Trường THPT AN PHƯỚC
Tổ Toán

PHÂN TÍCH
ĐỀ THAM KHẢO THI TNTHPT- 2023 CỦA BGDĐT

PHẦN 1: MA TRẬN ĐỀ THAM KHẢO BỘ GIÁO DỤC 2023

A .Khung ma trận

CHỦ ĐỀ CHUẨN KTKN	CẤP ĐỘ TƯ DUY				CỘNG
	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng	Vận dụng cao	
1. Hoán vị-chỉnh hợp-tổ hợp	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
2. Xác suất của biến cố	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
3. Cấp số nhân	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
4. Hai mặt phẳng vuông góc	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
5. Khoảng cách	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	1
6. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 1	3
7. Cực trị của hàm số	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	2
8. Đường tiệm cận	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1

9. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	Số câu 2	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 0	4
10. Hàm số lũy thừa	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
11. Lô-ga-rít	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
12. Hàm số mũ. Hàm số lô-ga-rít	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
13. Phương trình mũ và phương trình lô-ga-rít	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
14. Bất phương trình mũ và lô-ga-rít	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 1	4
15. Nguyên hàm	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	2
16. Tích phân	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	3
17. Ứng dụng của tích phân	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 1	2
18. Khái niệm số phức	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	2
19. Phép cộng, trừ và nhân số phức	Số câu 0	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 0	2
20. Phương trình bậc hai hệ số thực	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	1
21. Cực trị	Số câu	Số câu	Số câu	Số câu	

	0	0	0	1	1
22. Khái niệm về thể tích của khối đa diện	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 0	3
23. Khái niệm về mặt tròn xoay	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	2
24. Mặt cầu	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
25. Hệ tọa độ trong không gian	Số câu 0	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 1	3
26. Phương trình mặt phẳng	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	2
27. Phương trình đường thẳng trong không gian	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 1	3
TỔNG	22	15	7	6	50

B .Bảng mô tả chi tiết nội dung câu hỏi

Dạng 1 (*1 câu nhận biết*): Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A

Dạng 2 (*1 câu thông hiểu*): Tính xác suất bằng định nghĩa

Dạng 3 (*1 câu nhận biết*): Tìm hạng tử trong cấp số nhân

Dạng 4 (*1 câu thông hiểu*): Xác định góc giữa hai mặt phẳng, đường và mặt

Dạng 5 (*1 câu vận dụng*): Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Dạng 6 (*1 câu nhận biết*): Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị

Dạng 7 (*2 câu nhận biết*): Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị

Dạng 8 (*1 câu nhận biết*): Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số (không chứa tham số) hoặc biết BBT, đồ thị

Dạng 9 (*1 câu nhận biết*): Nhận dạng đồ thị, bảng biến thiên

Dạng 10 (*1 câu nhận biết*): Sự tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)

Dạng 11 (*1 câu thông hiểu*): Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức

Dạng 12 (*1 câu thông hiểu*): Biện luận số giao điểm dựa vào đồ thị, bảng biến thiên

Dạng 13 (*1 câu vận dụng*): Biện luận số giao điểm dựa vào đồ thị, bảng biến thiên

Dạng 14 (*1 câu vận dụng cao*): Câu hỏi lý thuyết

Dạng 15 (*1 câu nhận biết*): Đạo hàm hàm số lũy thừa
Dạng 16 (*1 câu nhận biết*): Tính đạo hàm hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít
Dạng 17 (*1 câu nhận biết*): Bất phương trình cơ bản
Dạng 18 (*1 câu thông hiểu*): Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít
Dạng 19 (*1 câu thông hiểu*): Phương pháp đặt ẩn phụ
Dạng 20 (*1 câu thông hiểu*): Phương pháp đưa về cùng cơ số
Dạng 21 (*1 câu vận dụng cao*): Phương pháp đưa về cùng cơ số
Dạng 22 (*1 câu vận dụng cao*): Phương pháp hàm số, đánh giá
Dạng 23 (*1 câu nhận biết*): Định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản
Dạng 24 (*2 câu thông hiểu*): Định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản
Dạng 25 (*1 câu thông hiểu*): Định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản
Dạng 26 (*1 câu thông hiểu*): Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay)
Dạng 27 (*1 câu vận dụng*): Phương pháp đổi biến số
Dạng 28 (*1 câu vận dụng cao*): Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị
Dạng 29 (*1 câu nhận biết*): Xác định các yếu tố cơ bản của số phức
Dạng 30 (*1 câu nhận biết*): Biểu diễn hình học cơ bản của số phức
Dạng 31 (*1 câu thông hiểu*): Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán
Dạng 32 (*1 câu thông hiểu*): Bài toán tập hợp điểm
Dạng 33 (*1 câu vận dụng*): Định lí Viet và ứng dụng
Dạng 34 (*1 câu vận dụng cao*): Phương pháp đại số
Dạng 35 (*2 câu thông hiểu*): Tính thể tích các khối đa diện
Dạng 36 (*1 câu vận dụng*): Các bài toán khác(góc, khoảng cách,...) liên quan đến thể tích khối đa diện
Dạng 37 (*1 câu nhận biết*): Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện
Dạng 38 (*1 câu vận dụng*): Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện
Dạng 39 (*1 câu nhận biết*): Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản)
Dạng 40 (*1 câu nhận biết*): Xác định VTPT
Dạng 41 (*1 câu nhận biết*): Góc
Dạng 42 (*1 câu thông hiểu*): Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục $Oxyz$
Dạng 43 (*1 câu thông hiểu*): Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản)
Dạng 44 (*1 câu thông hiểu*): Viết phương trình đường thẳng
Dạng 45 (*1 câu thông hiểu*): Tìm tọa độ điểm liên quan đến đường thẳng
Dạng 46 (*1 câu vận dụng cao*): Các bài toán cực trị
Dạng 47 (*1 câu vận dụng cao*): Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng

PHẦN 2: PHÂN TÍCH ĐỀ THAM KHẢO CỦA BỘ GIÁO DỤC 2023

CHỦ ĐỀ 1 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 2- DS11)

CÂU 1. Cho tập hợp A có 15 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của A bằng

A. 225. **B.** 30. **C.** 210. **D.** 105.

Lời giải.

Số tập con gồm hai phần tử của A là $\mathrm{C}_{15}^2 = 105$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán đếm.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Qui tắc cộng-Qui tắc nhân-Hoán vị -Chỉnh hợp-Tổ hợp.

CÂU 2. Một hộp chứa 15 quả cầu gồm 6 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 6 và 9 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai quả từ hộp đó, xác suất để lấy được hai quả khác màu đồng thời tổng hai số ghi trên chúng là số chẵn bằng

A. $\dfrac{9}{35}$. **B.** $\dfrac{18}{35}$. **C.** $\dfrac{4}{35}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^2 = 105$.

Số kết quả thuận lợi là $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 27$ (chọn hai quả lẻ và chọn hai quả chẵn).

Vậy xác suất là $\mathrm{P} = \dfrac{27}{105} = \dfrac{9}{35}$.

Chọn đáp án A □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính xác suất bằng định nghĩa.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về xác suất.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Bài toán đếm -Tính xác suất của biến cố.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 1- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 1 Qui tắc cộng-Qui tắc nhân-Tổ hợp-Chỉnh hợp-Hoán vị

1. **Quy tắc cộng**

   Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.

   - Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

2. **Quy tắc nhân**

   Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m \cdot n$ cách hoàn thành công việc.

3. **Hoán vị**

   - **Hoán vị là gì?**

     Cho tập A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A.

   - **Số các hoán vị**

     Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là

     $$\mathrm{P}_n = n! = n(n-1)\cdots 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n.$$

   Ta có $\mathrm{P}_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = (n-3)!(n-2)(n-1)n = (n-2)!(n-1)n.$

4. **Chỉnh hợp**

   - **Chỉnh hợp là gì?**

     Cho tập A gồm n phần tử và số nguyên k, với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp k phần tử này theo một thứ tự nhất định, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A.

   - **Số các chỉnh hợp**

     Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là

     $$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

   - *Với* $0 < k < n$, *ta có thể viết* $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
   - *Qui ước* $0! = 1$, $\mathrm{A}_n^0 = 1$ *thì* $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ *cũng đúng với* $0 \leq k \leq n$. *Khi* $k = n$ *thì* $\mathrm{A}_n^n = \mathrm{P}_n = n!$.

5. **Tổ hợp**

- **Tổ hợp là gì?**
Cho tập A có n phần tử và số nguyên k $(1 \leq k \leq n)$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A.
- **Số các tổ hợp**
Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- *Qui ước* $0! = 1$, $\mathrm{C}_n^0 = 1$ *thì* $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$ *cũng đúng với* $0 \leq k \leq n$. *Ta có* $\mathrm{C}_n^k \cdot k! = \mathrm{A}_n^k$.
- *Với* $0 \leq k \leq n$, *ta có thể viết* $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dạng 2 ***Tính xác suất của biến cố***

1. Tính số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)$.
2. Tính số phần tử của biến cố A là $n(A)$.
3. Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

CHỦ ĐỀ 2 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 3- DS11)

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$. Giá trị của u_3 bằng

A. 3. **B**. $\dfrac{1}{2}$. **C**. $\dfrac{1}{4}$. **D**. $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tìm số hạng thứ n của cấp số nhân .

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về CSC-CSN.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Bài toán về cấp số cộng-Cấp số nhân.

Dạng 3 Cấp số cộng-Cấp số nhân

1. **Cấp số cộng**

   (a) **Định nghĩa**

   Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d, ta có $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) **Số hạng tổng quát**

   Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$.

   (c) **Tính chất**

   Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$.

   (d) **Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng**

   Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Khi đó

   $$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

2. **Cấp số nhân**

   (a) **Định nghĩa**

   Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) **Số hạng tổng quát**

   Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

   (c) **Tính chất**

   Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ với $k \geq 2$.

   (d) **Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân**

   Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Khi đó $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$.

   (e) **Cấp số nhân lùi vô hạn**

   - Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội q sao cho $|q| < 1$.
   - Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: Cho (u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q. Khi đó tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức

   $$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \frac{u_1}{1-q}.$$

(CHƯƠNG 3- HH11)

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy và $SA = AB$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

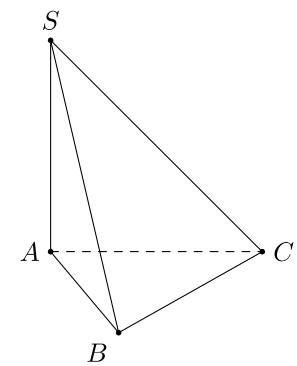
✍ **Lời giải.**

Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên suy ra $BC \perp (SAB)$.

Mặt khác (SAB) cắt (SBC), (ABC) lần lượt theo các giao tuyến SA, AB.

Nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa SB và AB và bằng $\widehat{SBA}$.

Ta có $\triangle SAB$ vuông tại A nên $\widehat{SBA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án D ☐

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Xác định góc giữa đường thẳng và đường thẳng,mặt phẳng và đường thẳng, hai mp.

2. Mức độ: Thông hiểu.

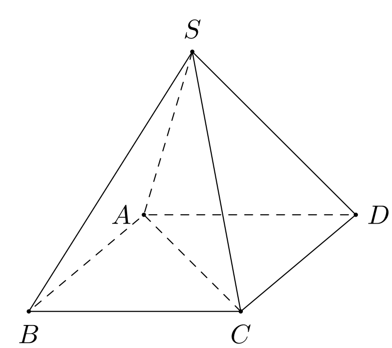
3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cách xác định góc giữa : mặt phẳng và đường thẳng; mặt phẳng và mặt phẳng ; đường thẳng và đường thẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Góc giữa : mặt phẳng và đường thẳng; mặt phẳng và mặt phẳng ; đường thẳng và đường thẳng.

CÂU 5.

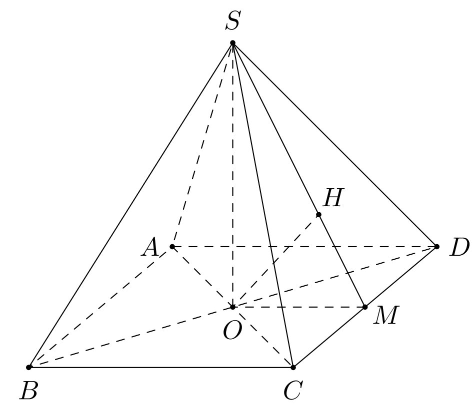
Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao a, $AC = 2a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.



✍ **Lời giải.**

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của CD.
Hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao a, $AC = 2a$ nên
$SO = a$, $AB = a\sqrt{2}$, $OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ta có $\begin{cases} SO \perp CD \\ OM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM)$.
Suy ra $(SOM) \perp (SCD)$, gọi H là hình chiếu O trên SM.
Do đó $OH \perp (SCD)$.
Ta lại có $\mathrm{d}\left(B,(SCD)\right) = 2\mathrm{d}\left(O,(SCD)\right) = 2OH$.
Xét tam giác SOM vuông tại O nên



$$OH = \frac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(B,(SCD)\right) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

2. Mức độ: Vận dụng.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng-Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song- Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 3- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 4 *Tính góc giữa hai đường thẳng-Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng-Góc giữa hai mặt phẳng*

1. Góc giữa hai đường thẳng

PP1. Dùng định nghĩa : Tìm hai đường thẳng a' ,b' cắt nhau và lần lượt song song với a và b. Khi đó $(\widehat{a,a}) = \left(\widehat{a',b'}\right)$

PP2. Sử dụng định lý hàm số cô-sin hoặc tỉ số lượng giác.

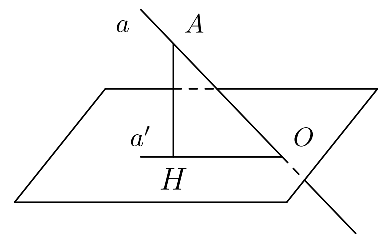
PP3. Sử dụng tích vô hướng: Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b

thì góc φ của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{u},\vec{v})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}.$$

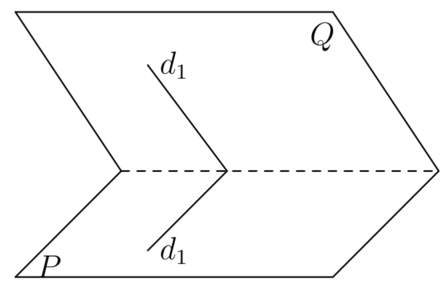
2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Muốn xác định góc của đường thẳng a và (P) ta tìm hình chiếu vuông góc a' của a trên (P). Khi đó $\left(\widehat{a,(P)}\right) = \left(\widehat{a,a'}\right)$.



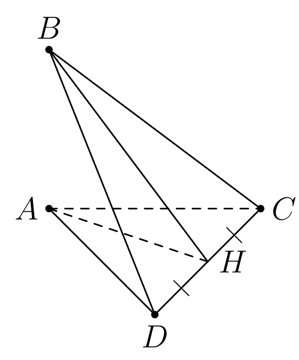
3. Góc giữa hai mặt phẳng

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

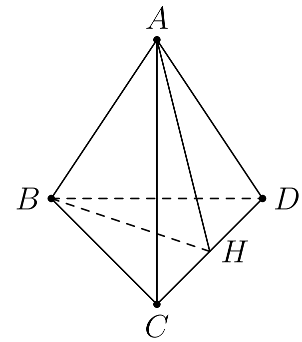


Những trường hợp đặc biệt dễ hay xảy ra:

1. **Trường hợp** 1: Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD, thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



2. **Trường hợp** 2: Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD. Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



3. <u>**Trương hợp** 3:</u> Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng khó quá, ta nên sử dụng công thức sau:

$$\sin\varphi = \frac{d\left(A,mp(Q)\right)}{d(A,a)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

4. <u>**Trường hợp** 4:</u> Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$.

5. <u>**Trường hợp** 5:</u> Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d'.

6. <u>**Trường hợp** 6:</u> Cách xác định góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

   (a) Bước 1: Xác định giao tuyến d.

   (b) Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đình , dựng $AH \perp d$

   (c) Bước 3: Góc cần tìm là góc $\widehat{SHA}$.

   Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

7.Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian Chon hệ trục thích hợp và cụ thể hóa tọa độ các điểm.

