CHUYÊN ĐỀ 1. CĂN THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Hải Phòng 23-24)

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ (với $x>0$).

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A\le 2$.

Lời giải

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}.$$

Ta có: $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}\le 2\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\le 2x-2\sqrt{x}+2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Vậy $A\le 2$.

Câu 2. (TS vào 10- Chuyên TP Đà Nẵng 23-24)

Cho hai biểu thức: $\mathrm{P}=\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{x}{\sqrt{xy}+y}-\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-x}\right)$

và $\mathrm{Q}=\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$ với $x>0,\ y>0,\ x\ne y$.

Rút gọn các biểu thức P,Q và chứng minh rằng với các số x,y dương phân biệt tuỳ ý thì $4Q+1>2P$.

Lời giải

Ta có: $P=\sqrt{x}+\sqrt{y}\Rightarrow 2P=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}$.

$$Q=\frac{x+y}{2}\Rightarrow 4Q+1=2(x+y)+1.$$

Suy ra: $2(4Q+1-2P)=4x+4y+2-4\sqrt{x}-4\sqrt{y}=(2\sqrt{x}-1)^2+(2\sqrt{y}-1)^2$.

Vì $x\ne y$ nên $2\left(4Q+1-2P\right)>0\Rightarrow 4Q+1>2P$.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Cần Thơ 23-24)

Cho biểu thức: $P=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 4, x\ne 9$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả số nguyên x sao cho P nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

a) Với $x\ge 0$ và $x\ne 4, x\ne 9$, ta có:

$$P=\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(3-\sqrt{x}\right)+\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{9-x+2x-3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}=\frac{2\sqrt{x}-9+9-x+2x-3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{x}+x-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}.$$

b) Ta có: $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3}=1+\frac{4}{\sqrt{x}-3}$.

Để P nhận giá trị là số nguyên thì $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ phải nhận giá trị là số nguyên

$\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3}\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$.

+) $\frac{4}{\sqrt{x}-3}=-4\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=-1\Rightarrow x=4$ (loại).

+) $\frac{4}{\sqrt{x}-3}=1\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=4\Rightarrow x=49$.

+) $\frac{4}{\sqrt{x}-3}=-2\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=-2\Rightarrow x=1$.

+) $\frac{4}{\sqrt{x}-3}=2\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=2\Rightarrow x=25$.

+) $\frac{4}{\sqrt{x}-3}=-1\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=-4\Leftrightarrow \sqrt{x}=-1$ (loại).

+) $\frac{4}{\sqrt{x}-3}=4\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=1\Rightarrow x=16$.

Vậy $x\in\{1;16;25;49\}$ thì P nhận giá trị là số nguyên.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 23-24)

Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne 9$.

Lời giải

$P=\left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne 9$.

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{1}{1-\sqrt{x}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-2x}{x-1}\right).\left(1-\sqrt{x}\right)=\frac{x-\sqrt{x}-2x}{x-1}.\left(1-\sqrt{x}\right)=\frac{-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right).\left(1-\sqrt{x}\right)}{x-1}$$

$$=\frac{-\sqrt{x}\left(1-x\right)}{x-1}=\sqrt{x}.$$

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Bắc Giang 23-24)

Rút gọn biểu thức $Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x>y>0$.

Lời giải

Với $x>y>0$ ta có $Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{(x-y)^2}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}-\sqrt{(x-y)^2}}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$

$$=\sqrt{x-y}.\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{x-y}.\frac{\sqrt{x+y}}{y}.\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{x^2+y^2}{y}.$$

Vậy $Q=\frac{x^2+y^2}{y}$ với $x>y>0$.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Bắc Ninh 23-24)

Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ta có: $P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$.

Vậy $P=2$.

Câu 7. (TS vào 10- Chuyên Bình Dương 23-24)

Cho biểu thức: $A=\frac{2x+\sqrt{16x}+6}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị x nguyên để A là số nguyên.

Lời giải

a) Điều kiện xác định $\begin{cases}x\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$.

Ta có: $A=\frac{2x+\sqrt{16x}+6}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}+\frac{3}{\sqrt{x}+3}-2$

$=\dfrac{2x+4\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}+\dfrac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}-\dfrac{2.(\sqrt{x}-1).(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{2x+4\sqrt{x}+6+x+\sqrt{x}-6+3\sqrt{x}-3-2x-4\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{(2x+x-2x)+(4\sqrt{x}+\sqrt{x}+3\sqrt{x}-4\sqrt{x})+(6-6-3+6)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$

$=\dfrac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{x+\sqrt{x}+3\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

b) $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ là số nguyên khi $2 \,\vdots\, (\sqrt{x}-1)\Rightarrow \sqrt{x}-1\in$ Ư$(2)=\{-2;-1;1;2\}$.

Ta có bảng sau

$\sqrt{x}-1$	-2	-1	1	2
$\sqrt{x}$	-1	0	2	3
x	(loại)	0	4	9

Vậy A có giá trị nguyên khi $x\in\{0;4;9\}$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Bình Định 23-24)

Tính giá trị của biểu thức: $(x^3+4x^2-23x+1)^{2024}$ với $x=3\sqrt{3}-2$.

Lời giải

Ta có: $x=3\sqrt{3}-2$ nên:

$x^2=(3\sqrt{3}-2)^2=31-12\sqrt{3}$ và $x^3=(3\sqrt{3}-2)^3=81\sqrt{3}-162+36\sqrt{3}-8=117\sqrt{3}-170$.

Suy ra: $(x^3+4x^2-23x+1)^{2024}$

$=\left[117\sqrt{3}-170+4(31-12\sqrt{3})-23(3\sqrt{3}-2)+1\right]^{2024}$

$=(117\sqrt{3}-170+124-48\sqrt{3}-69\sqrt{3}+46+1)^{2024}$

$=1^{2024}=1$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)

Cho biểu thức $P=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a\ge 0$, $a\ne 1$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm a nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có: $P=\frac{3a+3\sqrt{a}-3}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}-\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1}$

$=\frac{3a+3\sqrt{a}-3}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}-\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}-\frac{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{3a+3\sqrt{a}-3-(a-1)-(a-4)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$

$=\frac{a+3\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}.$

b) Ta có: $P=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)+2}{\sqrt{a}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{a}-1}.$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\frac{2}{\sqrt{a}-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\sqrt{a}-1\in \text{Ư}\{2\}=\{-2;-1;1;2\}$.

+) Trường hợp 1: $\sqrt{a}-1=-2 \Leftrightarrow \sqrt{a}=-1$ (vô nghiệm) .

+) Trường hợp 2: $\sqrt{a}-1=-1 \Leftrightarrow \sqrt{a}=0 \Leftrightarrow a=0$ (nhận).

+) Trường hợp 3: $\sqrt{a}-1=1 \Leftrightarrow \sqrt{a}=2 \Leftrightarrow a=4$ (nhận).

+) Trường hợp 4: $\sqrt{a}-1=2 \Leftrightarrow \sqrt{a}=3 \Leftrightarrow a=9$ (nhận).

Vậy để P nhận giá trị nguyên thì $a\in\{0;4;9\}$.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Rút gọn biểu thức sau:

$$P=\left(\frac{x-108+23\sqrt{x}}{x-16}-1\right):\left(\frac{75-x}{x+\sqrt{x}-12}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}\right),\quad (x>0,x\neq 9,x\neq 16).$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x>0;\ x\neq 9;\ x\neq 16$.

