



ĐỊNH LÍ THALES TRONG TAM GIÁC.

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

1. Đoạn thẳng tỉ lệ.

Hai đoạn thẳng AB và CD được gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng MN và PQ nếu có tỉ lệ thức

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}.$$

2. Định lí Thales .

- *Định lí:* Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ta trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ
- Trong hình vẽ, nếu $MN \parallel BC$ thì $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

Do đó $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AM + MB}{AN + NC} = \frac{AB}{AC}$. Suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$;

- *Định lí:* Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.
- Trong hình vẽ, nếu có một trong hai tỉ lệ thức :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}, \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

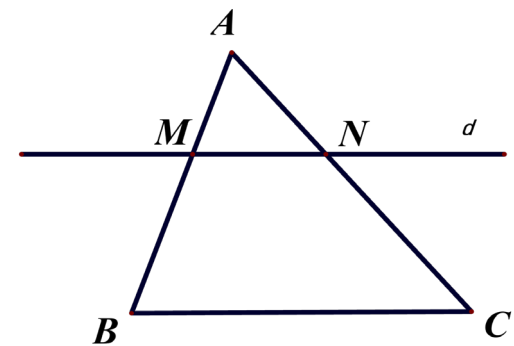
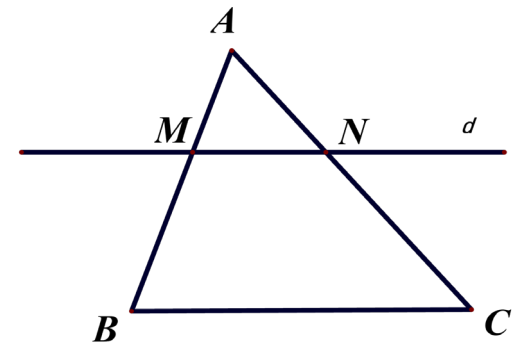
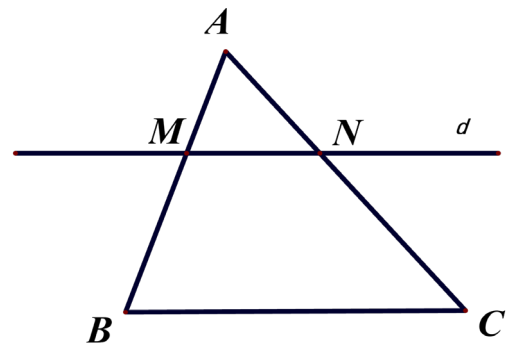
thì ta cũng có $MN \parallel BC$;

4. Hệ quả của định lí Thales đảo

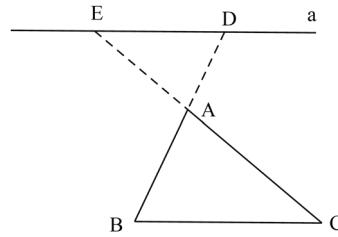
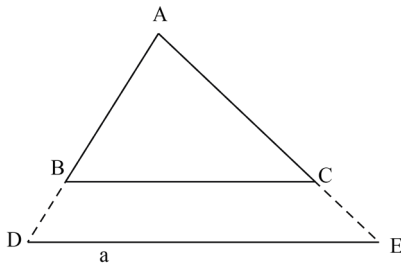
- *Hệ quả:* Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Cho tam giác ABC, đường thẳng d song song với cạnh BC lần lượt cắt các cạnh AB; AC tại M và N. Khi đó , ta có :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} ;$$



- **Chú ý:** Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng d song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Viết tỉ số các cặp đoạn thẳng hoặc tính tỉ số của hai đoạn thẳng

- Sử dụng định nghĩa đoạn thẳng tỉ lệ.

Ví dụ 1.

Đoạn thẳng AB gấp 5 lần đoạn thẳng CD , đoạn thẳng $A'B'$ gấp 7 lần đoạn thẳng CD .

a) Tính tỉ số của hai đoạn thẳng AB và $A'B'$.

ĐS: $\frac{5}{7}$.

b) Cho biết đoạn thẳng $MN = 55$ cm và $M'N' = 77$ cm; hỏi hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ có tỉ lệ với đoạn thẳng MN và $M'N'$ không?

ĐS: Có tỉ lệ.

Lời giải

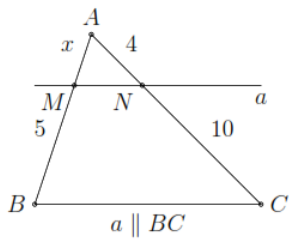
a) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{5CD}{7CD} = \frac{5}{7}$.

b) $\frac{MN}{M'N'} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{MN}{M'N'}$. Vậy hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ tỉ lệ với đoạn thẳng MN và $M'N'$.

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng hoặc chứng minh đoạn thẳng tỉ lệ

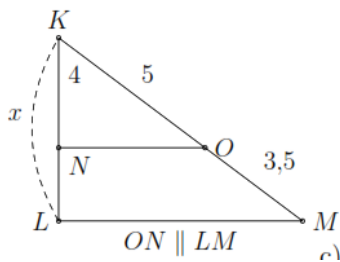
- Bước 1: Xác định các cặp đoạn thẳng tỉ lệ có được nhờ định lí Ta-lét.
- Bước 2: Sử dụng độ dài các đoạn thẳng đã có và vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức để tìm độ dài đoạn thẳng.

Ví dụ 2. Tính x trong các trường hợp sau.



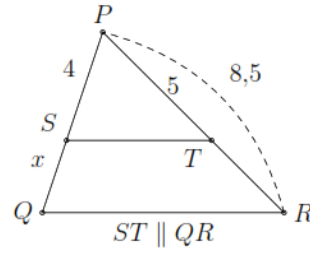
a)

ĐS: $x = 2$.



b)

ĐS: $x = 6,8$.



c)

ĐS: $x = 2,8$.

Lời giải

a)

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{4}{10}$$

$$x = 2$$

b)

$$\frac{KN}{KL} = \frac{KO}{KM}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{5}{5 + 3,5}$$

$$x = 6,8$$

c)

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{5}{8,5 - 5}$$

$$x = 2,8$$

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ có $(AB \parallel CD)$ và $AB < CD$. Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại M, N . Chứng minh

a) $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$; b) $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$; c) $\frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}$.

Lời giải

Gọi giao điểm của AD và BC là E .

a) Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC}$ và $AB \parallel MN$ nên

$$\frac{EA}{AM} = \frac{EB}{BN}.$$

Từ 2 điều trên suy ra $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$.

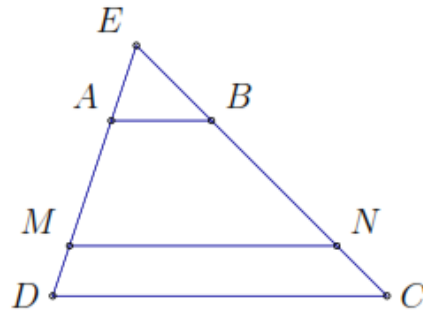
b) Theo ý a) ta có $\frac{MA}{NB} = \frac{AD}{BC} = \frac{EA}{EB} = \frac{AM}{BN}$ nên theo tính

của tỉ lệ thức suy ra $\frac{MA}{NB} = \frac{AD - AM}{BC - BN} = \frac{MD}{NC}$. Vậy $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$.

c) Theo ý b) ta có $\frac{MD}{NC} = \frac{DA}{CB} = \frac{MA}{NB}$ nên theo tính chất của tỉ lệ thức suy ra

$$\frac{MD}{NC} = \frac{MD + MA}{NC + NB} = \frac{AD}{BC}.$$

Vậy $\frac{MD}{DA} = \frac{NC}{CB}$.

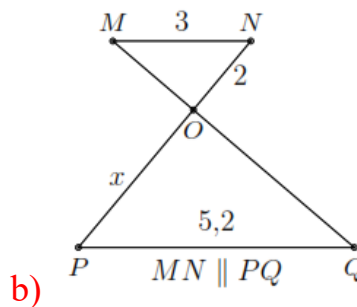
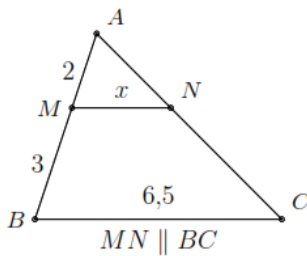


chất

Dạng 3: Sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng

- Bước 1: Xác định các cặp đoạn thẳng tỉ lệ nhờ hệ quả của định lý Ta-lét.
- Bước 2: Sử dụng độ dài các đoạn thẳng đã có và vận dụng các tính chất của tỉ lệ thức để tìm độ dài đoạn thẳng cần tìm.

Ví dụ 3. Tính x trong các trường hợp sau



Lời giải

a) $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow MN = \frac{2}{5} BC = \frac{2}{5} \cdot 6,5 = 2,6$ (đvdd).

b)

$$\frac{OP}{ON} = \frac{PQ}{MN}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{5,2}{3}$$

$$x = \frac{52}{15} \text{ (dv dd)}$$

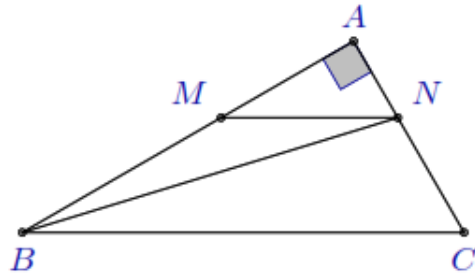
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$), $AB = 24$ cm, $AM = 16$ cm, $AN = 12$ cm. Tính độ dài của các đoạn thẳng NC và NB .

Lời giải

Theo định lí Ta-lét thì $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

$$\Rightarrow AC = \frac{AB \cdot AN}{AM} = \frac{24 \cdot 12}{16} = 18(\text{cm}),$$

$$\Rightarrow NC = AC - AN = 6 \text{ cm.}$$



Lại có tam giác ANB vuông tại A . Tính được $NB = \sqrt{AN^2 + AB^2} = 12\sqrt{5}$.

Dạng 4: Sử dụng định lý Ta-lét đảo để chứng minh các đường thẳng song song

- Bước 1: Xác định cặp đoạn thẳng tỉ lệ trong tam giác.
- Bước 2: Sử dụng định lý đảo của định lý Ta-lét để chứng minh các đoạn thẳng song song.

Ví dụ 5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi trung điểm của các đường chéo AC và BD lần lượt là M, N . Chứng minh rằng MN, AB và CD song song với nhau.

Lời giải

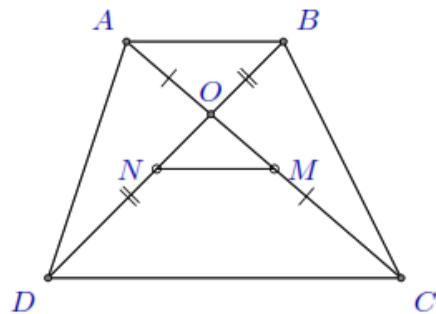
Gọi giao điểm của hai đường chéo là O . Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$

$$\Rightarrow \frac{OC + OA}{OA} = \frac{OD + OB}{OB}$$

Suy ra $\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$.