- Giả sử đường thẳng a và b lần lượt có VTCP là $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Khi đó

$$\cos\left(\widehat{a,b}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|}{|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|} \Rightarrow \left(\widehat{a,b}\right).$$

- Giả sử đường thẳng a có VTCP là $\overrightarrow{a}$ và (P) có VTPT là $\overrightarrow{n}$ thì khi đó

$$\sin\left(\widehat{a,(P)}\right) = \frac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{n}|} \Rightarrow \left(\widehat{a,(P)}\right).$$

- Giả sử mặt phẳng (α) và (β) lần lượt có VTPT là $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Khi đó

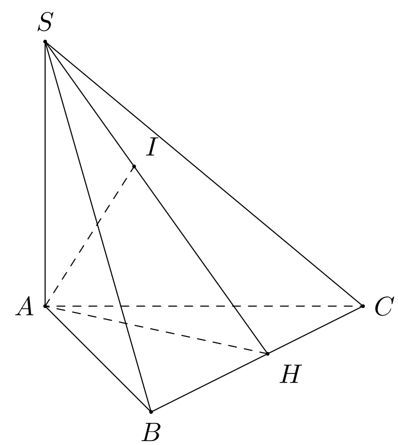
$$\cos\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right|}{|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right).$$

Dạng 5 Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Bài toán 1. Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên

Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt phẳng đi qua đỉnh và cắt mặt đáy.

Tính khoảng cách từ A đến (SBC) như hình vẽ bên dưới:



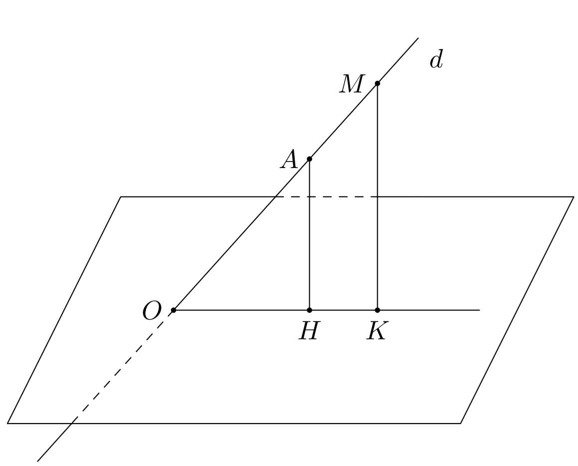
- **Bước 1.** Xác định mặt phẳng chứa đường cao SA và vuông góc với (SBC) là (SAH). Vì Dựng $AH \perp BC$ (với $H \in BC$) và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAH)$ .Do đó $(SAH) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SH. (Chú ý : BC là giao tuyến của (SAH) và (ABC))
- **Bước 2.** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.
- **Bước 3.** $AI = \dfrac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}}$

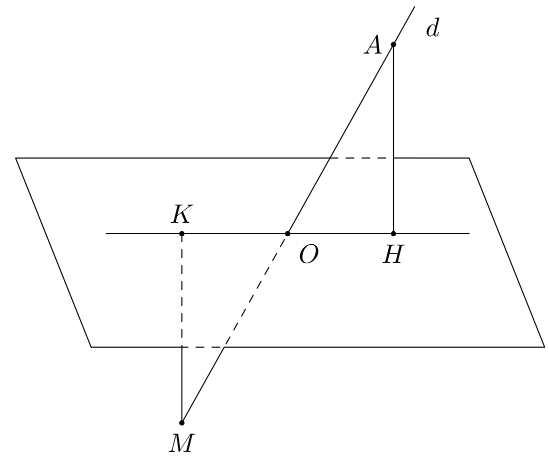
Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kì đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa vào công thức của Bài toán 2.

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Thường sử dụng công thức sau:





Công thức tính tỉ lệ khoảng cách $\dfrac{\mathrm{d}\left(M,\mathrm{mp}(P)\right)}{\mathrm{d}\left(A,\mathrm{mp}(P)\right)}=\dfrac{MO}{AO}$.

Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Phương pháp phải tìm một đường thẳng d qua M và chứa một điểm A mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). Kinh nghiệm thường điểm A là hình chiếu của đỉnh.

CHỦ ĐỀ 4 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 1- GT12)

CÂU 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B**. $(3;+\infty)$. **C**. $(-\infty;1)$. **D**. $(1;3)$.

✍ **Lời giải.**

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số.

2. Mức độ: Nhận biết.

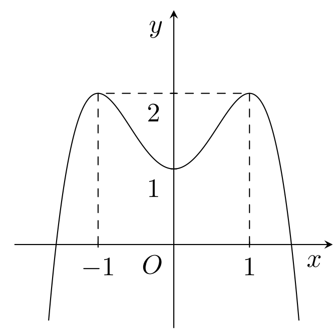
3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính đơn điệu của hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Xét tính đơn điệu của hàm số dựa vào BBT- Đồ thị hàm số -Bảng xét dấu $f'(x)$.

CÂU 7.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

A. $(-1; 2)$. **B**. $(0; 1)$. **C**. $(1; 2)$. **D**. $(1; 0)$.



✍ **Lời giải.**

Quan sát đồ thị ta thấy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có toạ độ là $(0; 1)$.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị của hàm số.

2. Mức độ: Nhận biết.

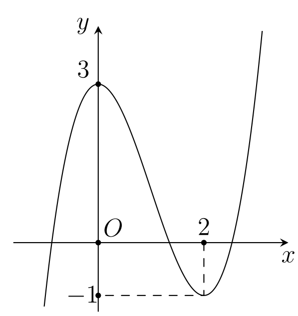
3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị của hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tìm cực trị của hàm số dựa vào BBT- Đồ thị hàm số -Bảng xét dấu $f'(x)$.

CÂU 8.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

A. -1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.



✍ **Lời giải.**

Quan sát đồ thị ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là 3.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tìm giá trị cực trị của hàm số dựa vào BBT, đồ thị của hàm số.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị của hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tìm cực trị của hàm số dựa vào BBT- Đồ thị hàm số -Bảng xét dấu $f'(x)$.

CÂU 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = \dfrac{1}{3}$. **B.** $y = -\dfrac{2}{3}$. **C.** $y = -\dfrac{1}{3}$. **D.** $y = \dfrac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ có phương trình $y = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bài toán xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (không chứa tham số) cho bởi công thức hàm số hoặc biết BBT của hàm số , đồ thị của hàm số.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

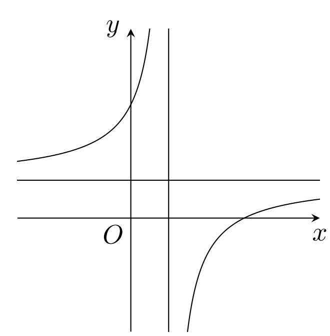
4. Các dạng toán cần ôn tập :Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (không chứa tham số) cho bởi công thức hàm số hoặc biết BBT của hàm số , đồ thị của hàm số.

CÂU 10.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^4 - 3x^2 + 2$. **B.** $y = \dfrac{x-3}{x-1}$.

C. $y = x^2 - 4x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x - 5$.



✍ **Lời giải.**

Trong 4 hàm số được cung cấp, chỉ có hàm số nhất biến $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ có đồ thị dạng như đường cong được cung cấp. Ba hàm số còn lại đều là hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Nhận dạng đồ thị hàm số hoặc BBT của hàm số.

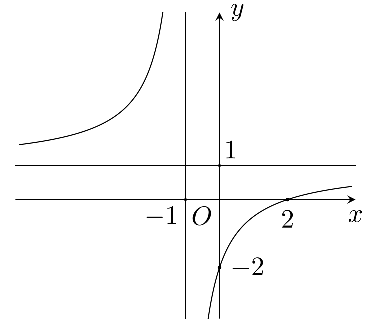
2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về khảo sát hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập : - Nhận dạng đồ thị hàm số bậc 3- Bậc 4- Hữu tỉ.

CÂU 11.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là



A. $(0;-2)$. **B**. $(2;0)$.

C. $(-2;0)$. **D**. $(0;2)$.

✍ **Lời giải.**

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên giao điểm đó có toạ độ là $(2;0)$.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Sự tương giao của hai đồ thị hàm số.

2. Mức độ: Nhận biết

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về sự tương giao của hai đồ thị hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập : -Tìm giao điểm của đồ thị hàm số với các trục tọa độ-Tìm giao diểm của hai đồ thị hàm số.

CÂU 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(1-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B**. $(1;+\infty)$. **C**. $(2;+\infty)$. **D**. $(-\infty;1)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = (x-2)^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức.

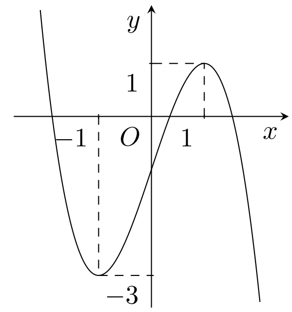
2. Mức độ: Thông hiểu

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính đơn điệu của hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập: - Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức hàm số hay cho bởi đạo hàm của hàm số.

CÂU 13.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-3 < m < 1$.

Kết hợp đề bài m là giá trị nguyên suy ra $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Sự tương giao của hai đồ thị hàm số.

2. Mức độ: Thông hiểu

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về sự tương giao của hai đồ thị hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập : -Tìm giao điểm của hai đồ thị- Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình.

CÂU 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + mx$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Ta có $y' = -4x^3 + 12x + m$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, điều này tương đương với phương trình $4x^3 - 12x = m$ có ba nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x) = 4x^3 - 12x$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 12$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	8	↘	-8	↗	$+\infty$

Do đó phương trình $4x^3 - 12x = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-8 < m < 8$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán ($m \in \{-7; -6; \ldots; 6; 7\}$).

Chọn đáp án B □

> **PHÂN TÍCH:**
>
> **1. Dạng toán:** Bài toán về tìm điều kiện của tham số để hàm số có n điểm cực trị.
>
> **2. Mức độ:** Vận dụng .
>
> **3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị và sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số.
>
> **4. Các dạng toán cần ôn tập :** - Tìm điều kiện của tham số m để hàm số có n điểm cực trị- Bài toán về sự tương giao của hai đồ thị.

CÂU 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10; +\infty)$ để hàm số
$y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^3 + (a+2)x + 9 - a^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a + 2$.

Để $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$, ta xét các trường hợp sau:

- TH1. $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \max\limits_{(0;1)}(-3x^2 - 2) \\ 9 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ -3 \leq a \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-2; 3].$

  Suy ra $a \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \rightarrow 6$ giá trị.

- TH2. $\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \min\limits_{(0;1)}(-3x^2 - 2) \\ 9 - a^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -5 \\ \left[\begin{array}{l} a \geq 3 \\ a \leq -3 \end{array}\right. \end{cases}$

  $\Leftrightarrow a \leq -5.$

  Suy ra $a \in \{-9; -8; -7; -6; -5\} \rightarrow 5$ giá trị.

Vậy có 11 giá trị a thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Chọn đáp án B □

> **PHÂN TÍCH:**
>
> **1. Dạng toán:** Bài toán về tìm điều kiện của tham số để hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối đơn điệu trên khoảng $(a; b)$.
>
> **2. Mức độ:** Vận dụng cao.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính đơn điệu của hàm số và sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số.

4. Các dạng toán cần ôn tập : -Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên khoảng $(a; b)$- Boán toán về cực trị của hàm số- Bài toán tìm GTLN-GTNN của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 4- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 6

Tìm khoảng đơn điệu của hàm số dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị

1. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
2. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

1. Cho bảng biến thiên:
   - Trong khoảng $(a; b)$ nếu mũi tên đi lên thì hàm số đồng biến trên $(a; b)$;
   - Trong khoảng $(a; b)$ nếu mũi tên đi xuống thì hàm số nghịch biến trên $(a; b)$.

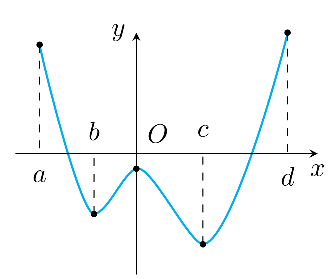
x	$-\infty$		a		b		c		d		e		f		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	n	$\searrow$	p	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	q	$\nearrow$	r	$\searrow$	$-\infty$

   Khi đó:
   - Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; a)$ $(c; d)$ và $(d; f)$.
   - Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; c)$ và $(f; +\infty)$.

2. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$:
   - Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị đi lên từ trái sang phải thì hàm số đồng biến.
   - Trên khoảng $(a; b)$ mà đồ thị đi xuống từ trái sang phải thì hàm số nghịch biến.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khi đó:

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(b,0)$ và (c,d).
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng (a,b) và $(0,c)$.



Dạng 7 Xét sự đồng biến , nghịch biến của hàm số cho bởi công thức

- Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.
- Tính y'. Tìm các điểm thuộc $\mathscr{D}$ mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathscr{K}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathscr{K}$.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc $\mathscr{K}$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathscr{K}$.

Dạng 8

Tìm tham số m để hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên $\mathscr{K}$.

1. Hàm số đơn điệu trên $\mathscr{K}$.(Thường giải theo hướng cô lập m)

   - Tập xác định $\mathscr{D} = ?$.
   - Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
   - Hs $y = f(x; m)$ ĐB trên $\mathscr{K} \Leftrightarrow y' \geq 0$, $\forall x \in \mathscr{K}$.
   - Hs $y = f(x; m)$ NB trên $\mathscr{K} \Leftrightarrow y' \leq 0$, $\forall x \in \mathscr{K}$.

   Chú ý:

   - $m \geq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{K} g(x)$.
   - $m \leq g(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{K} g(x)$.

2. Giải nhanh **hàm số bậc ba** đơn điệu trên $\mathbb{R}$: $b^2 - 3ac \leq 0$ kèm dấu của hệ số a.

   - Đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
   - Nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

3. Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ đơn điệu trên khoảng có độ dài đúng bằng l.

   - Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2)$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$.
   - Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài đúng bằng $l \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = l \Leftrightarrow \sqrt{S^2 - 4P} = l$.

Dạng 9

Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số giải PT-HPT-BPT

- Chuyển phương trình về dạng: $f(u) = f(v) \quad (1)$.
- Xét hàm số $y = f(t)$, dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu.

- Khi đó, phương trình (1) $\Leftrightarrow u = v$.(Thông thương ta thường rút y theo x)
- Giải phương trình $u = v$ tìm nghiệm.(Hay giải các bài toán quên thuộc mà ta đã biết: Bài toán về sự tương giao)
- Kết luận.

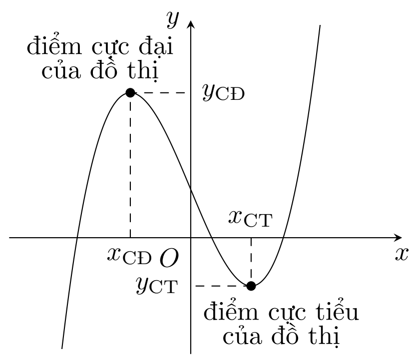
Chú ý các dạng sau :

1. *Dạng* $\boxed{x^3 - b = a \cdot \sqrt[3]{ax+b}}$ *(1).*
   $(1) \Leftrightarrow x^3 + ax = ax + b + a \cdot \sqrt[3]{ax+b}$.
   Đặt $u = x \to x^3 + ax = u^3 + au$ *và* $v = \sqrt[3]{ax+b} \to ax + b + a \cdot \sqrt[3]{ax+b} = v^3 + av$.
   Xét hàm đặc trưng sau: $f(t) = t^3 + at$.
2. *Dạng* $\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = n\sqrt[3]{ex+f}}$ *(2).*
   Phương trình được viết lại như sau : $(2) \Leftrightarrow m(px+u)^3 + n(px+u) = m(ex+f) + n\sqrt[3]{ex+f}$.
   Dùng phương pháp đồng nhất xác định các hệ số. Xét hàm đặc trưng sau $f(t) = mt^3 + nt$.
3. *Dạng* $\boxed{ax^2 + bx + c = \sqrt{ex+d}}$ *(3).*
   Phương trình được viết lại như sau : $(3) \Leftrightarrow m(px+u)^2 + n(px+u) = m(ex+d) + n\sqrt{ex+d}$.
   Dùng phương pháp đồng nhất xác định các hệ số. Xét hàm đặc trưng : $f(t) = mt^2 + nt$.

Dạng 10 *Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên*

Xác định các yếu tố liên quan đến cực trị ở mức độ nhận biết và thông hiểu, dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị.

- Loại 1: Đối với bài toán cho trước bảng biến thiên, ta cần quan sát kỹ các yếu tố sau đây:
  - Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số. Từ đó, ta có giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CĐ}} = f(x_0)$.
  - Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số. Từ đó, ta có giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{\text{CT}} = f(x_0)$.
  - Số điểm cực trị của hàm số bằng số nghiệm đơn của phương trình $f'(x) = 0$.
  - Và các em cũng chú ý rằng: hàm số $f(x)$ vẫn có thể đạt cực trị tại các điểm mà $f'(x)$ không xác định nhưng điểm đó phải thuộc tập xác định của hàm số.
- Loại 2: Đối với bài toán cho trước đồ thị, ta cần quan sát kỹ các yếu tố sau:



Dạng 11

Tìm cực trị của hàm số $\boldsymbol{y = f(x)}$ theo quy tắc

Quy tắc I:

- Tìm $f'(x)$.
- Tìm các điểm $x_i\,(i = 1{,}2,\ldots,n)$ mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc tại đó hàm số f liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Lập bảng biến thiên và kết luận về cực trị.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$

Quy tắc II:

- Tính $f'(x)$.
- Giải phương trình $f'(x) = 0$ và tìm các nghiệm $x_i(i = 1{,}2,\ldots,n)$.
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)\,(i = 1{,}2,\ldots,n)$
  - $f''(x_i) < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại x_i.
  - $f''(x_i) > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại x_i.

