TUYỂN CHỌN 111 BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC ĐẶC SẮC

Trong chủ đề này, chúng tôi đã tuyển chọn và giới thiệu một số bài toán bất đẳng thức hay và khó, cùng với đó là quá trình phân tích để đi đến hình thành lời giải cho bài toán bất đẳng thức đó. Từ các bài toán đó ta sẽ thấy được quá trình phân tích đặc điểm của giả thiết bài toán cũng như bất đẳng thức cần chứng minh, từ đó có những nhận định, định hướng để tìm tòi lời giải và cách trình bày lời giải cho một bài toán bất đẳng thức.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\ge \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Có thể nói đây là một bất đẳng thức hay tuy nhiên nó không thực sự khó. Quan sát bất đẳng thức ta có một cách tiếp cận bài toán như sau

Cách 1. Từ chiều của bất đẳng thức, ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức AM – GM để đánh giá. Nhưng ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho bao nhiêu số? Để ý bên vế trái bất đẳng thức có chứa $\frac{1}{a^2}$ và bên vế phải lại chứa $\frac{1}{a}$ nên ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số, ta cũng cần triệt tiêu các đại lượng $\frac{bc}{b+c}$. Chú ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta có đánh giá sau

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{a^2(b+c)}\cdot\frac{b+c}{4bc}}=\frac{1}{a}$$

Thực hiện tương tự ta có $\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{c+a}{4ca}\ge\frac{1}{b};\ \frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{a+b}{4ab}\ge\frac{1}{c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{b+c}{4bc}+\frac{c+a}{4ca}+\frac{a+b}{4ab}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Để ý là $\frac{b+c}{4bc}+\frac{c+a}{4ca}+\frac{a+b}{4ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, lúc này ta thu được

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hay $\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\ge\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Ý tưởng thứ hai là áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]}\ge\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

Biến đổi vế trái ta được

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(ab+bc+ca)}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

Điều này có nghĩa là bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Ý tưởng tiếp theo là sử dụng phép biến đổi tương đương để chứng minh bài toán.

Chú ý đến phép biến đổi $\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{1}{a}=\frac{ab+bc+ca}{a^2(b+c)}$, khi đó ta thu được bất đẳng thức cần chứng sau

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2(b+c)}+\frac{ab+bc+ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab+bc+ca}{c^2(a+b)}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Biến đổi vế trái ta lại được $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3(ab+bc+ca)}{2abc}$. Đến lúc này ta đưa bài toán cần chứng minh thành $\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\ge\frac{3}{2abc}$

Đến đây ta biến đổi bất đẳng thức bằng cách nhân cả hai vế với tích abc ta được

$$\frac{bc}{ab+ca}+\frac{ca}{bc+ab}+\frac{ab}{ca+bc}\ge\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Neibitz. Điều này đồng nghĩa với việc bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 4. Ta tiếp tục phân tích tìm lời giải với ý tưởng đổi biến, quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy $\frac{bc}{a^2(b+c)}=\frac{1}{a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{1}{a^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}+\frac{1}{b^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)}+\frac{1}{c^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Đến đây ta đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}$$

Bất đẳng thức cuối cùng làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát cách phát biểu của bài toán thì ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và khi đó ta được

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^5}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$

Hay $2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$

Dễ thấy $a^3+b^3\ge ab(a+b)$; $b^3+c^3\ge bc(b+c)$; $c^3+a^3\ge ca(c+a)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^3+b^3+c^3)\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ý tưởng thứ hai là sử dụng bất đẳng thức AM – GM, để ý đến đại lượng $\dfrac{a^5}{a^2+ab+b^2}$ bên vế trái và đại lượng $\dfrac{a^3}{3}$ bên vế phải, ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng AM – GM cho hai số dương, để ý đến dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$ và cần triệt tiêu được a^2+ab+b^2 nên ta chọn hai số đó là $\dfrac{a^5}{a^2+ab+b^2}$; $\dfrac{a(a^2+ab+b^2)}{9}$. Khi đó ta được

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\frac{a(a^2+ab+b^2)}{9}\ge 2\sqrt{\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a(a^2+ab+b^2)}{9}}=\frac{2a^3}{3}$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\frac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(b^2+bc+c^2)}{9}\ge\frac{2b^3}{3};\ \frac{c^5}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(c^2+ca+a^2)}{9}\ge\frac{2c^3}{3}$$

Để đơn giản hóa ta đặt $A=\dfrac{a^5}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^5}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^5}{c^2+ca+a^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$A+\frac{a(a^2+ab+b^2)}{9}+\frac{b(b^2+bc+c^2)}{9}+\frac{c(c^2+ca+a^2)}{9}\ge\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{3}$$

Hay $A\ge\dfrac{5(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)}{9}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{5(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)}{9}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$
$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)\ge a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$$

Đến đây ta thực hiện tương tự như cách 1. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy các biến đều nằm dưới mẫu nên rất tự nhiên ta nghĩ đến các bất đẳng thức AM – GM, Cauchy – Schwarz dạng phân thức, …

Cách 1. Trước hết ta tiếp cận bất đẳng thức trên với ý tưởng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM. Để ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta có $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ nên đầu tiên để tạo ra đại lượng $ab+bc+ca$ ta có đánh giá quen thuộc là $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$.

Do đó ta có bất đẳng thức $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$

Như vậy ta cần phải chứng minh được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}\ge 30$

Lại chú ý đến đánh giá tương tự như trên nhưng ta cần cộng các mẫu sao cho có thể viết được thành $\left(a+b+c\right)^2$ điều này có nghĩa là ta cần đến $2\left(ab+bc+ca\right)$. Đến đây ta hai hướng là:

+ Thứ nhất là đánh giá $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2\left(ab+bc+ca\right)}\ge\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, Tuy nhiên đánh giá này không xẩy ra dấu đẳng thức.

+ Thứ hai là đánh giá $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}=9$.

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

Tuy nhiên, dễ thấy $\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$

Do đó ta được $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức, chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra thì ta được

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{3ab}+\frac{1}{3bc}+\frac{1}{3ca}\ge\frac{16}{a^2+b^2+c^2+3\left(ab+bc+ca\right)}\ge\frac{16}{\left(a+b+c\right)^2+\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2}=12$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge 18$

Để ý tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge \frac{6}{ab+bc+ca}\ge \frac{6}{\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2}=18$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge \frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó ta có bất đẳng thức $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$

Áp dụng tiếp đánh giá trên ta được

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Hay $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\ge 9$. Mặt khác ta lại có $\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{a}}\ge 3$$

Phân tích và lời giải

Trước hết để mất dấu căn ta đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$, khi đó từ giả thiết ta có $x^2+y^2+z^2=3$ và bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 3$. Quan sát bất đẳng thức và dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $x=y=z=1$, ta có một số ý tưởng tiếp cận bài toán như sau

Cách 1. Từ cách phát biểu vế trái ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Tuy nhiên cần chú ý đến giả thiết $x^2+y^2+z^2=3$, khi đó ta có đánh giá

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\frac{x^4}{x^2y}+\frac{y^4}{y^2z}+\frac{z^4}{z^2x}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}=\frac{9}{x^2y+y^2z+z^2x}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{9}{x^2y+y^2z+z^2x}\ge 3\Leftrightarrow 3\ge x^2y+y^2z+z^2x$

Mà theo bất đẳng thức AM – GM ta được

$x^3+xy^2\ge 2x^2y;\ y^3+yz^2\ge 2y^2z;\ z^3+zx^2\ge 2z^2x$

Do đó ta có $x^3+y^3+z^3+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2\ge 3\left(x^2y+y^2z+xz^2\right)$

Mà ta có đẳng thức quen thuộc

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x+y+z\right)=x^3+y^3+z^3+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2$$

Do đó ta được $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x+y+z\right)\ge 3\left(x^2y+xz^2+y^2z\right)$

Để ý tiếp đến giả thiết $x^2+y^2+z^2=3$, ta có $x+y+z\ge x^2y+y^2z+xz^2$

Mà ta có $x+y+z\le\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}=3$ suy ra $3\ge x^2y+y^2z+z^2x$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Cũng từ cách phát biểu vế trái ta nghĩ đến đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM, tuy nhiên khi áp dụng trực tiếp ta cần chú ý làm triệt tiêu các mẫu số và đánh giá về bình phương của các biến. Do đó ta đánh giá như sau

$$\frac{x^2}{y}+x^2y\ge 2x^2;\ \frac{y^2}{z}+y^2z\ge 2y^2;\ \frac{z^2}{x}+z^2x\ge 2z^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+x^2y+y^2z+z^2x\ge 2x^2+2y^2+2z^2=6$

Hay $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 6-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)$.

Bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $6-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\ge 3$ hay

$3\ge x^2y+y^2z+z^2x$

Đến đây ta làm như cách thứ 1.

Cách 3. Cũng áp dụng bất đẳng thức AM – GM, tuy nhiên trong tình huống này ta bình phương hai vế trước

Đặt $A=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}$, khi đó ta được

$$A^2=\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)^2=\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{z^2}+\frac{z^4}{x^2}+2\left(\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\right)$$

Đến đây ta chú ý đến cách ghép cặp sau

$$\frac{x^4}{y^2}+\frac{x^2y}{z}+\frac{x^2y}{z}+z^2\ge 4x^2;\frac{y^4}{z^2}+\frac{y^2z}{x}+\frac{y^2z}{x}+x^2\ge 4y^2;\frac{z^4}{x^2}+\frac{z^2x}{y}+\frac{z^2x}{y}+y^2\ge 4z^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$A^2+\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge 4\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow A^2\ge 9\Leftrightarrow A\ge 3$

Hay $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 3$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Cách 4. Trong các hướng tiếp cận trên ta đều thực hiện đánh giá sau quá trình đổi biến mà quên đi một đánh giá quan trọng là $2\sqrt{b}\le b+1$, khi đó ta có $\frac{a}{\sqrt{b}}\ge\frac{2a}{b+1}$. Đây là một đánh giá cùng chiều mà vẫn bảo toàn dấu đẳng thức, ta thử thực hiện tiếp xem sao

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{a}}\ge\frac{2a}{b+1}+\frac{2b}{c+1}+\frac{2c}{a+1}$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{2a}{b+1}+\frac{2b}{c+1}+\frac{2c}{a+1}\ge 3$. Nhìn cách phát biểu của bất đẳng thức ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{2a}{b+1}+\frac{2b}{c+1}+\frac{2c}{a+1}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)^2}{ab+bc+ca+3}\ge\frac{6\left(a+b+c\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2+9}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{6\left(a+b+c\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2+9}=3$

Hay $2\left(a+b+c\right)^2=\left(a+b+c\right)^2+9\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)^2=9\Leftrightarrow a+b+c=3$

Đẳng thức cuối cùng chính là giả thiết. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$, quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến một số ý tưởng tiếp cận như sử dụng nguyên lí Dirichlet, sử dụng tính chất của tam thức bậc hai, sử dụng bất đẳng thức AM – GM,…, bây giờ ta đi phân tích từng ý tưởng để tìm lời giải cho bài toán.

Cách 1. Trước hết ta thấy ta để ý đến đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$ điều này có nghĩa là khi đẳng thức xẩy ra thì $a-1;\ b-1;\ c-1$ cùng bằng 0, ngoài ta trong bất đẳng thức chứa các đại lượng $ac,bc,abc,...$ nên ta nghĩ đến tích $c(a-1)(b-1)$, tuy nhiên ta chưa thể khẳng định được tích đó có không âm hay không nên ta sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $a-1;\ b-1;\ c-1$ luôn tồn tai hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử hai đó là $a-1;b-1$, khi đó ta có

$$(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow c(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow abc-ac-bc+c\ge 0$$

Khi đó ta có $a^2+b^2+c^2+2abc+1=(a-b)^2+(1-c)^2+2(abc-ac-bc+c)+2(ab+bc+ca)$

Dễ thấy $(a-b)^2+(1-c)^2+2(abc-ac-bc+c)\ge 0$ nên ta có

$$(a-b)^2+2ab+(1-c)^2+2c+2abc-2ac-2bc+2(bc+ca)\ge 2(ab+bc+ca)$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Dễ thấy bất đẳng thức có bâc hai đối với mỗi biến do đó ta có thể viết lại bất đẳng thức về dạng đa thức biến a, còn b và c đóng vai trò tham số

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là $a^2+2(bc-b-c)a+b^2+c^2-2bc+1\ge 0$

Xét $f(a)=a^2+2(bc-b-c)a+b^2+c^2-2bc+1$

Quan sát đa thức $f(a)$ ta nhận thấy nếu $bc-b-c\ge 0$ thì khi đó ta luôn có $f(a)\ge 0$, tức là

$$a^2+2(bc-b-c)a+b^2+c^2-2bc+1\ge 0.$$

Bây giờ ta xét trường hợp sau $bc-b-c\le 0$

Khi đó ta có $\Delta'_a = (bc-b-c)^2 - (b^2+c^2-2bc+1)$

Để ý đến hệ số của hạng tử bậc hai là số dương nên để $f(a) \ge 0$ thì ta phải chỉ ra được

$$\Delta'_a = (bc-b-c)^2 - (b^2+c^2-2bc+1) \le 0$$

Hay $bc(b-2)(c-2)-1 \le 0$

Để ý đến $bc-b-c \le 0$ ta được $(b-1)(c-1) \le 1$, lúc này xẩy ta các khả năng sau

+ Cả $(b-1); (c-1)$ cùng nhỏ hơn 1 hay cả b, c đều nhỏ hơn 2, khi đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$b(2-b) \le \frac{(b+2-b)^2}{4} = 1;\ c(2-c) \le \frac{(c+2-c)^2}{4} = 1$$

Suy ra $bc(b-2)(c-2) \le 1$ nên ta có $bc(b-2)(c-2)-1 \le 0$.

+ Trong hai số $(b-1); (c-1)$ có một số lớn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1 khi đó trong b, c có một số lớn hơn 2 và một số nhỏ hơn 2 suy ra $bc(b-2)(c-2) \le 0$ nên ta cũng có $bc(b-2)(c-2)-1 \le 0$.

Như vậy cả hai khả năng đều cho $\Delta'_a \le 0$ nên bất đẳng thức được chứng minh. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 3. Dễ thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta có đánh giá $2abc+1 = abc+abc+1 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Lúc này ta được bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Ta cần chỉ ra được $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 2(ab+bc+ca)$. Để làm mất căn bậc 3 ta có thể đặt $a^2 = x^3;\ b^2 = y^3;\ c^2 = z^3$, khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$$

Để ý đến đánh giá $2\sqrt{xy} \le x+y$ khi đó ta viết được

$$2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right) \le xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+z)$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+z)$$

Khai triển và phân tích ta được bất đẳng thức $xyz \ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

Đây là một đánh giá đúng quen thuộc. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 4. Ngoài các cách giải như trên ta cũng có thể tham khảo thêm cách giải sau:

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là $(a+b+c)^2+2abc+1 \ge 4(ab+bc+ca)$

Đặt $a+b+c=k$, khi đó ta cần phải chứng minh

$$k^2+2abc+1 \ge 4(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)-k^2 \le 2abc+1$$

Ta dễ dàng chứng minh được $abc \le (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ hay

$$abc \le (k-2a)(k-2b)(k-2c) \Leftrightarrow 4k(ab+bc+ca)-k(a+b+c) \le 8abc$$

$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)-k^2 \le \frac{9abc}{k}$$

Như vậy để hoàn tất chứng minh ta chỉ cần chỉ ra được

$$\frac{9abc}{k} \le 2abc+1 \Leftrightarrow \frac{(9-2k)abc}{k} \le 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{k^3}{27}$ nên cần chứng minh

$$\frac{(9-2k)abc}{k} \le \frac{(9-2k)k^3}{27k} = \frac{(9-2k)k^2}{27} \le 1$$

+ Nếu $9-2k<0$, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

+ Nếu $9-2k \ge 0$, khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(9-2k)k^2}{27} \le \frac{1}{27}\left(\frac{9-2k+k+k}{3}\right)^3 = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+3c}+\frac{b}{bc+3a}+\frac{c}{ca+3b} \ge \frac{3}{4}$$

Phâ tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát cách phát biểu của bài toán ta nghĩ đến sử dụng các bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, AM – GM,…. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có các ý tưởng tiếp cận bài toán như sau

Cách 1. Ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức, khi đó ta được

$$\frac{a}{ab+3c}+\frac{b}{bc+3a}+\frac{c}{ca+3b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+3(ab+bc+ca)}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(a+b+c)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+3(ab+bc+ca)}\ge\frac{3}{4}$ hay ta cần chứng minh

$$4(a+b+c)^2\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)+9(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)+ab+bc+ca$$

Mà ta có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, do đó để hoàn tất chứng minh ta cần chỉ ra được

$$3(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)$$

Nhận thấy trong bất đẳng thức cần chứng minh, vế trái có bậc 2 và vế phải có bậc 3, do đó trước hết ta đồng bậc hai vế. Chú ý đến giả thiết $a+b+c=3$ ta có

$$3(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)$$
$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2\ge 2(a^2b+b^2c+c^2a)\Leftrightarrow a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Hoặc ta có thể chứng minh theo bất đẳng thức AM – GM như sau

$$a^3+ab^2\ge a^2b;\ b^3+bc^2\ge b^2c;\ c^3+ca^2\ge c^2a$$

Cộng theo vế các bất đẳng trên ta cũng được điều phải chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2. Trong bài toán có giả thiết $a+b+c=3$ và trong bất đẳng thức cũng xuất hiện các số 3. Vậy thì các số 3 đó ẩn ý gì hay không?

Để ý ta thấy $ab+3c=ab+c(a+b+c)=(a+c)(b+c)$, áp dụng tương tự ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh là $\frac{a}{(a+c)(b+c)}+\frac{b}{(a+b)(c+a)}+\frac{c}{(c+a)(a+b)}\ge\frac{3}{4}$

Đến đây ta có các hướng xử lí bất đẳng thức trên

+ Hướng 1. Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{(a+c)(b+c)}+\frac{b}{(a+b)(c+a)}+\frac{c}{(c+a)(a+b)}\ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)+b(b+c)+c(c+a)\ge \frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)\ge 3(3-a)(3-b)(3-c)$$

$$\Leftrightarrow 4(9-ab-bc-ca)\ge 3\left[27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc\right]$$

$$\Leftrightarrow 36-4(ab+bc+ca)\ge 9(ab+bc+ca)-3abc \Leftrightarrow 36+3abc\ge 13(ab+bc+ca)$$

Bất đẳng thức cuối cùng ta thấy có sự xuất hiện của các đại lượng $ab+bc+ca;\ abc$ và chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta để ý đến $abc\ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ hay

$$abc\ge (3-2a)(3-2b)(3-2c)\Leftrightarrow 3abc+9\ge 4(ab+bc+ca)\Leftrightarrow 3abc+36\ge 4(ab+bc+ca)+27$$

Đến đây để hoàn tất chứng minh ta cần chỉ ra được

$$4(ab+bc+ca)+27\ge 13(ab+bc+ca)\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$$

Vì $9=(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$. Như vây bài toán được chứng minh xong.

+ Hướng 2. Để đơn giản hóa bất đẳng thức ta đặt $x=b+c;\ y=c+a;\ z=a+b$, khi đó $x+y+z=6$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\frac{y+z-x}{xy}+\frac{z+x-y}{yz}+\frac{x+y-z}{zx}\ge \frac{3}{2}$

Hay $x^2+y^2+z^2\ge \frac{3xyz}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$xyz\le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=8\Rightarrow \frac{3xyz}{2}\le 12 \text{ và } x^2+y^2+z^2\ge \frac{(x+y+z)^2}{3}=12$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có $x^2+y^2+z^2\ge \frac{3xyz}{2}$. Đến đây bài toán được chứng minh xong.

