1}_{\text{(n chữ số)}}$ với $m > n$. Khi đó $1 \le n < m \le p$. Vậy

$$\underbrace{111\ldots1}_{\text{(m chữ số)}} - \underbrace{111\ldots1}_{\text{(n chữ số)}} = \underbrace{111\ldots000}_{\text{(m-n chữ số 1, n chữ số 0)}}$$
$$= \underbrace{111\ldots1}_{\text{(m-n chữ số)}} .10^n$$

Tích này chia hết cho p vì $(p, 10) = 1$, suy ra $\underbrace{111\ldots1}_{\text{(m-n chữ số 1)}}$ chia hết cho p và nó cũng nằm trong dãy ở trên. Mà $1 \le m-n \le p$ mâu thuẫn với giả thiết không có số nào trong dãy chia hết cho p.
☺

▷ **2.8.** *(Đề thi Olympic toán thế giới lần thứ 14) Cho M là tập hợp bất kỳ gồm 10 số tự nhiên, mỗi số không lớn hơn 100. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con của M mà tổng của các phần tử trong chúng bằng nhau.*

Lời giải. Có thể chứng minh nếu tồn tại hai tập thỏa mãn kết luận của bài toán, thì ta có thể chọn được hai tập con có cùng tính chất ấy nhưng không giao nhau. Thật vậy, Cho X, Y là hai tập con của M có tổng các phần tử bằng nhau. Chúng ta ký hiệu X_1 gồm các phần tử của X mà không thuộc Y. Tương tự như vậy Y_1 gồm các phần tử của Y mà không thuộc X. Rõ ràng X_1 và Y_1 có tổng các phần tử bằng nhau mà không giao nhau. Gọi A là tập hợp mọi tập hợp con không rỗng của M. Số lượng phần tử của A là $2^{10} - 1 = 1023$. Chúng ta xét tổng S các phần tử của một tập hợp con như vậy, rõ ràng $S \leq 91 + 92 + \cdots + 100 < 10.100 = 1000$. Như vậy tồn tại không quá 1000 tổng khác nhau. Ký hiệu B là tập hợp tất cả các tổng như vậy. Do đó số lượng phần tử của B nhỏ hơn 1000 và nhỏ hơn số lượng phần tử của A. Đặt tương ứng mỗi phần tử của tập hợp A với tổng các phần tử của nó. Ta thấy rằng có thể áp dụng nguyên lý Đirichlê ở đây. Suy ra tồn tại ít nhất hai tập hợp con khác nhau có cùng một tổng các phần tử. ☺

▷ **2.9.** *(Đề thi học sinh giỏi toán Cấp II toàn quốc 1983) Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.*

Lời giải. Cho k lấy giá trị từ 1 đến $10^5 + 1$ rồi thay vào biểu thức $1983^k - 1$ sẽ nhận được $10^5 + 1$ giá trị khác nhau. Chia $10^5 + 1$ số vừa nhận ở trên cho 10^5, sẽ được nhiều nhất là 10^5 số dư. Do đó theo nguyên lý Đirichlê phải có ít nhất hai số cho cùng một số dư. Giả sử đó là số $1983^m - 1$ và $1983^n - 1 (m > n)$. Thế thì $(1983^m - 1) - (1983^n - 1)$ chia hết cho 10^5 mà $(1983^m - 1) - (1983^n - 1) = (1983^m - 1983^n) = 1983^n(1983^{m-n} - 1)$. Nhưng 1983 và 10^5 nguyên tố cùng nhau, do vậy phải có $(1983^{m-n} - 1)$ chia hết cho 10^5. Số $k = m - n$ thỏa mãn điều kiện đầu bài. ☺

▷ **2.10.** *Chứng minh rằng tồn tại những số nguyên a, b và c, không đồng thời bằng 0 và giá trị tuyệt đối của mỗi số không quá 1000000, thỏa mãn $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.*

Lời giải. Đặt S là tập hợp của 10^{18} số thực $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$ với mọi r, s, t thuộc $\{0, 1, 2, \ldots, 10^6 - 1\}$ và đặt $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}d)10^6$. Khi đó mỗi x trong S đều nằm trong khoảng $0 \leq x < d$. Chia đoạn này thành $10^{18} - 1$ phần bằng nhau, mỗi đoạn nhỏ có độ dài $e = \dfrac{d}{10^{18} - 1}$. Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai số trong 10^{18} số của S nằm trong cùng một đoạn nhỏ. Hiệu của hai số này ký hiệu là $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ đó chính là các số a, b, c vì $e < \dfrac{10^7}{10^{18}} = 10^{-11}$. ☺

2.3. Bài tập

▷ **2.11.** Cho A là tập hợp bất kỳ gồm 201 số tự nhiên, mỗi số không vượt quá 300. Chứng minh rằng A chứa ít nhất hai số, mà tỷ số của chúng là lũy thừa bậc ba.

▷ **2.12.** Cho k là số tự nhiên bất kỳ, còn a và b là những số nguyên sao cho $a \leq b$ và $b - a < 2k - 2$. Chứng minh rằng nếu M là tập hợp k số tự nhiên nằm trong khoảng $[a, b]$, và l là số tự nhiên thỏa mãn $1 \leq l \leq 2k + a - b - 2$, thì có ít nhất một hiệu những phần tử của M trùng với l.

▷ **2.13.** Cho dẫy số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{41}$, mà mỗi phần tử chỉ được tạo bởi số 1 và, số 2, trong đó có ít nhất 21 số chỉ được tạo bởi các số 1. Chứng minh rằng tồn tại một số phần tử liên tiếp của dãy có tổng bằng đúng 20.

▷ **2.14.** Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên n, sao cho số

$\underbrace{111\ldots1}_{(n \text{ chữ số})}$ chia hết cho 139. (Bài toán còn đúng nếu ta thay 139 bằng một số nguyên tố cùng nhau với 10).

▷ **2.15.** Chứng minh rằng trong mọi số tạo bởi 100 chữ số N tồn tại một số chia hết cho 1967.

▷ **2.16.** Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được số 19971997...19970...0 chia hết cho 1998.

▷ **2.17.** Chứng minh rằng có một số tự nhiên chia hết cho 1997, mà bốn chữ số cuối cùng của nó là 1998.

▷ **2.18.** Chứng minh rằng nếu các số nguyên m và n nguyên tố cùng nhau thì tìm được số tự nhiên k sao cho $m^k - 1$ chia hết cho n.

CHƯƠNG 3

DÃY SỐ

3.1. Nguyên lý Đirichlê cho dãy số vô hạn

Trong phần này chúng ta xét nguyên lý Đirichlê dưới dạng:

Nếu có hữu hạn những ngăn kéo mà chúng ta đặt vô hạn những vật vào đó, thì ít nhất có một ngăn kéo chứa vô hạn những vật đã có.

Chúng ta dễ có cảm tưởng rằng nguyên lý này là hiển nhiên nên ít chú ý đến nó. Bằng phản chứng có thể chứng minh nguyên lý này là đúng. Trong số học, tập hợp có liên quan đến vô hạn phần tử là **dãy số**. Chúng ta biết rất nhiều dãy số đẹp như dãy cấp số cộng, dãy cấp số nhân, dãy các số nguyên tố, hoặc dãy Fibonaxi,...Chương này chúng ta chỉ quan tâm đến áp dụng điều phát biểu trên để giải các bài toán liên quan đến dãy số. Những tập vô hạn trong các bài toán dưới đây ta xét như các dãy số.

3.2. Ví dụ

▷ **3.1.** *Xét dãy số* $6, 6^2, 6^3, 6^4, 6^5, \ldots, 6^n, \ldots$ *và viết 4 chữ số cuối cùng của các số này* $0006, 0036, 0216, 1296, 7776, \ldots$. *Chứng minh rằng bắt đầu từ một số* n_0 *nào đó dãy vừa lập là dãy tuần hoàn.*

Lời giải. Vì tồn tại hữu hạn số lượng (10^4) cách chọn khác nhau các số có 4 chữ số, nên trong dãy đã cho chắc chắn tìm được hai cách chọn có cùng 4 chữ số cuối. Có nghĩa là tìm được hai số n_0 và $n_0 + t$ mà với chúng thì 6^{n_0} và 6^{n_0+t+1} có cùng 4 chữ số cuối ($6^{n_0+t+1} - 6^{n_0} = 10^4.6k$). Nói chung, chữ số 6^n và 6^{n+t} với bất kỳ $n > n_0$ sẽ có cùng 4 chữ số cuối ($6^{n+t} - 6^n = 10^4.6^{n-n_0}$). ☺

▷ **3.2.** *(Đề thi Toán Olympic quốc tế lần 17 năm 1975) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ là dãy tăng ngặt các số tự nhiên. Chứng minh rằng vô hạn các phần tử a_n của dẫy trên có thể biểu diễn dưới dạng $a_n = xa_p + ya_q$,ở đây x và y là những số nguyên dương và $p \neq q$.*

Lời giải. Nếu $a_1 = 1$ kết luận của bài toán là hiển nhiên. Thật vậy, với mọi $n \geq 3$ số hạng a_n có biểu diễn dạng $a_n = a_{n-1} + (a_n + a_{n-1}) = 1.a_{n-1} + (a_n - a_{n-1}).a_1$ có tính chất mong muốn. Chúng ta sẽ chứng minh tồn tại chỉ số p lớn hơn 1 sao cho vô hạn các số hạng của dãy đã cho có thể viết dưới dạng $xa_p + ya_1$ với các số nguyên dương thích hợp x và y. Mỗi số hạng của dãy ta đặt tương ứng với số dư của nó khi chia chính nó cho a_1. Tập hợp tất cả các số hạng của dãy là vô hạn, còn tất cả các khả năng của số dư khi chia các số hạng cho a_1 là hữu hạn. Điều đó chứng tỏ rằng vô hạn phần tử

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \text{ với } n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

cho cùng một số dư r khi chia cho a_1. Không mất tính tổng quát ta giả thiết $n_1 > 1$, vì trong trường hợp ngược lại ta xét các số $a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ cũng là dãy vô hạn và cho cùng số dư r khi chia cho a_1. Với mọi $k = 1, 2, \ldots$ tồn tại số nguyên dương x_k sao cho $a_{n_k} = x_k a_1 + r$. Khi đó $a_{n_k} - a_{n_1} = (x_k a_1 + r) - (x_1 a_1 + r) = (x_k - x_1)a_1$ suy ra với mọi $k \geq 2$ ta có đẳng thức $a_{n_k} = a_{n_1} + (x_k - x_1)a_1 = 1.a_{n_1} + (x_k - x_1)a_1$. Nghĩa là, những số $a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$., có biểu diễn và các tính chất như bài toán đòi hỏi. Thật vậy, chỉ số 1 và n_1

khác nhau vì theo cách chọn trên n_1 thực sự lớn hơn 1. Chỉ còn phải khẳng định rằng số $x_k - x_1$ là số nguyên dương với $k \geq 2$, điều đó đúng vì từ $n_1 < n_k$ suy ra $x_1 < x_k$. ☺

▷ **3.3.** *Cho số tự nhiên bất kỳ k. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố p và một dãy số tự nhiên tăng ngặt $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sao cho tất cả các phần tử của dãy $p + ka_1, p + ka_2, \ldots, p + ka_n, \ldots$ là những số nguyên tố.*

Lời giải. Ký hiệu P là tập hợp tất cả các số nguyên tố. Với mọi $i = 0, 1, \ldots, k-1$ ký hiệu P_i là tập hợp các số nguyên tố mà khi chia cho k có số dư i. Dễ thấy rằng mọi số nguyên tố nằm trong một trong các tập hợp $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$. Bởi vì số nguyên tố là vô hạn, vậy ít nhất phải có một trong số các tập hợp $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ chứa vô hạn số nguyên tố. Giả sử P_i chứa vô hạn số và ký hiệu p là phần tử nhỏ nhất của nó. Khi đó mọi số x thuộc P_i có dạng $x = p + ka$ với một số tự nhiên a. Lấy $x_1, x_2, x_3, \ldots$ là các phần tử của P_i xếp theo thứ tự lớn dần. Với mọi số tự nhiên n đặt $a_n = \dfrac{x_n - p}{k}$. Dễ thấy rằng số nguyên tố p và dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ có tính chất mong muốn. ☺

▷ **3.4.** *Cho f là đa thức k đối số với hệ số nguyên và $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ là dãy những số nguyên thỏa mãn hệ thức $a_{n+1} = f(a_,a_2, \ldots, a_{n-k+1})$, với mọi số nguyên n, k mà $n \geq k$. Chúng ta xét số dương bất kỳ m và với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Ký hiệu $\overline{a_n}$ là số dư không âm nhỏ nhất của a_n theo mô đun m. Chứng minh rằng dãy $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$. là dãy tuần hoàn.*

Lời giải. Chúng ta sẽ sử dụng khẳng định sau: Nếu g là đa thức k đối số với hệ số nguyên và $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k$ là các số nguyên sao cho $x_1 \equiv y_1 \pmod{m}, x_2 \equiv y_2 \pmod{m}, \ldots, x_k \equiv y_k \pmod{m}$, thì $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv g(y_1, y_2, \ldots, y_k) \pmod{m}$.

Mọi số hạng của dãy bằng một trong các số $\overline{a}_1, \overline{a}_1, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_n, \ldots$ $0, 1, \ldots, m-1$. Chúng ta xét các bộ sắp thứ tự gồm k phần tử

$(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k), (\overline{a}_2, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_{k+1}), \ldots, (\overline{a}_n, \overline{a}_{n+1} \ldots, \overline{a}_{n+k-1})..$

Có tất cả vô hạn bộ sắp như vậy, nhưng số lượng các bộ k số $(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}, \ldots, \overline{\alpha_k})$, với $0 \leq \alpha_i \leq m-1, i = 1, 2 \ldots, k$ là hữu hạn (bằng m^k theo lý thuyết tổ hợp). Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai chỉ số i và $j, i < j$ sao cho

$$\overline{a}_i = \overline{a}_j, \overline{a}_{i+1} = \overline{a}_{j+1}, \ldots, \overline{a}_{i+k-1} = \overline{a}_{j+k-1}$$

hoặc là

$$x_1 \equiv y_1 \pmod{m}, x_2 \equiv y_2 \pmod{m}, \ldots, x_k \equiv y_k \pmod{m}.$$

Từ đây suy ra dãy $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_n} \ldots$ là tuần hoàn (chu kỳ của nó là ước số của $j-i$). Thật vậy, vì f là đa thức với hệ số nguyên nên theo cách chứng minh trên chúng ta có

$$f(a_{i+k-1}, a_{i+k-2}, \ldots, a_i) \equiv f(a_{j+k-1}, a_{j+k-2}, \ldots, a_j) \pmod{m}$$

$\Longrightarrow a_{i+k} \equiv a_{j+k} \pmod{m}$ hoặc là $\overline{a}_{i+k} \equiv \overline{a}_{j+k}$. Biến đổi một chút dễ thấy rằng với mọi $n \geq i$ ta có đẳng thức sau $\overline{a}_{n+(i-j)} \equiv \overline{a}_n$. ☺

▷ **3.5.** *Cho dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. được xác định theo công thức sau*

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}, n \geq 3.$$

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m tồn tại hai phần tử liên tiếp của dãy mà chúng đều chia hết cho m.

Lời giải. Công thức hồi quy trên có thể viết lại

$$x_{n-2} = x_{n+1} - 2x_{n-1} \tag{3.1}$$

Từ đó chỉ ra rằng dãy có khả năng phát triển về phía trái, tức là xác định x_n với $n \leq 0$. Ví dụ với $n = 2, 1, 0$ chúng ta nhận được $x_0 = 0, x_{-1} = 0, x_{-2} = 1$. Như mục 3.4 chỉ ra rằng dãy

$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \ldots$ gồm những số dư tương ứng $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ theo môđd un m, là dãy tuần hoàn. Từ công thức (3.1) suy ra mỗi phần tử của dãy $\{x_n\}$ và suy ra cả $\{\overline{x_n}\}$ xác định duy nhất từ 3 phần tử trước nó. Khi đó nếu $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ là phần chu kỳ của dãy $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \ldots$ thì phần này sẽ chuyển động tuần hoàn về phía trái của dãy $\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$ và sẽ có dạng

$$\ldots, r_1, r_2, \ldots, r_k, r_1, r_2, \ldots, r_k, r_1, r_2, \ldots, r_k \ldots \tag{3.2}$$

Bây giờ ta chú ý rằng $x_{-1} = x_0 = 0$, suy ra $\overline{x_{-1}} = \overline{x_0} = 0$. Từ (3.2) suy ra rằng dãy các số dư theo môđd un m chứa vô số cặp phần tử liên tiếp bằng không. Nói cách khác tồn tại vô số các cặp số liên tiếp của dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ mà mỗi phần tử trong cặp đều chia hết cho m. ☺

▷ **3.6.** *Dãy số Fibonaxi được định nghĩa bằng các đẳng thức* $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 1$. *Chứng minh rằng ít nhất một trong 1.000.000.000 phần tử đầu tiên của dãy chia hết cho 10.000.*

Lời giải. Tương tự như 3.5 chúng ta xét các số dư của các số trong dãy đã cho khi chia cho 10.000. Ký hiệu số dư đứng ở vị trí thứ k khi chia cho 10 000 là r_k. Khi đó thì $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 2, r_4 = 3, \ldots\ldots . r_k = r_{k-1} + r_{k-2}$. Rõ ràng có 10.000 số dư khác nhau do đó có $10000^2 = 100000000$ (trăm triệu) cặp số dư khác nhau. Xét 100000001 cặp số dư $(r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, r_4) \ldots$ $\ldots (r_{100000001}, r_{100000002})$. Theo nguyên lý Đirichlê trong số này có ít nhất 2 cặp số trùng nhau, tức là tìm được hai số n và p với n, p đều nhỏ hơn 100000002,n nhỏ hơn p sao cho $r_n = r_p, r_{n+1} = r_{p+1}$. Nhưng nếu biết số dư của tổng hai số và số dư của một số thì số dư kia cũng tính được. Vì vậy ta có $r_{n-1} = r_{p-1}, r_{n-2} = r_{p-2}, \ldots .$ cho đến khi $r_2 = 1 = r_{p-n+2}, r_1 = 1 = r_{p-n+1}$, Áp dụng công thức số dư hồi qui ở trên ta có $r_{p-n} = 0$ với $p - n \leq 100000001 - 1 = 100000000$. Nghĩa là số đứng ở vị trí $p - n$ sẽ thỏa mãn điều kiện bài ra, chia hết cho 10 000. ☺

▷ **3.7.** *(Định lý Fecma) Nếu một số nguyên tố p không chia hết số nguyên a, thì đẳng thức sau đúng* $a^{p-1} \equiv 1(\mod p)$.

Lời giải. Chúng ta chứng minh mệnh đề tổng quát hơn. Cho $m > 1$ là số tự nhiên bất kỳ và a là số nguyên tố cùng nhau với m. Chúng ta xét dãy những lũy thừa liên tiếp của a

$$a^1, a^2, a^3, \ldots \tag{3.3}$$

và ký hiệu

$$r_1, r_2, r_3, \ldots \tag{3.4}$$

là những số dư tương ứng của (3.3) khi chia cho m, nghĩa là

$$a_k \equiv r_k \pmod m, 1 \leq r_k \leq m - 1.$$

Khi đó số lượng các số trong (3.3) là vô hạn, còn những số ở (3.4) chỉ có thể nhận những giá trị trong $1, 2, 3, \ldots, m - 1$ nên số lượng là hữu hạn. Suy ra theo nguyên lý Đirichlê, giữa những số dư r_k sẽ có ít nhất hai số trùng nhau; nói cách khác tồn tại hai chỉ số i và j với $i \neq j$ sao cho $r_i = r_j$. Khi đó chúng ta có $a^i \equiv a^j(\mod m)$. Theo giả thiết $(a, m) = 1$, với $i \neq j$ chúng ta nhận được $a^{i-j} \equiv 1(\mod m)$.

Chúng ta có kết luận tồn tại số tự nhiên l sao cho đẳng thức sau đây đúng:

$$a^l \equiv 1 \pmod m \tag{3.5}$$

- Số l trong (3.5) không xác định duy nhất, thậm chí còn tồn tại vô số số tự nhiên l thỏa mãn (3.5).

- Trong trường hợp $m = p$ là số nguyên tố, Fecma tìm ra l có thể chọn là số $p - 1$.

-Trường hợp m bất kỳ thì Ơle chứng minh rằng l có thể chọn là hàm chỉ số của m (chúng ta không xem xét vấn đề này ở đây, độc giả có thể tìm trong bất cứ cuốn sách số học nào). ☺

▷ **3.8.** *Cho $x_1, x_2, x_3, \ldots$ là dãy vô hạn các số nguyên và k là một số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại dãy số gồm những phần tử liên tiếp của dãy, mà tổng của chúng chia hết cho k.*

Lời giải. Chúng ta có thể giới hạn lại, giữa mọi bộ k phần tử liên tiếp của dãy có thể chọn được một số phần tử có tính chất mong muốn. Để đơn giản ta xem xét k phần tử đầu tiên $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$. Chúng ta xét tổng

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, S_3 = x_1 + x_2 + x_3, \ldots, S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

Nếu một tổng nào đó trong số trên chia hết cho k, thì bài toán được giải. Ngược lại, các số $S_1, S_2, \ldots, S_k$ (có số lượng k) khi chia cho k được các số dư $1, 2, 3, \ldots, k-1$. Từ nguyên lý Đirichlê suy ra có một cặp chỉ số i và j, $1 \leq i < j \leq k$, mà các tổng S_i và S_j cho cùng một số dư khi chia cho k. Khi đó tổng các phần tử liên tiếp $x_{i+1}, x_{n+2}, \ldots, x_j$ của dãy đã cho chia hết cho k, vì $x_{i+1} + x_{n+2} + \cdots + x_j = S_j - S_i$. ☺

▷ **3.9.** *Cho dãy vô hạn các chữ số. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, nguyên tố cùng nhau với 10, trong dãy vô hạn trên tồn tại một nhóm chữ số liên tiếp, mà số tạo bởi các chữ số trong nhóm (viết theo thứ tự chỉ số lớn đứng trước) chia hết cho n.*

Lời giải. Cho dãy các chữ số $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Chúng ta xét các số $A_1 = \overline{a_1}, A_2 = \overline{a_2 a_1}, \ldots, A_n = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}, \ldots, A_{n+1} = \overline{a_{n+1} \ldots a_1}$. Vì số lượng những số này là $n+1$, còn số lượng khả năng của số dư khi chia chúng cho n là n, nên theo nguyên lý Đirichlê tồn tại ít nhất hai số cho cùng một số dư ta ký hiệu chúng là A_i và A_j, $(i < j)$. Khi đó hiệu $A_j - A_i$ chia hết cho n. Hay nói cách khác

$$A_j - A_i = \overline{a_j \ldots a_1} - \overline{a_i \ldots a_1} = \overline{a_j \ldots a_{i-1}}.10^{j-i+1}$$

vì $(n, 10) = 1$, nên $\overline{a_j \ldots a_{i-1}}$ chia hết cho n. ☺

▷ **3.10.** *Cho k là số nguyên dương bất kỳ và*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

là những chuỗi số nguyên bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp chỉ số (i, j), với $i < j$ sao cho mỗi tổng

$$x_{i+1} + x_{n+2} + \cdots + x_j; y_{i+1} + y_{n+2} + \cdots + y_j$$

đều chia hết cho k.

Lời giải. Chỉ cần chứng minh rằng trong bộ số k^2 phần tử liên tiếp của 2 dãy trên có thể chọn được tổng với tính chất đã chỉ ra. Vì vậy chúng ta chỉ quan tâm đến k^2 phần tử đầu tiên của các chuỗi đã cho. Bằng cách tổng quát hóa cách giải bài toán 3.8, lấy tổng

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, S_3 = x_1 + x_2 + x_3, \ldots, S_{k^2} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k^2}$$

$$T_1 = y_1, T_2 = y_1 + y_2, T_3 = y_1 + y_2 + y_3, \ldots, T_{k^2} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{k^2}$$

Với mỗi $m = 1, 2, 3, \ldots, k^2$ đặt tương ứng cặp (S_m, T_m) với cặp (RS_m, RT_m) của những số dư, khi chia S_m và T_m cho k. Vì RS_m và RT_m là một trong các số $0, 1, 2, \ldots, k-1$, nên tổ hợp tất cả các dạng khác nhau (RS_m, RT_m) là không quá k^2. Nếu tồn tại một chỉ số m, sao cho (RS_m, RT_m) trùng với $(0, 0)$, thì mọi tổng $S_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ và $T_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ đều chia hết cho k. Vì nếu không như vậy, thì các cặp số (RS_m, RT_m), $m = 1, 2, \ldots.., k^2$ có nhiều nhất là $k^2 - 1$ khả năng khác nhau. Nhưng số lượng những cặp số này là k^2 suy ra có ít nhất hai trong chúng bằng nhau. Nói cách khác, tồn tại hai chỉ số i và j, sao cho $1 \leq i < j \leq k^2$ và $(RS_i, RT_i) = (RS_j, RT_j)$. Trong trường hợp này mỗi số $x_{i+1} + x_{n+2} + \cdots + x_j = S_j - S_i; y_{i+1} + y_{n+2} + \cdots + y_j = T_j - T_i$ đều chia hết cho k. ☺

Chú ý: Đây là bài toán tổng quát hóa bài toán 3.8. Mở rộng kết quả này các bạn hãy xem và làm bài tập 3.15.

3.3. Bài tập

▷ **3.11.** Có tồn tại luỹ thừa của số 3 mà các chữ số cuối cùng của nó là 0001 không ?

▷ **3.12.** Cho F là tập hữu hạn những số nguyên dương và $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ là hai dẫy vô hạn những phần tử thuộc F. Chứng minh rằng tồn tại những chỉ số i và $j, i < j$ sao cho tích của $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j$ và $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_j$ là một số có lũy thừa bậc k.

▷ **3.13.** Cho $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ là dãy những số nguyên xác định bằng công thức $u_1 = 39, u_2 = 45, u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n (n \geq 1)$. Chứng minh rằng 1986 chia hết cho vô số những phần tử trong dãy này.

▷ **3.14.** Cho k là một số tự nhiên. Dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ thỏa mãn các đẳng thức $x_0 = 0, x_1 = 1$ và $x_n = \dfrac{1}{k}(x_{n+1} - x_{n-1})$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng giữa những số $x_1, x_2, \ldots, x_{1986}$ tồn tại hai số mà tích của chúng chia hết cho tich 19.86.

▷ **3.15.** Cho k là số nguyên dương và

$$x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots$$

$$x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s, \dots$$

là s dãy số nguyên. Khi đó tồn tại vô hạn các cặp chỉ số (i, j), với $i < j$ sao cho các tổng sau đây

$$x_{i+1}^1 + x_{i+2}^1 + \cdots + x_j^1$$
$$x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \cdots + x_j^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{i+1}^s + x_{i+2}^s + \cdots + x_j^s$$

đều chia hết cho k.

CHƯƠNG 4
HÌNH HỌC

4.1. Ví dụ

Trong số các bài toán hình học trong toán học tổ hợp có một lớp bài toán giải bằng phương pháp Đirichlê rất thuận tiện và rõ ràng. Bạn đọc có thể tìm thấy những cách giải khác, nhưng vì mục đích chuyên đề phương pháp chúng ta đang xét nên chúng ta chỉ khảo sát các ví dụ sau.

▷ **4.1.** *Trong hình vuông với cạnh 1 đơn vị được chọn 101 điểm. Chứng minh rằng có năm điểm trong các điểm đã chọn có thể phủ bởi đường tròn bán kính* $\frac{1}{7}$.

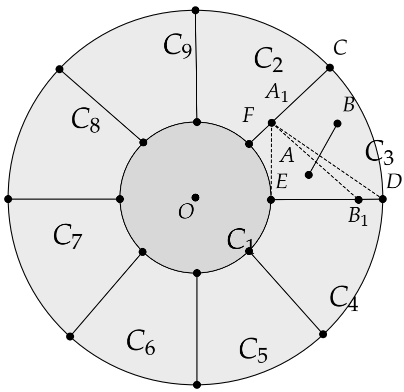
Lời giải. Chia hình vuông ra ra 25 hình vuông con có cạnh 0,2. Những hình vuông này có số lượng 25 và vì tất cả số điểm đã chọn là 101, thì ít nhất có một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 5 điểm. Mà bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông nhỏ bằng $\frac{1}{5\sqrt{5}} < \frac{1}{7}$. ☺

▷ **4.2.** *Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.*

Lời giải. Ký hiệu F là mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Nếu số cạnh của F là k, thì khối đa diện có ít nhất $k+1$ mặt (vì có k mặt có cạnh chung với F), còn số lượng các cạnh của mỗi mặt là một trong các số $3, 4, \ldots, k$. Theo nguyên lý Đirichlê có ít nhất hai mặt có cùng số cạnh. ☺

▷ **4.3.** *Trong phần trong của một hình tròn với đường kính 5 đơn vị, người ta chọn bất kỳ 10 điểm. Chứng minh rằng ít nhất có hai điểm trong các điểm đã chọn có khoảng cách nhỏ hơn 2.*

Lời giải. Chia đường tròn thành 8 rẻ quạt bằng nhau với góc ở tâm mỗi rẻ quạt là 45^0 và dựng đường tròn đồng tâm C_1 với bán kính 1. Ký hiệu $C_2, C_3, \ldots, C_9$ là những hình từ tám rẻ quạt trừ đi phần mà đường tròn C_1 đã chiếm. Có thể chứng minh được bất cứ hai điểm nào thuộc một trong chín hình trên đều có khoảng cách nhỏ hơn 2. Thật vậy, nếu hai điểm rơi vào đường tròn đồng tâm thì khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2. Giả sử hai điểm A và B rơi vào một $CDEF$ trong số tám rẻ quạt. Trên bán kính OC và OD lấy tương ứng hai điểm A_1 và B_1 sao cho $OA_1 = OA; OB_1 = OB$, nghĩa là $AB \le A_1B_1$ (theo định lý hàm cosin, bởi vì $\widehat{AOB} \le \widehat{A_1OB_1}$). Để ý rằng $A_1B_1 \le \max\{A_1D, A_1E\}$. Thật vậy điểm B_1 nằm trong đoạn thẳng tạo bởi hình chiếu H của A_1 trên OD và ít nhất một trong hai điểm D, E, chẳng hạn điểm D. Bởi vậy hình chiếu HD của đường xiên A_1D không bé hơn hình chiếu HB_1 của A_1B_1 trên OD. Nghĩa là $A_1B_1 \le A_1D$. Cũng chứng minh như trên ta có



Hình 4.1:

$DA_1 \leq \max\{DF, DC\}$, $EA_1 \leq \max\{EF, EC\}$. Từ sự đánh giá

$$\begin{aligned} EF^2 < CD^2 &= OC^2 + OD^2 - 2.OC.OD.\cos 45^0 \\ &= 2\frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{2}}{4} < 3,75 < 4 \end{aligned}$$

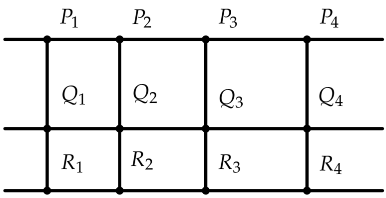
và

$$\begin{aligned} EC^2 = FD^2 &= OF^2 + OD^2 - 2OF.OD.\cos 45^0 \\ &= 1 + \frac{25}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{2} < 7,25 - \frac{5.1,4}{2} = 3,75 < 4, \end{aligned}$$

ta được $AB \leq A_1B_1 \leq \max\{DF, DC, EF, EC\} < 2$. ☺

▷ **4.4.** *Giả sử mỗi điểm trong một mặt phẳng được sơn bằng một trong hai mầu đỏ và xanh. Chứng minh rằng có một hình chữ nhật nào đó trong mặt phẳng mà bốn đỉnh của nó cùng mầu.*

Lời giải. Dễ thấy theo nguyên lý Đirichlê, một tập bất kỳ 7 điểm mà sơn một trong hai mầu thì ít nhất có 4 điểm cùng mầu. Trên một đường thẳng có 7 điểm thì chúng ta phải có 4 điểm thẳng hàng cùng mầu, giả sử đó là P_1, P_2, P_3, P_4 có cùng mầu đỏ. Ta chiếu những điểm này xuống hai đường thẳng song song với đường chứa chúng tạo ra (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) và (R_1, R_2, R_3, R_4) tương ứng với (P_1, P_2, P_3, P_4). Những điểm này tạo ra một số hình chữ nhật, chúng ta chú ý đến các hình chữ nhật có đỉnh là $P_i, i = 1, 2, 3, 4$. Như vậy nếu 2 điểm bất kỳ của Q là đỏ thì ta có kết quả một hình vuông $P_iP_jQ_jQ_i$ có đỉnh cùng mầu. Tương tự cho các điểm R. Nếu đồng thời không có điểm Q và R thỏa mãn trường hợp trên thì có 3 (hoặc

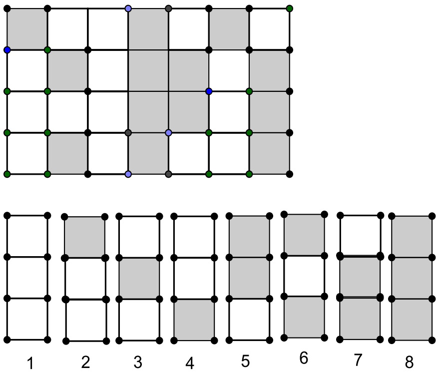


Hình 4.2:

hơn) điểm Q nào đó và 3 điểm R nào đó có cùng mầu xanh. Nhưng trong bộ ba như vậy phải có cặp đôi tạo ra hình chữ nhật với các đỉnh mầu xanh trong số các điểm Q và R. ☺

▷ **4.5.** *Giả sử một bàn cờ hình chữ nhật có 4x7 ô vuông được sơn đen hoặc trắng. Chứng minh rằng với cách sơn mầu bất kỳ, trong bàn cờ luôn tồn tại hình chữ nhật gồm các ô vuông, mà bốn ô ở góc là các ô cùng mầu.*

Lời giải. Chúng ta chứng minh cho bài toán bàn cờ 3×7. Mẫu sơn mầu có thể xẩy ra với bàn cờ này có dạng từ 1 đến 8. Giả sử một trong số các cột thuộc dạng 1. Bài toán sẽ được chứng minh nếu tất cả những cột còn lại trong 6 cột thuộc các dạng 1, 2, 3, 4. Như vậy giả sử tất cả các cột còn lại thuộc dạng 5, 6, 7, hoặc 8. Khi đó theo nguyên lý Đirichlê hai trong số sáu cột có hai cột cùng một dạng và như vậy bài toán cũng được chứng minh. Chứng minh hoàn toàn tương tự nếu một cột có dạng 8. Giả sử không có cột nào trong 7 cột có dạng 1 hoặc 8. Như vậy ta có 7 cột với 6 dạng. Theo nguyên lý Đirichlê có hai cột cùng dạng và bài toán được chứng minh đầy đủ. ☺



Hình 4.3:

▷ **4.6.** *Năm điểm A, B, C, D, E nằm trong một mặt phẳng và tọa độ của chúng là các số nguyên. Chứng minh rằng trong số những tam* *giác mà đỉnh của nó là ba điểm nào đó trong các điểm này, có ít nhất ba tam giác với diện tích là các số nguyên.*

Lời giải. Ta có thể chứng minh rằng nếu một trong các tọa độ của các đỉnh tam giác đã cho thay đổi một số chẵn, thì diện tích của tam giác cũng thay đổi một số nguyên. Một cách tổng quát hơn ta có thể khẳng định nếu các tọa độ đỉnh của một tam giác thay đổi một số chẵn, thì diện tích của nó cũng thay đổi một số nguyên. Vì vậy, nếu diện tích của tam giác mới nhận được là số nguyên, thì diện tích tam giác ban đầu cũng là số nguyên (hãy vẽ hình và chứng minh).

Vì những tọa độ của các điểm đã cho A, B, C, D, E là những số nguyên, sau khi thêm vào các tọa độ này những số chẵn thích hợp, thì mỗi tọa độ sẽ chỉ nhận các giá trị 0 và 1. Do đó mọi 5 điểm đã cho tạo nên bởi các điểm $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. Áp dụng nguyên lý Đirichlê suy ra ít nhất hai điểm trong các điểm A, B, C, D, E biến đổi thành cùng một điểm trong $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Giả sử đó là A, B. Chúng ta sẽ khẳng định diện tích các tam giác ABC, ABD và ABE là những số nguyên. Thật vậy, các tam giác này bị biến thành đoạn thẳng (do A và B biến thành cùng một điểm) nên diện tích ảnh của chúng bằng 0. Vậy trước khi biến đổi, diện tích của chúng phải là số nguyên. ☺

▷ **4.7.** *Trong một mặt phẳng cho một tập hợp A có n điểm ($n \geq 2$), một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong A có ít nhất hai điểm được nối với cùng số lượng các điểm khác thuộc A.*

Lời giải. Với mọi điểm bất kỳ a thuộc A chúng ta ký hiệu $S(a)$ là số lượng những điểm của A mà a nối thành đoạn thẳng. Bài toán muốn khẳng định rằng tồn tại hai điểm khác nhau a_1 và a_2 của A

mà $S(a_1) = S(a_2)$. Chúng ta thấy ngay rằng $0 \leq S(a) \leq n-1$ với mọi phần tử a thuộc A. Mặt khác, cũng không tồn tại những điểm x_1 và x_2 thuộc A, mà $S(x_1) = n-1$ và $S(x_2) = 0$. Bởi vì điều này có nghĩa là điểm x_1 nối với tất cả các điểm còn lại của A, còn x_2 không nối với điểm nào của A, dẫn đến vô lý. Các số nguyên từ 0 đến $n-1$ có số lượng là n. Vì 0 và $n-1$ không đồng thời là giá trị vủa S nên S nhận nhiều nhất là $n-1$ giá trị. Bài toán được giải suy ra từ nguyên lý Đirichlê. ☺

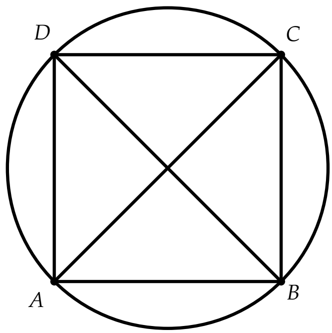
▷ **4.8.** *Cho đa giác đều 100 cạnh nội tiếp trong đường tròn k. Mỗi đỉnh được gán một trong các số $1, 2, \ldots, 49$. Chứng minh rằng trên k tồn tại hai cung AB và CD với các tính chất sau:*

a) Các điểm A, B, C và D là đỉnh của đa giác đều đã cho.

b) Các dây cung AB và CD song song với nhau

c) Nếu A, B, C và D có nhãn tương ứng là các số a, b, c, d thì $a + b = c + d$.

Lời giải. Trong đường tròn k có đúng 50 đường kính khác nhau mà điểm cuối của đường kính là một đỉnh của đa giác đều 100 cạnh đã cho. Nếu PQ là một trong số đường kính đó và đir nh P được gán nhãn p, còn Q với nhãn q thì đường kính PQ tương ứng với số nguyên $|p-q|$. Rõ ràng, $0 \leq |p-q| \leq 48$. Bằng cách này mỗi đường kính đã xét (tổng số có 50 tất cả) được cho tương ứng với một trong các số $0, 1, 2, \ldots, 48$. Suy ra có ít nhất hai



Hình 4.4:

đường kính được đặt tương ứng với cùng một số.