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$y_{\text{CĐ}}$	$\searrow$

Dạng 12

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $\boldsymbol{y = f(x)}$ trên tập $\boldsymbol{K}$ (Dùng cho cả khoảng và đoạn)

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên K.
- Từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp giải:(Chỉ dùng cho đoạn $[a;b]$**)**

B1:
- Nhận xét hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

B2: Tính $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_n)$, $f(b)$.

B3: Khi đó

- $\max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\limits_{[a;b]}\{f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(b)\}$.
- $\min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\limits_{[a;b]}\{f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(b)\}$.

Dạng 13

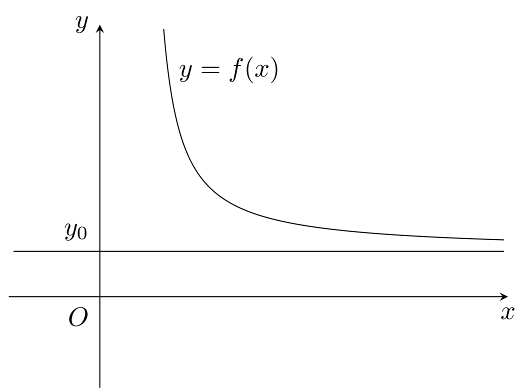
Ứng dụng GTLN-GTNN trong bài toán giải PT,HPT,BPT Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathscr{D}$.

1. Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x) \leq m \leq \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.
2. Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.
3. Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.
4. Bất phương trình $f(x) \geq m$ có nghiệm $x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m \leq \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.
5. Bất phương trình $f(x) \leq m$ có nghiệm $x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow m \geq \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.

Dạng 14 *Tiệm cận của đồ thị hàm số*

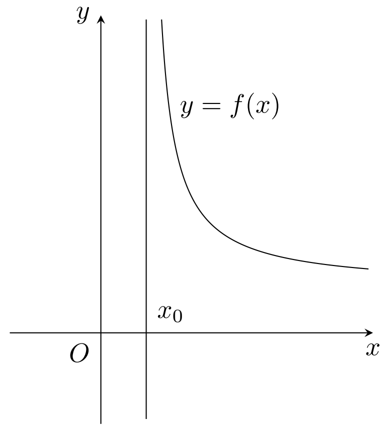
1. **Đường tiệm cận ngang:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0;\ \lim_{x\to-\infty} = y_0.$$



2. **Đường tiệm cận đứng:** Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$



3. **Hướng giải:**

B1. Tìm tập xác định của hàm số.

B2. Tính giới hạn của hàm số tại vô cực để tìm tiệm cận ngang.

B3. Tính giới hạn của hàm số tại các điểm hàm số không xác định để tìm tiệm cận đứng.

Sử dụng định nghĩa đường tiệm cận đồ thị hàm số. Cho hàm $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} y = \pm\infty$ thì $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = y_0$ thì $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- *Tiệm cận đứng là nghiệm* ***không suy biến*** *của mẫu.*
- *Tiệm cận ngang bằng hệ số bậc tử cao nhất chia hệ số bậc mẫu cao nhất.(Bậc tử không lớn hơn bậc mẫu).*
- *Nếu* $\lim\limits_{x \to -\infty} y = a$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = b$ *thì* $y = a, y = b$ *là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.*

Nếu $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *là hàm phân thức hữu tỉ.*

- *Nếu* x_0 *thỏa mãn* $\begin{cases} Q(x_0) = 0 \\ P(x_0) \neq 0 \end{cases}$ *thì đồ thị có tiệm cận đứng là* $x = x_0$.
- *Nếu bậc của* $P(x) \leq$ *bậc của* $Q(x)$ *thì đồ thị có tiệm cận ngang.*
- *Đồ thị hàm số* $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *có TCĐ :* $x = -\dfrac{d}{c}$ *và TCN :* $y = \dfrac{a}{c}$.

Dạng 15 — *Tìm đường tiệm cận dựa vào bảng biến thiên và đồ thị*

Phương pháp giải:

Dựa vào định nghĩa tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, đồng thời dựa vào đồ thị hay bảng biến thiên suy ra đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

- Tiệm cận ngang : Quan sát BBT hay ĐTHS khi x tiến tới $\pm\infty$ thì $f(x)$ tiến tới một hằng số.
- Tiệm cận đứng : Quan sát BBT hay ĐTHS khi x tiến tới số mà hàm $f(x)$ không xác định thì $f(x)$ tiến tới $\pm\infty$.

Dạng 16 — *Tìm điểm trên đồ thị hàm số*

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (G). Khi đó : $M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

Dạng 17 — *Nhận dạng đồ thị hay BBT của hàm số*

Để nhận dạng đồ thì hàm số ta làm như sau:

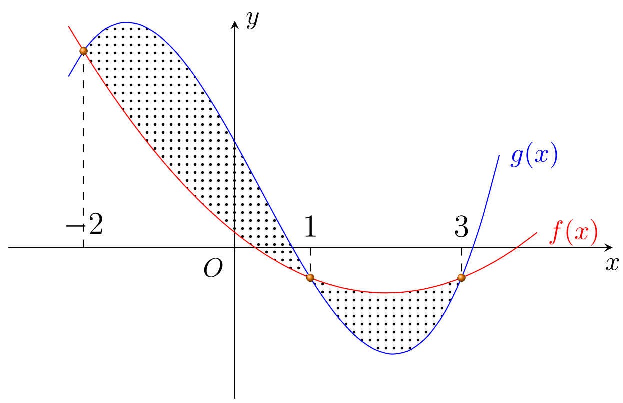
- Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra hàm số bậc 3, bậc 4 hay phân thức . Nếu hàm số bậc 3 , bậc 4 dấu hệ số a.
- Giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ.
- Cực trị của hàm số (hay TCĐ-TCN).

1. Nhận dạng đối với đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$.
   - Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra dấu của hệ số a.
     Ta thấy $\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow \text{ nhánh phải của đồ thị đi lên} \\ a < 0 \Leftrightarrow \text{ nhánh phải của đồ thị đi xuống} \end{cases}$.
   - Giao điểm của đồ thị và trục tung: $x = 0$ suy ra $y = d$.
   - Cực trị và điểm uốn
     - $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$
     - Xét dấu b dùng $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a}$ suy ra dấu b.(Hoặc dùng hoành độ điểm uốn của ĐTHS)
     - Xét dấu c dùng $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a}$ suy ra dấu c.
   - Tìm điểm thuộc đồ thị.
2. Nhận dạng đối với đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$.
   - Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra dấu của hệ số a.
     Ta thấy $\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow \text{ nhánh phải của đồ thị đi lên} \\ a < 0 \Leftrightarrow \text{ nhánh phải của đồ thị đi xuống} \end{cases}$.
   - Giao điểm của đồ thị và trục tung :$x = 0$ suy ra $y = c$
   - Nếu $ab < 0$ đồ thị có 3 cực trị và $ab \geq 0$ đồ thị có một cực trị.
   - Tìm điểm thuộc đồ thị.
3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

- Tìm tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = -\dfrac{a}{c}$.
- $ad - bc > 0$ hàm số đồng biến, $ad - bc < 0$ hàm số nghịch biến.
- Tìm điểm thuộc đồ thị.
- Giao điểm của đồ thị và trục hoành là $\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$, giao điểm của đồ thị và trục tung là $\left(0; \dfrac{b}{d}\right)$ với $d \neq 0$.

Dạng 18 Sự tương giao của hai đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2).
Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x) \quad (1)$. Khi đó



1. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng số nghiệm của phương trình (1).
2. Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm .
3. Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$.
4. Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).
5. Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C). Điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

– Bảng đạo hàm các hàm số cơ bản

Hàm x	Hàm hợp
1. $c' = 0$ 2. $x' = 1$	
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}\,(n \in \mathbb{N}; n > 1)$	4. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u\,(n \in \mathbb{N}; n > 1)$
5. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0$	6. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u}{2\sqrt{u}}, \forall u > 0$
7. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$	8. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u}{u^2}, \forall u \neq 0$
9. $(k \cdot x)' = k$	10. $(k \cdot u)' = k \cdot u$

11. $(\cos x)' = -\sin x$	12. $(\cos u)' = -u \sin u$
13. $(\sin x)' = \cos x$	14. $(\sin u)' = u \cdot \cos u$
15. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	16. $(\tan u)' = \dfrac{u}{\cos^2 u}$
17. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	18. $(\cot u)' = -\dfrac{u}{\sin^2 u}$

Đạo hàm của hàm hợp: $y = f(u(x)) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

1. Phương trình $f(x) = m$
   - Ta có $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = m$. ($y = m$ là đường thẳng song song hoặc trùng trục hoành Ox)
   - Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = m$.
   - Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra số nghiệm phương trình $f(x) = m$.
2. Phương trình $f(x) = g(x)$
   - Ta có $f(x) = g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
   - Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
   - Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra số nghiệm phương trình $f(x) = g(x)$.

Dạng toán 1: Tìm số nghiệm thực của phương trình $f[u(x)] = b$.

Hướng giải:

B1. *Đặt $t = u(x)$ thay vào phương trình $f[u(x)] = b$ chuyển về phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(t)$ và $y = b$.*

B2. *Dựa vào đồ thị $y = f(t)$ (chính là đồ thị hàm số $y = f(x)$ cho trước bằng cách đổi vai trò x thành t) suy ra giá trị t.*

B3. *Dựa vào đồ thị hàm số $t = u(x)$ suy ra giá trị của x. Chọn đáp án.*

Dạng toán 2: Tìm tham số m để phương trình $f[u(x)] = h(m)$ có n nghiệm.

Hướng giải:

B1. *Đặt $t = u(x)$ thay vào phương trình $f[u(x)] = h(m)$ chuyển về phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(t)$ và $y = h(m)$.*

B2. *Dựa vào đồ thị $y = f(t)$ (chính là đồ thị hàm số $y = f(x)$ cho trước bằng cách đổi vai trò x thành t) suy ra giá trị t.*

B3. *Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(t)$ suy ra giá trị m cần tìm . Chọn đáp án.*

Dạng 19 — Tìm tham số để đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ cắt đường thẳng d tại n điểm thỏa mãn tính chất nào đó

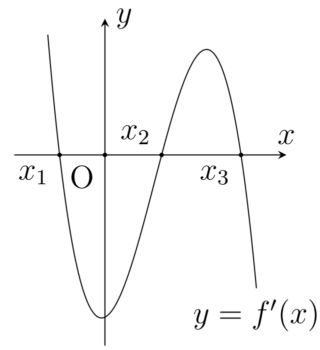
1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $g(x) = 0 \quad (*)$.
2. d cắt (C) tại n điểm $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có n nghiệm.

3. Khi đó hoành độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của phương trình $(*)$ và thông thường sử dụng định lí Vi-ét để giải quyết bài toán.

Dạng 20 Tìm hàm số $y = f(x)$ biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành

1. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ $(m,n,p,q,r \in \mathbb{R})$.

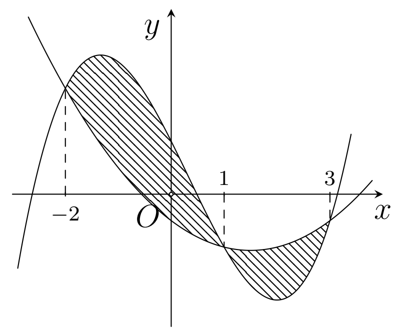
   Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm hàm số $f(x)$.

   + Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1).
   + Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là x_1, x_2, x_3.
   + Do đó $f'(x) = m(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(2)$
   + Từ (1) và (2) ta đồng nhất hệ số suy ra $(m,n,p,q,r \in \mathbb{R})$.

2. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + m$ và $g(x) = dx^2 + ex + n$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$.

   Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là x_1; x_2; x_3 (tham khảo hình vẽ). Tìm hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$.

   Phương trình hoành độ giao điểm
   $ax^3+bx^2+cx+m = dx^2+ex+n \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+m-n = 0$.
   Đặt $h(x) = ax^3 + (b - d)x^2 + (c - e)x + m - n$.
   Dựa vào đồ thị ta có $h(x) = 0$ có ba nghiệm là x_1; x_2; x_3.
   Khi đó ta có hệ với ẩn là $a, b - d, c - e$.Suy ra $h(x)$.

Dạng 21 Tính đơn điệu của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối

Chú ý : Cách vẽ đồ thị có chứa giá trị tuyệt đối.

1. *Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.*
2. *Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng 2 lần số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$ và cộng thêm 1.*

CHỦ ĐỀ 5 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 2- GT12)

CÂU 16. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\pi}$ là

A. $y'=\pi x^{\pi-1}$. **B.** $y'=x^{\pi-1}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{\pi}x^{\pi-1}$. **D.** $y'=\pi x^{\pi}$.

✍ **Lời giải.**

Đạo hàm của hàm số $y=x^{\pi}$ là

$$y'=\pi x^{\pi-1}.$$

Chọn đáp án (A) □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Đạo hàm của hàm số lũy thừa.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về hàm số lũy thừa.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa và tính đạo hàm của hàm số lũy thừa.

CÂU 17. Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=\log_3 x$ là

A. $y'=\dfrac{1}{x}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$. **C.** $y'=\dfrac{\ln 3}{x}$. **D.** $y'=-\dfrac{1}{x\ln 3}$.

✍ **Lời giải.**

Đạo hàm của hàm số $y=\log_3 x$ là

$$y'=\frac{1}{x\ln 3}.$$

Chọn đáp án (B) □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Đạo hàm của hàm số mũ-Hàm số logarit.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về hàm số mũ và hàm số logarit.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tính đạo hàm của hàm số mũ , hàm số logarit và các bài toán liên quan- Tìm tập xác định của hàm số mũ, hàm số logarit- Đồ thì hàm số mũ, logarit.

CÂU 18. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2)>0$ là

A. $(2;3)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(12;+\infty)$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Ta có $\log(x-2)>0 \Leftrightarrow x-2>1 \Leftrightarrow x>3$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bất phương trình mũ- Bpt logarit cơ bản.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về bất phương trình mũ và loarit cơ bản.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Bất phương trình mũ và logarit cơ bản.

CÂU 19. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(3a)-\ln(2a)$ bằng

A. $\ln a$. **B.** $\ln\dfrac{2}{3}$. **C.** $\ln\left(6a^2\right)$. **D.** $\ln\dfrac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\ln(3a)-\ln(2a)=\ln\left(\dfrac{3a}{2a}\right)=\ln\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn logarit.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về logarit.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tính giá trị biểu thức, rút gọn biểu thức, phân tích logarit theo logarit cho trước.

CÂU 20. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\ln^2 x+2\ln x-3=0$ bằng

A. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$. **B.** -2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $x>0$.

Ta có $\ln^2 x+2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln x=1\\ \ln x=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\mathrm{e}\\ x=\mathrm{e}^{-3}.\end{array}\right.$

Vậy tích các nghiệm là $\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-3}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Giải phương trình mũ , pt logarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

2. Mức độ: Thông hiểu

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình mũ và phương trình logarit.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Giải phương trình mũ , pt logarit bằng phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp đưa về cùng cơ số.

CÂU 21. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}<4$ là

A. $(-\infty;1]$. **B**. $(1;+\infty)$. **C**. $[1;+\infty)$. **D**. $(-\infty;1)$.

✍ **Lời giải.**

$$2^{x+1} < 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 2^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;1)$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bất phương trình mũ- Bpt logarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về Bất phương trình mũ- Bpt logarit.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Bất phương trình mũ- Bpt logarit bằng pp đưa về cùng cơ số, phương pháp đặt ẩn phụ.

CÂU 22. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \dfrac{x^2-16}{343} < \log_7 \dfrac{x^2-16}{27}$?

A. 193. **B**. 92. **C**. 186. **D**. 184.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
& \log_3 \frac{x^2-16}{343} < \log_7 \frac{x^2-16}{27} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x^2-16) - \log_3 343 < \log_7(x^2-16) - \log_7 27 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x^2-16) - \log_7(x^2-16) < \log_3 343 - \log_7 27 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x^2-16) - \log_7 3 \cdot \log_3(x^2-16) < \log_3 343 - \log_7 3 \cdot \log_3 27 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x^2-16)\left[1-\log_7 3\right] < 3\frac{1}{\log_7 3} - 3\log_7 3 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x^2-16) < 3\frac{1+\log_7 3}{\log_7 3} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x^2-16) < 3\log_3 21 \\
\Leftrightarrow\ & 0 < x^2-16 < 21^3 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} -\sqrt{9277} < x < -4 \\ 4 < x < \sqrt{9277}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy có 184 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bất phương trình mũ- Bpt logarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số.