+ Hướng 3. Từ đại lượng $\frac{a}{(a+c)(b+c)}$ ta liên tưởng đến kỹ thuật thêm – bớt trong bất đẳng thức AM – GM, ta được

$$\frac{a}{(a+c)(b+c)}+\frac{a(a+c)}{8}+\frac{a(b+c)}{8}\ge \frac{3a}{4}\Rightarrow \frac{a}{(a+c)(b+c)}+\frac{a^2+ab+2ac}{8}\ge \frac{3a}{4}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b}{(a+b)(c+a)}+\frac{b^2+bc+2ab}{8}\ge\frac{3b}{4};\ \frac{c}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2+ca+2bc}{8}\ge\frac{3c}{4}$$

Gọi vế trái của bất đẳng thức là A, khi đó cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$A+\frac{a^2+ab+2ac}{8}+\frac{b^2+bc+2ab}{8}+\frac{c^2+ca+2bc}{8}\ge\frac{3(a+b+c)}{4}$$

Hay $$A\ge\frac{9}{4}-\frac{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}{8}\ge\frac{9}{4}-\frac{(a+b+c)^2+\frac{(a+b+c)^2}{3}}{8}=\frac{3}{4}$$

Đến đây bài toán được chứng minh xong.

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$, quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái chứa các căn bậc hai, do đó ta hướng đến đánh giá làm mất các căn bậc hai. Tuy nhiên nếu ta sử dụng đánh giá $2\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2$ thì sẽ thu được bất đẳng thức ngược chiều. Nên ta nghĩ đến bình phương hai vế, có điều nếu khai triển theo phép biến đổi tương đương thì vẫn còn căn bậc hai. Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta có

$$3\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\right)\ge\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\right)^2$$

Hay $$\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Chú ý bên vế trái xuất hiện đại lượng $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ nên ta sẽ đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức, tuy nhiên ta cần đánh giá là xuất hiện $a^2+b^2+c^2$. Khi đó ta được

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^4}{a^2b}+\frac{b^4}{b^2c}+\frac{c^4}{c^2a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Đến đây ta cần chứng minh được $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Hay $$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2$$

Nhận thấy $$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Do đó ta được $\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thì

$$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2$$

Do đó ta được $\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2. Bây giờ ta thử đánh giá từ vế trái sang vế phải đồng thời làm xuất hiện các căn bậc hai như vế phải xem sao? Để ý đến phép biến đổi $\frac{a^2}{b}+b=\frac{a^2+b^2}{b}$, khi đó ta sẽ sử dụng bất đẳng thức AM – GM để đánh giá, chú ý đến đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$ nên để triệt tiêu b ở mẫu ta cộng thêm vào 2b, như vậy ta sẽ được $\frac{a^2+b^2}{b}+2b\ge 2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$. Do đó ta có đánh giá $\frac{a^2}{b}+3b=\frac{a^2+b^2}{b}+2b\ge 2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$

Thực hiện tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+3\left(a+b+c\right)\ge 2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}-3\left(a+b+c\right)\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Hay $$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\ge a+b+c$$

Đến đây thì đơn giản hơn rồi, để ý đến bất đẳng quen thuộc $2\left(x^2+y^2\right)\ge\left(x+y\right)^2$, khi đó ta được

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2};\ \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\ge\frac{b+c}{2};\ \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\ge\frac{c+a}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\ge a+b+c$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Chú ý là đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$ và trong các biến có các lũy thừa bậc 2, do đó ta thử biến đổi hai vế để làm xuất hiện các đại lượng kiểu $\left(a-b\right)^2;\left(b-c\right)^2;\left(c-a\right)^2$.

Trước hết ta biến đổi vế trái, để ý là $\frac{a^2}{b}-2a+b=\frac{\left(a-b\right)^2}{b}$, như vậy ta sẽ được

$$\frac{a^2}{b}-2a+b+\frac{b^2}{c}-2b+c+\frac{c^2}{a}-2c+a=\frac{\left(a-b\right)^2}{b}+\frac{\left(b-c\right)^2}{c}+\frac{\left(c-a\right)^2}{c}$$

Do đó suy ra $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{\left(a-b\right)^2}{b}+\frac{\left(b-c\right)^2}{c}+\frac{\left(c-a\right)^2}{c}-\left(a+b+c\right)$.

Như vậy để bất đẳng thức tương đương thì ta phải bớt ở vế phải đại lượng $\left(a+b+c\right)$ và ta cần biến đổi biểu thức $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}-\left(a+b+c\right)$ làm xuất hiện $\left(a-b\right)^2;\left(b-c\right)^2;\left(c-a\right)^2$.

Ta để ý đến phép biến đổi $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}=\frac{\left(a-b\right)^2}{2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2\left(a+b\right)}$, hoàn toàn tương tự thì vế phải trở thành

$$\frac{\left(a-b\right)^2}{2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2\left(a+b\right)}+\frac{\left(b-c\right)^2}{2\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2\left(b+c\right)}+\frac{\left(c-a\right)^2}{2\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}+2\left(c+a\right)}$$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2\left(a+b\right)}\ge 0$, rõ ràng đánh giá này hoàn toàn đúng. Tương tự ta trình bày được lời giải như sau: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{b}-2a+b+\frac{b^2}{c}-2b+c+\frac{c^2}{a}-2c+a\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}-(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{c}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}-\frac{b+c}{2}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}-\frac{c+a}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{c}\ge\frac{(a-b)^2}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)}+2(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{2\sqrt{2(c^2+a^2)}+2(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)}\right]+(b-c)^2\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{2(b^2+c^2)}+2(b+c)}\right]+(c-a)^2\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{2(c^2+a^2)}+2(c+a)}\right]\ge 0$$

Đặt

$$A=\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)};B=\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{2(b^2+c^2)}+2(b+c)};C=\frac{1}{c}-\frac{1}{2\sqrt{2(c^2+a^2)}+2(c+a)}$$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $A,B,C\ge 0$. Thật vậy

$$A=\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)}=\frac{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2a+b}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)}>0$$

Hoàn toàn tương tự ta có $B,C\ge 0$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 4. Bây giờ ta thử biến đổi từ vế phải sang vế trái xem sao, ở đây ta cần làm mất các căn bậc hai. Để thực hiện được biến đổi đó ta nghĩ đến đánh giá $2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$ nhưng tiếc là đánh giá này lại ngược chiều. Một cách khác đó là sử dụng đánh giá kiểu $2\sqrt{xy}\le x+y$, đánh giá này cùng chiều nên ta tập trung theo hướng này. Như vậy ta cần viết được $\frac{a^2+b^2}{2}$ sao cho xuất hiện tích của hai đại lượng và sau khi đánh giá thì xuất hiện $\frac{a^2}{b}$. Để ý ta thấy

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{a^2+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}}\le\sqrt{a^2+b^2-ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2-ab}{b}+b\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+2b-a\right)$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c}+2c-b\right)$; $\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a}+2a-c\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\right)\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Hay $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\ge 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+2\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$

Đến đây ta trình bày hoàn toàn tương tự như cách thứ nhất.

Cách 5. Để ý ta thấy $\frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{b^2-c^2}{b+c}+\frac{c^2-a^2}{c+a}=a-b+b-c+c-a=0$ nên ta được

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}=\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}$$

Suy ra $\frac{2a^2}{a+b}+\frac{2b^2}{b+c}+\frac{2c^2}{c+a}=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\right)\ge\frac{2a^2}{a+b}+\frac{2b^2}{b+c}+\frac{2c^2}{c+a}$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

Do đó ta được $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Đến đây thì áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\frac{\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a+b\right)^2}{2}}}{a+b}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Áp dụng tương tự ta thu được $\frac{b^2+c^2}{b+c}\ge\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$; $\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có đánh giá $b^2+1\ge 2b$, tuy nhiên đánh giá này cho ta một bất đẳng thức ngược chiều. Chính điều này gợi ý cho ta sử dụng kĩ thuật AM – GM ngược dấu. Khi đó áp dụng ta đẳng thức AM – GM ta được

$$\frac{a^2}{b^2+1}=a^2-\frac{a^2b^2}{b^2+1}\ge a^2-\frac{a^2b^2}{2b}=a^2-\frac{a^2b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b^2}{c^2+1}\ge b^2-\frac{b^2c}{2}$; $\frac{c^2}{a^2+1}\ge c^2-\frac{c^2a}{2}$

Khi đó ta có bất đẳng thức $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\ge a^2+b^2+c^2-\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{2}$

Ta cần chứng minh $a^2+b^2+c^2-\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{2}\ge\frac{3}{2}$.

Để ý đến $a+b+c=3$ suy ra $a^2+b^2+c^2\ge 3$.

Khi đó ta có $a^2+b^2+c^2\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{3}{2}$ hay ta có

$$a^2+b^2+c^2-\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{2}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{2}+\frac{3}{2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{2}+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge a^2b+b^2c+c^2a$$

Đánh giá trên là một đánh giá ta đã từng gặp và có thể chứng minh được bằng phép biến đổi tương đương

$$a^2+b^2+c^2\ge a^2b+b^2c+c^2a\Leftrightarrow(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Hoặc sử dụng bất đẳng thức AM – GM

$$a^2+b^2+c^2 \ge a^2b+b^2c+c^2a \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2 \ge 2(a^2b+b^2c+c^2a)$$

Dễ thấy $a^3+ab^2 \ge 2a^2b;\ b^3+bc^2 \ge 2b^2c;\ c^3+ca^2 \ge 2c^2a$. Cộng theo vế các bất đẳng thức ta được đánh giá như trên. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Vế trái của bất đẳng thức gợi ý cho ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức, do đó ta có đánh giá sau

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) \ge a^2+b^2+c^2+9$$

Mà $a+b+c=3$ suy ra $a^2+b^2+c^2 \ge 3$ nên $a^2+b^2+c^2+9 \ge 12$, suy ra $ab+bc+ca \ge 3$, đây là một đánh giá sai. Do vậy cách dùng trực tiếp không đem lại hiệu quả. Điều này có nghĩa là ta cần biến đổi trước rồi mới có thể sử dụng được bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Ta bắt đầu với giả thiết, như trên ta suy ra được $a^2+b^2+c^2 \ge 3$, cho nên khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta cần làm xuất hiện đại lượng $a^2+b^2+c^2$. Khi này ta được

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}=\frac{a^4}{a^2b^2+1}+\frac{b^4}{b^2c^2+1}+\frac{c^4}{c^2a^2+1} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3}$$

Bài toán quy về chứng minh $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3} \ge \dfrac{3}{2}$

Hay $2(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Và từ $a^2+b^2+c^2 \ge 3$ ta suy ra được $(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 9$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $2(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Sau hai cách làm như trên, ta thử tiếp cận với bất đẳng thức với cách đổi biến xem sao. Để ý đến giả thiết $a+b+c=3$ ta cần làm xuất iện số 3 trong các phân số

$$\frac{a^2}{b^2+1}=\frac{3a^2}{3b^2+3}=\frac{3a^2}{3b^2+a+b+c}$$

Nhìn phân số sau khi biến đổi ta không tìm thấy ý tưởng đổi biến.

Tuy nhiên từ $a+b+c=3$ suy ra $a^2+b^2+c^2\ge 3$, khi đó ta có $\frac{a^2}{b^2+1}\ge\frac{3a^2}{3b^2+a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\ge\frac{3a^2}{3b^2+a^2+b^2+c^2}+\frac{3b^2}{3c^2+a^2+b^2+c^2}+\frac{3c^2}{3a^2+a^2+b^2+c^2}$$

Đến đây ta thấy được ý tưởng đổi biến và cách đổi biến hợp lí nhất đó là

Đặt $x=\frac{3a^2}{a^2+b^2+c^2};\ y=\frac{3b^2}{a^2+b^2+c^2};\ z=\frac{3c^2}{a^2+b^2+c^2}$, suy ra $x+y+z=3$

Khi đó ta có $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\ge\frac{x}{y+1}+\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{x}{y+1}+\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1}\ge\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1}\ge\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+3}\ge\frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{3}(x+y+z)^2+3}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 9. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Theo một đánh giá quen thuộc ta có $9\left(ab+bc+ca\right)\le 3\left(a+b+c\right)^2$. Như vậy ta cần chứng minh

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(a+b+c\right)^2$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Như vậy ta cần đánh giá từ $\left(a+b+c\right)^2$ làm xuất hiện a^2+2, để ý ta thấy

$$\left(a+b+c\right)^2 \le \left(a^2+1+1\right)\left(1+b^2+c^2\right)=\left(a^2+2\right)\left(1+b^2+c^2\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$3\left(a^2+2\right)\left(1+b^2+c^2\right)\le\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\Leftrightarrow 3\left(1+b^2+c^2\right)\le\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$$

Biến đổi tương đương ta thu được

$$3\left(1+b^2+c^2\right)\le\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\Leftrightarrow 3+3b^2+3c^2\le b^2c^2+2b^2+2c^2+4$$
$$\Leftrightarrow b^2c^2-b^2-c^2+1\ge 0\Leftrightarrow\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\ge 0$$

Như vậy ta chỉ cần chỉ ra được $\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\ge 0$, tuy nhiên vì vai trò của a, b, c như nhau nên theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a^2-1;\ b^2-1;\ c^2-1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu và ta hoàn toàn có thể giả sử hai số đó là $b^2-1;\ c^2-1$. Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Ngoài ra ta cũng có thể đánh giá từ $\left(a+b+c\right)^2$ làm xuất hiện a^2+2 theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz như sau $\left(a+b+c\right)^2\le\left(a^2+2\right)\left(1+\dfrac{\left(b+c\right)^2}{2}\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(1+\dfrac{\left(b+c\right)^2}{2}\right)$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$b^2+c^2+2b^2c^2-6bc+2\ge 0\Leftrightarrow\left(b-c\right)^2+2\left(bc-1\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2. Với các bất đẳng thức khi mà ta không thể tìm ra được ngay cách đánh giá thì tốt nhất ta nên khai triển nó ra nếu có thể, với bài toán này khi khai triển ta được

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Chú ý bên vế phải có đại lượng $ab+bc+ca$ và nếu đánh giá vế trái về $ab+bc+ca$ thì được $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca;\ a^2b^2+1+b^2c^2+1+c^2a^2+1\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$

Khi đó ta được

$$a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\ge a^2b^2c^2+2+8\left(ab+bc+ca\right)$$

Mà theo bất đẳng thức AM – GM ta lại có $a^2b^2c^2+1+1\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\dfrac{9abc}{3\sqrt[3]{abc}}\ge\dfrac{9abc}{a+b+c}$

Để ý đến đánh giá $\left(a+b+c\right)^3+9abc\ge 4\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)$

Ta được $\dfrac{9abc}{a+b+c}\ge 4\left(ab+bc+ca\right)-\left(a+b+c\right)^2$, khi đó ta có

$$a^2b^2c^2+1+1\ge 4\left(ab+bc+ca\right)-\left(a+b+c\right)^2$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}&a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\\&\ge 4\left(ab+bc+ca\right)+4\left(ab+bc+ca\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a+b+c\right)^2\\&\ge 4\left(ab+bc+ca\right)+4\left(ab+bc+ca\right)+ab+bc+ca=9\left(ab+bc+ca\right)\end{aligned}$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất.

Cách 3. Ngoài các cách trên ta có thể tham khảo thêm cách sử dụng nguyên lí Dirichlet như sau:

Trong ba số $a^2-1;\ b^2-1;\ c^2-1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là $a^2-1;\ b^2-1$, khi đó ta được

$\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow a^2b^2-a^2-b^2+1\ge 0$. Ta có

$$\begin{aligned}&\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)=a^2b^2c^2+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\\&=c^2\left(a^2b^2-a^2-b^2+1\right)+\left(2a^2b^2+2\right)+\left(3b^2c^2+3\right)+\left(3c^2a^2+3\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\\&\ge\left(2a^2b^2+2\right)+\left(3b^2c^2+3\right)+\left(3c^2a^2+3\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned}&2a^2b^2+2\ge 4ab;\ 3b^2c^2+3\ge 6bc;\ 3c^2a^2+3\ge 6ca;\\&a^2+b^2\ge 2ab;\ 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(ab+bc+ca\right)\end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(2a^2b^2+2\right)+\left(3b^2c^2+3\right)+\left(3c^2a^2+3\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$$

Suy ra $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 9\left(ab+bc+ca\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\left(a+b+c\right)=3bc$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+b\right)^3+\left(a+c\right)^3+3\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)\le 5\left(b+c\right)^3$$

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$, Quan sát bất đẳng thức trên ta có một số nhận xét như sau:

+ Bất đẳng thức có ba biến nhưng chỉ có b, c có vai trò như nhau, do vậy ta cố gắng quy bất đẳng thức hai biến bằng phép đặt ẩn phụ.

+ Bất đẳng thức có sự xuất hiện của các đại lượng $a+b;\ b+c;\ c+a$, cho nên ta cũng có thể đổi biến $x=a+b;\ y=b+c;\ z=c+a$.

+ Giả thiết $a\left(a+b+c\right)=3bc$ ta có thể viết được thành $\left(a+b\right)\left(a+c\right)=4bc$, khi đó có thể sử dụng các bất đẳng thức AM – GM hoặc một số bất đẳng thức phụ để đánh giá

Từ các nhận xét đó ta có một số ý tưởng chứng minh bất đẳng thức như sau

Cách 1. Trước hết ta viết lại giả thiết

$$a\left(a+b+c\right)=3bc\Leftrightarrow a^2+ab+bc+ca=4bc\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a+c\right)=4bc$$

Lúc này ta đặt $x=a+b;\ y=a+c$ thì được $xy=4bc$

Để ý đến đánh giá

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}.\left[\left(x-y\right)^2+xy\right]\\&=\sqrt{2\left[\left(x-y\right)^2+2xy\right]}.\left[\left(x-y\right)^2+xy\right]=\sqrt{2\left[\left(b-c\right)^2+8bc\right]}.\left[\left(b-c\right)^2+4bc\right]\\&=\sqrt{2\left[\left(b+c\right)^2+4bc\right]}.\left(b+c\right)^2\le\sqrt{4\left(b+c\right)^2}.\left(b+c\right)^2=2\left(b+c\right)^3\end{aligned}$$

Do đó ta được $\left(a+b\right)^3+\left(a+c\right)^3\le 2\left(b+c\right)^3$. Ta cần chứng minh

$\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)\le\left(b+c\right)^3$.