Ta ký hiệu đó là AB và CD, còn các đỉnh được gán tương ứng các nhãn a, b, c, d. Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả thiết $c \leq a$ và $b \leq d$. Khi đó dây cung AC và BD có các tính chất mong muốn. Thật vậy, với đường kính AC chúng ta đã đặt tương ứng với $a - c$, còn BD ứng với $d - b$ và những số này bằng nhau, chúng ta nhận được $a - c = d - b$ hay là $a + b = c + d$. Ngoài ra, tứ giác $ABCD$ là hình vuông, nên AB song song với CD (thậm chí $AB = CD$). ☺

▷ **4.9.** *Tất cả các điểm trong một mặt phẳng được bôi bởi n mầu khác nhau. Cho trước $2^n - 1$ đường tròn đồng tâm khác nhau $k_1, k_2, \ldots, k_{2^n-1}$. Trong các đường tròn dựng bán kính tương ứng $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{2^n-1}$ sao cho mỗi cặp bán kính không có điểm chung nào khác ngoài O. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn $k_i, i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ sao cho trên nó và trên bán kính OA_i của nó có những điểm tương ứng X_i và Y_i, mà chúng được bôi cùng một mầu và Y_i không trùng với O và A_i.*

Lời giải. Ký hiệu các mầu đã cho là $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Chúng ta sẽ tính số lượng các tổ hợp khác nhau của các mầu mà với chúng có thể bôi mầu các điểm trên một hình phẳng. Mọi tập con khác trống $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, 1 \leq k \leq n$ của tập hợp $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ tương ứng với tổ hợp mầu $\{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}\}$. Rõ ràng những tập con khác trống khác nhau của N bằng cách này tương ứng với những tổ hợp mầu khác nhau. Ngoài ra, mọi tổ hợp mầu $\{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}\}$ có thể nhận được nhờ xây dựng tập con khác trống $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Suy ra, tổ hợp những mầu $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mà với chúng có thể bôi các điểm một hình phẳng là tương ứng một - một với những tập hợp con khác trống của $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Nghĩa là số các tổ hợp khác nhau của mầu bằng số các tập hợp con khác trống của N, có tất cả $2^n - 1$ tập hợp như vậy.

Trước tiên chúng ta giả thiết rằng tồn tại đường tròn $k_i, i = 1, 2, \ldots,\ 2^n - 1$ mà muốn bôi kín nó phải dùng tất cả các mầu $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Khi đó chúng ta chọn điểm bất kỳ Y_i là điểm trong của bán kính OA_i. Giả sử Y_i được bôi bằng mầu c_1. Nhưng trên k_i có ít nhất một điểm X_i, được bôi cùng mầu như vậy, vì mọi mầu đã cho đều bắt gặp trên k_i; vậy bài toán được giải trong trường hợp giả thiết này. Ta xét trường hợp còn lại: Giả sử không có đường tròn nào mà những điểm của nó được bôi mầu với toàn bộ tổ hợp $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Khi đó có tất cả $2^n - 2$ khả năng tổ hợp mầu, với nó các điểm được bôi cho các đường tròn $k_1, k_2, \ldots, k_{2^n-1}$. Bởi vì $2^n - 1 > 2^n - 2$ nên có hai đường tròn k_i và $k_j, i < j$ trên nó sẽ có cùng một tổ hợp mầu. Giả sử k_i có bán kính lớn hơn k_j. Ký hiệu Y_i là điểm cắt của OA_i và k_j. Trong trường hợp đó Y_i nằm trên k_j và vì những điểm của k_i và k_j được bôi với cùng một tổ hợp mầu, trên k_i có điểm X_i được bôi cùng mầu với Y_i. ☺

▷ **4.10.** *Tổng của độ dài một số vectơ trong mặt phẳng là 4. Chứng minh rằng từ những vectơ này có thể chọn một số vectơ mà tổng độ dài của chúng lớn hơn 1.*

Lời giải. Chúng ta đưa vào hệ tọa độ và xét vectơ đại diện những vectơ đã cho tại điểm gốc. Chúng ta chiếu những vectơ này xuống trục tọa độ Ox và Oy. Vì mỗi vectơ có độ dài nhỏ hơn tổng của các độ dài hình chiếu của nó xuống hai trục;nên tổng độ dài của tất cả hình chiếu của các vectơ lớn hơn 4. Khi đó trên ít nhất một trong 4 nửa trục của hệ tọa độ tổng độ dài của hình chiếu sẽ lớn hơn 1, điều đó có nghĩa là tổng của độ dài của những vectơ tương ứng sẽ lớn hơn 1. (độ dài hình chiếu đã lớn hơn thì tất nhiên độ dài vectơ cũng lớn hơn.) ☺

4.2. Bài tập

▷ **4.11.** Trong hình vuông với cạnh 1 đơn vị cho 112 điểm. Chứng minh rằng ít nhất hai trong số đó có khoảng cách nhỏ hơn $\frac{2}{15}$.

▷ **4.12.** (Đề thi Toán Olympic quốc tế lần thứ 25 năm 1984) Trong mặt phẳng cho hai điểm khác nhau O và A. Với mỗi điểm X thuộc mặt phẳng khác O chúng ta ký hiệu $a(X)$ là độ đo bằng radian của góc AOX, đo theo chiều ngược kim đồng hồ từ OA đến OX $(0 \leq a(X) \leq 2)$. Còn $c(X)$ là đường tròn tâm O và bán kính có độ dài $OX + \frac{a(X)}{OX}$. Cho trước bộ hữu hạn mầu và mỗi điểm trong mặt phẳng được bôi bằng 1 trong số đó. Chứng minh rằng tồn tại điểm X_1 với $a(X_1) > 0$ và trên đường tròn $c(X_1)$ có ít nhất 1 điểm được bôi cùng mầu với X_1.

▷ **4.13.** Trong mặt phẳng cho n điểm, $n \geq 7$, sao cho khoảng cách mỗi cặp điểm giữa chúng là khác nhau. Mỗi một điểm được nối với điểm gần nó nhất. Chứng minh rằng không có điểm nào được nối với nhiều hơn 5 điểm khác.

▷ **4.14.** Chứng minh rằng trong một hình tròn bán kính 1, không thể chọn được quá năm điểm mà khoảng cách giữa hai điểm một lớn hơn 1.

▷ **4.15.** Người ta quăng 120 hình vuông có kích thước 1×1 vào một hình chữ nhật kích thước20×25. Chứng minh rằng với mọi cách sắp xếp các hình vuông thì ở trong hình chữ nhật vẫn còn chỗ trống để đặt một hình tròn đường kính 1.

CHƯƠNG 5
MỞ RỘNG NGUYÊN LÝ ĐIRICHLÊ

5.1. Nguyên lý Đirichlê mở rộng

Cho A là tập hữu hạn những phần tử, ký hiệu $s(A)$ là số lượng các phần tử thuộc A. Nguyên lý Đirichlê có thể mở rộng như sau:

Nếu A và B là những tập hợp hữu hạn và $s(A) > k.s(B)$, ở đây k là một số tự nhiên nào đó và nếu mỗi phần tử của A cho tương ứng với một phần tử nào đó của B, thì tồn tại ít nhất $k+1$ phần tử của A mà chúng tương ứng với cùng một phần tử của B

Thật vậy, trường hợp $k = 1$ là nguyên lý Đirichlê mà ta đã xét trong các bài tập từ đầu tới giờ. Để chứng minh mệnh đề trên chúng ta giả sử mỗi phần tử của B chỉ tương ứng với nhiều nhất k phần tử của A. Khi đó $s(A) \leq k.s(B)$ trái với giả thiết $s(A) > k.s(B)$.

Chú ý. Ngay từ những chương đầu nguyên lý này đã được sử dụng với cách chứng minh tương tự như trên. Để tiếp tục hiểu sâu thêm nguyên lý ở dạng mới chúng ta xét một loạt bài toán điển hình.

5.2. Ví dụ

▷ **5.1.** *Trong một hình vuông có cạnh bằng 1 ta chọn bất kỳ 51 điểm. Chứng minh rằng ít nhất có ba điểm trong số đó nằm trong một hình vuông có cạnh 0,2.*

Lời giải. Chúng ta chia hình vuông thành 25 hình vuông con có cạnh 0,2 bằng các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông.Nếu giả sư rằng mỗi hình vuông vừa nhận được chứa không quá 2 điểm thì tất cả các điểm trong hình vuông lớn sẽ có số điểm nhiều nhất là $2 \times 25 = 50$ dẫn đến vô lý. ☺

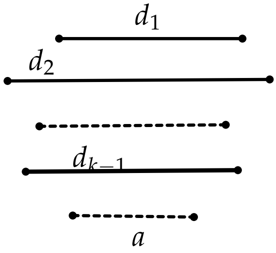
▷ **5.2.** *Tất cả 9 cạnh và 27 đường chéo của một hình chóp đáy đa giác 9 đỉnh được bôi sơn: một số bôi sơn đỏ, còn lại bôi sơn xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh của hình chóp, mà chúng là những đỉnh của một hình tam giác với các cạnh được sơn cùng một mầu.*

Lời giải. 9 cạnh bên của hình chóp được sơn bằng hai mầu. Vì $9 > 4.2$, từ nguyên lý mở rộng trên suy ra ít nhất có 5 cạnh bên được bôi cùng một mầu. Giả sử đó là $SA_1, SA_2, SA_3, SA_4, SA_5$ được bôi cùng mầu đỏ, ở đây S là đỉnh hình chóp. Không ảnh hưởng tới kết luận bài toán chúng ta giả sử các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 được sắp xếp theo chiều ngược kim đồng hồ. Ít nhất một trong các cạnh của ngũ giác là đường chéo của đa giác đáy; giả sử đó là A_1A_2. Chúng ta xét tam giác $A_1A_2A_4$. Những cạnh của nó là các đường chéo của đa giác đáy (do cách xếp trên) và suy ra chúng được bôi sơn.Nếu tất cả các cạnh A_1A_2, A_2A_4, A_4A_1 là mầu xanh thì bài toán đã giải xong. Trường hợp ngược lại một trong các cạnh A_1A_2, A_2A_4, A_4A_1 là mầu đỏ, giả sử đó là A_1A_2. Khi đó các cạnh của tam giác SA_1A_2 là mầu đỏ. ☺

▷ **5.3.** *Chứng minh rằng trong mọi đa giác lồi với số cạnh chẵn tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.*

Lời giải. Bằng qui nạp ta có thể dễ chứng minh được mọi đa giác với n cạnh có $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Bây giờ chúng ta xét đa giác lồi bất kỳ P có $2k$ cạnh với $k(\geq 2)$ là một số nguyên.



Hình 5.1:

Giả sử mỗi đường chéo của P song song với một cạnh nào đó của P. Khi đó mỗi đường chéo d có thể cho tương ứng với cạnh song song với d. Ký hiệu s là số các đường chéo chúng ta có

$$s = \frac{2k(2k-3)}{2} = k(2k-3)$$
$$= 2k(k-2) + k > (k-2).2k.$$

Như vậy theo nguyên lý Đirichlê mở rộng suy ra tồn tại $k-1$ đường chéo $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ của đa giác P mà chúng tương ứng với cùng một cạnh a của đa giác, nghĩa là $a, d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ song song với nhau. Suy ra các đường chéo $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ cùng nằm trong một nửa mặt phẳng xác định bởi cạnh a vì P là đa giác lồi (hình vẽ). Ngoài ra $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$ và a là những đoạn thẳng khác nhau và bởi vì số lượng của chúng là k, mỗi đỉnh của đa giác P là điểm đầu của một đoạn nào đó trong chúng. Không ảnh hưởng đến kết quả chứng minh ta giả thiết d_1 là đoạn xa nhất đối với a trong các đường chéo $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$. Khi đó từ lý luận trên suy ra rằng đa giác P nằm toàn bộ trong một nửa mặt phẳng xác định bởi d_1. Điều này trái với tính lồi của đa giác P. ☺

▷ **5.4.** *Trong mặt phẳng cho 6 điểm. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp* *điểm được bôi mầu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng ba điểm trong số các điểm là đỉnh của một tam giác, mà các cạnh của nó được bôi cùng một mầu.*

Lời giải. Ký hiệu A là một trong các điểm đã cho và xét năm đoạn thẳng, có đỉnh chung là A. Những đoạn thẳng này được sơn hai mầu và vì 5=2.2+1, suy ra từ nguyên lý Đirichlê mở rộng chúng ta có ít nhất ba đoạn cùng mầu. Giả sử đó là AB_1, AB_2, AB_3 mầu xanh. Nếu một vài đoạn thẳng B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 là xanh thì tồn tại một tam giác với ba cạnh xanh và có đỉnh là A. Nếu ba đoạn thẳng B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 là đỏ, thì một tam giác thỏa mãn đề toán đã ra là $B_1B_2B_3$ (các cạnh đều mầu đỏ). ☺

▷ **5.5.** *Cho dãy vô hạn các số tự nhiên $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ được xác định theo công thức sau $u_1 = 3, u_{n+1} = (n+1)u_n - n + 1, n = 1, 2, \ldots$. Cho n số tự nhiên bất kỳ và tập hợp M gồm u_n điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối hai điểm khác nhau trong M được bôi sơn bằng một trong n mầu đã cho. Khi đó tồn tại 3 điểm trong M là đỉnh của một tam giác đồng mầu.*

Lời giải. Chứng minh bằng qui nạp theo n. Với $n = 1$ chúng ta có $u_1 = 3$ và kết luận là hiển nhiên. Với $n = 2$ từ công thức tính được $u_2 = 6$, đây là trường hợp ta đã chứng minh ở bài trên. Giả sử bài toán với u_n điểm và các đoạn thẳng nối được bôi bởi n mầu, có một tam giác với các cạnh cùng mầu. Bây giờ ta xét u_{n+1} điểm bất kỳ, mà đường nối giữa chúng được bôi bằng $n+1$ mầu: $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Lấy A là một trong các điểm trên. Điểm này có thể nối với các điểm còn lại được $u_{n+1} - 1$ đoạn thẳng bôi mầu. Mặt khác do công thức hồi qui $u_{n+1} - 1 = (n+1)(u_n - 1) + 1$, như vậy theo nguyên lý Đirichlê mở rộng ít nhất u_n đoạn thẳng có chung đỉnh A được bôi cùng mầu.

Giả sử $AB_1, AB_2, \ldots, AB_{u_n}$ được bôi cùng mầu, chẳng hạn mầu c_1. Những khả năng có thể xẩy ra như sau:

a) Nếu một trong các đoạn thẳng nối giữa các điểm $B_1, B_2, \ldots, B_{u_n}$ theo từng cặp được bôi bằng mầu c_1 thì tồn tại tam giác đồng mầu có đỉnh A. Các cạnh của tam giác này sơn mầu c_1.

b) Không có một đoạn nào trong các đoạn thẳng nối giữa các điểm $B_1, B_2, \ldots, B_{u_n}$ được sơn mầu c_1. Khi đó áp dụng qui nạp toán học cho những điểm $B_1, B_2, \ldots, B_{u_n}$. Điều này có thể được vì tất cả các đoạn thẳng đã nối được bôi sơn n mầu $c_2, c_3, \ldots c_{n+1}$. Trong trường hợp này ta cũng dẫn đến kết luận tồn tại một tam giác đồng mầu. ☺

▷ **5.6.** *Cho số hạng của dãy u_n được định nghĩa như bài trước. Tập hợp những số tự nhiên từ 1 đến $u_n - 1$ được phân chia bằng phương pháp bất kỳ vào n tập hợp con, mà từng đôi một không có phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại hai số của cùng một tập hợp con, mà tổng của chúng cũng nằm trong tập hợp con này ; hoặc là tồn tại một số trong một tập hợp con nào đó, mà sau khi nhân đôi vẫn thuộc tập hợp con này.*

Lời giải. Ký hiệu những tập hợp con đã cho là là $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Chúng ta xét tập hợp bất kỳ M gồm u_n điểm, mà chúng được đánh số bằng phương pháp nào đó trong các số $0, 1, 2, \ldots, u_n - 1$. Chúng ta bôi mầu những đoạn thẳng nối các điểm trong M bằng n mầu $c_1, c_2, \ldots, c_n$ theo cách sau: Đoạn thẳng nối các điểm thứ i và j, với $i > j$ được sơn bằng mầu c_k khi và chỉ khi hiệu $i - j$ thuộc tập hợp A_k. Theo bài toán trước 5.5 ba điểm nào đó của M là đỉnh của một tam giác cùng mầu. Giả sử các điểm này là i, j, k và $i > j > k$. Khi đó các số $i - j, j - k$ và $i - k = (i - j) + (j - k)$ nằm trong cùng một tập hợp A_s và chúng có các tính chất ta cần tìm. ☺

▷ **5.7.** *Trong mặt phẳng cố định hệ tọa độ Oxy. Chúng ta xét tập hợp R gồm những điểm với tọa độ (x, y), ở đây x, y là những số nguyên và $1 \leq x \leq 12, 1 \leq y \leq 10$. Mỗi điểm này được sơn bằng một mầu trắng, xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ, mà đỉnh của nó là những điểm của R được sơn cùng một mầu.*

Lời giải. Trong chứng minh ta dùng hai khẳng định sau:

a) Nếu X là tập hữu hạn với n phần tử, thì số lượng tập hợp con của X gồm các cặp phần tử $\{x, y\}$, với $x \in X, y \in X$ là $\frac{n(n-1)}{2}$.

b) Mọi số dương bất kỳ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ đều thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{2} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}\right)^2$$

Dấu bằng chỉ xẩy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Trở lại bài toán đang xét, vì tổng số các điểm ta xét là 120, nên ít nhất có 40 điểm được bôi cùng mầu, giả sử là mầu đỏ. Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, 12$ chúng ta ký hiệu l_i là đường thẳng đi qua điểm $(i, 0)$ và song song với trục Oy. Nếu trên l_i có n_i điểm đỏ, $i = 1, 2, \ldots, 12$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_{12} \geq 40$. Ngoài ra từ n_i điểm có thể tạo ra các cặp đôi được sắp có số lượng $\frac{n_i(n_i - 1)}{2}$. Nghĩa là với mỗi $i = 1, 2, \ldots, 12$ tồn tại đúng $\frac{n_i(n_i - 1)}{2}$ cặp số nguyên $\{j_1, j_2\}$ thỏa mãn $1 \leq j_1 \leq 10, 1 \leq j_2 \leq 10$ và các điểm $\{i, j_1\}$ và $\{i, j_2\}$ là đỏ. Mặt khác số lượng của tất cả cặp những số nguyên $\{j_1, j_2\}$ với $1 \leq j_1 \leq 10, 1 \leq j_2 \leq 10$

bằng $\dfrac{10(10-1)}{2} = 45$. Chúng ta phải chứng minh rằng tổng các số

$$\frac{n_1(n_1-1)}{2}, \frac{n_2(n_2-1)}{2}, \ldots, \frac{n_{12}(n_{12}-1)}{2}$$

lớn hơn 45. Từ đó suy ra tồn tại những chỉ số khác nhau i_1 và i_2 với $1 \leq i_1 < i_2 \leq 12$ và cặp số nguyên $\{j_1, j_2\}$ với $1 \leq j_1 \leq 10, 1 \leq j_2 \leq 10$ sao cho 4 điểm $\{i_1, j_1\}, \{i_1, j_2\}, \{i_2, j_1\}, \{i_2, j_2\}$ là đỏ. Bởi những điểm này là đỉnh của hình chữ nhật với các cạnh song song với trục tọa độ, như vậy bài toán được chứng minh.

Như vậy, ta chỉ còn phải chứng minh

$$S = \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} + \cdots + \frac{n_{12}(n_{12}-1)}{2} > 45$$

Sử dụng bất đẳng thức b)

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}((n_1 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}((n_2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + \cdots + \frac{1}{2}((n_{12} - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{2}((n_1 - \frac{1}{2})^2 + (n_2 - \frac{1}{2})^2 + \cdots + (n_{12} - \frac{1}{2})^2) - 12\frac{1}{8} \\
&\geq \frac{1}{2}.12(\frac{(n_1 - \frac{1}{2}) + (n_2 - \frac{1}{2}) + \cdots + (n_{12} - \frac{1}{2})}{12})^2 - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{24}((n_1 + n_2 + \cdots + n_{12}) - 12\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} \\
&\geq \frac{1}{24}(40-6)^2 - \frac{3}{2} = \frac{34^2}{24} - \frac{3}{2} > 45
\end{aligned}$$

vì $n_1 + n_2 + \cdots + n_{12} \geq 40$. ☺

▷ **5.8.** *(Bài thi Olympic toán quốc tế lần thứ 20, 1978) Một hội toán học bao gồm các thành viên ở 6 nước. Danh sách các hội viên gồm 1978 người được đánh số báo danh từ 1 đến 1978. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một hội viên có số báo danh gấp đôi số báo danh của* *một hội viên khác cùng nước, hoặc bằng tổng hai số báo danh của hai hội viên cùng một nước với mình.*

Lời giải. Từ $329.6 < 1978$ suy ra một trong các nước (ký hiệu là A) có không ít hơn 330 đại biểu trong hội và chúng ta có thể viết số báo danh $a_1 < a_2 < \ldots < a_{330} < \ldots$ Chúng ta xét những hiệu $x_i = a_{330} - a_i, i = 1, 2, \ldots 329$. Nếu có một số x_i nào đó trùng với a_j (số báo danh của một đaj i biểu của A) thì chúng ta có $a_{330} = a_i + a_j$, bài toán đã chứng minh xong. Nếu $x_i \neq a_j$ với mọi i, j, thì số x_i là số báo danh của một số đạ i biểu thuộc 5 nước còn lại. Bây giờ, vì $65.5 < 329$, thì ít nhất có một trong năm nước này (ký hiệu là B) sẽ có không ít hơn 66 thành viên, mà số báo danh của họ là một trong các số $x_1, x_2, \ldots, x_{329}$. Cho các số đó là $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_{66} < \ldots$ với $b_i = x_{n_i}, i = 1, 2, \ldots, 66$. Chúng ta lại xét hiệu $y_i = b_{66} - b_i$, $i = 1, 2, \ldots, 65$ Nếu một hiệu nào đó trùng với số báo danh b_j của một đại biểu của B thì $b_{66} = b_i + b_j$. Nếu với hai số i và k nào đó chúng ta có $y_i = a_k$, thì $a_k = b_{66} - b_i = x_{n_{66}} - x_{n_i} = a_{330} - a_{n_{66}} - (a_{330} - a_{n_i}) = a_{n_i} - a_{n_{66}}$ hoặc là $a_{n_i} = a_{n_{66}} + a_k$. Nếu hai trường hợp trên không xẩy ra, thì những số này sẽ là số báo danh của đại biểu 4 nước còn lại và suy ra ít nhất một trong các nước này có số hội viên ít nhất là 17 với số báo danh y_i. Tiếp tục quá trình như vậy và lặp lại lý luận trên chúng ta có kết luận của bài toán. ☺

▷ **5.9.** *(Đề thi Toán vô địch nước Anh, 1978) Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11.000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính bằng đơn vị chứa ít nhất 6 điểm trong số 11.000 điểm đã cho.*

Lời giải. Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau, thế thì hình lập phương ban đầu được chia thành $13^3 = 2187$

hình lập phương nhỏ. Vì hình lập phương ban đầu chứa 11.000 điểm, nên tồn tại một hình lập phương nhỏ chứa ít nhất 6 điểm. Dễ thấy cạnh của hình lập phương nhỏ là $\frac{15}{13}$, do đó bán kính hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ là $r = \frac{1}{2}\sqrt{3(\frac{15}{13})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{675}{169}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{676}{169}} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$. Vậy: Tồn tại một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất 6 điểm trong 11.000 điểm đã cho. ☺

▷ **5.10.** Trong mặt phẳng cho một số hữu hạn điểm, một số trong chúng được nối lại bằng đoạn thẳng. Chúng ta nói rằng một dãy $e_1, e_2, \ldots, e_m$ từ các đoạn thẳng được nối là một dây chuyền, nếu mọi cặp đoạn thẳng liền nhau e_i và e_{i+1} có chung một đầu mút, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Số lượng m những đoạn thẳng trong dây chuyền gọi là độ dài của nó. Chúng ta xét bài toán:

Cho n điểm, từ các điểm này dựng những đoạn thẳng, số lượng đoạn thẳng đã dựng là q. Giả sử những đoạn thẳng được đánh số một cách bất kỳ bằng các số $1, 2, \ldots, q$. Khi đó trong cách tạo hình như vậy tồn tại một dây chuyền với độ dài nhỏ nhất là $\frac{2q}{n}$, trên dây chuyền này các số ứng với những đoạn thẳng thành phần lập nên một dãy số giảm ngặt.

Lời giải. Gọi G là cấu hình bất kỳ của những điểm và đoạn thẳng, mà chúng được đánh số bằng số tự nhiên như đề bài đã ra. Với mọi v thuộc G chúng ta ký hiệu $L_G(v)$ là độ dài của dây chuyền dài nhất trong G, mà nó bắt đầu từ v và giảm dần. Bằng phương pháp qui nạp chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$L_G(v_1) + L_G(v_2) + \cdots + L_G(v_n) \geq 2q \qquad (5.1)$$

ở đây $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là tất cả các điểm thuộc G. Kết luận phải chứng minh suy ra từ (5.1) theo nguyên lý Đirichlê mở rộng: Một trong các số $L_G(v_1), L_G(v_2), \ldots, L_G(v_n)$ lớn hơn hoặc bằng $\frac{2q}{n}$, như vậy tồn tại dây chuyền với tính chất đã chỉ ra. Do đó chỉ còn phải chứng minh (5.1) được thỏa mãn với n điểm của G và q đoạn thẳng được đánh số như mô tả ở đầu bài. Bằng qui nạp với $q = 1$ bất đẳng thức (5.1) là hiển nhiên. Giả sử (5.1) thỏa mãn cho mọi cấu hình với $q-1$ đoạn thẳng và chúng ta xem xét cấu hình với n điểm và q đoạn thẳng. Nếu đoạn thẳng ký hiệu là q nối với hai điểm v_i và v_j thì chúng ta bỏ đoạn thẳng này và nhận được cấu hình G' của n điểm và $q-1$ đoạn thẳng. Với cấu hình này theo qui nạp chúng ta có $L_{G'}(v_1) + L_{G'}(v_2) + \cdots + L_{G'}(v_n) \geq 2(q-1)$. Bây giờ chúng ta xét điểm v_j. Dây chuyền giảm dần xuất phát từ x_j có độ dài $L_{G'}(v_j)$, và những đoạn thẳng trong dây chuyền này được ký hiệu bởi những số nào đó trong dãy $1, 2, \ldots, q-1$. Nếu nối thêm vào dây chuyền một đoạn thẳng có ký hiệu q chúng ta sẽ nhận được dây chuyền giảm với điểm đầu v_i và với độ dài $L_{G'}(v_j) + 1$. Theo định nghĩa của $L_G(v_i)$ chúng ta có $L_G(v_i) \geq L_{G'}(v_j) + 1$. Bằng một cách chứng minh hoàn toàn tương tự chúng ta cũng chứng minh được $L_G(v_j) \geq L'_G(v_i) + 1$. Mặt khác, $L_G(v_k) = L_{G'}(v_k)$ với mọi điểm v_k thuộc G mà nó khác v_i và v_j. Suy ra, $L_G(v_1) + L_G(v_2) + \cdots + L_G(v_n) \geq L_{G'}(v_1) + L_{G'}(v_2) + \cdots + L_{G'}(v_n) + 2 \geq 2(q-1) + 2 = 2q$. ☺

5.3. Bài tập

▷ **5.11.** (Đề thi vô địch Áo - Balan, 1978) Cho 1978 tập hợp, mỗi tập hợp có 40 phần tử. Biết rằng hai tập hợp bất kỳ có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng, tồn tại một phần tử thuộc tất cả 1978 tập hợp trên.

▷ **5.12.** Chứng minh rằng mọi tập hợp chứa 55 số chọn được từ tập hợp số $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ chứa hai số mà hiệu của chúng bằng 9.

▷ **5.13.** Cho n là số tự nhiên. Cho n tập hợp con $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của mặt phẳng với tính chất: với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ tồn tại $n + 1$ phép tịnh tiến sao cho các ảnh của A_i qua các phép tịnh tiến từng đôi một không có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại một điểm trên mặt phẳng, không nằm trong bất cứ tập hợp A_i nào, $i = 1, 2, \ldots, n$.

▷ **5.14.** Trong phần trong của một tam giác đều với cạnh dài 15 đơn vị, chúng ta chọn bằng phương pháp bất kỳ 111 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn với đường kính $\sqrt{3}$, mà nó phủ ít nhất 3 điểm trong số những điểm đã chọn ở trên.

▷ **5.15.** (Đề thi vô địch Quốc gia Bungari, 1977) Trong một nhóm người, hai người X và Y gọi là quen nhau gián tiếp, nếu họ trực tiếp quen nhau, hoặc là nếu tồn tại một dây truyền những người $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ sao cho X và Z_1 quen nhau, Z_1 và Z_2 quen nhau,... , Z_p và Y quen nhau. Cho biết nhóm đó gồm 134 người, còn giữa mỗi nhóm nhỏ 8 người từ nhóm đã biết ít nhất có hai người quen gián tiếp. Chứng minh rằng có một nhóm nhỏ 12 người trong nhóm người đã biết, mà mọi cặp hai người trong nhóm nhỏ này đều quen nhau gián tiếp.

CHƯƠNG 6
BÀI TẬP SỐ HỌC NÂNG CAO

6.1. Định lý cơ bản của số học

Trong lý thuyết số học cơ sở có một định lý cơ bản:

Mọi số tự nhiên lớn hơn một đều có thể phân tích ra tích các thừa số nguyên tố và phân tích đó là duy nhất nếu ta không để ý đến thứ tự của các thừa số.

Cho $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là những số nguyên tố khác nhau. Trong chương này chúng ta xét một số kết luận về về tập hợp M của các số tự nhiên mà nó có thể phân tích ra các thừa số nằm trong $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Mọi số x của M có thể biểu diễn dưới dạng

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

ở đây $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là các số nguyên không âm.

6.2. Ví dụ

▷ **6.1.** *Từ tập hợp M chọn một cách bất kỳ $2^n + 1$ số. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong tập vừa chọn mà tích của chúng là một số chính phương.*

Lời giải. Nhận xét rằng một số tự nhiên $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ là số chính phương khi và chỉ khi tất cả các số mũ đều chẵn. Chúng ta biểu diễn mọi số đã chọn với dạng ở trên và cho tương ứng với bộ n-số $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, ở đây $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n$ là các số dư của các số mũ tương ứng $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ khi chia cho 2. Rõ ràng $\overline{\alpha}_i = 0$ hoặc $\overline{\alpha}_i = 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Vậy $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ là bộ xếp thứ tự n số gồm số 0 và 1. Theo lý thuyết tổ hợp, tất cả n-bộ như vậy có số lượng là 2^n, còn các số ta đang xét có số lượng là $2^n + 1$. Như vậy ít nhất có 2 số trong chúng có cùng bộ sắp xếp gồm số 0 và số 1 giống nhau. Giả sử các số đó là $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ và $y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$ với chúng có $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n) = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_n)$. Đẳng thức sau cùng có nghĩa là $\overline{\alpha}_i = \overline{\beta}_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Do đó các số mũ $\overline{\alpha}_i$ và $\overline{\beta}_i$ có cùng tính chẵn lẻ như nhau với bất kỳ $i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó $\alpha_1 + \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n$, là các số chẵn và theo nhận xét ban đầu tích $xy = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n})(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}) = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots p_n^{\alpha_n+\beta_n}$ đúng là số chính phương. ☺

▷ **6.2.** *Chứng minh rằng giữa $n+1$ số trong tập hợp M có thể chọn được một vài số mà tích của chúng là một số chính phương.*

Lời giải. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những số bất kỳ của M. Với mỗi tập con khác trống $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ của tập hợp $\{1, 2, \ldots n+1\}$, chúng ta xét các $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ (tất nhiên số này cũng thuộc M). Biểu diễn các số này theo dạng chuẩn và mỗi tập hợp con $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ cho tương ứng với n-bộ $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$, ở đây $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n$ là các số dư của các số mũ tương ứng $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ khi chia cho 2. Nhưng số lượng những tập con khác rỗng của $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ là $2^{n+1} - 1$, còn số lượng các n-bộ sắp gồm những số 0 và 1 là 2^n. Suy ra tồn tại những tập hợp con khác trống khác nhau $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ và $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ của $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, mà chúng tương ứng với cùng một n-bộ sắp của những số dư. Điều này có nghĩa là nếu $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ và $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_k} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$ thì các số mũ α_i và β_i có cùng tính chẵn lẻ với $i = 1, 2, \ldots, k$. Điều này có nghĩa là tích của những số $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ là chính phương. Nếu $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ và $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ không có phần tử chung, thì bài toán đã được giải. Trường hợp ngược lại, trong $P = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_k}$ lặp lại đúng những số x_s, mà s thuộc $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ và $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$. Chúng ta loại trừ trong P tất cả các những x_s như vậy và nhận được tích của vài số trong số $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ mà nó đúng là chính phương. ☺

▷ **6.3.** *Chứng minh rằng giữa mọi $3.2^n + 1$ số từ tập hợp M có thể chọn được 4 số mà tích của chúng là lũy thừa bậc bốn của một số.*

Lời giải. Vì $3.2^n + 1 > 2^n + 1$ giữa những số đã chọn theo bài 6.1 có hai số mà tích của chúng là một số chính phương. Tách hai số trên ra thì còn lại $3.2^n - 1$ số và áp dụng tiếp 6.1 cho hai số nữa mà tích của chúng là số chính phương. Chúng ta có thể lặp lại quá trình này ít nhất $\dfrac{(3.2^n - 1) - (2^n + 1)}{2} = 2^n + 1$ lần. Giả sử chúng ta nhận được $2^n + 1$ cặp $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots,$ với $x_i y_i$ là các số chính phương, $i = 1, 2, \ldots, 2^n + 1$. Chú ý rằng theo cách chọn trên thì các cặp số $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{2^n+1}, y_{2^n+1})$ từng đôi một khác nhau. Đến đây suy ra các số $\sqrt{x_1 y_1}, \sqrt{x_2 y_2}, \ldots, \sqrt{x_{2^n+1} y_{2^n+1}}$ là những số nguyên và thuộc M. Khi đó áp dụng một lần nữa 6.1 chỉ ra rằng tích của hai số nào đó trong chúng là chính phương. Như vậy $x_i y_i x_j y_j = t^4$ nghĩa là tích của 4 số từng đôi một khác nhau x_i, y_i, x_j, y_j là lũy thừa bậc bốn của một số. ☺

▷ **6.4.** *Cho p là một số nguyên tố lẻ và $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p+1}{2}}$ là những số tự nhiên khác nhau nhỏ hơn p. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên r nhỏ hơn p, tồn tại hai số (có thể bằng nhau) a_i và a_j, mà tích của chúng khi chia cho p có số dư đúng là r.*

Lời giải. Áp dụng một định lý trong lý thuyết số cơ sở: Nếu a và b là hai số nguyên tố cùng nhau, thì tồn tại một số nguyên x sao cho $ax \equiv 1 \pmod b$.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, \dfrac{p+1}{2}$, các số a_i và p là nguyên tố cùng nhau, vì $1 \le a_i \le p-1$ và p là số nguyên tố. Áp dụng định lý vừa phát biểu trên, tồn tại các số nguyên $b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{p+1}{2}}$ sao cho với mọi $i = 1, 2, \ldots, \frac{p+1}{2}$ các đẳng thức sau đều thỏa mãn

$$a_i b_i \equiv 1 \pmod p \tag{6.1}$$

Chúng ta xét dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p+1}{2}}, rb_1, rb_2, \ldots, rb_{\frac{p+1}{2}}$. Chúng ta có tất cả $p+1$ số sao cho ít nhất hai số trong chúng khi chia cho p có cùng một số dư. Theo giả thiết các số $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p+1}{2}}$ khác nhau hoàn toàn và nhỏ hơn p. Suy ra số dư của chúng theo môđd un p là khác nhau. Vì r là số nguyên tố cùng nhau với p, nên dễ dàng chứng minh được rằng các số $rb_1, rb_2, \ldots, rb_{\frac{p+1}{2}}$ cho số dư hoàn toàn khác nhau khi chia cho p. Nghĩa là chỉ tồn tại hai chỉ số i và j sao cho $a_i \equiv rb_j \pmod p$. Từ (6.1) chúng ta nhận được $a_i a_j \equiv rb_j a_j \equiv r.1 \equiv r \pmod p$. ☺

▷ **6.5.** *Bổ đề Tue: Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 và a là số nguyên tố cùng nhau với n. Khi đó tồn tại các số nguyên x và y, mà chúng thỏa mãn phương trình $ax \equiv y \pmod n$ và các bất phương trình $1 \le x \le [\sqrt{n}], 1 \le |y| \le [\sqrt{n}]$.*

Lời giải. Chúng ta xét tất cả các số có dạng $au - v$, ở đây u và v chạy độc lập nhau trong các số $0, 1, 2, \ldots, [\sqrt{n}]$. Số lượng tất cả các số đó là $([\sqrt{n}]+1)^2$. Suy ra số này lớn hơn n vì $([\sqrt{n}]+1)^2 > (\sqrt{n})^2 = n$. Bởi có đúng n số dư khác nhau theo môđun n, nên tồn tại hai cặp số khác nhau $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ từ các số nguyên sao cho $1 \le u_i \le$

$[\sqrt{n}], 1 \leq v_i \leq [\sqrt{n}], i = 1,2$ và $au_1 - v_1 \equiv au_2 - v_2 \pmod{n}$. Dễ dàng chứng minh được v_1 khác v_2. Thật vậy, nếu ngược lại thì $au_1 \equiv au_2 \pmod{n}$,suy ra $u_1 \equiv u_2 \pmod{n}$, do a là số nguyên tố cùng nhau với n. Mặt khác, u_1, u_2 là các số tự nhiên nhỏ hơn n. Như vậy đẳng thức sau cùng chỉ có một khả năng duy nhất $u_1 = u_2$. Do đó cặp $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ trùng nhau, trái với cách chọn trên. Như vậy u_1 và u_2 cũng phải khác nhau. Có thể giả thiết $u_1 > u_2$ mà không ảnh hưởng đến kết quả chứng minh. Bây giờ ta đặt $x = u_1 - u_2, y = v_1 - v_2$. Từ đó suy ra $1 \leq x \leq [\sqrt{n}], 1 \leq |y| \leq [\sqrt{n}]$ và $ax \equiv y \pmod{n}$. ☺

▷ **6.6.** *Áp dụng bổ đề Tue: Mọi số nguyên tố dạng $4k+1$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của hai số nguyên.*

Lời giải. Chúng ta chứng minh khẳng định sau: Nếu $p = 4k+1$ là số nguyên tố, thì phương trình $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ có nghiệm. Thật vậy, Vì p là số nguyên tố, theo định lý Wilson, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Ngoài ra $p-1 \equiv -1 \pmod{p}, p-2 \equiv -2 \pmod{p}, \ldots, p - \frac{p+1}{2} \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}$. Suy ra,

$$\begin{aligned}
-1 \equiv (p-1)! &= 1.2 \ldots . \frac{(p-1)}{2} \frac{(p+1)}{2} \\
&\equiv (-1^1)(-2^1) \ldots (-(\frac{p-1}{2})^2) \\
&= (-1)^{\frac{p-1}{2}} (1.2 \ldots \frac{p-1}{2})^2 = (-1)^{2k}((\frac{p-1}{2})!)^2 \\
&= ((\frac{p-1}{2})!)^2 \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Như vậy $a = (\dfrac{p-1}{2})!$ là nghiệm của phương trình trên. Vì $a_2 + 1$ chia hết cho p nên a là nguyên tố cùng nhau với p. Bây giờ ta áp dụng bổ đề Tue cho hai số a và p. Tồn tại các số nguyên x và y mà

$1 \le x \le [\sqrt{p}], 1 \le |y| \le [\sqrt{p}]$ và $ax \equiv y \pmod{p}$. Khi đó $a^2x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$, như vậy $x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$, vì $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Từ đó suy ra $x^2 + y^2$ chia hết cho p. Mặt khác $1 \le x^2 \le p, 1 \le y^2 \le p$. Ta thấy rằng $x^2 = p$ và $y^2 = p$ không thể xẩy ra vì p là số nguyên tố, suy ra $0 < x^2 + y^2 < 2p$ và vì $x^2 + y^2$ chia hết cho p, nên $x^2 + y^2 = p$. ☺

Chú ý: Tương tự, chứng minh rằng mọi số p, sao cho phương trình $x^2 \equiv -2 \pmod{p}$ có nghiệm, đều có thể biểu diễn dưới dạng $p = x^2 + 2y^2$ với x, y là các số nguyên.