2. Mức độ: Vận dụng

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về bất phương trình mũ, bpt logarit.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Bất phương trình mũ- Bpt logarit bằng pp đưa về cùng cơ số, phương pháp đặt ẩn phụ- BPT tích.

CÂU 23. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\leq \log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right)?$$

A. 89. **B**. 48. **C**. 90. **D**. 49.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x,y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_3\left(x^2+y^2+x\right)+\log_2\left(x^2+y^2\right)\leq \log_3 x+\log_2\left(x^2+y^2+24x\right) && (1)\\ \Leftrightarrow\ & \log_3\left(\frac{x^2+y^2+x}{x}\right)\leq \log_2\left(\frac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right) && (2)\\ \Leftrightarrow\ & \log_3\left(\frac{x^2+y^2}{x}+1\right)\leq \log_2\left(1+\frac{24x}{x^2+y^2}\right) && (3)\\ & && (4)\end{aligned}$$

Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{x}$, bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \log_3(t+1)\leq \log_2\left(1+\frac{24}{t}\right) && (5)\\ & && (6)\end{aligned}$$

Đặt $a=\log_3(t+1)\Rightarrow 3^a=t+1\Rightarrow t=3^a-1$, với $a>0$. Khi đó,bất phương trình trở thành

$$a\leq \log_2\left(1+\frac{24}{t}\right)\Leftrightarrow 2^a\leq 1+\frac{24}{3^a-1}\Leftrightarrow 3^a+2^a+23\geq 6^a\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a+23\left(\frac{1}{6}\right)^a\geq 1.$$

Xét hàm số $f(a)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^a+\left(\dfrac{1}{2}\right)^a+23\left(\dfrac{1}{6}\right)^a$, với $a>0$.

Vì $f'(a)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^a\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\right)^a\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+23\left(\dfrac{1}{6}\right)^a\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)<0$ nên $f(a)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Ta có

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a+23\left(\frac{1}{6}\right)^a\geq 1\Leftrightarrow f(a)\geq f(2)\Leftrightarrow a\leq 2.$$

Khi đó

$$\log_3(t+1)\leq 2\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x}+1\leq 9\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2\leq 16.$$

Suy ra $(x-4)^2\leq 16\Leftrightarrow 0\leq x\leq 8$. Vì $x>0, x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

- Với $x = 1$, ta có $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
- Với $x = 2$, ta có $y \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
- Với $x = 3$, ta có $y \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
- Với $x = 4$, ta có $y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
- Với $x = 5$, ta có $y \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
- Với $x = 6$, ta có $y \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
- Với $x = 7$, ta có $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
- Với $x = 8$, ta có $y = 0$.

Vậy có 48 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Phương pháp hàm số, phương pháp đánh giá về bpt mũ và logarit.

2. Mức độ: Vận dụng cao.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải về bpt mũ , logarit.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Phương pháp hàm số, phương pháp đánh giá về pt mũ ; bpt mũ , pt logarit và bpt logarit.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 5- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 22 — *Rút gọn và tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa*

Với các điều kiện của a, b, c để mỗi biểu thức có nghĩa, ta có bảng sau

Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.

Cho a, b là các số thực dương, x, y là các số thực tùy ý, ta có:

- $a^{x+y} = a^x.a^y$ và $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
- $a^x.b^x = (a.b)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ và $(a^x)^y = a^{x.y}$.
- Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

Dạng 23 — *Hàm số lũy thừa*

Hàm số luỹ thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha$, trong đó α là một hằng số tuỳ ý.

Từ định nghĩa các luỹ thừa, ta thấy:

1. Hàm số $y = x^\alpha$ với α nguyên dương, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
2. Hàm số $y = x^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Hàm số $y = x^\alpha$, với α không nguyên, có tập xác định là tập hợp các số thực dương $(0; +\infty)$.

Khi tìm tập xác định của hàm số lũy thừa cần chú ý:

1. Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$ với α nguyên dương, xác định với mọi $u(x) \in \mathbb{R}$.
2. Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ xác định với mọi $u(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α không nguyên, xác định khi $u(x) > 0$

Dạng 24 *Tính giá trị biểu thức có chứa logarit*

1. **Định nghĩa**

   Cho hai số dương a,b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là *lô-ga-rít cơ số a của b* và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. **Các tính chất** Cho $a,b > 0$ với $a \neq 1$, ta có

   (a) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.

   (b) $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$.

3. **Lôgarit của một tích** Cho 3 số dương a,b_1,b_2 với $a \neq 1$, ta có

   (a) $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.

4. **Lôgarit của một thương** Cho 3 số dương a,b_1,b_2 với $a \neq 1$, ta có

   (a) $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

   (b) *Đặc biệt:* với $a,b > 0, a \neq 1$ $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.

5. **Lôgarit của lũy thừa** Cho $a,b > 0$ và $a \neq 1$, với mọi α, ta có

   (a) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

   (b) *Đặc biệt:* $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$.

6. **Công thức đổi cơ số** Cho 3 số dương a,b,c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

   (a) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

   (b) *Đặc biệt:* $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

7. **Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên**

   (a) Lôgarit thập phân là lô-ga-rít cơ số 10. Ta viết: $\log_{10} b = \log b = \log b$.

   (b) Lôgarit tự nhiên là lô-ga-rít cơ số e. Ta viết: $\log_e b = \ln b$.

Dạng 25 — *Tính đạo hàm hàm số mũ-logarit-Hàm số lũy thừa*

- Công thức đạo hàm

Đạo hàm của hàm số thường gặp	Đạo hàm của hàm số hợp
$(C)'=0$ $(x^n)'=nx^{n-1}$ $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ $(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$ $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ $(\sin u)'=u'\cos u$ $(\cos u)'=-u'\sin u$ $(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$	$\left(\dfrac{au+b}{cu+d}\right)'=\dfrac{ad-cb}{(cu+d)^2}\cdot u'$
$\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\right)'=\dfrac{am.x^2+2an.x+bn-cm}{(mx+n)^2}$	
$\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ m & p\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ n & p\end{vmatrix}}{(mx^2+nx+p)^2}$	
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ $(a^x)'=a^x\ln a$	$(\mathrm{e}^u)'=u'\mathrm{e}^u$ $(a^u)'=u'a^u\ln a$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

- Qui tắc tính đạo hàm

Quy tắc tính đạo hàm		
$(u+v)'=u'+v'$	$(uv)'=u'v+v'u$	$(ku)'=ku'$ (k: hằng số)
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$	$(f\left[u(x)\right])'=f'\left[u(x)\right]\cdot u'(x)$

Dạng 26 Phương trình mũ-Phương trình logarit cơ bản

1. Các công thức cần dùng để giải phương trình, bất phương trình logarit

Cho các số dương a, b, c, b_1, b_2 và $a \neq 1$. Số thực α.

$\log_a 1 = 0$; $\quad \log_a a = 1$	$\log_a (a^\alpha) = \alpha$; $\quad a^{\log_a b} = b$
$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$	$\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$; $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$
$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$; $\log_a a^\alpha = \alpha$ $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1)$; $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1)$
$\log_a [f(x)]^\alpha = \alpha \log_a \lvert f(x) \rvert$ nếu α chẵn	$\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b \quad (\alpha \neq 0)$

2. Phương trình mũ - PT logarit cơ bản

1. $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ (với $0 < a \neq 1$, $b > 0$).
2. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (với $0 < a \neq 1$).
3. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ với $(a > 0,\ a \neq 1)$.
4. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$
5. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \ (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Dạng 27 Phương trình cơ bản

1. $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ (với $0 < a \neq 1$, $b > 0$).
2. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ với $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Dạng 28 Phương pháp đưa về cùng cơ số

1. **Phương trình mũ**

   - Dùng các công thức mũ và lũy thừa đưa về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.
     - Với $a > 0, a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
     - Trường hợp cơ số a có chứa ẩn thì $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ M = N. \end{array}\right.$

2. **Lô-ga-rít hóa**

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = (\log_a b)\, g(x).$$

3. **Phương trình logarit**

- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0.$
- $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ với $(a > 0,\, a \neq 1)$

Khi giải phương trình cần đặt điều kiện để phương trình có nghĩa. Sau khi giải xong cần so sánh nghiệm (tập nghiệm) với điều kiện nhận nghiệm (tập nghiệm) thích hợp.

Dạng 29 Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Loại 1: $P\left(a^{f(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)},\ t > 0 \\ P(t) = 0. \end{cases}$

   $\alpha \cdot a^{2\cdot f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \lambda = 0$. Đặt $t = a^{f(x)},\ t > 0 : \alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + \lambda = 0$

2. Loại 2: $\alpha \cdot a^{2\cdot f(x)} + \beta \cdot (a \cdot b)^{f(x)} + \lambda \cdot b^{2\cdot f(x)} = 0.$

   Phương pháp: Chia hai vế cho $b^{2\cdot f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$ (chia cơ số lớn hoặc nhỏ nhất).

3. Loại 3: $a^{f(x)} + b^{f(x)} = c$ với $ab = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$.

4. Loại 4: $\alpha \cdot a^{f(x)} + \left[\begin{array}{l} a^{f(x)} \cdot a^{g(x)} \\ \dfrac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} \end{array}\right. + \beta \cdot a^{g(x)} + b = 0 \xrightarrow{PP} \begin{cases} u = a^{f(x)} \\ v = a^{g(x)}. \end{cases}$

   Một số trường hợp ta đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Nghĩa là sau khi đặt ẩn phụ t vẫn còn x. Ta giải phương trình theo t với x được xem như là hằng số.

Dạng 30 Phương pháp logarit hóa-mũ hóa

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = (\log_a b)\, g(x).$

Dạng 31 Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình mũ, logarit.

1 Định lý:

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên $(a; b)$ thì

- $\forall u, v \in (a; b) : f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$
- Phương trình $f(x) = k$ (k là hằng số) có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

2 Hướng giải:

B1. Đưa phương trình đã cho về dạng $f(u) = f(v)$.

B2. Xét hàm số $y = f(t)$ trên miền D.

- Tính y' và xét dấu y'.
- Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(t)$ trên D.

B3. $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Tìm mối liên hệ giữa x, y rồi ta tiếp tục giải các bài toán đã biết cách giải.

Chú ý các dạng sau

1. *$f(x) = g(x)$ trong đó $f(x)$ đồng biến(hay NB) và $g(x)$ nghịch biến (hay ĐB).*
2. *Phương trình mũ dạng :* $a^{f(x)} - a^{g(x)} = g(x) - f(x)$.
3. *Phương trình logarit dạng :* $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = g(x) - f(x)$.
4. $\log_a\left(m + \sqrt{m + a^x}\right) = 2x \Leftrightarrow m + \sqrt{m + a^x} = a^{2x} \Leftrightarrow (m + a^x) + \sqrt{m + a^x} = a^{2x} + a^x$.
5. $a^x = \log_a(x+m) + m$. *Đặt* $\log_a(x+m) = t \Leftrightarrow x + m = a^t$. *Khi đó:* $\begin{cases} a^x = t + m \\ a^t = x + m \end{cases} \Leftrightarrow a^t + t = a^x + x$.

Dạng 32 — *Bất phương trình mũ cơ bản*

1. Xét bất phương trình dạng $a^x > b$. (dạng $a^x \geq b$ giải tương tự)
   - Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
   - Nếu $b > 0$, khi đó
     Với $a > 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.
     Với $0 < a < 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.
2. Xét bất phương trình dạng $a^x \leq b$. (dạng $a^x < b$ giải tương tự)
   - Nếu $b \leq 0$, bất phương trình vô nghiệm.
   - Nếu $b > 0$, khi đó
     Với $a > 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \log_a b$.
     Với $0 < a < 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \geq \log_a b$.
3. Với $a > 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.
4. Với $0 < a < 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

Dạng 33 — *Bất phương trình mũ - Logarit- BPT tích*

- Lập bảng xét dấu.
- Dựa vào chiều BPT chọn giá trị x thích hợp.

Dạng 34 — *Bất phương trình mũ-loagrit- Phương pháp đặt ẩn phụ- phương pháp hàm số*

1. **Dạng 1: Có một biến nguyên và rút được biến nguyên này theo biến còn lại.**
   Có một biến nguyên và rút được biến nguyên này theo biến còn lại. Đến đây, ta xét hàm để tìm miền giá trị cho biến nguyên đó.
2. **Dạng 2:Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm miền giá trị cho biến nguyên.**
   Khi phương trình rút gọn là phương trình bậc hai theo biến không nguyên. Ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm miền giá trị cho biến nguyên.
   Với cách giải sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai , ta phải thử lại nghiệm, nên có hạn chế so với phương pháp cô lập, xét hàm. Do đó, trong một số bài toán có thể cô lập, xét hàm thì ta nên chọn phương pháp này.
3. **Dạng 3:Rút biến nguyên thuộc K theo biến còn lại để tìm miền giá trị cho biến đó.**
   Cả hai biến đều nguyên, trong đó có một biến nguyên thuộc tập K cho trước, với K có thể là một khoảng, một đoạn. Khi đó ta có thể rút biến nguyên thuộc K theo biến còn lại để tìm miền giá trị cho biến đó.
4. **Dạng 4:Tìm điểm nguyên trên các đường cong đơn giản**
   Cả hai biến đều nguyên, rút được biến này theo biến kia đưa về bài toán tìm điểm nguyên trên các đường cong đơn giản.
5. **Dạng 5:Đưa phương trình về tổng các bình phương của hai biến nguyên**
6. **Dạng 6:Đưa về phương trình tích của hai biến nguyên**

Chú ý : Với câu hỏi có bao nhiêu số nguyên y để mỗi số nguyên y, có ít nhất (hay có không quá) số nguyên x thỏa điều kiện cho trước thì ta xem y là tham số và x là biến số. Từ đó tìm ra được tập tập nghiệm bpt phương trình theo y.
Từ điều kiện x phải thỏa mãn ta liệt kê ra các số nguyên x.Từ đó ta lại suy ra số lượng số nguyên y phải tìm.

CHỦ ĐỀ 6 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 3- GT12)

CÂU 24. Nếu $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_{-1}^{4} \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{-1}^{4} \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x = 2+3=5.$

Chọn đáp án (A) □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất tích phân.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất tích phân.

CÂU 25. Cho $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x) = \frac{2}{x^2}$. **B.** $F'(x) = \ln x$. **C.** $F'(x) = \frac{1}{x}$. **D.** $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x) = \left(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)' = \frac{1}{x}$.

Chọn đáp án (C) □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính nguyên hàm bằng định nghĩa - tính chất và bảng nguyên hàm.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán nguyên hàm.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

CÂU 26. Cho hàm số $f(x) = \cos x + x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + x^2 + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + x^2 + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + \frac{x^2}{2} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\cos x + x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án (D) □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính nguyên nguyên hàm bằng đ/n - tính chất và bảng nguyên hàm.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về nguyên hàm.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Tính nguyên hàm bằng đ/n - tính chất và bảng nguyên hàm , phương pháp đổi biến số, phương pháp từng phần.

CÂU 27. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) - 2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 8. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) - 2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2x\Big|_0^2 = 2 - 4 = -2.$

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất tích phân.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Tính tích phân bằng đ/n - tính chất , phương pháp đổi biến số, phương pháp từng phần.

CÂU 28. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + 2x$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{9}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Hoành độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là nghiệm của phương trình

$$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Khi đó $V = \pi\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính diện tích hình phẳng-Thể tích khối tròn xoay.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Thể tích khối tròn xoay-Diện tích hình phẳng.

CÂU 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=4$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận

x	0	2
t	0	4

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}F(t)\Big|_0^4 = \frac{1}{2}G(t)\Big|_0^4\\ &= \frac{1}{4}\left[F(t)+G(t)\right]\Big|_0^4 \quad \text{(Vì } F(x) \text{và} G(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x))\\ &= \frac{1}{4}\left[(F(4)+G(4))-(F(0)+G(0))\right]\\ &= \frac{1}{4}(4-1)=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

2. Mức độ: Vận dụng.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính tích phân.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Tính tích phân bằng đ/n - tính chất , phương pháp đổi biến số, phương pháp từng phần- Tích phân hàm ẩn.

CÂU 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)+xf'(x)=4x^3+4x+2 \Leftrightarrow (xf(x))'=4x^3+4x+2$

$\Rightarrow xf(x)=x^4+2x^2+2x+C$.

Do $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

với $x=0 \Rightarrow 0\cdot f(0)=0+C \Rightarrow C=0 \Rightarrow xf(x)=x^4+2x^2+2x$.