Thật vậy $\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)=4bc\left(b+c\right)\le\left(b+c\right)^2\left(b+c\right)=\left(b+c\right)^3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Đặt $x=b+c; y=c+a; z=a+b$, suy ra $a=\frac{b+c-a}{2}; b=\frac{c+a-b}{2}; z=\frac{a+b-c}{2}$

Khi đó giả thiết được viết lại thành $\frac{(y+z)^2-x^2}{4}=\frac{3\left[x^2-(y-z)^2\right]}{4} \Leftrightarrow x^2=y^2+z^2-yz$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$y^3+z^3+3xyz \le 5x^3 \Leftrightarrow (y+z)(y^2+z^2-yz)+3xyz \le 5x^3 \Leftrightarrow x(y+z)+3yz \le 5x^2$$

Từ giả thiết $x^2=y^2+z^2-yz$ suy ra $x^2 \ge yz$ và $2x \ge y+z$

Điều này dẫn đến $3x^2 \ge 3yz$ và $2x^2 \ge x(y+z)$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $5x^2 \ge x(y+z)+3yz$.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 3. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{(a+b)^3}{(b+c)^3}+\frac{(a+c)^3}{(b+c)^3}+\frac{3(a+b)(a+c)(b+c)}{(b+c)^3} \le 5$$

Đặt $x=\frac{a+b}{b+c}$; $y=\frac{a+c}{b+c}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành trở thành

$x^3+y^3+3xy \le 5$

Ta có $xy=\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{a+c}{b+c}=\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}=\frac{a(a+b+c)+bc}{(b+c)^2}=\frac{2a(a+b+c)-2bc}{(b+c)^2}$

Do đó ta được $xy+1=\frac{(a+b)^2+(a+c)^2}{(b+c)^2}=x^2+y^2$

Suy $x^3+y^3=x+y$ nên $x^3+y^3+3xy \le 5 \Leftrightarrow x+y+3xy \le 5$

Mà ta có $\qquad (x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)=\frac{xy+1}{2} \le \frac{1}{2}+\frac{(x+y)^2}{8} \Rightarrow x+y \le 2 \Rightarrow xy \le 1$

Do đó ta được $x+y+3xy \le 5$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 4. Giả thiết được viết lại thành

$$a(a+b+c)=3bc \Leftrightarrow a^2+ab+bc+ca=4bc \Leftrightarrow (a+b)(a+c)=4bc$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $3bc=a(a+b+c) \ge 3a\sqrt[3]{abc} \Rightarrow a \le \sqrt{bc}$. Ta có

$$\begin{aligned}(a+b)^3+(a+c)^3&=(a+b)(a+c)(2a+b+c)+(b-c)^2(2a+b+c)\\&\le 4bc\left(2\sqrt{bc}+b+c\right)+(b-c)^2\left(2\sqrt{bc}+b+c\right)\\&=\left(2\sqrt{bc}+b+c\right)\left[(b-c)^2+4bc\right]=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2(b+c)^2\le 2(b+c)^3\end{aligned}$$

Lại có $(a+b)(a+c)(b+c)=4bc(b+c)\le(b+c)^2(b+c)\le(b+c)^3$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}+\frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}+\frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}}\ge 2$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy, để đơn giản hóa ta cần thực hiện phép đổi biến $x=a\sqrt{a};\ y=b\sqrt{b};\ z=c\sqrt{c}$, tuy nhiên ta không thể đổi biến ở các tử số, do đó ta cần phải biến đổi tử số sao cho xuất hiện các đại lượng $a\sqrt{a};\ b\sqrt{b};\ c\sqrt{c}$, nhưng biến đổi theo cách nào đây? Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá $a^2(b+c)\ge 2a^2\sqrt{bc}$, để ý đến giả thiết $abc=1$, nên ta thay $\sqrt{bc}$ bằng $\frac{1}{\sqrt{a}}$, khi đó ta được $a^2(b+c)\ge 2a^2\sqrt{bc}=2a\sqrt{a}=2x$, áp dụng tương tự ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}+\frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}+\frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}}&\ge\frac{2a^2\sqrt{bc}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}+\frac{2b^2\sqrt{ca}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}+\frac{2c^2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}}\\&=\frac{2a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}+\frac{2b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}+\frac{2c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}}=\frac{2x}{y+2z}+\frac{2y}{z+2x}+\frac{2z}{x+2y}\end{aligned}$$

Bây giờ ta cần chỉ ra được $\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\ge 1$.

Đến đây ta có hai hướng để chứng minh bất đẳng thức trên

+ Hướng 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức.

Ta có $\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}=\frac{x^2}{x(y+2z)}+\frac{y^2}{y(z+2x)}+\frac{z^2}{z(x+2y)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}$

Theo một đánh giá quen thuộc ta nhận thấy $\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}\ge 1$.

Do đó ta có $\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\ge 1$, tức là bài toán được chứng minh.

+ Hướng 2. Tiếp tục đổi biến để đơn giản hóa các mẫu số

Đặt $m=y+2z;\ n=z+2x;\ p=x+2y$ khi đó ta suy ra

$$x=\frac{4n+p-2m}{9};\ y=\frac{4p+m-2n}{9};\ z=\frac{4m+n-2p}{9}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{4n+p-2m}{9m}+\frac{4p+m-2n}{9n}+\frac{4m+n-2p}{9p}\ge 1$$

Hay $$4\left(\frac{n}{m}+\frac{p}{n}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{n}{p}+\frac{m}{n}\right)\ge 15$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy ta luôn có

$$4\left(\frac{n}{m}+\frac{p}{n}+\frac{m}{p}\right)\ge 4.3.\sqrt[3]{\frac{n}{m}.\frac{p}{n}.\frac{m}{p}}=12;\ \frac{p}{m}+\frac{n}{p}+\frac{m}{n}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{p}{m}.\frac{n}{p}.\frac{m}{n}}=3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Đầu tiên ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta có thấy để dễ đánh giá hơn ta cần đổi chiều bất đẳng thức, khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2}\ge\frac{3}{2}$$

Đến đây ta có các hướng tiếp cận bất đẳng thức trên như sau:

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Tuy nhiên để sử dụng được đánh giá đó ta cần viết các tử số thành bình phương đúng. Như vậy cách thứ nhất là ta viết biểu thức

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}=\frac{a^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+2}\ \text{ hoặc }\ \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}=\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{a^2+b^2+2}.$$

Ta tiếp cận với từng trường hợp

+ Trường hợp biến đổi biểu thức theo cách thứ nhất và áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta thu được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+6}$$

Bất đẳng sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $2\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)+9$. Kết hợp với giả thiết $a+b+c=3$ thì bất đẳng trên trở thành $3\ge a^2+b^2+c^2$, rõ ràng đánh giá trên là sai.

+ Trường hợp biến đổi biểu thức theo cách thứ hai và áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta thu được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2}\ge\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+6}$$

Bất đẳng sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$2\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2\ge 6\left(a^2+b^2+c^2\right)+18$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2\left(\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(a^2+b^2\right)}\right)\ge a^2+b^2+c^2+9$$

Quan sát các đại lượng vế trái ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, tức là ta có

$$\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}\ge b^2+ca;\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}\ge c^2+ab;\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(a^2+b^2\right)}\ge a^2+bc$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}&2\left(\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}+\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(a^2+b^2\right)}\right)\\&\ge 2\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)=a^2+b^2+c^2+\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+9\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2. Tiếp tục với bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức nhưng ta cần tạo ra bình phương đúng trên các tử số, khi đó ta có các cách sau

Biến đổi biểu thức $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}=\frac{1}{1+\frac{2}{a^2+b^2}}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}}$, áp dụng tương tự và sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2}$$
$$\ge \frac{4(a+b+c)^2}{(a+b)^2+\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}+(b+c)^2+\frac{2(b+c)^2}{b^2+c^2}+(c+a)^2+\frac{2(c+a)^2}{c^2+a^2}}$$

Ta cần chứng minh được

$$8(a+b+c)^2\ge 3\left[(a+b)^2+\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}+(b+c)^2+\frac{2(b+c)^2}{b^2+c^2}+(c+a)^2+\frac{2(c+a)^2}{c^2+a^2}\right]$$

Hay $\qquad 24\ge (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+\frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{2(b+c)^2}{b^2+c^2}+\frac{2(c+a)^2}{c^2+a^2}$

Biến đổi tương đương ta thu được

$$(a-b)^2\left(\frac{6}{a^2+b^2}-1\right)+(b-c)^2\left(\frac{6}{b^2+c^2}-1\right)+(c-a)^2\left(\frac{6}{c^2+a^2}-1\right)\ge 0$$

Đến đây mà ta chỉ ra được $\frac{6}{a^2+b^2}-1\ge 0;\ \frac{6}{b^2+c^2}-1\ge 0;\ \frac{6}{c^2+a^2}-1\ge 0$ thì bài toán được chứng minh hoàn tất. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên để đơn giản hóa ta nên sắp thứ tự các biến, khi đó chỉ cần chứng minh hiệu nhỏ nhất không âm là được.

Giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó ta được $\frac{6}{a^2+b^2}\le\frac{6}{c^2+a^2}\le\frac{6}{b^2+c^2}$. Khi đó xẩy ra các trường hợp sau

- Nếu $a^2+b^2\le 6$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Nếu $a^2+b^2\ge 6$, khi đó ta được $\frac{6}{a^2+b^2}-1\le 0$, như vậy nhận định trên hoàn toàn sai và ta phải hướng khác. Tuy nhiên sau một quá trình biến vất vả mà dừng tại đây thì hơi phí, ta nên thử xem với $a^2+b^2\ge 6$, có khai thác được gì không?

Dễ thấy với $a^2+b^2\ge 6$ ta được $\frac{1}{a^2+b^2+2}\le\frac{1}{8}$ và $a+b<3\Rightarrow b<\frac{3}{2}$, khi này ta được

$$\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}\le\frac{1}{8-b^2}+\frac{1}{b^2+2}=\frac{10}{16+b^2\left(6-b^2\right)}<\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

Do đó ta lại có $\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}$. Vậy trong trường hợp này bất đẳng thức cũng đúng. Nên bài toán cũng được chứng minh.

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy chưa thể sử dụng được ngay các các bất đẳng thức AM – GM hay Cauchy – Schwarz. Với những bài toán như thế này thì ý tưởng đầu tiên có thể là biến đổi tương đương vì bất đẳng thức có hình thức không quá cồng kềnh phức tạp.

Cách 1. Đầu tiên với ý tưởng biến đổi tương đương, ta quy đồng và được bất đẳng thức sau:

$$\frac{a\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{b}+\frac{b\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{c}+\frac{c\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{a}\ge\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(a+b\right)\left(b+c\right)$$

Khai triển các vế ta được

$$\frac{a\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{b}+\frac{b\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{c}+\frac{c\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{a}$$
$$=\frac{a^2c}{b}+a^2+ab+ac+\frac{ab^2}{c}+\frac{b^3}{c}+b^2+ab+c^2+\frac{bc^2}{a}+\frac{b^2c}{a}$$

Và $\left(a+b\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(a+b\right)\left(b+c\right)=a^2+3b^2+c^2+3ab+3bc$

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2c}{b}+\frac{ab^2}{c}+\frac{b^3}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{b^2c}{a}\ge 2b^2+2ab+ab$$

Quan sát đánh giá trên ta nghĩ đến bất đẳng thức AM – GM, khi đó ta có

$$\frac{a^2c}{b}+\frac{b^3}{c}\ge 2ab;\ \frac{b^2c}{a}+\frac{ab^2}{c}\ge 2b^2;\ \frac{a^2c}{b}+\frac{c^2b}{a}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^2b}{a}\ge 4bc$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a^2c}{b}+\frac{ab^2}{c}+\frac{b^3}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{b^2c}{a}\ge 2b^2+2ab+ab$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Từ ý tưởng biến đổi tương đương như trên ta có nhận xét

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+2=\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=\frac{(a+2b+c)^2}{ab+b^2+bc+ca}$$

Quan sát chiều bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Vấn đề là ta triển khai vế trái như thế nào để khi áp dụng bất đẳng thức trên thì có vế phải như trên. Để ý là trong phép biến đổi trên ta đã cộng thêm vào vế trái với 1 và chú ý đến sự xuất hiện của 2b nên ta có đánh giá sau

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}+\frac{b^2}{b^2}\ge\frac{(a+b)^2}{ab+bc}+\frac{(b+c)^2}{ca+b^2}\ge\frac{(a+2b+c)^2}{ab+bc+ca+b^2}$$

Từ hai kết quả trên ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\ge\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+2$

Hay $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$. Điều này có nghĩa là bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy theo bất đẳng thức AM – GM thì

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3;\ \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1\ge 3$$

Và lại thấy $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}-2=\frac{(a+b)^2+(b+c)^2-2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=\frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$

Nên ta sẽ chứng minh $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\ge\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}-2$. Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{a-b}{b}+\frac{b-c}{c}+\frac{c-a}{a}\ge\frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Để ý rằng $b-c=b-a+a-c$, do đó ta viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{c}+\frac{c-a}{a}-\frac{c-a}{c}\ge\frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Hay
$$\frac{(a-b)(c-b)}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\ge\frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Tiếp tục khai triển và thu gọn ta được

$$b(c-a)^2(b^2+ab+bc)\ge a(a-b)(b-c)(a+b)(b+c)\Leftrightarrow(b-ac)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng hay bài toán được chứng minh xong.

Bài 14. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\left(b+c\right)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b\left(c+a\right)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c\left(a+b\right)}{a^2+ab+b^2}\ge 2$$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Có thể nói đây là một bất đẳng thức khó, ngay cả bước đầu dự đoán dấu đẳng thứ xẩy ra. Bất đẳng thức trên xẩy ra dấu đẳng thức không chỉ tại $a=b=c$ mà còn tại $a=b,c=0$ và các hoán vị. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể đánh trực tiếp được mẫu vì các đại lượng $a^2;\ b^2;\ c^2$ trội hơn các đại lượng $ab; bc;\ ca$. Do đó để có thể đưa ra các đánh giá hợp lí ta cần biến đổi các phân thức trước. Chú ý là ta có thể đưa một trong hai thừa số trên tử xuống mẫu, nhưng ta chọn đưa $b+c$ vì dưới mẫu có $b^2+bc+c^2=\left(b+c\right)^2-bc$. Khi này ta được

$$\frac{a\left(b+c\right)}{b^2+bc+c^2}=\frac{a\left(b+c\right)}{\left(b+c\right)^2-bc}=\frac{a}{\left(b+c\right)-\dfrac{bc}{b+c}}$$

Đến đây thấy có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức được nên ta lại biến đổi như sau

$$\frac{a\left(b+c\right)}{b^2+bc+c^2}=\frac{a^2\left(b+c\right)}{a\left(b+c\right)^2-abc}=\frac{a^2}{a\left(b+c\right)-\dfrac{abc}{b+c}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{b\left(c+a\right)}{c^2+ca+a^2}=\dfrac{b^2}{b\left(c+a\right)-\dfrac{abc}{c+a}};\ \dfrac{c\left(a+b\right)}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{c^2}{c\left(a+b\right)-\dfrac{abc}{a+b}}$

Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}&\frac{a\left(b+c\right)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b\left(c+a\right)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c\left(a+b\right)}{a^2+ab+b^2}\\&=\frac{a^2}{a\left(b+c\right)-\dfrac{abc}{b+c}}+\frac{b^2}{b\left(c+a\right)-\dfrac{abc}{c+a}}+\frac{c^2}{c\left(a+b\right)-\dfrac{abc}{a+b}}\\&\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(ab+bc+ca\right)-abc\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)}\end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 4(ab+bc+ca)-2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge 2(ab+bc+ca)$$

Theo bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$ ta được

$$a^2+b^2+c^2+2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}$$

Ta cần chỉ ra được $a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\ge 2(ab+bc+ca)$, bất đẳng thức này tương đương với $a^3+b^3+c^3+3abc\ge a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó ta có

$$(a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c$.

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh có các đại lượng bậc hai liên quan đến $a^2+b^2+c^2$ hoặc $ab+bc+ca$, do đó ta thử tìm mối liên hệ với các đại lượng này xem sao. Để ý là ta sẽ chỉ tìm mối liên hệ $ab+bc+ca$ thôi vì như cách 1 thì $a^2+b^2+c^2$ trội hơn nên muốn đánh giá theo chiều tăng lên là rất khó. Để ý ta nhận thấy $b^2+bc+c^2+ab+ca+ca=(b+c)(a+b+c)$.

Như vậy ý tưởng là làm dưới mẫu xuất hiện tổng $b^2+bc+c^2+ab+c+ca$, điều này có thể thực hiện được bằng cách nhân cả tử và mẫu với $ab+bc+ca$ rồi sử dụng đánh giá AM – GM. Như vậy ta sẽ làm như sau

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}=\frac{a(b+c)(ab+bc+ca)}{(b^2+bc+c^2)(ab+bc+ca)}\ge\frac{4a(b+c)(ab+bc+ca)}{(b^2+bc+c^2+ab+bc+ca)^2}$$
$$=\frac{4a(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}$$
$$\ge \frac{4a(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2}+\frac{4b(ab+bc+ca)}{(c+a)(a+b+c)^2}+\frac{4c(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+b+c)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{4a(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2}+\frac{4b(ab+bc+ca)}{(c+a)(a+b+c)^2}+\frac{4c(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+b+c)^2}\ge 2$$

Để ý ta viết lại bất đẳng thức trên thành $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$

Đánh giá trên đúng theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức.

Do vậy bất bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)^2\ge 4(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Phân tích và lời giải

Ta nhận thấy cách phát biểu của bất đẳng thức có dạng $A^2\ge 4BC$, với

$$A=\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right);\ B=(ab+bc+ca);\ C=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Nhận xét này khá đặc biệt, nó giúp ta liên hệ với đánh giá quen thuộc của bất đẳng thức AM – GM dạng $(x+y)^2\ge 4xy$ với $x,y\ge 0$. Do đó một cách tự nhiên ta đưa ra các hướng tiếp cận bất đẳng thức trên là:

+ Thứ nhất. Biểu diễn $A=X+Y$, với X, Y là hai đại lượng thích hợp để có được bất đẳng thức $A^2\ge 4XY$, từ đó chứng minh $XY\ge BC$. Trước hết ta triển khai A và BC như sau

$$A=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=X+Y;\ \ BC=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}$$

Để ý thấy trong BC có các hạng tử $\frac{ab}{c^2};\frac{bc}{a^2};\frac{ac}{b^2}$ và trong $X+Y$ có $\frac{a}{c},\frac{b}{c};\frac{c}{a},\frac{b}{a};\frac{c}{b},\frac{a}{b}$. Do đó ta chọn X và Y sao cho tích XY có chứa các hạng tử $\frac{ab}{c^2};\frac{bc}{a^2};\frac{ac}{b^2}$, ta có thể chọn như sau $X=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right);\ Y=\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$. Từ các nhận xét trên ta có các lời giải như dưới đây

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta được

$$\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)^2=\left[\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]^2\ge 4\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

Ta cần chứng minh $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{ab}{c^2}+\frac{b}{c}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b}{a}+\frac{bc}{a^2}+\frac{c}{b}+1+\frac{c}{a}+\frac{ac}{b^2}\ge\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{ac}{b^2}+\frac{a}{c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{bc}+1\ge\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\Leftrightarrow\frac{a^2+bc-ac-ab}{bc}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(a-b)(a-c)}{bc}\ge 0$$

Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau, nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b,\ a\ge c$. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

\+ Thứ hai. Biểu diễn $BC=\frac{B}{D}\cdot CD$ với D là một đại lượng thích hợp để có được bất đẳng thức $4BC\le\left(\frac{B}{D}+CD\right)^2$, từ đó chứng minh $\frac{B}{D}+CD\le A$. Ta tìm D như sau:

Xét hiệu $A-\frac{B}{D}-CD=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}-\frac{ab+bc+ca}{D}-D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

Để ý là khi xem b là một biến thì hệ số của b là $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{a+c}{D}$, như vậy để thu biểu thức ta có thể cho hệ số của b bằng 0 hay chọn $D=ac$. Từ các nhận xét trên ta có các lời giải như dưới đây

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$4(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le\left[\frac{ab+bc+ca}{ca}+ca\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]^2$$

Ta cần chứng minh $\frac{ab+bc+ca}{ca}+ca\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $\frac{(a-b)(b-c)}{b^2}\ge 0$, Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau, nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 16. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 16(a+b+c)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}+\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3}+\frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3}\le\frac{8}{9}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$, nên khi đó từ giả thiết ta thấy được $\frac{1}{a}=16a\Rightarrow a=\frac{1}{4}$, do đó đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Đầu tiên ta bắt đầu với giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 16(a+b+c)$. Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$16(a+b+c)\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(ab+bc+ca)}\ge\frac{3(a+b+c)}{(ab+bc+ca)}$$

Hay $\frac{1}{6(ab+bc+ca)}\le\frac{8}{9}$. Như vậy ta có gắng chứng minh được

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}+\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3}+\frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3}\le\frac{1}{6(ab+bc+ca)}$$

Để chứng minh được điều đó ta cần chỉ ra được $\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3\ge A$ và ta phải xác định được A. Điều này làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức AM – GM theo hướng từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Để ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{4}$ khi đó ta thấy $a+b=\sqrt{\frac{a+c}{2}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}$

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương trên ta có

$$a+b+\sqrt{2(a+c)}=a+b+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$$

Hay $\left(a+b+2\sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)^3\ge\frac{27(a+b)(a+c)}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}\le\frac{2}{27(a+b)(a+c)}$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3}\le\frac{2}{27(b+c)(b+a)};\ \frac{1}{\left(c+b+\sqrt{2(c+b)}\right)^3}\le\frac{2}{27(c+a)(c+b)}$$

Cộng theo các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}+\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3}+\frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3}\le\frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được $\frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{1}{6(ab+bc+ca)}$

Hay $8(a+b+c)(ab+bc+ca)\le 9(a+b)(b+c)(c+a)$.Đánh giá trên ta một đánh giá đúng

Do đó $\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}+\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3}+\frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3}\le\frac{1}{6(ab+bc+ca)}$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Bài 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}\le\frac{(a+b+c)^3}{18}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$, quan sát đại lượng vế trái và chiều bất đẳng thức ta nghĩ đến việc đổi chiều bất đẳng thức. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3-\frac{a^3}{1+a^3}+\frac{b^3}{1+b^3}+\frac{c^3}{1+c^3}\le\frac{(a+b+c)^3}{18}\Leftrightarrow 18\left(\frac{a^3}{1+a^3}+\frac{b^3}{1+b^3}+\frac{c^3}{1+c^3}\right)+(a+b+c)^3\ge 54$$

Để ý rằng $abc=1$ thì $\frac{a^3}{1+a^3}=\frac{a^3}{abc+a^3}=\frac{a^2}{bc+a^2}$ nên bất đẳng thức trên trở thành

$$18\left(\frac{a^2}{bc+a^2}+\frac{b^2}{ca+b^2}+\frac{c^2}{ab+c^2}\right)+(a+b+c)^3\ge 54$$

Lại cũng từ $abc=1$ ta có $(a+b+c)^3\ge 27abc=27$, do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{a^2}{bc+a^2}+\frac{b^2}{ca+b^2}+\frac{c^2}{ab+c^2}\ge\frac{3}{2}$

Vế trái của đánh giá trên có dấu hiệu áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Lúc này ta được

$$\frac{a^2}{bc+a^2}+\frac{b^2}{ca+b^2}+\frac{c^2}{ab+c^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Và ta cần chỉ ra được $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}\ge\frac{3}{2}$ hay $ab+bc+ca\ge a^2+b^2+c^2$, đây là một đánh giá sai. Do đó ta không thể tách ra chứng minh như trên được.