Ta có: $P=\left(\frac{x-108+23\sqrt{x}}{x-16}-1\right):\left(\frac{75-x}{x+\sqrt{x}-12}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}\right)$

$=\left(\frac{x-16+23\sqrt{x}-92}{x-16}-1\right):\left[\frac{(75-x)\left(\sqrt{x}+4\right)+\left(\sqrt{x}+3\right)\left(x+\sqrt{x}-12\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(x+\sqrt{x}-12\right)}\right]$

$=\frac{23\left(\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-16}:\left[\frac{75\sqrt{x}+300-x\sqrt{x}-4x+x\sqrt{x}+x-12\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}-36}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(x+\sqrt{x}-12\right)}\right]$

$=\frac{23}{\sqrt{x}+4}:\left[\frac{66\sqrt{x}+264}{\left(\sqrt{x}+4\right)\left(x+\sqrt{x}-12\right)}\right]=\frac{23\left(x-16+\sqrt{x}+4\right)}{66\left(\sqrt{x}+4\right)}=\frac{23}{66}\left(\sqrt{x}-3\right).$

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Đăk Nông 23-24)

Với $x>0$, cho các biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x=64$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm x để $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

a) Với $x=64$ (thỏa mãn điều kiện $x>0$) thì: $A=\dfrac{\sqrt{64}-1}{\sqrt{64}}=\dfrac{8-1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

Vậy $A=\dfrac{7}{8}$ khi $x=64$.

b) Ta có: $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{x-1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x>0$.

c) Ta có: $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}>\dfrac{3}{2}$ (ĐKXĐ: $x>0$ và $x\neq1$)

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}>\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2}>0\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x}+2-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow 2-\sqrt{x}>0$ (vì $x>0$)

$\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Rightarrow x<4$.

Kết hợp điều kiện, ta được $0<x<4$ và $x\neq1$.

Vậy $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}$ khi $0<x<4$ và $x\neq1$.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Đồng Nai 23-24)

Cho số thực x thỏa mãn $3<x<4$. Rút gọn biểu thức:

$$A=\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}.$$

Lời giải

Ta có: $A=\sqrt{\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-3}+1\right|+\left|\sqrt{x-3}-1\right|$.

Vì $3<x<4$ nên $0<\sqrt{x-3}<1$, suy ra $\begin{cases}\sqrt{x-3}+1>0\\ \sqrt{x-3}-1<0\end{cases}$.

Vậy $A=\sqrt{x-3}+1-\sqrt{x-3}+1=2$.

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Đồng tháp 23-24)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-2\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}+2}{2}$ với $x>0, x\neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\geq 1$.

Lời giải

a) Ta có: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-2\right)}\right).\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-2\right)}.\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{2\left(x-4\right)}{\sqrt{x}.(x-4)}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

b) $P\geq 1\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}}\geq 1\Rightarrow \sqrt{x}\leq 2\Rightarrow x\leq 4$

Do $x>0, x\neq 4$ nên $0<x<4$.

Câu 14. (TS vào 10- Chuyên Gia Lai 23-24)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{x\sqrt{x}}{x-4}$ với $x>0$; $x\neq 4$. Tìm x để $P=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

a) Ta có: $P=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{x\sqrt{x}}{x-4}$ với $x>0; x\neq 4$.

$$P=\left(\dfrac{2.(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}-\dfrac{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}\right):\dfrac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}$$

$$P=\left(\dfrac{2.(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}\right).\dfrac{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}{x\sqrt{x}}$$

$$P=\left(\dfrac{-x+6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}\right).\dfrac{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}{x\sqrt{x}}$$

$$P=\dfrac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)}{x\sqrt{x}}$$

$$P=-\dfrac{\sqrt{x}-6}{x}.$$

Vậy $P=-\dfrac{\sqrt{x}-6}{x}$ với $x>0; x\neq 4$.

Để $P=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{x}-6}{x}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -3.(\sqrt{x}-6)=x$

$\Leftrightarrow x+3\sqrt{x}-18=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+6).(\sqrt{x}-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-6 \text{ (ktm)}\\ \sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9 \text{ (tm)}\end{array}\right..$$

Vậy $x=9$ thỏa mãn đề bài.

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)

Tìm tất cả các số thực x để $p=\dfrac{5}{x-\sqrt{x}+2}$ là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $p=\dfrac{5}{x-\sqrt{x}+2}=\dfrac{5}{\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}}$.

Suy ra: $0<p\le\dfrac{5}{\frac{7}{4}}=\dfrac{20}{7}$. Mà p là số nguyên nên $p=1;\ 2$.

TH1: $p=1\Leftrightarrow\dfrac{5}{x-\sqrt{x}+2}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-3=0\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

TH2: $p=2\Leftrightarrow\dfrac{5}{x-\sqrt{x}+2}=2\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x}-1=0\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Vậy có hai giá trị cần tìm là $x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16. (TS vào 10-Chuyên Hà Nam 23-24)

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne 4$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm tất cả các số nguyên của x để $|2A-1|+1=2A$.

Lời giải

1. $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{1+\sqrt{x}+x}.\left[\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}+x}.\left[\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$

$=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=\left(\sqrt{x}-1\right)\dfrac{2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

2. +) $|2A-1|+1=2A\Leftrightarrow|2A-1|=2A-1\Leftrightarrow 2A-1\ge 0\Leftrightarrow A\ge\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}\le 3\Leftrightarrow x\le 9$.

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0;\ x\ne 1;\ x\ne 4\Rightarrow x\in\{0;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$.

Câu 17. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Cho hai số a,b thoả mãn các điều kiện $a.b=1,\ a+b\ne 0$. Rút gọn biểu thức:

$$Q=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^4}$$

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2+2=(a+b)^2$ nên:

$$Q=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}=\frac{\left(a^3+b^3\right)(a+b)+3\left(a^2+b^2\right)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{a^4+b^4+ab\left(a^2+b^2\right)+3\left(a^2+b^2\right)+6}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=\frac{a^4+b^4+4\left(a^2+b^2\right)+6}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(a^4+b^4+2a^2b^2\right)+4\left(a^2+b^2\right)+4}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2+4\left(a^2+b^2\right)+4}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=\frac{\left(a^2+b^2+2\right)^2}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=1.$$

Vậy $Q=1$.

Câu 18. (TS vào 10-Chuyên Hậu Giang 23-24)

Cho biểu thức $A=\frac{2a-5\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}$, với $a>0$.

1) Tìm tất cả các giá trị của *a* để $A\ge\frac{1}{2}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của *a* để biểu thức *A* nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) Ta có: $A=\frac{2a-5\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2}=\frac{2a-5\sqrt{a}-\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}=\frac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-3)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+2)}=\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+2}$.

Do đó: $A\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+2}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{a}-6\ge\sqrt{a}+2\Leftrightarrow\sqrt{a}\ge 8\Leftrightarrow a\ge 64$.

2. Ta có: $A=\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+2}=\frac{\sqrt{a}+2-5}{\sqrt{a}+2}=1-\frac{5}{\sqrt{a}+2}$.

Dễ thấy $\sqrt{a}+2>2$, với mọi $a>0$.