Từ $AC = 2AM$ và $BD = 2BN$.

$$\text{Suy ra } \frac{2AM}{OA} = \frac{2BN}{OB} \Rightarrow \frac{AM}{OA} = \frac{BN}{OB}$$



Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{AM - OA}{OA} = \frac{BN - OB}{OB}$ hay $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

Áp dụng định lý Ta-lét đảo suy ra $MN \parallel AB$ mà $AB \parallel CD$ (do $ABCD$ là hình thang) nên $MN \parallel AB \parallel CD$.

Dạng 5: Sử dụng hệ quả của định lý Ta-lét để chứng minh hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau

- Bước 1: Xét đường thẳng song song với một cạnh của tam giác, sử dụng hệ quả để lập các đoạn thẳng tỉ lệ.
- Bước 2: Sử dụng các tỉ số đã có, cùng với các tính chất của tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian (nếu cần) để tính độ dài các đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức có được từ hệ quả, từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $BC = 15$ cm. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K vẽ các đường thẳng $EF \parallel BC, MN \parallel BC$.

- a) Tính độ dài các đoạn thẳng EF và MN .
- b) Tính diện tích tứ giác $MNEF$, biết rằng diện tích của tam giác ABC là 270 cm^2 .

Lời giải

a) Ta có $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $EF = \frac{1}{3}BC = 5$ (cm).

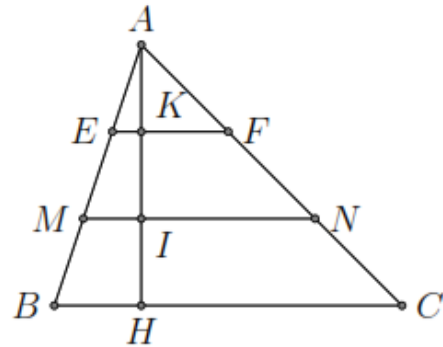
Ta có $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $MN = \frac{2}{3}BC = 10$ (cm).

b) Vì $S_{ABC} = 270$ nên $AH \cdot BC = 540$.

Suy ra $AH = 36$ nên $IK = 12$.

Suy ra $S_{MNEF} = \frac{IK(EF + MN)}{2} = 90(\text{cm}^2)$.



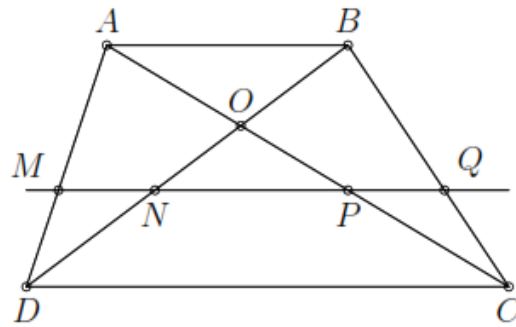
Ví dụ 7. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Đường thẳng song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC và các đường chéo BD, AC lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh

a) $\frac{MD}{AD} = \frac{CQ}{BC}$. b) $MN = PQ$.

Lời giải

a) Ta có $\frac{MD}{AD} = \frac{DN}{DB} = \frac{CQ}{CB}$.

b) Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB}$.



C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho biết độ dài của MN gấp 5 lần độ dài của PQ và độ dài đoạn thẳng MN' gấp 12 lần độ dài của PQ .

a) Tính tỉ số của hai đoạn thẳng MN và MN' .

ĐS: $\frac{5}{12}$.

b) Cho biết đoạn thẳng $DE = 9$ cm và $D'E' = 10,8$ dm, hỏi hai đoạn thẳng MN và MN' có tỉ lệ với đoạn thẳng DE và $D'E'$ không?

ĐS: Không tỉ lệ.

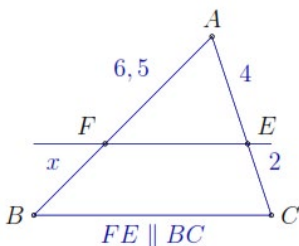
Lời giải

a) $\frac{MN}{MN'} = \frac{5PQ}{12PQ} = \frac{5}{12}$.

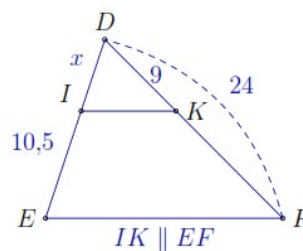
b) $\frac{DE}{D'E'} = \frac{9}{108} = \frac{1}{12} \neq \frac{5}{12} = \frac{MN}{MN'}$.

Vậy hai đoạn thẳng MN và MN' không tỉ lệ với đoạn thẳng DE và $D'E'$.

Bài 2. Tính x trong các trường hợp sau.



a) **ĐS:** $x = 3,25$.



b) **ĐS:** $x = 6,3$.

Lời giải

a)

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{6,5}{x} = \frac{4}{2}$$

$$x = 3,25$$

b)

$$\frac{DI}{IE} = \frac{DK}{KF}$$

$$\frac{x}{10,5} = \frac{9}{24-9}$$

$$x = 6,3$$

Bài 3. Cho góc xAy khác góc bẹt. Trên tia Ax lấy các điểm B, C . Qua B và C vẽ hai đường thẳng song song, cắt Ay lần lượt tại D và E . Qua E vẽ đường thẳng song song với CD cắt tia Ax tại F .

a) So sánh $\frac{AB}{AC}$ và $\frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF}$ và $\frac{AD}{AE}$.

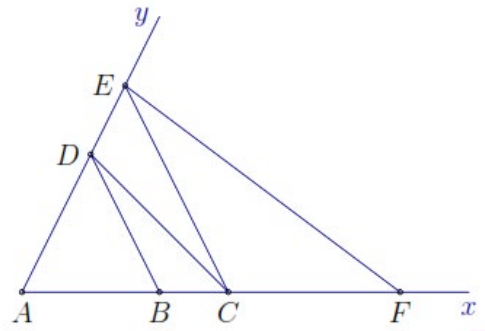
ĐS: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE}$.

b) Chứng minh $AC^2 = AB \cdot AF$.

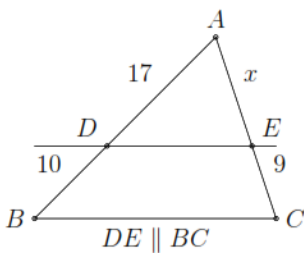
Lời giải

a) Theo định lí Ta-lét ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AE}$.

b) Từ a) ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF}$ suy ra $AC^2 = AB \cdot AF$.

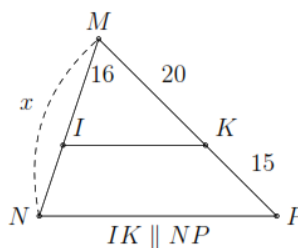


Bài 4. Tính x trong các trường hợp sau.



a)

ĐS: $x = 15,3$.



b)

ĐS: $x = 28$.

Lời giải

a) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{17}{10} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow x = 15,3$.

b) $\frac{MI}{MN} = \frac{MK}{MP} \Leftrightarrow \frac{16}{x} = \frac{20}{20+15} \Leftrightarrow x = 28$.

Trong $\triangle OQF, QF // EB$ suy ra: $\frac{OF}{OE} = \frac{FQ}{EB}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{3,5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3.3,5}{2} = 5,25(cm)$$

Hình 3.Áp dụng định lí Pytago trong $\triangle AMN, \hat{A} = 90^0$ ta có:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow MN = \sqrt{400} = 20(cm)$$

Trong $\triangle AMN, MN // BC$ suy ra: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{16}{24} = \frac{12}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{24.12}{16} = 18(cm); NC = 18 - 12 = 6(cm)$$

Trong $\triangle AMN, MN // BC$ suy ra: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

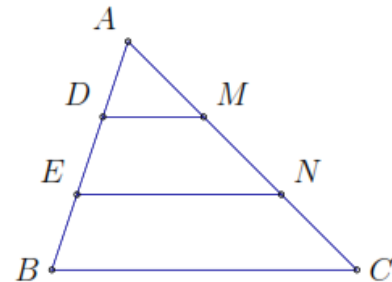
$$\Leftrightarrow \frac{16}{24} = \frac{20}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{24.20}{16} = 30(cm)$$

Bài 8. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$. Trên cạnh AB lấy điểm D và E sao cho $AD = DE = EB$. Từ D, E kẻ các đường thẳng song song với BC cắt AC theo thứ tự tại M, N . Tính theo a độ dài các đoạn thẳng DM và EN .

Lời giải

Áp dụng định lí Ta-let ta có $\frac{AD}{AB} = \frac{DM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = \frac{a}{3}$.

Tương tự ta có $\frac{AD}{AE} = \frac{DM}{EN} = \frac{1}{2} \Rightarrow EN = 2DM = \frac{2}{3}a$.

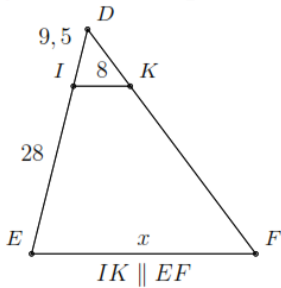


Bài 9. Cho hình thang cân $ABCD (AB // CD)$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và AC . Biết rằng $MD = 2MO$, đáy lớn $CD = 5,6$ cm.

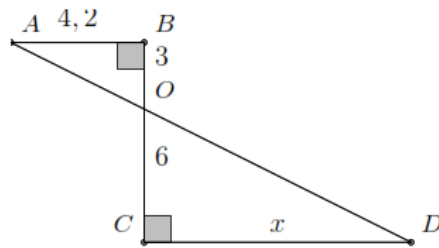
- a) Tính độ dài đoạn thẳng MN . b) Chứng minh $MN = \frac{CD - AB}{2}$.

Lời giải

a) Vì $AB // CD$ nên $\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{OD}{2MD} = \frac{OC}{2NC} \Rightarrow \frac{OD}{MD} = \frac{OC}{NC}$.



a)



b)

Lời giải

a) $\frac{IK}{x} = \frac{DI}{DE} \Leftrightarrow x = \frac{IK \cdot DE}{DI} = \frac{8 \cdot (9,5 + 28)}{9,5} = \frac{600}{19}$ (đvdd).

b) $\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4,2}{x} \Leftrightarrow x = 8,4$ (đvdd).

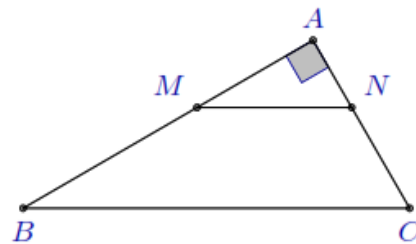
Bài 13. Cho tam giác ABC , $MN \parallel BC$ ($M \in AB, N \in AC$), $AB = 25$ cm, $AM = 16$ cm, $BC = 45$ cm, $AN = 12$ cm. Tính độ dài của các đoạn thẳng MN và AC .