Tuy nhiên để ý đến khi $a=b=c=1$ thì $\frac{18(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}=(a+b+c)^3=27$

Điều này gợi ý cho ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng $x+y\ge 2\sqrt{xy}$.

Khi đó ta được $\frac{18(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}+(a+b+c)^3\ge 2\sqrt{\frac{18(a+b+c)^5}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\sqrt{\frac{18(a+b+c)^5}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}}\ge 54\Leftrightarrow (a+b+c)^5\ge\frac{81}{2}\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\begin{aligned}(a+b+c)^6&=\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)+(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)\right]^3\\&\ge 27\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)^2\ge 81abc\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)\\&=81\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)\end{aligned}$$

Khi đó ta được $(a+b+c)^5\ge 81\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Như vậy ta chỉ cần chỉ ra rằng $2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

Bất đẳng thức trên tương đương với $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$, là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+4}+\frac{1}{b+c+4}+\frac{1}{c+a+4}\le\frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Từ giả thiết và bất đẳng cần chứng minh đều gợi ý cho ta phép đổi biến

+ Ý tưởng thứ nhất là $a=x^3;\ b=y^3;\ c=z^3$ để sử dụng một đánh giá quen thuộc là

$$x^3+y^3+4\ge xy(x+y)+4xyz\ge xy(x+y+4z)$$

+ Ý tưởng thứ hai ta đổi biến dạng $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$ hoặc $a=\frac{x^2}{yz};b=\frac{y^2}{zx};c=\frac{z^2}{xy},\ldots$

Cách 1. Đặt $a=x^3;b=y^3;c=z^3$, từ giả thiết $abc=1$ suy ra $xyz=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{1}{x^3+y^3+4}+\frac{1}{y^3+z^3+4}+\frac{1}{z^3+x^3+4}\le\frac{1}{2}$

Để ý ta thấy $x^3+y^3+4\ge xy(x+y)+4xyz\ge xy(x+y+4z)$, áp dụng tương tự ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{xy(x+y+4z)}+\frac{1}{yz(y+z+4x)}+\frac{1}{zx(z+x+4y)}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{z}{x+y+4z}+\frac{x}{y+z+4x}+\frac{y}{z+x+4y}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{4z}{x+y+4z}+\frac{4x}{y+z+4x}+\frac{4y}{z+x+4y}\le 2$$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{4z}{x+y+4z}+\frac{4x}{y+z+4x}+\frac{4y}{z+x+4y}\ge 1\Leftrightarrow\frac{x+y}{x+y+4z}+\frac{y+z}{y+z+4x}+\frac{z+x}{z+x+4y}\ge 1$$

Đặt $A=\frac{x+y}{x+y+4z}+\frac{y+z}{y+z+4x}+\frac{z+x}{z+x+4y}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$A\ge\frac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(x+y+4z)+(y+z)(y+z+4x)+(z+x)(z+x+4y)}=\frac{4(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+10(xy+yz+zx)}$$

Để chứng minh $A\ge 1$, ta cần chứng minh

$$4(x+y+z)^2 \ge 2(x^2+y^2+z^2)+10(xy+yz+zx) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi $x,y,z>0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}$ khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{yz}{xz+y^2+4yz}+\frac{zx}{xy+z^2+4zx}+\frac{xy}{yz+x^2+4xy} \le \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{xz+y^2}{xz+y^2+4yz}+\frac{xy+z^2}{xy+z^2+4zx}+\frac{yz+x^2}{yz+x^2+4xy} \ge 1$

Ta tách ra chứng minh hai bất đẳng thức sau

$$\frac{y^2}{xz+y^2+4yz}+\frac{z^2}{xy+z^2+4zx}+\frac{x^2}{yz+x^2+4xy} \ge \frac{1}{2}$$
$$\frac{zx}{xz+y^2+4yz}+\frac{xy}{xy+z^2+4zx}+\frac{yz}{yz+x^2+4xy} \ge \frac{1}{2}$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức thứ nhất

Dễ thấy theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{y^2}{xz+y^2+4yz}+\frac{z^2}{xy+z^2+4zx}+\frac{x^2}{yz+x^2+4xy} \ge \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$$

Ta cần chỉ ra được $\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)} \ge \frac{1}{2}$ hay

$$2(x+y+z)^2 \ge x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx) \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng, do vậy bất đẳng thức thứ nhất được chứng minh.

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{zx}{xz+y^2+4yz}+\frac{xy}{xy+z^2+4zx}+\frac{yz}{yz+x^2+4xy} \ge \frac{(xy+yz+zx)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+5(x^2yz+xy^2z+xyz^2)}$$

Ta cần chỉ ra được

$$2(xy+yz+zx)^2 \ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+5(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$
$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \ge 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng, do vậy bất đẳng thức thứ hai được chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh xong

Bài 19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\le 1$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức nhận thấy nếu vế trái là một số âm thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp vế trái dương là được. Bài toán có giả thiết rất phức tạp nên trước hết ta đánh giá giả thiết trước. Quan sát hai vế của giả thiết ta nghĩ đến đánh giá $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$. Do đó ta nhân hai vế của giả thiết với $\left(a+b+c\right)$ và áp dụng đánh giá trên ta suy ra được $a+b+c\ge 3$. Bây giờ ta cần chứng minh được $\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\le 1$. Để đơn giản hóa bài toán ta có thể bổi biến phụ $x=b+c-a;\ y=c+a-b;\ z=a+b-c$ và khi này ta cần chứng minh $xyz\le 1$ với giả thiết mới là $x+y+z\ge 3$. Với giả thiết và kết luận như vậy ta thấy khó có thể đưa ra được các đánh giá hợp lí, do đó ta nghĩ đến việc sử dụng tiếp giả thiết ban đầu và với cách đổi biến như trên ta viết lại được giả thiết là $x+y+z=\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}$. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM để đánh giá ta được

$$x+y+z=\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\le\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Hay $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge\sqrt{xyz}\left(x+y+z\right)$. Đến đây ta cũng chưa thể chỉ ra được $xyz\le 1$

Để ý đến đẳng thức xẩy ra tại $x=y=z=1$ nên theo đánh giá AM – GM ta có

$$\frac{x+y+z+3}{2}\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Kết hợp với trên ta được $\frac{x+y+z+3}{2}\ge\sqrt{xyz}\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow x+y+z+3\ge 2\sqrt{xyz}\left(x+y+z\right)$

Để ý lại có $x+y+z\ge 3$ nên $2\left(x+y+x\right)\ge x+y+z+3$ nên ta được

$$2\left(x+y+z\right)\ge 2\sqrt{xyz}\left(x+y+z\right)\Rightarrow 2\ge 2\sqrt{xyz}\Leftrightarrow xyz\le 1$$

Đến đây bài toán được chứng minh

Ngoài ra cũng từ cách phân tích như trên ta có thể chứng minh theo phương pháp phản chứng như sau

Giả sử $xyz>1$. Khi đó theo bất đẳng thức AM – GM ta được

$$x+y+z=\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\le \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Hay $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge \sqrt{xyz}\left(x+y+z\right)$, vì $xyz>1$ nên $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}>x+y+z$

Tuy nhiêm cũng theo bất dẳng thức AM – GM ta được $\sqrt{x}\le \frac{x+1}{2}$, thiết lập các đánh giá tương tự ta có

$$\frac{x+y+z+3}{2}\ge \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}>x+y+z\Rightarrow x+y+z<3$$

Mặt khác $x+y+z=\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\ge \frac{9}{x+y+z}\Rightarrow x+y+z\ge 3$

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử trên là sai, do vậy $xyz\ge 1$. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh, dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. *Ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng theo hướng như sau*

Giả sử $xyz<1$, *khi đó từ giả thiết của bài toán suy ra*

$$\left(x+y+z\right)^2\left(xy+yz+zx\right)=2\left(x+y+z\right)+2\left(xy+yz+zx\right)+xyz\left(x+y+z\right)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM và kết hợp với giả sử ta lại có

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}>3;\ x+y+z>3$$

Do đó

$$\frac{2\left(x+y+z\right)^2\left(xy+yz+zx\right)}{3}>2\left(x+y+z\right)^2$$
$$\frac{2\left(x+y+z\right)^2\left(xy+yz+zx\right)}{9}>2\left(xy+yz+zx\right)$$
$$\frac{2\left(x+y+z\right)^2\left(xy+yz+zx\right)}{9}>xyz\left(x+y+z\right)$$

Cộng theo vế a bất đẳng thức trên ta được

$$\left(x+y+z\right)^2\left(xy+yz+zx\right)>2\left(x+y+z\right)+2\left(xy+yz+zx\right)+xyz\left(x+y+z\right)$$

Điều này mâu thuẫn với đẳng thức trên, do đó điều giả sử là sai. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Bài 20. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Bây giờ ta đi phân tích xem có thêm cách chứng minh nào khác nữa hay không?

Cách 1. Nhận thấy bất đẳng thức có chứa căn bậc hai, do đó nên ta có thể đánh giá làm mất các dấu căn bậc hai thì cơ hội sẽ cao hơn. Tuy nhiên các đánh giá mẫu thức đều không đem lại hiệu quả. Do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến. Chú ý là ta có thể đổi biến các mẫu thức cũng có thể đổi biến các phân thức. Ở đây ta chọn cách đổi biến cả phân thức.

Đặt $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}};y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}};z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$. Khi đó được $x^2=\frac{a^2}{a^2+8bc}\Rightarrow\frac{a^2}{8bc}=\frac{x^2}{1-x^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b^2}{8ca}=\frac{y^2}{1-y^2};\ \frac{c^2}{8ab}=\frac{z^2}{1-z^2}$.

Khi đó ta được $\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{1}{512}\Leftrightarrow\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)=512x^2y^2z^2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x+y+z\ge 1$. Với giả thiết và bất đẳng thức như trên, để chứng minh được bài toán ta cần khai thác được tổng $x+y+z$, do đó ta nghĩ đến phương pháp phản chứng.

Giả sử $0<x+y+z<1$. Khi đó ta được

$$\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)>\left[\left(x+y+z\right)^2-x^2\right]\left[\left(x+y+z\right)^2-y\right]\left[\left(x+y+z\right)^2-z^2\right]$$

Hay $\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)>\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\left(2x+y+z\right)\left(x+2y+z\right)\left(x+y+2z\right)$

Dễ thấy $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge 8xyz;\left(x+y+z+x\right)\left(x+y+z+y\right)\left(x+y+z+z\right)\ge 64xyz$

Do đó ta được $(x+y)(y+z)(z+x)(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z) \ge 512x^2y^2z^2$

Suy ra $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > 512x^2y^2z^2$, điều này trái với giả thiết.

Vậy không thể có $0 < x+y+z < 1$, tức là $x+y+z \ge 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Để ý ta thấy $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{8bc}{a^2}}}$, hoàn toàn tương tự ta nghĩ đến đặt ẩn phụ

$$x = \frac{bc}{a^2};\ y = \frac{ca}{b^2};\ z = \frac{ab}{c^2} \Rightarrow xyz = 1$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{1}{\sqrt{1+8x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+8y}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+8z}} \ge 1$

Dễ thấy $(1+8x)(1+8y)(1+8z) = 1+8(x+y+z)+64(xy+yz+zx)+512xyz$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta suy ra được $(1+8x)(1+8y)(1+8z) \ge 3^6$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\sqrt{1+8x}.\sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8y}.\sqrt{1+8z} + \sqrt{1+8z}.\sqrt{1+8x}\right)^2 \ge (1+8x)(1+8y)(1+8z)$$
$$\Leftrightarrow 8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \ge 510$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$8(x+y+z) \ge 8;\quad \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \ge 3^3$$
$$\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{1+8x}.\sqrt{1+8y}.\sqrt{1+8z}} \ge 9$$

Do đó ta được $8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \ge 510$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Để ý theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a+b+c)^2 \le \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)\left(a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab}\right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab} = \sqrt{a}\sqrt{a^3+8abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+8abc}$$
$$\le \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}$$

Ta chứng minh được $\left(a+b+c\right)^3 \ge a^3+b^3+c^3+24abc$ nên ta được

$$a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab} \le \left(a+b+c\right)^2$$

Suy ra $\left(a+b+c\right)^2 \le \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)\left(a+b+c\right)^2$

Hay $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c$.

Bài 21. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3=c^3$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2-c^2>6\left(c-a\right)\left(c-b\right)$$

Phân tích và lời giải

Quan sát giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy vai trò như nhau của hai biến a, b. Hơn nữa từ giả thiết $a^3+b^3=c^3$, ta thu được $\dfrac{a^3}{c^3}+\dfrac{b^3}{c^3}=1$. Đến đây để đơn giản hóa ta có thể đặt $x=\dfrac{a}{c};\ y=\dfrac{b}{c}$ và như vậy giả thiết được viết thành $x^3+y^3=1$ với $0<x,\ y<1$.

Ta biến đổi để viết lại bất đẳng thức theo biến mới như sau

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}-1>6\left(1-\dfrac{a}{c}\right)\left(1-\dfrac{b}{c}\right)$, lúc này ta được bất đẳng thức cần chứng minh là $x^2+y^2-1>6\left(1-x\right)\left(1-y\right)$.

Từ giả thiết ta cần làm xuất hiện tích $\left(1-x\right)\left(1-y\right)$

Để ý từ giả thiết ta được $x^3y^3=\left(1-y^3\right)\left(1-x^3\right)=\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1+x+x^2\right)\left(1+y+y^2\right)$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có $1+x+x^2 \ge 3x;\ 1+y+y^2 \ge 3y$, do đó

$$x^3y^3 \ge 9xy\left(1-x\right)\left(1-y\right) \Leftrightarrow xy \ge 3\sqrt{\left(1-x\right)\left(1-y\right)}$$

Lại từ giả thiết ta được $x^2+y^2-1=x^2\left(1-x\right)+y^2\left(1-y\right) \ge 2xy\sqrt{\left(1-x\right)\left(1-y\right)} \ge 6\left(1-x\right)\left(1-y\right)$

Hay $x^2+y^2-1 \ge 6\left(1-x\right)\left(1-y\right)$, vì dấu đẳng thức không xẩy ra nên ta được bất đẳng thức

$$x^2+y^2-1>6(1-x)(1-y).$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right)\ge 2\sqrt{2\left(2+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+a^3+b^3+c^3\right)}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy các biến đều có lũy thừa bậc ba nên để đơn giản ta có thể đổi biến

Đặt $x=a^3;\ y=b^3;\ z=c^3$, khi đó ta có $xyz=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 2\sqrt{2(2+xy+yz+zx+x+y+z)}$

Để ý đến giả thiết $xyz=1$ ta viết lại được bất đẳng thức như sau

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge 2\sqrt{2(xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1)}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\ge 2\sqrt{2(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Bình phương hai vế ta được $\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2\ge 8(x+1)(y+1)(z+1)$

Đến đây ta nghĩ đến việc ghép theo cặp để chứng minh. Để ý bên vế trái có đại lượng $x+y$ và ta cần biến đổi làm xuất hiện $x+1$, nên ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $(x+y)^2\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2\ge (x+1)^4$ hay ta được bất đẳng thức $(x+y)^2(x+xz)^2\ge (x+1)^4 \Leftrightarrow x^2(x+y)^2(1+z)^2\ge (x+1)^4$

Tương tự ta được các bất đẳng thức $y^2(y+z)^2(1+x)^2\ge (y+1)^4;\ z^2(z+x)^2(1+y)^2\ge (z+1)^4$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$x^2y^2z^2(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2\ge (x+1)^4(y+1)^4(z+1)^4$$

Hay $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ge (1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2$

Mặt khác ta lại có $(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2\ge (1+x)(1+y)(1+z).8\sqrt{xyz}=8(1+x)(1+y)(1+z)$

Do đó ta được bất đẳng thức $\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2\ge 8(x+1)(y+1)(z+1)$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c$.

Bài 23. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}\ge 1$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được bất đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể đánh trực tiếp bằng bất đẳng thức AM – GM hay Cauchy – Schwarz được. Do đó ta tính đến phương án biến đổi bất đẳng thức trước. Từ giả thiết gợi ý cho cho ta các cách đổi biến như

$$a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}\ \text{ hoặc }\ a=\frac{x^2}{yz};\ b=\frac{y^2}{zx};\ c=\frac{z^2}{xy}\ \text{ hoặc }\ a=\frac{yz}{x^2};\ b=\frac{zx}{y^2};\ c=\frac{xy}{z^2}$$

Để ý đến tính đối xứng của bất đẳng thức ta loại cách đổi biến thứ nhất vì nó biến bất đẳng thức đối xứng thành bất đẳng thức hoán vị sẽ gây khó khăn hơn. Trong hai cách đổi biến còn lại ta ưu tiên chọn cách thứ ba vì các biến đều nằm dưới mẫu nên khi biến đổi thì các lũy thừa sẽ được đưa lên tử và cơ hội sẽ rõ ràng hơn. Hy vọng ta sẽ gặp may mắn với nhận định này.