▷ **6.7.** *(Đề thi Toán Olympic quốc tế lần 18 năm 1976) Cho hệ p phương trình với $q = 2p$ ẩn*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = 0$$

Tất cả các hệ số a_{ij} thuộc tập hợp $\{-1, 0, 1\}$. Chứng minh rằng tồn tại nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ của hệ, mà nó thỏa mãn

a) tất cả $x_j (j = 1, 2, \ldots, q)$ là nhưng số nguyên;

b) ít nhất có một $j (j = 1, 2, \ldots, q)$ mà $x_j \le 0$;

c) với mọi $j (j = 1, 2, \ldots, q)$ ta luôn có $x_j \le q$;

Lời giải. Xét bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ gồm những số nguyên bất kỳ, mà chúng thỏa mãn $|x_1| \le p, |x_2| \le p, \ldots, |x_q| \le p$. Bởi vì tất cả các hệ số của hệ phương trình chỉ là -1,0 hoặc 1, với việc thay các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_q$ chúng ta nhận được giá trị của mỗi phương trình nằm trong khoảng $[-pq, pq]$. Thật vậy, với mỗi $i = 1, 2, \ldots, p$ chúng ta có $|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iq}x_q| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_q| \le pq$. Suy ra, nếu thay những ẩn trong tất cả phương trình của hệ tương ứng với $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sẽ nhận được bộ p số nguyên $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$. Tất cả những số này đều nằm trong khoảng $[-pq, pq]$. Trong khoảng này có đúng $2pq+1$ số nguyên. Suy ra giữa những bộ sắp xếp p phần tử như ở trên có $(2pq+1)^p$ bộ xếp khác nhau. Mặt khác số lượng những bộ xếp q-phần tử $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ mà $|x_j| \le p$ với $j = 1, 2, \ldots q$, là $(2p+1)^q$. Dễ thấy rằng từ $q = 2p$ suy ra $(2p+1)^q > (2pq+1)^p$. Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai bộ q-số nguyên $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_q)$ và $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_q)$ khác nhau mà chúng thỏa mãn $|x'_j| \le p, |x''_j| \le p$ với $j = 1, 2, \ldots q$ và sau khi thế vào hệ phương trình cho cùng một bộ p số nguyên $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$. Đặt $x_1 = x'_1 - x''_1, x_2 = x'_2 - x''_2, \ldots, x_q = x'_q - x''_q$. Rõ ràng $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ là nghiệm của hệ phương trình và x_j là các số nguyên với mọi $j = 1, 2, \ldots, q$. Vì $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_q)$ và $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_q)$ là hai bộ q số hoàn toàn khác nhau, thì ít nhất một trong các số x_j khác không. Cuối cùng với mọi $j = 1, 2, \ldots, q$ chúng ta có $|x_j| = |x'_j - x''_j| \le |x'_j| + |x''_j| \le p + p = 2p = q$. Như vậy $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ là nghiệm của hệ phương trình có tính chất mong muốn. ☺

▷ **6.8.** *(Đề thi Toán Olympic quốc tế lần 28 năm 1987) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những số thực và $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $k, k \ge 2$, tồn tại những số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng không sao cho $|a_i| \le k-1, i = 1, 2, \ldots, n$ và thỏa mãn bất phương trình sau $|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$*

Lời giải. Chúng ta sử dụng bất đẳng thức Cosi-Buniakovski-Svars

$$|\alpha_1\beta_1 + |\alpha_2\beta_2 + \cdots + |\alpha_n\beta_n| \le \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2}$$

, đus ng với mọi số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi tồn tại một số λ sao cho $\alpha_1 = \lambda\beta_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2 \ldots, \alpha_n = \lambda\beta_n$.

Bây giờ chúng ta xét các số $y_0 = -\frac{k-1}{2}$, $y_1 = -\frac{k-1}{2} + 1, \ldots,$ $y_{k-1} = -\frac{k-1}{2} + (k-1) = \frac{k-1}{2}$ Số lượng của chúng là k và hiệu từng cặp trong chúng là những số nguyên, mà giá trị tuyệt đối của nó không quá $k-1$. Mỗi bộ sắp xếp n-thành phần $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ở đây b_i là một số nào đó trong $y_1, y_2, \ldots, y_n$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, chúng ta đặt tương ứng với một số $S_\beta = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$. Từ bất đẳng thức Cosi

$$\begin{aligned} S_\beta &= b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ &\leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \end{aligned}$$

Nhưng $|b_i| \leq \frac{k-1}{2}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ sao cho

$$|S_\beta| \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \leq \frac{k-1}{2}\sqrt{n}$$

hoặc là $-\frac{k-1}{2}\sqrt{n} \leq S_\beta \leq \frac{k-1}{2}\sqrt{n}$. Theo phương pháp này n-bộ $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ở đây b_i là một trong các số $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, được đặt tương ứng với một số $S_\beta = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ trong đoạn $\Delta = [-\frac{k-1}{2}\sqrt{n}, \frac{k-1}{2}\sqrt{n}]$. Số lượng n-bộ được sắp xếp là k^n. Chia Δ ra $k^n - 1$ đoạn nhỏ với độ dài $\frac{k-1}{k^n-1}\sqrt{n}$. Từ nguyên lý Đirichlê suy ra tồn tại hai n-bộ $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, mà những số $S_\beta = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ và $S_\gamma = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ tương ứng với chúng nằm trong cùng một đoạn nhỏ. Đặt $a_1 = b_1 - c_1$,$a_2 = b_2 - c_2, \ldots,$ $a_n = b_n - c_n$. Dễ kiểm tra được $a_1, a_2.., a_n$ thỏa mãn điều kiện đã cho. Thật vậy, với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ số $a_i = b_i - c_i$ là hiệu của hai số nào đó trong $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ như đã nói ở trên và là số nguyên không vượt quá $k-1$. Vì hai n-bộ trên khác nhau hoàn toàn thì ít nhất một trong các số $a_i = b_i - c_i$ khác không. Ngoài ra, $|b_1x_1 + b_2x_2 +$

$\cdots + b_nx_n| = |x_1(b_1 - c_1) + x_2(b_2 - c_2) + \cdots + x_n(b_n - c_n)| = |S_\beta - S_\gamma| \leq \frac{k-1}{k^n-1}\sqrt{n}$. ☺

▷ **6.9.** *Chứng minh rằng mỗi bộ gồm 11 số thực khác nhau trong khoảng [1,1000] có thể chọn được hai số x và y, mà chúng thỏa mãn bất đẳng thức sau*

$$0 < x - y < 3\sqrt[3]{xy} \tag{6.2}$$

Lời giải. Chúng ta xét căn bậc ba của các số trong bộ số đã cho $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ Từ điều kiện đã cho suy ra $1 \leq \sqrt[3]{x_i} \leq 10, i = 1, 2, \ldots, 11$. Chúng ta chia khoảng [1,10] ra mười phần bằng nhau. Khi đó, có ít nhất một trong hai số $\sqrt[3]{x_1}, \sqrt[3]{x_2}, \ldots, \sqrt[3]{x_{11}}$ nằm trong cùng một đoạn nhỏ. Nếu các số đó là $\sqrt[3]{x_i}$ và $\sqrt[3]{x_j}, i \neq j$ và $x_i > x_j$, chúng ta có

$$0 < \sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j} \leq \frac{9}{10} < 1. \tag{6.3}$$

Như vậy, $0 < (\sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j})^3 < 1$, kết hợp với (6.3) ta có $0 < x_i - x_j < 1 + 3\sqrt[3]{x_ix_j}(\sqrt[3]{x_i} - \sqrt[3]{x_j}) < 1 + 3\sqrt[3]{x_ix_j}$. ☺

Chú ý: Bài toán không còn đúng với bộ 10 số thực trong khoảng [1,1000]. Phản ví dụ: bộ số $1^3, 2^3, \ldots, 10^3$. nếu $i \neq j$ và $i > j$ chúng ta có $(i-j)^3 \geq 1$, như vậy $i^2 + ij + j^2 \geq 1 + 3ij$. Nghĩa là $i - j = (i-j)(i^2 + ij + j^2) \geq 1 + 3ij$. đẳng thức xẩy ra khi $i = j + 1$.

▷ **6.10.** *Cho 7 số thực bất kỳ. Chứng minh rằng giữa chúng có thể chọn được hai số, chẳng hạn x và y, sao cho*

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải. Các số đã cho ký hiệu là $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Mục đích của chúng ta là biểu diễn mọi số dưới dạng $x_i = \operatorname{tg}\alpha_i$, ở đây α_i là một số trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i = 1, 2, \ldots, 7$. Chúng ta chia đoạn này ra sáu đoạn con có độ dài bằng nhau, nghĩa là bằng $\frac{\pi}{6}$. Dễ dàng thấy rằng ít nhất có hai số trong $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ cùng nằm trong một đoạn coni đó. Nếu chúng ta ký hiệu các số đó là α_i và α_j, $\alpha_i \geq \alpha_j$, thì từ đó suy ra $0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{6}$. Vì hàm số tg là tăng trong khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, suy ra

$$0 \leq \operatorname{tg}(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}\alpha_j}{1 + \operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\alpha_j} = \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

☺

Chú ý: Bằng cách giải của hai bài tập này chúng ta có thể sáng tạo ra một loạt bài toán tương tự, mà với cách giải bình thường khó mà giải quyết được.

6.3. Bài tập

▷ **6.11.** (Đề thi Toán Olympic quốc tế lần 26 năm 1985). Cho tập hợp M gồm 1985 số tự nhiên, không có số nào có ước số lớn hơn 26. Chứng minh rằng từ những phần tử của M có thể chọn được 4 số từng đôi một khác nhau mà tích của chúng là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên. (kết luận đúng với tập hợp gồm $3.2^9 + 1 = 1537$ số mà những ước số của chúng không quá 23).

▷ **6.12.** Cho bốn số dương bất kỳ. Chứng minh rằng có hai số trong bốn số đó, chẳng hạn x và y, thỏa mãn bất phương trình sau

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + x + y + 2xy} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

▷ **6.13.** Chứng minh rằng một số tự nhiên có thể biểu diễn thành tổng bình phương của hai số nguyên khi và chỉ khi, trong phân tích ra dạng chính tắc của nó, các thừa số nguyên tố dạng $4k + 3$ đều có số mũ chẵn.

▷ **6.14.** Chứng minh rằng từ $k+1$ số, mà chúng nhỏ hơn $2k$, luôn luôn có thể chọn được hai số mà tỷ số của chúng là một lũy thừa của 2.

▷ **6.15.** Cho n là một số lẻ. Chứng minh rằng từ $(n-1)^2+1$ số nguyên bất kỳ có thể chọn được n số sao cho tổng của chúng chia hết cho n.

CHƯƠNG 7

BÀI TẬP DÃY SỐ NÂNG CAO

7.1. Ví dụ

▷ **7.1.** *Cho dãy Fibonaxi $u_1 = u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Với mọi số nguyên dương m, thì giữa những số hạng từ đầu dãy đến số hạng thứ $m^2 - 1$ tồn tại một số hạng chia hết cho m.*

Lời giải. Chúng ta ký hiệu $\overline{k}$ là phần dư của số k cho m. Chúng ta xét các cặp phần dư của dãy Fibonaxi khi chia cho m:

$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2).(\overline{u}_2, \overline{u}_3), (\overline{u}_3, \overline{u}_4), \ldots, (\overline{u}_n, \overline{u}_{n+1}), \ldots \tag{7.1}$$

Nếu chúng ta qui định hai cặp $(\overline{a}_1, \overline{b}_1)$ và $(\overline{a}_2, \overline{b}_2)$ là bằng nhau khi $\overline{a}_1 = \overline{b}_1$ và $\overline{a}_2 = \overline{b}_2$, thì số tất cả khả năng của các cặp phần dư khi chia cho m là m^2. Vì thế chúng ta lấy $m^2 + 1$ số hạng đầu tiên của dãy (7.1) thì trong chúng phải có hai cặp trùng nhau,(theo nguyên lý Đirichlê) và từ đó các cặp sau lặp lại. Giả sử cặp $(\overline{u}_k, \overline{u}_{k+1})$ là cặp đầu tiên lặp lại trong (7.1). Chúng ta sẽ chứng minh rằng cặp này bằng cặp $(1, 1)$. Thật vậy, giả sử ngược lại, nghĩa là cặp đầu tiên lặp lại là $(\overline{u}_k, \overline{u}_{k+1})$, với $k > 1$. Khi đó chúng ta sẽ tìm được trong (7.1) một cặp $(\overline{u}_l, \overline{u}_{l+1}), (l > k)$, mà nó bằng $(\overline{u}_k, \overline{u}_{k+1})$. Như vậy $u_{l-1} = u_{l+1} - u_l$ và $u_{k-1} = u_{k+1} - u_k$, do $\overline{u}_{l+1} = \overline{u}_{k+1}$ và $\overline{u}_l = \overline{u}_k$, nên phần dư của u_{l-1} và u_{k-1} khi chia cho m cũng bằng nhau, nghĩa là $\overline{u}_{l-1} = \overline{u}_{k-1}$. Từ đó suy ra $(\overline{u}_{k-1}, \overline{u}_k) = (\overline{u}_{l-1}, \overline{u}_l)$, vậy cặp $(\overline{u}_{k-1}, \overline{u}_k)$nằm trong dãy (7.1) trước cả $(\overline{u}_k, \overline{u}_{k+1})$. Điều đó nói lên rằng $(\overline{u}_k, \overline{u}_{k+1})$ không phải cặp lặp lại đầu tiên, trái với giả thiết đặt ra. Nghĩa là $k > 1$ không thể xảy ra, vậy $k = 1$.

Như vậy cặp $(1, 1)$ là cặp đầu tiên lặp lại trong (7.1). Giả sử nó lặp lại t lần $(1 < t < m^2 + 1)$. hoặc là $(\overline{u}_t, \overline{u}_{t+1}) = (1, 1)$. Nghĩa là u_t và u_{t+1} khi chia cho m cho phần dư cùng là 1, vậy hiệu của chúng chia hết cho m. Nhưng $u_{t+1} - u_t = u_{t-1}$. Như vậy số hạng thứ $t - 1$ của dãy Fibonaxi sẽ chia hết cho m. ☺

▷ **7.2.** *Giả sử a và x là các số tự nhiên thực sự lớn hơn 1 và $(x, a-1) = 1$. Dãy số vô hạn $\{u_n\}$ được xác định như sau*

$$u_n = ax^n - a + 1, n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng trong dãy số nói trên chứa vô hạn số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải. Giả thiết phản chứng trong dãy số chỉ có hữu hạn số $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Đặt $q = u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}$. Xét $(q+1)$ số sau $a, ax, ax^2, \ldots, ax^q$. Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai số nguyên r, s sao cho $0 \le r < s \le q$ và

$$ax^r \equiv ax^s \pmod{q} \Longrightarrow ax^r - ax^s \equiv 0 \pmod{q} \text{ hay}$$

$$ax^r(1 - x^{s-r}) \equiv 0 \pmod{q} \tag{7.2}$$

Theo giả thiết ta có $(x, a-1) = 1$, nên suy ra

$$(ax^r, u_{i_j}) = 1, \forall j = 1, 2, \ldots, k. \tag{7.3}$$

Từ (7.3) suy ra

$$(ax^r, q) = 1. \tag{7.4}$$

Từ (7.2) và (7.4) có $x^{s-r} \equiv 1 \pmod{q} \Longrightarrow x^{s-r} = lq + 1$ với $l \in N$. Xét số $u_{i_{k+j}} = ax^{s-r} - a + 1$. Vậy

$$u_{i_{k+j}} = a(lq+1) - a + 1 = qal + 1. \tag{7.5}$$

Từ (7.5) ta có

$$(u_{i_{k+j}}, u_{i_j}) = 1, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k. \tag{7.6}$$

Hệ thức (7.6) chứng tỏ rằng luôn có thể bổ sung thêm vào bộ số $q = u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}$ các số mới, mà bộ số này vẫn thỏa mãn điều kiện: bất kỳ hai số nào cũng nguyên tố cùng nhau. Điều này có nghĩa là trong dãy $\{u_n\}$ đã cho có vô hạn số đôi một nguyên tố cùng nhau.

☺

▷ **7.3.** *Cho $\{u_n\}$ là dãy các số tự nhiên tăng dần: $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$ và thỏa mãn điều kiện $u_1 = 1, u_{n+1} \leq 2n$, với mọi n là số tự nhiên. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tồn tại các số hạng u_p và u_q của dãy sao cho $u_p - u_q = n$.*

Lời giải. Giả sử $n \in N$ là số tự nhiên cho trước. Từ giả thiết suy ra mỗi số hạng $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ không vượt quá $2n$. Xét tập hợp $2n$ số tự nhiên sau $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Chúng ta chia tập hợp này ra làm n cặp $(1, n+1), (2, n+2), \ldots, (n, 2n)$. Do tập hợp trên chứa không ít hơn $(n+1)$ phần tử của dãy $\{u_n\}$ đã cho (vì nói riêng $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ đã thuộc tập hợp ấy), vậy theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai số hạng khác nhau u_p và u_q của dãy thuộc vào một cặp (giả sử $u_p > u_q$). Nhưng hiệu số của mỗi cặp đều bằng n, nên chúng ta có $u_p - u_q = n$.

☺

▷ **7.4.** *Cho $\{u_k\}, k = 1, 2, \ldots, n$ là dãy số tự nhiên sao cho*

$$1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \text{ và } u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2n$$

Chứng minh rằng nếu n chẵn và $u_n \neq n+1$, thì từ dãy trên luôn chọn ra được một dãy con mà tổng các số hạng của dãy con đó bằng n.

Lời giải. Đặt $S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k, k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Xét $n+2$ số $\{0, u_1 - u_n, S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ Theo nguyên lý Đirichlê thì ít nhất hai số khi chia cho n có cùng phần dư. Vậy, chỉ có 4 khả năng sau đây:

1) $(u_1 - u_n)$ chia hết cho n.

Do $u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geq nu_1 \Longrightarrow 2n \geq nu_1 \Longrightarrow u_1 \leq 2$

a) Nếu $u_1 = 2$ thì từ $1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$ và $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2n$ suy ra $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 2$. Do n chẵn nên $n = 2m$ vậy $u_1 + u_2 + \cdots + u_m = 2m = n$

b) Nếu $u_1 < 2$ thì từ $u_1 - u_n$ chia hết cho n, suy ra $u_n = 1$ hoặc là $u_n = 1 + n$ (do u_1 nguyên nên $u_1 = 1$ và $1 \leq u_n \leq 2n$ suy ra được kết luận trên). Nhưng $u_n \neq n+1$ suy ra $u_n = 1$. Mặt khác $1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$ vậy thì $u_2 = u_3 = \ldots = u_{n-1} = 1$. Suy ra $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n$, vô lý.

Như vậy trong trường hợp này, ta chỉ ra tồn tại dãy con $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sao cho $u_1 + u_2 + \cdots + u_m = n$ với $m = \frac{n}{2}$.

2) $S_j - S_i, (j > i)$ chia hết cho n.

Ta có $S_j - S_i = u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j$. Rõ ràng vế phải của đẳng thức trên có ít nhất một số hạng mà $u_k \geq 1, \forall k = 1, 2, \ldots, n$, suy ra $S_j - S_i \geq 1$. Mặt khác cũng hiệu trên nếu không đủ các phần tử của dãy thì bao giờ ta cũng có $S_j - S_i < u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 2n - 1$. Do đó cuối cùng ta có $1 \leq S_j - S_i < u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 2n - 1$ mà $S_j - S_i$ chia hết cho n. điều này chỉ xẩy ra khi $S_j - S_i = n$ hoặc là $u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_j = n$.

3) S_i chia hết cho n.

Ta có $1 \leq S_i \leq S_{n-1} = 2n - u_n < 2n$ mà S_i chia hết cho n, suy ra $S_i = n$ hoặc là $u_1 + u_2 + \cdots + u_i$ chia hết cho n.

4) S_k và $u_1 - u_n$ cho cùng phần dư khi chia cho n, với k nào đó, $1 \leq k \leq n-1$. Suy ra $S_k - (u_1 - u_n)|n \Longrightarrow (u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_n)|n$. Mà $u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_n \leq 2n - u_1 < 2n$. Suy ra $u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_n = n$.

Tóm lại luôn luôn chọn được dãy con mà tổng của chúng bằng n. ☺

▷ **7.5.** *Cho dãy số nguyên $u_1, u_2, \ldots, u_n$ với $n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại dãy con $u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_m}$ trong đó $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leq n$ sao cho $u_{k_1}^2 + u_{k_2}^2 + \cdots + u_{k_m}^2$ chia hết cho n.*

Lời giải. Xét $(n+1)$ số

$$0, u_1^2, u_1^2 + u_2^2, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \ldots, u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

Chia các số này cho n, thì chúng cho nhiều nhất n số dư. Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai số cho cùng số dư, giả sử đó là $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_j^2$ và $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2 (0 \leq j < k \leq n)$. Có nghĩa là số $(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_j^2) - (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2)$ chia hết cho n. Hoặc là $u_{j+1} + u_{j+2} + \cdots + u_k$ chia hết cho n. Dãy con phải tìm là $u_{j+1}, u_{j+2}, \ldots, u_k$. ☺

▷ **7.6.** *Cho dãy Fibonaxi 1, 2, 3, 5, 8,. . . .Đặt $f(n) = 1985^2 + 1956n^2 + 1960$ Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số hạng u_k của dãy Fibonaxi, sao cho $f(u_k)|1989$*

Lời giải. Đặt $h(n) = 4n^2 + 33n + 29 \Longrightarrow h(n) = 1989(n^2 + n + 1) - f(n)$. Từ đó suy ra $f(n)|1989 \Longleftrightarrow h(n)|1989$.

Xét dãy số $\{v_n\}$ sau đây, trong đó

$$\begin{cases} v_0 & = -1, v_1 = 1 \\ v_{n+1} & = v_n + v_{n+1}, n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Nói cách khác dãy $\{v_n\}$ là dãy sinh ra bởi dãy Fibonaxi $\{u_n\}$: $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ bằng cách thêm vào trước dãy này ba số hạng -1, 1, 0.

Gọi r_i là phần dư trong phép chia v_i cho $1989 (i = 0, 1, 2, \ldots)$. Như vậy ta có $0 \leq r \leq 1988$. Xét dãy các cặp số sau đây

$$(r_0, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), \ldots.$$

Vì mỗi cặp r_i chỉ nhận một trong 1989 giá trị, vậy số các cặp khác nhau tối đa là 1989^2. Từ đó theo nguyên lý Đirichlê thì trong $1989^2 + 1$ cặp đầu tiên ít nhất có hai cặp trùng nhau. Giả sử hai cặp ấy là

$$(r_p, r_{p+1}), (r_{p+q}, r_{p+q+1}), p, q \in N$$

Điều ấy có nghĩa là $r_p = r_{p+1}, r_{p+q} = r_{p+q+1}$. Theo cách xác định dãy, ta có

$$v_{p-1} = v_{p+1} - v_p \Longrightarrow r_{p-1} = r_{p+1} - r_p$$

Tươngtự, ta có

$$v_{p+q-1} = v_{p+q+1} - v_{p+q} \Longrightarrow r_{p+q-1} = r_{p+q+1} - r_{p+q}$$

Từ đó suy ra $r_{p-1} = r_{p+q-1}$. Tươngtự, ta có

$$r_{p-2} = r_{p+q-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_2 = r_{q+2}$$
$$r_1 = r_{q+1}$$
$$r_0 = r_q$$

Từ $r_0 = r_q$, $r_1 = r_{q+1}$ và $v_{n+1} = v_n + v_{n+1}$ suy ra $r_i = r_{i+q}, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$. Do vậy $r_0 = r_q = r_{2q} = r_{3q} = \ldots = r_{kq}, \forall k \geq 1$, suy ra $h(v_{kq}) = 1989.A + h(-1) = 1989.A$. Nhưng $\forall k = 1, 2, 3 \ldots v_{kq}$ đều là số Fibonaxi suy ra có vô số số hạng v_{kq} của dãy Fibonaxi mà $f(v_{kq})|1989$. ☺

▷ **7.7.** *Cho dãy số* $\{u_n\}$ *xác định như sau*

$$u_1 = 20, u_2 = 100, \text{ và } u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1} - 1976, n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số của dãy số chia hết cho 1996.

Lời giải. Đặt $u_n = 1996p_n + q_n, \forall n = 1, 2, \ldots$ trong đó p_n, q_n là các số nguyên và $0 \leq q_n \leq 1995$. Xét dãy số

$$(q_1, q_2), (q_2, q_3), \ldots, (q_n, q_{n+1}), \ldots$$

Vì dãy này vô hạn mà số các số q_i là hữu hạn nên tồn tại hai số tự nhiên l, m (giả sử $m > l$) sao cho $(q_l, q_{l+1}) = (q_m, q_{m+1})$ hiểu theo nghĩa $q_l = q_m$ và $q_{l+1} = q_{m+1}$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $q_{l-1} = q_{m-1}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} 5(u_{m-1} - u_{l-1}) &= (u_{m+1} - 4u_m + 1976) - (u_{l+1} - 4u_l + 1976) \\ &= (u_{m+1} - u_{l+1}) - 4(u_m - u_l) \end{aligned} \tag{7.7}$$

Do $u_k = 1996p_k + q_k$, nên từ (7.7) có

$$\begin{aligned} 5(u_{m-1} - u_{l-1}) = 1996(p_{m+1} - p_{l+1}) - (q_{m+1} - q_{l+1}) - \\ - 4[1996(p_m - p_l) - (q_m - q_l)] \end{aligned} \tag{7.8}$$

Thay những giá trị bằng nhau vào ((7.8) ta đi đến

$$5(u_{m-1} - u_{l-1}) = 1996[(p_{m+1} - p_{l+1}) - 4(q_m - q_l)] \tag{7.9}$$

Từ (7.9) suy ra $5(u_{m-1} - u_{l-1})|1996$, mà $(5, 1996) = 1 \Longrightarrow (u_{m-1} - u_{l-1})|1996 \Longrightarrow 1996(p_{m-1} - p_{l-1}) + (q_{m-1} - q_{l-1})|1996$

$$\Longrightarrow (q_{m-1} - q_{l-1})|1996. \tag{7.10}$$

Do $0 \leq q_{m-1} \leq 1995, 0 \leq q_{l-1} \leq 1995$

$$\Longrightarrow -1995 \leq q_{m-1} - q_{l-1} \leq 1995 \qquad (7.11)$$

Từ (7.10) và (7.11) suy ra $(q_{m-1} - q_{l-1}) = 0$ hay $q_{m-1} = q_{l-1}$. Tương tự chúng ta cũng có thể đi đến $q_{m-2} = q_{l-2}$ và cứ tiếp tục như thế đi đến

$$q_2 = q_2 + (m-1) \text{ và } q_1 = q_1 + (m-l) \qquad (7.12)$$

Ta chứng minh rằng u_{m-l} chính là số hạng của dãy mà chia hết cho 1996. Thật vậy theo cách xác định dãy, ta có

$$\begin{aligned} 5u_{m-l} &= u_{m-l+2} - 4u_{m-l+1} + 1976 \\ &= 1996p_{m-l+2} + q_{m-l+2} - 4(1996p_{m-l+1} + q_{m-l+1}) + 1996 \\ &= 1996(p_{m-l+2} + 4p_{m+l+1}) + (q_{m-l+2} + 4q_{m-l+1}) + 1996 \end{aligned}$$

Thay (7.12) vào đẳng thức trên ta có

$$5u_{m-l} = 1996(p_{m-l+2} - 4p_{m-l+1}) + (q_2 - 4q_1) + 1996. \qquad (7.13)$$

Do

$$\begin{aligned} u_1 = 20 &\Longrightarrow u_1 = 0.1996 + 20 \Longrightarrow q_1 = 20 \\ u_2 = 100 &\Longrightarrow u_2 = 0.1996 + 100 \Longrightarrow q_2 = 100 \end{aligned}$$

Vậy từ (7.13) suy ra

$$5u_{m-l} = 1996(p_{m-l+2} - 4p_{m-l+1}) + 1996. \qquad (7.14)$$

Do p_{m-l+2} và p_{m-l+1} là số nguyên, vậy từ (7.14) suy ra $5u_{m-l}|1996$ mà $(5, 1996) = 1$ suy ra $u_{m-l}|1996$. ☺

▷ **7.8.** *Cho dãy số tự nhiên $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ sao cho $1 \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+1} \leq 2n$. Chứng minh rằng tồn tại hai số tự nhiên i và j sao cho u_j chia hết cho u_i, $(j > i)$.*

Lời giải. Ký hiệu v_i là ước số lẻ lớn nhất của u_i tương ứng, nghĩa là $u_i = 2^{p_i}.v_i$, với v_i lẻ và số tự nhiên p_i nào đó $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Do $1 \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+1} \leq 2n$ suy ra với mọi $i = 1, 2, \ldots, n+1$ ta có $v_i < 2n$. Xét $(n+1)$ số lẻ $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$. Các số lẻ này đều dương và nhỏ hơn $2n$. nên số lượng của chúng bằng n. Vậy theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai số i, j sao cho $1 \leq i < j \leq n+1$ mà $v_i = v_j$. Theo cách đặt trên thì $u_i = 2^{p_i} v_i$ và $u_j = 2^{p_j} v_j$. Nhưng $u_i < u_j$ suy ra $2^{p_i} v_i < 2^{p_j} v_j$, mà $v_i = v_j$. Suy ra $2^{p_i} < 2^{p_j}$. Do p_i, p_j là các số nguyên dương nên 2^{p_j} chia hết cho 2^{p_i}. Nghĩa là u_j chia hết cho u_i. ☺

▷ **7.9.** *(Đề thi Toán Olympic Quốc tế lần thứ 13) Dãy số* $\{u_n\}, n = 2, 3, 4, \ldots$ *xác định như sau* $u_n = 2^n - 3$. *Chứng minh rằng dãy số này chứa một tập vô hạn các phần tử, sao cho bất kỳ hai số nào của tập hợp này cũng nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp. Giả thiết đã xây dựng được k phần tử của dãy

$$\overline{u}_1 = 2^{n_1} - 3, \overline{u}_2 = 2^{n_2} - 3, \ldots, \overline{u}_k = 2^{n_k} - 3$$

mà với mọi $i \neq j$, thì $(\overline{u}_j, \overline{u}_i) = 1$, với $1 \leq i, j \leq k$, ở đây $2 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

Chúng ta sẽ xây dựng số $\overline{u}_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$ nguyên tố cùng nhau với các số $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ bằng cách sau đây: Đặt $l = \overline{u}_1.\overline{u}_2 \ldots \overline{u}_k$. Xét $(l+1)$ số $2^0, 2^1, \ldots 2^l$ Khi chia các số này cho l ta được một tập hợp gồm l số dư. Vậy theo nguyên lý Đirichlê có ít nhất hai số cho ta cùng phần dư. Giả sử hai số đó là 2^r và 2^s, $(s > r)$. Bây giờ chọn số p sao cho $pl = 2^r - 2^s = 2^s(2^{r-s} - 1)$. Do l là số lẻ nên 2^s không chia hết cho l . Mặt khác $(2^r, 2^{r-s}) = 1$ suy ra $(2^{r-s} - 1)$ chia hết cho l. Điều này nghĩa là tồn tại số tự nhiên q sao cho $2^{r-s} - 1 = ql$, suy ra $2^{r-s+2} - 3 = 4.2^{r-s} - 3 = 4(ql+1) - 3 = 4ql + 1$.

Đặt $\overline{u}_{k+1} = 2^{r-s+2} - 3 = ql$. Do $\overline{u}_{k+1} = 4ql + 1$ và $l = \overline{u}_1.\overline{u}_2 \ldots \overline{u}_k$, suy ra $\overline{u}_{k+1} > \overline{u}_k$.

Do $\overline{u}_{k+1} = 4ql + 1$, suy ra $(\overline{u}_{k+1}, 1) = 1$. Do đó $(\overline{u}_{k+1}, \overline{u}_i) = 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Như vậy khi đã xây dựng được dãy con $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ thỏa mãn điều kiện đầu bài, thì sẽ xây dượng được dãy con mới $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$, $\overline{u}_{k+1}$ cũng có tính chất ấy. Theo nguyên lý qui nạp chúng ta xây dựng được dãy con vô hạn $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n, \ldots$. của dãy đã cho có tính chất: Bất cứ cặp phần tử nào của dãy con ấy cũng nguyên tố cùng nhau. ☺

▷ **7.10.** *Cho u_1 và u_2 là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Dãy số $\{u_n\}$ xác định với u_1, u_2 là hai số hạng đầu tiên, còn khi $n = 2, 3, \ldots$ ta xác định*

$$u_{n+1} = u_n u_{n-1} + 1$$

Chứng minh rằng với mọi $i > 1$ tồn tại $j > i$ sao cho u_j chia hết cho u_i.

Lời giải. Lấy $i > 1$ tùy ý, và p là ước số nguyên tố của u_i. Xây dựng dãy số $\{v_n\}$ như sau

$$\begin{cases} 0 & \leq v_n \leq p - 1 \\ v_n & \equiv u_n \pmod p \end{cases}$$

Ta cũng có $v_{n+1} = v_n v_{n-1} + 1 \pmod p), \forall n = 2, 3 \ldots$ Vì các cặp (v_n, v_{n-1}) là vô hạn, mà v_n chỉ nhận hữu hạn giá trị suy ra $\{v_n\}$ phải là dãy tuần hoàn từ một lúc nào đó. Ta cần chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $k_p > 0$ sao cho

$$v_{i+k_p} = 0. \tag{7.15}$$

Xét hai khả năng sau

1) Giả sử dãy $\{v_n\}$ tuần hoàn từ v_s với chu kỳ T, trong đó $s > i$. Ta có

$$v_{s+1} = v_s v_{s-1} + 1 = v_{s+T+1} = v_{s+T} v_{s+T-1} + 1 \pmod p$$

$$v_s v_{s-1} = v_{s+T} v_{s+T-1} \pmod p. \tag{7.16}$$

a) Nếu $v_s = v_{s+T} \equiv 0 \pmod p$, thì $v_s = v_{s+T} = 0$, do $0 \leq v_n \leq p-1, \forall n$. Khi đó chỉ việc chọn $k_p = s - i$, Suy ra $v_{i+k_p} = v_s = 0$, vậy (7.15) đúng.

b) Nếu $v_s = v_{s+T} \neq 0$, thì từ (7.16) có $v_{s-1} = v_{s+T-1}$. Suy ra $\{v_n\}$ tuần hoàn không phải bắt đầu từ v_s điều này mâu thuẫn với cách chọn s.Khả năng này không xẩy ra.

Tóm lại hệ thức (7.15) đúng trong trường hợp 1).

2) Nếu $s \leq i$ thì hệ thức (7.15) hiển nhiên đúng. Ta có $v_{i+1} \equiv u_{i+1} \pmod p \equiv u_i u_{i-1} + 1 \pmod p$ vậy $v_i \equiv u_i \pmod p$ nhưng do p là ước nguyên tố của u_i suy ra $v_i \equiv 0 \pmod p$, như vậy $v_{i+1} \equiv 1 \pmod p$ hay là $v_{i+1} = 1$.

Tươngtự, do $v_{i+k_p} = 0$ suy ra $v_{i+k_p+1} = 1$. Như vậy suy ra $\{v_n\}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ k_p tức là với mọi l nguyên dương, ta có

$$v_{i+l.k_p} = 0. \tag{7.17}$$

Nghĩa là $u_{i+l.k_p}$ chia hết cho p.

Như vậy với mọi ước nguyên tố p của u_i ta xây dựng được số k_p sao cho (7.17) đúng.

Gọi m là bội số chung nhỏ nhất của tất cả các số k_p, theo (7.3) suy ra $v_{i+lm} = 0$ với mọi l nguyên dương. Suy ra u_{i+lm} chia hết cho tất cả các ước số nguyên tố của u_i. Tức là u_{i+lm} chia hết cho u_i với mọi số nguyên dương l. Lấy $j = i + lm$, ta có điều phải chứng minh.

☺

7.2. Bài tập

▷ **7.11.** Nếu ba số nguyên tố thực sự lớn hơn 3 lập thành một cấp số cộng thì công sai của chúng chia hết cho 6.

▷ **7.12.** cho $f(n)$ là hàm xác định trên tập các số nguyên dương như sau: nếu $n = \overline{a_1a_2\ldots a_k}$, thì $f(n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^{1998}$. Với mỗi số nguyên dương n, lập dãy vô hạn $u_i(n), i = 1, 2, \ldots$ như sau

$$\underbrace{u_i(n) = f(f(\ldots f(n) i \text{ lần } f}$$

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, tồn tại p sao cho dãy $u_i(n), i = p, p + 1, \ldots$ là dãy tuần hoàn.

▷ **7.13.** Cho $u_1, u_2, \ldots, u_n$ là dãy số tùy ý gồm n số hạng. Chứng minh rằng luôn luôn trích được một dãy con sao cho nếu gọi S là tổng các phần tử của dãy con ấy, thì S khác với số nguyên gần nhất một lượng không vượt quá $\dfrac{1}{n+1}$.

▷ **7.14.** Chứng minh rằng nếu những số nguyên a và m nguyên tố cùng nhau, thì tồn tại một số tự nhiên n mà tích na chia cho m cho số dư 1.

CHƯƠNG 8

SỐ THỰC VỚI TẬP TRÙ MẬT

8.1. Tập trù mật

Trên đường thẳng thực chúng ta thường quan tâm tới khái niệm một khoảng (một đoạn thẳng), ta có thể hiểu **một khoảng** trên đường thẳng thực là tập hợp tất cả các số thực nằm giữa hai điểm đã cho. Như vậy hai điểm để xác định một khoảng có thể nằm trong hoặc nằm ngoài khoảng đó ; đây là xuất phát của khái niệm đóng, mở,.. ở ngành giải tích, giải tích hàm trong toán học cao cấp. Nhưng ở đây ta không quan tâm điều đó, mà chỉ quan tâm tới các khái niệm sau đây với quan điểm kiến thức sơ cấp. Với a, b là số thực, ký hiệu [a,b] là khoảng được tính cả hai điểm đầu a, b và gọi là khoảng đóng. Khoảng mở được ký hiệu là (a, b), không lấy hai điểm đầu a, b. Ngoài ra ta còn xét khoảng nửa đóng (nửa mở) do việc ta chỉ lấy một trong hai điểm đầu a hoặc b,ví dụ như $[a, b)$ hoặc $(a, b]$. Một khoảng trong tập số thực gọi là suy thoái nếu nó chỉ là một điểm (tức là khi hai điểm đầu trùng nhau).

Một tập hợp A của số thực gọi là trù mật, nếu mọi khoảng không suy thoái đều chứa một số phần tử của A.

Một ví dụ dễ thấy là tập hợp số hữu tỷ gồm các số có thể biểu diễn như một thương của hai số nguyên và tập hợp số vô tỷ gồm những số không phải là số hữu tỷ đều là những tập trù mật trong tập số thực.

Người ta còn mở rộng khái niệm trù mật cho một khoảng trên đường thẳng thực. Cho Δ là một khoảng bất kỳ trên đường thẳng thực. Chúng ta gọi tập hợp B gồm những số thực là trù mật trong Δ, nếu với mọi khoảng con không suy thoái của Δ đều chứa những phần tử của B. Rõ ràng tập hợp các số hữu tỷ trù mật trong mọi khoảng; và tập hợp các số vô tỷ cũng có tính chất ấy.