Lời giải

Theo định lí Ta-lét thì $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Suy ra

$MN = \frac{AM \cdot BC}{AB} = \frac{16 \cdot 45}{25} = 28,8$ cm.

$AC = \frac{AB \cdot AN}{AM} = \frac{25 \cdot 12}{16} = 18,75$ cm.



Bài 14. Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC sao cho $BC = 4CM$. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{3}$. Chứng minh MN song song với AB .

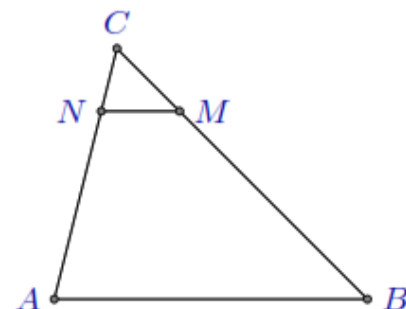
Lời giải

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có

$\frac{CN}{AN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CN}{AN + CN} = \frac{1}{3 + 1} \Rightarrow \frac{CN}{AC} = \frac{1}{4}$.

Mặt khác $\frac{CM}{BC} = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{CM}{BC} = \frac{CN}{AC}$. Vậy $MN \parallel AB$.



Bài 15. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Đường thẳng d song song với BC , cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH theo thứ tự tại các điểm B', C', H' .

a) Chứng minh $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$.

b) Cho $AH' = \frac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5$ cm². Tính diện tích tam giác $AB'C'$.

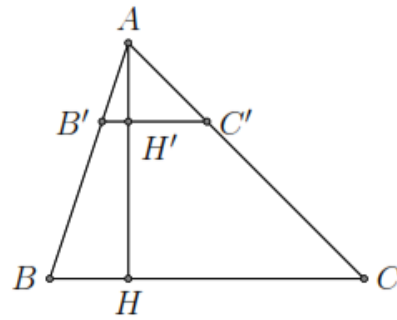
Lời giải

a) Ta có $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

b) Vì $AH' = \frac{1}{3}AH$ nên $B'C' = \frac{1}{3}BC$.

Suy ra

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot AH' \cdot B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot AH \cdot \frac{1}{3} \cdot BC = \frac{1}{9} S_{ABC} = 7,5 \text{cm}^2.$$



Bài 16. Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và đường thẳng qua O song song với đáy cắt các cạnh bên tại M và N . Chứng minh $OM = ON$.

Lời giải

Xét $\triangle ADC$ có $MO \parallel DC$ nên

theo định lí Ta-lét ta có $\frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC}$. (1)

Xét $\triangle BCD$ có $ON \parallel CD$ nên theo định lí Ta-lét ta

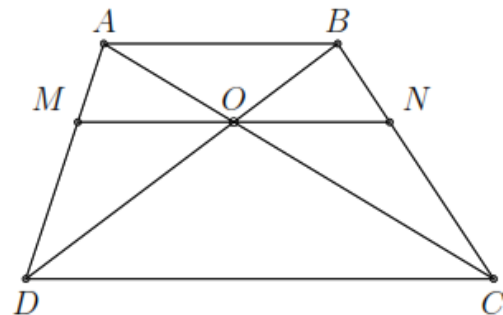
$$\frac{ON}{CD} = \frac{BN}{BC}. \quad (2)$$

Xét $\triangle CAB$ có $ON \parallel CD$ nên theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{BN}{BC} = \frac{AO}{AC}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{OM}{DC} = \frac{OA}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{ON}{CD}$.

Suy ra $OM = ON$.



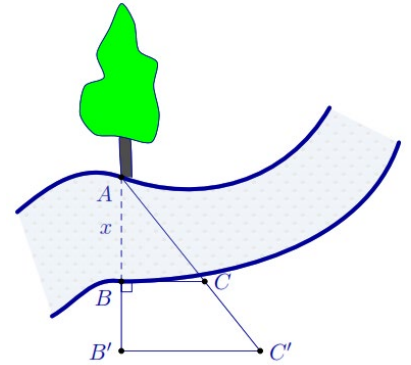
có

Hình học phẳng

ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ THALES TRONG TAM GIÁC.

BÀI TẬP THỰC HÀNH

Bài 1. Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố cần thiết để tính chiều rộng của một khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia sông (hình vẽ bên). Biết $BB' = 20$ m, $BC = 30$ m và $B'C = 40$ m. Tính độ rộng x của khúc sông.



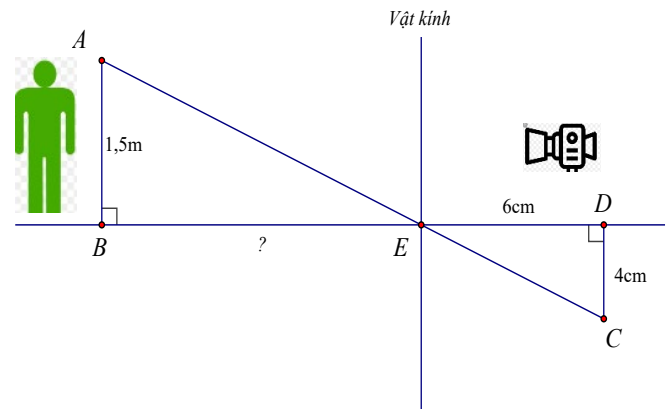
Lời giải

Dùng hệ quả của định lý Ta-let, ta có

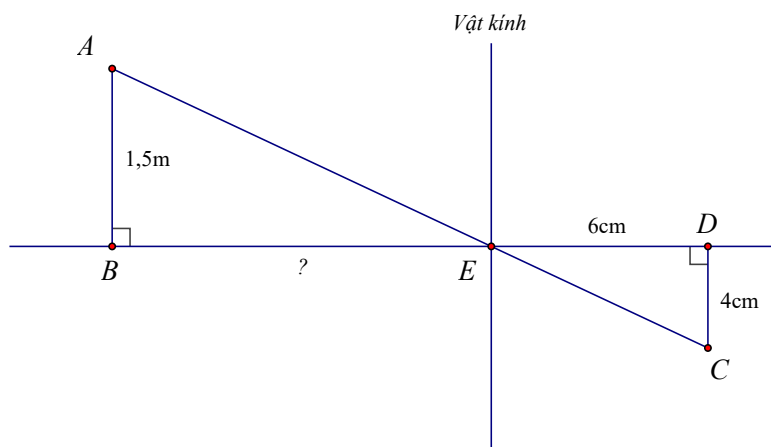
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{x}{x+20} = \frac{30}{40} \Rightarrow x = 60 \text{ m.}$$

Bài 2.

Người ta dùng máy ảnh để chụp một người có chiều cao $AB = 1,5$ m (như hình vẽ). Sau khi rửa phim thấy ảnh CD cao 4 cm. Biết khoảng cách từ phim đến vật kính của máy ảnh lúc chụp là $ED = 6$ cm. Hỏi người đó đứng cách vật kính máy ảnh một đoạn BE bao nhiêu cm ?



Lời giải



Đổi đơn vị : $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm.}$

Ta có $AB \parallel CD$ (cùng vuông góc BD) $\Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DC}$ (Talet)

$$\Rightarrow EB = \frac{AB \cdot ED}{DC} = \frac{150 \cdot 6}{4} = 225 \text{ (cm)}$$

Vậy người đứng cách vật kính máy ảnh là 225 cm.

Bài 3.

Bóng (AK) của một cột điện (MK) trên mặt đất dài 6m. Cùng lúc đó một cột đèn giao thông (DE) cao 3m có bóng (AE) dài 2m. Tính chiều cao của cột điện (MK).

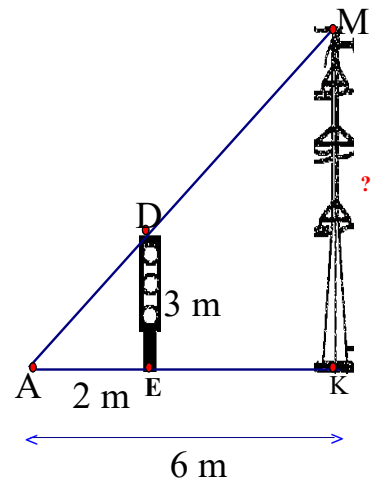
Lời giải

Ta có : $DE \parallel MK$

$$\Rightarrow \frac{DE}{MK} = \frac{AE}{AK}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{MK} = \frac{2}{6}$$

Tính $MK = 9 \text{ m}$



Bài 4.

Để đo chiều cao AC của một cột cờ, người ta cắm một cái cọc ED có chiều cao 2m vuông góc với mặt đất. Đặt vị trí quan sát tại B, biết khoảng cách BE là 1,5m và khoảng cách AB là 9m.

Tính chiều cao AC của cột cờ.

Lời giải

Xét ΔABC có

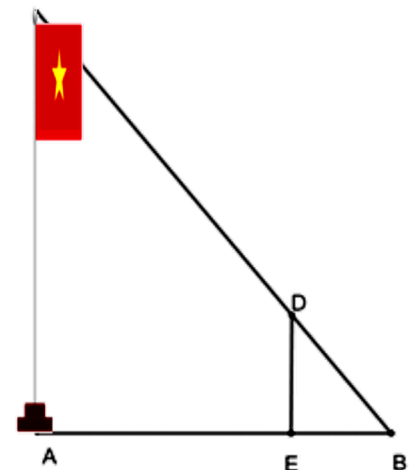
$AC \parallel ED$ ($AC \perp AB$, $ED \perp AB$)

$$\Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{ED}{AC} \quad (\text{hệ quả của định lý Ta - lét})$$

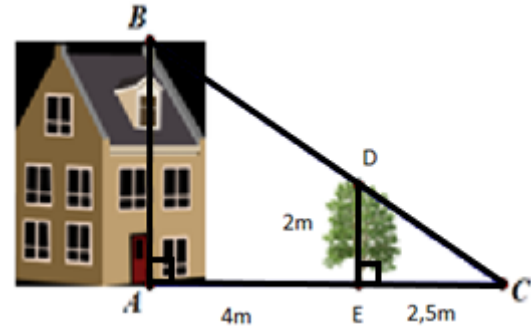
$$\Rightarrow \frac{1,5}{9} = \frac{2}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = 12 \text{ (m)}$$

Vậy chiều cao AC của cột cờ là 12m.



Bài 5. Tính chiều cao AB của ngôi nhà. Biết cái cây có chiều cao ED = 2m và khoảng cách AE = 4m, EC = 2,5m.