Đặt $a=\frac{xy}{z^2};\ b=\frac{yz}{x^2};\ c=\frac{zx}{y^2}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{z^4}{(xy+z^2)^2}+\frac{y^4}{(zx+y^2)^2}+\frac{x^4}{(yz+x^2)^2}+\frac{2x^2y^2z^2}{(xy+z^2)(zx+y^2)(yz+x^2)}\ge 1$$

Để ý đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $(xy+z^2)^2\le(x^2+z^2)(y^2+z^2)$

Suy ra $\frac{z^4}{(xy+z^2)^2}\ge\frac{z^4}{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{z^4}{(xy+z^2)^2}+\frac{y^4}{(zx+y^2)^2}+\frac{x^4}{(yz+x^2)^2}\ge\frac{z^4}{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}+\frac{y^4}{(x^2+y^2)(z^2+y^2)}+\frac{x^4}{(y^2+x^2)(z^2+x^2)}$$
$$=\frac{x^4(y^2+z^2)+y^4(z^2+x^2)+z^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)}$$

Cũng theo đánh giá như trên $(xy+z^2)(zx+y^2)(yz+x^2)\le(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)$

Khi đó ta có $\frac{2x^2y^2z^2}{\left(xy+z^2\right)\left(zx+y^2\right)\left(yz+x^2\right)} \ge \frac{2x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}$

Do đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{z^4}{\left(xy+z^2\right)^2}+\frac{y^4}{\left(zx+y^2\right)^2}+\frac{x^4}{\left(yz+x^2\right)^2}+\frac{2x^2y^2z^2}{\left(xy+z^2\right)\left(zx+y^2\right)\left(yz+x^2\right)}$$
$$\ge \frac{x^4\left(y^2+z^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)+2x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)}$$

Ta cần chứng minh $\frac{x^4\left(y^2+z^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)+2x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)} \ge 1$. Để ý ta phân tích được

$$x^4\left(y^2+z^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)+2x^2y^2z^2=\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)$$

Do đó $$\frac{x^4\left(y^2+z^2\right)+y^4\left(z^2+x^2\right)+z^4\left(x^2+y^2\right)+2x^2y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)}=1.$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. *Đây thực sự là một bất đẳng thức khó và quá trình phân tích tìm lời giải cũng có phần may mắn. Tuy nhiên nếu ta không giám suy nghĩ đến các khả năng có thể xẩy ra thì may mắn đó sẽ không đến với bản thân.*

Ngoài ra các bạn có thể tham khảo thêm cách giải khác sau

Vì $abc=1$ *nên trong ba số a, b, c luôn có hai số nằm cùng phía so với 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a và b. Khi đó ta có* $\left(1-a\right)\left(1-b\right)\ge 0 \Leftrightarrow a+b\le 1+ab=\frac{c+1}{c}$

Do đó ta được $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(1+a+b+ab\right)\left(c+1\right)=2\left(1+ab\right)\left(1+c\right)\le \frac{2\left(c+1\right)^2}{c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{1}{\left(1+a\right)^2}+\frac{1}{\left(1+b\right)^2}\ge \frac{1}{\left(1+ab\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{\left(1+ab\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$
$$=\frac{b}{\left(1+ab\right)\left(a+b\right)}+\frac{a}{\left(1+ab\right)\left(a+b\right)}=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\geq \frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}=\frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2}=1$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4}+\frac{b^3c}{b^4+b^2c^2+c^4}+\frac{c^3a}{c^4+c^2a^2+a^4}\leq 1$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể rút gọn được các biến có bậc 1 ở tử mỗi phân số sau khi đánh giá mẫu số bằng cách áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương $a^4+a^2b^2\geq 2a^3b$

Do đó $\dfrac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4}\leq\dfrac{a^3b}{2a^3b+b^4}=\dfrac{a^3}{2a^3+b^3}$

Tương tự ta được

$$\frac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4}+\frac{b^3c}{b^4+b^2c^2+c^4}+\frac{c^3a}{c^4+c^2a^2+a^4}\leq\frac{a^3}{2a^3+b^3}+\frac{b^3}{2b^3+c^3}+\frac{ac^3}{2c^3+a^3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\dfrac{a^3}{2a^3+b^3}+\dfrac{b^3}{2b^3+c^3}+\dfrac{c^3}{2c^3+a^3}\leq 1$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{2a^3+b^3}+\frac{b^3}{2b^3+c^3}+\frac{c^3}{2c^3+a^3}\leq 1\Leftrightarrow\frac{b^3}{2a^3+b^3}+\frac{c^3}{2b^3+c^3}+\frac{a^3}{2c^3+a^3}\geq 1$$

Đến đây ta có hai hướng để chứng minh bất đẳng thức như sau

+ Hướng 1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{b^3}{2a^3+b^3}+\frac{c^3}{2b^3+c^3}+\frac{a^3}{2c^3+a^3}=\frac{b^6}{2a^3b^3+b^6}+\frac{c^6}{2b^3c^3+c^6}+\frac{a^6}{2c^3a^3+a^6}$$

$$\geq\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^6+b^6+c^6+2a^3b^3+2b^3c^3+2c^3a^3}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

+ Hướng 2. Ta đơn giản hóa bất đẳng thức bằng cách đặt $x=a^3;\ y=b^3;\ z=c^3$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\ge 1\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2x}{y}+1}+\frac{1}{\frac{2y}{z}+1}+\frac{1}{\frac{2z}{x}+1}\ge 1$$

Đặt $m=\frac{x}{y};\ n=\frac{y}{z};\ p=\frac{z}{x}\Rightarrow mnp=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2p+1}\ge 1$$

Hay ta cần chứng minh

$$\left(2m+1\right)\left(2n+1\right)+\left(2n+1\right)\left(2p+1\right)+\left(2p+1\right)\left(2m+1\right)\ge\left(2m+1\right)\left(2n+1\right)\left(2p+1\right)\Leftrightarrow 2\left(a+b+c\right)\ge 6$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức AM – GM và $mnp=1$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 25. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3\left(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\right)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{8a^3}{\left(bc+a\right)^3}+\frac{8b^3}{\left(ca+b\right)^3}+\frac{8c^3}{\left(ab+c\right)^3}\ge 6$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức nhận thấy đại lượng $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4$ có bậc 8 nên ta cần đánh giá đại lượng đó về đại lượng bậc thấp hơn. Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\ge a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2+b^2+c^2$$

Do đó ta có $\frac{3\left(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\right)}{a^2+b^2+c^2}\ge 3$

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{8a^3}{\left(bc+a\right)^3}+\frac{8b^3}{\left(ca+b\right)^3}+\frac{8c^3}{\left(ab+c\right)^3}\ge 3$$

Hay $\frac{a^3}{\left(bc+a\right)^3}+\frac{b^3}{\left(ca+b\right)^3}+\frac{c^3}{\left(ab+c\right)^3}\ge\frac{3}{8}$. Để ý đến $abc=1$, ta viết bất đẳng thức trên thành

$$\frac{a^3}{\left(\frac{1}{a}+a\right)^3}+\frac{b^3}{\left(\frac{1}{b}+b\right)^3}+\frac{c^3}{\left(\frac{1}{c}+c\right)^3}\ge\frac{3}{8}\Leftrightarrow\frac{a^6}{\left(1+a^2\right)^3}+\frac{b^6}{\left(1+b^2\right)^3}+\frac{c^6}{\left(1+c^2\right)^3}\ge\frac{3}{8}$$

Đặt $x=a^2;y=b^2;z=c^2 \Rightarrow xyz=1$, khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{x^3}{(1+x)^3}+\frac{y^3}{(1+y)^3}+\frac{z^3}{(1+z)^3}\ge\frac{3}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\frac{x^3}{(1+x)^3}+\frac{x^3}{(1+x)^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}\frac{x^2}{(1+x)^2};\frac{y^3}{(1+y)^3}+\frac{y^3}{(1+y)^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2};\frac{z^3}{(1+z)^3}+\frac{z^3}{(1+z)^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}\frac{z^2}{(1+z)^2}$$

Do đó ta được $\frac{2x^3}{(1+x)^3}+\frac{2y^3}{(1+y)^3}+\frac{2z^3}{(1+z)^3}+\frac{3}{8}\ge\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{y^2}{(1+y)^2}+\frac{z^2}{(1+z)^2}\right]$

Như ậy phép chứng minh hoàn sẽ hoàn tất nếu ta chứng minh được

$$\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{y^2}{(1+y)^2}+\frac{z^2}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{(yz+1)^2}+\frac{1}{(zx+1)^2}+\frac{1}{(xy+1)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Đặt $m=xy;\ n=yz;\ p=zx\Rightarrow mnp=1$, bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Ta có $\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\ge\frac{1}{(mn+1)\left(\frac{m}{n}+1\right)}+\frac{1}{(mn+1)\left(\frac{n}{m}+1\right)}=\frac{1}{mn+1}$

Mặt khác ta lại có $\frac{1}{mn+1}+\frac{1}{(p+1)^2}=\frac{p}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}=\frac{(p-1)^2}{4(p+1)^2}+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$

Do đó $\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(p+1)^2}\ge\frac{3}{4}$ là bất đẳng thức đúng

Suy ra bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$.

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b}+a^2+b^2+c^2\ge2\sqrt{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy vế phải chứa căn bậc hai nên ta cần phải đánh giá làm mất căn bậc hai trước, chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng $2\sqrt{xy} \le x+y$. Như vậy nếu ta sử dụng ngay bất đẳng thức AM – GM thì được

$$2\sqrt{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)} \le ab^3+bc^3+ca^3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Có điều khi đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM thì các đại lượng đưa ra cần phải đồng bậc. Do đó đánh giá như trên không được hợp lí.

Như vậy để đánh giá được ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trước, chú ý là hai đại lượng trong căn có bậc 4 và 0, do đó ta cố đưa về cùng bậc 2 bằng một phép biến đổi, chẳng hạn

$$2\sqrt{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)} = 2\sqrt{\frac{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)}{bc}.bc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}$$

Khi này ta có đánh giá $2\sqrt{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)} \le \frac{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)}{bc}+bc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)}{bc}+bc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \le \frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b}+a^2+b^2+c^2$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab^2}{c}+c^2+\frac{a^3}{b}+ca+b^2+\frac{bc^2}{a} \le \frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b}+a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-\frac{a^3}{b}+\frac{ca^2}{b}-ca \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a\left(b-a\right)\left(a-c\right)}{b} \ge 0$$

Đến đây ta hoàn toàn có thể giả sử trong ba số a, b, c thì a là số nằm giữa. Do đó bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 27. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b}{a^2+1}+\frac{b^4c}{b^2+1}+\frac{c^4a}{c^2+1} \ge \frac{3}{2}.$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy trên tử mỗi phân số có chứa các lũy thừa bậc chẵn. Do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Tuy nhiên trước khi áp dụng ta cần khử thừa số bậc lẻ trước.

Cách 1. Chú ý đến giả thiết $abc = 1$, ta viết lại được bất đẳng thức như sau

$$\frac{a^4}{a^3c+ac}+\frac{b^4}{b^3a+ab}+\frac{c^4}{c^3b+bc}\ge\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\frac{a^4}{a^3c+ac}+\frac{b^4}{b^3a+ab}+\frac{c^4}{c^3b+bc}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3c+b^3a+c^2b+ab+bc+ca}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3c+b^3a+c^2b+ab+bc+ca}\le\dfrac{3}{2}$

Hay $2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge3\left(a^3c+b^3a+c^3b+ab+bc+ca\right)$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge3\left(a^3c+b^3a+c^3b\right)+3\left(ab+bc+ca\right)$$

Dễ thấy theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$a^2b^2+1\ge2ab;\ b^2c^2++1\ge2bc;\ c^2a^2+1\ge2ca\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3\ge2\left(ab+bc+ca\right)$$

Mà $ab+bc+ca\ge3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$ suy ra $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab+bc+ca$

Do đó ta được $3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge3\left(ab+bc+ca\right)$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge3\left(a^3c+b^3a+c^3b\right)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức AM – GM ta được

$$a^4+a^4+a^4+b^4\ge4a^3b;\ b^4+b^4+b^4+c^4\ge4b^3c;\ c^4+c^4+c^4+a^4\ge4c^3a$$
$$\Rightarrow a^4+b^4+b^4\ge a^3b+b^3c+c^3a$$

Và

$$a^4+a^2b^2\ge2a^3b;\ b^4+b^2c^2\ge2b^3c;\ c^4+c^2a^2\ge2c^3a$$
$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge2a^3b+2b^3c+2c^3a$$

Cộng theo vế hai kết quả trên ta được

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge3\left(a^3c+b^3a+c^3b\right)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Cách 2. Khi quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến là đánh giá $\frac{a^4b}{a^2+1} \le \frac{a^4b}{2a}$, đáng tiếc là đánh giá này cho một bất đẳng thức ngược chiều. Chính điều này gợi ý cho ta sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu.

Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^4b}{a^2+1} = a^2b - \frac{a^2b}{a^2+1} \ge a^2b - \frac{a^2b}{2a} = a^2b - \frac{ab}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b^4c}{b^2+1} \ge b^2c - \frac{bc}{2}$; $\frac{c^4a}{c^2+1} \ge c^2a - \frac{ca}{2}$

Khi đó ta được $\frac{a^4}{a^3c+ac} + \frac{b^4}{b^3a+ab} + \frac{c^4}{c^3b+bc} \ge a^2b+b^2c+c^2a - \frac{ab+bc+ca}{2}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $a^2b+b^2c+c^2a - \frac{ab+bc+ca}{2} \ge \frac{3}{2}$

Hay $2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) \ge 3+ab+bc+ca$

Dễ thấy $a^2b+b^2c+c^2a \ge 3\sqrt[3]{a^2b.b^2c.c^2a} = 3$

Do đó ta cần chỉ ra được $a^2b+b^2c+c^2a \ge ab+bc+ca$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $a^2b+a^2b+b^2c \ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c} = 3ab$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự và cộng theo vế ta được

$3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right) \ge 3\left(ab+bc+ca\right)$

Hay $a^2b+b^2c+c^2a \ge ab+bc+ca$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)} + \frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \ge \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sat bất đẳng thức ta nhân thấy các dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức, sử dụng kĩ thuật đánh giá mẫu,….

Suy nghĩ đầu tiên khi quan sát bất đẳng thức đó là dấu hiệu áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức. Như vậy khi đó ta được

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)}+\frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)}$$
$$\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(b+c)(b^2+c^2)+(c+a)(c^2+a^2)+(a+b)(a^2+b^2)}$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(b+c)(b^2+c^2)+(c+a)(c^2+a^2)+(a+b)(a^2+b^2)}\ge\dfrac{3}{4}$

Để ý ta thấy khi khai triển mẫu thì xuất hiện đại lượng $a^3+b^3+c^3$ và đánh giá đại lượng đó theo kiểu $a^3+b^3+c^3\le ?$ rất phức tạp. Do đó đánh giá một cách trực tiếp như vậy có vẻ không đem lại hiệu quả. Như vậy để áp dụng có hiệu quả ta nên biến đổi bất đẳng thức về một dạng khác.

Chú ý là tại các mẫu xuất hiện tích của hai đại lượng do đó ta sẽ đưa một đại lượng lên trên tử số. Khi đó ta có các cách biến đổi là

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)}=\frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b+c}}\right)^2}{b^2+c^2}\text{ hoặc là }\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)}=\frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2}{b+c}$$

Để ý rằng sau khi áp dụng thì ta thu được biểu thức là tổng các mẫu số, do đó chú ý đến giả thiết $a+b+c=3$ thì ta chọn cách biến đổi thứ hai. Khi này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2}{b+c}+\frac{\left(\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)^2}{c+a}+\frac{\left(\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{a+b}\ge\frac{3}{4}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2}{b+c}+\frac{\left(\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)^2}{c+a}+\frac{\left(\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{a+b}\ge\frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{2(a+b+c)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\dfrac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Như vậy sau một số bước đánh giá ta đưa được về một bất đẳng thức có vẻ đơn giản hơn và bất đẳng thức cần chứng minh lúc này cũng có dấu hiệu áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức, khi đó ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}}$$

Và ta cần chứng minh được $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}\le 3\sqrt{2}$, tuy nhiên đánh giá này lại sai vì

$$\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+b+c+c+a)=3\sqrt{2}.$$

Như vậy để đảm bảo các đánh giá đúng chiều ta cần nâng lũy thừa của các phân số lên, do đó ta có đánh giá

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}+b^2\sqrt{a+c^2}+c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được

$$\begin{aligned}a^2\sqrt{b^2+c^2}+b^2\sqrt{a+c^2}+c^2\sqrt{a^2+b^2}&\le\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2\left(c^2+a^2\right)+c^2\left(a^2+b^2\right)\right]}\\&=\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}+b^2\sqrt{a+c^2}+c^2\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}}$$

Ta cần chỉ ra được $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Hay $$\left(a^2+b^2+c^2\right)\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge 3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Để ý ta nhận thấy $a^2+b^2+c^2\ge\sqrt{3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}$; $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge\dfrac{a+b+c}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. *Có thể thấy bài toán trên đã được chứng minh xong, tuy nhiên lại quá vất vả trong việc tìm lời giải. Có một điều dễ nhận ra là nếu bài này được ra trong một kì thi mà thời gian có hạn thì cách như trên sẽ lấy hết thời gian của các bài toán khác. Có phải đang có một cách giải khác ngắn gọn hơn hay không? Ta thử quan sát kỹ lại bất đẳng thức một làm nữa xem sao? Ta nhận thấy trong mỗi phân thức thì tử có bậc 4 và mẫu có bậc 3, chú ý đến giả thiết* $a+b+c=1$ *thì ta có thể đồng bậc như sau*

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)}+\frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)}\ge\frac{a+b+c}{4}$$

Do đó ta hướng đến đơn giản hóa các mẫu số, điều này làm ta nghĩ đến chứng minh một đánh giá kiểu $(x+y)(x^2+y^2)\le 2(x^3+y^3)$. *Đây là một đánh giá chứng minh được bằng phép biến đổi tương đương. Bây giờ ta thử áp dụng đánh giá đó xem sao*

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)}+\frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)}$$
$$\ge\frac{a^4}{2(b^3+c^3)}+\frac{b^4}{2(c^3+a^3)}+\frac{c^4}{2(a^3+b^3)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^4}{2(b^3+c^3)}+\frac{b^4}{2(c^3+a^3)}+\frac{c^4}{2(a^3+b^3)}\ge\frac{a+b+c}{4}$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh được bằng cách áp dụng đồng thời bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và bất đẳng thức Cauchy.