$A=1-\frac{5}{\sqrt{a}+2}\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{a}+2}=1-A>0$. Suy ra $A<1$ (1)

$\Leftrightarrow\sqrt{a}+2=\frac{5}{1-A}\Leftrightarrow\sqrt{a}=\frac{5}{1-A}-2=\frac{2A+3}{1-A}>0$. Do $1-A>0$ nên suy ra $A>-\frac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $-\frac{3}{2}<A<1$

Do $A\in\mathbb{Z}$ nên $A=-1$ hoặc $A=0$.

Với $A=0$, ta có $\sqrt{a}=\frac{5}{1-0}-2=3\Leftrightarrow a=9$.

Với $A=-1$, ta có $\sqrt{a}=\frac{5}{1+1}-2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$.

Câu 19. (TS vào 10-Chuyên Chung Kom tum 23-24)

Rút gọn biểu thức: $A=(\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Lời giải

$A=(\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$.

Vậy $A=4$.

Câu 20. (TS vào 10-Chuyên Hưng yên 23-24)

Cho biểu thức: $P=\frac{x}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0,\ x\neq 1,\ x\neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $|P|-P=0$.

Lời giải

a) Với $x\geq 0,\ x\neq 1,\ x\neq 4$, ta có:

$$P=\frac{x}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-1}+\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-2}+\frac{2x-x\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-2+2x-x\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

b) $|P|-P=0\Leftrightarrow|P|=P\Leftrightarrow P\geq 0$.

Khi đó $\frac{2}{\sqrt{x}-1}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x}-1>0\Rightarrow x>1$

Kết hợp với ĐKXĐ $x \geq 0,\ x \neq 1,\ x \neq 4$ ta được $x > 1,\ x \neq 4$.

Câu 21. (TS vào 10-Chuyên Khánh Hòa 23-24)

a) Cho biểu thức $M = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 4\cdot\dfrac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$, với $x > 1$.

Rút gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ là số nguyên.

Lời giải

a) Cho biểu thức $M = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 4\cdot\dfrac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$, với $x > 1$.

Rút gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M.

* Rút gọn M :

$$M = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 4\cdot\frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}},$$

$$= \left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right) - \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right) - \frac{4x\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}}$$

$$= 4x - 2\sqrt{x-1}$$

* Tìm giá trị nhỏ nhất của M :

Đặt $t = \sqrt{x-1},\ (t > 0) \Rightarrow x = t^2 + 1$

Khi đó $M = 4t^2 - 2t + 4 = \left(2t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4} \geq \dfrac{15}{4},\ \forall t > 0$

$M = \dfrac{15}{4}$ khi và chỉ khi $t = \dfrac{1}{4}$ tức là $x = \dfrac{17}{16}$ (TMĐK).

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{15}{4}$ khi $x = \dfrac{17}{16}$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}$ là số nguyên.

Cách 1:

Đặt $m = \sqrt{n+3} + \sqrt{n+\sqrt{n+3}}, m \in \mathbb{Z}^*$

$$\Rightarrow n + \sqrt{n+3} = \left(m - \sqrt{n+3}\right)^2 = m^2 + n + 3 - 2m\sqrt{n+3} \Rightarrow \sqrt{n+3} = \frac{m^2+3}{2m+1} \in \mathbb{Q}$$

Do đó $\sqrt{n+3} \in \mathbb{Q}$

Mà $n+3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{n+3} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2m+1 \mid m^2+3 \Rightarrow 2m+1 \mid 4m^2+12 \Rightarrow 2m+1 \mid \left[(2m+1)^2-2(2m+1)+13\right] \Rightarrow 2m+1 \mid 13$

Vì $n \geq 0 \Rightarrow \sqrt{n+3} \geq \sqrt{3} \Rightarrow m \geq \sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}} > 3$

Vậy $2m+1=13 \Rightarrow m=6 \Rightarrow \sqrt{n+3}=\dfrac{6^2+3}{2.6+1}=3 \Rightarrow n=6$

Vậy $n=6$ là số tự nhiên duy nhất tìm được.

Cách 2:

Đặt $a=n+3$ và $b=n+\sqrt{n+3}\,(a,b \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow a-3+\sqrt{a}=b \Rightarrow \left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{2}\right)^2-b=\dfrac{13}{4} \Rightarrow \left(2\sqrt{a}+1\right)^2-\left(2\sqrt{b}\right)^2=13$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{a}+1-2\sqrt{b}\right).\left(2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b}\right)=13$

Ta có $a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b} > 2\sqrt{a}+1-2\sqrt{b} \\ 2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b} > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a}+1-2\sqrt{b}=1 \\ 2\sqrt{a}+1+2\sqrt{b}=13 \end{cases} \Rightarrow a=b=9 \Rightarrow n=6$

Vậy $n=6$

Câu 22. (TS vào 10- Chuyên Lai Châu 23-24)

Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$ (với $x>0; x\neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \dfrac{1+\sqrt{2003}}{\sqrt{2023}}$

Lời giải

a) $A=\left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$

$=\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right]:\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$=\left[\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]:\dfrac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x>0;x\neq 1$

b) $A\geq \dfrac{1+\sqrt{2003}}{\sqrt{2023}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1+\sqrt{2003}}{\sqrt{2023}}\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2023}+\sqrt{2023}-\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{2023}}{\sqrt{x}}\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2023}-\sqrt{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\leq\sqrt{2023}$

$\Leftrightarrow x\leq 2023$

$\Leftrightarrow 0\leq x\leq 2023$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\geq\dfrac{1+\sqrt{2003}}{\sqrt{2023}}$

Kết hợp với điều kiện với $x>0;x\neq 1$ có 2022 giá trị thỏa mãn điều kiện.

Câu 23. (TS vào 10-Chuyên Lạng Sơn 23-24)

Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right).\left(x-\dfrac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}\right)$, với $x>0,x\neq 1$.

Lời giải

Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right).\left(x-\dfrac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}\right)$, với $x>0,x\neq 1$.

$$A=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right).\left(x-\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{2x+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\right).\left(x-\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}+x\right)}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{2x+1-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\left(x-1+\sqrt{x}-x\right)=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\left(\sqrt{x}-1\right)=1$$

Câu 24. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)

Cho biểu thức:

$P=\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3}\right)$, với $x\geq 0,x\neq 4,x\neq 9$.

Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) $P=\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3}\right)$

$=\frac{9-x+x-4\sqrt{x}+4-9+x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}:\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}+\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}\right)$

$=\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{3}{\sqrt{x}+1}$

$\sqrt{x}\ge 0,\forall x\ge 0,x\ne 4,x\ne 9\Rightarrow \sqrt{x}+1\ge 1>0,\forall x\ge 0,x\ne 4,x\ne 9$

$\Rightarrow 0<\frac{3}{\sqrt{x}+1}\le 3,\forall x\ge 0,x\ne 4,x\ne 9$

$\Rightarrow 1>1-\frac{3}{\sqrt{x}+1}\ge -2,\forall x\ge 0,x\ne 4,x\ne 9\Rightarrow 1>P\ge -2,\forall x\ge 0,x\ne 4,x\ne 9$

Mà P nguyên nên $P\in\{-2;-1;0\}$

Ta có bảng

P	-2	-1	0
$\frac{3}{\sqrt{x}+1}$	3	2	1
$\sqrt{x}+1$	1	$\frac{3}{2}$	3
x	0 (Tm)	$\frac{1}{4}$ (Tm)	4 (Ktm)

Vậy $x\in\left\{0;\frac{1}{4}\right\}$ thì P có giá trị nguyên.