Lời giải

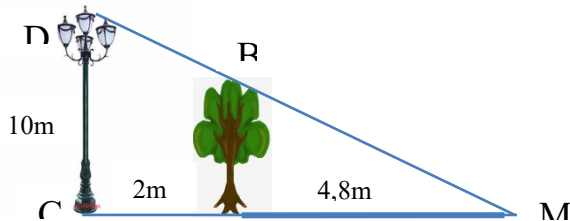
Ta có: ED//AB

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{AB}{ED} &= \frac{AC}{EC} \\ \Rightarrow \frac{AB}{2} &= \frac{4+2,5}{2,5} \\ \Rightarrow \frac{AB}{2} &= \frac{6,5}{2,5} \\ \Rightarrow AB &= \frac{6,5 \cdot 2}{2,5} = 5,2\text{m} \end{aligned}$$

Vậy ngôi nhà cao 5,2m

Bài 6.

Một cột đèn cao 10m chiếu sáng một cây xanh như hình bên dưới. Cây cách cột đèn 2m và có bóng trải dài dưới mặt đất là 4,8m. Tìm chiều cao của cây xanh đó (làm tròn đến mét).



Lời giải

$$MC = MA+AC = 4,8+2 = 6,8 \text{ (m)}$$

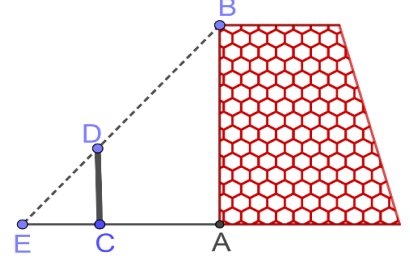
Xét $\triangle DCM$ có $AB \parallel CD$ nên : $\frac{AB}{CD} = \frac{MA}{MC}$ (Hệ quả của định lý Ta-let)

$$\Rightarrow \frac{AB}{10} = \frac{4,8}{6,8}$$

$$\Rightarrow AB \approx 7 \text{ (m)}$$

Bài 7.

Một nhóm các bạn học sinh lớp 8 đã thực hành đo chiều cao AB của một bức tường như sau: Dùng một cái cọc CD đặt cố định vuông góc với mặt đất, với $CD = 3\text{ m}$ và $CA = 5\text{ m}$. Sau đó, các bạn đã phối hợp để tìm được điểm E trên mặt đất là giao điểm của hai tia BD, AC và đo được $CE = 2,5\text{ m}$ (Hình vẽ bên).



Tính chiều cao AB của bức tường. (*Học sinh không cần vẽ lại hình*)

Lời giải

Xét tam giác EAB có $CD // AB$ (do CD và AB cùng vuông góc với CA).

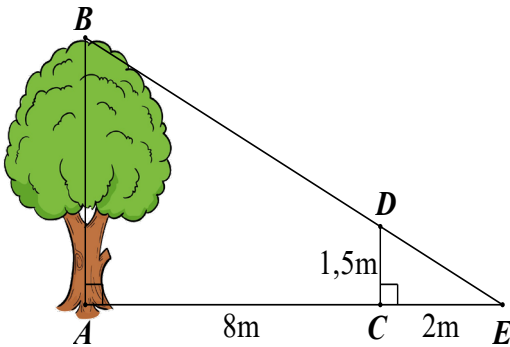
Theo hệ quả định lí Ta-lét có $\frac{CD}{AB} = \frac{EC}{EA}$ (1)

Mà $CA = 5\text{ m}$; $EC = 2,5\text{ m} \Rightarrow CA = 2EC \Rightarrow \frac{EC}{EA} = \frac{1}{3}$ và $CD = 3\text{ m}$

Thay vào (1), ta được $\frac{3}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 9\text{ (m)}$. Vậy bức tường cao 9 mét.

Bài 8.

Một người cắm một cái cọc vuông góc với mặt đất sao cho bóng của đỉnh cọc trùng với bóng của ngọn cây. Biết cọc cao 1,5m so với mặt đất, chân cọc cách gốc cây 8m và cách bóng của đỉnh cọc 2m. Tính chiều cao của cây. (*Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*).



Lời giải

Xét tam giác ABE có $CD // AB$ (cùng vuông góc với mặt đất)

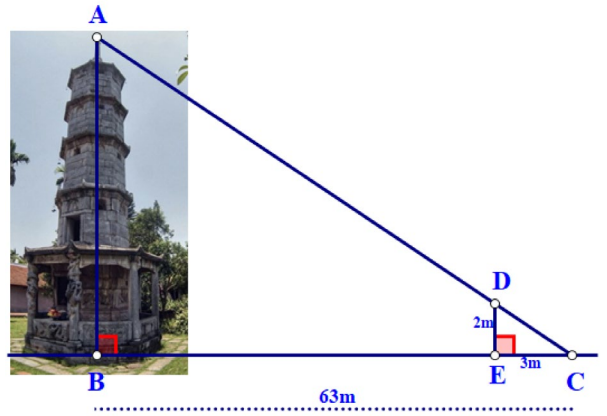
$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{EC}{EA}$ (hệ quả của định lí Ta-lét)

$\Rightarrow \frac{1,5}{AB} = \frac{2}{2+8}$

$\Rightarrow AB = 7,5\text{ (m)}$

Vậy chiều cao của cây là 7,5 (m).

Bài 9: Bóng của một tháp trên mặt đất có độ dài $BC = 63$ mét. Cùng thời điểm đó, một cây cột DE cao 2 mét cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 3 mét. Tính chiều cao của tháp?



Lời giải

* $DE \parallel AB$ (cùng vuông góc BC)

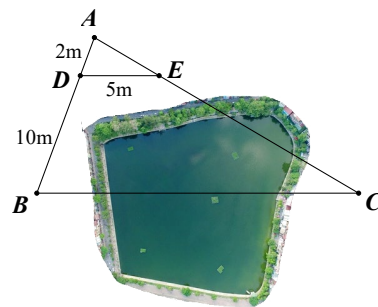
$$\Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \text{ (Hệ quả Talet)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{3}{63}$$

$$\Rightarrow AB = 42 \text{ m}$$

Vậy chiều cao của Tháp là 42m

Bài 10: Giữa hai điểm B và C có một cái ao. Để đo khoảng cách BC người ta đo được các đoạn thẳng $AD = 2\text{m}$, $BD = 10\text{m}$ và $DE = 5\text{m}$. Biết $DE \parallel BC$, tính khoảng cách giữa hai điểm B và C .



Lời giải

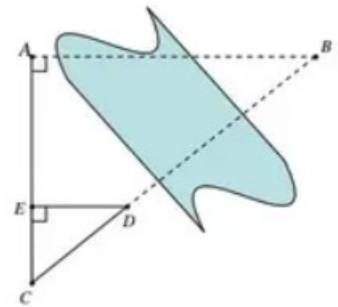
Xét tam giác ABC có $DE \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \text{ (HQ của đl Ta-lét)}$$

$$\Rightarrow BC = 30\text{m}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm B và C là 30m

Bài 11: Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B (không thể đo trực tiếp). Người ta xác định các điểm C, D, E như hình vẽ. Sau đó đo được khoảng cách giữa A và C là $AC = 6\text{m}$, khoảng cách giữa C và E là $EC = 2\text{m}$; khoảng cách giữa E và D là $DE = 3\text{m}$. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B .



Lời giải

Ta có: $AB \parallel ED$

$$\Rightarrow \frac{ED}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{AB} = \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9\text{m}$$

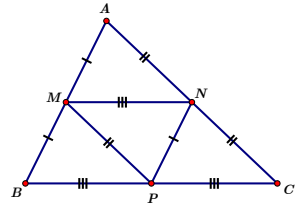
Vậy chiều rộng AB của khúc sông khoảng 9m

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

M là trung điểm của AB
 N là trung điểm của AC

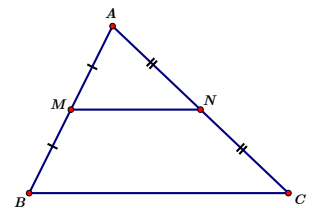
$$\Rightarrow MN \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC.$$


- Mỗi tam giác có ba đường trung bình.

2. Tính chất

- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng một nửa cạnh ấy.
Theo hình bên,

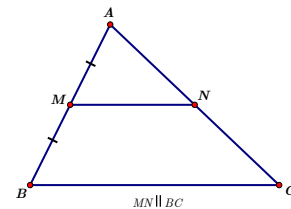
MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \frac{1}{2}BC. \end{cases}$



3. Định lý đường trung bình của tam giác

- Trong một tam giác, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba của tam giác đó.

$\triangle ABC$
 $MA = MB (M \in AB)$
 $MN \parallel BC (N \in AC)$

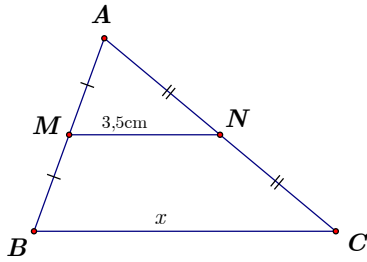
$$\Leftrightarrow NA = NC.$$


B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

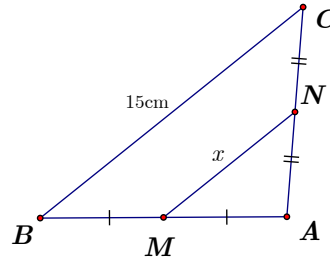
Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng

- Dựa vào tính chất đường trung bình của tam giác để tính độ dài đoạn thẳng.

Ví dụ 1. Tìm độ dài x trong các hình sau



a)



b)

Lời giải

a) Xét tam giác ABC, ta có

- M là trung điểm của AB;
- N là trung điểm của AC.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow x = 7(cm).$$

b) Xét tam giác ABC, ta có

- M là trung điểm của AB;
- N là trung điểm của AC.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC \Rightarrow x = 7,5(cm).$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5$, $BC = 13$. Qua trung điểm M của AB, vẽ một đường thẳng song song với AC cắt BC tại N. Tính độ dài MN.

Lời giải

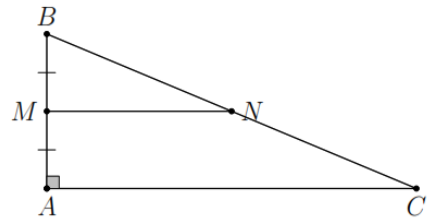
Xét $\triangle ABC$ có $MA = MB$ và $MN \parallel AC$ nên $NB = NC$.

đó, MN là đường trung bình. Suy ra $MN = \frac{1}{2}AC$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AC = 12.$$

Vậy $MN = 12 : 2 = 6$.



Do

Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau; hai đường thẳng song song.

- Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác.