Bài 29. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}}\le\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dụ đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy được sự phức tạp của bài toán. Suy nghĩ đầu tiên khi đọc bài toán đó là khử được các căn bậc hai bên vế trái, tuy nhiên ở đây ta không nên bình phương vì biểu thức trong căn tương đối cồng kềnh. Như vậy ta cần một đánh giá để có thể khử hết các căn bậc hai hoặc một đánh giá mà đưa về chỉ một căn thức. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức cần chứng minh ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Mặt khác chú ý đến tổng $a+b+c$ bên vế phải vì thế ta cần đánh giá sao cho có thể rút gọn được $a+b+c$. Từ các nhận xét đó ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}}$$
$$\le\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\right)}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{3}$$

Đến đây ta để ý lại thấy $5a^2+(b+c)^2=5a^2+b^2+c^2+2bc$ và chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ta có có $5a^2+(b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)$, khi này ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Như vậy ta cần có trên tử $(3a)^2$, điều này ta hoàn toàn có thể làm được. Khi này ta sẽ được

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{(3a)^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)}\le\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2a^2}{2a^2+bc}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được

$$\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2b^2}{2b^2+ac}\right);\ \frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{9}\left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)$$

Do đó $\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{9}\left(1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)$

Bây giờ ta cần phải chứng minh được $\frac{1}{9}\left(1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)\le\frac{1}{3}$

Bất đẳng thức đó tương đương với $\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\le 2$

Đến đây ta đổi chiều bất đẳng thức và được $\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge 1$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức thì

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}=1$$

Như vậy đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Bài 30. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right)\ge 8$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy bên vế phải có các đại lượng $a+b^2$; $b+c^2$; $c+a^2$ và ta cần tìm được một đại lượng trung gian mà các đánh giá phải cùng chiều, do đó suy nghĩ đầu tiên là đồng bậc các hạng tử trong mỗi đại lượng trên. Để thực hiện được việc này ta để ý đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Lúc này ta được ta

$$\left(a+b^2\right)\left(a+1\right)\ge\left(a+b\right)^2;\left(b+c^2\right)\left(b+1\right)\ge\left(b+c\right)^2;\left(c+a^2\right)\left(c+1\right)\ge\left(c+a\right)^2$$

Nhân theo vế ta được $\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right)\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\ge\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2$

Hay $\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\left(c+a^2\right)\ge\dfrac{\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\dfrac{\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}\ge 8$

Trong các đánh giá trên ta chưa sử dụng đến giả thiết. Ta cần phải sử dụng giả thiết cho các đánh giá tiếp theo. Nhận thấy ta chưa thể sử dụng ngay được giả thiết nên ta cần biến đổi giả thiết về một dạng khác trước. Thật vậy, từ giả thiết $ab+bc+ca=3$ ta dễ dàng suy ra $a+b+c\ge 3$ và $abc\le 1$.

Dễ thấy $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-abc=3\left(a+b+c\right)-abc\ge 8$

Do đó từ giả thiết ta suy ra được $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 8$

Như vậy ta cần chỉ ra được $\dfrac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}\ge 1$

Hay $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)$

Để ý đến các phép biến đổi

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=3\left(a+b+c\right)-abc\ge 8$$
$$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$$

Ta có

$$\begin{aligned}&\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)-\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\\&=3\left(a+b+c\right)-abc-\left(abc+bc+bc+ca+a+b+c+1\right)\\&=2\left(a+b+c\right)-2abc-4\ge 2-2abc\ge 0\end{aligned}$$

Do đó suy ra $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$.

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{b\sqrt{c^2+1}}+\frac{a}{c\sqrt{a^2+1}}\ge\frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Từ giả thiết của bài toán là $a+b+c=abc$ suy ra $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$. Khi này suy nghĩ hết sức tự nhiên là đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Do đó giả thiết của bài toán trở thành $xy+yz+zx=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+1}}\ge\frac{3}{2}$$

Với giả thiết $xy+yz+zx=1$ ta thấy được $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+xy+yz+zx}=\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2+1}=\sqrt{\left(y+z\right)\left(y+x\right)};\sqrt{z^2+1}=\sqrt{\left(z+x\right)\left(z+y\right)}$

Để ý tiếp ta lại có theo bất đẳng thức AM – GM thì $\frac{x}{\sqrt{\left(y+x\right)\left(y+z\right)}}\ge\frac{2x}{x+2y+z}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+1}}&=\frac{x}{\sqrt{\left(y+x\right)\left(y+z\right)}}+\frac{y}{\sqrt{\left(z+x\right)\left(z+y\right)}}+\frac{z}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}\\&\ge\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}\end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}\ge\frac{3}{2}$

Với bất đẳng thức trên thì sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức là hợp lí nhất. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta được

$$\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}=\frac{2x^2}{x\left(x+2y+z\right)}+\frac{2y^2}{y\left(x+y+2z\right)}+\frac{2z^2}{z\left(2x+y+z\right)}$$

$$\geq\frac{2\left(x+y+z\right)^2}{\left(x+y+z\right)^2+xy+yz+zx}\geq\frac{2\left(x+y+z\right)^2}{\left(x+y+z\right)^2+\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}}=\frac{3}{2}$$

Như vậy bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 32. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a,b,c\geq 1; a^2+b^2+c^2=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{9}{2\left(\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}+\sqrt{c^2-1}\right)}$$

Phân tích và lời giải

Khi quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là đổi biến làm mất các căn bậc hai. Từ suy nghĩ đó ta đặt $x=\sqrt{a^2-1};\ y=\sqrt{b^2-1};\ z=\sqrt{c^2-1}$. Khi đó ta suy ra

$$a=\sqrt{x^2+1};\ b=\sqrt{y^2+1};\ c=\sqrt{z^2+1}.$$

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $x^2+y^2+z^2=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\leq\frac{9}{2\left(x+y+z\right)}$$

Hay $\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)\leq\frac{9}{2}$

Ta viết vế trái của bất đẳng thức trên thành

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)+\left(\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}}\right)$$

Lúc này ta dự đoán $\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}}\leq 3$ và $\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}}\leq 3$

Quan sát kĩ các biểu thức trên và chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta nghĩ đến đánh giá có thể đưa các đại lượng vào trong cùng một căn bậc hai. Để thực hiện điều này ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng $a+b+c\le\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$.

Khi đó ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\sqrt{\frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{3y^2}{x^2+2y^2+z^2}+\frac{3z^2}{x^2+y^2+2z^2}}$

Mặt khác ta lại có $\frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2}\le\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+z^2}\right)$, áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{3y^2}{x^2+2y^2+z^2}+\frac{3z^2}{x^2+y^2+2z^2}}\le\frac{3}{2}$$

Do đó $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{3}{2}$

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}}\le 3$

Điều này có thể thực hiện hoàn toàn tương tự như trên

$$\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}}\le\sqrt{\frac{3\left(y+z\right)^2}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{3\left(z+x\right)^2}{x^2+2y^2+z^2}+\frac{3\left(x+y\right)^2}{x^2+y^2+2z^2}}$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{3\left(y+z\right)^2}{2x^2+y^2+z^2}\le 3\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}\right)$. Tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{3\left(y+z\right)^2}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{3\left(z+x\right)^2}{x^2+2y^2+z^2}+\frac{3\left(x+y\right)^2}{x^2+y^2+2z^2}}$$
$$\le\sqrt{3\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{z^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}\right)}=3$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài 33. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a\left(b+1\right)}+\sqrt{b\left(c+1\right)}+\sqrt{c\left(a+1\right)}\le\frac{3\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Trước hết ta dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cả hai vế đều chứa các đại lượng $a+1;\ b+1;\ c+1$, do đó ta biến đổi bất đẳng thức bằng cách chia cả hai vế cho $(a+1)(b+1)(c+1)$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}}+\sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}}+\sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}}\le\frac{3}{2}$$

Đến đây ta thấy có hai hướng đánh giá là

+ Hướng thứ nhất ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz đưa các đại lượng trong căn bên vế trái vào trong cùng một căn bậc hai thì được

$$\sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}}+\sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}}+\sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}}$$
$$\le\sqrt{\frac{3a}{(a+1)(c+1)}+\frac{3b}{(a+1)(b+1)}+\frac{3c}{(c+1)(b+1)}}$$

Như vậy ta quy bài toán về chứng minh $\frac{a}{(a+1)(c+1)}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(c+1)(b+1)}\le\frac{3}{4}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$4\left[a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\right]\le3(a+1)(b+1)(c+1)\Leftrightarrow3abc+3\ge ab+bc+ca+a+b+c$$

Nhận thấy đánh giá trên không đúng.

+ Hướng thứ hai là áp dụng bất đẳng thức AM – GM theo chiều từ trung bình nhân sang trung bình cộng. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ ta có

$$\sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}}=\sqrt{\frac{a.1}{(a+1)(c+1)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{b}{b+1}\right);\ \sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{b+1}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}}+\sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}}+\sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2. Nhận xét tương tự như trên nhưng ta hướng theo đánh giá làm vế trái xuất hiện nhân tử chung là 1 trong trong 3 đại lượng đó với mong muốn có thể giảm xuống còn hai biến. Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có

$$\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(c+1)}\le\sqrt{(a+1)\left[b+1+b(c+1)\right]}$$

Khi đó ta được

$$\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{b(c+1)}+\sqrt{c(a+1)}\le\sqrt{(a+1)\left[b+1+b(c+1)\right]}+\sqrt{c(a+1)}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\sqrt{bc+2b+1}+\sqrt{c}\le\dfrac{3\sqrt{(b+1)(c+1)}}{2}$

Đến đây nếu ta đưa được các đại lượng dưới dấu căn bên trái vào trong một căn thức thì cơ hội sẽ cao hơn, tuy nhiên cũng tương tự như trên ta thử làm xất hiện thêm nhân tử chung để rút gọn xem sao. Chú ý là bên vế phải chứa hai đại lượng $b+1;\ c+1$ nên ta sẽ có đánh giá vế trái về một trong hai đại lượng trên.

+ Trước hết ta đánh giá về $b+1$, để ý là $(bc+2b+1)+(c+1)=(b+1)(c+2)$, do đó ta cần làm xuất hiện $c+1$ để khi bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta được $(bc+2b+1)+(c+1)$.

Để ý là $\sqrt{c}=\sqrt{c+1}.\sqrt{\dfrac{c}{c+1}}$, khi đó ta được

$$\sqrt{bc+2b+1}+\sqrt{c+1}.\sqrt{\frac{c}{c+1}}\le\sqrt{\left[(bc+2b+1)+(c+1)\right]\left(1+\frac{c}{c+1}\right)}=\sqrt{\frac{(b+1)(c+2)(2c+1)}{c+1}}$$

Phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\sqrt{\frac{(c+2)(2c+1)}{c+1}}\le\frac{3\sqrt{c+1}}{2}\Leftrightarrow 4(c+2)(2c+1)\le 9(c+1)^2$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức AM – GM . Vậy bài toán được chứng minh xong.

+ Bây giờ ta thử đánh giá về $c+1$, khi đó theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{bc+2b+1}+\sqrt{c}=1.\sqrt{bc+2b+1}+1.\sqrt{c}\le\sqrt{(1+c)(bc+2b+1+1)}$$

Và ta cần chỉ ra được $\sqrt{bc+2b+2}\le\dfrac{3\sqrt{b+1}}{2}\Leftrightarrow bc\le b+1$. Tuy nhiên đánh giá cuối cùng không đúng, do đó hướng đánh giá này không hợp lí.

Bài 34. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến đánh giá quen thuộc

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{9}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca}$$

Và ta cần chỉ ra được $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca\le(a+b+c)^2\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le ab+bc+ca$

Đáng tiếc đánh giá cuối cùng lại là một đánh giá sai. Nên ta phải tìm hướng đánh giá khác.

Quan sát kỹ bất đẳng thức trên ta thấy được sự liên quan giữa các mẫu số với các đại lượng $a^2+b^2+c^2$; $ab+bc+ca$, ta thử xem có mối liên hệ nào hay không?

Để ý ta thấy $\left(a^2+ab+b^2\right)+\left(c^2+bc+ca\right)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$, điều này dẫn đến

$$\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^2+ab+b^2+c^2+bc+ca}{a^2+ab+b^2}=1+\frac{c(a+b+c)}{a^2+ab+b^2}$$

Hoàn toàn tương tự thì ta được

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)\left(\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\right)\\&=3+(a+b+c)\left(\frac{c}{a^2+ab+b^2}+\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}\right)\end{aligned}$$

Như vậy bây giờ ta cần chứng minh được

$$3+(a+b+c)\left(\frac{c}{a^2+ab+b^2}+\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}\right)\ge\frac{9\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)}{(a+b+c)^2}$$

Để ý tiếp đại lượng $\frac{c}{a^2+ab+b^2}+\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}$, theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{c}{a^2+ab+b^2}+\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}=\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$3+\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\ge \frac{9(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Hay $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\ge \dfrac{6(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$

Hay $(a+b+c)^4\ge 3\left[2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)\right](ab+bc+ca)$

Đến đây thì ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức AM – GM để đánh giá. Để ý là khi dấu đẳng thức xẩy ra thì $2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=3(ab+bc+ca)$ nên áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\begin{aligned}&3(ab+bc+ca)\left[2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)\right]\\&\le \frac{\left[3(ab+bc+ca)+2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)\right]^2}{4}=(a+b+c)^4\end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 35. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2+abc}}{c+ab}+\frac{\sqrt{b^2+abc}}{a+bc}+\frac{\sqrt{c^2+abc}}{b+ac}\le \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Nhận thấy các đại lượng trong căn và ở các mẫu chưa đồng bậc nên suy nghĩ đầu tiên đó là đồng bậc các đại lượng đó. Để ý đến giả thiết $a+b+c=1$ ta thấy

$$a^2+abc=a^2(a+b+c)+abc=a(a+b)(a+c)$$
$$c+ab=c(a+b+c)+ab=(a+c)(b+c)$$

Hoàn toàn tương tự

$$b^2+abc=b(a+b)(b+c);\ c^2+abc=c(a+c)(b+c)$$
$$b+ac=(a+b)(b+c);\ a+bc=(a+b)(a+c)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{\sqrt{a(a+b)(a+c)}}{(c+a)(c+b)}+\frac{\sqrt{b(b+c)(a+b)}}{(a+b)(a+c)}+\frac{\sqrt{c(a+c)(b+c)}}{(a+b)(b+c)}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

Hay $$\frac{a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{(c+a)(c+b)}+\frac{b\sqrt{ac(b+c)(a+b)}}{(a+b)(a+c)}+\frac{c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}{(a+b)(b+c)}\le\frac{1}{2}$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta liên tưởng đến bất đẳng thức AM – GM, để ý là

$$bc(a+b)(a+c)=c(a+b).b(a+c)=b(a+b).c(a+c)$$

Trong hai các viết trên ta chọn cách viết thứ nhất vì khi sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng $2\sqrt{xy}\le x+y$ thì không tạo ra các đại lượng có chứa các bình phương (Nên nhớ là các bình phương bao giờ cũng trội nhất trong các đại lượng bậc 2). Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\sqrt{bc(a+b)(a+c)}\le\frac{b(a+c)+c(a+b)}{2}=\frac{ab+2bc+ca}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned}&\frac{a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{(c+a)(c+b)}+\frac{b\sqrt{ac(b+c)(a+b)}}{(a+b)(a+c)}+\frac{c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}{(a+b)(b+c)}\\&\qquad\le\frac{a(ab+2bc+ca)}{2(c+a)(c+b)}+\frac{b(ab+bc+2ca)}{2(a+b)(a+c)}+\frac{c(2ab+bc+ca)}{2(a+b)(b+c)}\end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a(ab+2bc+ca)}{(c+a)(c+b)}+\frac{b(ab+bc+2ca)}{(a+b)(a+c)}+\frac{c(2ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)}\le 1$$

Hay

$$a(a+b)(ab+2bc+ca)+b(b+c)(ab+bc+2ca)+c(c+a)(2ab+bc+ca)\le(a+b)(b+c)(c+a)$$

Vế trái của bất đẳng thức có bậc 4 còn vế phải có bậc ba nên ta co thể đồng bậc là

$$\begin{aligned}&a(a+b)(ab+2bc+ca)+b(b+c)(ab+bc+2ca)+c(c+a)(2ab+bc+ca)\\&\qquad\le(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)\end{aligned}$$

Triển khai và rút gọn ta được

$$\begin{aligned}&a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+5(a^2bc+ab^2c+abc^2)\\&\le a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2bc+ab^2c+abc^2)\end{aligned}$$

Hay $abc(a+b+c)\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, đây là một đánh giá đúng

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 36. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le 27a^2b^2c^2$$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Đầu tiên ta nhận thấy nếu vế trái của bất đẳng thức âm thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp vế trái không âm là được.

Xét trường hợp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\ge 0$, khi đó dễ dàng chứng minh được $(a+b-c)\ge 0; (b+c-a)\ge 0; (c+a-b)\ge 0$.

Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì ý tưởng tiếp cận đầu tiên là đổi biến, ta có thể đặt $x=a+b-c;\ y=b+c-a;\ z=c+a-b$ suy ra ta được

$$a=\frac{x+z}{2};b=\frac{x+y}{2};c=\frac{y+z}{2}(x,y,z\ge 0)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đươc viết lại thành

$64xyz(x+y+z)^3\le 27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $3xyx(x+y+z)\le(xy+yz+zx)^2$

Do đó ta được $64.3xyz(x+y+z)^3\le 64(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$64(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2\le 3.27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

Lấy căn bậc hai hai vế ta được $9(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$

Đây là một đánh giá đúng quen thuộc. Do đó bài toán được chứng minh

Cách 2. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta liên tưởng đến bất đẳng thức AM – GM, khi đó nếu áp dụng trực tiếp thì ta có $27(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le(a+b+c)^3$ nên bài toán quy về chứng minh $(a+b+c)^6\le 27^2a^2b^2c^2$, tuy nhiên đánh giá đó là một đánh giá sai. Do đó ta không thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức AM – GM như vậy được mà cần biến đổi bất đẳng thức trước.

Để ý ta thấy khi đẳng thức xẩy ra thì $a(b+c-a)=b(c+a-b)=c(a+b-c)$ và lại có

$a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)=2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)$

Do đó ta nghĩ đến áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số trên, khi đó ta được

$$27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le\left[a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)\right]^3$$

Hay $27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]^3$. Khi đó ta được

$$27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)^3\le\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]^3(a+b+c)^3$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]^3(a+b+c)^3\le 9^3a^3b^3c^3$

Lấy căn bậc ba hai vế ta được $(a+b+c)\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]\le 9abc$

Khai triển và rút gọn ta được

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\Leftrightarrow abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-c)$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Bài 37. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể tiếp cận theo hướng sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki,…

Cách 1. Đầu tiên ta nhận thấy tại các mẫu số của các phân thức có chứa các đại lượng bình phương $(a+b)^2,(b+c)^2,(c+a)^2$. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá quen thuộc $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$ khi đó mẫu sẽ trở thành $2(a^2+b^2+c^2)$. Hoàn toàn tương tự ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(b-c-a)^2}{2a^2+2b^2+2c^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(b-c-a)^2}{2a^2+2b^2+2c^2}\ge\frac{1}{2}$

Hay $(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(b-c-a)^2\ge a^2+b^2+c^2$

Triển khai và thu gọn ta được $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$. Đánh giá cuối cùng đúng với mọi a, b, c. Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta có

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}\ge\frac{1}{2}$

Hay $2(a+b+c)^2\ge 2(a^2+b^2+c^2)+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

Khai triển và thu gọn ta được $ab+bc+ca\ge a^2+b^2+c^2$, đây là một đánh giá sai nên ta dừng chứng minh theo cách này ở đây.

Do không thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki trực tiếp nên ta cần biến đổi bất đẳng thức trước xem có thể sử dụng được hay không? Tuy nhiên ta sẽ biến đổi cách như thế nào đây? Trước hết ta tìm mối liên hệ của các đại lượng trong mỗi phân thức thì thấy rằng

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{a^2+(b+c)^2-2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}$$

Như vậy ta sẽ có $\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}-1=\frac{a^2+(b+c)^2-2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}-1=-\frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}$

Và nếu áp dụng tương tự thì ta thu được

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}-3$$
$$=-\left[\frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+2b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+2c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2}\right]\ge\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

Hay $\frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+2b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+2c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2}\le\frac{5}{2}$

Để ý đến chiều bất đẳng thức ta thấy không thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức được. Cũng chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta nghĩ đến một đánh giá kiểu $2a^2+(b+c)^2\ge ?$. Vì khi dấu đẳng thức xẩy ra thì $2a^2\ne(b+c)^2$ nên ta không sử dụng bất đẳng thức Cauchy mà nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản. Khi đó chú ý đến dấu đẳng thứ xẩy ra ta có đánh giá

$$\left[2a^2+(b+c)^2\right](2+4)\ge\left[2a+2(b+c)\right]^2=4(a+b+c)^2.$$

Và áp dụng hoàn toàn tương tự ta thu được

$$\frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+2b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+2c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2}$$
$$\le\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+2a(b+c)+b^2+2b(c+a)+c^2+2c(a+b)}{(a+b+c)^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{3}{2}\cdot\frac{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\le\frac{5}{2}$

Hay $\frac{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\le\frac{5}{3}$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$

Đánh giá cuối cùng đúng với mọi a, b, c. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 38. Cho các số thực thỏa mãn $a,b,c\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Chứng minh rằng

$2\le\frac{a+b}{1+c}+\frac{b+c}{1+a}+\frac{c+a}{1+b}\le3$.