Những ký hiệu hay được dùng: với mọi số thực x, ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, $\{x\}$ là số $x - [x]$; $[x]$ và $\{x\}$ gọi là phần nguyên và phần thập phân của số x. Từ định nghĩa có thể thấy ngay $0 \leq x - [x] < 1$. Để hiểu rõ hơn khái niệm trù mật trong phần này ta xét một loạt bài toán có liên quan và cách sử dụng nguyên lý Đirichlê để chứng minh đinh lý cơ bản Kronecker.

8.2. Ví dụ

▷ **8.1.** *Nếu một tập hợp A của số thực là trù mật và r là số thực khác không, thì tập hợp gồm tất cả tích số $\{ra\}$ với a chạy trong A cũng là tập trù mật.*

Lời giải. Có hai trường hợp xẩy ra: $r > 0$ và $r < 0$. Vì cách chứng minh hoàn toàn tương tự nên ta chỉ xét trường hợp đầu. Cho x và y là hai số thực và $x < y$. Khi đó $\frac{x}{r} < \frac{y}{r}$ và theo giả thiết A là tập trù mật, thì tồn tại phần tử a thuộc A sao cho $\frac{x}{r} < a < \frac{y}{r}$. Suy ra $x < ar < y$. Như vậy mọi khoảng mở (x, y) chứa số dạng ra với a thuộc A. ☺

▷ **8.2.** *(Định lý Kronecker) Với mọi số vô tỷ α, tập hợp tất cả các số có* *dạng $m\alpha + n$ là tập trù mật, ở đây m và n là những số nguyên bất kỳ.*

Lời giải. Cần phải chứng minh rằng mọi khoảng không suy thoái Δ chứa những điểm dạng $m\alpha + n$. Chúng ta chia khoảng $[0,1]$ ra thành một số hữu hạn khoảng con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ mà độ dài của mỗi khoảng con nhỏ hơn độ dài của Δ. Chú ý rằng với mọi số a tồn tại một số nguyên n, sao cho số $a + n$ nằm trong khoảng $[0,1]$. Suy ra với mọi số nguyên m có thể cho tương ứng với một số dạng $m\alpha + n$, mà nó nằm trong khoảng $[0,1]$. Nhưng đoạn thẳng $[0,1]$ được chia ra hữu hạn khoảng nhỏ. Suy ra tồn tại những số nguyên m, m_1, n, n_1, với $m \neq m_1$ và những số $m\alpha + n$ và $m_1\alpha + n_1$ nằm trong cùng một khoảng nhỏ Δ_i. Do đó khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn độ dài của Δ. Chúng ta cũng thấy không thể xẩy ra $m\alpha + n = m_1\alpha + n_1$, vì từ đẳng thức này suy ra $\alpha = \dfrac{n_1 - n}{m - m_1}$ mà lại là một số hữu tỷ, trái với giả thiết.

Như vậy chúng ta khẳng định rằng số $(m - m_1)\alpha + (n - n_1)$ khác không và có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn Δ. Từ đó suy ra một số ước số của nó, cũng có dạng $m\alpha + n$, sẽ nằm trong khoảng Δ. ☺

▷ **8.3.** *Cho α là một số vô tỷ dương. Khi đó tập hợp tất cả số có dạng $m\alpha - n$ là tập trù mật,với m và n là những số tự nhiên bất kỳ.*

Lời giải. Kết luận của bài này mạnh hơn định lý trên vì nó khẳng định một tập số thực nhỏ hơn tập mô tả trong điịj nh lý đó cũng trù mật.

Cho khoảng không suy thoái Δ nằm ở bên phải số không và có độ dài $\epsilon > 0$. Không ảnh hưởng đến kết quả chứng minh có thể giả thiết $\epsilon < 1$. Ngoài ra ta có thể chọn số tự nhiên k sao cho $k \geq \dfrac{\epsilon}{\alpha}$. Từ 8.1 và 8.2 suy ra tập các số $kp\alpha + kq$ với p và q là các số nguyên bất kỳ, là tập trù mật. Nghĩa là tồn tại các số nguyên p và q thỏa mãn

$$0 < kp\alpha + kq < \epsilon. \tag{8.1}$$

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng giữa những cặp số nguyên (p, q) trong (8.1) có những cặp mà $p > 0$. Thật vậy, trường hợp $p = 0$ không thể xẩy ra vì từ (8.1) suy ra $0 < kq < \epsilon$, mâu thuẫn với điều ta đã biết là kq là số nguyên và $\epsilon < 1$. Do vậy chỉ còn phải chứng minh cho trường hợp $p < 0$. Trong trường hợp này số có dạng $kps\alpha + kqt$ với s, t là những số nguyên bất kỳ, tạo thành tập trù mật. Từ (8.1) suy ra tồn tại số nguyên s và t sao cho

$$0 < kps\alpha + kqt < kp\alpha + kq. \tag{8.2}$$

Nếu $s < 0$, thì $kps > 0$ và chứng minh lại đúng. Vì thế ta chỉ xét $s \geq 0$. Từ (8.1) và (8.2) suy ra

$$0 < kp(1-s)\alpha + kq - kpt < \epsilon. \tag{8.3}$$

Vì với $s = 0$ bất đẳng thức (8.2) không thể xẩy ra, nên $s > 0$. Nhưng bởi vì s là số nguyên, thì từ $s > 0$ suy ra $s \geq 1$. Tại vì ((8.3) không thể xẩy ra với $s = 1$, từ bất đẳng thức cuối cùng lại suy ra $s > 1$. Như vậy $kp(1-s) > 0$. Điều đó có nghĩa là tồn tại các số nguyên p và q thỏa mãn (8.1) và $p > 0$. Từ (8.1) suy ra

$$kq < \epsilon - kp\alpha < \epsilon - p\frac{\epsilon}{\alpha}\alpha = \epsilon(1-p) \leq 0$$

Vậy $kq < 0$. Theo cách này (8.1) được đưa về dạng $0 < m\alpha - n < \epsilon$, ở đây m và n là những số tự nhiên. Bởi vì ϵ là độ dài củaΔ, từ bất đẳng thức cuối cùng suy ra một ước số nào đó của $m\alpha - n$, cũng có dạng này, sẽ nằm trong Δ. Tương tự cũng chứng minh được khi Δ nằm ở bên trái số không. ☺

▷ **8.4.** *Cho α là số vô tỷ bất kỳ. Khi đó tập hợp những số dạng $\{\alpha n\}$, với n là số tự nhiên bất kỳ, là tập trù mật trong khoảng (0,1).*

Lời giải. Cần phải chứng minh rằng mọi khoảng con không suy biến (a,b) của (0,1) chứa số có dạng $\{\alpha n\}$ với một số tự nhiên n nào đó. Chúng ta chứng minh cho trường hợp khi α là một số dương. Theo bài 8.3 những số có dạng $n\alpha - m$ với n,m là các số tự nhiên, tạo thành tập trù mật. Nghĩa là tồn tại những số tự nhiên m và n thỏa mãn $0 \leq a < n\alpha - m < b < 1$. Nhưng từ định nghĩa $[\alpha n]$ suy ra $0 \leq n\alpha - [n\alpha] < 1$. Chúng ta nhận được hiệu hai số nguyên m và $[n\alpha]$ thỏa mãn $-1 < m - [n\alpha m] < 1$, điều này chỉ xẩy ra khi $m - [n\alpha m] = 0$, do đó $m = [n\alpha]$. Từ (8.1) chỉ ra rằng số $\{n\alpha\} = n\alpha - [n\alpha]$ nằm trong khoảng (a,b). Với $\alpha > 0$, chúng ta đã chứng minh xong.

Trường hợp $\alpha < 0$. Khi đó $-\alpha > 0$ và từ bài 8.3 suy ra tồn tại những số tự nhiên m và n, thỏa mãn $-1 \leq -b < n(-\alpha) - m < -a \leq 0$. Nhân các vế với -1 chúng ta nhận được $0 \leq a < n\alpha - m < b \leq 1$. Như vậy dễ dàng tính ra $m = -[n\alpha]$ và $\{n\alpha\}$ nằm trong khoảng (a,b). ☺

▷ **8.5.** *Tập hợp tất cả các số dạng $\{\log n\}$ với n là số tự nhiên bất kỳ là tập trù mật trong (0,1).*

Lời giải. Chúng ta có thể chứng minh mở rộng hơn một chút: tập hợp các số dạng $\{n \log 2\}$ với n là số tự nhiên bất kỳ, là tập trù mật trong (0,1).

Để đạt mục đích này chúng ta chứng minh $\log 2$ là một số vô tỷ. Thật vậy, trong trường hợp ngược lại thì tồn tại hai số tự nhiên p và q, mà $\log 2 = \dfrac{p}{q}$, nghĩa là $2 = 10^{\frac{p}{q}}$. Lũy thừa đẳng thức cuối cùng với q chúng ta nhận được $2^q = 2^p.5^p$. Điều này trái định lý cơ bản của số học về việc phân tích ra thừa số nguyên tố. Như vậy

$\log 2$ thực sự là một số vô tỷ. Áp dụng 8.4 suy ra tập các số có dạng $\{n\log 2\}$ là trù mật trong (0,1).

Mặt khác, theo tính chất của logarit, $\log 2^n = n\log 2$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ☺

▷ **8.6.** *Cho m là số nguyên, n là số nguyên không âm. Tập hợp tất cả các số có dạng* $\frac{m}{2^n}$ *là tập trù mật.*

Lời giải. Do các bài toán trên, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng tập hợp số dạng $\frac{3^m}{2^n}$ với m, n là những số nguyên dương, là trù mật trong khoảng $(0, +\infty)$. Điều đó có nghĩa là với mọi cặp số dương $a, b (a < b)$ tồn tại những số tự nhiên m và n thỏa mãn $a < \frac{3^m}{2^n} < b$. Sau khi logarit hóa cặp bất đẳng thức này theo cơ số 2, chúng ta nhận được cặp bất đẳng thức tương đương $\log_2 a < m\log_2 3 - n < \log_2 b$. Cách chứng minh tương tự như 8.5 cho thấy $\log_2 3$ là vô tỷ. Khi đó định lý Kronecker chỉ ra rằng trong đoạn $(\log_2 a, \log_2 b)$ chứa số có dạng $\{m\log_2 3 - n\}$. ☺

▷ **8.7.** *Tập hợp tất cả các số hạng của dãy xác định bằng công thức* $x_n = \frac{n}{10^{[\log n]+1}}, n = 1, 2, 3\ldots$, *là trù mật trong khoảng* $(\frac{1}{10}, 1)$.

Lời giải. Lấy hai số thực a và b sao cho $\frac{1}{10} \leq a < b \leq 1$. Cần phải chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n, thỏa mãn $a < \frac{n}{10^{[\log n]+1}} < b$. Sau khi logarit hóa bất đẳng thức trên với cơ số 10 chúng ta nhận được bất đẳng thức tương đương $1 + \log a < \log n - [\log n] = \{\log n\} < 1 + \log b$. Nhưng khoảng mở với các đầu mút $1 + \log a$ và $1 + \log b$ rõ ràng nằm trong khoảng $(0, 1)$. Điều này giải thích tại sao tồn tại một số tự nhiên n thỏa mãn bất đẳng thức sau cùng, bởi vì theo 8.5 tập hợp các số có dạng $\{\log n\}$ là trù mật trong $(0,1)$. Như vậy thì $a < x_n < b$, điều ta cần chứng minh. ☺

▷ **8.8.** *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn những số lũy thừa của 2, mà khi viết theo cơ số 10 chúng luôn luôn bắt đầu bằng 8975.*

Lời giải. Một số 2^m bắt đầu bằng nhóm số 8975 khi và chỉ khi với một số tự nhiên n nào đó, những đẳng thức sau được thỏa mãn $8975.10^n \leq 2^m < 8976.10^n$. Như cách giải các bài trước chúng ta logarit hóa bất đẳng thức trên và nhận được các bất đẳng thức tương đương $\log 8975 \leq m \log 2 - n < \log 8976$. Tại vì $\log 2$ là một số vô tỷ, nên những số có dạng $m \log 2 - n$ với n, m là những số tự nhiên tạo thành một tập trù mật. Điều này có nghĩa là tồn tại vô số cặp số tự nhiên m và n thỏa mãn các bất đẳng thức sau cùng, suy ra cũng thỏa mãn các bất đẳng thức trước đó. Chú ý bài toán còn đúng khi thay cơ số hai bằng cơ số 10 của logarit và số 8975 có thể thay bằng một tổ hợp số bất kỳ, chứng minh điều này dành cho bạn đọc. ☺

▷ **8.9.** *Với mọi số tự nhiên n, ký hiệu x_n là chữ số đầu tiên của số 2^n (trong cách viết với cơ số 10). Chứng minh rằng dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ không phải là dẫy tuần hoàn.*

Lời giải. Giả sử ngược lại là tồn tại những số nguyên dương k và d sao cho $x_k = x_{k+d} = x_{k+2d} = \ldots = x_{k+nd} = \ldots$ Nói cách khác $2^k, 2^{k+d}, 2^{k+2d}, \ldots, 2^{k+nd}, \ldots$ có cùng chữ số đaah u tiên trong cách viết với cơ số 10. Bầy giờ chúng ta khẳng định rằng mọi số tự nhiên N có thể biểu diễn dưới dạng $N = 10^{\log N} = 10^{[\log N] + \{\log N\}} = 10^{[\log N]}.10^{\{\log N\}}$. Vì $0 \leq \{\log N\} < 1$, nên $1 \leq 10^{\{\log N\}} < 10$, suy ra chữ số đầu tiên của N trùng với phần nguyên của của số $10^{\{\log N\}}$. Đến đây suy ra tồn tại một chữ số $s, 1 \leq s \leq 9$, thỏa mãn bất đẳng thức sau: $s \leq 10^{\{\log 2^{k+nd}\}} < s+1$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$. Sau khi logarit hóa đẳng thức trên chúng ta có $\log s \leq \{(k+nd)\log 2\} < \log(s+1)$. Điều này nghĩa là tất cả các số có dạng $\{(k+nd)\log 2\}, n = 0, 1, 2, \ldots$ nằm trong khoảng $[\log s, \log(s+1))$. Dễ dàng chứng minh rằng tập hợp những số này trù mật trong đoạn (0,1). Điều đó trái với kết luận : tồn tại tập con mở của đoạn (0,1) không có điểm chung với $[\log s, \log(s+1))$. Như vậy điều giả sử ngược lại là sai. ☺

▷ **8.10.** *Hãy tìm trong đoạn thẳng $[0, \pi]$, tất cả số thực t thỏa mãn bất phương trình $\cos nt \geq \cos t$ với mọi số tự nhiên n.*

Lời giải. - Chúng ta sẽ chứng minh rằng nếu t có tính chất đã nêu trong bài toán thì tỷ số $\frac{t}{\pi}$ là một số hữu tỷ. Thật vậy giả sử $\frac{t}{\pi}$ là số vô tỷ. Khi đó $t \neq \pi$; Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả thiết rằng $0 \leq t < \pi$. Vì $\frac{t}{2\pi}$là số vô tỷ dương, theo định lý Kronecker tồn tại những số tự nhiên m và n, thỏa mãn bất phương trình $\frac{t}{2\pi} < m\frac{t}{2\pi} - n < 1 - \frac{t}{2\pi}$, hay là $t < mt - 2n\pi < 2\pi - t$. Từ tính chất của hàm cos trong đoạn $[0, 2\pi]$ chúng ta suy ra $\cos mt = \cos(mt - 2n\pi) < \cos t$. Điều này trái với cách chọn t, do vậy tỷ số $\frac{t}{\pi}$ là số hữu tỷ.

Như vậy t có thể biểu diễn dưới dạng $t = \frac{p}{q}2\pi$, ở đây p và q là những số nguyên tố cùng nhau và $0 \leq p \leq q$ (tại vì $0 \leq t \leq 2\pi$). Nếu q là số chẵn, thì $n = \frac{q}{2}$ là số tự nhiên và ngoài ra p là số lẻ, vì p và q là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy $\cos t \leq \cos nt = \cos p\pi = -1$, từ đó suy ra $\cos t = -1$ và $t = \pi$. Rõ ràng π thỏa mãn tất cả các điều kiện đã cho.

Chúng ta chỉ còn phải xét trường hợp q là số lẻ. Có thể chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots \cos nt$ bằng một số nào đó trong dẫy sau đây

$$1 = \cos 0.\frac{2\pi}{q}, \cos 1.\frac{2\pi}{q}, \cos 2.\frac{2\pi}{q}, \ldots, \cos((q-1)\frac{2\pi}{q}). \qquad (8.4)$$

Thật vậy, nếu $n = sq + r$, ở đây $0 \leq r \leq q - 1$, thì $\cos nt = \cos(sqt + rt) = \cos(2ps\pi + rt) = \cos rt$. Nếu $q = 2k + 1$ là một số lẻ, thì số nhỏ nhất trong (8.4) là các số $\cos \frac{k}{2k+1} 2\pi$ và $\cos \frac{k+1}{2k+1} 2\pi$. Lấy $t = \frac{p}{2k+1} 2\pi, 0 \leq t \leq \pi$, có tính chất mong muốn, chúng ta sẽ chứng minh khi đó $p = k$. Để đạt mục đích này chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại một số nguyên dương n mà $\cos nt = \cos \frac{k}{2k+1} 2\pi$. Thật vậy: vì $2k + 1$ và p là những số nguyên tố cùng nhau tồn tại những số nguyên m và n thỏa mãn $0 \leq n \leq 2k + 1$ và $(2k + 1)m + pn = k$. Từ đẳng thức sau cùng suy ra $2m\pi + nt = \frac{k}{2k+1} 2\pi$. Suy ra $\cos nt = \cos \frac{k}{2k+1} 2\pi$. Dễ dàng thấy rằng những số có dạng $\frac{k}{2k+1} 2\pi$ và $\frac{k+1}{2k+1} 2\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ là nghiệm của bài toán. Kết luận cuối cùng là những giá trị của t phải tìm là $t = \pi$ và $\frac{k}{2k+1} 2\pi, \frac{k+1}{2k+1} 2\pi$, với $k = 0, 1, 2 \ldots \ldots$ ☺

8.3. Bài tập

▷ **8.11.** Cho a, b, c là những số thực sao cho $[an] + [bn] = [cn]$ với mọi số tự nhiên n. Chứng minh rằng ít nhất một trong các số a, b là nguyên.

▷ **8.12.** Cho α là một số hữu tỷ. Chứng minh rằng tập hợp các số có dạng $\{\alpha n\}, n = 1, 2, \ldots$ không trù mật trong khoảng $(0, 1)$.

▷ **8.13.** Chứng minh rằng với một số vô tỷ bất kỳ α và một số hữu tỷ bất kỳ β, tập hợp số có dạng $\{\alpha n + \beta\}, n = 1, 2, \ldots$ là trù mật trong khoảng $(0, 1)$.

▷ **8.14.** Chứng minh rằng tập hợp số dạng $\{\sqrt{n}\}$ với n là số tự nhiên là tập trù mật trong khoảng (0,1).

CHƯƠNG 9
NHỮNG ỨNG DỤNG KHÁC CỦA NGUYÊN LÝ ĐIRICHLE

9.1. Xấp xỉ một số thực

▷ **9.1.** *Cho x là một số thực, còn n là một số tự nhiên. Khi đó tồn tại những số nguyên p và q thỏa mãn $1 \leq q \leq n$ và*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq}. \tag{9.1}$$

Lời giải. Chúng ta xét những số $kx - [kx] (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Chúng gồm $n + 1$ số và nằm trong khoảng $[0, 1]$. Chúng ta chia khoảng $[0, 1]$ ra n khoảng con bằng nhau $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ và độ dài của mỗi khoảng này bằng $\frac{1}{n}$. Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại hai số khác nhau k và l nằm trong $0, 1, 2, \ldots, n$, sao cho những số $kx - [kx]$ và $lx - [lx]$ nằm trong cùng một khoảng con thứ m. Do đó khoảng cách giữa chúng không quá $\frac{1}{n}$, tức là $|kx - [kx] - (lx - [lx])| \leq \frac{1}{n}$, hay là

$$|(k - l)x - ([kx] - [lx])| \leq \frac{1}{n}. \tag{9.2}$$

Bởi vì $k \neq l$, không ảnh hưởng đến kết quả chứng minh ta có thể giả thiết rằng $k > l$. Bởi vì ngoài ra còn có $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq n$, nên $1 \leq k - l \leq n$. Ta đặt $q = k - l$ và $p = [kx] - [lx]$. Khi đó p và q

là những số nguyên và thỏa mãn $1 \leq q \leq n$. Với cách đặt này (9.2) đưa về dạng $|qx - p| \leq \dfrac{1}{n}$, từ đây chia hai vế cho q ta có (9.1). ☺

▷ **9.2.** *Với mọi số thực x tồn tại vô hạn số tự nhiên q, với mỗi q tồn tại số nguyên p, sao cho chúng thỏa mãn bất đẳng thức.*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}. \tag{9.3}$$

Lời giải. Nếu x là số hữu tỷ, tức là $x = \dfrac{r}{s}$ với r là số nguyên và s là số tự nhiên, thì kết luận của bài toán là đúng, vì có thể đặt $p = mr$ và $q = ms$ với số tự nhiên bất kỳ m. Với tất cả cách chọn p và q như vậy (9.3) được thỏa mãn, vì vế trái luôn luôn bằng không. Như vậy chỉ còn phải xét trường hợp x là số vô tỷ. Giả sử chỉ có hữu hạn số tự nhiên q, mà với chúng tồn tại số nguyên p thỏa mãn (9.3), ký hiệu chúng là $q_1, q_2, \ldots, q_l$. Với bất kỳ $\lambda = 1, 2, \ldots, l$ ký hiệu p_λ là số nguyên thỏa mãn

$$\left|x - \frac{p_\lambda}{q_\lambda}\right| \leq \left|x - \frac{p}{q_\lambda}\right|$$

với mọi số nguyên p. Vì số x là vô tỷ, mọi giá trị tuyệt đối ở phía trái bất đẳng thức trên là dương, số những giá trị tuyệt đối này là hữu hạn. Vì vậy tồn tại số tự nhiên n, sao cho $\dfrac{1}{n} < \left|x - \dfrac{p_\lambda}{q_\lambda}\right|$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$.

Theo bài trước sẽ tồn tại số tự nhiên q và số nguyên p, sao cho (9.1) thỏa mãn và $1 \leq q \leq n$. Nhưng khi đó $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{qn} \leq \dfrac{1}{qq} = \dfrac{1}{q^2}$, suy ra $q = q_\lambda$ với một số $\lambda = 1, 2, \ldots, l$ Từ những bất đẳng thức trên suy ra $\dfrac{1}{n} < \left|x - \dfrac{p_\lambda}{q_\lambda}\right| \leq \left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{nq}$. Như vậy $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{nq}$ vì thế

$q < 1$, điều này không thể được vì q là số tự nhiên. Ta nhận được điều vô lý. ☺

▷ **9.3.** *Với mọi $c > 2$ bất đẳng thức*

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^c}. \tag{9.4}$$

đúng chỉ với hữu hạn cặp số nguyên p và số tự nhiên q.

Lời giải. Chúng ta chứng minh bất đẳng thức sau là đúng

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{3\sqrt{2}q^2}. \tag{9.5}$$

với mọi số nguyên p và với mọi số tự nhiên q. Vì $\dfrac{1}{q^2} \leq 1$, bất đẳng thức (9.5) tất nhiên thỏa mãn, khi $\left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. Như vậy chỉ cần xét trường hợp $\left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. Nhưng khi đó $\sqrt{2} - \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \leq \dfrac{p}{q} \leq \sqrt{2} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ suy ra

$$0 < \frac{p}{q} < 2\sqrt{2}. \tag{9.6}$$

Mặt khác

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| = \frac{\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| . \left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right|}{\left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right|} = \frac{|2q^2 - p^2|}{q^2\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right|}. \tag{9.7}$$

Nhưng số $2q^2 - p^2$ là số khác không, vì $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ. Ngoài ra nó là số nguyên nên $|2q^2 - p^2| \geq 1$. Từ (9.7) suy ra $\left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{1}{q^2\left|\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right|}$ và cùng với (9.6) cho ta (9.5).

Giả sử bất đẳng thức (9.4) đúng với một cặp số (p, q) nào đó. Từ (9.4) và (9.5) suy ra đẳng thức $\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq \frac{1}{q^{c-2}}$. Vì $c > 2$ bất đẳng thức này chỉ đúng cho hữu hạn số tự nhiên q. Với mỗi số q như vậy chỉ có nhiều nhất hai số nguyên p, với chúng thỏa mãn bất đẳng thức (9.4). Nghĩa là (9.4) chỉ thỏa mãn cho hữu hạn cặp số p và q. ☺

▷ **9.4.** *Nếu D là số tự nhiên bất kỳ, không là số chính phương, thì tồn tại vô hạn các cặp số tự nhiên (x, y), là nghiệm của bất phương trình sau*

$$|x^2 - Dy^2| \leq 1 + 2\sqrt{D}. \tag{9.8}$$

Lời giải. Theo bài 9.2 ta biết rằng tồn tại vô hạn cặp số (x, y) tự nhiên, sao cho

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| \leq \frac{1}{y^2}. \tag{9.9}$$

Mặt khác bất đẳng thức sau là đúng

$$\left|\frac{x}{y} + \sqrt{D}\right| = \left|(\frac{x}{y} - \sqrt{D}) + 2\sqrt{D}\right| \leq \left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| + 2\sqrt{D}.$$

Suy ra với mỗi cặp (x, y) ta có

$$\left|\frac{x}{y} + \sqrt{D}\right| \leq \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{D}.$$

Như vậy, với cách chọn bất kỳ cặp (x, y), sao cho thỏa mãn (9.9) chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}|x^2 - Dy^2| &= |x - y\sqrt{D}|.|x + y\sqrt{D}| \\ &\leq \frac{1}{y}(\frac{1}{y} + 2\sqrt{D}y) \leq \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{D} \leq 1 + 2\sqrt{D}.\end{aligned}$$

Điều này đã chứng minh rằng bất phương trình (9.8) có vô hạn nghiệm trong tập hợp số tự nhiên. ☺

▷ **9.5.** *Nếu D là số tự nhiên bất kỳ, không là số chính phương, thì phương trình* $x^2 - Dy^2 = 1$ *có ít nhất một nghiệm nguyên* (u, v) *với* $v \neq 0$.

Lời giải. Chúng ta xét tất cả các cặp (x, y) số tự nhiên, mà nó thỏa mãn $-1 - 2\sqrt{D} \leq x^2 - Dy^2 \leq 1 + 2\sqrt{D}$. Theo bài 9.4 có vô số cặp số tự nhiên thỏa mãn bất đẳng thức trên, Nhưng biểu thức $x^2 - Dy^2$ chỉ có hữu hạn giá trị vì chúng là các số nguyên trong đoạn $(-1 - 2\sqrt{D}, 1 + 2\sqrt{D})$. Nghĩa là tồn tại một số nguyên k, sao cho phương trình $x^2 - Dy^2 = k$ có vô hạn nghiệm tự nhiên (x, y). Rõ ràng $k \neq 0$, vì nếu ngược lại thì dẫn đến mâu thuẫn do số $\sqrt{D}$ không thể biểu diễn dưới dạng hữu tỷ $\sqrt{D} = \dfrac{x}{y}$. Giữa những cặp này có thể chọn ít nhất hai cặp khác nhau (x_1, y_1) và (x_2, y_2) mà chúng thỏa mãn

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{|k|}, y_1 \equiv y_2 \pmod{|k|}. \tag{9.10}$$

Thật vậy,chỉ cần chỉ ra tất cả các khả năng của các cặp số dư theo môđun $|k|$ có số lượng hữu hạn. Có nghĩa là tồn tại những cặp khác nhau những số tự nhiên (x_1, y_1) và (x_2, y_2), mà $x_1^2 - Dy_1^2 = x_2^2 - Dy_2^2 = k$ và thỏa mãn dẳng thức (9.10).

Chúng ta xét đẳng thức

$$(x_1 - y_1\sqrt{D})(x_2 + y_2\sqrt{D}) = (x_1x_2 - y_1y_2D) + (x_1y_2 - x_2y_1). \tag{9.11}$$

Từ (9.10) chúng ta có

$$x_1x_2 - y_1y_2D \equiv x_1^2 - Dy_1^2 \equiv k \equiv 0 \pmod{|k|},$$
$$x_1y_2 - x_2y_1 \equiv x_1y_1 - x_1y_1 \equiv 0 \pmod{|k|}.$$

Khi đó tồn tại số nguyên u và v, sao cho $x_1x_2 - y_1y_2D = ku, x_1y_2 - x_2y_1 = kv$. Vì vậy (9.11) có thể viết thành

$$(x_1 - y_1\sqrt{D})(x_2 + y_2\sqrt{D}) = k(u + v\sqrt{D}).$$

Nhân từng số hạng với nhau trong các đẳng thức sau cùng chúng ta nhận được

$$k^2 = (x_1^2 - Dy_1^2)(x_2^2 - Dy_2^2) = k^2(u^2 - Dv^2),$$

từ đó suy ra $u^2 - Dv^2 = 1$, nghĩa là cặp (u, v) là nghiệm của phương trình.

Chỉ còn phải chứng minh $v \neq 0$. Nếu giả thiết ngược lại, chúng ta sẽ có $x_1x_2 = y_1y_2D = |k|$ và $x_1y_2 = x_2y_1$. Khi đó

$$|k|y_2 = |(x_1y_2)x_2 - y_1y_2^2D| = |y_1x_2^2 - y_1y_2^2D| = y_1|x_2^2 - Dy_2^2| = |k|y_1$$

từ đây, vì $k \neq 0$ chỉ có khả năng khi $y_1 = y_2$. Điều này không thể xẩy ra vì (x_1, y_1) khác (x_2, y_2) , còn từ $y_1 = y_2$ suy ra $x_1 = x_2$. ☺

▷ **9.6.** *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những số thực và N là số tự nhiên. Khi đó tồn tại những số nguyên $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ sao cho $1 \leq q \leq N^n$ và*

$$\left| x_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{Nq}, \tag{9.12}$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lời giải. Chúng ta chứng minh bài toán cho trường hợp $n = 2$. Với trường hợp n lớn hơn 2 chứng minh hoàn toàn tương tự và dành cho bạn đọc. Như vậy cho x_1 và x_2 là những số thực, còn N là số tự nhiên. Chúng ta sẽ chứng minh rằng tồn tại những số nguyên p_1, p_2 và q với $1 \leq q \leq N^2$ và thỏa mãn

$$\left| x_1 - \frac{p_1}{q} \right| < \frac{1}{Nq}, \left| x_2 - \frac{p_2}{q} \right| < \frac{1}{Nq}. \tag{9.13}$$

Chúng ta cố định hệ tọa độ trong mặt phẳng và xét hình vuông Q với các đỉnh $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ và $(0, 1)$ như hình vẽ. Chia Q ra N^2 hình vuông nhỏ bằng nhau với cạnh là $\dfrac{1}{N}$ bằng các đường thẳng song song với trục tọa độ (trong hình vẽ ta chia với N=7).

Bây giờ chúng ta chú ý đến cặp số có dạng $(qx_1 - [qx_1], qx_2 - [qx_2])$, ở đây q nhận những giá trị nguyên $0, 1, 2, \ldots, N^2$. Vì $0 \leq qx_i - [qx_i] < 1, i = 1, 2, \ldots, N^2$ mỗi cặp như vây có thể coi như một cặp tọa độ của điểm trong hình vuông Q. Bằng cách đó mỗi số $0, 1, 2, \ldots, N^2$ tạo ra một điểm tương ứng trong hình vuông Q , số lượng các số đó là $N^2 + 1$. Nhưng Q được chia ra N^2 hình vuông nhỏ, suy ra tồn tại hai số nguyên khác nhau q_1, q_2 trong đoạn $[0, N]$, mà điểm tương ứng với chúng có các tọa độ $(q_1x_1 - [q_1x_1], q_1x_2 - [q_1x_2]), (q_2x_1 - [q_2x_1], q_2x_2 - [q_2x_2])$ và cùng nằm trong một hình vuông nhỏ với cạnh $\dfrac{1}{N}$. Điều đó có nghĩa là

$$|(q_1x_1 - [q_1x_1]) - (q_1x_2 - [q_1x_2])| \leq \frac{1}{N},$$

$$|(q_2x_1 - [q_2x_1]) - (q_2x_2 - [q_2x_2])| \leq \frac{1}{N}. \qquad (9.14)$$

Không mất tính tổng quát có thể giả thiết $q_1 > q_2$. Nếu đặt $q = q_1 - q_2, p_1 = [q_1x_1] - [q_2x_1], p_2 = [q_1x_2] - [q_2x_2]$ thì bất đẳng thức (9.14) có dạng

$$|qx_1 - p_1| \leq \frac{1}{N}, |qx_2 - p_2| \leq \frac{1}{N}. \qquad (9.15)$$

Chúng ta thấy rằng $1 \leq q \leq N^2$, vì $1 \leq q_2 < p_1 \leq N^2$. Chia hai vế của (9.15) cho q chúng ta nhận được (9.13). ☺

Hai bài toán dưới đây liên quan tới một tính chất mà ta đã chứng minh ở chương 2. Để mở rộng tính chất này chúng ta đưa vào định nghĩa.

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ là $2n + 1$ số thực $(n \geq 1)$. Chúng ta nói rằng dãy này có **tính chất P**, nếu bất kỳ $2n$ số trong chúng có thể chia làm hai nhóm, mỗi nhóm n số, sao cho tổng của các số trong hai nhóm bằng nhau.

▷ **9.7.** *Chứng minh rằng mọi bộ $2n+1$ số gồm những số nguyên dương có tính chất P, thì tất cả các số đều bằng nhau.*

Lời giải. Chứng minh bằng qui nạp theo số lớn nhất của dẫy số. Nếu số lớn nhất bằng 1 thì tất cả các số còn lại cũng đều là 1, nên bài toán đã giải. Bây giờ giả sử kết luận đúng với mọi bộ 2n+1 số nguyên dương mà mỗi số không vượt quá $k, k \geq 2$ và có tính chất P. Lấy $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ là bộ số nguyên dương có tính chất P và mỗi số không vượt quá $k+1$. Từ điều kiện bài toán suy ra $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ có cùng tính chẵn lẻ.

a) Nếu $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ là các số chẵn, chúng ta xét các số $\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \ldots, \frac{p_{2n+1}}{2}$. Chúng ta thấy ngay chúng cũng có tính chất P. Ngoài ra mọi số không vượt quá k vì $p_i \leq k+1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$. Bằng qui nạp suy ra $\frac{p_1}{2} = \frac{p_2}{2} = \ldots = \frac{p_{2n+1}}{2}$.Nghĩa là $p_1 = p_2 = \ldots = p_{2n+1}$.

b) Nếu $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ là các số lẻ, chúng ta chứng bằng qui nạp cho dãy $p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_{2n+1} - 1$. Chúng cũng có tính chất P và không vượt quá k, chúng ta nhận được $p_1 - 1 = p_2 - 1 = \ldots = p_{2n+1} - 1$. Nghĩa là $p_1 = p_2 = \ldots = p_{2n+1}$. ☺

▷ **9.8.** *Chứng minh rằng mọi bộ 2n+1 số gồm những số thực dương có tính chất P, thì tất cả các số đều bằng nhau.*

Lời giải. - Hiển nhiên rằng nếu các số $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ có tính chất P và q là số thực bất kỳ, thì các số $qa_1, qa_2, \ldots, qa_{2n+1}$ cũng có tính chất P.

Bây giờ cho $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ là những số thực dương với tính chất P. Nếu tất cả các số là hữu tỷ thì điều khẳng định của bài toán suy ra không khó. Thật vậy, ký hiệu q là bội số chung nhỏ nhất của mẫu số các số trên. Khi đó $qx_1, qx_2, \ldots, qx_{2n+1}$ là những số nguyên dương có tính chất P, theo cách chứng minh bài trước chúng ta có $qx_1 = qx_2 = \ldots = qx_{2n+1}$. Vì vậy $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1}$. Chỉ còn phải chứng minh trường hợp có trong dãy $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ một số vô tỷ. Nhưng theo kết quả của bài 9.6 tồn tại số tự nhiên q, và các số nguyên dương $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ thỏa mãn

$$|x_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{2n+1}}}, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.16}$$

Trường hợp riêng, tồn tại $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}, q$ với $q > (2n)^{2n+1}$ và chúng thỏa mãn $|qx_i - p_i| \leq \frac{1}{q^{\frac{1}{2n+1}}}, i = 1, 2, \ldots, n.$

Đặt $\alpha_i = qx_i - p_i, i = 1, 2, \ldots, 2n+1$. Như phần đầu khẳng định rằng $qx_1, qx_2, \ldots, qx_{2n+1}$ có tính chất P. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ cũng có tính chất P. Chọn $2n$ số trong đó, ví dụ như $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$. Vì $qx_1, qx_2, \ldots, qx_{2n}$ có tính chất P, không mất tính tổng quát chúng ta lấy đẳng thức $qx_1 + qx_2 + \cdots + qx_n = qx_{n+1} + qx_{n+2} + \cdots + qx_{2n}$, khi đó $(p_1 + \alpha_1) + (p_2 + \alpha_2) + \cdots + (p_n + \alpha_n) = (p_{n+1} + \alpha_{n+1}) + (p_{n+2} + \alpha_{n+2}) + \cdots + (p_{2n} + \alpha_{2n})$. Chúng ta viết lại

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n - p_{n+1} - p_{n+2} - \cdots - p_{2n} =$$

$$= \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{2n} - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n. \tag{9.17}$$

Vế bên trái đẳng thức trên là số nguyên nên số $\alpha = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{2n} - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n$ cũng là số nguyên. Nhưng $|\alpha_i| \leq \frac{1}{q^{\frac{1}{2n+1}}}, i = 1, 2, \ldots, n$. Do đó $|\alpha| \leq |\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{2n}| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| < \frac{2n}{q^{\frac{1}{2n+1}}} < 1$, vì $q > (2n)^{2n+1}$. Khi đó $\alpha = 0$ và từ đẳng thức trước đó ta có $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots + p_{2n}$ Như vậy chúng ta khẳng định được những số nguyên $p_1, p_2, \ldots p_{2n+1}$ có tính chất P. Chúng ta có thể kết luận được $p_1 = p_2 = \ldots = p_{2n+1}$

Thực chất đến đây chúng ta đã chứng minh được :

Nếu $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}, q$ là những số nguyên thỏa mãn (9.16) và $q > (2n)^{2n+1}$ thì $p = p_1 = p_2 = \ldots = p_{2n+1}$. Suy ra (9.16) có dạng

$$|x_i - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{2n+1}}}, i = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

Trong 9.6 chúng ta khẳng định rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên q thỏa mãn (9.16). Không mất tính tổng quát chúng ta giả thiết rằng những số đó là $q_1 < q_2 < \ldots < q_k < \ldots$, ở đây $q_1 > (2n)^{2n+1}$. Trong trường hợp này với mọi k tồn tại số nguyên p_k sao cho

$$|x_i - \frac{p_k}{q_k}| < \frac{1}{q_k^{1+\frac{1}{2n+1}}}, i = 1, 2, \ldots, 2n+1. \tag{9.18}$$

Vì $\lim \dfrac{1}{q_k^{1+\frac{1}{2n+1}}} = 0$ khi k tiến tới vô cùng, từ (9.18) suy ra $\lim \dfrac{p_k}{q_k} = x_i$ khi k tiến tới vô cùng, với mọi $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$. Nhưng mỗi dãy số thực không có nhiều hơn một giới hạn, suy ra $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1}$. ☺

▷ **9.9.** *Chứng minh rằng trong tám số, mỗi số có ba chữ số, bao giờ cũng chọn được hai số có ba chữ số và để khi ghép lại ta được một số chia hết cho 7.*

Lời giải. Khi mang tám số chia cho 7 thì thế nào cũng có hai số có cùng số dư (nguyên lý Đirichlê). Giả sử hai số đó là $\overline{abc}$ và $\overline{\alpha\beta\gamma}$. Hiển nhiên $\overline{abc\alpha\beta\gamma} = 1000\overline{abc} + \overline{\alpha\beta\gamma}$. Từ cách chọn ta có $\overline{abc} = 7m + r$ và $\overline{\alpha\beta\gamma} = 7n + r$ với $0 \leq r < 7$ và m, n, r là các số tự nhiên. Vì vậy $\overline{abc\alpha\beta\gamma} = 1000(7m + r) + (7n + r) = 7(1000m + n) + 1001.r = 7(1000m + n + 143.r)$. ☺

▷ **9.10.** *Cho a, b, c, d là các số nguyên. Chứng minh rằng tích của các hiệu $b - a, c - a, d - a, d - c, b - d$ và $c - b$ chia hết cho 12.*

Lời giải. Cần chứng minh tích: $P = (b - a)(c - a)(d - a)(d - c)(d - b)(c - b)$ chia hết cho 12=4.3. Chúng ta biết rằng một số nguyên bất kỳ khi chia cho 4 thì chỉ có các số dư 0, 1, 2, 3.