Câu 25. (TS vào 10-Chuyên Nghệ An 23-24)

Tìm $x\in\mathbb{R}$ sao cho $x+\sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

Lời giải

Tìm $x\in\mathbb{R}$ sao cho $x+\sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

Đặt $\begin{cases}a=x+\sqrt{2024}\\ b=\frac{1}{x}-\sqrt{2024}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a-\sqrt{2024}\\ \frac{1}{x}=b+\sqrt{2024}\end{cases}$

$\Rightarrow 1=\left(a-\sqrt{2024}\right)\left(b+\sqrt{2024}\right)\Leftrightarrow 2025-ab=(a-b)\sqrt{2024}$ (1)

$VT\in\mathbb{Z}\Rightarrow VP(1)\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=b$

$\Rightarrow 1=\left(a-\sqrt{2024}\right)\left(a+\sqrt{2024}\right)\Leftrightarrow a^2=2025\Rightarrow a=\pm 45$

Với $a=45\Rightarrow x=45-\sqrt{2024}$

Với $a=-45\Rightarrow x=-45-\sqrt{2024}$.

Câu 26. (TS vào 10-Chuyên Quảng Ninh 23-24)

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{5+4\sqrt{x}}{2x+5\sqrt{x}-12}-\dfrac{2}{2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}+4}\right):\left(\sqrt{x}+\dfrac{5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right)$ với $x\ge 0,x\ne\dfrac{9}{4}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Lời giải

a) Ta có:

$$P=\left(\frac{5+4\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+4)+3(2\sqrt{x}-3)}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)}\right):\left(\frac{x+4\sqrt{x}+5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right)$$

$$P=\left(\frac{8\sqrt{x}-12}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)}\right):\left(\frac{x-2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+4}\right)$$

$$P=\frac{4}{\sqrt{x}+4}.\frac{\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}+5}=\frac{4}{x-2\sqrt{x}+5}.$$

b) Ta có $x-2\sqrt{x}+5=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+4\Rightarrow x-2\sqrt{x}+5\ge 4$ với $\forall x\ge 0,x\ne\dfrac{9}{4}$.

Khi đó $P\le 1$ với $\forall x\ge 0,x\ne\dfrac{9}{4}$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x=1$.

Giá trị lớn nhất của P là 1 khi $x=1$

Câu 27. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

a) Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$.

b) Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}:\left(\dfrac{a}{a-2\sqrt{a}}+\dfrac{a}{\sqrt{a}-2}\right)$ với $a>0$ và $a\ne 4$.

Lời giải

a) Ta có:

$$A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$$

b) Với $a>0$ và $a\neq 4.$ ta có

$$B=\frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2}:\left(\frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right)=\frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2}:\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2}:\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}=\frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2}\cdot\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}=\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}.$$

Câu 28. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

a) Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Rút gọn biểu thức; tính giá trị của A, biết $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

b) Cho biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{2}$ $\left(a>1,b>1\right)$. Chứng minh rằng $ab-\sqrt{1-a^2b^2+a^2+b^2}=1$

Lời giải

a) Với điều kiện $x\geq 0,x\neq 1$, ta có:

$$A=\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{x\sqrt{x}-1}:\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$$

Lại có

$$x=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+1}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}+1}=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{3+\sqrt{5}}+\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{3-\sqrt{5}}=4$$

Do đó $A=\frac{\sqrt{4}+1}{4+\sqrt{4}+1}=\frac{3}{7}$

c) Ta có:

$a>1$, $b>1$ nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=2a^2b^2-2ab$

Khi đó: $B=ab-\sqrt{1-a^2b^2+2a^2b^2-2ab}=ab-\sqrt{\left(ab-1\right)^2}$

Vì $a>1$, $b>1\Rightarrow ab>1$ nên $B=ab-ab+1=1$ (đpcm)

Câu 29. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

a) Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Rút gọn biểu thức; tính giá trị của A, biết $x=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

b) Cho biết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{2}\ (a>1,b>1)$. Chứng minh rằng $ab-\sqrt{1-a^2b^2+a^2+b^2}=1$

Lời giải

Câu 30. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Rút gọn biểu thức; tính giá trị của A, biết $x=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

b) Cho biết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{2}\ (a>1,b>1)$. Chứng minh rằng $ab-\sqrt{1-a^2b^2+a^2+b^2}=1$

Lời giải

Câu 31. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Rút gọn biểu thức; tính giá trị của A, biết $x=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

b) Cho biết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{2}\ (a>1,b>1)$. Chứng minh rằng $ab-\sqrt{1-a^2b^2+a^2+b^2}=1$

Lời giải

Câu 32. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

a) Chứng minh giá trị của biểu thức $P=\left(\dfrac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-1}$ không phụ thuộc vào giá trị của a, với $a>0$ và $a\neq 1$.

Lời giải

a Với $a>0$ và $a\neq 1$ ta có: $P=\left[\dfrac{2+\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right]:\dfrac{\sqrt{a}}{(a-1)\left(\sqrt{a}+1\right)}$

$$=\left[\dfrac{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)-\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)^2}\right].\dfrac{(a-1)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)^2}\right].\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}}=2.$$

Vậy giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của a.

Câu 33. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 23-24)

Cho các số thực x,y thõa mãn $x\neq 0$ và $\left(x+\sqrt{x^2+2023}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2023}\right)=2023$

Tính giá trị biểu thức: $\frac{2024x+y}{2023x-y}$

Lời giải

Ta có: $\left(\sqrt{x^2+2023}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2023}-x\right)=x^2+2023-x^2=2023$ (1) (1)

$$\left(\sqrt{y^2+2023}+y\right)\left(\sqrt{y^2+2023}-y\right)=y^2+2023-y^2=2023 \text{ (2)}$$

Từ 91) và (2) kết hợp với giải thiết ta suy ra $\sqrt{x^2+2023}-x=\sqrt{y^2+2023}+y$ (3)

Từ (20 kết hợp giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2+2023}-x=\sqrt{y^2+2023}-y$ (4)

Lấy $(3)-(4)$ theo vế ta được: $-2x=2y\Rightarrow y=-x$

Khi đó: $P=\frac{2024x-x}{2023x+x}=\frac{2023}{2024}$

Câu 34. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn đồng thời các điều kiện $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=8$; $a+b+c=26;abc=144$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{bc}-\sqrt{a}+9}+\frac{1}{\sqrt{ca}-\sqrt{b}+9}+\frac{1}{\sqrt{ab}-\sqrt{c}+9}$$

Lời giải

Đặt $\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\right)=\left(x,y,z\right)$ (điều kiện $x,y,z\geq 0$)

$$\Rightarrow x+y+z=8;x^2+y^2+z^2=26;x^2y^2z^2=144$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx=\frac{\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}=19;xyz=12$$

Ta có $yz-x+9=yz-x+x+y+z+1=\left(y+1\right)\left(z+1\right)$

Tương tự $xz-y+9=(x+1)(z+1); xy-z+9=(x+1)(y+1)$

$$P=\frac{1}{\sqrt{bc}-\sqrt{a}+9}+\frac{1}{\sqrt{ca}-\sqrt{b}+9}+\frac{1}{\sqrt{ab}-\sqrt{c}+9}$$

$$=\frac{1}{yz-x+9}+\frac{1}{xz-y+9}+\frac{1}{xy-z+9}=\frac{x+1+y+1+z+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

$$=\frac{x+y+z+3}{xyz+x+y+z+xy+yz+zx+1}=\frac{11}{12+19+8+1}=\frac{11}{40}$$

Vậy $P=\frac{11}{40}$.