ờng hợp 1: Với $x = 0 \Rightarrow f(0) + 0 \cdot f'(0) = 4 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0 + 2 \Rightarrow f(0) = 2$.

ờng hợp 2: Với $x \neq 0$ chia hai vế $xf(x) = x^4 + 2x^2 + 2x$ cho x ta được $f(x) = x^3 + 2x + 2$

Vậy $f(x) = x^3 + 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $f'(x)$ là

$$x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x^3 - 3x^2 + 2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^1 \left|x^3 - 3x^2 + 2x\right| \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left|x^3 - 3x^2 + 2x\right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{1}{4} - 0 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính diện tích hình phẳng.

2. Mức độ: Vận dụng cao.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính diện tích hình phẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Diện tích hình phẳng.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 6- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 35 — *Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa, tính chất, bảng nguyên hàm*

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$xác định trên $\mathbb{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên **K** nếu

$$\boxed{F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{K}.}$$

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$
- $\displaystyle\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k \neq 0$.
- $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
• $\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x = C;$	• $\displaystyle\int (ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1);$
• $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C;$	• $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\ln\lvert ax+b\rvert + C;$
• $\displaystyle\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1);$	• $\displaystyle\int \mathrm{e}^{(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{(ax+b)} + C;$
• $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C;$	• $\displaystyle\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C,\ (a \neq 0);$
• $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C;$	• $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C,\ (a \neq 0);$
• $\displaystyle\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1);$	• $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C,\ (a \neq 0);$
• $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C;$	• $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b} + C;$
• $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C;$	• $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C,\ (a \neq 0);$
• $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C;$	• $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C;$

Dạng 36 — *Tìm nguyên hàm của hàm số thỏa điều kiện cho trước*

1. $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$
2. $\displaystyle\int f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(x) + C$

- Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$.
- Tìm hằng số C dựa vào một dữ kiện đề bài cho.

Dạng 37 Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Phương pháp giải:

Tính $\int f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int g[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x$

- Bước 1: Đặt $t = u(x)$, trong đó $u = u(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Bước 2: Lấy vi phân hai vế : $\mathrm{d}t = u'(x)\,\mathrm{d}x$.
- Bước 3: Khi đó tính : $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + C = G[u(x)] + C$.

1. $\left[\begin{array}{l} I = \int f(ax+b)^n \cdot x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = ax+b \Rightarrow \mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x. \\ I = \int f\left(\dfrac{x^n}{ax^{n+1}+1}\right)^m \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = ax^{n+1}+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = a(n+1)x^n\,\mathrm{d}x,\ \text{ với } m,n \in \mathbb{Z}. \\ I = \int f(ax^2+b)^n \cdot x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = ax^2+b \Rightarrow \mathrm{d}t = 2ax\,\mathrm{d}x. \end{array}\right.$

2. $I = \int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = f(x).$

3. $I = \int \dfrac{u'(x)}{au^2+bu+c} \cdot \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = u(x).$

4. $I = \int \sqrt[n]{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x) \Rightarrow nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x.$

5. $\left[\begin{array}{l} I = \int f(\ln x)\cdot \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x. \\ I = \int f(a+b\ln x)\cdot \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+b\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{b}{x}\,\mathrm{d}x. \end{array}\right.$

6. $\left[\begin{array}{l} I = \int f(\mathrm{e}^x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x. \\ I = \int f(a+b\mathrm{e}^x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+b\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = b\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$

7. $\left[\begin{array}{l} I = \int f(\cos x)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x. \\ I = \int f(a+b\cos x)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+b\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -b\sin x\,\mathrm{d}x. \end{array}\right.$

8. $\left[\begin{array}{l} I = \int f(\sin x)\cdot \cos x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x. \\ I = \int f(a+b\sin x)\cdot \cos x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = a+b\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = b\cos x\,\mathrm{d}x. \end{array}\right.$

9. $I = \int f(\tan x)\cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x.$

10. $I = \int f(\cot x)\cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t = \cot x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -(1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}x.$

11. $I=\int f(\sin^2 x;\cos^2 x)\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}}$ Đặt $\left[\begin{array}{l} t=\sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t=\sin 2x\,\mathrm{d}x; \\ t=\cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin 2x\,\mathrm{d}x. \end{array}\right.$

12. $I=\int f(\sin x\pm\cos x)\cdot(\sin x\mp\cos x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}}$ Đặt $t=\sin x\pm\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x\mp\sin x)\,\mathrm{d}x$.

- *Sau khi đổi biến và tính nguyên hàm xong, ta cần trả lại biến cũ ban đầu là x.*
- *Dấu hiệu để sử dụng phương pháp đổi biến số là trong hàm số tính nguyên hàm có hai đại lượng liên quan với nhau qua đạo hàm tức là $u(x)$ và $u'(x)$ cùng có mặt.*

Dạng 38 — Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Phương pháp giải:

- Bước 1 : Đặt $\begin{cases} u= ?\text{(Theo thứ tự ưu tiên sau:Logarit-Đa thức-Lũy thừa-Lượng giác-Mũ)} \\ \mathrm{d}v= ?\text{(Phần còn lại sau khi lấy u)} \end{cases}$

  $\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u= \text{(Lấy đạo hàm)} \\ v= \text{(Lấy nguyên hàm).} \end{cases}$
- Bước 2 : Áp dụng công thức tính nguyên hàm từng phần $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$. Tính $\int v\,\mathrm{d}u$

Dạng 39 — Sử dụng định nghĩa giải bài toán nguyên hàm của hàm ẩn.

Vận dụng tính chất $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C, \int f''(x)\,\mathrm{d}x=f'(x)+C,\ldots$ vào các dạng sau

- $\int (u'v+v'u)'\,\mathrm{d}x=\int (u.v)'\,\mathrm{d}x=uv+C$
- $\int \dfrac{u'}{u}\mathrm{d}x=\int (\ln|u|)'\,\mathrm{d}x=\ln|u|+C$
- $\int n\cdot u^{n-1}\cdot u'\,\mathrm{d}x=\int (u^n)'\,\mathrm{d}x=u^n+C$
- $\int \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}x=\int (\sqrt{u})'\,\mathrm{d}x=\sqrt{u}+C$
- $\int \dfrac{u'v-v'u}{v^2}\mathrm{d}x=\int \left(\dfrac{u}{v}\right)'\mathrm{d}x=\dfrac{u}{v}+C$
- $\int -\dfrac{u'}{u^2}\mathrm{d}x=\int \left(\dfrac{1}{u}\right)'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{u}+C$

Dạng 40 — Tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất tích phân

1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

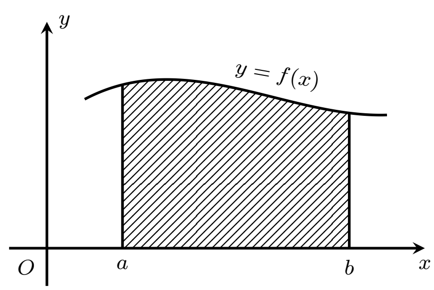
2. Tính chất tích phân xác định

Tính chất của tích phân xác định.

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $a < c < b$.
- $\displaystyle k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x$ với $(k \neq 0)$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$.
- $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

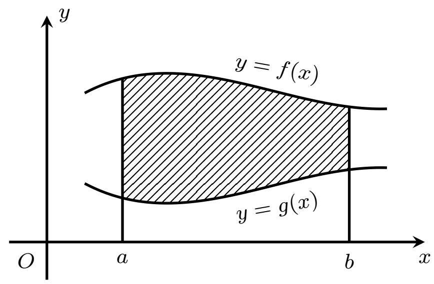
Dạng 41 *Tính diện tích hình phẳng*

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $\displaystyle S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$

là $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.



3. Để phá bỏ trị tuyệt đối ta dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
4. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi đồ thị $y = f(x)$,$y = 0$, $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox là $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

1. Chú ý khai thác giả thiết triệt để.

2. Mấu chốt là tìm ra hai cận a,b và hàm số $f(x) - g(x)$.

3. Khi đó thế vào công thức và dùng máy tính cầm tay tính kết quả cuối cùng.

CHỦ ĐỀ 7 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 4- GT12)

CÂU 31. Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

A. -3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là -3.

Chọn đáp án A □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Xác định các yếu tố cơ bản của số phức : Mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết về số phức và các phép toán số phức.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Xác định các yếu tố cơ bản của số phức : Mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp- Thực hiện các phép toán về số phức.

CÂU 32. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là

A. $(-6; 7)$. **B.** $(6; 7)$. **C.** $(7; 6)$. **D.** $(7; -6)$.

✍ **Lời giải.**

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là $(7; -6)$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Biểu diễn hình học cơ bản của số phức.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về số phức và các phép toán về số phức.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Xác định các yếu tố cơ bản của số phức : Mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp- Thực hiện các phép toán về số phức- Điểm biểu diễn số phức.

CÂU 33. Cho số phức $z = 2 + 9i$, phần thực của số phức z^2 bằng

A. -77. **B.** 4. **C.** 36. **D.** 85.

✍ **Lời giải.**

Ta có $z^2 = (2 + 9i)^2 = 4 + 36i + 81i^2 = -77 + 36i$ nên phần thực của số phức z^2 bằng -77.

Chọn đáp án A □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Các phép toán của số phức.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán của số phức.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Xác định các yếu tố cơ bản của số phức : Mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp- Thực hiện các phép toán về số phức- Điểm biểu diễn số phức- Bài toán liên quan đến phức.

CÂU 34. Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z + 2i| = 1$ là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(0; 2)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(0; -2)$. **D.** $(2; 0)$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $z = x + yi$, với $x,y \in \mathbb{R}$. Khi đó $z + 2i = x + (y + 2)i$.

Ta có $|z + 2i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(0; -2)$ bán kính $R = 1$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tập hợp điểm biểu diễn số phức.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán của số phức.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Xác định các yếu tố cơ bản của số phức : Mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp- Thực hiện các phép toán về số phức- Tập hợp điểm biểu diễn số phức- Bài toán liên quan đến phức.

CÂU 35. Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 2$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$. Ta có các trường hợp (TH) sau

TH1. $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$. Khi đó $z_1 = \overline{z_2}$, suy ra

$$2|z_1| = |z_1| + |z_2| = 2 \Rightarrow |z_1| = 1 \Rightarrow m^2 = z_1 z_2 = |z_1|^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1.$$

Kết hợp với điều kiện, $m < -\dfrac{1}{2}$, ta được $m = -1$.

TH2. $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2}$. Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm thực thỏa mãn $z_1 + z_2 = 2(m+1)$ và $z_1 z_2 = m^2$. Do đó

$$4 = (|z_1| + |z_2|)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2|z_1 z_2| = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 + 2|z_1 z_2|$$
$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2m^2 + 2m^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $m > -\dfrac{1}{2}$, ta được $m = 0$.

Vậy có 2 giá trị $m = 0$ hoặc $m = -1$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Giải pt bậc 2 trên tập C và các bài toán liên quan.

2. Mức độ: Vận dụng .

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về pt bậc 2 trên C và định lí Vi-et.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Giải pt bậc 1 , bậc 2- Bài toán liên quan đến phức có chứa z, $|z|$...

CÂU 36. Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-3-4i|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 28. **B.** $18+4\sqrt{6}$. **C.** 14. **D.** $11+4\sqrt{6}$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \left|z^2-3-4i\right|=2|z| \\
\Leftrightarrow\ & \left|z^2-(2+i)^2\right|=2|z| \\
\Leftrightarrow\ & \left((x-2)^2+(y-1)^2\right)\left((x+2)^2+(y+1)^2\right)=4\left(x^2+y^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & (t+5)^2-(4x+2y)^2=4t, \text{với } t=x^2+y^2 \\
\Leftrightarrow\ & (4x+2y)^2=t^2+6t+25 \\
\Leftrightarrow\ & 20t\geq t^2+6t+25 \,(\text{bất đẳng thức B.C.S}) \\
\Leftrightarrow\ & t^2-14t+25\leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & 7-2\sqrt{6}\leq t\leq 7+2\sqrt{6} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{6}-1\leq |z|\leq \sqrt{6}+1.
\end{aligned}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của $|z|$ là $M=1+\sqrt{6}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+y^2=7+2\sqrt{6} \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{6}+2}{\sqrt{5}} \\ y=\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{6}+2}{\sqrt{5}} \\ y=-\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{5}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Và giá trị nhỏ nhất là $m=1-\sqrt{6}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+y^2=7-2\sqrt{6} \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{6}-2}{\sqrt{5}} \\ y=\dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{6}-2}{\sqrt{5}} \\ y=-\dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{5}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $M^2+m^2=14$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Cực trị trong số phức.

2. Mức độ: Vận dụng cao.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị trong số phức.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Cực trị và các bất đẳng thức.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 7- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 42 *Xác định mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp của số phức*

1. Các kiến thức cơ bản về số phức

- Tập hợp số phức ký hiệu là $\mathbb{C}$.
- Số phức (dạng đại số) là biểu thức có dạng $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.
- z là số thực khi và chỉ khi phần ảo của z bằng 0 $(b = 0)$.
- z là số thuần ảo khi và chỉ khi phần thực của z bằng 0 $(a = 0)$.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.
- **Hai số phức bằng nhau:** Cho số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$. Khi đó,

  $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$$

2.Các phép toán về số phức

Cho số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

2.1 Phép cộng hai số phức $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

2.2 Phép trừ hai số phức $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$

2.3 Phép nhân hai số phức $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

2.4 Phép chia hai số phức Khi $z_2 \neq 0$ thì

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

2.5 Mô-đun của số phức Mô-đun của số phức $z = a + bi$ $(a,b \in \mathbb{R})$ là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (trong đó $z_2 \neq 0$),
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2.6 Số phức liên hợp Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$.

- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$,
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$,
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

3. Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân

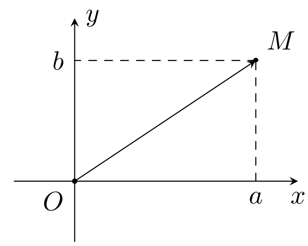
Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 1$. Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân là

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dạng 43 *Biểu diễn hình học của số phức*

Biểu diễn hình học số phức

Số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ hay bởi $\vec{u} = (a;b)$ trong mặt phẳng phức (mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy).



Dạng 44 *Thực hiện các phép toán về số phức: Cộng-trừ-nhân-chia*

Cho số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

1. **Phép cộng hai số phức:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
2. **Phép trừ hai số phức:** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
3. **Phép nhân hai số phức:** $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
4. **Phép chia hai số phức:** Khi $z_2 \neq 0$ thì

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

5. Phương trình bậc 1 trên C : $(a+bi)z = c+di \Leftrightarrow z = \dfrac{c+di}{a+bi}$

Dạng 45 Bài toán qui về phương trình, hệ phương trình nghiệm thực-PT bậc 2

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a+bi = c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}, \quad \text{với } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

- Biểu diễn số phức cần tìm $z = a+bi$ với a,$b \in \mathbb{R}$. Biến đổi thu gọn phương trình của bài toán về dạng $A+Bi = C+Di$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} A=C \\ B=D. \end{cases}$

Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$, $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2-4ac$ của phương trình. Ta thấy

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = \dfrac{-b}{2a}$.
- Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.
- Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- **Định lí Vi-et:** Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phức x_1, x_2 thì $x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

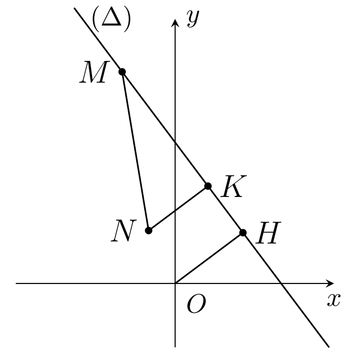
1. *Số phức $z = a+bi$ được gọi là số phức thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực $a = 0$.*
   z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo $b = 0$.
2. *Khi bài toán yêu cầu tìm các thuộc tính của số phức (phần thực, phần ảo, mô-đun hoặc số phức liên hợp) mà đề bài cho giả thiết chứa hai thành phần trong ba thành phần $z, \overline{z}, |z|$ thì ta sẽ gọi số phức $z = a+bi \Rightarrow \overline{z} = a-bi, |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ với $a,b \in \mathbb{R}$, rồi sau đó thu gọn và sử dụng kết quả hai số phức bằng nhau, giải hệ.*

Dạng 46 Min- Max của số phức

- $-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos t \le 1$ *và* $a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2+b^2} \sin(t+\alpha)$.
- *Bất đẳng thức Cô-si :* $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, *(với* $a, b \ge 0$*). Dấu = xảy ra khi* $a = b$
- *Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng 1:* $|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.
  Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$
- $a \sin t + b \cos t \le \sqrt{(a^2+b^2)\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = \sqrt{a^2+b^2}$.
  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sin t}{a} = \dfrac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$
- $a \sin t + b \cos t \ge -\sqrt{(a^2+b^2)\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = -\sqrt{a^2+b^2}$.
  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sin t}{a} = \dfrac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = -\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

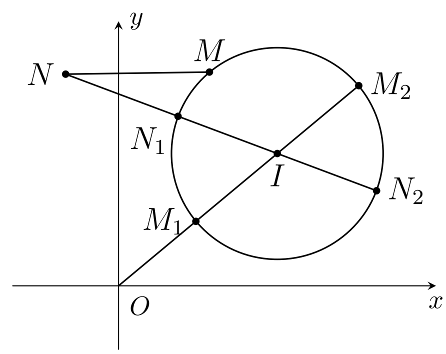
1. **Dạng 1 : Sử dụng phương pháp lượng giác hóa**
   Đối với nhóm bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn thi việc lượng giác hóa tỏ ra khá hiệu quả và nhanh chóng.
   Giả sử có được giả thiết $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{y-b}{R}\right)^2 = 1$, sẽ gợi ta đến công thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên ta đặt $\begin{cases} \dfrac{x-a}{R} = \sin t \\ \dfrac{y-b}{R} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R \sin t + a \\ y = R \cos t + b \end{cases}$ để đưa bài toán về dạng lượng giác quen thuộc. Ngoài ra, ta cần nhớ những đánh giá thường được sử dụng:phần chú ý
2. **Dạng 2 : Sử dụng bình phương vô hướng**
   Đối với một số bài toán tìm max, min việc sử dụng bình phương vô hướng để tìm điểm rơi nhằm áp dụng bất đẳng thức: $|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.
   Ta cần nhớ bình phương vô hướng : $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
3. **Dạng 3 : Sử dụng hình chiếu và tương giao**

Cho đường thẳng (Δ): $ax+by+c=0$ và điểm $M \in (\Delta)$. Điểm $N \notin (\Delta)$ thì NM nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv K$ với K là hình chiếu của N trên (Δ).