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } \begin{cases} ED \parallel BC \\ ED = \frac{1}{2}BC \end{cases} \quad (1).$$

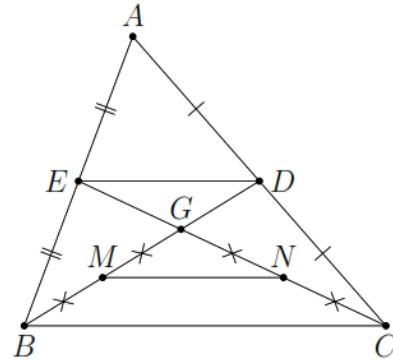
$$\text{Xét } \triangle GBC \text{ có } \begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \frac{1}{2}BC \end{cases} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} ED \parallel MN \\ ED = MN \end{cases}.$$

$$\text{Xét } \triangle BAG \text{ có } \begin{cases} EM \parallel AG \\ EM = \frac{1}{2}AG \end{cases} \quad (3).$$

$$\text{Xét } \triangle CAG \text{ có } \begin{cases} DN \parallel AG \\ DN = \frac{1}{2}AG \end{cases} \quad (4).$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \begin{cases} EM \parallel DN \\ EM = DN \end{cases}.$$



Vậy tứ giác $MNDE$ có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

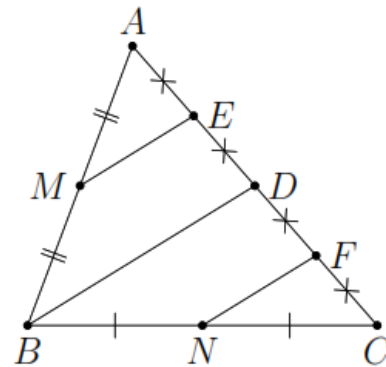
Ví dụ 6. Cho BD là đường trung tuyến của tam giác ABC , E là trung điểm của đoạn thẳng AD , F là trung điểm đoạn thẳng DC , M là trung điểm cạnh AB , N là trung điểm cạnh BC . Chứng minh $ME \parallel NF$ và $ME = NF$.

Lời giải

$$\text{Xét } \triangle ABD \text{ có } \begin{cases} MA = MB \\ EA = ED \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ME \parallel BD \\ ME = \frac{1}{2}BD \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Xét } \triangle CBD \text{ có } \begin{cases} NB = NC \\ FC = FD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NF \parallel BD \\ NF = \frac{1}{2}BD \end{cases} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} ME \parallel NF \\ ME = NF \end{cases}.$$



Dạng 3: Sử dụng tính chất đường trung bình của tam giác để chứng minh tứ giác hình thoi; hình bình hành; hình chữ nhật; hình vuông.

- Vận dụng định nghĩa, tính chất và định lý đường trung bình của tam giác để chứng minh bài toán liên quan.

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

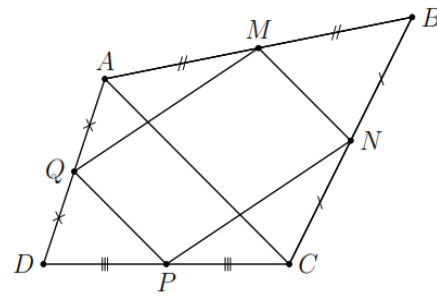
Lời giải

Xét tam giác DAC có PQ là đường trung bình

$$\Rightarrow \begin{cases} PQ \parallel AC \\ PQ = \frac{1}{2} AC. \end{cases} \quad (1)$$

Xét tam giác BAC có MN là đường trung bình

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC \\ MN = \frac{1}{2} AC. \end{cases} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ. \end{cases}$

\Rightarrow Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Ví dụ 6. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh tứ giác $HEFG$ là hình chữ nhật.

Lời giải

Xét $\triangle ABD$ có EH là đường trung bình.

$$\Rightarrow EH \parallel BD \text{ và } EH = \frac{1}{2} BD. \quad (1)$$

Xét $\triangle CBD$ có FG là đường trung bình.

$$\Rightarrow FG \parallel BD \text{ và } FG = \frac{1}{2} BD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EFGH$ là hình bình hành.(3)

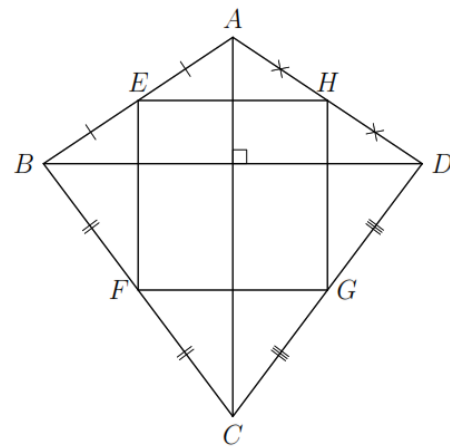
Xét $\triangle BAC$ có EF là đường trung bình.

$$\Rightarrow EF \parallel AC .$$

Mà $AC \perp BD$ và $BD \parallel FG$

$$\Rightarrow EF \perp FG. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow EFGH$ là hình chữ nhật.



Ví dụ 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$, gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DA . Chứng minh rằng $EFGH$ là hình thoi.

Lời giải

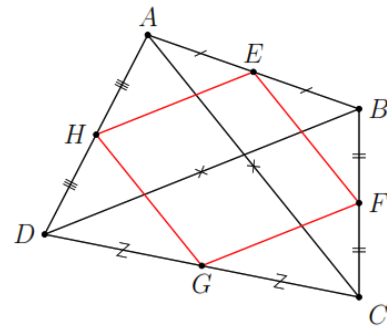
$\triangle ABD$ có EH là đường trung bình nên $EH = \frac{BD}{2}$.

Hoàn toàn tương tự, xét các tam giác BCD , ACD , ABC ,

$$GF = \frac{BD}{2}; \quad EF = \frac{AC}{2}; \quad GH = \frac{AC}{2}.$$

Lại có $AC = BD$ nên $EH = EF = GF = GH$.

Do đó $EFGH$ là hình thoi.



ta được

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M , N là trung điểm AB , AC . Qua M kẻ đường thẳng song song AC và cắt BC tại P . Chứng minh rằng $AMPN$ là hình vuông.

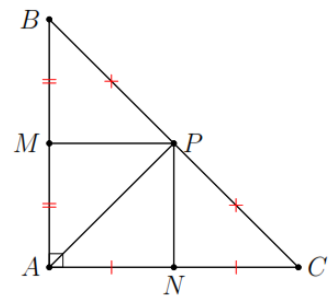
Lời giải

Ta có M là trung điểm của AB , $MP \parallel AC \Rightarrow MP$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow P$ là trung điểm của BC .

Mà N là trung điểm của $AC \Rightarrow NP$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow AMPN$ là hình bình hành.

Mà $\widehat{MAN} = 90^\circ \Rightarrow AMPN$ là hình chữ nhật. Mà $AM = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2} = AN \Rightarrow$

$AMPN$ là hình vuông.



Dạng 4: Bài toán thực tế liên quan đường trung bình tam giác.

- Vận dụng định nghĩa, tính chất và định lý đường trung bình giải quyết bài toán liên quan.

Ví dụ 9.

Khi thiết kế một cái thang gấp, để đảm bảo an toàn người thợ đã làm thêm một thanh ngang để giữ cố định ở chính giữa hai bên thang (như hình vẽ bên) sao cho hai chân thang rộng một khoảng là 80 cm. Hỏi người thợ đã làm thanh ngang đó dài bao nhiêu cm ?

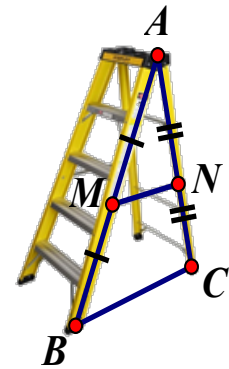


Lời giải

Gọi MN là thanh ngang ; BC là độ rộng giữa hai bên thang.
 MN nằm chính giữa thang nên M; N là trung điểm AB và AC.
 Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC.

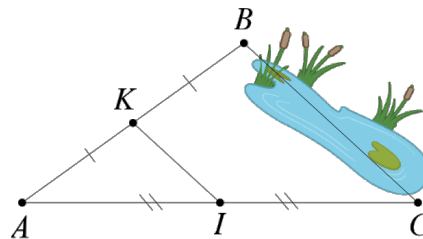
$$\text{Suy ra } MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 80 = 40 \text{ (cm)}.$$

Vậy người thợ đã làm thanh ngang đó dài 40 cm.



Ví dụ 10.

Giữa hai điểm B và C bị ngăn cách bởi hồ nước (như hình dưới). Hãy xác định độ dài BC mà không cần phải bơi qua hồ. Biết rằng đoạn thẳng KI dài 25m và K là trung điểm của AB, I là trung điểm của AC.



Lời giải

Xét tam giác ABC, có:

K là trung điểm AB

I là trung điểm AC

⇒ KI là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow KI = \frac{1}{2}BC$$

$$\text{Hay } 25 = \frac{1}{2} \cdot BC$$

$$BC = 50 \text{ (m)}$$

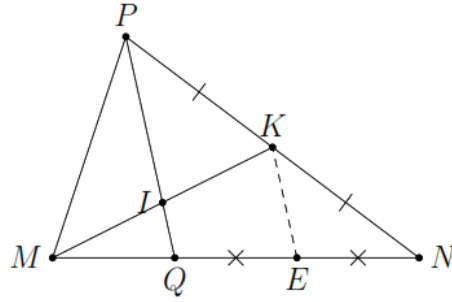
C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác MNP, K là trung điểm NP, Q là một điểm nằm trên cạnh MN sao cho $NQ = 2QM$. Gọi I là giao điểm của PQ và MK. Chứng minh I là trung điểm của MK.

Lời giải

Gọi E là trung điểm QN ⇒ $KE \parallel PQ$ và Q là trung điểm ME.

⇒ IQ là đường trung bình của $\triangle MEK$ ⇒ I là trung điểm của MK.



Bài 2. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM , D là giao điểm của BI và AC .

- a) Chứng minh $AD = \frac{1}{2}DC$; b) So sánh độ dài BD và ID .

Lời giải

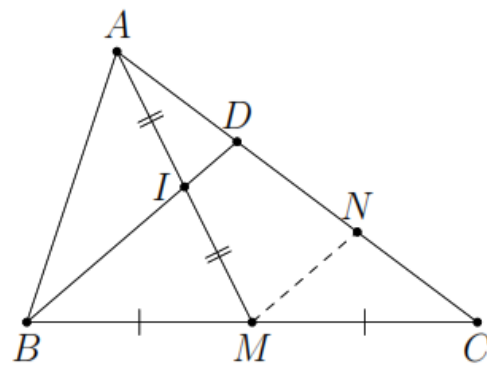
a) Kẻ $MN \parallel BD, N \in AC$.

MN là đường trung bình trong $\triangle CBD$
 $\Rightarrow N$ là trung điểm của CD (1).

IN là đường trung bình trong $\triangle AMN$
 $\Rightarrow D$ là trung điểm của AN (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AD = \frac{1}{2}DC$.

Có $ID = \frac{1}{2}MN$; $MN = \frac{1}{2}BD$, nên $BD = ID$.



Bài 3: Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AD . Gọi M là một điểm trên cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{2}MC$. Gọi O là giao điểm của BM và AD . Chứng minh rằng

- a) O là trung điểm của AD . b) $OM = \frac{1}{4}BM$.