Câu 35. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh 23-24)

Tính giá trị của biểu thức $T=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có: $T=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{12+2.2\sqrt{3}.1+1}-\sqrt{12-2.2\sqrt{3}.1+1} \quad =\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}$

$=\left|2\sqrt{3}+1\right|-\left|2\sqrt{3}-1\right|=2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+1=2$.

Câu 36. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Cho biểu thức $Q=\frac{x\sqrt{y}+\sqrt{x}-y\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}$ với $x\ge 0; y\ge 0$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tính giá trị biểu thức Q khi $x=2024+2\sqrt{2023};\ y=2024-2\sqrt{2023}$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức Q.

$$Q=\frac{x\sqrt{y}+\sqrt{x}-y\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{1+\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{1+\sqrt{xy}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

b) Tính giá trị biểu thức Q khi $x=2024+2\sqrt{2023};\ y=2024-2\sqrt{2023}$.

$$Q=\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2024-2\sqrt{2024}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2023}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2023}-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{2023}+1-\sqrt{2023}+1=2$$

Câu 37. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(x^2+2x+2021\right)^{2024}$ tại $x=\sqrt{\dfrac{2}{x-\sqrt{15}}}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$.

Lời giải

Ta có:

$$x=\sqrt{\frac{2}{4-\sqrt{15}}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}-\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-1=\sqrt{3}-1$$

Suy ra $(x+1)^2=3\Leftrightarrow x^2+2x=2$

Do đó $P=\left(x^2+2x+2021\right)^{2024}=\left(2+2021\right)^{2024}=2023^{2024}$.

Câu 38. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ vơi $x\ge 0, x\ne 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}$ với $a>4$.

Lời giải

a) $P=\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{15\sqrt{x}-11}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\dfrac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

$$=\frac{15\sqrt{x}-11}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{\left(3\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{\left(2\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{15\sqrt{x}-11-3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}+6-2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$=\frac{7\sqrt{x}-5x-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2-5\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

b) $Q=\dfrac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}=\dfrac{a-4\sqrt{a}+4+\sqrt{a}-2+4}{\sqrt{a}-2}$

$$=\sqrt{a}-2+\frac{4}{\sqrt{a}-2}+1\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{a}-2\right).\frac{4}{\sqrt{a}-2}}+1=5$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{a}-2=\dfrac{4}{\sqrt{a}-2}\Leftrightarrow \sqrt{a}-2=2\Leftrightarrow a=16$

Vậy $\min Q = 5$ khi $a = 16$.

Câu 39. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Long 23-24)

a) Tính giá trị biểu thức $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

b) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right):\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$ với $x\ge 0; x\ne 1$.

Rút gọn biểu thức P.

Lời giải

a) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}$

$=\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}=2\sqrt{5}$

b) $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right):\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right):\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+1}\right)$

$=\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}:\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\cdot\dfrac{x+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

Câu 40. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)

Cho biểu thức $T=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}}{4}-\dfrac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2$ với $a>0, a\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức T.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $T=-\sqrt{a}-1$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức T.

$T=\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}}{4}-\dfrac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2$

$=\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)\left(\dfrac{a-1}{4\sqrt{a}}\right)^2$

$=\dfrac{4\sqrt{a}}{a-1}\cdot\dfrac{(a-1)^2}{\left(4\sqrt{a}\right)^2}$

$=\dfrac{a-1}{4\sqrt{a}}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $T=-\sqrt{a}-1$.

Ta có:

$\dfrac{a-1}{4\sqrt{a}}=-\sqrt{a}-1 \Leftrightarrow 5a+4\sqrt{a}-1=0$

$\sqrt{a}=-1$ hoặc $\sqrt{a}=\dfrac{1}{5}$.

Kết luận $a=\dfrac{1}{25}$.

Câu 41. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)

Tính giá trị biểu thức: $A=\left(1-\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{20}$.

Lời giải

$A=(1-\sqrt{5})^2+\sqrt{20}=1-2\sqrt{5}+5+2\sqrt{5}=6$.

Câu 42. (TS vào 10-Chuyên Tin – Hoà Bình 23-24)

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

b) Tính giá trị biểu thức: $B=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 2$.

$A=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$.

b) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}.$

Câu 43. (TS vào 10-Chuyên Thái Nguyên 23-24)

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x-3\sqrt{x}+2}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$.

a. Rút gọn biểu thức A

b. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Đk: $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Ta có $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x-3\sqrt{x}+2}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$.

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}}-\frac{3}{x-3\sqrt{x}+2}\right):\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$A=\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right):\left(\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$A=\left(\frac{2x-8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$A=\frac{2(x-4)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$A=\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}.$$

b) $A=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)}=2+\dfrac{8}{\sqrt{x}-2}$

Vì $A\in Z$ với $x\in Z$ suy ra $\sqrt{x}-2\in U(8)=\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8;0\}$

Từ đó ta thấy $x\in\{9;1;16;0;36;100;4\}$ kết hợp đk có $x\in\{9;16;0;36;100\}$.

KL vậy $x\in\{9;16;0;36;100\}$ thì $A\in Z$.

Câu 44. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3}{x-\sqrt{x}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A=4$.

Lời giải

a) + Điều kiện: $x>0;x\neq1$

+ Ta có:

$$A=\left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{3}{x-\sqrt{x}}\right):\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}+\frac{3}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right).\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$$

b) Với $x>0;x\neq1$ ta có

$$A=4\Rightarrow\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}=4\Rightarrow x-4\sqrt{x}+3=0\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\\sqrt{x}=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(l)\\x=9(tm)\end{array}\right.$$

Vậy với $x=9$ thì $A=4$.

Câu 45. (TS vào 10- Chuyên ĐHSP Hà Nội 23-24)

Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2} \text{ với } x>0.$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=a$, suy ra $x=a^2$. Khi đó ta được biểu thức

$$A=\frac{a^4+8a}{a^2-2a+4}+\frac{2a^2+a}{a}+\frac{16-4a^2}{a+2}$$

$$=\frac{a(a+2)(a^2-2a+4)}{a^2-2a+4}+\frac{2a^2+a}{a}+\frac{16-4a^2}{a+2}$$

$$=a(a+2)+2a+1-4(a-2)$$

$$=a^2+9$$

$$=a+9$$

Câu 46. (TS vào 10- Chuyên Hoà Bình 23-24)

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

b) Tính giá trị biểu thức: $B=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\neq 2$. $A=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

b) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}.$

Câu 47. (TS vào 10-Chuyên Bến Tre 23-24)

Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right), \text{ với } x>0, x\neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A\geq\dfrac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$?

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A.

Ta có:

$$A=\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A\ge\frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$?