Trong bốn số a, b, c, d cho trước nếu có hai số khi chia cho 4 mà có cùng số dư thì hiệu của chúng sẽ chia hết cho 4. Nếu không có hai số nào khi chia cho 4 cho cùng số dư thì trong bốn số phải có hai số chẵn và hai số lẻ. Vì hiệu của hai số chẵn cũng như hiệu của hai số lẻ đều là số chẵn nên P chia hết cho 4.

Mặt khác trong bốn số a, b, c, d luôn tìm được hai số khi chia cho 3 thì có cùng số dư (nguyên lý Đirichlê). Do đó hiệu của chúng chia hết cho 3, suy ra P chia hết cho 3. Tóm lại P chia hết cho 12=4.3. ☺

9.2. Bài tập

▷ **9.11.** Cho x là một số thực, còn n là một số tự nhiên. Khi đó tồn tại những số nguyên p và q thỏa mãn $1 \leq q \leq n$ và $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leq \dfrac{1}{(n+1)q}$.

▷ **9.12.** Cho $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là những số thực và n là số tự nhiên. Khi đó tồn tại những số nguyên $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ không đồng thời bằng 0, sao cho ta có $q_\mu \leq n(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ và
$|q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_mx_m - p| \leq \dfrac{1}{(n+1)^m}$.

▷ **9.13.** Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên p và $q > 0$ ta đều có bất đẳng thức sau $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{q^2}$.

▷ **9.14.** Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên p và $q > 0$ ta đều có bất đẳng thức sau $\left|\sqrt{3} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{3\sqrt{3}q^2}$.

▷ **9.15.** Cho m, n và s là những số nguyên và α là nghiệm của phương trình bậc hai $mx^2 + nx + s = 0, (m \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu α là số vô tỷ, thì tồn tại một số dương c thỏa mãn $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^2}$ với mội cặp số nguyên p và $q > 0$.

CHƯƠNG 10
NGUYÊN LÝ ĐIRICHLÊ CHO DIỆN TÍCH

10.1. Phát biểu nguyên lý Đirichlê cho diện tích

Trong chương này chúng ta xét những tập hợp trên mặt phẳng, những phép toán trên các tập hợp nếu các bạn chưa quen biết có thể xem ở Phụ đính cuối sách. Chúng ta quan tâm tới các khái niệm sau đây:

Một tập hợp trong mặt phẳng gọi là **bị chặn**, khi tồn tại một hình tròn chứa toàn bộ các điểm của tập hợp đó. Khi không tồn tại một hình tròn nào như trên thì tập hợp đó gọi là tập hợp không bị chặn. Ví dụ như một đa giác lồi là tập bị chặn còn nửa mặt phẳng là tập hợp không bị chặn. Dễ dàng chứng minh được các tính chất sau của những tập hợp bị chặn

1. Hợp và giao của hữu hạn những tập bị chặn là một tập bị chặn. Hiệu của hai tập bị chặn là một tập bị chặn.

2. Một tập hợp con của một tập bị chặn là một tập bị chặn. Một tập hợp chứa một tập hợp con không bị chặn thì nó cũng không bị chặn.

Một điểm P gọi là **điểm biên** của tập hợp A trong mặt phẳng, nếu mọi hình tròn tâm tại P có chứa những điểm thuộc A và cả những điểm không thuộc A.Tập hợp tất cả các điểm biên của A gọi là biên của A và ký hiệu là $K(A)$. Ví dụ biên của hình tròn là đường tròn với cùng tâm và bán kính. Ví dụ đặc biệt và tính chất biên của tập hợp như sau:

3. Cho tập hợp A gồm toàn bộ những điểm có tọa độ hữu tỷ trong một hình vuông với tọa độ các đir nh $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. Dễ dàng thấy rằng biên của A là toàn bộ hình vuông nói trên.

4. Với mọi tập hợp A gồm các điểm trong mặt phẳng đều có công thức sau $K(K(A)) \subset K(A)$.

5. Mọi cặp tập hợp bất kỳ trong mặt phẳng đều thỏa mãn các công thức sau

$$K(A \cup B) \subset K(A) \cup K(B)$$
$$K(A \cap B) \subset K(A) \cap K(B)$$
$$K(A \backslash B) \subset K(A) \cup K(B)$$

Một điểm P gọi là **điểm trong** của tập hợp A những điểm trong mặt phẳng, khi tồn tại hình tròn tâm P mà nó nằm trọn trong A. Từ định nghĩa này thấy ngay là mọi điểm trong của tập hợp A đều thuộc A. Điều ngược lại không đúng: trong ví dụ 3 ở trên tập hợp A không có một điểm trong nào. Ta thấy ngay

6. Một điểm thuộc A là điểm trong của A khi và chi khi nó không là điểm biên của A. Điều này giải thích tại sao những điểm trong của hình tròn không nằm trên đường tròn.

Để loại trừ các tập hợp đặc biệt, chúng ta đưa vào một khái niệm đặc chưng cho lớp tập hợp không đặc biệt trong mặt phẳng : Một tập hợp bị chặn các điểm trong mặt phẳng gọi là **bề mặt**, khi biên của nó không chứa điểm trong (của biên).

Ví dụ các hình tròn hoặc đa giác đều là bề mặt trong mặt phẳng.

Nhưng trong ví dụ 3 tập hợp A không là bề mặt. Bằng cách dùng các định nghĩa về tập hợp và các định nghĩa trong phần trên chúng ta chứng minh được

7. Nếu A và B là hai bề mặt, những tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$ và $A \backslash B$ cũng là những bề mặt trong mặt phẳng.

8. Nếu A, B và C là các bề mặt và A không có chung điểm trong với B và với C, thì A không có điểm trong chung với $B \cup C$.

Một trong những định lý cơ bản trong hình học phẳng, nhiều khi ở phổ thông chúng ta công nhận như một tiên đề:

9. Mọi bề mặt A những điểm trong mặt phẳng có thể cho tương ứng với một số thực không âm $S(A)$ sao cho

a) $S(\Delta) = 1$, với Δ là một hình vuông có cạnh là 1;

b) Nếu A và B là hai bề mặt không có điểm trong chung, thì $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$.

Phép cho tương ứng S với các tính chất trên được xác định một cách duy nhất.

Cho bề mặt A bất kỳ, số $S(A)$ gọi là **diện tích** của A. Những mặt đã được xét trong các trường phổ thông là hình chữ nhật, tam giác, hình tròn,...và số $S(A)$ theo định nghĩa trên trùng với khái niệm diện tích của các hình này. Với cách trừu tượng hóa khái niệm diện tích chúng ta dễ dàng khảo sát tính chất về diện tích của các hình. Từ a) và b) chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được:

10. Nếu A và B là những bề mặt và $A \subset B$, thì $S(A \backslash B) = S(A) - S(B)$.

11. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các bề mặt từng đôi một không có điểm trong chung, thì $S(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = S(A_1) + S(A_2) +$

$\cdots + S(A_n)$.

Nguyên lý Đirichlê cho diện tích: *Nếu A là một bề mặt, còn $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các bề mặt sao cho $A_i \subset A (i = 1, 2, \ldots, n)$ và $S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n)$, thì ít nhất có hai bề mặt trong số các bề mặt trên có một điểm trong chung.*

Cũng như nguyên lý đầu tiên, chúng ta cũng có thể thấy điều này là hiển nhiên và chứng minh được. Thật vậy, Giả sử không có cặp nào trong những mặt đã cho có điểm trong chung. Khi đó theo khẳng định 11. ta có $S(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n)$. Mặt khác $A_i \subset A(i = 1, 2, \ldots, n)$ suy ra $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \subset A$, từ đó có $S(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \subset S(A)$. Thống nhất các bất đẳng thức lại chúng ta có $S(A) < S(A)$, dẫn tới vô lý.

Có thể thấy rằng nguyên lý trên bao trùm nguyên lý Đirichlê cho những tập hữu hạn. Ngoài ra nguyên lý Đirichlê trên có thể cụ thể hóa cho những lớp bề mặt thông dụng trong chương trình phổ thông và các khái niệm độ dài, thể tích cũng có cùng tính chất như khái niệm diện tích ở trên. Do đó chúng ta có thể phát biểu nguyên lý Đirichlê theo các phương án khác nhau.

12.*Cho những đoạn thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ nằm trong đoạn Δ và tổng độ dài của $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ lớn hơn độ dài của Δ. Khi đó ít nhất có hai trong số những đoạn thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ có điểm chung.*

13. *Cho những đa diện $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nằm trong đa diện P và tổng thể tích của $P_1, P_2, \ldots, P_n$ lớn hơn thể tích của P. Khi đó ít nhất có hai trong số những đa diện $P_1, P_2, \ldots P_n$ có điểm chung.*

14. *Cho những cung $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nằm trên đường tròn c và tổng độ dài của $c_1, c_2, \ldots, c_n$ lớn hơn độ dài đường tròn c. Khi đó ít nhất có hai trong số những cung $c_1, c_2, \ldots c_n$ có điểm chung.*

Tất cả các phát biểu 12, 13, 14 chúng ta đều gọi là nguyên lý Đirichlê và bạn đọc có thể chứng minh được các nguyên lý này.

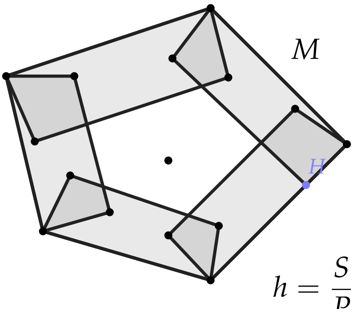
10.2. Ví dụ

▷ **10.1.** *Cho M là một đa giác lồi với diện tích S và chu vi P. Chứng minh rằng*

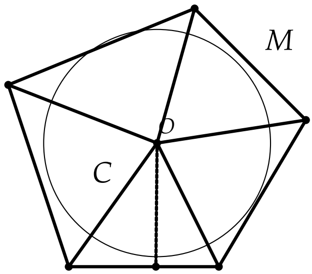
a) M có thể phủ được một hình tròn với bán kính lớn hơn $\frac{S}{P}$;

b) Bán kính của các hình tròn nằm trong M không quá $\frac{S}{P}$.

Lời giải. a) Chúng ta dựng trên mỗi cạnh đa giác M một hình chữ nhật chiều cao $h = \frac{S}{P}$, như hình 10.1.



Hình 10.1:



Hình 10.2:

Những hình chữ nhật này có những điểm chung giữa chúng; nói chung một số hình chữ nhật không nằm trọn trong M. Chúng ta có thể tính toán tổng diện tích của các hình chữ nhật này là S. Như vậy phần của M bị các hình chữ nhật phủ phải có diện tích nhỏ hơn S.

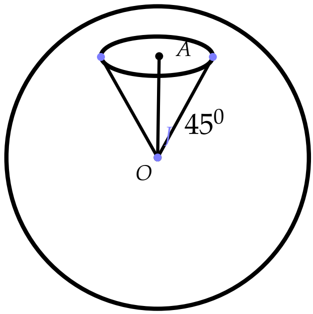
Điều này chỉ ra rằng tồn tại một điểm O của M không thuộc hình chữ nhật nào cả. Như vậy có nghĩa là khoảng cách từ O đến các cạnh của M phải lớn hơn $h = \frac{S}{P}$. Ta lấy O là tâm hình tròn bán kính $R > \frac{S}{P}$, hình tròn này sẽ nằm trọn trong M.

b) Cho hình tròn C tâm O bán kính R nằm trong M. Chúng ta xét các tam giác mà hai đỉnh của nó là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác, còn đỉnh thứ ba là tâm hình tròn O. Đường cao hạ từ O xuống các cạnh của tam giác này lớn hơn R. Từ đây suy ra tổng các diện tích của chúng bằng S và không nhỏ hơn $P.R$. Suy ra $R \leq \frac{S}{P}$ (Hình 10.2).

☺

▷ **10.2.** *Trong không gian cho 30 vectơ khác không. Chứng minh rằng trong số đó có hai vectơ mà góc giữa chúng nhỏ hơn* 45^0.

Lời giải. Có thể giả thiết rằng tất cả véctơ có chung điểm đầu O. Lấy OA với độdài bằng 1 trên vectơ thứ nhất. Chúng ta dựng hình nón đỉnh O với trục OA, mà góc ở đỉnh là 45^0. Bài toán sẽ được chứng minh nếu chúng ta chỉ ra rằng ít nhất hai trong số 30 hình nón (được xây dương theo cách trên ứng với 30 vectơ đã cho) có điểm trong chung (hình 10.3).

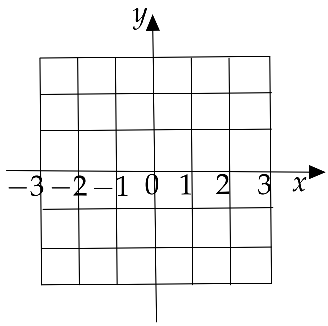


Hình 10.3:

Chúng ta xét hình cầu S với tâm O và bán kính 1. Mỗi lần dựng hình nón cắt mặt cầu S một hình với diện tích δ_1 mà có thể tính toán được. Ta cũng thấy rằng hai hình nón có điểm trong chung khi và chi khi những phần trên mặt cầu cũng phải có điểm trong chung. Từ điều này và nguyên lý Đirichlê chúng ta chỉ cần thiết kiểm tra tổng diện tích của 30 hình trên mặt cầu lớn hơn diện tích mặt cầu (bằng 4π). Chúng ta có $\delta_1 = 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$. Vậy $30.2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) > 4\pi$ tương đương với $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} < \frac{14}{15}$ hoặc là $\frac{1}{2} < \left(\frac{167}{225}\right)^2$. ☺

▷ **10.3.** *Nếu một bề mặt A trong mặt phẳng thỏa mãn điều kiện $S(A) > 1$. thì nó luôn luôn chứa ít nhất hai điểm trong (x_1, y_1), (x_2, y_2) mà hiệu $x_2 - x_1$ và $y_2 - y_1$ là những số nguyên.*

Lời giải. Qua mỗi điểm (m, n) với tọa độ nguyên chúng ta kẻ các đường thẳng đứng và đường thẳng ngang (hình 10.4).



Hình 10.4:

Chúng ta sẽ tạo được lưới những điểm với tọa dộ nguyên. Lưới nguyên chia mặt phẳng ra các hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có diện tích là 1. Chú ý rằng mỗi hình vuông có thể xê dịch đến trùng với một hình vuông khác, chỉ có khác là tọa độ của hình vuông mới chuyển đến cũng là các số nguyên.

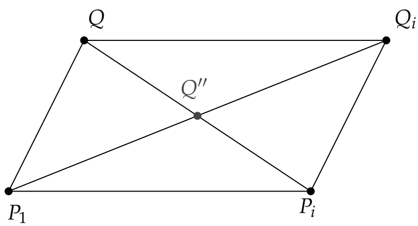
Chúng ta chọn một hình vuông trong lưới nguyên làm gốc cố định rồi dịch chuyển mọi hình vuông về hình vuông gốc. Như vậy những phần của A nằm trong các hình vuông khác nhau đều chuyển về hình vuông gốc (hình vẽ). Tổng của diện tích của các phần đó

bằng diện tích của A và suy ra lớn hơn 1. Suy ra ít nhất hai trong số các phần nằm trong hình vuông dịch đến sẽ có điểm trong chung (x_0, y_0). Trong tập A ban đầu thì điểm (x_0, y_0) tương ứng với hai điểm khác nhau (x_1, y_1) và (x_2, y_2) mà $x_1 - x_0, y_1 - y_0, x_2 - x_0, y_2 - y_0$ là các số nguyên. Như vậy thì $x_2 - x_1$ và $y_2 - y_1$ cũng là số nguyên.
☺

▷ **10.4.** *Cho A là tập hợp lồi và bị chặn những điểm trong mặt phẳng, còn P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 là những điểm thuộc A. Gọi A_i là tập hợp nhận từ A sau một phép tịnh tiến các điểm theo vectơ $P_1P_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Chứng minh rằng ít nhất có hai tập hợp trong số các $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ có điểm chung.*

Lời giải. Chúng ta chia ra hai trường hợp A có thể có hoặc có thể không có điểm trong.

1. Trường hợp A có điểm trong. Ký hiệu A' là tập hợp, mà nó nhận được từ A, sau khi tác động phép vị tự tâm P_1 và hệ số vị tự 2. Khi đó công thức sau đúng $A_i \subset A'$ (hình 10.5).



Hình 10.5:

Thật vậy, nếu $Q \in A$ và Q_i là ảnh của Q qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{P_1P_i}$ (xem hình vẽ), thì $P_1P_iQ_iQ$ là hình bình hành. Ký hiệu Q'' là trung điểm của P_1Q_i. Rõ ràng $Q'' \in A$, vì Q và P_i là phần tử của A và A lồi. Mặt khác $P_1Q_i = 2P_1Q''$ và vì A' là ảnh của A qua phép vị tự tâm P_1 và hệ số 2, nên điểm Q_i nằm trong tập hợp A'. Như vậy mỗi tập trong các tập A_i nằm trong A'. Đồng thời mỗi tập của A_i đồng dạng với A và suy ra $S(A_i) = S(A)$. Do đó

$$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + S(A_4) + S(A_5) = 5S(A). \tag{10.1}$$

Nhưng tập hợp A' đồng dạng với A với hệ số 2. Suy ra

$$S(A') = 4S(A). \tag{10.2}$$

Mặt khác A có điểm trong, vì thế $S(A) > 0$. Nghĩa là từ (10.1) và (10.2) suy ra $S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + S(A_4) + S(A_5) > S(A')$. Như vậy trong trường hợp 1 bài toán được suy ra từ nguyên lý Đirichlê cho diện tích.

2. Trường hợp A không có điểm trong, A sẽ nằm trên một đường thẳng. Thật vậy, nếu ít nhất ba điểm nằm trên một đường thẳng, do tính chất lồi A chứa toàn bộ hình tam giác với đỉnh là các điểm này, suy ra A có điểm trong. Nhưng tập lồi, bị chặn trên một đường thẳng chính là đoạn thẳng trên dường thẳng này. Phần còn lại lý luận tương tự như phần trên. Nhưng trong trường hợp trên đường thẳng chỉ cần 3 điểm và nguyên lý Đirichlê về độ dài. ☺

▷ **10.5.** *(Định lý Minkovski) Cho A là tập hợp điểm trong mặt phẳng có tính chất lồi, bị chặn và đối xứng qua gốc tọa độ và $S(A) > 4$. Khi đó A chứa những điểm trong khác điểm gốc với tọa độ nguyên.*

Lời giải. Tác dụng lên A phép vị tự tâm là gốc tọa độ và hệ số $\dfrac{1}{2}$. Như vậy chúng ta nhận được A', đồng dạng với A và có kích thước bằng nửa kích thước của A. Suy ra $S(A') = \dfrac{1}{4}S(A) > 1$. Theo bài 10.13 suy ra A' chứa ít nhất hai điểm khác nhau (x_1, y_1) và (x_2, y_2), mà các hiệu $x_2 - x_1$ và $y_2 - y_1$ là nguyên. Vì tập hợp A đối xứng qua gốc tọa độ nên tập hợp A' cũng vậy. Điều đó giải thích rằng điểm $(-x_1, -y_1)$ thuộc A'. Vì A lồi nên A' cũng lồi. Do đó trung điểm của các điểm mút $(-x_1, -y_1)$ và (x_2, y_2) cũng thuộc A' và có tọa độ $(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2})$. Nhân tọa độ này với 2 thì được tọa độ của một điểm thuộc A. Như vậy $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ thuộc A. Điểm ta tìm được khác gốc tọa độ và có tọa độ nguyên và là điểm trong của tập A. ☺

▷ **10.6.** *Nếu A là một bề mặt,*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n. \tag{10.3}$$

là những bề mặt và thỏa mãn $A_i \subset A (i = 1, 2, \ldots, n)$, còn k là số tự nhiên mà

$$k.S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n). \tag{10.4}$$

thì ít nhất $k + 1$ trong số những bề mặt trên có một điểm trong chung.

Lời giải. Chúng ta chứng minh bằng qui nạp,Trường hợp $k = 1$ đó là nguyên Lý Đirichlê đã chứng minh ở trên. Bây giờ giả sử bài toán đã đúng cho k, chúng ta phải chứng minh nó cũng đúng cho $k + 1$. Ta cố định một k và có bất đẳng thức

$$(k+1)S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n). \tag{10.5}$$

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng với (10.5) tồn tại một điểm là điểm trong của $k + 2$ tập hợp của (10.3). Do $A_\mu \subset A (\mu = 1, 2, \ldots, n)$, nên $S(A_\mu) \leq S(A)$, từ đó suy ra $S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n) \leq nS(A)$. Từ bất đẳng thức sau cùng và (10.5) chúng ta có $(k + 1)S(A) < nS(A)$ suy ra $k + 1 < n$. Vì vậy

$$n \geq k + 2. \tag{10.6}$$

Tồn tại điểm chung cho ít nhất $k + 2$ tập hợp (10.3) được chứng minh bằng qui nạp theo n. Từ (10.4) suy ra (10.5), vậy ta phải bắt đầu từ $k + 2$. Như vậy viết lại

$$(k+1)S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_{k+2}). \tag{10.7}$$

Cần phải chứng minh tồn tại điểm mà nó là điểm trong của $A_1, A_2, \ldots, A_{k+2}$. Lấy

$$A'_\mu = A_\mu \backslash A_{k+2} (\mu = 1, 2, \ldots, k+1) \tag{10.8}$$

$$A''_\mu = A_\mu \cap A_{k+2} (\mu = 1, 2, \ldots, k+1) \tag{10.9}$$

và

$$A' = A \backslash A_{k+2} \tag{10.10}$$

$$A'' = A_{k+2}. \tag{10.11}$$

Rõ ràng $A'_\mu \subset A'$ và $A'_\mu \subset A''(\mu = 1, 2, \ldots, k+1)$. Vì có tất cả $k+1$ tập hợp A'_μ, từ bao hàm thức trên suy ra

$$(k+1)S(A') \geq S(A'_1) + S(A'_2) + \cdots + S(A'_{k+1}). \tag{10.12}$$

Nếu lấy (10.7) trừ đi (10.12) chúng ta nhận được

$$(k+1)S(A'') < S(A_{k+2}) + S(A''_1) + S(A''_2) + \cdots + S(A''_{k+1}). \tag{10.13}$$

Vì $S(A) - S(A') = S(A'')$ và $S(A_\mu) - S(A'_\mu) = S(A''_\mu)$ do (10.8)-(10.11) nên từ (10.13),(10.9) và (10.11) suy ra

$$kS(A_{k+2}) < S(A_1 \cap A_{k+2}) + S(A_2 \cap A_{k+2}) + \cdots + S(A_{k+1} \cap A_{k+2}). \tag{10.14}$$

Từ (10.14) và giả thiết đúng cho k theo qui nạp suy ra $A_1 \cap A_{k+2}, A_2 \cap A_{k+2}, \ldots, A_{k+1} \cap A_{k+2}$ có điểm trong chung, điều này có nghĩa là tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_{k+2}$ có điểm trong chung. Như vậy với $n = k+2$ từ (10.5) suy ra ít nhất $k+2$ tập hợp từ (10.3) có điểm trong chung.

Bây giờ chúng ta giả thiết với một $n \geq k+2$ từ (10.5) suy ra ít nhất $k+2$ tập hợp từ (10.3) có điểm trong chung và sẽ phải kết luận rằng từ

$$(k+1)S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n) + S(A_{n+1}). \tag{10.15}$$

suy ra có ít nhất $k+2$ tập hợp trong dãy $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ có điểm trong chung. Thật vậy, chúng ta đặt

$$A'_\mu = A_\mu \backslash A_{n+1}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n). \tag{10.16}$$

$$A''_\mu = A_\mu \cap A_{n+1}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{10.17}$$

và

$$A' = A \backslash A_{n+1} \tag{10.18}$$

$$A'' = A_{n+1}. \tag{10.19}$$

Vì $A'_\mu \cup A'_\mu = A'_\mu, A'_\mu \cap A''_\mu = \emptyset (\mu = 1, 2, \ldots, n)$ và $A' \cup A'' = A, A' \cap A'' = \emptyset$ nên

$$S(A'_\mu) + S(A''_\mu) = S(A_\mu), (\mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{10.20}$$

và

$$S(A') + S(A'') = S(A). \tag{10.21}$$

Chúng ta sẽ chứng minh một trong các bất đẳng thức sau là đúng

$$(k+1)S(A') < S(A'_1) + S(A'_2) + \cdots + S(A'_n) \tag{10.22}$$

hoặc là

$$kS(A'') < S(A''_1) + S(A''_2) + \cdots + S(A''_n). \tag{10.23}$$

Thật vậy, trong trường hợp ngược lại chúng ta sẽ có $(k+1)S(A') \geq S(A'_1) + S(A'_2) + \cdots + S(A'_n)$ và $kS(A'') \geq S(A''_1) + S(A''_2) + \cdots + S(A''_n)$ Cộng hai vế lại và do (10.20), (10.21) chúng ta nhận được

$$S(A') + kS(A) \geq S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n). \tag{10.24}$$

Cộng hai vế (10.24) với $S(A'')$ và từ (10.19), (10.21) chúng ta nhận được

$$(k+1)S(A) \geq S(A_1) + S(A_2) + \cdots + S(A_n)$$

Nhưng điều này trái với (10.15). Do đó trong hai bất đẳng thức (10.22) và (10.23) phải có ít nhất một cái đúng.

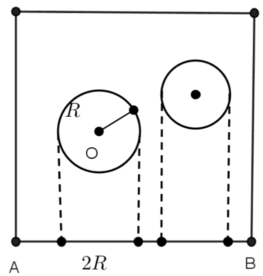
Giả sử (10.22) đúng. Theo giả thiết qui nạp đối với n từ (10.22) suy ra ít nhất $k+2$ tập hợp trong dẫy $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ có điểm trong chung. Từ (10.16) suy ra rằng kết luận trên cũng đúng cho dẫy (10.3).

Giả sử (10.23) đúng. Từ giả thiết qui nạp đối với k suy ra $k+1$ tập hợp trong $A''_1, A''_2, \ldots, A''_n$ có điểm chung và cùng với (10.17) chỉ ra rằng tồn tại một điểm mà nó là điểm trong của $k+1$ tập hợp từ (10.3) và cả của A_{n+1}.

Như vậy từ (10.15) suy ra $k+2$ tập hợp trong dãy $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ có điểm trong chung. Suy ra kết luận đúng với $n+1$. Từ phương pháp qui nạp bây giờ lại suy ra, với mọi n, với (10.5) tồn tại một điểm mà nó là điểm trong của ít nhất $k+2$ tập hợp trong (10.3). ☺

Chú ý. Trong chứng minh định lý dùng phương pháp qui nạp theo k. Nhưng đi từ bước k sang $k+1$ ta lại dùng phương pháp qui nạp theo n. Với chứng minh qui nạp theo n từ bước n sang $n+1$ ta lại dùng bước k trước đó và n.

▷ **10.7.** *Trong một hình vuông có cạnh là 1 chứa một số đường tròn, Tổng độ dài của chúng là 10. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng, mà nó cắt ít nhất 4 trong những đường tròn này.*



Hình 10.6:

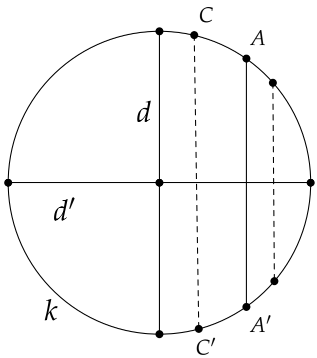
Lời giải. (Hình 10.6) Chúng ta chọn một cạnh hình vuông rồi chiếu vuông góc các đường tròn xuống cạnh đó.

Dễ thấy rằng hình chiếu của một đường tròn bán kính R là một đoạn thẳng có độ dài $2R$. Vì vậy trên cạnh hình vuông đã chọn sẽ có những đoạn thẳng chiếu xuống với tổng độdài là $\dfrac{10}{\pi}$.

Nhưng $\dfrac{10}{\pi} > 3 = 3.1$, theo nguyên lý Đirichlê suy ra có một điểm M nào đó thuộc AB là điểm trong chung của 4 đoạn thẳng đã chiếu xuống. Khi đó đường thẳng đi qua điểm M vuông góc với AB sẽ cắt 4 đường tròn. ☺

▷ **10.8.** *Một số cung nằm trên đường tròn với bán kính 1 được sơn xanh. Tổng độ dài của các cung mầu xanh lớn hơn π. Chứng minh rằng với mỗi đường kính d của đường tròn tồn tại dây cung song song với d, mà hai đầu của dây cung được sơn xanh.*

Lời giải. (Hình 10.7) Không mất tính tổng quát chúng ta giả thiết các cung bôi sơn không có điểm chung. Cho d là đường kính bất kỳ của đường tròn k và c là một trong các cung được bôi mầu. Trên đường tròn k ta tạo ra cung c' bằng cách lấy đối xứng c qua đường kính d' vuông góc với d.



Hình 10.7:

Dễ thấy cung c' cho cùng độ dài với cung c. Ta làm như vậy với mọi cung còn lại thì trên k nhận được một hệ cung có tổng độ dài lớn hơn 2π. Nhưng độ dài của k là 2π, như vậy theo nguyên lý Đirichlê có ít nhất hai cung trong hệ này có điểm chung.

Nhưng chúng ta đã giả thiết ở trên những cung dạng c từng đôi không có điểm chung, điều đó cũng đúng cho các cung c'. Khi đó tồn tại một cung bôi sơn c_1 có điểm chung A với cung c_2', đối xứng với cung c_2 qua d'. Rõ ràng dây cung đi qua A và song song với d có tính chất mong muốn vì một đầu ở c_1, còn đầu kia ở c_2. ☺

▹ **10.9.** *Trong hình tròn bán kính 1 người ta tô sơn một số dây cung. Chứng minh rằng nếu mọi đường kính cắt nhiều nhất k dây cung, thì tổng độ dài của tất cả các dây cung đã tô sơn nhỏ hơn πk.*

Lời giải. Lấy c là một dây cung bất kỳ trong hình tròn C đã cho và γ là cung nhỏ trong hai cung do c tạo ra. Ký hiệu γ' là cung đối xứng với γ qua tâm của hình tròn. Rõ ràng một đường kính của C cắt dây cung c khi và chỉ khi có hai đầu mút nằm trong γ và γ'.

Giả sử rằng tổng độ dài những dây cung đã kẻ lớn hơn hoặc bằng πk. Khi đó tổng độ dài tất cả các cung dạng γ lớn hơn πk. Cũng đúng như vậy cho tổng độ dài các cung dạng γ'. Suy ra tổng độ dài của các cung dạng γ' hoặc γ là lớn hơn $2\pi k$. Vì độ dài của đường tròn C là 2π, từ nguyên lý Đirichlê mở rộng suy ra tồn tại ít nhất một điểm thuộc C, mà nó nằm trên ít nhất $k+1$ cung có dạng γ hoặc γ'. Nếu từ điểm chung này ta kẻ đường kính của C,thì nó cắt ít nhất $k+1$ dây cung đã cho, điều này trái với điều kiện trong đầu bài. Vậy điều khẳng định của bài toán là đúng. ☺

▹ **10.10.** *Một tập hợp M là hợp của một số đoạn thẳng nằm trong khoảng $[0,1]$. Biết rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của M không bằng 0,1. Chứng minh rằng tổng độ dài của những đoạn tạo nên M không vượt quá*

a) $0,55$;

b) $0,5$.

Lời giải. a) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tổng S của độ dài những đoạn thẳng tạo nên M lớn hơn 0,55. Chúng ta xét tập N nhận được từ M bằng cách cộng mỗi đoạn thẳng của M với 0,1. Từ điều kiện của bài toán suy ra M và N không có điểm chung. Ngoài ra tổng độ dài của N bằng S nên lớn hơn 0,55. Dễ thấy hai tập hợp M và N nằm trong đoạn [0;1,1]. Vì $2.S > 2.0,55 = 1,1$, từ nguyên lý Đirichlê suy ra M và N có điểm chung, điều này dẫn tới vô lý.

b) Giả sử độ dài của tất cả các đoạn trong M lớn hơn 0,5. Chúng ta chia đoạn [0,1] thành 10 phần $\left[0,\dfrac{1}{10}\right],\left[\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10}\right],\ldots,\left[\dfrac{9}{10},1\right]$. Ký hiệu M_i là phần của M nằm trong đoạn $\left[\dfrac{i}{10},\dfrac{i+1}{10}\right], i = 0,1,\ldots,9$ và S_i là tổng độ dài các đoạn thẳng tao ra M_i. Bằng cách tịnh tiến thích hợp chúng ta chuyển mọi đoạn $\left[\dfrac{1}{10},\dfrac{2}{10}\right],\ldots,\left[\dfrac{9}{10},1\right]$ tới $\left[0,\dfrac{1}{10}\right]$. Ký hiệu M_i' là ảnh của M_i với $i = 2,3,4\ldots,9$. Vì $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} > 0,5 = 5.0,1$, từ nguyên lý Đirichlê mở rộng suy ra có ít nhất 6 tập hợp trong $M_0, M_1', \ldots, M_9'$ có điểm chung. Điều này có nghĩa là một số nào đó trong $\left[0,\dfrac{1}{10}\right]$ là kết quả của 6 điểm khác nhau $x_1, x_2, \ldots, x_6$ của M trừ đi tương ứng những số dạng $\dfrac{k_1}{10},\dfrac{k_2}{10},\ldots,\dfrac{k_6}{10}$, ở đây k_i là một số nào đó trong $0,1,2,\ldots,9, i = 1,2,\ldots 6$. Dễ dàng thấy rằng ít nhất có hai trong các số $k_1, k_2, \ldots, k_6$ là liên tiếp (áp dụng nguyên lý Đirichlê). Ví dụ như $k_2 = k_1 + 1$. Vì $x_1 - \dfrac{k_1}{10} = x_2 - \dfrac{k_2}{10}$, nên $x_2 - x_1 = (k_2 - k_1) = \dfrac{1}{10}$, điều này dẫn đến vô lý. ☺

10.3. Bài tập

▷ **10.11.** Cho n là một số tự nhiên bất kỳ, còn A là một bề mặt trong mặt phẳng, mà $s(A) > n$. Khi đó tồn tại $n+1$ điểm trong khác nhau (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ của A, mà hiệu $x_i - x_j$ và $y_i - y_j (i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$ là những số nguyên.

▷ **10.12.** Nếu với một bề mặt A trong mặt phẳng và một số nguyên dương k thỏa mãn $S(A) < k$, thì tồn tại một phép tịnh tiến sao cho ảnh của A qua phép tịnh tiến này chứa nhiều nhất $k-1$ điểm với tọa độ nguyên.

▷ **10.13.** Cho A là tập hợp lồi, đối xứng qua gốc tọa độ trong mặt phẳng, n là số tự nhiên và $S(A) > 4n$. Khi đó A chứa ít nhất $2n+1$ điểm trong khác nhau với tọa độ nguyên.

▷ **10.14.** Nếu A là tập hợp lồi, bị chặn, đối xứng qua gốc tọa độ và có diện tích bằng 615, thì A chứa ít nhất 307 điểm mà khoảng cách giữa mọi cặp trong chúng lớn hơn hoặc bằng 1.

▷ **10.15.** Cho F là tập hợp lồi, bị chặn những điểm của mặt phẳng. Chúng ta gọi độ hữu hiệu của tập hợp F là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai đường thẳng song song ở hai phía của tập hợp F. Chứng minh rằng nếu trong một tập hợp lồi, bị chặn với độ hữu hiệu d có chứa một số tập hợp con mà tổng độ hữu hiệu của chúng lớn hơn kd, thì tồn tại đường thẳng, mà nó cắt ít nhất $k+1$ tập hợp con nói trên.

CHƯƠNG 11

TOÁN HỌC TỔ HỢP

11.1. Ví dụ

▷ **11.1.** *(Đề thi Toán Olympic Quốc tế,1972) Cho tập hợp gồm 10 số có hai chữ số. Chứng minh rằng tập hợp đó có ít nhất hai tập hợp con không giao nhau, mà tổng những phần tử trong chúng bằng nhau.*

Lời giải. Nếu có hai tập hợp con giao nhau mà tổng trong chúng bằng nhau thì chúng ta có thể bỏ những phần tử chung đi. Khi đó còn lại hai tập không giao nhau và tổng các phần tử của chúng vẫn bằng nhau.

Chúng ta tính có bao nhiêu tập hợp con không rỗng của một tập hợp có mười phần tử. Số lượng những tập hợp con chỉ chứa 1 phần tử có 10 hoặc là C_{10}^1. Số lượng những tập hợp con chứa 2 phần tử là C_{10}^2. Số lượng những tập hợp con chứa 3 phần tử là $C_{10}^3, \ldots$ Suy ra tổng số lượng các tập hợp con là

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + \cdots + C_{10}^{10} = (1+1)^{10} = 1023$$

Điều kiện bài ra là 10 số đã cho không lớn hơn 99. Vậy tổng của các số trong mỗi tập hợp con không vượt quá $99.10 = 990$, như vậy số lượng những tổng khác nhau nhiều nhất là 990. Theo nguyên lý Đirichlê trong số 1023 tập hợp con của tập hợp gồm 10 số sẽ có ít nhất hai tập mà tổng các phần tử trong chúng phải bằng nhau. ☺

▷ **11.2.** *Cho 15 bài toán trắc nghiệm, đánh số từ 1 đến 15, mỗi bài chỉ có hai khả năng trả lời : đúng hoặc sai. Có 1600 thí sinh tham gia thi, nhưng không có ai trả lời đúng 2 bài liền nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai thí sinh trả lời toàn bộ 15 bài hệt như nhau.*

Lời giải. Bài làm của mỗi thí sinh tương ứng với một dãy 15 phần tử, mỗi phần tử hoặc là Đ (đúng) hoặc là S (sai). Theo giả thiết không có dãy nào có 2 phần tử kề nhau là Đ, Đ, nên số tối đa các phần tử SS trong dãy là 8.

Ta nhận thấy với mỗi $0 \leq k \leq 8$ thì số các dãy có đúng k phần tử Đ là $C_k^{15-k+1} = C_k^{16-k}$ (bởi vì mỗi một dãy như thế tương đương với cách đặt k tấm bìa giữa $15 - k$ quyển sách: có tất cả $16 - k$ vị trí để đặt bìa, kể cả hai đầu của chồng sách đó).

Vậy là số các dãy có tính chất nêu trên là

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{8} C_k^{16-k} &= 1 + 15 + 91 + 286 + 495 + 462 + 210 + 36 + 1 \\ &= 1597 < 1600\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng phải có ít nhất 2 thí sinh có các câu trả lời hệt như nhau.