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được bất đẳng thức bên trái xẩy ra dấu bằng tại $a = b = c = \frac{1}{2}$ và bất đẳng thức bên phải xẩy ra dấu bằng tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể đơn giản hóa bằng cách đổi biến và ta có thể đổi biến bằng cách sau

Đặt $x = a + 1;\ y = b + 1;\ c = z + 1$, khi đó ta được $x, y, z \in \left[\frac{3}{2};\ 2\right]$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $2 \le \frac{x+y-2}{z} + \frac{y+z-2}{x} + \frac{z+x-2}{y} \le 3$

Bây giờ ta đi chứng minh từng bất đẳng thức

+ Trước hết ta chứng minh $2 \le \frac{x+y-2}{z} + \frac{y+z-2}{x} + \frac{z+x-2}{y}$

Để ý là $\frac{x+y-2}{z} + 1 = \frac{x+y+z-2}{z}$, do đó hoàn toàn tương tự ta viết lại bất đẳng thức trên như sau

$$5 \le \frac{x+y-2}{z} + 1 + \frac{y+z-2}{x} + 1 + \frac{z+x-2}{y} + 1$$

Hay $5 \le (x+y+z-2)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

Đặt $t = x + y + z$, theo một đánh giá quen thuộc thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{t}$

Như vậy ta được $(x+y+z-2)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge (t-2).\frac{9}{t}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{9(t-2)}{t} \ge 5 \Leftrightarrow t \ge \frac{9}{2}$

Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì $t = x + y + z \ge \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

Vậy bất đẳng thức bên trái được chứng minh.

+ Chứng minh $\frac{x+y-2}{z} + \frac{y+z-2}{x} + \frac{z+x-2}{y} \le 3$

Ta viết lại bất đẳng thức như sau

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \le 3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$$

Rõ ràng ta không thể sử dụng các bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki. Trong tình huống này ta để ý đến phép sắp thứ tự các biến để quy bất đẳng thức về bất đẳng thức ít biến hơn.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\frac{3}{2} \le x \le y \le z \le 2$. Khi đó tasẽ có

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=\frac{(2-y)(x^2-2y)}{2xy} \le 0$$

Do đó ta được $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \le \frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y} \le \frac{y}{2}+\frac{2}{y} \text{ và } \frac{x}{z}+\frac{z}{x} \le \frac{x}{2}+\frac{2}{x}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) \le x+\frac{4}{x}+\frac{y}{2}+\frac{2}{y}$

Ta cần chứng minh $x+\frac{4}{x}+\frac{y}{2}+\frac{2}{y} \le 3+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z} \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+\frac{y}{2} \le 3+\frac{2}{z}$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng vì

$$\begin{cases} x+\frac{2}{x}-3=\frac{(x-1)(x-2)}{x} \le 0 \Leftrightarrow x+\frac{2}{x} \le 3 \\ \frac{y}{2} \le 1 \le \frac{2}{z} \end{cases}$$

Vậy bất đẳng thức bên phải được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$.

Bài 39. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ta tại $a=b=c$. Quan sát kỹ bất đẳng thức ta có một số nhận xét như sau

+ Bất đẳng thức đồng bậc 0.

+ Bất đẳng thức có các phân thức liên quan đến các đại lượng bình phương.

+ Trong mỗi phân thức ta thấy ở các tử và mẫu có sự lặp lại của các đại lượng.

Từ những nhận xét trên ta có cách hướng tiếp cận bài toán như sau.

Cách 1. Bất đẳng thức đồng bậc 0, nên ý tưởng đầu tiên là đổi biến theo hướng chuẩn hóa

Đặt $x=\frac{3a}{a+b+c}$; $y=\frac{3b}{a+b+c}$; $z=\frac{3c}{a+b+c}$, khi đó ta có $x+y+z=3$.

Khi đó ta được $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{\left(\frac{2.3a}{a+b+c}+\frac{3b}{a+b+c}+\frac{3c}{a+b+c}\right)^2}{2\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{3b}{a+b+c}+\frac{3b}{a+b+c}\right)^2}=\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(x+2y+z)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(x+y+2c)^2}{2z^2+(x+y)^2}\le 8$$

Hay
$$\frac{(3+x)^2}{2x^2+(3-x)^2}+\frac{(3+y)^2}{2y^2+(3-y)^2}+\frac{(3+z)^2}{2z^2+(3-z)^2}\le 8$$

Hay
$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9}+\frac{y^2+6y+9}{3y^2-6y+9}+\frac{z^2+6z+9}{3z^2-6z+9}\le 8$$

Đến đây ta thấy các phân thức có dạng như nhau đối với mỗi biến nên ta dự đoán là

$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9}\le mx+n$$

Để tìm m và n ta có thể sử dụng phương pháp hệ số bất định hoặc là cách sau đây

$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2(2x+3)}{2+(x-1)^2}\right]\le\frac{4(x+1)}{3}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9}+\frac{y^2+6y+9}{3y^2-6y+9}+\frac{z^2+6z+9}{3z^2-6z+9}\le\frac{4(x+y+z+3)}{3}=8$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Từ nhận xét các phân thức liên quan đến các đại lượng bình phương nên ta thử phân tích các tử ra xem có mối liên hệ gì với mẫu không? Khai triển tử số ta được

$$(2a+b+c)^2=4a^2+4a(b+c)+(b+c)^2$$

Mặt khác quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải đổi chiều bất đẳng thức trước, nên ta nghĩ đến phép biến đổi $k-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$, khi đó để đổi chiều bất đẳng thức ta cần tìm k sao cho $3k-8\ge 0$ và đây ta chọn k nguyên thì càng tốt.

Trước hết ta thử với $k=3$ thì được

$$3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{6a^2+3(b+c)^2-(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{2(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$$

Như vậy ta thấy $k=3$ thì phép biến đổi tương đối đẹp, ta cần thực hiện tiếp các phân thức còn lại để xem có đánh giá được gì hay không? Để ý là nếu không thể đánh giá được thì ta thử tiếp với các số khác lớn hơn.

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Đây chính là bất đẳng thức đã được chứng minh trong bài 51, ta có thể trình bày lại một cách như sau

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)$, ta được

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(b-c-a)^2}{2a^2+2b^2+2c^2}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(b-c-a)^2}{2a^2+2b^2+2c^2}\ge\frac{1}{2}$

Hay $(a-b-c)^2+(b-c-a)^2+(b-c-a)^2\ge a^2+b^2+c^2$

Triển khai và thu gọn ta được $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, đánh giá cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3. Chú ý đến sự lặp lại của các đại lượng $a, b+c$ trong cả phân thức thứ nhất nên ta có thể viết lại được

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{\left(2+\frac{b+c}{a}\right)^2}{2+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \text{ hoặc } \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{\left(\frac{2a}{b+c}+1\right)^2}{2\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+1}$$

Nên để đơn giản hóa ta có thể đặt $x=\frac{b+c}{a}$ hoặc $x=\frac{a}{b+c}$. Trước hết ta tiếp cận với với cách đặt thứ nhất.

Hoàn toàn tương tự ta đặt được $x=\frac{b+c}{a}$; $y=\frac{c+a}{b}$; $z=\frac{a+b}{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(x+2)^2}{x^2+2}+\frac{(y+2)^2}{y^2+2}+\frac{(z+2)^2}{z^2+2}\le 8 \text{ hay } \frac{(x-1)^2}{x^2+2}+\frac{(y-1)^2}{y^2+2}+\frac{(z-1)^2}{z^2+2}\ge\frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+2}+\frac{(y-1)^2}{y^2+2}+\frac{(z-1)^2}{z^2+2}\ge\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}\ge\frac{1}{2}$ hay $2(x+y+z-3)\ge x^2+y^2+z^2+6$

Hay $(x+y+z-6)^2+2(xy+yz+zx-12)\ge 0 \quad (*)$

Dễ thấy, theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$xy+yz+zx=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}+\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}+\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2}{abc}}\ge 12$$

Do đó bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức đúng

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Nhận xét. *Với cách đặt thứ hai, hoàn toàn tương tự ta viết được bất đẳng thức cần chứng minh thành*

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\le 8 \text{ hay } \frac{2(x-1)^2}{2x^2+1}+\frac{2(y-1)^2}{2y^2+}+\frac{2(z-1)^2}{z^2+2}\ge 1.$$

Tuy nhiên với cách đổi biến này, sau các đánh giá ta thu được $xy+yz+xz\le 12$. *Bạn đọc tự kiểm tra xem đánh giá ta thu được có đúng không.*

Bài 40. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+1}{\sqrt{a^4+b+c}}+\frac{b^3+1}{\sqrt{b^4+c+a}}+\frac{c^3+1}{\sqrt{c^4+a+c}}\le 2\sqrt{ab+bc+ca}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy các đại lượng trong căn bậc hai dưới các mẫu chưa đồng bậc, chú ý đến giả thiết $abc=1$ ta có thể đồng bậc là $a^4+b+c=a^4+abc(b+c)=a(a^3+b^2c+bc^2)$. Tức là khi đó ta được $\sqrt{a^4+b+c}=\sqrt{a(a^3+b^2c+bc^2)}$. Lại thấy bất đẳng thức chứa căn dưới mẫu, nên ta cần đánh giá làm mất căn bậc hai, Chú ý đến chiều bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy}\le x+y$. Như vậy dưới mẫu cần có một tích hai đại lượng đồng bậc, để ý tiếp bên vế phải có $2\sqrt{ab+bc+ca}$ nên ta có thể đưa xuống dưới mẫu, do đó ta sẽ có tích $2\sqrt{(a^3+b^2c+bc^2)(a^2b+abc+ca^2)}$. Đến đây áp dụng bất đẳng Cauchy thì ta được

$$\frac{a^3+1}{2\sqrt{a^4+b+c}.\sqrt{ab+bc+ca}}=\frac{a^3+1}{2\sqrt{(a^3+b^2c+bc^2)(a^2b+abc+ca^2)}}\ge\frac{a^3+1}{a^3+b^2c+bc^2+a^2b+abc+ca^2}$$

Để ý tiếp ta thấy

$$a^3+1=a^3+abc=a(a^2+bc)$$
$$a^3+b^2c+bc^2+a^2b+abc+ca^2=(a^2+bc)(a+b+c)$$

Do đó ta được $\dfrac{a^3+1}{2\sqrt{a^4+b+c}.\sqrt{ab+bc+ca}}\ge\dfrac{a^3+abc}{(a^2+bc)(a+b+c)}=\dfrac{a}{a+b+c}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b^3+1}{2\sqrt{b^4+c+a}.\sqrt{ab+bc+ca}}\ge\frac{b}{a+b+c};\ \frac{c^3+1}{2\sqrt{c^4+a+c}.\sqrt{ab+bc+ca}}\ge\frac{b}{a+b+c}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3+1}{2\sqrt{a^4+b+c}.\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{b^3+1}{2\sqrt{b^4+c+a}.\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{c^3+1}{2\sqrt{c^4+a+c}.\sqrt{ab+bc+ca}}\ge 1$$

Hay $\qquad\dfrac{a^3+1}{\sqrt{a^4+b+c}}+\dfrac{b^3+1}{\sqrt{b^4+c+a}}+\dfrac{c^3+1}{\sqrt{c^4+a+c}}\le 2\sqrt{ab+bc+ca}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$.

Bài 41. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+3}{a+bc}}+\sqrt{\frac{b+3}{b+ca}}+\sqrt{\frac{c+3}{c+ab}}\ge 3\sqrt{2}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất đẳng thức có chứa căn bậc hai nên suy nghĩ đầu tiên đó là tìm cách loại bỏ các dấu căn, để làm điều này ta có thể bình phương hai vế, nhưng cách làm này không làm mất hết các dấu căn mà còn làm cho bất đẳng thức thêm phức tạp, ta cũng không thể đưa các phân thức dưới dấu căn vào cùng một căn bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki vì sẽ tạo ra một bất đẳng thức ngược chiều. Do đó ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá, khi đó ta được

$$\sqrt{\frac{a+3}{a+bc}}+\sqrt{\frac{b+3}{b+ca}}+\sqrt{\frac{c+3}{c+ab}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+3)(b+3)(c+3)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{(a+3)(b+3)(c+3)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}\ge 8$

Hay $(a+3)(b+3)(c+3)\ge 8(a+bc)(b+ca)(c+ab)$. Tuy nhiên để chứng minh được đánh giá này lại hơi khó, nên ta tạm dừng ý tưởng này tại đây.

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức trên ta cần phải có những biến đổi trước. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}}+\sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}}\ge 6$$

Để ý đến giả thiết $a+b+c=3$, khi đó ta viết được $a+3=(a+b)+(a+c)$ do đó ta sẽ được

$$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}}=\sqrt{\frac{2(a+a+b+c)}{a+bc}}=\sqrt{2\left(\frac{a+b}{a+bc}+\frac{a+c}{a+bc}\right)}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{2(x+y)}\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}$, ta được

$$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}}=\sqrt{\frac{2(a+a+b+c)}{a+bc}}=\sqrt{2\left(\frac{a+b}{a+bc}+\frac{a+c}{a+bc}\right)}\ge\sqrt{\frac{a+b}{a+bc}}+\sqrt{\frac{a+c}{a+bc}}$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}}\ge\sqrt{\frac{b+a}{b+ca}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+ca}}$; $\sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}}\ge\sqrt{\frac{c+a}{c+ab}}+\sqrt{\frac{c+b}{c+ab}}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}}+\sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}}\ge\sqrt{\frac{a+b}{a+bc}}+\sqrt{\frac{a+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{b+a}{b+ca}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+ca}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+ab}}+\sqrt{\frac{c+b}{c+ab}}$$

Lúc này xuất hiện các phân thức trong căn có cùng tử số nên ta ghép lại theo nhóm, khi đó ta sẽ được

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc}}+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b+ca}}\ge\frac{4\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}}\ge\frac{2\sqrt{2}\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc+b+ca}}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{a+b}}{\sqrt{(a+b)(1+c)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}$$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{b+ca}}+\frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{c+ab}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}}$; $\frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{a+bc}}+\frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+ab}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc}}+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b+ca}}+\frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{b+ca}}+\frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{c+ab}}+\frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{a+bc}}+\frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+ab}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}}$$ Dó

đó ta có $$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}}+\sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}}\ge 6 \text{ hay } \frac{1}{\sqrt{c+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{\sqrt{c+1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\ge\frac{9}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}}\ge\frac{9}{\sqrt{3(a+b+c+3)}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$.

Bài 41. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+2b}{2a+4b+3c^2}+\frac{b+2c}{2b+4c+3a^2}+\frac{c+2a}{2c+4a+3b^2}\le 1$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức thì suy nghĩ đầu tiên đó là đổi chiều bất đẳng thức và để thực hiện điều này ta có phép biến đổi tương đương sau

$$\frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2}+\frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2}+\frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2}\le 2$$

Hay $$1-\frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2}-1+\frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2}+1-\frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2}\ge 1$$

Hay $$\frac{c^2}{2a+4b+3c^2}+\frac{a^2}{2b+4c+3a^2}+\frac{b^2}{2c+4a+3b^2}\ge\frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức nên trước hết ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{c^2}{2a+4b+3c^2}+\frac{a^2}{2b+4c+3a^2}+\frac{b^2}{2c+4a+3b^2}$$

$$=\frac{c^3}{c(2a+4b+3c^2)}+\frac{a^3}{a(2b+4c+3a^2)}+\frac{b^3}{b(2c+4a+3b^2)}\ge\frac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{3(a^3+b^3+c^3)+6(ab+bc+ca)}$$

Phép chứng minh minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\dfrac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{3(a^3+b^3+c^3)+6(ab+bc+ca)}\ge\dfrac{1}{3}$

Hay $\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}\ge ab+bc+ca$

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy và để ý đến giả thiết $ab+bc+ca=3$ thì được

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}&=\left(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{ab}\right)+\left(\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{bc}\right)+\left(\sqrt{c^3a^3}+\sqrt{ca}\right)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\\&\ge 2(ab+bc+ca)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\\&\ge ab+bc+ca+3-\sqrt{3(ab+bc+ca)}=ab+bc+ca\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$.

Bài 42. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a^2b^2c^2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=\sqrt{3}$. Trước hết ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến.

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết được viết lại là $x^2+y^2+z^2\ge 1$ và bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta được.

$$\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2}\ge\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hay $\quad 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\ge\sqrt{3}\left[x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)\right]$

Đến đây ta cần đánh giá vế phải sao cho xuất hiện $x^2+y^2+z^2$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x\left(y^2+z^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2\left(y^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2x^2+y^2+z^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Tương tự ta cũng có

$$y\left(z^2+x^2\right)\le\frac{2\sqrt{3}}{9}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$z\left(x^2+y^2\right)\le\frac{2\sqrt{3}}{9}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Cuối cùng ta cần chứng minh được

$$\frac{2}{3}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\Leftrightarrow 1\le x^2+y^2+z^2$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 43. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$, Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có một số nhận xét sau

+ Bất đẳng thức có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

+ Bất đẳng thức chứa các căn bậc hai nên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy

+ Đây là bất đẳng thức đồng bậc nên ta nghĩ đến phép đổi biến

Từ những nhận xét trên ta đi tìm hiểu các hướng tiếp cận bài toán như sau

Cách 1. Trước hết ta bắt đầu với bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được đánh giá

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Hay $\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$

Tuy nhiên đánh giá cuối cùng lại là một đánh giá sai, do đó ta không thể dụng được trực tiếp như vậy, điều này làm ta nghĩ đến việc biến đối bất đẳng thức trước.