Ta có biến đổi sau

$$A\ge\frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\ge\frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}\Rightarrow\sqrt{2023x}+\sqrt{2023}\ge\sqrt{x}+\sqrt{2023x}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}\le\sqrt{2023}\Rightarrow x\le 2023$$

Kết hợp với điều kiện xác định ban đầu, ta được $1<x\le 2023\left(x\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy có 2022 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

a) Cho hai số a,b thoả mãn các điều kiện $a.b=1,\ a+b\ne 0$. Rút gọn biểu thức:

$$Q=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^4}$$

b) Cho hai số dương x,y thoả mãn $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\sqrt{15}$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$

Lời giải

a) Vì $a.b=1\Rightarrow a^2+b^2+2=(a+b)^2$. Ta có:

$$Q=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{\left(a^3+b^3\right)(a+b)+3\left(a^2+b^2\right)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{a^4+b^4+ab\left(a^2+b^2\right)+3\left(a^2+b^2\right)+6}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{a^4+b^4+4\left(a^2+b^2\right)+6}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(a^4+b^4+2a^2b^2\right)+4\left(a^2+b^2\right)+4}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2+4\left(a^2+b^2\right)+4}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+2\right)^2}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=1$$

b) $P=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\sqrt{15}$

Đặt $M=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy\Rightarrow M^2=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+x^2y^2+2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$

$=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$

$=x^2\left(y^2+1\right)+y^2\left(x^2+1\right)+2x\sqrt{y^2+1}.y\sqrt{x^2+1}+1$

$=\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2+1$

$=16\Rightarrow M=4$.

Vậy $P=4-\sqrt{15}$.

CHUYÊN ĐỀ 2.

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Tin Hà Nội 23-24)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, một bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ một túi bất kỳ hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

Lời giải

Đầu tiên An lấy 1 viên kẹo từ túi có 21 viên kẹo. Lúc này cả 2 túi đều có số kẹo là số chẵn.

Chiến thuật sau đó thì Bình bốc thế nào, An sẽ bốc giống hệt thế.

Như vậy, sau lượt đầu, An đưa 2 túi về có chẵn kẹo.

- Nếu Bình lấy 1 viên từ túi nào đó thì số kẹo còn lại trong túi đó là số lẻ, An sẽ lấy 1 viên từ túi có số kẹo là số lẻ đó để đưa 2 túi về có chẵn viên kẹo.

- Nếu Bình lấy mỗi túi 1 viên kẹo thì cả hai túi đều có số kẹo là số lẻ, An lấy mỗi túi 1 viên kẹo để đưa 2 túi về có chẵn viên kẹo.

Do vậy, nếu Bình thực hiện được thì bước tiếp theo An vẫn thực hiện được. Mà chỉ có hữu hạn bước nên chắc chắn An là người chiến thắng.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Đồng Tháp 23-24)

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x+4000y=2023000 \Leftrightarrow 3x+4y=2023$

Suy ra $y=\dfrac{2023-3x}{4}\ge 1 \Rightarrow 1\le x\le \dfrac{2019}{3}=673$

Mặt khác ta có $y=\dfrac{2023-3x}{4}=\dfrac{2024-4x-1+x}{4}=506-x+\dfrac{x-1}{4}$

Để y nguyên thì $x-1$ chia hết cho 4, suy ra $x=1+4k, k\in\mathbb{Z}$.

Kéo theo $y=505-3k$.

Do đó $1\le 1+4k\le 673 \Leftrightarrow 0\le k\le 168$.

Vậy có 169 cặp $(x;y)$

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Chung Kon Tum 23-24)

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một con Robot được lập trình để chuyển động thẳng đều trên một quãng đường từ điểm A đến điểm B theo quy tắc: Đi được 120 cm thì dừng lại 1 *phút*, đi tiếp 240 cm rồi dừng lại 2 *phút*, đi tiếp 360 cm rồi dừng lại 3 *phút*..., tổng thời gian từ khi bắt đầu di chuyển từ A cho đến B là 253 *phút*. Tính quãng đường từ A đến B biết vận tốc của Robot không đổi là 40 *cm*/*phút*.

Lời giải

Gọi số lần đi của Robot (theo quy luật đi rồi lại nghỉ) là x ($x>1$, $x\in \mathbb{N}^*$).

Thời gian đi của Robot theo quy luật là:

$$\frac{120}{40}+\frac{240}{40}+\frac{360}{40}+...+\frac{120x}{40}=3+6+9+...+3x=\frac{3x(x+1)}{2}\text{ (phút).}$$

Thời gian nghỉ của Robot là: $1+2+3+....+x-1=\dfrac{x(x-1)}{2}$ (phút).

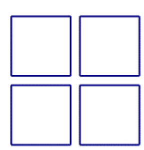
Theo bài ra ta có phương trình: $\dfrac{3x(x+1)}{2}+\dfrac{x(x-1)}{2}=253\Leftrightarrow 2x^2+x-253=0$.

Giải phương trình tìm được: $x_1=11$ (thỏa mãn); $x_2=-\dfrac{23}{2}$ (không thỏa mãn).

Quãng đường từ A đến B là: $\dfrac{3.11.12}{2}.40=7920(\text{ cm })$.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Khánh Hòa 23-24)

Lần cắt thứ nhất, bạn An cắt một mảnh giấy hình vuông thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau (hình vẽ). Lần cắt thứ hai, bạn An lấy một trong các hình vuông đó cắt thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau (như lần thứ nhất), và cứ làm như vậy nhiều lần. Hỏi sau bao nhiêu lần cắt thì bạn An có được 55 hình vuông?



Lời giải

Sau lần cắt thứ nhất bạn An có được $4=3\cdot 1+1$ (hình vuông).

Sau lần cắt thứ hai bạn An có được $3+4=7=3\cdot 2+1$ (hình vuông).

Sau lần cắt thứ ba bạn An có được $3+3+4=10=3\cdot 3+1$ (hình vuông).

....

$\Rightarrow$ Sau x lần cắt, bạn An có được $3x+1$ (hình vuông).

Theo đề bài, ta có phương trình: $3x+1=55\Leftrightarrow 3x=54\Leftrightarrow x=\dfrac{54}{3}=18\ (n)$.

Vậy sau 18 lần cắt bạn An có được 55 hình vuông.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)

Lúc 7 giờ 30 phút hai xe ô tô cùng xuất phát từ A đến B với vận tốc của mỗi xe không thay đổi trên cả quãng đường. Xe thứ hai đến B sớm hơn xe thứ nhất đúng 1 giờ. Lúc quay trở về, xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km/h, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc như lúc đi nhưng dừng ở trạm nghỉ 36 phút, do đó xe thứ hai về đến A cùng lúc với xe thứ nhất. Biết rằng quãng đường từ A đến B là 180 km. Hỏi lúc đi, xe thứ nhất đến B lúc mấy giờ?

Lời giải

Gọi vận tốc xe thứ nhất và xe thứ hai lúc đi từ A đến B lần lượt là x (km/h), y (km/h) ($y > x > 0$)

Thời gian xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{180}{x}$ (giờ)

Thời gian xe thứ hai đi từ A đến B là $\frac{180}{y}$ (giờ)

Đổi 30 phút $= \frac{3}{5}$ h

Thời gian xe thứ nhất đi từ B đến A là $\frac{180}{x+5}$ (giờ)

Thời gian xe thứ hai đi từ A đến B là $\frac{3}{5} + \frac{180}{y}$ (giờ)

Theo bài ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{180}{x} = \frac{180}{y} + 1 & (1) \\ \frac{180}{x+5} = \frac{3}{5} + \frac{180}{y} & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{2}{5} + \frac{180}{x+5} \Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 4500 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 50 = 0 \\ x - 45 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -50 \text{ (KTM)} \\ x = 45 \quad (TM) \end{array}\right.$

Thay $x = 45$ vào (1) ta được $y = 60$ (thỏa mãn)

Vậy xe thứ nhất đi đến B lúc 7h30phút + $\frac{180}{45}$ h = 11h30phút.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Hai đội thanh niên tình nguyện cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 6 giờ. Nếu hai đội làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn thời gian hoàn thành công việc của đội thứ nhất là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu?

Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng và hoàn thành là x giờ $(x>6)$

Thời gian đội thứ hai làm làm riêng và hoàn thành là $x-5$ giờ

Một giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}$ công việc

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow 6(x-5)+6x=x(x-5)$$

$$\Leftrightarrow x^2-17x+30=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=15 \text{ (t/m)} \\ x=2 \text{ (loai)} \end{array}\right.$$

Vậy đội một làm riêng hoàn thành công việc sau 15 giờ và thời gian đội hai hoàn thành riêng là 10 giờ.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)
Nhân dịp kỉ niệm 10 năm thành lập, cửa hàng GNH có thực hiện chương trình giảm giá cho mặt hàng X là 20% và mặt hàng Y là 15% so với giá niêm yết. Bà Giới mua 2 món hàng X và 1 món hàng Y phải trả số tiền là 395000 đồng. Ngày cuối cùng của chương trình, cửa hàng thay đổi bằng cách giảm giá mặt hàng X là 30% và mặt hàng Y là $25\%.$ Vào ngày hôm đó, cô Định mua 3 món hàng X và 2 món hàng Y thì trả số tiền là 603000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng X và Y *(giá niêm yết là giá ghi trên món hàng nhưng chưa thực hiện giảm giá)*.

Lời giải

Gọi giá niêm yết của mặt hàng X và Y lần lượt là x, y (đồng)

Lập được hệ phương trình $\begin{cases} 2x(1-20\%)+y(1-15\%) =395000 \\ 3x(1-30\%)+2y(1-25\%)=603000 \end{cases}$

Giải được $\begin{cases} x=130000 \\ y=220000 \end{cases}$

Kết luận.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)
Dì Út dự kiến trồng 160 cây Thanh Long trong một khu vườn hình chữ nhật theo hàng, mỗi hàng có số cây bằng nhau. Do mở rộng diện tích khu vườn nên Dì Út đã trồng thêm được 82

cây bằng cách trồng thêm 3 hàng, mỗi hàng thêm 2 cây so với dự định. Tính số hàng cây và số cây Thanh Long ở mỗi hàng mà Dì Út dự định trồng trong vườn lúc đầu.

Lời giải

Gọi số hàng cây Thanh Long Dì Út dự định trồng lúc đầu là x $(x \in \mathbb{N}^*)$

Số cây trồng ở mỗi hàng ban đầu là: $\frac{160}{x}$ (cây)

Lập được phương trình: $\frac{160}{x} + 2 = \frac{242}{x+3}$

Giải phương trình tìm được: $x = 8$ (TM); $x = 30$ (TM).

Nếu số hàng cây là 8 thì số cây ở mỗi hàng là 20;

Nếu số hàng cây là 30 thì số cây ở mỗi hàng là $160:30 = \frac{16}{3}$ (loại).

Vậy, số hàng cây là 8 và số cây ở mỗi hàng là 20.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Tin Hoà Bình 23-24)
Kết thúc năm học 2022 - 2023, Hòa hỏi Bình: *"Bạn có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và điểm 9 vậy?"*. Bình trả lời: *"Số bài kiểm tra đạt điểm 8, điểm 9 của tớ nhiều hơn 21 và tổng số điểm của các bài kiểm tra đó là 183*". Em hãy tính giúp Hòa xem Bình có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 9 nhé.

Lời giải

Gọi số bài điểm 8 và điểm 9 của Bình đạt được lần lượt là x, y (bài)$\left(x, y \in \mathbb{N}^*\right)$.

Theo giả thiết $x + y > 21$.

Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đó là 183 nên ta có: $8x + 9y = 183$.

Ta có $183 = 8x + 9y \geq 8(x+y) \Rightarrow x + y \leq \frac{183}{8}$.

Do $x + y \in \mathbb{N}^*$ và $21 < x + y \leq \frac{183}{8}$ nên $x + y = 22$.

Ta có hệ $\begin{cases} x + y = 22 \\ 8x + 9y = 183 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy Bình được 15 bài điểm 8 và 7 bài điểm 9.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Hoà Bình 23-24)

Kết thúc năm học 2022 - 2023, Hòa hỏi Bình: *"Bạn có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và điểm 9 vậy?"*. Bình trả lời: *"Số bài kiểm tra đạt điểm 8, điểm 9 của tớ nhiều hơn 21 và tổng số điểm của các bài kiểm tra đó là 183*". Em hãy tính giúp Hòa xem Bình có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 9 nhé.

Lời giải

Gọi số bài điểm 8 và điểm 9 của Bình đạt được lần lượt là x, y (bài)$\left(x, y \in \mathbb{N}^*\right)$.

Theo giả thiết $x+y>21$.

Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đó là 183 nên ta có: $8x+9y=183$.

Ta có $183=8x+9y\ge 8\left(x+y\right)\Rightarrow x+y\le \frac{183}{8}$.

Do $x+y\in \mathbb{N}^*$ và $21<x+y\le \frac{183}{8}$ nên $x+y=22$.

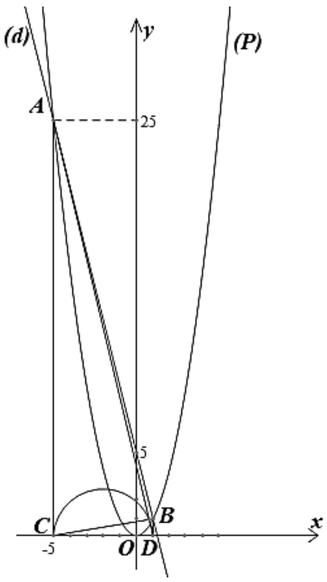
Ta có hệ $\begin{cases} x+y=22 \\ 8x+9y=183 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy Bình được 15 bài điểm 8 và 7 bài điểm 9.

CHUYÊN ĐỀ 3. HÀM SỐ

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên TP Đà Nẵng 23-24)
Trên cùng mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 5$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A và B. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục Ox.
1) Khi $k = -4$, tính diện tích hình thang $ABDC$.
2) Tìm tất cả các giá trị của k để AD và BC cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn đường kính CD.

Lời giải



1) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = -4x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Có: $a + b + c = 1 + 4 + (-5) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5.$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1$.

Với $x = -5 \Rightarrow y = (-5)^2 = 25$.

Vậy toạ độ giao điểm của (P) và (d) là $A(1;1)$ và $B(-5;25)$.

Diện tích hình thang $ABDC$: $S_{ABDC} = \dfrac{(AC + BD).CD}{2} = \dfrac{(25+1).6}{2} = 78$ (đvdt).

2) Gọi là giao I điểm của AD và BC.

Vì I thuộc đường tròn đường kính CD nên: $CID = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AD \perp BC$

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = kx + 5 \Leftrightarrow x^2 - kx - 5 = 0.$$

Có: $a.c = -5 < 0$, do đó đồ thị hai hàm số trên luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Gọi toạ độ hai giao điểm là $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

- Theo định lí Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1x_2 = -5 \end{cases}$.