▷ **11.3.** *Trong một hình 9 cạnh đều có một đỉnh được tô mầu trắng còn các đỉnh khác được tô đen. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác phân biệt toàn đẳng (diện tích bằng nhau) mà các đỉnh của mỗi tam giác được tô cùng một mầu.*

Lời giải. Từ 9 đỉnh được tô mầu thì ít nhất cũng có 5 đỉnh được tô cùng một mầu. Giả sử đó là mầu trắng. Năm mầu trắng tạo thành $C_3^5 = \dfrac{5.4.3}{2.3} = 10$ tam giác phân biệt cùng một mầu trắng. Để ý rằng phép quay một góc $\frac{2k\pi}{9}$ $(k = 0, 1, \ldots, 8)$ xung quanh tâm O của hình 9 cạnh đều không ảnh hưởng đến tập M các đỉnh của hình 9 cạnh này. Vì thế sau khi quay mỗi tam giác trong 10 tam giác trên một góc $\frac{2k\pi}{9}(0 \leq k \leq 8)$ xung quanh O ta được $10.9 = 90$ tam giác có đỉnh trong tập hợp M. Tất cả chúng không thể phân biệt vì số tam giác khác nhau có đỉnh trong tập hợp M bằng $C_3^5 = \frac{2.8.7}{2.3} = 78 < 90$.

Như vậy ta tìm được hai tam giác trắng Δ_1 và Δ_2 sau một vài phép quay trùng với cùng một tam giác Δ. Lưu ý là hai tam giác Δ_1 và Δ_2 là phân biệt. Thật thế, hai tam giác như nhau không thể có được sau khi quay từ một tam giác.

Vì mỗi tam giác Δ_1 và Δ_2 sẽ trùng với tam giác Δ sau khi quay, nên từ tam giác Δ_1 bằng một phép quay ta có thể nhận được tam giác Δ_2 (chẳng hạn các phép quay $\Delta_1 \to \Delta$, $\Delta \to \Delta_2$). Vậy Δ_1 và Δ_2 là hai tam giác phải tìm. ☺

▷ **11.4.** *Trên mặt phẳng có n hình. Giả sử $S_{i_1 \ldots i_k}$, là diện tích phần giao của các hình thứ $i_1, \ldots, i_k$, còn S là diện tích phần mặt phẳng bị phủ bởi các hình đó. Ký hiệu M_k là tổng tất cả các $S_{i_1 \ldots i_k}$, tức là tổng diện tích của tất cả các hình có thể có là giao của k hình đã cho. Chứng minh rằng*

a) $S = M_1 - M_2 + M_3 - \ldots - (-1)^{n+1} M_n$

b) $S \geq M_1 - M_2 + M_3 - \ldots - (-1)^{n+1} M_n$ *với m chẵn và*

$S \leq M_1 - M_2 + M_3 - \ldots - (-1)^{n+1} M_n$ *với m lẻ.*

Lời giải. a) Ký hiệu C_k^n là số cách chọn k phần tử từ n phần tử, ta có nhị thức Niutơn $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k y^{n-k}$. Ký hiệu D_m là diện tích phần mặt phẳng bị phủ bởi đúng m hình. Phần mặt phẳng đó gồm những mảnh, mỗi mảnh bị phủ bởi m hình xác định nào đó. Khi tính M_k diện tích mỗi mảnh như vậy, sẽ được tính C_k^m lần, bởi vì từ m hình có thể tạo được C_k^m giao của k hình. Do đó

$$M_k = C_k^k D_k + C_k^{k+1} D_{k+1} + \cdots + C_k^n D_n$$

Suy ra $M_1 - M_2 + M_3 - \cdots + (-1)^{n+1} = C_1^1 D_1 + (C_1^2 - C_2^2) D_2 + \cdots + (C_1^n - C_2^n + C_3^n - \cdots) D_n = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$
bởi vì do nhị thức Niutơn $C_1^m - C_2^m + 3m - \cdots - (-1)^m C_m^m = (-1 + C_1^m - C_2^m + C_3^m - \cdots - (-1)^m C_m^m) + 1 = (1-1)^m + 1 = 1$

Cuối cùng chúng ta lưu ý rằng $S = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$.

b) Từ phần a) ta có

$$S - (M_1 - M_2 + \cdots + (-1)^{m+1} M_m) =$$

$$= (-1)^{m+2} M_{m+1} + (-1)^{m+3} M_{m+2} + \cdots + (-1)^{n+1} M_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ((-1)^{m+2} C_{m+1}^i + \cdots + (-1)^{n+1} C_n^i) D_i$$

(Ta qui ước nếu $k > i$ thì $C_k^i = 0$. Do đó ta chỉ cần phải chứng minh rằng:

$C_{m+1}^i - C_{m+2}^i + C_{m+3}^i - \ldots - (-1)^{m+n+1} C_n^i \geq 0$ với $i \leq n$.

Từ đẳng thức $(x+y)^i = (x+y)^{i-1}(x+y)$ suy ra đẳng thức $C_j^i = C_{j-1}^{i-1} + C_j^{i-1}$.

Do đó

$$C_{m+1}^i - C_{m+2}^i + C_{m+3}^i - \ldots - (-1)^{m+n+1} C_n^i =$$

$$= C_m^{i-1} + C_{m+1}^{i-1} - C_{m+2}^{i-1} + C_{m+3}^{i-1} - \ldots$$
$$+ (-1)^{m+n+1} C_{n-1}^{i-1} + (-1)^{m+n+1} C_n^{i-1} = C_m^{i-1} \pm C_n^{i-1}$$

Cuối cùng chỉ cần lưu ý rằng $C_n^{i-1} = 0$ với $i \leq n$. ☺

▷ **11.5.** *Một cái áo diện tích bằng 1 có 5 miếng vá, mà diện tích của mỗi miếng vá không nhỏ hơn 0,5. Chứng minh rằng luôn tìm được hai miếng vá có diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn 0,2.*

Lời giải. Giả sử diện tích cái áo bằng M, diện tích phần giao của các miếng vá thứ $i_1, \ldots, i_k$ bằng $S_{i_1 \ldots i_k}$, còn $M_k = \sum S_{i_1 \ldots i_k}$. Từ bài trên suy ra $M - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 \geq 0$, bởi vì $M \geq S$. Các bất đẳng thức tương tự có thể được viết không chỉ cho cả cái áo, mà còn cho từng miếng vá. Nếu ta coi miếng vá S_1 như một cái áo với các miếng vá $S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}$ thì ta được $S_1 - \sum S_{1i} + \sum S_{1ij} - \sum S_{1ijk} + S_{12345} \geq 0$. Cộng các bất đẳng thức như vậy cho tất cả 5 miếng vá, ta được $M_1 - 2M_2 + 3M_3 - 4M_4 + 5M_5 \geq 0$ (hạng tử $S_{i_1 \ldots i_k}$ có trong các bất đẳng thức cho các miếng vá $i_1 \ldots i_k$, nên trong tổng tất cả các bất đẳng thức nó có hệ số k). Cộng các bất đẳng thức $3(M - M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5) \geq 0$ và $M_1 - 2M_2 + 3M_3 - 4M_4 + 5M_5 \geq 0$, ta được $3M - 2M_1 + M_2 - M_4 + 2M_5 \geq 0$. Cộng vào đó bất đẳng thức $M_4 - 2M_5 \geq 0$, (được suy ra từ S_{12345} có trong tất cả các $S_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ tức là $M_4 \geq 5M_5 \geq 2M_5$), ta được $3M - 2M_1 + M_2 \geq 0$, tức là $M_2 \geq 2M_1 - 3M \geq 5 - 3 = 2$. Bởi vì từ 5 miếng vá có thể tạo được 10 cặp, nên diện tích giao của một trong số các cặp đó không nhỏ hơn $\dfrac{M_2}{10} \geq 0,2$. ☺

▷ **11.6.** *(Đề thi Toán vô địch CHLB Đức, 1979) Giả sử mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng 1 trong n mầu (n là số tự nhiên cho trước). Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật với các đỉnh được tô cùng một mầu.*

Lời giải. Ta thiết lập trong mặt phẳng một hệ toạ độ Đề các vuông góc tuỳ ý và chú ý tới điểm nguyên (i, j) với $1 \leq i \leq n + 1$ và

$1 \le j \le n^{n+1} + 1$. Việc tô mầu kể theo thứ tự $n+1$ điểm trên mỗi dòng có n^{n+1} cách khác nhau (mỗi điểm có n cách tô). Do đó có ít nhất là 2 dòng trong số $n^{n+1} + 1$ dòng được tô mầu giống nhau (nghĩa là hai dòng giống nhau về mầu sắc tô ở điểm thứ nhất, điểm thứ hai,...,điểm thứ $n+1$ chẳng hạn tính từ trái qua phải). Giả sử hai dòng ấy là dòng những điểm có toạ độ k và m; nghĩa là với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ các điểm (i, k) và (i, m) có cùng một mầu. Bởi vì chỉ có n mầu nên trong số $n+1$ điểm trên dòng các điểm có tung độ k ắt có ít nhất hai điểm có cùng mầu, chẳng hạn, đó là 2 điểm (a, k) và (b, k). Khi đó hình chữ nhật với các đỉnh $(a, k), (b, k), (b, m)$ và (a, m) có 4 đỉnh cùng mầu. ☺

▷ **11.7.** *Cho 1000 điểm trên mặt phẳng $M_1, M_2, \ldots, M_{1000}$. Chứng minh rằng trên bất cứ đường tròn bán kính 1 nào ta đều tìm được một điểm S sao cho tổng khoảng cách từ S đến các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_{1000}$ không nhỏ hơn 1000.*

Lời giải. Giả sử S_1 và S_2 là hai điểm tuỳ ý đối tâm của đường tròn T bán kính 1. Ta có $S_1S_2 = 2$, vậy $S_1M_1 + S_2M_2 \ge S_1S_2 = 2$; $S_1M_2 + S_2M_2 \ge 2$;...; $S_1M_{1000} + S_2M_{1000} \ge 2$. Vì thế $(S_1M_1 + S_2M_1) + (S_1M_2 + S_2M_1) + \cdots + (S_1M_{1000} + S_2M_{1000}) = (S_1M_1 + S_1M_2 + \cdots + S_1M_{1000}) + (S_2M_1 + S_2M_2 + \cdots + S_2M_{1000}) \ge 2000$.

Do đó ít nhất một trong hai điểm S_1 và S_2 chắc chắn thoả mãn bài ra là tổng khoảng cách từ nó đến các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_{1000}$ không nhỏ hơn 1000. ☺

▷ **11.8.** *Cho 37 điểm phân biệt trong không gian có toạ đọ là những số nguyên sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể chọn 3 điểm mà toạ độ giao điểm các trung tuyến của tam giác tạo thành đều là số nguyên.*

Lời giải. Với mỗi điểm $x;y;z$ có toạ độ là những số nguyên (điểm nguyên) ta cho tương ứng các số $\bar{x};\bar{y};\bar{z}$ là những số dư của phép chia các số $x;y;z$ cho 3. Vì $\bar{x}$ nhận không quá 3 giá trị nên ít nhất 13 trong số 37 điểm có cùng giá trị (nếu không, thế thì số các điểm không lớn hơn 12.3=36). Tương tự, có không ít hơn 5 trong 13 điểm đó có giá trị $\bar{y}$ như nhau.

Thế thì giao điểm các trung tuyến của tam giác có đỉnh (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) và (x_3, y_3, z_3) có toạ độ

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Nếu $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3$ và $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_3$ thì các số x_0 và y_0 là nguyên còn số z_0 chỉ nguyên khi và chỉ khi $z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod 3$. Trong trường hợp bài ra ta chọn ra 5 điểm mà tất cả số $\bar{x}$ bằng nhau và tất cả số $\bar{y}$ bằng nhau. Nếu trong các điểm này ta tìm được ba điểm mà các số $\bar{z}$ nhận các giá trị $0;1;2$ thì với các điểm đó ta có

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$$

Nếu không có những điểm này thì số $\bar{z}$ với 5 điểm đã chọn sẽ nhận không quá 2 giá trị, do đó ta tìm được 3 điểm mà giá trị $\bar{z}$ nhận cùng một giá trị mà số z_0 ứng với nó là số nguyên. ☺

▷ **11.9.** *Trên mặt phẳng cho 7 đường thẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng ta tìm được hai trong 7 đường thẳng nói trên mà góc giữa chúng nhỏ hơn* 26^0.

Lời giải. Ta hãy tịnh tiến tất cả 7 đường thẳng đã cho sao cho chúng cùng đi qua một điểm cố định O. Ta sẽ được 7 đường thẳng chia góc đầy đỉnh O thành 14 phần. Vì thế một trong các góc tạo thành nhỏ hơn $\dfrac{360^0}{14} = 25^0\dfrac{5}{7} < 26^0$ (nếu tất cả các góc đều bằng nhau thì mỗi góc không lớn hơn 26^0). Nhưng góc giữa hai đường thẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng ban đầu. ☺

▷ **11.10.** Cho A là một tập các số nguyên và x là một số nguyên bất kỳ. Tập hợp $x + A = \{x + a | a \in A\}$ gọi là tịnh tiến của A xác định bở i x. Hay nói cách khác tập hợp $x + A$ gồm các phần tử của A cộng thêm với cùng một số x. Chúng ta nói rằng một tập hợp những số nguyên là k-**nhỏ nhất**, nếu tồn tại k tập tịnh tiến của A, mà chúng từng đôi không có điểm chung. Ví dụ: mọi tập số hữu hạn là k-nhỏ nhất với mọi số nguyên dương k. Cũng có tập vô hạn là k-nhỏ nhất như dãy $k + 1, (k + 1)^2, \ldots, (k + 1)^n, \ldots$ Nhưng chúng ta chứng minh kết luận sau:

Cho n là số tự nhiên. Khi đó tập hợp những số nguyên không thể biểu diễn như hợp của n tập hợp $(n + 1)$-nhỏ nhất.

Lời giải. Chúng ta giả sử ngược lại: tồn tại những tập hợp $(n + 1)$-nhỏ nhất $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sao cho mỗi số nguyên thuộc một trong những tập hợp này. Theo định nghĩa của tập $(n + 1)$-nhỏ nhất với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ tồn tại $n + 1$ số nguyên $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n+1}$ sao cho với $1 \leq r \leq n + 1, 1 \leq s \leq n + 1$ và $r \neq s$ những phép tịnh tiến $a_{ir} + A_i$ và $a_{is} + A_i$ không có điểm chung. Ký hiệu N là tập hợp tất cả n-bộ sắp thứ tự $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ở đây $j_1, j_2, \ldots, j_n$ độc lập nhận các giá trị $1, 2, \ldots, n, n + 1$. Với mỗi n-bộ $a = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ từ N cho tương ứng với một số nguyên $x_a = a_{1j_1} + a_{2j_2} + \cdots + a_{nj_n}$. Bởi vì chúng ta đã giả thiết tập hợp những số nguyên là hợp của các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, mỗi số x_a thuộc một tập nào đó trong dãy tập hợp trên. Ngoài ra số phần tử của N là $(n + 1)^n$ (đây là tính tổ hợp).Từ nguyên lý Đirichle mở rộng chúng ta có ít nhất một trong các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ chứa những số dạng x_a với ít nhất $\dfrac{(n + 1)^n}{n}$

bộ a từ N.

Không mất tính tổng quát chúng ta giả thiết A_1 có tính chất trên. Chúng ta xét tất cả các phần tử α của N mà số x_α thuộc A_1. Chúng gồm ít nhất $\dfrac{(n+1)^n}{n}$ phần tử. Nếu $\alpha = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ là một phần tử trong chúng, thì chúng ta cho tương ứng với $(n-1)$-bộ sắp $\alpha' = (j_2, j_3, \ldots, j_n)$. Vì $1 \leq j_\mu \leq n+1$ với mọi $\mu = 2, 3, \ldots, n$, theo tính chất tổ hợp với α' có nhiều nhất $(n+1)^{n-1}$ khả năng. Từ bất đẳng thức $\dfrac{(n+1)^n}{n} > (n+1)^{n-1}$ suy ra ít nhất có hai n-bộ $\alpha = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, $\beta = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ hoàn toàn khác nhau, mà $x_\alpha \in A_1, x_\beta \in A_1$, tương ứng với cùng một $(n-1)$-bộ.

Chúng ta có thể tóm tắt ngắn gọn như sau: tồn tại hai bộ khác nhau $\alpha = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ và $\beta = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ thuộc N, mà $x_\alpha \in A_1, x_\beta \in A_1$, $j_1 \neq k_1$ và $j_2 = k_2, j_3 = k_3, \ldots, j_n = k_n$. Nhưng, $x_\alpha = a_{1j_1} + a_{2j_2} + \cdots + a_{nj_n}$ $x_\beta = a_{1k_1} + a_{2k_2} + \cdots + a_{nk_n}$ nhưng vì $j_\mu = k_\mu$ với mỗi $\mu = 2, 3, \ldots n$ chúng ta có $x_\alpha - x_\beta = a_{1j_1} - a_{1k_1}$ hoặc là $a_{1k_1} + x_\alpha = a_{1j_1} + x_\beta$. Khi đó số $x = a_{1k_1} + x_\alpha = a_{1j_1} + x_\beta$ thuộc vào tập hợp $a_{1k_1} + A_1$ và $a_{1j_1} + A_1$. Suy ra tập tịnh tiến A_1 xác định bởi các số a_{1k_1} và a_{1j_1} có điểm chung, điều đó trái với giả thiết khi bắt đầu chứng minh. ☺

11.2. Bài tập

▷ **11.11.** a) Trong hình vuông diện tích 6 đặt ba đa giác diện tích 3. Chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai đa giác mà diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn 1.

b) Trong hình vuông diện tích 5 đặt 9 đa giác diện tích 1. Chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai đa giác mà diện tích phần chung của chúng không nhỏ hơn $\dfrac{1}{9}$.

▷ **11.12.** Sáu điểm được sắp xếp trên mặt phẳng sao cho ba điểm bất kỳ là đỉnh của một tam giác mà các cạnh có độ dài khác nhau. Chứng minh rằng cạnh nhỏ nhất của một trong các tam giác đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

▷ **11.13.** Cho $P_1, P_2, \ldots, P_7$ là bẩy điểm trong không gian, trong đó không có bốn điểm nào đồng phẳng. Tô mầu mỗi đoạn $P_iP_j \quad (i < j)$ với một trong hai mầu đỏ hoặc đen. Chứng minh rằng có hai tam giác đơn sắc không có chung cạnh.

▷ **11.14.** Có hai đĩa đều được chia thành 1998 hình quạt bằng nhau, và trên mỗi đĩa tô một cách bất kỳ (bằng một mầu) 200 hình quạt. Các đĩa được đặt chồng lên nhau và quay một đĩa theo những góc là bội của $\dfrac{360^0}{1998}$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 94 vị trí có không quá 20 hình quạt được sơn trùng nhau.

▷ **11.15.** Trên mặt phẳng cho n đường thẳng từng đôi không song song với nhau. Chứng minh rằng góc giữa hai đường thẳng nào đó trong số đó không lớn hơn $\dfrac{180^0}{n}$.

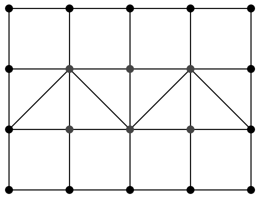
CHƯƠNG 12

MỘT SỐ BÀI TẬP HÌNH HỌC KHÁC

12.1. Ví dụ

▷ **12.1.** *Trong hình chữ nhật 3x4 đặt 6 điểm. Chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng không lớn hơn* $\sqrt{5}$.

Lời giải. Chia hình chữ nhật ra làm 5 hình như hình 12.1. Trong một trong số các hình đó sẽ có ít nhất 2 điểm, và khoảng cách giữa hai điểm đó sẽ không lớn hơn $\sqrt{5}$. ☺



Hình 12.1:

▷ **12.2.** *Trên mặt phẳng có 25 điểm, biết rằng trong 3 điểm bất kỳ trong số đó luôn có 2 điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.*

Lời giải. Giả sử A là một điểm đã cho. Nếu tất cả các điểm còn lại nằm trong hình tròn S_1 tâm A bán kinh 1 thì ta không cần phải chứng minh gì thêm. Giả sử có một điểm B trong số đã cho nằm ngoài đường tròn S_1 tức là $AB > 1$. Xét hình tròn S_2 tâm B bán kính 1. Trong số các điểm A, B, C trong đó C là điểm đã cho bất kỳ luôn có hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1, hơn nữa đó không thể là 2 điểm

A và B. Do đó các hình tròn S_1 và S_2 chứa tất cả các điểm đã cho, tức là một trong hai hình tròn đó chứa không ít hơn 13 điểm đã cho. ☺

▷ **12.3.** *Bên trong đường tròn bán kính n đặt $4n$ đoạn thẳng có độ dài 1. Chứng minh rằng có thể kẻ một đường thẳng song song hoặc vuông góc với đường thẳng l cho trước và cắt ít nhất 2 đoạn thẳng đã cho.*

Lời giải. Giả sử l_1 là đường thẳng bất kỳ vuông góc với l. Ký hiệu độ dài các hình chiếu của đoạn thẳng thứ i lên các đường thẳng l và l_1 là a_i và b_i tương ứng. Bởi vì độ dài của mỗi đoạn thẳng bằng 1, nên $a_i + b_i \geq 1$. Do đó $(a_1 + \cdots + a_{4n}) + (b_1 + \cdots + b_{4n}) \geq 4n$. Không mất tính tổng quát giả sử $(a_1 + \cdots + a_{4n}) \geq (b_1 + \cdots + b_{4n})$. Khi đó $a_1 + \cdots + a_{4n} \geq 2n$. Tất cả các đoạn thẳng đã cho đều được chiếu xuống đoạn thẳng có độ dài $2n$, bởi vì chúng đều nằm trong đường tròn bán kính n. Nếu như các hình chiếu của các đoạn thẳng đã cho lên đường thẳng l không có điểm chung, thì sẽ có bất đẳng thức $a_1 + \cdots + a_{4n} < 2n$. Do đó trên l phải có một điểm bị các điểm của ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đã cho chiếu lên đó. Đường vuông góc với l tại điểm đó sẽ cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho. ☺

▷ **12.4.** *Trên doạn thẳng có độ dài 1 ta tô một số đoạn thẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm được tô bất kỳ không bằng 0,1. Chứng minh rằng tổng độ dài các doạn thẳng được tô không lớn hơn 0,5.*

Lời giải. Chia đoạn thẳng ra làm 10 đoạn thẳng có độ dài 0,1, đặt chúng theo một cột và chiếu chúng xuống một đoạn thẳng như vậy. Bởi vì khoảng cách giữa hai điểm được tô bất kỳ không bằng 0,1, nên các điểm được tô của các đoạn thẳng cạnh nhau không thể cùng chiếu xuống 1 điểm. Do đó không có điểm nào có thể là hình chiếu của các điểm được tô của nhiều hơn 5 đoạn thẳng. Suy ra tổng độ dài các hình chiếu của các đoạn thẳng được tô không lớn hơn $5.0,1 = 0,5$. ☺

▷ **12.5.** *Chứng minh rằng nếu một đường thẳng l nằm trong mặt phẳng của tam giác ABC và không đi qua đỉnh nào của tam giác đó, thì nó cắt không quá hai cạnh của tam giác đã cho.*

Lời giải. Ký hiệu α và $\overline{\alpha}$ là hai nửa mặt phẳng do l chia mặt phẳng của tam giác ABC. Mỗi đỉnh A, B và C nằm trong một nửa mặt phẳng trên. Theo nguyên lý Đirichlê ít nhất một trong hai nửa mặt phẳng trên, chẳng hạn như α, chứa hai đỉnh của tam giác ABC, chẳng hạn như A và B. Khi đó đường thẳng l không cắt đoạn thẳng AB, nghĩa là nó không cắt một trong ba cạnh của tam giác ABC. ☺

▷ **12.6.** *Những điểm trong mặt phẳng được sơn bằng một trong ba mầu. Chứng minh rằng luôn tìm được hai điểm cùng mầu cách nhau đúng bằng 1.*

Lời giải. Giả sử hai điểm bất kỳ cách nhau 1 đều được tô bằng các mầu khác nhau. Xét tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Tất cả các đỉnh của nó được tô bằng các mầu khác nhau. Giả sử điểm A_1 đối xứng với A qua đường thẳng BC. Bởi vì $A_1B = A_1C = 1$, nên điểm A_1 có mầu khác với mầu của B và C, tức là nó được tô cùng một mầu với điểm A. Các lập luận đó thực chất đã chỉ ra rằng nếu $AA_1 = \sqrt{3}$, thì các điểm A và A_1 tô cùng một mầu. Do đó tất cả các điểm nằm trên đường tròn tâm A bán kính $\sqrt{3}$ có cùng một mầu. Rõ ràng trên đường tròn đó luôn tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng bằng 1. Ta được mâu thuẫn, vậy luôn tìm được hai điểm cùng mầu có khoảng cách giữa chúng bằng 1. ☺

▷ **12.7.** *Cho 11 điểm khác nhau trong hình cầu thể tích V. Chứng minh rằng qua tâm của hình cầu có thể dựng hai mặt phẳng sao cho chúng cắt hình cầu thành một "miếng" với thể tích $\frac{V}{6}$, mà phần trong của nó không chứa trong phần trong bất cứ một điểm nào đã cho.*

Lời giải. Chia hình cầu ra hai bán cầu bằng một mặt phẳng đi qua tâm và hai điểm từ các điểm đã cho. Một bán cầu chứa trong phần trong nhiều nhất là 4 điểm từ các điểm còn lại. Chia nửa hình cầu bằng hai mặt phẳng, mà mỗi mặt phẳng đi qua tâm hình cầu và hai điểm trong 4 điểm còn lại. Như vậy nửa hình cầu chia thành 3 "miếng" không chứa một điểm nào bên trong. ít nhất thể tích của một miếng lớn hơn $\frac{1}{3}$ thể tích của bán hình cầu. ☺

▷ **12.8.** *Cho khối đa diện lồi P_1 có 9 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_9$.Ký hiệu $P_2, P_3, .., P_9$ là những đa diện được tạo thành bởi các phép tịnh tiến tương ứng theo các vectơ $\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_9}$. Chứng minh rằng ít nhất 2 trong số 9 đa diện trên có ít nhất một điểm chung.*

Lời giải. Xét hình đa diện P là ảnh của P_1 qua phép vị tự tâm A_1 và hệ số 2. Ta sẽ chứng minh rằng 9 đa diện đều nằm trong P. Thật vậy, cho $A_1, A_2^*, \ldots, A_9^*$ là các đỉnh của đa diện P. Chúng ta sẽ chứng minh, chẳng hạn như P_2 nằm trong P. Để chứng minh điều đó chúng ta chú ý tới phép tịnh tiến $\overrightarrow{A_1A_2}$ chuyển các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_9$ tới các điểm $A_2, A_2^*, A_3', \ldots, A_9'$, ở đây A_i' là trung điểm của đoạn $A_2^*A_i^*$).

Tổng thể tích của các đa diện $P_1, P_2, \ldots, P_9$ nằm trong P bằng $9V$, ở đây V là thể tích của đa diện P_1, còn thể tích của đa diện P bằng $8V$. Suy ra ít nhất có hai đa diện có điểm chung (nguyên lý Đirichlê cho thể tích. ☺

▷ **12.9.** *Trong hình cầu đường kính 3 đặt một số hình cầu mà tổng đường kính của chúng bằng 25 (những hình cầu này có thể giao nhau). Chứng minh rằng với mọi mặt phẳng tồn tại một mặt phẳng song song với nó và cắt ít nhất 9 hình cầu con.*

Lời giải. Chúng ta xét hình chiếu các hình cầu lên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đã cho. Hình cầu lớn chiếu vào một đoạn thẳng có độ dài 3, còn các hình cầu con chiếu vào các đoạn thẳng nhỏ có tổng 25. Giả sử không có một mặt phẳng nào như đề bài ra, nghĩa là mọi mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho chỉ cắt 8 hình cầu nhỏ. khi đó mỗi điểm trong đoạn thẳng độ dài 3 chỉ thuộc nhiều nhất là 8 đoạn thẳng hình chiếu của những hình cầu nhỏ. Suy ra tổng của chúng không quá 24. Nhận được sự vô lý. ☺

▷ **12.10.** *Trong hình vuông cạnh 1 đơn vị có một đường gấp khúc L không tự cắ với độ dài lớn hơn 1000. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng m song song với cạnh hình vuông và cắt đường L tại hơn 500 điểm.*

Lời giải. Giả sử l_i là độ dài mắt thứ i của đường gấp khúc, a_i và b_i là độ dài hình chiếu của nó lên các cạnh của hình vuông. Khi đó $l_i \le a_i + b_i$. Suy ra

$$1000 = l_1 + \cdots + l_n \le (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)$$

Tức là hoặc $a_1 + \cdots + a_n \ge 500$ hoặc là $b_1 + \cdots + b_n \ge 500$. Nếu tổng độ dài hình chiếu của các mắt lên một cạnh độ dài 1 không nhỏ hơn 500, thì theo nguyên lý Đirichlê cho độ dài đoạn thẳng phải có điểm chung cho hơn 500 hình chiếu của các mắt gấp khúc, tức là đường vuông góc kẻ từ điểm chung đó sẽ cắt đường gấp khúc tại ít nhất 500 điểm. ☺

12.2. Bài tập

▷ **12.11.** Cho A là tập hợp những điểm trên một mặt cầu và có diện tích lớn hơn nửa diện tích mặt cầu. Chứng minh rằng A chứa ít nhất một cặp điểm mà nó là 2 đaah u đường kính của quả cầu.

▷ **12.12.** Ta gọi hình chữ thập là hình tạo bởi các đường chéo của hình vuông cạnh 1. Chứng minh rằng trong hình tròn bán kính 100 chỉ có thể đặt được một số hữu hạn các chữ thập không cắt nhau.

▷ **12.13.** Trên mặt phẳng cho điểm O. Hỏi có thể đặt trên mặt phẳng 5 hình tròn không phủ điểm O sao cho mọi tia xuất phát từ O cắt không ít hơn hai hình tròn được hay không ? (cắt ở đây có nghĩa là có điểm chung).

▷ **12.14.** Những điểm trong mặt phẳng được sơn bằng một trong hai mầu. Chứng minh rằng luôn tìm được hai điểm cùng mầu cách nhau đúng bằng 1.

CHƯƠNG 13
MỘT SỐ ĐỀ THI VÔ ĐỊCH

Những bài toán thi vô địch các nước là các bài toán điển hình cho việc vận dụng trí thông minh, sáng tạo để giải. Nó đòi hỏi học sinh phải nắm được các kiến thức cơ bản vững chắc và hiểu thấu đáo. Để giải các bài toán thi vô địch phải vận dụng cao tính phân tích và tổng hợp các kiến thức toán học. Rất nhiều bài toán thi vô địch các nước có một phần giải sử dụng nguyên lý Đirichlê, các chương trước ta đã gặp một số bài. Để thuận tiện cho bạn đoj c muốn tham khảo đầy đủ về chủ đề này tôi chép lại và thống kê ra đây các đề thi vô địch các nước chủ yếu trong cuốn sách [4] và một số tuyển tập khác. Nhưng vì tài liệu tham khảo có hạn, phần sưu tầm của tôi chắc chắn chưa đầy đủ mong các bạn đọc bổ sung và cho ý kiến. Mỗi bài trong chương này kèm theo tên nước và năm kỳ thi vô địch nước đó.

▷ **13.1.** *(Anh, 1966) Chứng minh rằng từ 52 số nguyên bất kỳ luôn có thể chọn được ra hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.*

Lời giải. Tất cả các số dư trong phép chia cho 100, được chia thành từng nhóm như sau: $\{0\}, \{1;99\}, \{2;98\}, \ldots, \{49,51\}, \{50\}$. Vì có tất cả 51 nhóm, mà lại có 52 số, nên theo nguyên lý Đirichlê giữa chúng phải có hai số mà các số dư trong phép chia cho 100 rơi vào một nhóm. Hai số này là hai số cần tìm vì nếu số dư của chúng bằng nhau thì hiệu của chúng chia hết cho 100, còn nếu số dư của chúng khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 100. ☺

▷ **13.2.** *(Anh, 1970) Chứng minh rằng từ tập hợp tuỳ ý gồm n số tự nhiên luôn tách ra được một tập hợp con (khác rỗng) chứa các số mà tổng của chúng chia hết cho n.*

Lời giải. Giả sử với một tập hợp nào đó chứa các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mà không thoả mãn khẳng định của bài toán. Khi đó không có số nào trong các số

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

chia hết cho n. Vì số các số dư khác không trong phép chia cho n là $n-1$, nên theo nguyên lý Đirichlê tìm được hai số S_i và S_j $(1 \leq i < j \leq n)$ có cùng số dư. Suy ra hiệu $S_j - S_i = a_{i-1} + \cdots + a_j$ chia hết cho n, điều này mâu thuẫn với giả sử nói trên và khẳng định của bài toán được chứng minh. ☺

▷ **13.3.** *(Anh, 1976) Giả sử trong tập hợp hữu hạn X chọn ra 50 tập hợp con $A_1, \ldots, A_{50}$ sao cho mỗi tập hợp con chứa hơn một nửa phần tử của tập X. Chứng minh rằng có thể tìm được tập hợp con $B \subset X$ chứa không nhiều hơn 5 phần tử và có ít nhất một phần tử chung cho các tập hợp $A_1, A_2, \ldots A_{50}$.*

Lời giải. Giả sử số các phần tử của tập X bằng n. Mỗi tập hợp con được chọn $A_1, \ldots, A_{50}$ chứa không ít hơn $\dfrac{n}{2}$ phần tử, có nghĩa là tổng số các phần tử của tất cả các tập này vượt quá $50.\dfrac{n}{2} = 25.n$. Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại một phần tử của X thuộc không ít hơn 26 tập con đã chọn. Tương tự ta chứng minh với giá trị bất kỳ $k < 50$ giữa các tập $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ có thể chọn ra không ít hơn $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ tập hợp chứa cùng một phần tử. Ta lấy phần tử của một tập hợp X mà nó thuộc không ít hơn 26 tập (phần tử này sẽ là một trong 5 phần tử của tập hợp B). Ta loại ra 26 tập mà chứa phần tử đã xét. Khi đó tìm được 1 phần tử thuộc ít nhất 13 từ 24 tập còn lại. Ta lại loại 13 tập này ra, khi đó giữa 11 tập còn lại tìm được 1 phần tử thuộc không ít hơn 6 trong số các tập hợp. Đối với 5 tập hợp còn lại tìm được 1 phần tử thuộc không ít hơn 3 trong số chúng. Và cuối cùng tồn tại một phần tử thuộc hai tập cuối cùng. Như vậy ta tìm được không nhiều hơn 5 phần tử của tập X (có thể ít hơn vì một vài phần tử sẽ trùng nhau), chúng sẽ tạo thành tập B. Ngoài ra một tập bất kỳ từ $A_1, \ldots, A_{50}$ chứa ít nhất một trong các phần tử đó.

▷ **13.4.** *(Ba Lan, 1979) Khi chia các số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cho số tự nhiên m nào đó, nhận được các số dư khác nhau, đồng thời $n > \frac{m}{2}$. Chứng minh rằng với mọi số $k \in Z$ tồn tại các số $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (không nhất thiết khác nhau) sao cho số $a_i + a_j - k$ chia hết cho m.*

Lời giải. Xét $2n$ số $a_1, a_2, \ldots, a_n, k - a_1, k - a_2, \ldots, k - a_n$. Vì $2n > m$, nên có 2 trong các số đó có cùng số dư trong phép chia cho m. Theo điều kiện bài toán, các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$, có số dư khác nhau trong phép chia cho m, nên các số $k - a_1, k - a_2, \ldots, k - a_n$ cũng có số dư khác nhau. Do đó cặp số có số dư bằng nhau chỉ có thể là hai số có dạng a_i và $k - a_j$ với i, j nào đó. Khi đó hiệu của chúng $a_i + a_j - k$ chia hết cho m. ☺

▷ **13.5.** *(Ba Lan, 1977) Chứng minh rằng với mọi giá trị $a, b \in R$ và $\epsilon > 0$, tồn tại các số $k, m \in Z$ và $n \in N$ thoả mãn các bất đẳng thức*

$|na - k| < \epsilon$ và $|nb - m| < \epsilon$.

Lời giải. Cho số nguyên $N > \dfrac{1}{\epsilon}$ và với mỗi cặp $x, y \in [0;1]$ ta thay thế bằng cặp u, v thoả mãn $u = [Nx], v = [Ny]$, khi đó nếu với hai cặp $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ tương ứng với một cặp duy nhất (u, v) thì

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{N}(u + \{Nx_1\}) - \frac{1}{N}(v + \{Nx_2\})\right| =$$

$$= \frac{1}{N}|\{Nx_1\} - \{Nx_2\}| < \frac{1}{N} < \epsilon$$

và tương tự ta có $|y_1 - y_2| < \epsilon$. Vì $u, v \in \{0, \ldots, N-1\}$, nên có tất cả N^2 cặp (u, v) khác nhau. Xét tập hợp $N^2 + 1$ cặp giá trị

$$x = \{la\}, y = \{lb\} \text{ với } l = 0, 1, \ldots, N^2$$

Theo nguyên lý Đirichlê có ít nhất hai cặp (giả sử với $l = i$ và $l = j, i > j$) từ tập hợp này tương ứng cùng một cặp (u, v). Do đó, với ký hiệu

$$n = i - j, k = [ia] - [ja], m = [ib] - [jb]$$

ta nhận được các bất đẳng thức cần chứng minh :

$$|na - k| = |(ia - [ia]) - (ja - [ja])| = |\{ia\} - \{ja\}| < \epsilon,$$

$$|nb - m| = |(ib - [ib]) - (jb - [jb])| = |\{ib\} - \{jb\}| < \epsilon.$$

☺

▷ **13.6.** *(Bỉ, 1977) Trong hình tròn có bán kính $n \in N$ có $4n$ đoạn thẳng đều có độ dài bằng 1. Chứng minh rằng nếu có một đường thẳng cho trước thì tìm được một đường thẳng khác, hoặc song song, hoặc vuông góc với đường thẳng này và cắt ít nhất hai đoạn thẳng nói trên.*

Lời giải. Để ý rằng tổng độ dài hai hình chiếu của mỗi một đoạn thẳng lên đường thẳng l và đường thẳng l', vuông góc với nó, không bé hơn 1. Thật vậy, nếu vectơ a có độ dài là 1 song song với đoạn thẳng nào đó, còn các vectơ x và y là các hình chiếu của vectơ a lên đường thẳng l và l' thì $a = x + y$, suy ra $|x| + |y| \geq |a| = 1$. Nhưng độ dài các hình chiếu của đoạn thẳng bằng $|x|$ và $|y|$ do đó tổng của chúng cũng không bé hơn 1. Dẫn đến tổng độ dài hình chiếu của tất cả các đoạn thẳng không bé hơn $4n$. Bởi vậy từ hai đường thẳng l và l' có thể chọn được một đường thẳng, tổng độ dài của hình chiếu các đoạn thẳng trên nó không bé hơn $2n$ (nguyên lý Đirichlê). Vì tất cả các đoạn thẳng được sắp xếp trong hình tròn bán kính n, nên hợp các hình chiếu của chúng trên đường thẳng bất kỳ có độ dài bé hơn $2n$. Suy ra trên đường thẳng được chọn tìm được 1 điểm thuộc vào hình chiếu của ít nhất hai đoạn thẳng (Nguyên lý Đirichlê cho đoạn thẳng). Đường thẳng đi qua điểm này vuông góc với đường thẳng được chọn, sẽ cắt ít nhất hai đoạn thẳng này. Vì đường thẳng này hoặc vuông góc với, hoặc song song với đường thẳng l, thì nó thoả mãn điều kiện bài toán. ☺

▷ **13.7.** *(Bungari (đề thi chọn đội tuyển),1973) Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *là những số nguyên khác nhau trong khoảng [100,200], mà chúng thoả mãn* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 11100$. *Chứng minh rằng giữa những số này có ít nhất một số, mà viết nó ở dạng thập phân có ít nhất hai chữ số giống nhau.*

Lời giải. Chúng ta lập danh sách các số trong khoảng [100,200], mà chúng viết ở hệ thập phân ít nhất có hai chữ số trùng nhau.: 100, 101, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 131, 133, 141, 144, 151, 155, 161, 166, 171, 177, 181, 188, 191, 199, 200. Tổng của tất cả các số trên là 4050. Mặt khác tổng tất cả các số nguyên trong khoảng [100,200] là 15150. Nếu trong những số đã cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không có số nào trong danh sách trên, thì

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 15150 - 4050 = 11100$, điều này vô lý. Nghĩa là trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có ít nhất một số viết ở cơ số mười có ít nhất hai chữ số trùng nhau. ☺

▷ **13.8.** *(Bungari,1973) Trong một thư viện có 20000 cuốn sách, chúng được xếp vào những giá sách sao cho mỗi giá sách có ít nhất một quyển hoặc nhiều nhất 199 cuốn sách. Chứng minh rằng ít nhất có hai giá sách có cùng số lượng sách.*

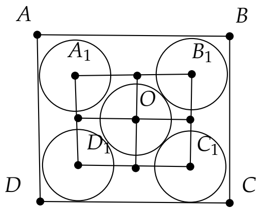
Lời giải. Giả sử ngược lại. Nếu trong thư viện có n giá sách và chúng được đánh số từ 1 đến n, thì rõ ràng là $n \leq 199$. Chúng ta ký hiệu a_i là số cuốn sách được đặt lên giá sách thứ i, chúng ta sẽ có $1 \leq a_i \leq 199$. khi đó từ điều kiện $a_i \neq a_j$ với $i \neq j$, chúng ta nhận được

$$20000 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 1 + 2 + \cdots + 199 = 19900 < 20000$$

điều này vô lý. Suy ra có ít nhất hai giá sách, trên chúng chứa cùng số sách. ☺

▷ **13.9.** *(Bungari, 1983) Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp 5 hình tròn bán kính bằng 1, sao cho không có 3 hình tròn nào trong chúng có điểm trong chung.*

Lời giải. Giả sử hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a, chứa 5 hình tròn không cắt nhau và đều có bán kính bằng 1, khi đó các tâm của chúng nằm trong hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có tâm O và cạnh bằng $a - 2$ (ở đây $A_1B_1 // AB$).