- $\min|z| = OH = \mathrm{d}_{[O,(\Delta)]} = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
  Khi đó $M \equiv H$ và $H = (\Delta) \cap OH$.
- $\min|z-(x_N+y_Ni)| = NK = \mathrm{d}_{N,(\Delta)} = \dfrac{|ax_N+by_N+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
  Khi đó $M \equiv K$ và $K = (\Delta) \cap NK$.

Cho tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y \in \mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(a;b)$ và bán kính R. Gọi N là điểm biểu diễn số phức z'. Khi đó



- $\begin{cases} \min|z| = \min OM = OM_1 = |OI-R| \\ \max|z| = \max OM = OM_2 = OI+R. \end{cases}$
  Khi đó $OI \cap (\mathscr{C}) = \{M_1; M_2\}$.
- $\begin{cases} \min|z-z'| = \min MN = NN_1 = |NI-R| \\ \max|z-z'| = \max MN = NN_2 = NI+R. \end{cases}$
  Khi đó $NI \cap (\mathscr{C}) = \{N_1; N_2\}$.

4. **Dạng 4 : Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối**
   $||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

Dạng 47 ***Sử dụng biến đổi đại số kết hợp với các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá***

1. Đẳng Thức Mô Đun

- $|mz_1+nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn\left(z_1.\overline{z}_2 + \overline{z}_1.z_2\right)$với $m,n \in \mathbb{R}$ và $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z+z_1|^2 + |z+z_2|^2 = 2\left[\left|z+\dfrac{z_1+z_2}{2}\right|^2 + \left|\dfrac{z_1-z_2}{2}\right|^2\right]$với $z,z_1,z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z_1+z_2| = \left|\dfrac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + \dfrac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right|$ với z_1,z_2là các số phức khác 0.

2. Bất đẳng thức Mô-Đun

- $|z+z_1|+|z+z_2| \geq |z_1-z_2|$.

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}z+z_1=k\left[(z+z_1)+(-z-z_2)\right]\\ z+z_2=k\left[(z+z_2)+(-z-z_1)\right]\end{array}\right.(k\in\mathbb{R};\ k\in[0;1])\\ z+z_1=k\left(z+z_2\right);\ (z+z_2\neq 0;k\in\mathbb{R};k\geq 0)\end{array}\right.$.

- $||z+z_1|-|z+z_2|| \leq |z_1-z_2|$.

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}z+z_1=k\left[(z+z_1)+(-z-z_2)\right]\\ z+z_2=k\left[(-z-z_1)+z+z_2\right]\end{array}\right.(k\in\mathbb{R},k\in(-\infty;\ 0]\cup[1;\ +\infty))\\ z+z_1=k\left(z+z_2\right);\ (z+z_2\neq 0;k\in\mathbb{R},k\leq 0)\end{array}\right.$.

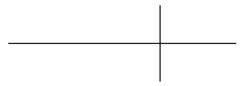
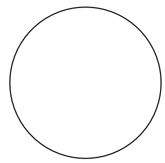
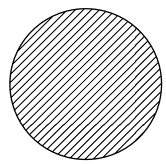
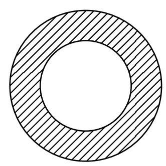
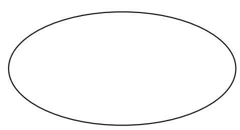
3.Kiến thức cần chuẩn bị:

1. Đẳng thức Môđun:
   Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R},i^2=-1)$ môđun của z ký hiệu là $|z|$ và $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
   - $|z|^2=z\cdot\overline{z};\ |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\ ;\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|};|z|=|\overline{z}|;|z^n|=|z|^n(n\in\mathbb{N}^*)$.
   - $|mz_1+nz_2|^2=m^2|z_1|^2+n^2|z_2|^2+mn\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$ với $m,n\in\mathbb{R}$ và $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.
   - $|z+z_1|^2+|z+z_2|^2=2\left[\left|z+\dfrac{z_1+z_2}{2}\right|^2+\left|\dfrac{z_1-z_2}{2}\right|^2\right]$ với $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$.
   - $|z_1+z_2|=\left|\dfrac{|z_2|}{|z_1|}z_1+\dfrac{|z_1|}{|z_2|}z_2\right|$ với z_1,z_2 là các số phức khác 0 .
2. Bất đẳng thức thường dùng
   - Bất đẳng thức tam giác ở dạng môđun $|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}z_2=0\\ z_2\neq 0,\exists k\in\mathbb{R},k\geq 0:z_1=kz_2\end{array}\right.$
   - $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}z_2=0\\ z_2\neq 0,\exists k\in\mathbb{R},k\leq 0:z_1=kz_2\end{array}\right.$
   - Bất đẳng thức Bunhiacopxky $(ax+by)^2\leq\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$ dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}$.

Dạng 48 Sử dụng biểu diễn hình học của số phức đưa về các bài toán cực trị quen thuộc

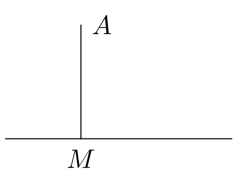
1. Các quỹ tích cơ bản

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ và $i^2=-1$.

Mối liên hệ giữa x và y	**Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$**
☑ $Ax+By+C=0$.	Là đường thẳng $d\colon Ax+By+C=0$.
☑ $MA=MB$. Dạng số phức $\lvert z-a-bi\rvert=\lvert z-c-di\rvert$. 	Là đường trung trực của đoạn AB.
☑ $\left[\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0.\end{array}\right.$ Dạng số phức $\lvert z-a-bi\rvert=R$. 	Là đường tròn (C) có tâm $I(0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
☑ $\left[\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\\ x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0.\end{array}\right.$ Dạng số phức $\lvert z-a-bi\rvert\le R$. 	Là hình tròn (C) có tâm $I(0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ (đường tròn kể cả bên trong).
☑ $R_1^2\le(x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2$. Dạng số phức $R_1\le\lvert z-a-bi\rvert\le R_2$. 	Là những điểm thuộc hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt là R_1 và R_2.
☑ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases}MF_1+MF_2=2a\\ F_1F_2=2c<2a.\end{cases}$ Dạng số phức $\lvert z-c\rvert+\lvert z+c\rvert=2a$. 	Là một elip có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự là $2c$ với $a^2=b^2+c^2$, $(0<b<a)$.

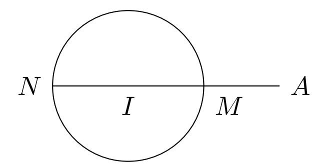
2. Một số kết quả quan trọng cần nhớ:

Gọi điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$, $z_0=x_0+y_0i$ lần lượt là M, A.
Khi đó $|z-z_0|=|(x-x_0)+(y-y_0)i|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=MA$.
Một số bất đẳng thức hình học thường dùng:

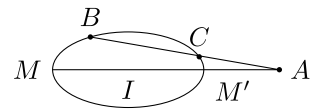


1. Cho M di động trên đường thẳng Δ, A là điểm cố định.
   $MA\ge d(A;\Delta)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AM\perp\Delta$.

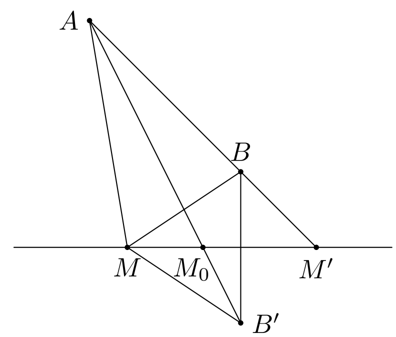
2. Cho M di động trên đường tròn $(I; R)$, A là điểm cố định.
   $MA \leq AI + R$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow\uparrow \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow M \equiv N$.
   $MA \geq |AI - R|$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IM}$.



3. Cho M di động trên Elip (E) có trục lớn Δ, độ dài $2a$, tâm I, A là điểm cố định trên trục lớn. $MA \leq AI + a$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow\uparrow \overrightarrow{IM}$.
   $MA \geq |AI - a|$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IM}$.



4. Cho M di động trên đường thẳng $\Delta . A, B$ là hai điểm cố định khác phía với Δ.
   $MA + MB \geq AB$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB \cap \Delta$.
5. Cho M di động trên đường thẳng Δ và A, B là hai điểm cố định cùng phía với Δ.
   $MA + MB \geq AB'$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB' \cap \Delta$ trong đó B' đối xứng với B qua Δ.



6. Cho M di động trên đường thẳng Δ $. A, B$ là hai điểm cố định cùng phía với Δ.
   $|MA - MB| \leq AB$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB \cap \Delta$
7. Cho M di động trên đường thẳng Δ và A, B là hai điểm cố định khác phía với Δ.
   $|MA - MB| \leq AB'$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB' \cap \Delta$ trong đó B' đối xứng với B qua Δ.

CHỦ ĐỀ 8 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 1- HH12)

CÂU 37. Cho khối lập phương có cạnh bằng 2. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Thể tích khối lập phương là $V = 2^3 = 8$.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính thể tích các khối chóp- khối lăng trụ.

2. Mức độ: Nhận biết.

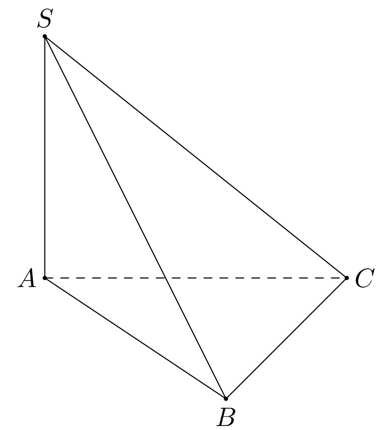
3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính thể tích khối đa diện.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tính thể tích khối chóp- Khối lăng trụ.

CÂU 38.

Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2$, SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.



Lời giải.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Thể tích hình chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 2$.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính thể tích các khối chóp- khối lăng trụ.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính thể tích khối đa diện.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tính thể tích khối chóp- Khối lăng trụ.

CÂU 39. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$, thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

Lời giải.

Dựng $AH \perp A'B$ tại H.

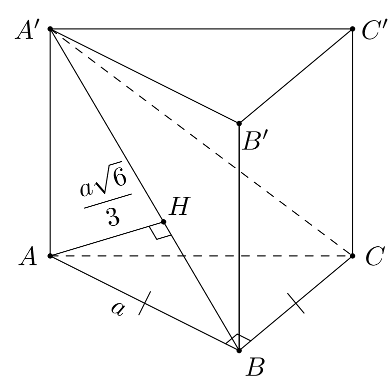
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$,

mà $AH \subset (AA'B'B)$ nên $BC \perp AH$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

$\Rightarrow AH = \mathrm{d}(A,(A'BC)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét $\triangle AA'B$ vuông tại A, đường cao AH, ta có



$$\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}.$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3.$$

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính thể tích các khối chóp- khối lăng trụ.

2. Mức độ: Vận dụng.

3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính thể tích khối đa diện.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tính thể tích khối chóp- Khối lăng trụ liên quan đến góc và khoảng cách- Tỉ số thể tích.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 8- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 49 *Tính thể tích khối chóp- khối lăng trụ*

1. Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$ với B: diện tích đáy, h: chiều cao.

2. Thể tích khối lăng trụ: $V = Bh$ với B: diện tích đáy, h: chiều cao.

3. Thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là $V = abc$.

4. Thể tích của khối lập phương có cạnh bằng a là $V = a^3$.

Dạng 50 *Thể tích khối chóp-khối lăng trụ liên quan đến khoảng cách, góc.*

1. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.
2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = S \cdot h$, trong đó S là diện tích đáy, h là chiều cao.
3. Tính diện tích đáy S ta cần nhớ các công thức tính diện tích của tam giác và tứ giác thường gặp.
4. Tính chiều cao h ta phải xác định được hình chiếu của đỉnh hình chóp (hay lăng trụ) trên mặt phẳng đáy.

3 Góc giữa hai mặt phẳng

là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Tính chất: Từ định nghĩa trên ta có

- Góc giữa 2 mặt phẳng song song bằng 0°.
- Góc giữa 2 mặt phẳng trùng nhau bằng 0°.

4 Phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng

Để có thể xác định chính xác góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) ta có thể áp dụng một trong những cách sau

- **Cách 1:** Dựng hai đường thẳng a và b vuông góc lần lượt với hai mặt phẳng (P), (Q). Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b.
- **Cách 2:** Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q). Tiếp theo, ta tìm một mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P), (Q) và cắt hai mặt phẳng đó tại các giao tuyến a, b. Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là góc giữa a và b.

Phương pháp:

- Xác định đường cao của hình chóp hoặc lăng trụ.
- Xác định các loại góc (nếu có).
- Tính diện tích đáy và độ dài đường cao.
- Áp dụng công thức thể tích khối chóp hay khối lăng trụ.

Chú ý các dạng sau:

- Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy.
- Khối chóp có một mặt phẳng chứa đỉnh vuông góc với đáy.
- Khối chóp có hai mặt phẳng chứa đỉnh vuông góc với đáy.
- Khối chóp đều.
- Khối chóp có hình chiếu của đỉnh trùng với một điểm đặc biệt nằm trong mặt đáy.
- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.
- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.
- Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.

(CHƯƠNG 2- HH12)

CÂU 40. Cho hình nón có đường kính đáy $2r$ và độ dài đường sinh ℓ. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $2\pi r\ell$. **B.** $\frac{2}{3}\pi r\ell^2$. **C.** $\pi r\ell$. **D.** $\frac{1}{3}\pi r^2\ell$.

✍ **Lời giải.**

Công thức tính diện tích xung quanh hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r\ell$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Câu hỏi lý thuyết về hình nón, khối nón, hình trụ, khối trụ.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về hình nón, khối nón, hình trụ và khối trụ.

4. Các dạng toán cần ôn tập: Học kĩ các công thức về hình nón, khối nón, hình trụ và khối trụ.

CÂU 41. Cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến (P). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\mathrm{d} < R$. **B.** $\mathrm{d} > R$. **C.** $\mathrm{d} = R$. **D.** $\mathrm{d} = 0$.

✍ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi $\mathrm{d} = R$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bài toán về mặt cầu: Công thức tính diện tích, thể tích, VTTĐ giữa mặt cầu với mp, đt.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về mặt cầu.

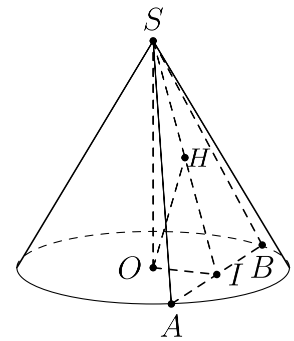
4. Các dạng toán cần ôn tập : Bài toán về mặt cầu: Công thức tính diện tích mặt cầu , thể tích khối cầu, VTTĐ giữa mặt cầu với mp, đt.

CÂU 42. Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\frac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5}{24}$.