Để ý là $\frac{a}{\sqrt{b+c}}=\frac{a+b+c}{\sqrt{b+c}}-\sqrt{b+c}$, hoàn toàn tương tự ta viết vế trái của bất đẳng thức trên là

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a+c}}\right)-\left(\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}+\sqrt{a+b}\right)$$

Do đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a+c}}\right)-\left(\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}+\sqrt{a+b}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Đến đây theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a+c}}\right)\ge\frac{9\left(a+b+c\right)}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{9\left(a+b+c\right)}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}-\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Để ý là theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{3.2.\left(a+b+c\right)}$

Do đó ta có

$$\frac{9\left(a+b+c\right)}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}\ge\frac{9\left(a+b+c\right)}{\sqrt{6\left(a+b+c\right)}}-\sqrt{6\left(a+b+c\right)}=\frac{\sqrt{3\left(a+b+c\right)}}{\sqrt{2}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Suy ra ta được $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2. Bây giờ ta thử áp dụng bất đẳng thức Cauchy xem có chứng minh được bài toán không. Để ý ta thấy các phân số có mẫu chứa các căn bậc hai và ta phải đánh giá sao cho bất đẳng thức thu được cùng chiều với bất đẳng thức cần chứng minh. Điều này làm ta liên tưởng đế bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy}\le x+y$. Chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{1}{\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}}\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)\ge\frac{1}{2}$$

Lúc này ta cần đánh giá các mẫu theo kiểu $\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{b+c}\le ?$. Để ý là khi khai triển thì $\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{b+c}=\sqrt{2a}.\sqrt{b+c}+\left(\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{b+c}$. Do đó theo bất đẳng thức $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2\left(x+y\right)}$ và bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\le2\sqrt{b+c};\ \sqrt{2a}.\sqrt{b+c}\le\frac{2a+b+c}{2}$

Nên ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{b+c}&=\sqrt{2a}.\sqrt{b+c}+\left(\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{b+c}\\&\le\frac{2a+b+c}{2}+2\sqrt{b+c}.\sqrt{b+c}=\frac{2a+5b+5c}{2}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\frac{a}{\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{b+c}} \ge \frac{2a}{2a+5b+5c}$. Áp dụng tương tự ta có

$$\frac{b}{\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{c+a}} \ge \frac{2b}{2b+5c+5a};\ \frac{c}{\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{a+b}} \ge \frac{2c}{2c+5a+5b}$$

Đến đây cộng theo vế của các bất đẳng thức trên thì được

$$\frac{1}{\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}}\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right) \ge \frac{2a}{2a+5b+5c}+\frac{2b}{2b+5a+5c}+\frac{2c}{2c+5a+5b}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a}{2a+5b+5c}+\frac{2b}{2b+5a+5c}+\frac{2c}{2c+5a+5b} \ge \frac{1}{2}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}&\frac{2a}{2a+5b+5c}+\frac{2b}{2b+5a+5c}+\frac{2c}{2c+5a+5b}\\ &\ge \frac{2(a+b+c)^2}{2a^2+2b^2+2c^2+10ab+10bc+10ca} \ge 2.\frac{(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 3. Bất đẳng thức cần chứng minh là bất đẳng thức đồng bậc $\frac{1}{2}$ do đó ta sử dụng phép đổi biến $x=\frac{3a}{a+b+c};\ y=\frac{3b}{a+b+c};\ z=\frac{3c}{a+b+c}$. Khi đó ta được $x+y+z=3$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\frac{3}{a+b+c}}{\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}}\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Hay $\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$

Kết hợp với điều kiện $x+y+z=3$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{3-x}}+\frac{y}{\sqrt{3-x}}+\frac{z}{\sqrt{3-x}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{t}{\sqrt{3-t}} \ge \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}(t-1)$ với $0<t<3$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{\sqrt{3-x}}+\frac{y}{\sqrt{3-y}}+\frac{z}{\sqrt{3-z}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)+\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(x+y+z-3\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 44. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\le\frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta liên tưởng đến đánh giá quen thuộc $a^2+2b+3=a^2+1+2b+2\ge 2a+2b+2$. Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\right)$$

Như vậy ta cần chứng minh $\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\le 1$

Để có các đánh giá hợp lý trước hết ta đổi chiều bất đẳng thức

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$1-\frac{a}{a+b+1}+1-\frac{b}{b+c+1}+1-\frac{c}{c+a+1}\ge 3-1=2$$

Hay $\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}\ge 2$

Bất đẳng thức trên làm ta liên tưởng đề bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}=\frac{(b+1)^2}{(b+1)(a+b+1)}+\frac{(c+1)^2}{(c+1)(b+c+1)}+\frac{(a+1)^2}{(a+1)(c+a+1)}$$

$$\ge\frac{(a+b+c+3)^2}{(a+1)(a+c+1)+(b+1)(b+a+1)+(c+1)(c+b+1)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c+3)^2}{(a+1)(a+c+1)+(b+1)(b+a+1)+(c+1)(c+b+1)}\ge 2$$

Để ý đến giả thiết $a^2+b^2+c^2=3$ ta có

$$\begin{aligned}&(a+1)(a+c+1)+(b+1)(b+a+1)+(c+1)(c+b+1)\\&=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca+3(a+b+c)+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2\end{aligned}$$

Khi đó ta được $\dfrac{(a+b+c+3)^2}{(a+1)(a+c+1)+(b+1)(b+a+1)+(c+1)(c+b+1)}=\dfrac{(a+b+c+3)^2}{\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2}=2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 45. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{ca+a^2}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Phân tích và lời lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy ý tưởng sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức để đánh biểu thức vế trái hoặc là sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá mẫu, nhưng trước hết để có những đánh giá đảm bảo dấu đẳng thức ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$.

Đầu tiên ta tiếp cận với bất đẳng thức Bunhiacopsxki dạng phân thức. Để ý là ta không nên sử dụng trực tiếp vì khi đó dưới mẫu có các đại lượng mũ 2 nên sẽ trội hơn. Do đó ta sẽ đánh giá như sau

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{ca+a^2}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{ab+b^2}+b\sqrt{bc+c^2}+c\sqrt{ca+a^2}}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{ab+b^2}+b\sqrt{bc+c^2}+c\sqrt{ca+a^2}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Để dễ dàng hơn ta chú ý đên đánh giá mẫu trước. Chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra thì ta có $2b=a+b$. Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{2b.(a+b)}\le\frac{2b+(a+b)}{2}=\frac{a+3b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$a\sqrt{ab+b^2}+b\sqrt{bc+c^2}+c\sqrt{ca+a^2}\le\frac{a^2+3ab}{2\sqrt{2}}+\frac{b^2+3bc}{2\sqrt{2}}+\frac{c^2+3ca}{2\sqrt{2}}$$

Khi đó ta sẽ được $\dfrac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{ab+b^2}+b\sqrt{bc+c^2}+c\sqrt{ca+a^2}} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{\dfrac{a^2+3ab}{2\sqrt{2}}+\dfrac{b^2+3bc}{2\sqrt{2}}+\dfrac{c^2+3ca}{2\sqrt{2}}}$

Và như vậy ta cần phải chứng minh được $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+3ab+b^2+3bc+c^2+3ca} \ge \dfrac{3}{4}$. Hay $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$, đánh giá này là một đánh giá đúng, do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Bây giờ ta thử tiếp cận với bất đẳng thức Cauchy với đánh giá các mẫu xem sao. Để ý là $\sqrt{a^2+ab}=\sqrt{a(a+b)}$, tích này làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng quen thuộc $2\sqrt{xy} \le x+y$. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\sqrt{2b.(a+b)} \le \frac{2b+(a+b)}{2}=\frac{a+3b}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được $\dfrac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\dfrac{a}{\sqrt{ca+a^2}} \ge \dfrac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\dfrac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\dfrac{2c\sqrt{2}}{c+3a}$.

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a} \ge \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ hay } \frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a} \ge \frac{3}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phâm thức ta được

$$\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$$

Ta cần phải chứng minh được $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca} \ge \dfrac{3}{4}$

Hay $$4(a+b+c)^2 \ge 3(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)$$

Khai triển và thu gọn ta được $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$, đây là một đánh giá đúng. Vậy bài toán cũng được chứng minh

Nhận xét. *Trong bài toán trên thì hai ý tưởng tiếp cận là như nhau, chỉ khác nhau ở chỗ là dùng công cụ gì trước thôi. Ngoài ra ta có thể dùng phương pháp đổi biến để chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a} \ge \frac{3}{4}$$

Đặt $x=a+3b;\ y=b+3c;\ z=c+3a$. *Từ đó suy ra*

$$a=\frac{x-3y+9z}{28};b=\frac{y-3z+9x}{28};c=\frac{z-3x+9y}{28}$$

Bất đẳng thức trên được viết lại thành $3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\ge 6$. *Các bạn thử chứng minh tiếp xem sao?*

Bài 46. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\ge 4\left(a+b+c+1\right)^2$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$, quan sát bất đẳng thức ta thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cách 1. Để ý là $a^2+3=a^2+1+1+1$, Do đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(a^2+1+1+1\right)\left[1+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+1\right]\ge\left(1.a+\frac{b+c}{2}.1+\frac{b+c}{2}.1+1.1\right)^2=\left(a+b+c+1\right)^2$$

Hay $4\left(a^2+3\right)\left(2+\frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right)\ge 4\left(a+b+c+1\right)^2$

Bài toán quy về chứng minh $\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\ge 4\left(2+\frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right)$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\left(b^3+3\right)\left(c^3+3\right)=3b^2+3c^2+b^2c^2+9=2b^2+2c^2+\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2c^2+1\right)+8$$

$$\ge 2b^2+2c^2+2bc+2bc+8=2\left(b+c\right)^2+8=4\left(\frac{\left(b+c\right)^2}{2}+2\right)$$

Như vậy ta được $\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\ge 4\left(\frac{\left(b+c\right)^2}{2}+4\right)\left(a^2+3\right)\ge 4\left(a+b+c+1\right)^2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Ngoài ra ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$\left(a^2+1+1+1\right)\left[1+\left(\frac{b+c+1}{3}\right)^2+\left(\frac{b+c+1}{3}\right)^2+\left(\frac{b+c+1}{3}\right)^2\right]$$
$$\geq\left(1.a+\frac{b+c+1}{3}+\frac{b+c+1}{3}+\frac{b+c+1}{3}\right)^2$$

Hay $4\left(a^2+3\right)\left(1+\frac{\left(b+c+1\right)^2}{3}\right)\geq 4\left(a+b+c+1\right)^2$

Ta cần chứng minh $\quad\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\geq 4\left[1+\frac{\left(b+c+1\right)^2}{3}\right]$

Thật vậy, biến đổi tương đương ta được

$$\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\geq 4\left[1+\frac{\left(b+c+1\right)^2}{3}\right]\Leftrightarrow 3b^2c^2+5\left(b^2+c^2\right)-8\left(b+c\right)-8bc+11\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(b+c-2\right)^2+\left(b-c\right)^2+3\left(bc-1\right)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó ta có

$$\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\geq 4\left(\frac{\left(b+c\right)^2}{2}+4\right)\left(a^2+3\right)\geq 4\left(a+b+c+1\right)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 47. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=9$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9}+\frac{b^3+c^3}{bc+9}+\frac{c^3+a^3}{ca+9}\geq 9$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy tử của các phân thức chứa các đại lượng $a^3+b^3,\ b^3+c^3, c^3+a^3$. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức, các đại lượng đó làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức $4\left(x^3+y^3\right)\geq\left(x+y\right)^3$, ngoài ra chú ý đến tích ab có thể đánh giá về $\left(a+b\right)^2$. Bây giờ ta thử xem các phân tích đó có thể giả quyết được bài toán không?

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4\left(x^3+y^3\right)\geq\left(x+y\right)^3$ ta có

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9}=\frac{4\left(a^3+b^3\right)}{4ab+36}\geq\frac{\left(a+b\right)^3}{4ab+36}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $4ab \le (a+b)^2$ và $(a+b)^2 + 36 \ge 12(a+b)$

Do đó ta được

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9} = \frac{4(a^3+b^3)}{4ab+36} \ge \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2+36} = a+b-\frac{36(a+b)}{(a+b)^2+36} \ge a+b-\frac{36(a+b)}{12(a+b)} = a+b-3$$

Áp dụng tương tự ta có $\frac{b^3+c^3}{bc+9} \ge b+c-3;\ \frac{c^3+a^3}{ca+9} \ge c+a-3$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9} + \frac{b^3+c^3}{bc+9} + \frac{c^3+a^3}{ca+9} \ge 2(a+b+c) - 9 = 9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4(x^3+y^3) \ge (x+y)^3$ ta có

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9} \ge \frac{(a+b)^3}{4ab+36} = \left[\frac{(a+b)^3}{4ab+36} + \frac{4ab+6}{24} + 3\right] - \frac{ab}{6} - \frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(a+b)^3}{4ab+36} + \frac{4ab+6}{24} + 3 \ge 3\sqrt[3]{3 \cdot \frac{(a+b)^3}{4ab+36} \cdot \frac{4ab+6}{24}} = 3 \cdot \frac{a+b}{2}$$

Do đó ta được $\frac{a^3+b^3}{bc+9} \ge \frac{3(a+b)}{2} - \frac{ab}{6} - \frac{9}{2}$

Tương tự ta có $\frac{b^3+c^3}{bc+9} \ge \frac{3(b+c)}{2} - \frac{bc}{6} - \frac{9}{2};\ \frac{c^3+a^3}{ca+9} \ge \frac{3(c+a)}{2} - \frac{ca}{6} - \frac{9}{2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên và kết hợp với đánh giá quen thuộc , ta được

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9} + \frac{b^3+c^3}{bc+9} + \frac{c^3+a^3}{ca+9} \ge 3(a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{6} - \frac{27}{2} \ge 3(a+b+c) - \frac{(a+b+c)^2}{18} - \frac{27}{2} = 9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Bài 48. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}} \le \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy được sự phức tạp của bài toán. Để chứng minh được bất đẳng thức trên ta cần phải đơn giản hóa được các căn thức ở các mẫu số, đồng thời khai thác thật khéo léo các giả thiết của bài toán. Quan sát kỹ giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy nếu ta đánh giá được vế trái về đại lượng $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}$ thì xem như bài toán được giải quyết.

Dễ thấy từ giả thiết ta có thể suy ra được $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3;\ abc\ge 1$. Bây giờ ta đi tìm cách đánh giá các mẫu

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy vào giả thiết ta được

$$3=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\Rightarrow abc\ge 1$$

Do đó $$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}\le \frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+1}}=\frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3}$$

Để ý là khi $a=b=1$ thì $(1+a+b)=\left[1-(a+b)+(a+b)^2\right]$, do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{(a+b)^3+1}=\sqrt{(1+a+b)\left[1-(a+b)+(a+b)^2\right]}$$
$$\le \frac{(1+a+b)+\left[1-(a+b)+(a+b)^2\right]}{2}=1+\frac{(a+b)^2}{2}$$

Suy ra $\sqrt{(a+b)^3+1}-1\le \frac{(a+b)^2}{2}$ hay $\frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3}\le \frac{1}{2(a+b)}$

Do đó ta được $\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}\le \frac{1}{2(a+b)}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le \frac{3}{2}$

Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc kết hợp với giả thiết ta được

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Để ý thấy có số 1 ở dưới mẫu nên để dễ đánh mẫu hơn ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức để tách số một ra khỏi mẫu số. Chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}=\frac{1}{16}\cdot\frac{(1+3)^2}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}\le\frac{1}{16}\left(1+\frac{9}{\sqrt{(a+b)^3+abc}}\right)$$

Để ý lại thấy trong mẫu số có chứa đại lượng abc nên nếu ta đánh giá được $(a+b)^3$ về ab thì có thể đặt được nhân tử chung. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $(a+b)^2\ge 4ab$, khi đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)^3+abc}}\le\frac{1}{\sqrt{(a+b)4ab+abc}}=\frac{1}{\sqrt{ab(4a+4b+c)}}$$

Bây gò để triệt tiêu căn bậc hai ta để ý đến bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy}\le x+y$. Chú ý là cần bảo toàn dấu đẳng thức nên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{ab(4a+4b+c)}}=\frac{3}{\sqrt{9ab(4a+4b+c)}}\le\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9ab}+\frac{1}{4a+4b+c}\right)$$

Mặt khác lại theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{1}{4a+4b+c}=\frac{1}{81}\cdot\frac{(4+4+1)^2}{4a+4b+c}\le\frac{1}{81}\cdot\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}\le\frac{1}{16}+\frac{3}{32ab}+\frac{1}{96}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}}$$
$$\le\frac{3}{16}+\frac{3}{32}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{9}{96}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{3}{16}+\frac{3}{32}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{9}{96}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{3}{4}$

Thật vậy, Áp dụng hai bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=3;\quad \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$$

Từ đó suy ra $\frac{3}{16}+\frac{3}{32}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{9}{96}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{3}{16}+\frac{9}{32}+\frac{27}{96}=\frac{3}{4}$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 49. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}+\frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}+\frac{c^2+a^2+2}{c+a-ca}\ge 12$$

Phân tích và lời giải

Cách 1. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy các mẫu số không đồng bậc, chú ý đến giả thiết của bài toán ta viết lại được

$$\frac{a^2+b^2+2}{(a+b)(a+b+c)-ab}=\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}$$

Để ý là $\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}-1=\frac{2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+ab+bc+ca}$

Khi đó áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\ge 9$$

Bất đẳng thức có các tử giống nhau nên áp dụng một đánh giá quen thuộc ta được

$$\frac{2-ab-bc-ca}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{2-ab-bc-ca}{c^2+a^2+ab+bc+ca}$$
$$\ge\frac{9(2-ab-bc-ca)}{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{2-ab-bc-ca}{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}=1$

Để để triệt tiêu các đại lượng âm trên tử số ta chú ý đến $(a+b+c)^2=1$, khi đó ta có

$$\frac{2-ab-bc-ca}{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}=\frac{2(a+b+c)^2-ab-bc-ca}{2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Cách 2. Kết hợp với giả thiết ta có biến đổi như sau

$$a+b-ab=(a+b)(a+b+c)-ab=a^2+b^2+ab+bc+ca$$

Do đó ta có $\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}=\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}=\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{b^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}=\frac{b^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{c^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

$$\frac{c^2+ba+2}{c+a-ca}=\frac{c^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}+\frac{a^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{a^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}$$
$$\geq\frac{4\left(a^2+1\right)}{2a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+(a+b+c)^2}=4$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{b^2+1}{b^2+a^2+ab+bc+ca}\geq 4$$
$$\frac{c^2+1}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{c^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\geq 4$$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được $\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}+\frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}+\frac{c^2+ba+2}{c+a-ca}\geq 12$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 50. Cho các số thực thỏa mãn $a,b,c\in(0;1)$ và $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^4}{b}+\frac{b^2+c^4}{c}+\frac{c^2+a^4}{a}\geq\frac{15}{8}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải đổi biến để làm mất đi các dấu trừ bên vế phải, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến $x=a-b;\ y=b-1;\ z=c-1$, tuy nhiên quan sát kỹ giả thiết thì ta có thể biến đổi

$$abc=\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)\Leftrightarrow\frac{\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)}{abc}=1$$

Đến đây ta đặt $x=\frac{1-a}{a};y=\frac{1-b}{b};z=\frac{1-c}{c}$.

Khi đó ta có $xyz=1$ và $a=\frac{1}{1+x};b=\frac{1}{1+y};c=\frac{1}{1+z}$

Do $xyz=1$ nên trong các số x, y, z có hai số nằm cùng phía so với 1, giả sử hai số đó là x và y. Khi đó ta có $\left(x-1\right)\left(y-1\right)\ge 0\Leftrightarrow x+y\le 1+xy=\frac{1+z}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}\ge\frac{1}{\left(1+xy\right)\left(1+\frac{x}{y}\right)}+\frac{1}{\left(1+xy\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)}$$

$$=\frac{y}{\left(1+xy\right)\left(x+y\right)}+\frac{x}{\left(1+xy\right)\left(x+y\right)}=\frac{1}{1+xy}=\frac{z}{1+z}$$

Từ đó ta được

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{\left(1+x\right)^2}+\frac{1}{\left(1+y\right)^2}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}\ge\frac{z}{1+z}+\frac{1}{\left(1+z\right)^2}=\frac{z\left(1+z\right)+1}{\left(1+z\right)^2}=\frac{\left(2z-1\right)^2}{4\left(1+z\right)^2}+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức trên viết lại được thành $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a^3+b^3+c^3\ge\frac{15}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^4}{a^2b}+\frac{b^4}{b^2c}+\frac{c^4}{c^2a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Mà cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$a^2b+b^2c+c^2a\le\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}\le\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$$

Từ đó suy ra $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}}=\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge\frac{3}{2}$

Mặt khác ta lại có $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a+b+c\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2;3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$

Do đó ta được $3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge\left(\frac{3}{4}\right)^3\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge\frac{3}{8}$

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a^3+b^3+c^3\ge\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.