Hình 13.1:

Các đường thẳng nối từ các trung điểm của các cạnh đối diện của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ, ở một trong chúng ít nhất cũng có hai trong số các tâm (Nguyên lý Đirichlê). Khi đó khoảng cách giữa hai tâm này một mặt không lớn hơn đường chéo hình vuông bé, mặt khác không bé hơn 2. Do vậy có

$$2 \le OA_1 = \frac{A_1B_1}{2}\sqrt{2} = \frac{a-2}{2}\sqrt{2}$$

suy ra $a \ge 2\sqrt{2} + 2$.

Cuối cùng, nếu $a = 2\sqrt{2} + 2$ và tâm của các hình tròn là các điểm O, A_1, B_1, C_1, D_1 thì tất cả các điều kiện nêu trên được thoả mãn. Như vậy cạnh của hình vuông cần tìm là $2\sqrt{2} + 2$. ☺

▷ **13.10.** *(Nam Tư, 1977) Cho trước 20 số tự nhiên $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$ không vượt quá 70. Chứng minh rằng giữa các hiệu $a_j - a_k (j > k)$ luôn tìm được ít nhất 4 hiệu bằng nhau.*

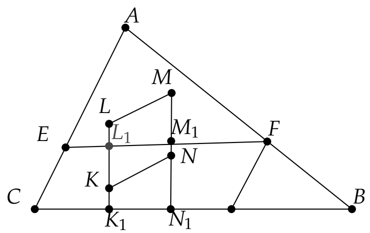
Lời giải. Giả sử khẳng định của bài toán là sai. Khi đó giữa 19 số tự nhiên $a_{20} - a_{19}, a_{19} - a_{18}, \ldots, a_2 - a_1$ không có 4 số nào bằng nhau. Do đó giữa chúng mỗi số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có mặt không quá 3 lần. Suy ra có một trong 19 số đó phải lớn hơn 6 (nếu không thì số các số không lớn hơn 6 sẽ nhiều hơn 18), có 3 trong 18 số còn lại phải lớn hơn 5, 3 trong 15 số còn lại phải lớn hơn 4,... Do đó tổng của chúng $(a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \cdots + (a_2 - a_1) \ge 7 + 3(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 70$ không thể bằng $a_{20} - a_1 \le 70 - 1 = 69$. Mâu thuẫn nhận được đã chứng minh khẳng định của bài toán. ☺

▷ **13.11.** *(Nam Tư, 1981) Tập hợp các số $\{1, 2, \ldots, 100\}$ được chia làm 7 tập hợp con. Chứng minh rằng ít nhất ở một trong các tập hợp con ấy tìm được hoặc 4 số a, b, c, d sao cho $a + b = c + d$, hoặc ba số e, f, g sao cho $e + f = 2g$.*

Lời giải. Để ý rằng có ít nhất một trong 7 tập hợp con chứa không ít hơn 15 số (trong trường hợp ngược lại, tất cả các tập hợp con chứa không nhiều hơn 7.14 = 98 số). Mỗi cặp số $a > b$ của tập hợp con này được đặt tương ứng với hiệu $a - b$. Khi đó ta nhận được không ít hơn $C_{15}^2 = 15\frac{14}{2} = 105$ hiệu, trong số đó phải có các hiệu bằng nhau (vì các hiệu nhận được không quá 99 giá trị khác nhau 1, 2,...,99). Giả sử với hai cặp số $a > b, c > d$ ta có đẳng thức $a - b = c - d (a \neq c, b \neq d)$. Khi đó $a + d = b + c$. Nếu $a = d$ (hoặc $b = c$, đẳng thức khác không thể xẩy ra), thì $c + b = 2a$ (hoặc $a + d = 2b$). ☺

▷ **13.12.** *(Nam tư,1977) Chứng minh rằng diện tích của hình vuông bất kỳ nằm trong tam giác, không lớn hơn nửa diện tích của tam giác đó.*

Lời giải. (Hình 13.2) Ta chứng minh khẳng định tổng quát hơn : diện tích của hình bình hành bất kỳ $KLMN$ nằm ở trong tam giác ABC không lớn hơn nửa diện tích của tam giác đó.



Hình 13.2:

Để ý rằng mỗi một đường thẳng KL và MN cắt hai cạnh của tam giác ABC (có thể ở đỉnh tam giác), nghĩa là có 2 trong 4 giao điểm nằm trên 1 cạnh theo nguyên lý Đirichlê. Chẳng hạn, đường thẳng KL và MN cắt BC lần lượt ở K_1 và N_1. Trên cạnh AB, AC và BC chọn các điểm D, E và F sao cho L_1, M_1 là giao điểm của DE với KL và MN thoả mãn:

$$K_1L_1 = KL; L_1M_1//K_1N_1 \text{ đồng thời } BF//BD$$

Khi đó hình bình hành $KLMN$ và $K_1L_1M_1N_1$ có đường cao bằng nhau đến đas y chung, còn các hình bình hành $BDEF$ và $K_1L_1M_1N_1$

có đáy DE không bé hơn đáy L_1M_1 và hai đường cao hạ từ D và L_1 xuống BF bằng nhau. Bởi vậy có: $S_{KLMN} = S_{K_1L_1M_1N_1} \leq S_{BDEF}$. Giả sử $AE = x.AC$, khi đó $EC = (1-x)AC$, các tam giác ABC, ADE và EFC đồng dạng với nhau nên ta có:

$$\begin{aligned} S_{BDEF} &= S_{ABC} - S_{ADE} - S_{EFC} \\ &= S_{ABC} - x^2 S_{ABC} - (1-x)^2 S_{ABC} \\ &= 2x(1-x)S_{ABC} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}. \end{aligned}$$

Vì $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ với x lấy giá trị bất kỳ, nên $S_{KLMN} \leq \dfrac{1}{2} S_{ABC}$. ☺

▷ **13.13.** *(Nam tư, 1972) Đối với mỗi giá trị $n \in N$, hãy tìm số k lớn nhất ($k \in N$) thoả mãn tính chất sau: Trong tập hợp gồm n phần tử có thể chọn ra k tập hợp con khác nhau, sao cho hai tập hợp con bất kỳ đều có tập giao khác rỗng.*

Lời giải. Cố định phần tử a_i của tập hợp $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ và chỉ xét các tập hợp con chứa phần tử a_1.Số các tập hợp như vậy bằng số các tập hợp con của tập hợp $\{a_2, \ldots, a_n\}$, nghĩa là bằng 2^{n-1}. Suy ra $k \geq 2^{n-1}$. Mặt khác giả sử đã chọn được hơn 2^{n-1} tập con của X. Ta chia tất cả các tập con của X thành 2^{n-1} cặp được tạo bởi 1 tập con của X và phần bù của nó. Theo nguyên lý Đirichlê có ít nhất 2 tập con đã chọn tạo thành một cặp, suy ra chúng không giao nhau. Vậy $k = 2^{n-1}$. ☺

▷ **13.14.** *(Mỹ, 1983) Trên trục số lấy một khoảng có độ dài $\dfrac{1}{n}(n \in N)$. Chứng minh rằng khoảng này có chứa nhiều hơn $\dfrac{n+1}{2}$ phân số tối giản dạng $\dfrac{p}{q}$, trong đó $p, q \in Z, 1 \leq q \leq n$.*

Lời giải. Giả thiết rằng trong một khoảng nào đó có độ dài $\frac{1}{n}$, chứa nhiều hơn $\frac{n+1}{2}$ phân số tối giản $\frac{p}{q}$, với $q \in \{1;2;\ldots;n\}$. Ta sẽ chứng minh rằng giữa các mẫu số của các phân số này luôn tìm được hai mẫu số mà mẫu số này chia hết cho mẫu số kia. Thật vậy ta biểu diễn các mẫu số dưới dạng $2^r.s$ với s là số lẻ, $r \in Z^+$. Số các số lẻ khác nhau giữa các số $1,2,3,\ldots,n$ bằng $[\frac{n+1}{2}]$ (nghĩa là ít hơn số các mẫu số đang xét), suy ra luôn tìm được hai mẫu số $q = 2^r.s$ và $q_1 = 2^{r_1}s_1$ mà $s = s_1$ và $r = r_1$. Khi đó có một mẫu số chia hết cho mẫu số kia, hay $q_1 = kq$. Như vậy giữa các phân số chọn được hai số khác nhau dạng $\frac{m}{q}$ và $\frac{l}{kq}$, với $kq \leq n$. Khi đó

$$|\frac{m}{q} - \frac{l}{kq}| < \frac{1}{n},$$

vì cả hai nằm trong khoảng có độ dài $\frac{1}{n}$. Do đó $km - l = 0$, vì trong trường hợp ngược lại thì

$$|\frac{m}{q} - \frac{l}{kq}| = \frac{|km - l|}{kq} \geq \frac{1}{kq} \geq \frac{1}{n},$$

và do đó $km = l$ và $\frac{l}{kq} = \frac{km}{kq}$, nghĩa là hai phân số được chọn trùng nhau. ☺

▷ **13.15.** *(Việt nam, 1976) Chứng minh rằng tồn tại vô số các số có dạng $5^n (n \in N)$, mà trong các biểu diễn thập phân của mỗi số đó có không ít hơn 1976 chữ số 0 đứng liên tiếp.*

Lời giải. Ta chứng minh rằng với mọi $k \in N$ tồn tại vô số các số $m \in N$ thoả mãn điều kiện $5^m = 1 \pmod{2^k}$.

Thật vậy, giữa các số $5^0, 5^1, \ldots, 5^{2^k}$ luôn tìm được hai số 5^p và $5^q (p > q)$ có cùng số dư trong phép chia cho 2^k. Khi đó hiệu của chúng $5^p - 5^q = 5^q(5^{p-q} - 1)$ chia hết cho 2^k nghiã là số $5^{p-q} - 1$ và tất cả các số có dạng $5^{r(p-q)} - 1 \quad (r \in N)$ đều chia hết cho 2^k.

Như vậy với mỗi giá trị $m = r(p-q), r \in N$, ta có $5^m \equiv 1 \pmod{2^k}$, từ đó $5^{m+k} \equiv 5^k \pmod{10^k}$ nghĩa là k chữ số tận cùng của 5^{m+k} trùng với k chữ số tận cùng của 5^k. Giả sử số k thoả mãn $2^k > 10^{1976}$ chứa không nhiều hơn $k - 1976$ chữ số. Do đó giữa k chữ số tận cùng của số 5^{m+k} chỉ có $k - 1976$ chữ số khác không, còn 1976 chữ số còn lại (liên tiếp nhau) bằng 0. ☺

▷ **13.16.** *(Tiệp khắc, 1979) Trên một đường thẳng có $n^2 + 1 (n \in N)$ đoạn thẳng. Chứng minh rằng, hoặc là giữa chúng có thể chọn $n + 1$ đoạn đôi một không cắt nhau, hoặc là tìm được $n + 1$ đoạn thẳng nào đó có điểm chung.*

Lời giải. Ta định hướng bên trái cho đường thẳng khi nói rằng một đoạn nằm ở bên trái đoạn thẳng khác, nếu đầu mút bên trái của đoạn thẳng thứ nhất nằm ở bên trái đầu mút bên trái của đoạn thẳng thứ hai. Mỗi đoạn thẳng được đánh số bằng một số tương ứng từ các số $1, 2, \ldots, n$ bằng cách sau: ở bước thứ nhất đoạn thẳng ở tận cùng bên trái cho tương ứng số 1. Sau đó mỗi bước tiếp theo ta lại chọn trong số những đoạn thẳng chưa đánh số, đoạn tận cùng bên trái và đặt cho nó số tương ứng, khác với các số của những đoạn thẳng giao với nó (đã được đánh số). Nếu đến bước nào đấy, ta chọn được đoạn thẳng, nhưng đối với nó không chọn được số thứ tự, thì điều này có nghĩa là nó giao với n đoạn thẳng nằm bên trái nó và có những số khác nhau. Trong trường hợp này đầu mút trái của đoạn thẳng được chọn thuộc vào $n + 1$ đoạn thẳng. Nếu ở bước ấy, đoạn thẳng cuối cùng được đánh số thì theo nguyên lý Đirichlê ít nhất một trong n số ứng với nhiều hơn n đoạn thẳng, mà các đoạn thẳng đó với các số thứ tự thích hợp, không giao nhau. ☺

▷ **13.17.** *(Rumani, 1978) Các hàm số $f, g, h : N \to N$ thoả mãn ba điều kiện sau:*

a) Hàm $h(n)$ không nhận giá trị nào tại nhiều hơn một điểm $n \in N$.

b) Tập hợp giá trị hàm số $g(n)$ là N.

c) $f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1, n \in N$.

Chứng minh rằng đồng nhất thức $f(n) \equiv 1, n \in N$, là đúng.

Lời giải. Ta chứng minh đồng nhất thức $g(n) \equiv h(n) \quad (n \in N)$. Từ đó và điều kiện b) sẽ dẫn đến $f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1 \equiv 1, \quad n \in N$. Với bất kỳ $n \in N$ có

$$h(n) = g(n) + 1 - f(n) \leq g(n)$$

vì $f(n) \geq 1$. Giả sử rằng, đối với giá trị nào đó $n \in N$ đẳng thức $g(n) = h(n)$ không đúng, khi đó $h(n) < g(n) = k$. Theo điều kiện b) ta tìm các số $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1} \in N$, để sao cho $g(n_i) = i$ khi $i = 1, \ldots, k-1$. Bởi vậy mỗi số trong k số $h(n_1), h(n_2), \ldots, h(n_{k-1}), h(n)$ thuộc vào tậ p hợp $\{1, 2, \ldots, k-1\}$, do đó theo nguyên lý Đirichlê hàm số $h(n)$ nhận giá trị nào đó nhiều hơn một lần, điều này trái với điều kiện a).Khẳng định đã được chứng minh. ☺

▷ **13.18.** *(Mỹ (Nữu Ước), 1979) Chứng minh rằng các đỉnh của n-giác đều có diện tích bé nhất $(n > 3)$ nội tiếp trong một n-giác cho trước, trùng với trung điểm các cạnh của n-giác cho trước.*

Lời giải. (Hình 13.3) Giả sử n-giác đều $B_1, \ldots, B_n$ có diện tích S_B nội tiếp trong n-giác đều $A_1, \ldots, A_n$ diện tích S_A.

Khi đó nếu chúng không trùng nhau thì trên mỗi một cạnh A_iA_{i+1} với $i = 1, 2, \ldots, n$ $(A_{n+1} = A_1)$ có một đỉnh B_i được xác định trên cạnh ấy. Thật vậy, trong trường hợp ngược lại theo nguyên lý Đirichlê ít nhất có một cạnh, chẳng hạn A_1A_2, chứa hai điểm B_1 và B_2 đó (để xác định, giả sử $A_1B_2 > A_1B_1$), khi đó điểm B_n (ở $\Delta A_1A_2A_n$) có thể nằm trên cạnh A_2A_3 và A_1A_n tương ứng (vì $n > 3$, đoạn A_1A_3 và A_2A_n là đường chéo, mà không là cạnh của n-giác $A_1, \ldots, A_n$), nghĩa là $B_1 = A_1$ và $B_2 = A_2$. Ta chứng minh rằng

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_nB_n$$

Thật vậy tam giác $B_1A_2B_2$ và tam giác $B_2A_3B_3$ bằng nhau, vì

$$\widehat{B_1A_2B_2} = \widehat{B_2A_3B_3} = \widehat{B_1B_2B_3} = 180^0\frac{n-2}{n}$$

$$\begin{aligned}\widehat{A_2B_1B_2} &= 180^0 - \widehat{B_1A_2B_2} - \widehat{A_2B_2B_1}\\ &= 180^0 - \widehat{B_1B_2B_3} - \widehat{A_2B_2B_1} = \widehat{A_2B_2B_3}\end{aligned}$$

và $B_1B_2 = B_2B_3$. Bởi vậy $A_2B_2 = A_3B_3$. Ta cũng chứng minh tương tự các đẳng thức còn lại. Đại lượng

$$S_B = S_A - S_{B_1A_2B_2} - S_{B_2A_3B_3} - \ldots - S_{B_nA_1B_1} = S_A - nS_{B_1A_2B_2}$$

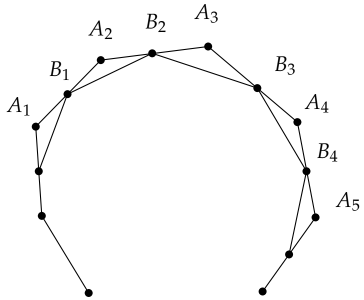
nhận giá trị nhỏ nhất, khi diện tích tam giác $B_1A_2B_2$ lớn nhất. Giả sử $A_1A_2 = a$, $A_1B_1 = x$, khi đó đại lượng

$$\begin{aligned}S_{B_1A_2B_2} &= \frac{1}{2}B_1A_2.A_2B_2\sin\widehat{B_1A_2B_2} = \frac{1}{2}(a-x)x.\sin\widehat{B_1A_2B_2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} - (x-\frac{a}{2})^2\right)\sin\widehat{B_1AB_2}\end{aligned}$$

nhận giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{a}{2}$, nghĩa là $A_1B_1 = B_1A_2$. ☺

▷ **13.19.** *(CHLB Đức, 1978) Một bộ gồm n^2 con tem chơi (n>2) mang các nhãn hiệu "1","2","3",...,"n". Mỗi loại nhãn hiệu có n con tem. Hỏi* *có thể xếp tất cả các con tem ấy thành một dãy thoả mãn các điều kiện sau không : với mọi $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ giữa một con tem mang nhãn hiệu "x" và con tem mang nhãn hiệu "x" tiếp theo luôn có vừa đúng x con tem mang nhãn hiệu khác "x" ?*

Lời giải. Trong mỗi đoạn nằm giữa hai con tem liên tiếp với nhãn "n" đều có n con tem. Có n-1 đoạn như vậy do đó số tem ở giữa con tem đầu tiên mang nhãn hiệu "n" và con tem cuối cùng với cùng nhãn hiệu đó cộng với hai con tem vừa nói là $(n-1)n + n$, nghĩa là n^2 con tem. Vậy con tem đầu tiên và con tem cuối cùng trong dãy đều phải cùng mang nhãn hiệu "n".

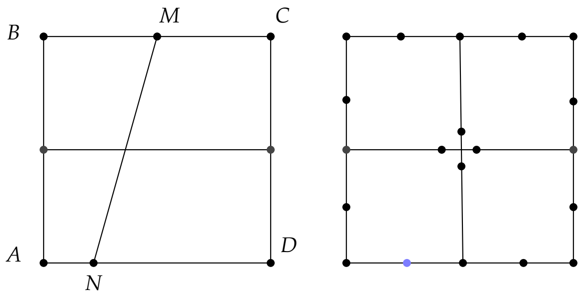


Hình 13.3:

Trong số n con tem với nhãn "n-1" phải có (theo nguyên lý Đirichlê) ít nhất hai con tem cùng nằm trong ít nhất một đoạn trong số n-1 đoạn kể trên. Nhưng khi đó ở giữa hai con tem này chỉ có nhiều nhất là n-2 con tem; điều đó mâu thuẫn với tính chất của dãy. ☺

▷ **13.20.** *(CHLB Nga 1972) Chín đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỷ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.*

Lời giải. (Hình 13.4) Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông $ABCD$, bởi vì nếu thế không thể tạo ra được hai tứ giác, mà là tam giác và ngũ giác. Giả sử một đường thẳng cắt các cạnh BC và AD tại các điểm M và N. Các hình thang $ABMN$ và $CDNM$ có các đường cao bằng nhau do đó tỷ số diện tích của chúng bằng tỷ số các đường trung bình, tức là MN chia đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh AB và CD theo tỷ số $\frac{2}{3}$. Tổng số các điểm chia các đường trung bình của hình vuông theo tỷ số $\frac{2}{3}$ là 4 (Hình vẽ). Bởi số đường thẳng đã cho là 9 và đều phải đi qua một trong số 4 điểm nói trên, nên có một điểm thuộc ít nhất 3 đường thẳng.



Hình 13.4:

CHƯƠNG 14

BÀI TẬP TỰ GIẢI

▷ **14.1.** Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11.000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính bằng 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số những điểm đã cho.

▷ **14.2.** Cho $F = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ là tập hợp hữu hạn những số nguyên dương và $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\dots$ là dãy vô hạn, mọi phần tử của nó nằm trong F, nghĩa là trùng với một số nào đó trong $a_1, a_2, \dots, a_l$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương bất kỳ tồn tại một số phần tử liên tiếp của dãy, mà tích của chúng là lũy thừa của một số nguyên nào đó.

▷ **14.3.** Cho 5 điểm P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 trong phần trong của một hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Ký hiệu d_{ij} là khoảng cách giữa hai điểm P_i và P_j. Chứng minh rằng ít nhất có một trong số các khoảng cách giữa các điểm nhỏ hơn $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

▷ **14.4.** Trong một hình vuông có cạnh 50 đơn vị , người ta kẻ đường gấp khúc sao cho mọi điểm trên cạnh hình vuông có khoảng cách nhỏ hơn 1 đến đường gấp khúc. Chứng minh rằng độ dài của của đường gấp khúc lớn hơn 1248.

▷ **14.5.** Cho A là một đa giác lồi với diện tích S và chu vi P, còn r

là số thực dương. Ký hiệu M là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng, sao cho với mỗi điểm R của M tồn tại một điểm Q thuộc A mà khoảng cách giữa R và Q nhỏ hơn hoặc bằng r. Hãy tìm diện tích của hình M.

▷ **14.6.** Trong hình vuông có cạnh bằng 70, người ta ném ba hình chữ nhật với kích thước 20x10, 25x15 và 30x30 và ba hình tròn bán kính 5. Chứng minh rằng trong hình vuông có thể dịch chuyển một hình tròn bán kính 5 sao cho nó không có những điểm trong chung với 5 hình đã cho.

▷ **14.7.** Trong mặt phẳng cho một đường gấp khúc $A_1A_2\ldots A_n$ và hình tròn bán kính r, tâm hình tròn chuyển động trên đường gấp khúc này. Cho L là độ dài của đường gấp khúc, còn F là hình sinh ra bởi sự chuyển động của hình tròn trên đường gấp khúc. Chứng minh bất đẳng thức $S(F) \le 2Lr + \pi r^2$.

▷ **14.8.** Tập hợp M là hợp một số hữu hạn những đoạn thẳng nằm trong (0,1). Khoảng cách giữa một số điểm trong M không bằng δ , ở đây $0 \le \delta \le 1$. Chứng minh rằng tổng độ dài của những đoạn thẳng mà chúng tạo nên M, không vượt quá $\left[\dfrac{[\frac{1}{\delta}]+1}{2}\right]\delta$ và sự đánh giá này là chính xác.

▷ **14.9.** Trên đường tròn bán kính 1 cho n điểm $P_1, P_2, \ldots, P_n$ và tập hợp A tạo bởi một số hữu hạn cung không cắt nhau, mà tổng độ dài của chúng là $l(A)$. Chứng minh rằng

a) Nếu $l(A) > \dfrac{2k\pi}{n}, (k = 1, 2, \ldots, n-1)$, thì có thể quay tập hợp A trên đường tròn sao cho ảnh của nó chứa ít nhất $k+1$ điểm trong dẫy $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

b) Nếu $l(A) < \dfrac{2k\pi}{n}, (k = 1, 2, \ldots, n-1)$, thì có thể quay tập hợp A trên đường tròn sao cho ảnh của nó chứa nhiều nhất $k-1$ điểm trong dẫy $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

▷ **14.10.** Cho tập hợp A những điểm trên một mặt cầu với diện tích lớn hơn nửa diện tích của mặt cầu. Chứng minh rằng A chứa ít nhất hai đầu một đường kính của hình cầu.

▷ **14.11.** Ký hiệu $N_1, N_2, \ldots, N_n$ là những tập hợp, mà chúng có được sau khi những đỉnh của một lưới nguyên được tác động bởi n phép tịnh tiến, A là một bề mặt và k là số tự nhiên sao cho $1 \leq k \leq n-1$. Chứng minh rằng

a) Nếu $S(A) > \dfrac{k}{r}$ thì có thể tịnh tiến tập hợp A sao cho ảnh của nó chứa ít nhất $k+1$ điểm trong là những đỉnh của $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

b) Nếu $S(A) < \dfrac{k}{r}$ thì có thể tịnh tiến tập hợp A sao cho ảnh của nó chứa nhiều nhất $k-1$ điểm trong là những đỉnh của $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

▷ **14.12.** Trong hình vuông với cạnh 1 đơn vị dựng đường gấp khúc sao cho mọi đường thẳng song song với cạnh hình vuông cắt đường gấp khúc không quá một điểm. Chứng minh rằng độ dài của đường gấp khúc nhỏ hơn 2.

▷ **14.13.** Trong một mặt phẳng cho 6 điểm. Những đoạn thẳng nối các cặp điểm được sơn mầu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng với cách tạo hình như vậy tồn tại ít nhất hai hình tam giác có các cạnh cùng mầu. (có thể hai tam giác khác mầu nhau).

CHƯƠNG 15
LỜI GIẢI VÀ GỢI Ý

15.1. Lời giải và gợi ý chương 1

▷ **1.11.** Lời giải: Nếu tất cả các ông quan đều quen nhau thì việc xếp bàn bốn người như đề ra không có gì khó khăn. Giả có ông A và ông B không quen nhau. Từ $2n-2$ ông quan còn lại cũng như A và B có ít nhất n người quen. Vì $n+n=2n=(2n-2)+2$, thì tồn tại hai ông C và D, mà họ quen A cũng như B. Khi đó người xếp đặt có thể xếp A đối diện B và giữa họ là C đối diện D.

▷ **1.12.** Gợi ý: Chia một cạnh hình vuông thành 48 đoạn mỗi đoạn 20m, khoảng cách giữa 2 đoạn là 0,6m, hai đoạn ở hai đầu dài 5,9m. (Vậy 48.20m+47.0,6m+2.5,9m =1000m=1km). Cạnh thư hai chia ra làm 95 đoạn, khoả ng cách hai đoạn là 0,52m, hai đoạn đầu dài 0,56m (vậy 95.10m+94.0,52m+20,56m= 1000m=1km). Như vậy có 48.95=4560 mảnh có diện tích 200m^2 mà số cây chỉ có 4500, nên còn ít nhất 60 ô như vậy không có cây nào.

▷ **1.13.** Gợi ý: Ta nhóm các ngăn có cùng số sách và đánh dấu từ 0,1,. . . ,9 (các ngăn chứa số sách ít hơn 10) và một ngăn có 10 cuốn. Giả sử không có ba ngăn chứa cùng số sách, thì trong các nhóm ta đánh dấu có ít hơn ba ngăn có cùng số sách (nhiều nhất là 2), vậy thì với 10 nhóm trên 10.2=20 ngăn sách cộng với một ngăn 10 cuốn nữa không cho ta số ngăn sách là 25, dẫn đến vô lý.

▷ **1.14.** Gợi ý: Ta lấy số của ôtô chia cho 10 thì được số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Vì có 11 số mà 10 số dư thì theo nguyên lý Đirichlê có hai số có cùng số dư. Như vậy hiệu của hai số chia hết cho 10 nghĩa là nó có cùng một chữ số tận cùng.

▷ **1.15.** Lời giải: Gọi các trạm chuyển tiếp là A, B, C, D, các hình tròn với đường kính là các đường nối giữa các trạm là vùng bao phủ của một trung tâm phát sóng. Chúng ta có 4 hình tròn như vậy và phải chứng minh rằng một điểm M bất kỳ nằm trong tứ giác của 4 trạm đều được phủ bởi ít nhất một hình tròn. Thật vậy, nếu điểm M nằm trong hình tròn đường kính AB thì góc AMB phải là tù hoặc bằng 90^0. Ta nối M với các trạm A, B, C, D, tạo ra bốn góc đối với các cạnh tứ giác. Tổng của bốn góc này là 360^0. Như vậy ít nhất có một góc tù hoặc cùng lắm là bằng 90^0. Vậy M thuộc một hình tròn mà tại M nhìn cạnh của tứ giác dưới một góc tù.

15.2. Lời giải và gợi ý chương 2

▷ **2.11.** Gợi ý: Áp dụng Phương pháp bài 2.2.

▷ **2.12.** Gợi ý: Áp dụng phương pháp bài 2.4

▷ **2.13.** Gợi ý: Đặt $b_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, k = 1, 2, \ldots, 41$ và áp dụng bài tập trên.

▷ **2.14.** Gợi ý: Như bài 2.8, nếu M là số nguyên tố cùng nhau với 10, thì từ sự chia hết của $l - k = \overline{111\ldots11}.10k$ cho M, suy ra số

$\underbrace{\overline{111\ldots11}}_{}$ chia hết cho M.
(k-l chữ số 1)

▷ **2.15.** Gợi ý: Dùng phương pháp bài 2.8. Hãy xét dãy

$$N, NN, NNN, \ldots, \underbrace{\overline{NNN\ldots N}}_{\textit{(1968 chữ số)}}.$$

▷ **2.16.** Lời giải: Ta viết 1998 số $1997, 19971997, \ldots, \underbrace{1997\ldots1997}_{\textit{số 1997 lặp 1998 lần}}$. Và xét các số dư trong phép chia mỗi một số đó cho 1998. Rõ ràng không một số nào trong các số đã viết chia hết cho 1998 (vì 1998 là số chẵn, mà các số đã viết là lẻ), như vậy, các số dư của phép chia đều khác không, vì số các số lớn hơn số các số dư (có 1998 số mà số các số dư là 1997), nên tìm được hai số có số dư như nhau, hiệu của hai số đó có dạng cần tìm và chia hết cho 1998.

▷ **2.17.** Lời giải: Ta xét 1997 số dạng 1998, 19981998,. . . . Số cuối cùng trong các số này tạo thành từ 1997 nhóm trong bốn chữ số 1, 9, 9, 8. Hoặc một trong các số này chia hết cho 1997 (vậy, đó là số phải tìm), hoặc tìm được hai số dư như nhau trong phép chia cho 1997. Khi đó hiệu của chúng có dạng $19981998\ldots1998.10^{4m}$ và chia hết cho1997. Vì 10^{4m} và 1997 nguyên tố cùng nhau nên nhân tử thứ nhất, nghĩa là số 19981998. . . 1998, chia hết cho 1997.

▷ **2.18.** Lời giải: Trong $n+1$ số $m, m^2, \ldots, m^{n+1}$ tìm được hai số có số dư như nhau trong phép chia cho n. Khi đó hiệu của chúng chia hết cho n. Giả sử $m^l - m^t = a.n$ hoặc $m^t(m^{l-t} - 1) = a.n$. Vì $(m, n) = 1$ nên $(m^t, n) = 1$, nghĩa là, $m^{l-t} - 1$ chia hết cho n. Vậy $m^{l-t} - 1$ là số phải tìm.

15.3. Lời giải và gợi ý chương 3

▷ **3.11.** Lời giải: Ta xét 10^4 các luỹ thừa khác nhau của 3: $3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{10^4}$ và các số dư của phép chia mỗi luỹ thừa đó cho 10^4. Mỗi số cho một số dư khác không khi chia cho 10^4; số các số dư khác không là $10^4 - 1$; số các số là 10^4. Do đó, tìm được hai luỹ thừa khác nhau 3^m và 3^n có số dư như nhau trong phép chia cho 10^4, nghĩa là $3^m - 3^n = 10^4.l$ hoặc $3^n(3^{m-n} - 1) = 10^4.l$. Vì 3^n và 10^4 nguyên tố cùng nhau nên $3^{m-n} - 1$ chia hết cho 10^4 hoặc $3^{m-n} - 1 = 10^4.k$. Từ đó suy ra $3^{m-n} = 10^4.k + 1$. Như vậy, trả lời: có thể.

▷ **3.12.** Gợi ý: Lý luận như bài 3.10.

▷ **3.13.** Gợi ý: Chú ý $u_3 = 1986$, áp dụng phương pháp bài 3.4.

▷ **3.14.** Gợi ý: Lý luận như trong 3.4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m ít nhất một trong các số $x_1, x_2, \ldots,$ chia hết cho m. Sau đó dặt $m = 38$ và $m = 43$.

▷ **3.15.** Gợi ý: Tương tự như 3.8 ta xét bộ xếp s-phần tử những số dư tương ứng. Dễ thấy rằng tồn tai những chỉ số i và j sao cho $1 \leq i < j \leq k^s$ và mỗi tổng trên đều chia hết cho k.

15.4. Lời giải và gợi ý chương 4

▷ **4.11.** Gợi ý: Quanh mỗi điểm đã cho vẽ đường tròn bán kính $\dfrac{1}{15}$.

▷ **4.12.** Gợi ý: Bài toán suy ra từ bài 4.9.

▷ **4.13.** Lời giải: Giả sử tồn tai điểm X từ các điểm đã cho mà nó nối được với 6 điểm $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$. Khi đó các đoạn thẳng XX_1

và XX_2 được dựng theo một trong hai cách sau đây (thực ra có cách thứ ba nhưng là hệ quả của (b) khi ta đổi chỉ số)

(a) Nếu X là điểm gần nhất đến X_1 và A_2, thì $XX_1 < X_1X_2$ và $XX_2 < X_1X_2$, nghĩa là trong tam giác XX_1X_2 có cạnh X_1X_2 là lớn nhất.

(b) Nếu X_1 gần điểm X nhất, còn X gần điểm X_2 nhất, thì $XX_1 < XX_2 < X_1X_2$chúng ta cũng có cạnh X_1X_2 là lớn nhất trong tam giác XX_1X_2

Suy ra $\widehat{X_1XX_2} > 60^0$. Chứng minh hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng có $\widehat{X_2XX_3}, \widehat{X_3XX_4}, \widehat{X_4XX_5}, \widehat{X_5XX_6}, \widehat{X_6XX_1}$ lớn hơn 60^0, điều này không thể được vì tổng các góc này phải bằng 360^0. Như vậy, mỗi điểm chỉ nối được nhiều nhất với 5 điểm thôi.

▷ **4.14.** Lời giải: Ta chia hình tròn thành 6 hình quạt bằng nhau (có đỉnh tại tâm hình tròn). Khi đó tại mỗi một hình quạt, không có quá một điểm rơi vào (bởi vì khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong một hình quạt không lớn hơn 1). Nếu tại mỗi hình quạt có một điểm thì ta có thể tìm được hai điểm mà góc giữa các bán kính vectơ của chúng không lớn hơn 60^0 và do đó khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1. Do vậy, có thể chọn không quá 5 điểm.

▷ **4.15.** Lời giải: Ta thay mỗi hình vuông bằng một hình lớn hơn giới hạn bởi một đường cách biên của hình vuông một khoảng $\frac{1}{2}$ (đường này gồm bốn đoạn thẳng đơn vị và bốn cung tròn có bán kính $\frac{1}{2}$). Mỗi một hình như thế có diện tích bằng $3+\frac{\pi}{4}$, còn 120 hình đã được "viền ra" sẽ phủ một diện tích không quá $120.(3+\frac{\pi}{4}) = 360+30\pi$. Ta bao vây biên của hình chữ nhật đã cho bằng một dải có chiều rộng $\frac{1}{2}$. Diện tích của dải bằng 44. Như vậy, diện tích tổng cộng của dải và tất cả các hình được viền ra bằng $360 + 30\pi + 44 = 404 + 30\pi < 404 + 94,5 < 500$, tức là bé hơn diện tích của hình chữ nhật ($S = 20.25 = 500$). Do đó, trong hình chữ nhật có điểm O không bị phủ bởi dải và các hình vuông đã được viền ra. Nghĩa là điểm O cách bien của hình chữ nhật và cách mọi hình vuông một khoảng lớn hơn $\frac{1}{2}$. Hình tròn bán kính $\frac{1}{2}$ có tâm tại O là hình tròn cần tìm.

15.5. Lời giải và gợi ý chương 5

▷ **5.11.** Lời giải: Xét một tập A bất kỳ từ 1978 tập. Vì nó giao với 1977 tập còn lại, vì vậy tồn tại phần tử $a \in A$, thuộc không ít hơn 50 tập hợp này (thật vậy nếu mỗi một từ 40 phần tử của tập A thuộc không nhiều hơn 49 tập, thì tất cả có không nhiều hơn $40.49 = 1960$ tập khác A, điều này không đúng). Vậy phần tử a thuộc các tập hợp $A, A_1, \ldots, A_{50}$. Ta sẽ chứng minh nó sẽ thuộc tập bất kỳ B từ 1978 tập. Thật vậy không có hai tập nào từ các tập $A, A_1, \ldots, A_{50}$ là có phần tử chung khác với a (vì hai tập bất kỳ giao nhau chỉ có một phần tử chung). Giả sử $a \in B$. Khi đó tập B có với mỗi tập $A, A_1, \ldots, A_{50}$ một phần tử chung khác với a, suy ra tập B có không ít hơn 51 phần tử, điều này không thể được. Suy ra phần tử a thuộc tất cả các tập hợp.