✍ **Lời giải.**

Gọi O là tâm của đường tròn đáy và R là bán kính của đường tròn đáy $(R > 0)$.



Ta có thể tích của khối nón bằng

$$\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \pi R^2 = \frac{800\pi}{3} \Leftrightarrow R = 10.$$

Kẻ $OI \perp AB$ tại I, suy ra I là trung điểm của AB và

$$OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Kẻ $OH \perp SI$ tại H. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOI).$$

Từ đó suy ra $AB \perp OH$ (do $OH \subset (SOI)$). Ta lại có

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (SAB).$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SAB) bằng OH.

Xét tam giác SOI vuông tại O và $SO = OI = 8$ nên tam giác SOI vuông cân tại O, suy ra

$$SI = 8\sqrt{2}; \quad OH = \frac{SI}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Vậy khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính thể tích của khối nón, khối trụ liên quan đến thiết diện của khối nón hay khối trụ.

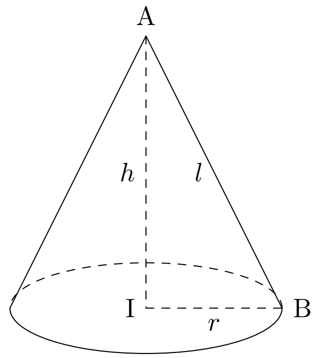
2. Mức độ: Vận dụng.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán liên quan đến thiết diện của khối nón, khối trụ.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tính thể tích của khối nón, khối trụ liên quan đến thiết diện của khối nón hay khối trụ-Tính diện tích xung quanh , diện tích toàn phần của hình nón, hình trụ liên quan đến thiết diện của hình nón hay hình trụ Tính khoảng cách.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 9- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Câu hỏi lý thuyết về Hình nón -khối nón-Hình trụ-khối trụ



- Chiều cao: h.
- Độ dài đường sinh: l.
- Bán kính đường tròn đáy: r.
- Góc ở đỉnh: 2α $(0° < \alpha < 90°)$.

1. **Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón**

$$\boxed{l^2 = h^2 + R^2}.$$

2. **Hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác** Cho $\triangle ABI$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông AI thì đường gấp khúc ABI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).
   - Đường thẳng AI được gọi là trục, A là đỉnh, AI được gọi là đường cao và AB được gọi là đường sinh của hình nón.
   - Hình tròn tâm I, bán kính $r = IB$ là đáy của hình nón.

3. **Công thức diện tích của hình nón và thể tích của khối nón**
   - Diện tích xung quanh: $\boxed{Sxq = \pi \cdot r \cdot l}$.
   - Diện tích toàn phần hình nón: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_d}$.
   - Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{S_d = \pi \cdot r^2}$.
   - Thể tích khối nón:
   $$\boxed{V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}.S_d.h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}.$$

4. **Thiết diện của hình nón** (N) **khi cắt bởi mặt phẳng** (P)
   - (P) đi qua đỉnh của hình nón (N):
     - Nếu (P) tiếp xúc với mặt nón (N) theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi (P) là mặt phẳng tiết diện của mặt nón.
     - Nếu (P) cắt mặt nón (N) theo hai đường sinh $\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân.

- Đặc biệt: Nếu (P) đi qua trục của mặt nón $(N) \Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân có cạnh bên l và cạnh đáy $2r$.

- (P) không đi qua đỉnh của hình nón (N):
  - Nếu (P) vuông góc với trục hoành hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường tròn.
  - Nếu (P) song song với hai nhánh của một hypebol.
  - Nếu (P) song song với một đường sinh hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường parabol.

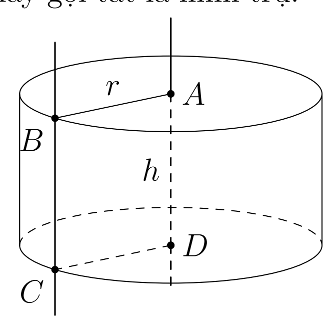
5. **Công thức tính độ dài cung tròn có số đo $a°$, bán kính R**

$$\boxed{l = \frac{\pi R a}{180}}.$$

6. **Tính chất $\triangle ABC$ đều cạnh a**
   - Độ dài đường cao, đường trung tuyến$= \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
   - Diện tích tam giác $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

7. Hình trụ tròn xoay

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AD thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình, hinh đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.



Đường thẳng AD được gọi là trục.
Đoạn thẳng BC được gọi là đường sinh.
Độ dài đoạn thẳng $AD = DC = h$ được gọi là chiều cao của hinh trụ. Hình tròn tâm A, bán kinh $r = AB$ và hình tròn tâm D, bán kinh $r = DC$ được gọi là hai đáy của hình trụ
Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

8. Công thức tính diện tích của hình trụ và thể tích của khối trụ:

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r.

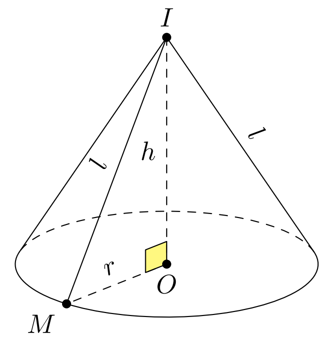
- Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$.
- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{m} = S_{xq} + 2 \cdot S_{\text{đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- Thể tích khối trụ: $V = B \cdot h = \pi r^2 h$.

Dạng 52 Tính thể tích của khối nón, khối trụ liên quan đến thiết diện của nón hay trụ

1. Khối nón:

Được tạo thành khi xoay tam giác vuông quanh cạnh góc vuông.

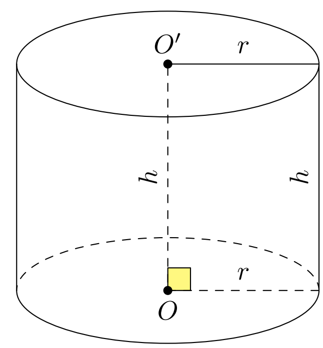
1. Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq nón}} = \pi r l$.
2. Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2$.
3. Thể tích khối nón: $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.
4. Mối liên hệ: $l^2 = h^2 + r^2$.



2. Khối trụ:

Được tạo thành khi quay hình chữ nhật xung quanh cạnh.

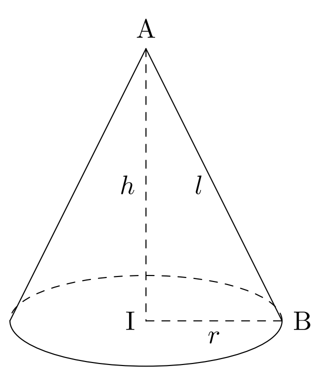
1. Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = 2\pi r h$.
2. Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
3. Thể tích của khối trụ: $V_{\text{trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h$.



3. Khối cầu:

Diện tích và thể tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ và $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

4. Các yếu tố cơ bản của hình nón



- Chiều cao: h.
- Độ dài đường sinh: l.
- Bán kính đường tròn đáy: r.
- Góc ở đỉnh: 2α $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.

5. Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón

$$\boxed{l^2 = h^2 + R^2}.$$

6. Hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác

Cho $\triangle ABI$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông AI thì đường gấp khúc ABI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

- Đường thẳng AI được gọi là trục, A là đỉnh, AI được gọi là đường cao và AB được gọi là đường sinh của hình nón.
- Hình tròn tâm I, bán kính $r = IB$ là đáy của hình nón.

7. Công thức diện tích của hình nón và thể tích của khối nón

- Diện tích xung quanh: $\boxed{Sxq = \pi \cdot r \cdot l}$.
- Diện tích toàn phần hình nón: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_d}$.
- Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{S_d = \pi \cdot r^2}$.
- Thể tích khối nón:
$$\boxed{V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}.S_d.h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}.$$

8. Thiết diện của hình nón (N) khi cắt bởi mặt phẳng (P)

- (P) đi qua đỉnh của hình nón (N):
  - Nếu (P) tiếp xúc với mặt nón (N) theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi (P) là mặt phẳng tiết diện của mặt nón.
  - Nếu (P) cắt mặt nón (N) theo hai đường sinh $\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân.
  - Đặc biệt: Nếu (P) đi qua trục của mặt nón (N) $\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân có cạnh bên l và cạnh đáy $2r$.
- (P) không đi qua đỉnh của hình nón (N):
  - Nếu (P) vuông góc với trục hoành hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường tròn.
  - Nếu (P) song song với hai nhánh của một hypebol.
  - Nếu (P) song song với một đường sinh hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường parabol.

9. Công thức tính độ dài cung tròn có số đo $a°$, bán kính R

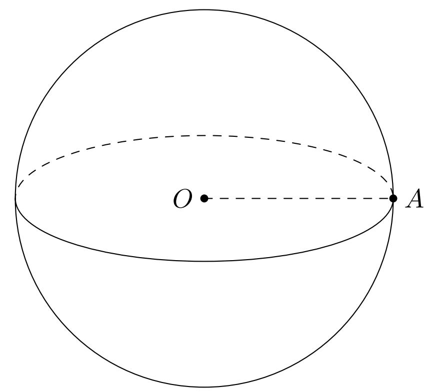
$$\boxed{l = \frac{\pi R a}{180}}.$$

10. Tính chất $\triangle ABC$ đều cạnh a

- Độ dài đường cao, đường trung tuyến $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Diện tích tam giác $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Dạng 53 Mặt cầu-Khối cầu

Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là *mặt cầu* tâm O, bán kính R, kí hiệu là $S(O; R)$.
Khi đó, $S(O; R) = \{M | OM = R\}$.



1. Vị trí tương đối của một điểm đối với một mặt cầu

Cho mặt cầu tâm O bán kính R và A là một điểm bất kì trong không gian.

- Nếu $OA = R$ thì ta nói điểm A *nằm trên* mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $OA < R$ thì ta nói điểm A *nằm trong* mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $OA > R$ thì ta nói điểm A *nằm ngoài* mặt cầu $S(O; R)$.

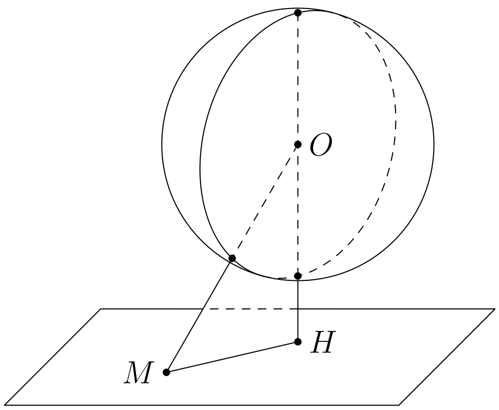
Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O; R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó gọi là *khối cầu* hoặc *hình cầu* tâm O bán kính R.

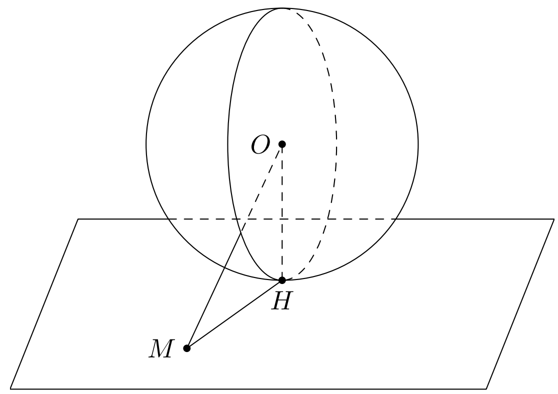
2. Vị trí tương đối của mặt phẳng đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P). Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến mặt phẳng (P). Ta có:

- Nếu $d > R$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $d = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O; R)$ có một điểm chung duy nhất. Khi đó, ta nói mặt phẳng (P) *tiếp xúc* với mặt cầu $S(O; R)$.

Điểm tiếp xúc gọi là *tiếp điểm*, (P) gọi là *mặt phẳng tiếp xúc* hay *tiếp diện* của mặt cầu.





- Nếu $d < R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo một đường tròn bán kính $R' = \sqrt{R^2 - d^2}$. Đặc biệt, khi $d = 0$ thì tâm O thuộc mặt phẳng (P), giao tuyến của (P) và $S(O;R)$ là đường tròn tâm O bán kính R. Đường tròn này gọi là *đường tròn lớn.*

Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là (P) vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi d là khoảng cách O đến đường thẳng Δ. Khi đó,

- $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$.
- $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
- $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu $S(O;R)$ tiếp xúc nhau. Do đó, điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là $d = R$.

4. Vị trí tương đối của đường thẳng đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi d là khoảng cách O đến đường thẳng Δ. Khi đó,

- $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$.
- $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
- $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu $S(O;R)$ tiếp xúc nhau. Do đó, điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là $d = R$.

5. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu bán kính R. Khi đó,

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

CHỦ ĐỀ 10 -ĐỀ THAM KHẢO TN-2023 CỦA BỘ GIÁO DỤC

(CHƯƠNG 3- HH12)

CÂU 43. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\overrightarrow{n_1}=(-1;1;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_4}=(1;1;-1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(1;1;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-1;1)$.

✍ **Lời giải.**

Mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tìm VTPT của mặt phẳng.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình mặt phẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập : - Tìm VTPT của mặt phẳng- Điểm liên quan đến mặt phẳng.

CÂU 44. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

✍ **Lời giải.**

Do (Oxy) và (Oyz) là hai mặt phẳng toạ độ vuông góc với nhau nên góc giữa chúng bằng 90°.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng phương pháp tọa độ.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình mặt phẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập : -Tính hóc giữa hai mặt phẳng- Tìm hình chiếu vuông góc của một điểm trên các mp tọa độ- Tính khoảng cách.

CÂU 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(1;-2;3)$. **B**. $(1;2;-3)$. **C**. $(-1;-2;-3)$. **D**. $(-1;2;3)$.

✍ **Lời giải.**

Gọi H là hình chiếu của A trên (Oxz), suy ra $H(1;0;3)$.

Điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) thì AA' nhận H làm trung điểm, do đó $A'(1;-2;3)$.

Chọn đáp án A □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tìm hình chiếu vuông góc của một điểm trên các trục tọa độ (mp tọa độ) hoặc điểm đối xứng qua trục tọa độ (hay mp tọa độ).

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình mặt phẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tìm hình chiếu vuông góc của một điểm trên các trục tọa độ (mp tọa độ) hoặc điểm đối xứng qua trục tọa độ (hay mp tọa độ)- Tìm hình chiếu vuông góc của một điểm trên mp- Tìm điểm đối xứng qua mp- Viết phương trình mặt phẳng- Bài toán liên quan đến mp.

CÂU 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+1=0$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B**. $(2;4;6)$. **C**. $(-2;-4;-6)$. **D**. $(1;2;3)$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S), ta có $\begin{cases}-2a=-2\\-2b=-4\\-2c=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\\c=3.\end{cases}$

Do đó tâm của (S) có tọa độ là $(1;2;3)$.

Chọn đáp án D □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản).

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình mặt cầu.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản).

CÂU 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-1;-1)$ và $N(5;5;1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

✍ **Lời giải.**

Đường thẳng MN đi qua điểm $M(1;-1;-1)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (4;6;2) = 2(2;3;1)$ có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Viết phương trình đường thẳng trong không gian.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về viết PT đường thẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tìm VTCP của đường thẳng- Viết phương trình đường thẳng-Các bài toán liên quan đến đường thẳng.

CÂU 48. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d?

A. $P(1;2;3)$. **B.** $Q(1;2;-3)$. **C.** $N(2;1;2)$. **D.** $M(2;-1;-2)$.

✍ **Lời giải.**

Thay tọa độ các điểm vào d ta thấy tọa độ điểm $Q(1;2;-3)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng d nên điểm $Q(1;2;-3)$ thuộc d.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình đường thẳng.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Tìm VTCP của đường thẳng- Viết phương trình đường thẳng-Các bài toán liên quan đến đường thẳng.

CÂU 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B(3;4;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM không có góc tù và có diện tích bằng 15. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4;5)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(6;7)$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $M(x;y;z)$ khi đó $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right]=(-10y;-10x;0)$.

Ta có $S_{OAM}=15\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{100(x^2+y^2)}=15\Leftrightarrow x^2+y^2=9$.

Vì $\triangle OAM$ không tù nên ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}\ge 0\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}\ge 0\\ \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z\ge 0\\ z\le 10\\ x^2+y^2-z(10-z)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le z\le 10\\ z^2-10z+9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le z\le 1\\ 9\le z\le 10.\end{array}\right.$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}MB^2&=(x-3)^2+(y-4)^2+(z-6)^2\\&=x^2+y^2+25-(6x+8y)+z^2-12z+36\\&=-(6x+8y)+z^2-12z+70.\end{aligned}$$

Ta có $(6x+8y)^2\le(6^2+8^2)(x^2+y^2)=900$.

Suy ra $6x+8y\le 30\Rightarrow -(6x+8y)\ge -30$.