Lời giải

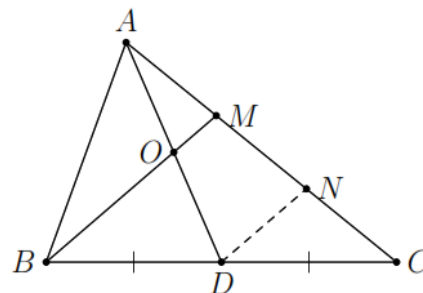
a) Qua D vẽ một đường thẳng song song với BM cắt tại N .

Xét $\triangle MBC$ có $DB = DC$ và $DN \parallel BM$ nên

$$MN = NC = \frac{1}{2}MC \text{ (định lý đường trung bình của tam}$$

Mặt khác $AM = \frac{1}{2}MC$, do đó $AM = MN = \frac{1}{2}MC$.

Xét $\triangle AND$ có $AM = MN$ và $BM \parallel DN$ nên $OA = OD$ hay O là trung điểm của AD .

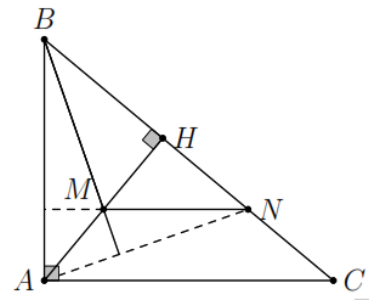


AC
giác).

Lời giải

Xét $\triangle HAC$ có MN là đường trung bình nên $MN \parallel AC$
 $\Rightarrow MN \perp AB$.

Xét $\triangle BAN$ có AH và NM là hai đường cao cắt nhau tại M
 Do đó $BM \perp AN$.



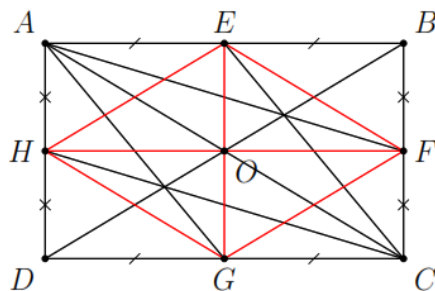
Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh:

- a) $EFGH$ là hình thoi. b) AC, BD, EG, FH đồng quy.

Lời giải

a) $\triangle ABC$ có EF là đường trung bình nên $EF \parallel AC$ và
 $EF = \frac{AC}{2}$.

$\triangle ACD$ có GH là đường trung bình nên $GH \parallel AC$ và
 $GH = \frac{AC}{2}$.



Suy ra $EF \parallel GH$ và $EF = GH$. Do đó $EFGH$ là hình bình hành.

Hơn nữa, $\triangle ABD$ có EH là đường trung bình nên $EH = \frac{BD}{2}$.

Mà $AC = BD$ (hình chữ nhật $ABCD$) nên $EF = EH$, suy ra $EFGH$ là hình thoi.

b) Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AE \parallel CG$ và $AE = CG$.

Do đó tứ giác $AECG$ là hình bình hành.

Mà O là trung điểm của đường chéo AC (trong hình chữ nhật $ABCD$).

Nên O cũng là trung điểm của đường chéo EG .

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $AHCF$ là hình bình hành.

Và suy ra O cũng là trung điểm của đường chéo HF .

Vậy AC, BD, EG, FH đồng quy tại O .

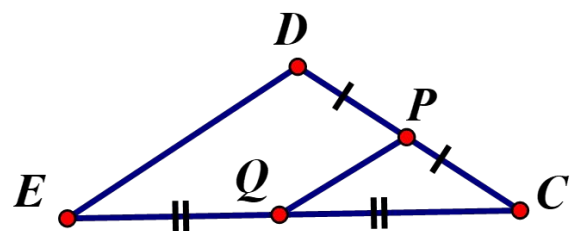
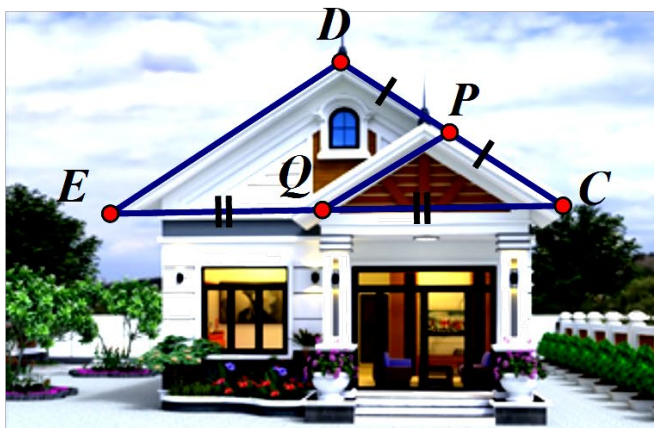
là

Bài 8.

Để làm cây thông Noel, người thợ sẽ dùng một cái khung sắt hình tam giác cân như hình vẽ bên, sau đó gắn mô hình cây thông lên. Cho biết thanh $BC = 120\text{cm}$. Tính độ dài các thanh GF ; HE ; ID .



Bài 9. Để thiết kế mặt tiền cho căn nhà cấp bốn mái thái, sau khi xác định chiều dài mái $PQ = 1,5\text{m}$. Chủ thợ nhằm tính chiều dài mái DE biết Q là trung điểm EC , P là trung điểm của DC . Em hãy tính giúp chủ thợ xem chiều dài mái DE bằng bao nhiêu (xem hình vẽ minh họa) ?



Lời giải

Vì Q là trung điểm EC , P là trung điểm của DC nên PQ là đường trung bình của tam giác CDE

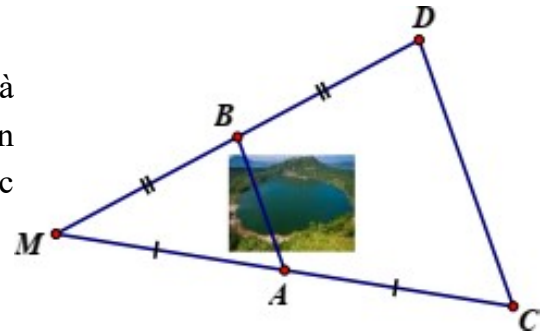
$$QP = \frac{1}{2}DE$$

$$\Rightarrow DE = 2QP = 2.1,5 = 3\text{m}$$

Vậy chiều dài mái DE bằng 3m

Bài 10.

a/ Giữa 2 điểm A và B là một hồ nước. Biết A, B lần lượt là trung điểm của MC và MD (như hình vẽ). Bạn Mai đi từ C đến D hết 120 bước chân, trung bình mỗi bước chân của Mai đi được 4dm.



Hỏi khoảng cách từ A đến B là bao nhiêu mét?

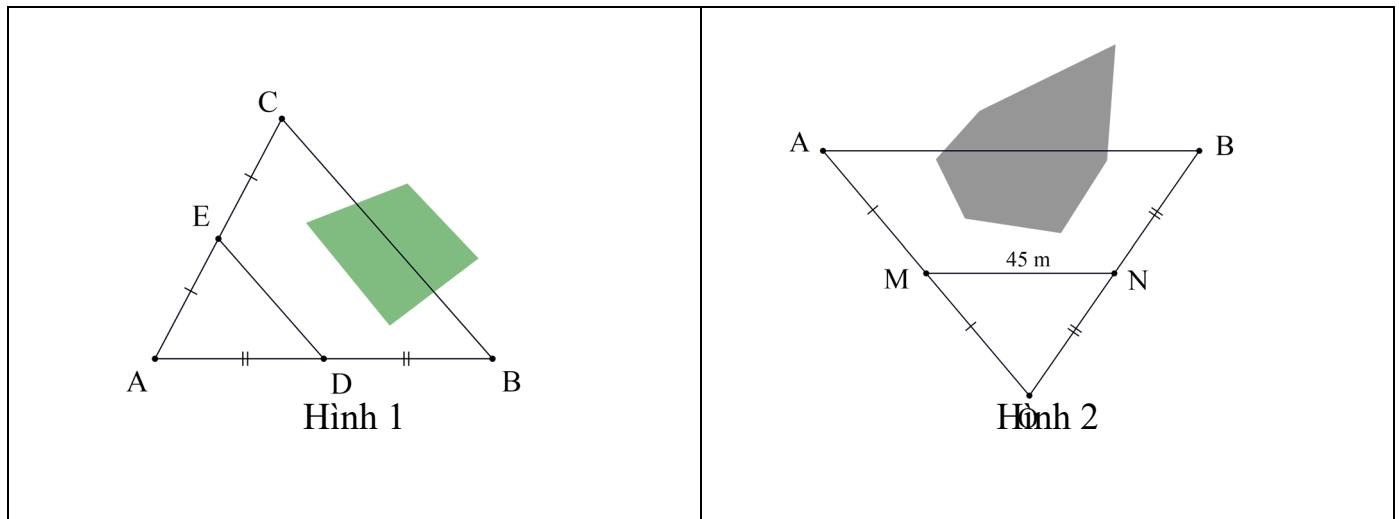
Lời giải

AB là đường trung bình của ΔMCD

$$AB = \frac{1}{2} CD \Rightarrow AB = 60 \text{ (bước chân)}$$

Khoảng cách từ A đến B là: $60 \cdot 4 = 240 \text{ (dm)} = 24\text{m}$.

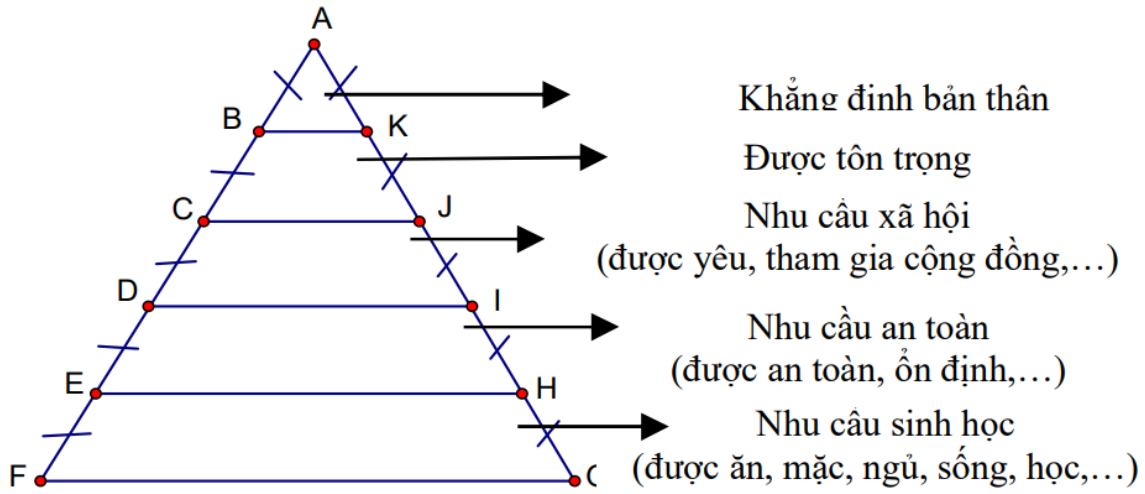
b/ Để đo khoảng cách hai điểm B và C bị chắn bởi 1 cái hồ sâu, người ta thực hiện đo như hình 1. Biết khoảng cách giữa hai điểm D và E đo được là 53m. Hỏi B và C cách nhau bao nhiêu m ?



c/ Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B bị ngăn cách bởi một hồ nước người ta đóng các cọc tại các vị trí A, B, M, N, O như hình 2 và đo được $MN = 45\text{m}$. Tính khoảng cách AB biết M, N lần lượt là điểm chính giữa OA và OB.