▷ **5.12.** Lời giải: Một số chia cho 9 thì có các phần dư $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$. Theo nguyên lý Dirichlê mở rộng, trong 55 số chọn ra thì ít nhất có một nhóm 7 số khi chia cho 9 cho cùng phần dư (nếu ngược lại thì các nhóm chỉ có 6 phần tử vậy 6.9=54 mà ta lấy ra những 55 số). Chúng ta ký hiệu các số đó là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$. Vì $a_{i+1} \equiv a_i \pmod 9$, nên $a_{i+1} - a_i \in \{9, 18, \ldots\}$. Chúng ta phải chứng minh rằng $a_{i+1} - a_i = 9$ với một i nào đó. Giả sử ngược lại, với mọi $i, a_{i+1} - a_i \geq 18$, điều này nghĩa là $a_7 - a_1 \geq 6.8 = 108$. Điều này không thể được vì $a_7 - a_1 < 100$. Như vậy giữa hai phần tử của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ có hai số mà hiệu của chúng phải bằng 9.

▷ **5.13.** Gợi ý: Cách chứng minh như bài 5.10.

▷ **5.14.** Lời giải: (Bạn tự vẽ lấy hình) Chúng ta xây dựng lưới gồm những hình lục giác có cạnh $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mỗi hình lục giác có thể phủ bởi đường tròn với bán kính $\sqrt{3}$. Có thể tính toán được số lượng lục giác mà chúng có điểm chung với tam giác đều đã cho là $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$. Vì $111 = 55 \times 2 + 1$, nên có một lục giác trong lưới trên chứa ít nhất 3 điểm trong số 111 điểm đã chọn. Như vậy đường tròn bao lục giác này có tính chất đã nêu.

▷ **5.15.** Lời giải: Ký hiệu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là số lượng người lớn nhất mà bất cứ hai người nào cũng không quen nhau gián tiếp. Từ điều kiện bài ra $k \leq 7$. Mỗi người còn lại trong nhóm quen gián tiếp ít nhất một người trong $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (trường hợp ngược lại chúng ta có nhiều hơn k người, mà hai người không quen nhau gián tiếp). Một trong số $A_1, A_2, \ldots, A_k$ có ít nhất 20 người quen gián tiếp, vì nếu không đúng như vậy, chúng ta sẽ nhận được tổng số lượng người nhiều nhất là $7.19 = 133 < 134$. Còn lại khẳng định rằng tất cả những người quen gián tiếp qua cùng một người là quen gián tiếp.

15.6. Lời giải và gợi ý chương 6

▷ **6.11.** Gợi ý: Đây là trường hợp riêng của bài 6.1 và bài 6.2.

▷ **6.12.** Gợi ý: Số đã cho là x_1, x_2, x_3, x_4 và $y_i = 1 + \dfrac{1}{x_i}, i = 1, 2, 3, 4.$ Chỉ cần chứng minh rằng hai số nào đấy trong y_1, y_2, y_3, y_4 thỏa mãn $0 \leq \dfrac{y_i - y_j}{1 + 2y_iy_j} \leq 2 - \sqrt{3}$. Phần còn lại tương tự như 2.6.

▷ **6.13.** Lời giải: Với định lý Fecma chứng minh được rằng nếu một số nguyên tố p có dạng $4k + 3$ chia hết cho tổng $a^2 + b^2$, ở đây a, b là những số nguyên, thì p chia hết cho từng số a và b. Hãy dùng các đẳng thức sau $2 = 1^2 + 1^2, k^2(a^2 + b^2) = (ka)^2 + (kb)^2$, $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$.

▷ **6.14.** Lời giải: Cho tương ứng mỗi số với căn bậc hai của chính nó. Như vậy khi phân tích ra mỗi số tương ứng với căn bậc hai của số lẻ. Mà số tất cả các số lẻ nhỏ hơn $2k$ là k. Vậy theo nguyên lý Đirichlê có hai số trong $k + 1$ số có cùng phần căn số lẻ, do đó tỷ số của nó sẽ là lũy thừa của 2.

▷ **6.15.** Lời giải: Nếu giữa các số đã cho có n số mà khi chia cho n chúng cho những phần dư khác nhau. Tổng của chúng sẽ chia hết cho n, vì n là số lẻ. Trong trường hợp ngược lại, áp dụng nguyên lý Đirichlê.

15.7. Lời giải và gợi ý chương 7

▷ **7.11.** Lời giải: Chúng ta thấy rằng mọi số nguyên tố thực sự lớn hơn 3 đều có dạng $6n + 1$ hoặc $6n + 5$. Vì ba số nguyên tố lớn hơn 3 lập thành một cấp số cộng, nên theo nguyên lý Đirichlê phải có ít nhất hai số cùng dạng, tức là hiệu hai số đó chia hết cho 6. Gọi d là công sai của cấp số cộng, thì hiệu của hai số ấy hoặc là d, hoặc là

$2d$. Như thế hoặc là $d|6$ hoặc $2d|6$. Chú ý công sai d là hiệu của hai số nguyên tố lớn hơn 3, nên nó là số chẵn. Như thế vì $d|3$ và $d|2$ suy ra $d|6$.

▷ **7.12.** Lời giải: Ta luôn có $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{10^m}{1998} = \infty$. Nói cách khác tồn tại số nguyên dương m_0 sao cho $\forall m \geq m_0$ thì $\dfrac{10^m}{1998} > 9^{1998}$. Xét một số nguyên dương n bất kỳ và n có k_0 chữ số $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k_0}}$. Trường hợp này ta cũng chọn được

$$10^N > (9k_0)^{1998} \text{ và } N > m_0 \tag{15.1}$$

(cụ thể có thể lấy $N = \max\{[1998lg(9k_0)] + 1, m_0 + 1\}$)

- Chúng ta sẽ chứng minh

$$u_i(n) < 10^N \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots \tag{15.2}$$

Thật vậy, ta sẽ chứng minh bằng qui nạp.

1) Với $i = 1$ ta có $u_1(n) = (k_1 + \cdots + k_0)^{1998} \leq (9k_0)^{1998} < 10^N$ (do (15.1)). Vậy (15.2) đúng khi $i = 1$.

2. Giả sử (15.2) đúng với $i = k$, nghĩa là $u_k(n) < 10^N$. Ta có $u_{k+1}(n) = f(u_k(n))$. Theo giả thiết qui nạp thì $u_k(n) < 10^N$. do đó $u_k(n)$ có không quá N chữ số, tức là $u_k(n)$ có dạng

$$u_k(n) = \overline{a_1 a_2 \ldots a_p} \text{ với } p \leq N$$

Theo định nghĩa thì

$$u_{k+1}(n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^{1998} \leq (9N)^{1998}. \tag{15.3}$$

Do $N > m_0$ vậy từ (1) suy ra

$$10^N > (9N)^{1998}. \tag{15.4}$$

Từ (15.3) và (15.4) suy ra

$$u_{k+1}(n) < 10^N.$$

Vậy (15.2) đúng với $i = k+1$. Theo nguyên lý qui nạp thì (15.2) đúng với mọi $i = 1, 2, \ldots$.

- Dãy vô hạn các số nguyên dương $\{u_i(n)\}, i = 1, 2, \ldots$ bị chặn bởi 10^N nên theo nguyên lý Đirichlê phải tồn tại hai chỉ số $p < q$ sao cho

$$u_p(n) = u_q(n) \Longrightarrow u_{p+k}(n) = u_{q+k}(n), \quad \forall k$$

Nói cách khác dãy $u_i(n), i = p, p+1, ..$ là dãy tuần hoàn với chu kỳ $u_p(n), u_{p+1}(n), \ldots, u_{p+q+1}(n)$.

▷ **7.13.** Lời giải: Cho a là một số tuỳ ý, thì $\{a\} = a - [a]$ gọi là phần lẻ của số a, ở đây ký hiệu $[a]$ là phần nguyên của số a. Xây dựng dãy mới như sau

$$\begin{aligned} v_1 &= \{u_1\} \\ v_2 &= \{u_1 + u_2\} \\ &\ldots. \\ v_n &= \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n\} \end{aligned}$$

Rõ ràng với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$ ta có $0 \leq v_k < 1$.

Chia $[0, 1)$ ra làm $n+1$ tập hợp như sau

$$\Delta_0 = [0, \frac{1}{n+1}); \Delta_1 = [\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}); \ldots; \Delta_n = [\frac{n}{n+1}, 1)$$

Chỉ có các khả năng sau xẩy ra

1. Hoặc tồn tại k mà $v_k \in \Delta_0 \cup \Delta_{n+1}$:

- Nếu $v_k \in \Delta_0$, tức là $0 \leq \{u_1 + u_2 + \cdots + u_k\} < \dfrac{1}{n+1}$. Đặt $S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k :\Rightarrow 0 \leq \{S\} < \dfrac{1}{n+1}$

$$\Leftrightarrow [S] \leq S < [S] + \frac{1}{n+1}. \tag{15.5}$$

Vậy $[S]$ là số nguyên gần S nhất, nên từ (15.5) suy ra điều phải chứng minh.

-Nếu $v_k \in \Delta_n$ tức là $\frac{n}{n+1} \le \{u_1 + u_2 + \cdots + u_k\} < 1$ hay là $\frac{n}{n+1} \le \{S\} < 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \le S - [S] < 1$ hay là

$$\frac{n}{n+1} + [S] \le S < [S] + 1. \tag{15.6}$$

Từ (15.6) suy ra $[S]+1$ là số nguyên gần S nhất và khác nó một lượng $\le [S] + 1 - ([S] + \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

2. Hoặc là các số $v_1, v_2, \ldots, v_n \notin \Delta_0 \cup \Delta_n$, vậy $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \cup_{i=1}^{n-1} \Delta_i$. Theo nguyên lý Đirichlê tồn tại $v_k, v_l, k > l$, thuộc cùng một tập hợp Δ_j nào đó, $1 \le j \le n-1$.

Điều đó có nghĩa là

$$\frac{j}{n+1} \le \{u_1 + u_2 + \cdots + u_l\} < \frac{j+1}{n+1}$$
$$\frac{j}{n+1} \le \{u_1 + u_2 + \cdots + u_k\} < \frac{j+1}{n+1}$$

Đặt $S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$ và $S_l = u_1 + u_2 + \cdots + u_l$ ta có

$$\frac{j}{n+1} \le S_k - [S_k] < \frac{j+1}{n+1} \Rightarrow [S_k] + \frac{j}{n+1} \le S_k < [S_k] + \frac{j+1}{n+1}$$
$$\frac{j}{n+1} \le S_l - [S_l] < \frac{j+1}{n+1} \Rightarrow [S_l] + \frac{j}{n+1} \le S_l < [S_l] + \frac{j+1}{n+1}$$
$$[S_k] - [S_l] - \frac{1}{n+1} \le S_k - S_l \le [S_k] - [S_l] + \frac{1}{n+1}$$
$$[S_k] - [S_l] - \frac{1}{n+1} \le u_{l+1} + u_{l+2} + \cdots + u_l \le [S_k] - [S_l] + \frac{1}{n+1}$$

Như vậy dãy con $u_{l+1} + u_{l+2} + \cdots + u_l$ có số nguyên gần nhất là $[S_k] - [S_l]$ với độ lệch không quá $\frac{1}{n+1}$.

Tóm lại, trong mọi trường hợp ta đều có tồn tại dãy con thoả mãn yêu cầu đề ra.

▷ **7.14.** Lời giải: Xét dãy số $p_1 = 1a = a$, $p_2 = 2a$, $p_3 = 3a, \dots,$ $p_{m-1} = (m-1)a$. Ký hiệu $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ là các số dư tương ứng của dãy trên chia cho m. Vì theo điều kiện bài toán a và m là nguyên tố cùng nhau, thì tất cả các số dư trên đều khác không. Nếu một trong các số dư bằng 1 thì bài toán đã được giải. Nếu tất cả các số dư đều khác 1. Khi đó mỗi số trong $m-1$ số dư $q_1, q_2, \dots, q_m - 1$ bằng một trong $m-2$ số $2, 3, \dots, m-1$. Theo nguyên lý Đirichlê có ít nhất hai số trong $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ bằng nhau, chẳng hạn như $q_i = q_j, \quad i < j$. Từ đó suy ra số $(j-i)a = p_j - p_i$ chia hết cho m, điều này không thể xẩy ra. Sự vô lý này do giả thiết không một số dư trong $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ bằng 1, do đó suy ra ít nhất một trong các số dư phải bằng 1.

15.8. Lời giải và gợi ý chương 8

▷ **8.11.** Lời giải: Trước tiên chúng ta sẽ chứng minh $a + b = c$. Từ bất đẳng thức $0 \leq an - [an] < 1$ suy ra $|\frac{[an]}{n} - a| < \frac{1}{n}$ với mọi $n \geq 1$ sao cho $lim_{n\to\infty}\frac{[an]}{n} = a$. Chúng ta cũng có bất đẳng thức tương tự cho b và c. Chúng ta lấy giới hạn của đẳng thức $\frac{[an]}{n} + \frac{[bn]}{n} = \frac{[cn]}{n}$ và nhận được $a + b = c$.

Đặt $a = [a] + \alpha, b = [b] + \beta$ ở đây $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$. Khi đó $[an] + [bn] = [([a] + \alpha)n] + [([b] + \beta)n] = [a]n + [b]n + [\alpha n] + [\beta n]$, $[(a+b)n] = [([a] + [b] + \alpha + \beta)n] = [a]n + [b]n + [(\alpha + \beta)n]$.

Như vậy bài toán có thể đặt lại như sau: Chứng minh rằng nếu a và b là những số trong khoảng $[0, 1)$ mà chúng thoả mãn đẳng thức

$$[an] + [bn] = [(a+b)n] \tag{15.7}$$

với mọi số tự nhiên n, thì ít nhất một trong hai số đó bằng 0.

Giả sử $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Chúng ta sẽ chứng minh tồn tại số tự nhiên n sao cho đẳng thức (15.7) không đúng. Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả thiết rằng $a + b < 1$, vì nếu ngược lại thì (15.7) sẽ không đúng thậm chí với $n = 1$.

a) Chúng ta xét trường hợp a và b là những số hữu tỷ. Khi đó có thể biểu diễn chúng dưới dạng $a = \frac{A}{N}, \frac{B}{N}$, ở đây A, B và N là những số nguyên và thoả mãn $0 < A < N, 0 < B < N$. Dễ dàng kiểm tra rằng (15.7) không thoả mãn với $n = N - 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}[a(N-1)] &= [aN - a] = [A - a] = A + [-a] = A - 1,\\ [b(N-1)] &= [bN - b] = [B - b] = B + [-b] = B - 1,\\ [(a+b)(N-1)] &= [A + B - (a+b)] = A + B - [a+b]\\ &= A + B - 1\end{aligned}$$

Như vậy $[a(N-1)] + [b(N-1)] \neq [(a+b)(N-1)]$.

b) Chúng ta xét trường hợp một trong các số a và b là số vô tỷ. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng có một số tự nhiên n, mà

$$\{an\} + \{bn\} \geq 1. \tag{15.8}$$

Khi đó đẳng thức (15.8) sẽ suy ra không thể có (15.7).

Giả sử a là một số vô tỷ, theo bài 8.1 tập hợp những số $\{an\}, n = 1, 2, \ldots$ là trù mật trong khoảng $(0, 1)$. Ký hiệu k là số tự nhiên lớn nhất mà $a + kb < 1$. Khi đó tồn tại số tự nhiên n mà

$$a + kb < \{an\} < 1. \tag{15.9}$$

Nếu $\{bn\} \geq b$, thì từ định nghĩa của k suy ra

$$\{an\} + \{bn\} > (a + kb) + b = a + (k+1)b \geq 1$$

hay nói cách khác tồn tại số tự nhiên n mà đẳng thức (15.8) đúng.

Nếu $\{bn\} < b$, thì với việc thêm $1-b$ vào các vế của bất đẳng thức $0 \le \{bn\} < b$, chúng ta nhận được

$$1 - b \le b(n-1) - [bn] + 1 < 1$$

Điều đó có nghĩa là $[b(n-1)] = [bn] - 1$ và $\{b(n-1)\} \ge 1 - b$. Ngoài ra, tương tự từ (15.9) suy ra

$$kb < a(n-1) - [an] < 1 - a < 1$$

vì thế $[a(n-1)] = [an]$ và $\{a(n-1)\} > kb$. Nhưng khi đó

$$\{a(n-1)\} + \{b(n-1)\} > kb + (1-b) = 1 + (k-1)b \ge 1,$$

vì $k \ge 1$. Trong trường hợp này (15.8) đúng cho số tự nhiên $n-1$. Như vậy dẫn đến vô lý khi một trong các số a và b là số vô tỷ.

▷ **8.12.** Gợi ý: Chú ý rằng $\{n\}$ chỉ có thể nhận hữu hạn giá trị.

▷ **8.13.** Gợi ý: Lý luận tương tự như 8.4.

▷ **8.14.** Gợi ý: Xét các số có dạng $n = 2k^2$ và áp dụng 8.4.

15.9. Lời giải và gợi ý chương 9

▷ **9.11.** Gợi ý: Xét các số $kx - [kx] (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ và số 1, chia đoạn [0,1] ra $n+1$ phần, phần còn lại áp dụng phương pháp đoạn này.

▷ **9.12.** Gợi ý: Với mỗi cách chọn những số $q_1, q_2, \ldots q_n$ tồn tại số nguyên p, với nó $0 \le q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_mx_m - p < 1$. Bây giờ chia đoạn [0,1] ra $(n+1)^m$ đoạn con bằng nhau.

▷ **9.13.** Gợi ý: Hãy xét hai trường hợp $\left|\sqrt{2}-\dfrac{p}{q}\right| > \sqrt{3}-\sqrt{2}$ và $\left|\sqrt{2}-\dfrac{p}{q}\right| \leq \sqrt{3}-\sqrt{2}$

▷ **9.14.** Gợi ý: Tương tự bài trên.

▷ **9.15.** Gợi ý: Giả thiết với mọi p và q thỏa mãn
$|mp^2+npq+sq^2| \geq 1$.

15.10. Lời giải và gợi ý chương 10

▷ **10.11.** Lời giải: Đây là sự tổng quát hóa bài 10.3. Cách chứng minh hoàn toàn tương tự. Chúng ta cũng tạo ra lưới với các hình vuông có diện tích 1. Sau đó lấy một hình vuông làm gốc rồi tịnh tiến các hình vuông có chứa các mảnh của A về hình vuông gốc. Như vậy tổng diện tích những phần tịnh tiến của A sẽ lớn hơn n. Theo nguyên lý Đirichlê mở rộng cho diện tích suy ra có ít nhất $n+1$ trong số những phần của A đã tịnh tiến tới hình vuông gốc có điểm chung (x_0, y_0). Những điểm từ các hình vuông nhỏ ban đầu tịnh tiến đến điểm này có toạ độ là $(x_i, y_i) \quad (i=1,2,\ldots,n+1)$, mà $x_i - x_j$ và $y_i - y_j \quad (i,j=1,2,\ldots,n+1)$ là những số nguyên.

▷ **10.12.** Lời giải: Chúng ta xét hình vuông V, mà nó chứa bề mặt A và có cạnh với độ dài n nguyên. Đặt $B = V \setminus A$. Chúng ta thấy ngay $S(V) = n^2$ và $S(A) < k$, do đó $S(B) > n^2 - k$. Bây giờ áp dụng bài 10.11. Vì thế B có thể tịnh tiến sao cho nó chứa ít nhất n^2-k+1 điểm với toạ độ nguyên. Ký hiệu A_1, V_1, B_1 là các ảnh của phép tịnh tiến trên của A, V, B tương ứng. Rõ ràng $B_1 = V_1 \setminus A_1$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng A_1 chứa nhiều nhất $k-1$ điểm với toạ độ nguyên.

Thật vậy, Giả sử ngược lại chúng ta có k điểm với toạ độ nguyên trong A_1. Vì theo cách dựng trên B_1 chứa ít nhất $n^2 - k + 1$ điểm trong với toạ độ nguyên và $B_1 \subset V_1, A_1 \subset V_1, A_1 \cap B_1 = \emptyset$, Khi đó hình vuông V_1 chứa ít nhất $n^2 + 1$ điểm với toạ độ nguyên, điều này không thể xẩy ra, dẫn đến vô lý.

▷ **10.13.** Lời giải: Cũng như bài 10.5 tác dụng lên A phép vị tự với tâm tại gốc tạ độ và hệ số $\frac{1}{2}$, chúng ta nhận được tập hợp mới A'. Vì $S(A) > 4n$ nên $S(A') > n$. Theo nguyên lý Đirichlê mở rộng cho diện tích A' chứa ít nhất $n + 1$ điểm khác nhau $(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n + 1)$ mà $x_i - x_j$ và $y_i - y_j$ là những số nguyên.

Chúng ta xét đa giác lồi nhỏ nhất chứa tất cả các điểm trên. Dễ dàng thấy rằng mỗi đỉnh của đa giác là một trong các điểm (x_i, y_i). Những đỉnh của đa giác không thuộc trong đoạn nào mà hai đầu là những điểm nằm trong đa giác. Vì thế trong những điểm (x_i, y_i) tồn tại một điểm mà không nằm trong đoạn thẳng nối hai điểm trong tập hợp điểm đã chọn. Giả sử điểm đó là (x_1, y_1). Cũng theo bài 10.5 cho ta n điểm khác nhau và khác điểm gốc toạ độ, với toạ độ nguyên $(x_i - x_1, y_i - y_1), \quad i = 2, 3, \ldots, n + 1$, đều nằm trong A. Vì tính đối xứng nên các điểm $(x_1 - x_i, y_1 - y_i), \quad i = 2, 3, \ldots, n + 1$, cũng thuộc A.

Chúng ta sẽ chứng minh những điểm xác định theo cách trên là khác nhau từng đôi mộ t. Thật vậy, giả sử ngược lại chúng ta có

$$(x_i - x_1, y_i - y_1) = (x_1 - x_j, y_1 - y_j)$$

với hai chỉ số nào đó i, j mà $i, j = 2, 3, \ldots, n + 1$. Vì vậy $x_1 = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$ và $y_1 = \frac{1}{2}(y_i + y_j)$. Nếu $i = j$ thì $(x_1, y_1) = (x_j, y_j)$, vô lý vì

$1 \neq j$. Nếu $i \neq j$, thì (x_1, y_1) là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm (x_i, y_i) và (x_j, y_j), điều này không thể được theo cách chọn.

Chứng minh trên chỉ ra rằng A chứa ít nhất $2n$ điểm khác nhau và khác gốc toạ độ, có toạ độ nguyên. Nhưng điểm gốc toạ độ cũng nằm trong tập A và có toạ độ nguyên, suy ra kết luận của bài toán.

▷ **10.14.** Gợi ý: Áp dụng bài tập 10.13.

▷ **10.15.** Gợi ý: Cách chứng minh tương tự 10.9.

15.11. Lời giải và gợi ý chương 11

▷ **11.11.** a) Từ bài 11.3 suy ra $6 = 9 - (S_{12} + S_{23} + S_{13}) + S_{123}$, tức là $S_{12} + S_{23} + S_{13} = 3 + S_{123} \geq 3$. Do đó một trong các số S_{12}, S_{23}, S_{13} không nhỏ hơn 1.

b) Lời giải: Từ bài 11.3 suy ra $5 \geq 9 - M_2$, tức là $M_2 \geq 4$. Bởi vì từ 9 đa giác có thể tạo được $9.\dfrac{8}{2} = 36$ cặp, diện tích phần chung của một số các cặp đó không nhỏ hơn $\dfrac{M_2}{36} \geq \dfrac{1}{9}$.

▷ **11.12.** Lời giải: Gọi $M_1, M_2, \ldots, M_6$ là 6 điểm đã cho. Trong mỗi tam giác $M_iM_jM_k$ ta tô cạnh lớn nhất bằng mầu đỏ. Kết quả sẽ là một đoạn thẳng M_rM_s là đỏ còn các cạnh khác sẽ không đỏ. Chỉ cần chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh là các điểm đã cho và ba cạnh được tô mầu đỏ. Thật vậy, cạnh lớn nhất của tam giác như thế đồng thời là cạnh nhỏ nhất của tam giác khác vì nó được tô mầu đỏ. Từ mỗi điểm đã cho xuất phát 5 đoạn thẳng nối nó với các điểm còn lại. Vậy hoặc ít nhất có 3 trong những đoạn thẳng này được tô mầu đỏ, hoặc ít nhất có 3 đoạn vẫn không được tô mầu đỏ.

Nếu từ điểm M_1 xuất phát 3 đoạn được tô mầu đỏ (chẳng hạn M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4) thì trong $\Delta M_2M_3M_4$ ít nhất có một cạnh (lớn nhất) được tô mầu đỏ, giả sử đó là đoạn M_2M_3. Thế thì trong $\Delta M_1M_2M_3$ tất cả các cạnh đều được tô mầu đỏ.

Nếu từ điểm M_1 xuất phát ít nhất 3 đoạn không được tô mầu đỏ (chẳng hạn 3 đoạn M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4) thì ta xét 3 tam giác $M_1M_2M_3, M_1M_2M_4, M_1M_3M_4$. Trong mỗi tam giác này ít nhất có một cạnh được tô mầu đỏ, nhưng cạnh không chứa đỉnh M_1. Vậy 3 đoạn M_2M_3, M_2M_4, M_3M_4 được tô mầu đỏ, tức là 3 cạnh của $\Delta M_2M_3M_4$ đều mầu đỏ.

▷ **11.13.** Lời giải: Trước hết ta nhận xét có ít nhất một tam giác đơn sắc (Bài 5.4). Giả sử $P_1P_2P_3$ là tam giác đơn sắc, chẳng hạn đỏ. Để riêng P_1 ta còn lại 6 điểm và ta lại có một tam giác đơn sắc không có P_1 là đỉnh (Bài 5.4). Nếu tam giác này không chứa cạnh P_2P_3 thì ta được kết quả, thế thì có một điểm thứ tư P_1' sao cho $P_1'P_2P_3$ cũng là tam giác đỏ. Tương tự để riền P_2 và P_3 ta được P_2' và P_3' sao cho $P_1P_2'P_3$ và $P_1P_2P_3'$ là tam giác đỏ.

Trước hết ta xét khả nănglà 3 điểm P_1', P_2' và P_3' không phân biệt. Trong trường hợp này một trong chúng tạo thành với $P_1P_2P_3$ một hình tứ diện. Còn lại 3 điểm. Nếu các cạnh giữa một trong ba điểm còn lại đó và 2 đỉnh của hình tứ diện là đỏ ta sẽ được hai tam giác đỏ với 2 cạnh rời nhau, một tam giác có một đỉnh mới và một cạnh của tứ diện và tam giác kia trên tứ diện. Nếu không, mỗi điểm có ít nhất cạnh đỏ thuộc tứ diện. Như thế có ít nhất một đỉnh của tứ diện nối với cả 3 đỉnh còn lại bằng cạnh mầu đen. Nếu cặp nào trong 3 nối bằng cạnh đen thì ta có một tam giác đen và một đỏ. Nếu không ta được hai tam giác đỏ có đỉnh rời nhau.

Vậy ta có thể giả sử rằng ba điểm P_1', P_2' và P_3' là phân biệt. Nếu 2 điểm, P_1' và P_2', được nối bằng cạnh đỏ thì ta được hai tam giác đỏ $P_1P_2P_3$ và $P_1'P_2'P_3$. Nếu không thì $P_1P_2P_3$ và $P_1'P_2'P_3'$ cho theo thứ tự một tam giác đỏ và một tam giác đen.

▷ **11.14.** Lời giải: Lấy 1998 đĩa được tô giống như đĩa thứ hai của chúng ta và đặt chồng tất cả chúng lên đĩa thứ nhất sao cho chúng có tất cả các vị trí có thể (như khi quay). Khi đó trên mỗi hình quạt của đĩa thứ nhất có 200 hình quạt, được tô, tức là có tất cả 200^2 cặp hình quạt được tô trùng nhau. Giả sử có n vị trí của đĩa thứ hai có không ít hơn 21 cặp hình quạt được tô trùng nhau. Khi đó số các hình quạt được tô trùng nhau không nhỏ hơn $21n$. Do đó $21n \leq 200^2$, tức là $n \leq 1904,8$. Bởi vì n là số nguyên, nên $n \leq 1904$. Suy ra có ít nhất $1998 - 1904 = 94$ vị trí có không quá 20 cặp hình quạt được tô trùng nhau.

▷ **11.15.** Gợi ý: Chứng minh hoàn toàn như bài 11.2.

15.12. Lời giải và gợi ý chương 12

▷ **12.11.** Lời giải: Lấy A^* là những điểm trên mặt cầu đối xứng qua tâm của quả cầu từ những điểm của tập hợp A. Theo giả thiết tổng diện tích của A và A^* lớn hơn diện tích mặt cầu. Theo nguyên lý Đirichlê cho diện tích chúng có điểm chung. Vậy điểm chung đó và điểm đối xứng của nó là cặp điểm đều thuộc A tạo ra đường kính quả cầu.

▷ **12.12.** Lời giải: Với mỗi hình chữ thập ta xét hình tròn có tâm tại tâm chữ thập và bán kính bằng $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Ta chứng minh rằng nếu hai hình tròn đó cắt nhau thì hai chữ thập cũng sẽ cắt nhau. Khoảng cách giữa hai tâm của hình tròn bằng nhau và cắt nhau không lớn hơn hai lần bán kính của chúng, do đó khoảng cách giữa tâm của các chữ thập tương ứng với chúng không lớn hơn $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Xét hình chữ nhật xác định bởi các cánh của hình chữ thập thứ nhất và tâm của chữ thập thứ hai. Sẽ có một cánh của chữ thập thứ hai đi qua hình chữ nhật đó, do đó sẽ cắt chữ thập thứ nhất, bởi vì độ dài của cánh bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$, còn độ dài đường chéo hình chữ nhật không lớn hơn $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rõ ràng trong hình tròn bán kính 100 chỉ có thể đặt được một số hữu hạn các hình tròn bán kính $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ không cắt nhau.

▷ **12.13.** Lời giải: Có thể. Giả sử O là tâm của ngũ giác đều $ABCDE$. Khi đó các hình tròn nội tiếp trong các góc AOC, BOD, COE, DOA, EOB có tính chất đã nêu.

▷ **12.14.** Lời giải: Xét một tam giác đều có cạnh bằng 1. Tất cả 3 đỉnh của nó không thể được tô bằng các mầu khác nhau, do đó phải có hai điểm cùng mầu, và khoảng cách giữ chúng bằng 1.

PHỤ LỤC A
TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

A.1. Tập hợp và Toán tử trên tập hợp.

Khi chúng ta coi một đối tượng a nào đó là **một phần tử** của tập hợp A, thì ký hiệu là $a \in A$, còn khi a không là phần tử của A thì ký hiệu là $a \notin A$.

Một tập hợp A gọi là **tập hợp con** của tập hợp B, khi mọi phần tử của tập hợp A là phần tử của tập hợp B, Ký hiệu là $A \subset B$ hoặc $B \supset A$. Nghĩa là từ $a \in A$ suy ra $a \in B$ hoặc là từ $a \notin B$ suy ra $a \notin A$.

Tập hợp rỗng không có một phần tử nào, ký hiệu là $\emptyset$. Mọi đối tượng x đều không nằm trong tập hợp rỗng $x \notin \emptyset$. Tập hợp rỗng đều nằm trong mọi tập hợp, nghĩa là $\emptyset \subset A$, với mọi A.

Hai tập hợp A và B **trùng nhau** khi chúng có cùng các phần tử như nhau, ký hiệu $A = B$. Tương đương , $A = B$ khi và chỉ khi từ $a \in A$ suy ra $a \in B$ và từ $a \in B$ suy ra $a \in A$ hoặc $A \subset B$ và $B \subset A$.

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một số hữu hạn những tập hợp. **Hợp** của những tập hợp trên là một tập hợp gồm tất cả các phần tử mà nó thuộc vào một trong các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Hợp của các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ký hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Cụ thể, $a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ nghĩa là tồn tại một chỉ số i trong $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho

$a \in A_i$.

Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là một số hữu hạn những tập hợp. **Giao** của những tập hợp trên là một tập hợp gồm các phần tử mà nó nằm trong mọi tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$. Giao của các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ ký hiệu là $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. Cụ thể, $a \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ nghĩa là với mọi chỉ số i trong $\{1, 2, \dots, n\}$ ta có $a \in A_i$.

Hiệu của hai tập hợp A và B là một tập hợp, ký hiệu $A \setminus B$, gồm những phần tử a có tính chất $a \in A$ và $a \notin B$.

A.2. Qui nạp toán học và Bài toán tổ hợp

Trong tập hợp số tự nhiên, cùng với nguyên lý Đirichlê còn một nguyên lý qui nạp toán học cũng hay được sử dụng. Dạng đơn giản của phương pháp qui nạp toán học như sau:

Cho một dãy những điều khẳng định

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots \tag{A.1}$$

có tính chất sau:

a)K_1 *là khẳng định đúng.*

b) Với mỗi số tự nhiên n*,nếu* K_n *là khẳng định đus ng thì suy ra* K_{n+1} *cũng là khẳng định đúng.*

Khi đó tất cả các khẳng định trong dãy (A.1) *đều đúng.*

Chú ý: điều kiện a) đảm bảo cho K_1 đúng, sau đó áp dụng b) cho K_2 cũng đúng, tiếp tục áp dụng b) cho K_3 cũng đúng và tiếp tục quá trình đó với mọi n. Để minh họa chúng ta chứng minh một định lý về tổ hợp mà rất hay áp dụng trong cuốn sách này:

Mọi tập hợp hữu hạn với n *phần tử có đúng* 2^n *tập hợp con tạo bởi các phần tử khác nhau của nó.*

Với mọi số n chúng ta ký hiệu điều khẳng định trên bằng K_n. Như vậy chúng ta sẽ nhận được dãy (A.1). Với $n = 1$ khẳng định đúng, vì mọi tập hợp có một phần tử có đúng hai tập hợp con, đó là tập rỗng và chính tập (một phần tử) đos . Vậy (A.1) có tính chất a).

Bây giờ chúng ta phải chứng minh b) đúng. Nghĩa là cho n là một số tự nhiên bất kỳ và khẳng định K_n đúng tức là mọi tập hợp có n phần tử có đúng 2^n tập hợp con. Cần phải chứng minh rằng K_{n+1} là đus ng. Chúng ta xét S là tập hợp có $n+1$ phần tử và s là một phần tử của nó. Chúng ta chia những tập hợp con của S làm hai lớp: Lớp a_1 gồm tất cả các tập hợp con của S không chứa s. Lớp a_2 gồm tất cả các tập hợp con của S chứa s. Những tập hợp con thuộc lớp a_1 là tập hợp con của một tập hợp n phần tử S_1, mà nó nhận từ S sau khi bỏ đi phần tử s. Theo giả thiết qui nạp số lượng tập hợp con của nó đúng là 2^n. Mặt khác các tập hợp con của lớp a_2 là tương ứng 1-1 với với các tập hợp con của S_1. Thật vậy, mọi tập hợp con Z chứa s của S ta cho tương ứng với tập hợp con Z_1 của S_1 bằng cách từ Z ta bỏ đị phần tử s. Nghĩa là số lượng tập hợp con của S trong lớp a_2 trùng với số lượng tập hợp con của S_1 và bằng 2^n. Do đó tất cả tập hợp con của S là $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Như vậy chúng ta đã chứng minh, với mọi n, từ K_n đus ng suy ra K_{n+1} đus ng. Chúng ta chứng minh được (A.1) có tính chất b). Suy ra tất cả các khẳng định đều đúng. ☺

A.3. Ánh xạ trên tập hợp

Từ những khái niệm số phần tử của một tập hợp này lớn hơn số phần tử của một tập hợp kia, người ta xây dựng khái niệm ánh xạ để giải thích và chính xác hóa trong khi chứng minh.

Chúng ta nói rằng cho một **ánh xạ** $f : A \to B$ từ tập hợp A vào tập hợp B, khi mọi phần tử a thuộc A cho tương ứng với một phần tử $f(a)$ thuộc B. Phần tử $f(a)$ gọi là **giá trị** của ánh xạ f với phần tử a của A. Có thể chỉ ra nhiều ví dụ như ánh xạ số tự nhiên vào số chẵn, với mọi n cho tương ứng với $2n, \ldots$.

Người ta còn đưa ra một số tính chất của ánh xạ: Một ánh xạ $f : A \to B$ gọi là đơn ánh, nếu từ $f(a_1) = f(a_2) (a_1, a_2 \in A)$ suy ra $a_1 = a_2$. Nói cách khác f là đơn ánh khi mọi phần tử khác nhau của A cho tương ứng với những phần tử khác nhau của B.

Một ánh xạ $f : A \to B$ gọi là **toàn ánh**, nếu với mọi phần tử của b của B tồn tại phần tử a thuộc A sao cho $f(a) = b$. Có nhiều ví dụ về ánh xạ loại này, như phép chiếu lên trục toạ độ của mọi điểm trong mặt phẳng.

Một ánh xạ $f : A \to B$ gọi là **song ánh**, khi nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh. Nếu $f : A \to B$ là song ánh, thì với mọi phần tử b của B tồn tại duy nhất phần tử a thuộc A sao cho $f(a) = b$.

Cho song ánh $f : A \to B$. Nếu chúng ta đặt $g(b) = a$ khi đã có $f(a) = b$, chúng ta nhận được ánh xạ $g : B \to A$ gọi là ánh xạ ngược của f và ký hiệu là $f^{-1} = g$. Như vậy $f(f^{-1}(b)) = b$ và $f^{-1}(f(a)) = a$ với mọi a thuộc A và b thuộc B.

Cho hai ánh xạ $f : A \to B$ và $g : B \to C$, có thể tạo ra ánh xạ $h : A \to C$ bằng công thức $h(a) = f(g(a))$. Ký hiệu $h = g \circ f$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, NXBGD, 1997.

[2] *255 bài toán số học chọn lọc*, V.D. Thụy, T. C. Thành, N. N. Đạm, Sở GD Hà tây, 1993

[3] *10000 Bài toán sơ cấp - Dãy số và giới hạn*, Phan Huy Khải, NXB Hà nội, 1997.

[4] *Các đề thi vô địch toán các nước*, Xv. Cônhiagin, G.A.Tônôian, If. Sarưgin, NXB GD 1996.

[5] *Các bài toán hình học phẳng*, V.V. Praxolov, Tập II, NXB Hải phòng 1997.

[6] *Zadatri Vsesaiunức matematitreskii olimpiada*, N.B. Vasilev, A.A. Egorov, Maskova- Nauka 1988.

[7] *Matematichskii akvarium* V. A. Uphnarovskii, Kishinev " shtiinsa" 1987.(Tiếng Nga).

[8] *Problem-Solving Through Problems*, Loren C. Larson, Spring-Verlag, 1983.

[9] *Princil na Dirichle*, Ivan Prodanov, "Narodna Prosveta", Sophia 1988 (Tiếng Bungari).

[10] *Zadachi da idvưnklasna Rabota po matematika*,
R.Rusev, K.Bankov, Sv. Slavchev, "Narodna Prosveta", Sophia 1986 (Tiếng Bungari).

[11] *Sbornhik ot Zadachi za Matematicheski Olympiadi*,
St. Budurov, V. Phlorov, "Narodna Prosveta", Sophia 1966 (Tiếng Bungari).

NỘI DUNG

NGUYỄN HỮU ĐIỂN

PHƯƠNG PHÁP ĐIRICHLÊ VÀ ỨNG DỤNG

Tác giả: Nguyễn Hữu Điển
Điện thoại: 0989061951
Email: huudien@vnu.edu.vn
Web: http://nhdien.wordpress.com

Chịu trách nhiệm xuất bản:	TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập và sửa bản in:	ĐỖ PHÚ
Trình bầy và chế bản:	HỮU ĐIỂN, PHÙ LINH
Trình bầy bìa:	HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HƯNG ĐẠO - HÀ NỘI

$\frac{6.6T7.3}{KHKT-98}$ 290 - 4-98

In 1000 bản khổ $14,5 \times 20,5$ tại Công ty In Công Đoàn Việt Nam 191 Sơn Tây - Đống Đa - Hà Nội. Giấy phép XB số: 290-22/4/98. In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 1999.