Do đó $MB^2\ge z^2-12z+40$.

Xét $f(z)=z^2-12z+40$.

Với $z\in[0;1]\cup[9;10]$, ta có $f'(z)=0\Leftrightarrow 2z-12=0\Leftrightarrow z=6$ (loại).

Ta có

- $f(0)=40$.
- $f(1)=29$.
- $f(9)=13$.
- $f(10)=20$.

Do đó $\min\limits_{z\in[0;1]\cup[9;10]} f(z)=13$.

Vậy $\min MB=\sqrt{13}$.

Chọn đáp án B □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bài toán cực trị trong không gian

2. Mức độ: Vận dụng cao.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán viết phương trình mặt phẳng- Đường thẳng -Mặt cầu.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Cực trị trong không gian.

CÂU 50. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến (P) bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{11}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $M_0(2;1;1) \in d$ và $\vec{u} = (2;2;-3)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

Mặt phẳng (P) đi qua A chứa d nên nhận $\left[\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}\right]$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{AM_0} = (2;0;-1)$, suy ra $\left[\overrightarrow{AM_0}, \vec{u}\right] = (2;4;4)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là

$$2x + 4(y-1) + 4(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Khoảng cách từ điểm $M(5;-1;3)$ đến mặt phẳng (P) là

$$\mathrm{d}(M,(P)) = \frac{|5 + 2\cdot(-1) + 2\cdot 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1.$$

Chọn đáp án C □

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

2. Mức độ: Vận dụng.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán viết phương trình mặt phẳng- Phương trình đường thẳng-Mặt cầu.

4. Các dạng toán cần ôn tập : Bài toán tổng hợp về mặt phẳng- Đường thẳng-Mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CHỦ ĐỀ 10- ĐỀ THAM KHẢO BGD-2023

Dạng 54 *Tìm tọa độ điểm-Tọa độ vec-tơ liên quan đến hệ tọa độ $Oxyz$*

1.Tọa độ véc-tơ Cho $\vec{a} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Định lí: Cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.
2. $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.
3. Hai véc-tơ bằng nhau $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3. \end{cases}$
4. $\vec{a} \upuparrows \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.
5. Mô-đun (độ dài) véc-tơ: $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
6. Tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Suy ra: $\begin{cases} \bullet\ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0 \\ \bullet\ \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \end{cases}$

2.Tọa độ điểm

$$M(a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a;b;c).$$

$$\begin{cases} M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0 \\ M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0. \end{cases}.$$

Định lí: Cho hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$, $A = (x_B; y_B; z_B)$.

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
2. Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
3. Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.
4. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$, khi đó tọa độ điểm G là $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$.

Dạng 55 Phương trình mặt cầu

1. Xác định tâm và bán kính mặt cầu.
   - Phương trình mặt cầu (S): $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$ có tâm $I(a;b;c)$ bán kính R.
   - Phương trình: $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0}$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-a;-b;-c)$, có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
2. Viết phương trình mặt cầu (S).

   Dạng 1. Biết (S) có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm A.

   Bán kính $R = IA = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 + (z_A - c)^2}$.

   Dạng 2. Biết (S) có đường kính AB.

   Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$.

   Tâm $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$ là trung điểm AB.

   Dạng 3. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Tâm $I\left(a;b;c\right)$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases}$. Bán kính $R = IA$.

Dạng 4. Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Tâm $I\left(a;b;c\right)$. Bán kính $R = \mathrm{d}[I,(\alpha)] = \dfrac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Dạng 56 *Tìm VTPT của mặt phẳng*

1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong không gian có dạng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.
2. Nếu phương trình mặt phẳng (P) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ thì một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\overrightarrow{n} = (A;B;C)$.
3. Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với giá của véc-tơ $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ thì véc-tơ $\overrightarrow{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
4. Nếu mặt phẳng (P) song song hoặc chứa giá của hai véc-tơ không cùng phương $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ thì véc-tơ $\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right]$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
5. Nếu mặt phẳng đi qua điểm $M(a;b;c)$ và nhận $\overrightarrow{n} = (A;B;C)$ là một véc-tơ pháp tuyến thì phương trình của mặt phẳng là $A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$.

Dạng 57 *Viết phương trình mặt phẳng*

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- Vectơ $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ là vectơ pháp tuyến (VTPT) nếu giá của $\overrightarrow{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α).
- *Chú ý*:
  - Nếu $\overrightarrow{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\overrightarrow{n}(k \neq 0)$ cũng là một VTPT của mặt phẳng(α).
  - Một mặt phẳng được xác định duy nhất nếu biết một điểm nó đi qua và một VTPT của nó.
  - Nếu $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$ là một VTPT của (α).

- *Nếu $\overrightarrow{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\overrightarrow{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một VTPT của mặt phẳng (α).*
- *Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\overrightarrow{n} = (A;B;C)$.*

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

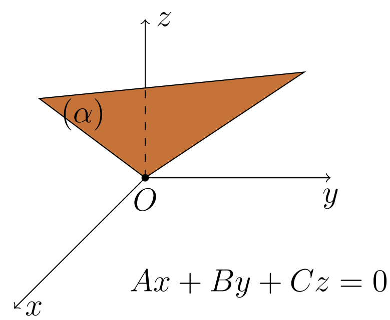
- Trong không gian $Oxyz$, mọi mặt phẳng đều có phương trình dạng:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

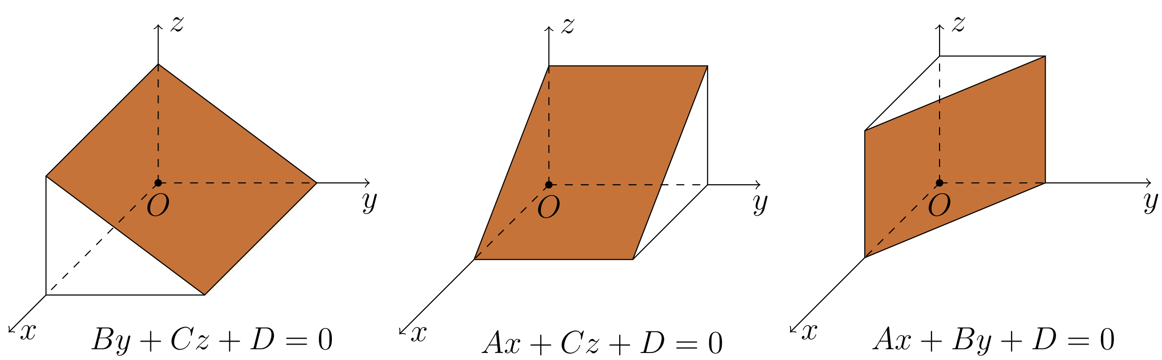
- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

- *Các trường hợp riêng*:
  Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
  - Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O.

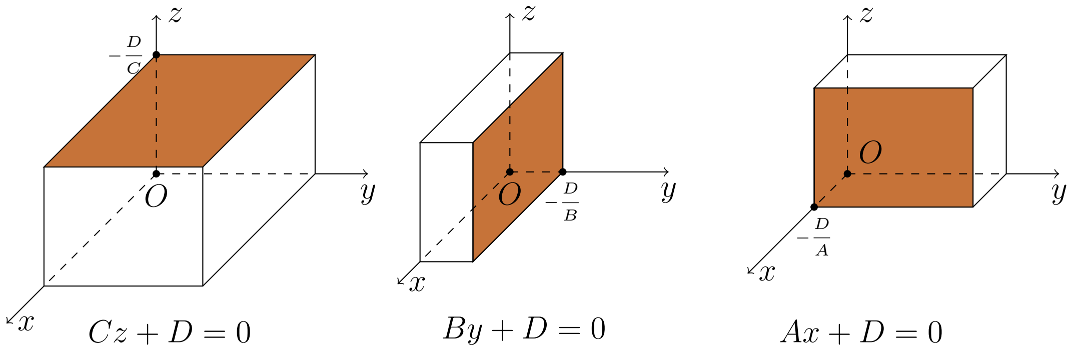


  - Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox.
  - Nếu $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy.
  - Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz.



  - Nếu $A = B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy).
  - Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz).

– Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz).



$Cz + D = 0$ $\qquad By + D = 0$ $\qquad Ax + D = 0$

Chú ý:

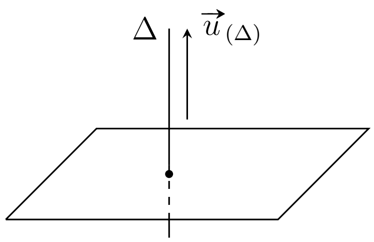
– Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

– Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a;0;0), (0;b;0), (0;0;c)$ với $abc \neq 0$.

- Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a;b;c)$ làm véc-tơ chỉ phương. Khi đó phương trình tham số của đường thẳng Δ có dạng $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, tham số $t \in \mathbb{R}$.

- Mặt phẳng (P) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A,B,C)$.

- Cho mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{(\Delta)}$:



Khi đó mặt phẳng (P) nhận $\vec{u}_{(\Delta)}$ làm một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_{(\Delta)}$.

- Nếu có hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ không cùng phương và có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) thì (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

3.PP viết phương trình tổng quát của mặt phẳng

PP1. Tìm một điểm và một VTPT của mp (P).

- Tìm 1 điểm $M(x_0;y_0;z_0) \in (P)$.
- Tìm một VTPT của mp(P) là $\vec{n} = (A,B,C)$.
- Pt mp (P) là $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

PP2. Thiếu điểm đi qua hay thiếu VTPT .

- Pt mp (P) có dạng : $Ax + By + Cz + D = 0$.
- Từ điều kiện bài toán ta xác định các hệ số A,B,C,D

Dạng 58 *Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng.*

1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$
Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB, $I\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}. \end{cases}$
Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC, $G\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}. \end{cases}$

2. $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ cùng phương với $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, $(\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2. \end{cases}$

4. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B thì Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ hoặc $\overrightarrow{BA}$.

5. Nếu $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}(k \neq 0)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của Δ. Do đó một đường thẳng có vô số véc-tơ chỉ phương.

6. Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì véc-tơ chỉ phương của đường thẳng này cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng kia.

7. Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) thì véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$ của đường thẳng Δ chính là véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)}$ của mặt phẳng (α), tức là $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)}$.

8. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ và phương trình chính tắc là $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ $(abc \neq 0)$.

9. Điểm M thuộc đường thẳng Δ có PTTS $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ thì $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

10. Cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\alpha')\colon A'x + B'y + C'z + D' = 0$.
Với điều kiện $A : B : C \neq A' : B' : C'$ thì hai mặt phẳng đó cắt nhau. Gọi d là giao tuyến của chúng. Đường thẳng d gồm những điểm $M(x; y; z)$ vừa thuộc (α) vừa thuộc (α') nên tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$. Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ và $\vec{n'} = (A'; B'; C')$. Khi đó $\vec{u}_d = \left[\vec{n}, \vec{n'}\right]$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

11. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Ox là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

12. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oy là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

13. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oz là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

14. Tìm hai vecto không cùng phương và có giá mỗi vecto vuông góc với đường thẳng d là $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó $\vec{u}_d = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

Dạng 59 Viết phương trình đường thẳng

B1. Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng d.

B2. Tìm một vec-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (a; b; c)$. (Cách tìm VTCP của đường thẳng).

(a) Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B, khi đó véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là một chỉ phương của (d).

(b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (l), khi đó véc-tơ chỉ phương của (l) cũng là một chỉ phương của (d).

(c) Đương thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (α), khi đó véc-tơ pháp tuyến của (α) là một chỉ phương của (d).

(d) Đường thẳng (d) là giao tuyến của $(P)\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, mặt phẳng $(Q)\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có véc-tơ chỉ phương của (d), $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$

(e) Đường thẳng (d) đi qua điểm M và vuông góc hai đường thẳng (d_1), (d_2). Khi đó ta gọi $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của (d) thì $\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases}$ với $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là chỉ phương của (d_1), (d_2) nên ta chọn $\vec{u} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]$.

(f) Đường thẳng d đi qua điểm M, cắt và vuông góc với một đường thẳng d_1 cho trước. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d_1 cho trước . Dựa vào điều kiện $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_l = 0$ ta tìm được H. Khi đó $\overrightarrow{MH}$ là VTCP cần tìm.

(g) Đường thẳng đi qua điểm M, vuông góc với (d_1) và cắt (d_2).Gọi K là giao điểm của (d) và (d_2). Ta có $MK \perp (d_1)$ nên $\overrightarrow{MK} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$, từ đó ta tìm được véc-tơ $\overrightarrow{MK}$ chính là chỉ phương của (d).

(h) Đường thẳng d đi qua điểm M cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Gọi (a) là mặt phẳng chứa (d_1) và đi qua điểm M, (b) là mặt phẳng chứa (d_2) và đi qua điểm M. Khi đó đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (a) và (b) là đường thẳng (d) cần tìm.

(i) Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).Ta cần tìm điểm M là giao điểm của (P) và (d_1), điểm N là giao điểm của (P) và (d_2). Khi đó đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, N là đường thẳng cần tìm.

B3. Viết PTTS của d là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ trong đó t là tham số.

Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ là $d : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ với $abc \neq 0$.

1. *Đưa về bài toán viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A,B là bài toán mấu chốt.*
2. *Điểm M thuộc đường thẳng Δ có PTTS Δ:* $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ *thì* $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.
3. $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ *cùng phương với* $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ $\left(\vec{v} \neq \vec{0}\right)$ *khi và chỉ khi*

   $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases}$

   Nếu $x_2 \neq 0, y_2 \neq 0, z_2 \neq 0$ *thì*

   $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ *cùng phương với* $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ $\left(\vec{v} \neq \vec{0}\right)$ *khi và chỉ khi* $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$
4. $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ *vuông góc với* $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ *khi và chỉ khi* $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$
5. *Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Ox là* $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
6. *Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oy là* $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
7. *Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oz là* $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Dạng 60 — Bài toán liên quan đến mặt cầu-mặt phẳng-đường thẳng

1. Tương giao giữa mặt cầu và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R. Khi đó:

TH1: Nếu $d(I; (P)) > R$ thì mặt cầu (S) và (P) không có điểm chung.

TH2: Nếu $d(I; (P)) = R$ thì mặt cầu (S) và (P) có điểm chung duy nhất là H (mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H) và $IH \perp (P)$.

TH3: Nếu $d(I; (P)) < R$ thì mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn tâm H bán kính r ta có:

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và $r^2 + IH^2 = R^2$ với $\left(d_{(I;(P))} = IH\right)$.
- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S), mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM \perp (P)$.
- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S), mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r lớn nhất $\Leftrightarrow (P)$ đi qua 2 điểm I và M.

2. Tương giao giữa mặt cầu và đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ và mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R. Khi đó:

1. Nếu $d(I;\Delta) > R$ thì mặt cầu (S) và Δ không có điểm chung.
2. Nếu $d(I;\Delta) = R$ thì mặt cầu (S) và Δ có điểm chung duy nhất là H khi đó $IH \perp \Delta$.
3. Nếu $d(I;\Delta) < R$ thì mặt câu (S) và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B ta có một số kết quả sau:

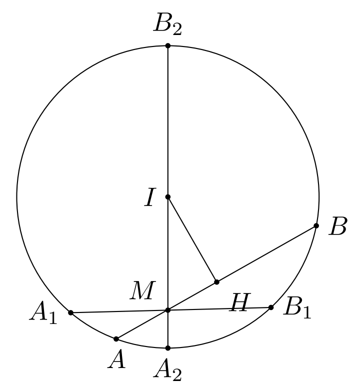
- Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp \Delta$ và $d^2_{(I;\Delta)} + \dfrac{AB^2}{4} = R^2$ với $\left(d_{(I;\Delta)} = IH\right)$.
- Cho điểm M khi đó đường thẳng đi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB lớn nhất là đường thẳng đi qua 2 điểm M và I.
- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S) đường thẳng đi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất là đường thẳng đi qua M và vuông góc IM.

Chứng minh:

Ta có $d^2_{(I;\Delta)} + \dfrac{AB^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{R^2 - d^2_{(I;\Delta)}}$.

Vì $\triangle HIM$ vuông tại H nên ta có $0 \leq IH \leq IM$.

- AB lớn nhất $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} = 0 \Leftrightarrow \Delta$ qua 2 điểm I và M.
- AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} = IM \Leftrightarrow \Delta$ vuông góc IM.



TẬP THỂ GIÁO VIÊN TOÁN 12 -TRƯỜNG THPT AN PHƯỚC-NINH THUẬN

1. Trần Ngọc Hùng-HT
2. Ngụy Như Thái-TTCM.
3. Quảng Đại Hạn-Gv Toán.
4. Quảng Đại Phước-Gv Toán.
5. Đàng Xuân Phi-Gv Toán.
6. Quảng Đại Mưa-Gv Toán.
7. Nguyễn Văn Hồng - Gv Toán.