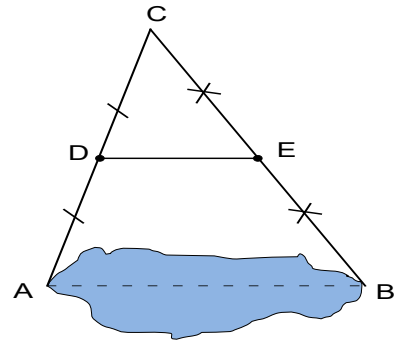
Bài 11.

Toán thực tế đường trung bình: Nhà tâm lý học Abraham Maslow (1908 – 1970) được xem như một trong những người tiên phong trong trường phái Tâm lý học nhân văn. Năm 1943, ông đã phát triển Lý thuyết về Thang bậc nhu cầu của con người (như hình vẽ bên). Trong đó, BK = 6cm. Hãy tính đoạn thẳng CJ; EH?



Bài 12.

Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B bị ngăn cách bởi một hồ nước người ta đóng các cọc ở vị trí A, B, C, D, E như hình vẽ. Người ta đo được DE = 350m. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B.



Lời giải

* C/m: DE là đường trung bình $\triangle ABC$

* $DE = \frac{1}{2} AB$

$\Rightarrow AB = 2.DE = 2.350 = 700(m)$

Bài 13. Một cáp treo di chuyển giữa hai địa điểm A và B của một hồ nước (hình bên). Biết M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB và MN = 85m. Hỏi quãng đường di chuyển của cáp treo từ A sang B dài bao nhiêu mét?

Lời giải

Vì M, N lần lượt là trung điểm của OA và OB.
 Nên MN là đường trung bình của tam giác OAB

$$MN = \frac{1}{2} \cdot AB$$

Suy ra $AB = 2 \cdot MN = 2 \cdot 85 = 170\text{m}$

Bài 14. Giữa 2 điểm A và N là một hồ nước sâu. Để tính khoảng cách giữa 2 điểm A và N, một học sinh đã lấy M làm mốc và lấy H, G lần lượt là trung điểm của MA, MN.

- a) Chứng minh HG là đường trung bình.
- b) Hỏi A và N cách nhau bao nhiêu mét. Biết khoảng cách giữa 2 điểm H và G là 62m.

Lời giải

Xét $\triangle AMN$ ta có:

H là trung điểm AM(gt)

G là trung điểm MN(gt)

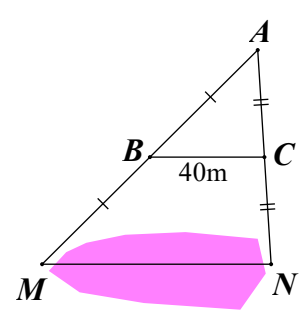
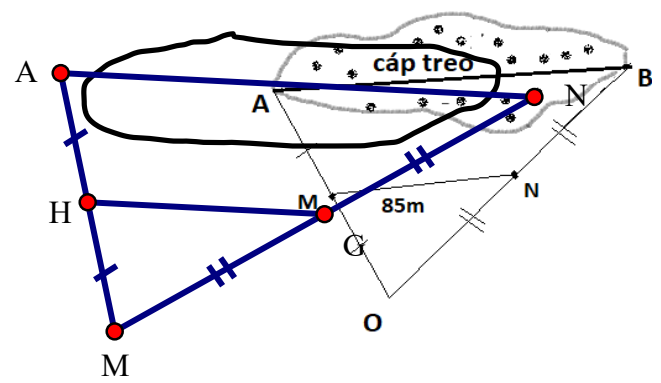
\Rightarrow HG là đường trung bình $\triangle AMN$

$$\Rightarrow HG = \frac{1}{2} AN$$

$$\Rightarrow AN = 2HG = 2 \cdot 62 = 124\text{m}$$

Vậy $AN = 124\text{m}$

Bài 15. Người ta xây dựng mô hình như hình dưới để đo bề rộng MN của một cái hồ nước mà không cần phải đo trực tiếp. Em hãy tính xem độ rộng của hồ nước trong hình vẽ là bao nhiêu?



Lời giải

Xét ΔAMN , Ta có:

B là trung điểm của AM

C là trung điểm của AN

$\Rightarrow BC$ là đường trung bình của ΔAMN

$$\Rightarrow BC = \frac{MN}{2}$$

$$\Rightarrow MN = 80m$$

Vậy độ rộng của hồ nước là 80 (m)

Hình học
phẳng

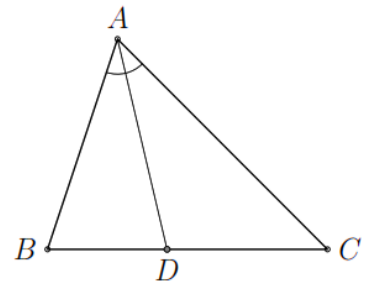
TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC.

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

1. Định lí.

- Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng ấy.
- Ta có

GT	$\triangle ABC; AD$ là tia phân giác của \widehat{BAC} ($D \in BC$)
KL	$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.



2. Chứng minh định lý trên.

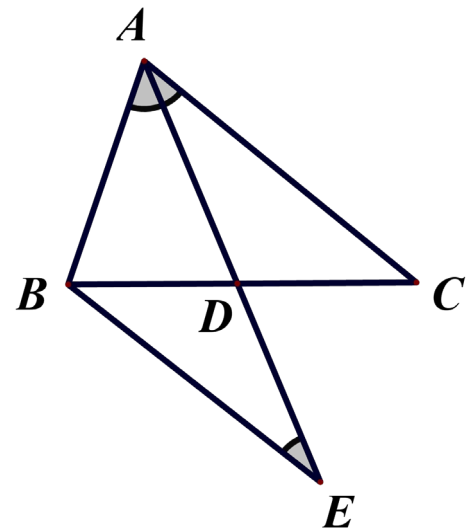
Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng AD tại E. Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{CAE}$

(gt). Vì $BE \parallel AC$ nên $\widehat{CAE} = \widehat{BEA}$ (hai góc so le trong). Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó tam giác ABE cân tại B, suy ra $BE = AB$ (1).

Áp dụng hệ quả của định lý Thales đối với tam giác ACD, ta

có $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{AC}$ (2)

Từ (1); (2) suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (dpcm)

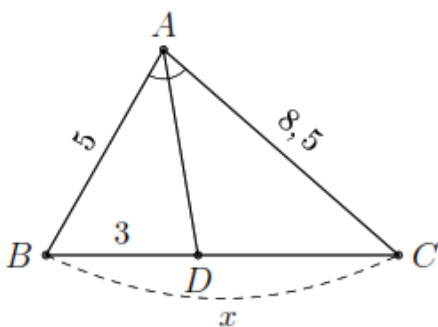


B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

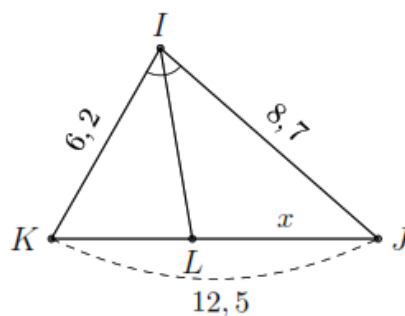
Dạng 1: Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính độ dài đoạn thẳng

- Bước 1: Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỉ lệ.
- Bước 2: Sử dụng các đoạn thẳng tỉ lệ đó để tính độ dài đoạn thẳng chưa biết.

Ví dụ 1. Tính x trong hình và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



a)



b)

Lời giải

Hình a: Do AD là đường phân giác trong của góc A nên ta có

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow DC = \frac{AC}{AB} \cdot DB.$$

Thay số ta có $DC = \frac{8,5}{5} \cdot 3 = 5,1$. Khi đó $x = DB + DC = 3 + 5,1 = 8,1$.

Hình b: Với $KL = 12,5 - x$ và do IL là đường phân giác trong của góc I nên theo tính chất đường phân giác ta có

Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{KL}{LJ} = \frac{IK}{IJ} \Rightarrow \frac{12,5 - x}{x} = \frac{6,2}{8,7} \Leftrightarrow x = \frac{2175}{298} \approx 7,3.$$

Dạng 2: Sử dụng tính chất đường phân giác của tam giác để tính tỉ số, chứng minh các hệ thức, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song

- Bước 1: Xác định đường phân giác và lập các đoạn thẳng tỉ lệ.
- Bước 2: Sử dụng các tỉ số đã có, cùng với các tính chất của tỉ lệ thức, các tỉ số trung gian (nếu cần) và định lí đảo của định lí Ta-lét để tính tỉ số đoạn thẳng hoặc chứng minh các hệ thức. Từ đó suy ra các đoạn thẳng bằng nhau hay các đường thẳng song song.

Ví dụ 2. Cho tam giác cân ABC , có $BA = BC = a$, $AC = b$. Đường phân giác của góc A cắt BC tại M , đường phân giác góc C cắt BA tại N .

a) Chứng minh $MN \parallel AC$.

b) Tính MN theo a, b .

ĐS: $MN = \frac{ab}{a+b}$.

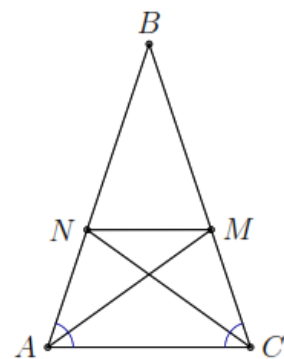
Lời giải

a) Theo tính chất đường phân giác trong của góc A và góc C ta có

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b}; \quad (1)$$

$$\frac{BN}{AN} = \frac{CB}{CA} = \frac{a}{b}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BM}{CM} = \frac{BN}{AN}$. Theo định lý Thales đảo ta được $MN \parallel AC$.



b) Tính MN theo a, b .

Theo (2) có $\frac{BN}{AN} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{a+b}{b} \Leftrightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{BN}{AB} = \frac{a}{a+b}$.

Do $MN \parallel AC$ nên $\frac{BN}{BA} = \frac{MN}{AC} \Leftrightarrow MN = \frac{BN}{BA} \cdot AC = \frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 28$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D . Qua D kẻ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BD , DC và DE . **ĐS:** $BD = 10,5$; $DC = 17,5$; $DE = 7,5$.

b) Cho biết diện tích tam giác ABC là S . Tính diện tích các tam giác ABD , ADE , DCE theo S .

ĐS: $S_{\triangle ABD} = \frac{3}{8}S, S_{\triangle ADE} = \frac{15}{64}S, S_{\triangle DCE} = \frac{25}{64}S.$

Lời giải

a) Theo tính chất đường phân giác trong góc A ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow DB = \frac{3}{5}DC; \quad (1)$$

Mặt khác $DB + DC = BC = 28.$ (2)

Từ (1) và (2) ta tính được $DB = 10,5$ cm và $DC = 17,5$ cm.

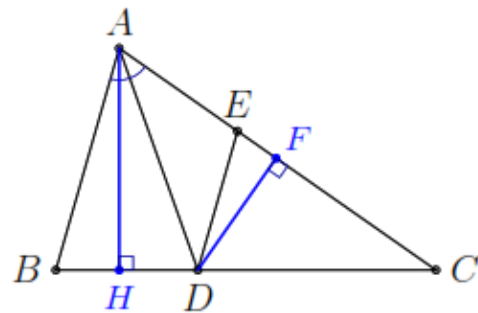
Vì $DE \parallel AB$ nên ta có $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DE = \frac{DC}{BC} \cdot AB = \frac{17,5}{28} \cdot 12 = 7,5$ cm.

b) Gọi AH là đường cao kẻ từ A của $\triangle ABC$. Ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC;$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD \text{ và}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD.$$



Suy ra $S_{\triangle ABD} = \frac{BD}{BC} \cdot S = \frac{3}{8}S$ và $S_{\triangle ADC} = \frac{CD}{BC} \cdot S = \frac{5}{8} \cdot S.$

Chúng minh tương tự bằng cách trong $\triangle ADC$ ta kẻ đường cao DF ta được

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot AC;$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot AE \text{ và}$$

$$S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot EC.$$

Suy ra

$$S_{\triangle ADE} = \frac{AE}{AC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{BD}{BC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{15}{64} \cdot S. \text{ và}$$

$$S_{\triangle DCE} = \frac{EC}{AC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{DC}{BC} \cdot S_{\triangle ADC} = \frac{25}{64} \cdot S.$$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A . Kẻ phân giác trong AD của \widehat{BAC} (với $D \in BC$), biết $DB = 15$ cm, $DC = 20$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB , AC .

ĐS: $AB \approx 3,5$ cm; $AC \approx 4,7$ cm.

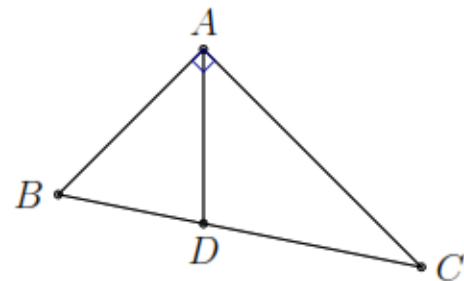
Lời giải

Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4} AC. \quad (1)$$

Mặt khác, tam giác ABC vuông tại A nên theo định lý Py-ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BD + DC)^2 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = 1225. \quad (2)$$



ta-go

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} AB = \frac{3}{4} AC \\ AB^2 + AC^2 = 1225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \approx 3,5 \text{ cm} \\ AC \approx 4,7 \text{ cm}. \end{cases}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Phân giác của \widehat{AMB} cắt AB ở D , phân giác của \widehat{AMC} cắt AC ở E .

a) Chứng minh DE song song với BC .

b) Gọi I là giao điểm của DE và AM . Chứng minh I là trung điểm của DE .

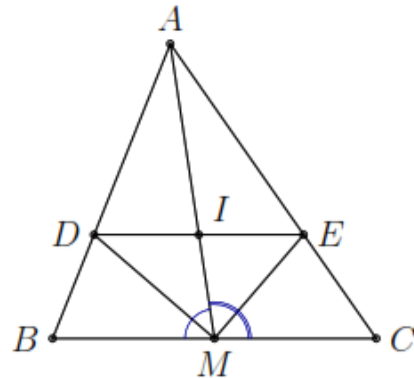
Lời giải

a) Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \text{ và } \frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}.$$

Mặt khác $MB = MC$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$. Theo định lý Ta-lét đảo
 $DE \parallel BC$.

b) Theo câu a) ta có $DE \parallel BC$ nên $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.



ta được

Xét định lý Ta-lét cho $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ ta có

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DI}{BM} \text{ và } \frac{AE}{AC} = \frac{IE}{CM}.$$

Từ đó, suy ra $\frac{DI}{BM} = \frac{IE}{CM}$ mà $MB = CM$ nên $DI = IE$ hay I là trung điểm của DE .

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D .

a) Tính BC , BD và CD .

ĐS: $BC = 20$ cm; $BD \approx 8,6$ cm; $DC \approx 11,4$ cm.

b) Vẽ đường cao AH . Tính AH , HD và AD .

ĐS: $AH \approx 9,6$ cm, $HD \approx 1,4$ cm, $AD \approx 9,7$ cm.

Lời giải

a) Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20 \text{ cm.}$$

Theo tính chất đường phân giác trong của góc A ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow DB = \frac{3}{4}DC.$$

Mặt khác ta lại có

$$BD + DC = BC = 20 \Rightarrow \frac{3}{4}DC + DC = 20 \Leftrightarrow DC \approx 11,4 \text{ cm.}$$

Do đó $BD = BC - DC = 20 - 11,4 = 8,6$ cm.

b) Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = 96$ cm.

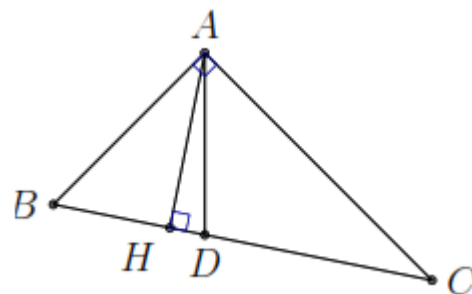
Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{BC} \approx 9,6$ cm.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông AHC ta có

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} \approx 12,8 \text{ cm.}$$

Suy ra $HD = HC - DC = 12,8 - 11,4 \approx 1,4$ cm.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông AHD ta có



$$AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} \approx 9,7 \text{ cm.}$$

Bài 4. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), đường phân giác góc B cắt AC tại D và cho biết $AB = 15 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$.

a) Tính AD , DC .

ĐS: $AD = 9 \text{ cm}$; $DC = 6 \text{ cm}$.

b) Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC kéo dài tại E . Tính EC . **ĐS:** $EC = 30 \text{ cm}$.

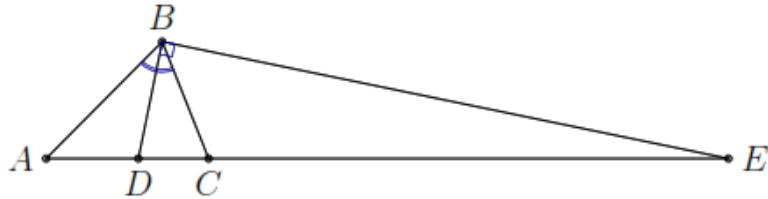
Lời giải

a) Ta có $AD + DC = AC = AB = 15 \text{ cm}$. (1)

và $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} AD + DC = 15 \\ AD = \frac{3}{2} \cdot DC \end{cases}$$



Từ đó suy ra $AD = 9 \text{ cm}$, $DC = 6 \text{ cm}$.

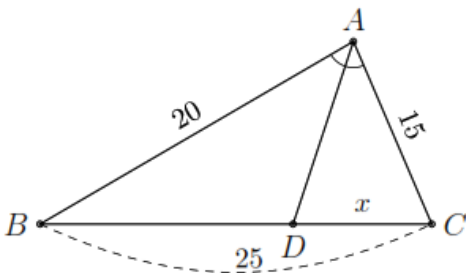
b) Vì $BD \perp BE$ nên BE là phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC .

Khi đó ta có $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$. Suy ra $EC = \frac{AE \cdot BC}{AB} = \frac{AE \cdot 10}{15} = \frac{AE \cdot 2}{3}$.

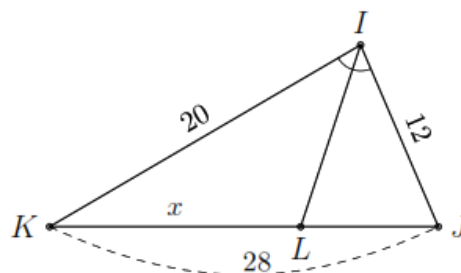
Suy ra $3 \cdot CE = 2 \cdot (AC + CE)$ hay $CE = 2 \cdot AC$. Do đó $CE = 30 \text{ cm}$.

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Tính x trong hình và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.



a)



b)

Lời giải

Hình a: Ta có $BD = 25 - x$.

Theo tính chất đường phân giác trong ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{25 - x}{x} = \frac{20}{15} \Leftrightarrow x = \frac{75}{7} \approx 10,7.$$

Hình b: Ta có $LJ = 28 - x$.

Theo tính chất phân giác trong ta có

$$\frac{LK}{LJ} = \frac{IK}{IJ} \Rightarrow \frac{x}{28-x} = \frac{20}{12} \Leftrightarrow x = \frac{35}{2} = 17,5.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Tia phân giác góc AMB cắt AB tại D , tia phân giác góc AMC cắt cạnh AC tại E . Chứng minh $DE \parallel BC$.

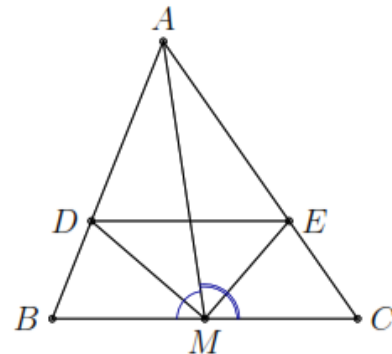
Lời giải

Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \text{ và } \frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}.$$

Mặt khác $MB = MC$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.

Theo định lý Ta-lét đảo ta được $DE \parallel BC$.



Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm. Đường phân giác góc A cắt BC tại D .

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BD , DC .

ĐS: $BD \approx 10,7$ cm; $DC \approx 14,3$ cm.

b) Tính tỉ số diện tích hai tam giác ABD và ACD .

ĐS: $\frac{107}{143}$.

Lời giải

a) Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc A . Ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow DB = \frac{3}{4}DC; \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } DB + DC = BC = 25. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có tính được $DB \approx 10,7$ cm và $DC \approx 14,3$ cm.

b) Gọi AH là đường cao kẻ từ A của $\triangle ABC$ và S là diện tích $\triangle ABC$. Ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC;$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD \text{ và}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD.$$

Suy ra

$$S_{\triangle ABD} = \frac{BD}{BC} \cdot S = \frac{107}{250} \cdot S \text{ và } S_{\triangle ADC} = \frac{CD}{BC} \cdot S = \frac{143}{250} \cdot S.$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{107}{143}.$$