- Phương trình đường thẳng AD có dạng: $y = ax + b$.

Ta có: $\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_D = ax_D + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 5 = ax_1 + b \\ 0 = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow kx_2 + 5 = a(x_1 - x_2)$ (1).

- Phương trình đường thẳng BC có dạng: $y = a'x + b'$. Tương tự như trên ta có:

$$kx_2 + 5 = a'(x_1 - x_2) \ (2).$$

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được:

$(kx_1 + 5)(kx_2 + 5) = -a.a'(x_1 - x_2)^2$

$\Leftrightarrow k^2x_1x_2 + 5k(x_1 + x_2) + 25 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$\Leftrightarrow -5k^2 + 5k^2 + 25 = k^2 + 20$

$\Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}$.

Vậy $k = \pm\sqrt{5}$.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Cần Thơ 23-24)

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 2mx - 4m + 5$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$. Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = 2mx - 4m + 5 \Rightarrow x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0.$$

$\Delta = 4m^2 - 16m + 20 > 0 (\forall m) \Longrightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{2m + \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m + \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_A = \left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2 \\ x_B = \dfrac{2m - \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m - \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_B = \left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2 \end{cases}.$$

ΔAOB vuông tại $O \Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$ (Định lý Pythagoras)

$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$

$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = x_A^2 - 2x_Ax_B + x_B^2 + y_A^2 - 2y_Ay_B + y_B^2$

$\Leftrightarrow x_A x_B + y_A y_B = 0$

$\Leftrightarrow \left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)+\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)^2\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=0 & (1)\\ \left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=-1 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1):

$$\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=0 \Leftrightarrow m^2-\left(m^2-4m+5\right)=0$$

$\Leftrightarrow 4m-5=0 \Leftrightarrow m=\frac{5}{4}$. Loại vì khi $m=\frac{5}{4}$ thì sẽ nhận được $x_B=0$ và $y_B=0$, điểm B trùng với điểm O không tạo được tam giác.

Giải (2):

$$\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=-1 \Leftrightarrow m^2-\left(m^2-4m+5\right)=-1$$

$\Leftrightarrow 4m-5=-1 \Leftrightarrow m=1$ (nhận).

Vậy $m=1$.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Bắc Giang 23-24)

Cho đường thẳng d có phương trình: $y=(3m+1)x-6m-1$, m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.

Lời giải

Chỉ ra đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(2;1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d

Suy ra $OH \le OM \ \forall m$

Chỉ ra đường thẳng OM có phương trình là $y=\frac{1}{2}x$

Do $OM \perp d$ nên $\frac{1}{2}(3m+1)=-1 \Leftrightarrow 3m+1=-2 \Leftrightarrow m=-1$. KL.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Bắc Ninh 23-24)

Vẽ đường thẳng (d) là đồ thị hàm số $y=2x+4$. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d).

Lời giải

Vẽ đường thẳng (d) là đồ thị hàm số $y=2x+4$.

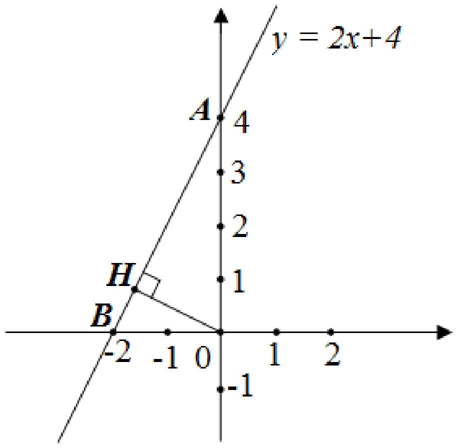
Ta có bảng giá trị sau:

x	0	-2

$y=2x+4$	4	0

$\Longrightarrow$ Đồ thị hàm số là đường thẳng (d) đi qua các điểm $A(0;4)$; $B(-2;0)$.

Ta vẽ được đồ thị hàm số $y=2x+4$ như sau:



Gọi OH là khoảng cách từ O đến AB.

Ta có đồ thị hàm số (d) cắt hai trục toạ độ tại $A(0;4)$; $B(-2;0)$nên $OA=4$; $OB=2$ và tam giác OAB vuông tại O $\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{16}\Rightarrow OH=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ (đvdt).

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=-x+6$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Tính tổng độ dài OA và OB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là:

$$x^2=-x+6 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Tọa độ giao điểm A, B của (P) và (d) là $A(-3;9)$, $B(2;4)$.

Do đó, tổng độ dài của hai đoạn thẳng OA và OB là:

$$T=OA+OB=\sqrt{(0+3)^2+(0-9)^2}+\sqrt{(0-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{90}+\sqrt{20}\approx 13,96.$$

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Đăk Nông 23-24)

Cho parabol (P): $y=\dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx-\dfrac{1}{2}m^2+m+1$ với m là tham số. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1-x_2|=2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2=mx-\frac{1}{2}m^2+m+1 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-2m-2=0 \quad (1).$$

Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac = (-m)^2 - 1(m^2 - 2m - 2) = 2m + 2$.

Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Với $m > -1$ có 2 nghiệm phân biệt. Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2m \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 - 2m - 2 \end{cases}.$$

Ta có: $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$\Rightarrow (2m)^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \Leftrightarrow 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}(tm)$.

Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Hậu Giang 23-24)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y = mx + n$ có đồ thị là đường thẳng (d). Tìm các giá trị của m và n để đường thẳng (d) cắt đồ thị (P) tại hai điểm có hoành độ là -2 và 4.

Lời giải

Vì đường thẳng (d) cắt đồ thị (P) tại hai điểm A và B có hoành độ là -2 và 4 nên ta có:

* $x_A = -2 \Rightarrow y_A = \dfrac{1}{2}.(-2)^2 = 2 \Rightarrow A(-2;2) \in d \Rightarrow -2m + n = 2.$

* $x_B = 4 \Rightarrow y_B = \dfrac{1}{2}.4^2 = 8 \Rightarrow B(4;8) \in d \Rightarrow 4m + n = 8.$

Từ đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} -2m + n = 2 \\ 4m + n = 8 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên, ta được $\begin{cases} m = 1 \\ n = 4 \end{cases}$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Chung Kon Tum 23-24)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = (m+2)x + 3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt hai trục $Ox; Oy$ lần lượt tại hai điểm A và B sao cho tam giác AOB cân.

Lời giải

Điều kiện $m \neq -2$.

Do đường thẳng (d) cắt hai trục $Ox; Oy$ lần lượt tại 2 điểm A và B nên

$$A\left(\frac{-3}{m+2};0\right)\Rightarrow OA=\left|\frac{-3}{m+2}\right|=\frac{3}{|m+2|} \text{ và } B(0;3)\Rightarrow OB=3.$$

Ta có tam giác AOB cân tại O nên:

$$OA=OB\Leftrightarrow\left|\frac{3}{m+2}\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3}{m+2}=3\\ \frac{3}{m+2}=-3\end{array}\right..\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\ (\text{tm})\\ m=-3\ (\text{tm})\end{array}\right..$$

Vậy $m\in\{-1;-3\}$ thì tam giác AOB cân.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên An Giang 23-24)

Cho đường thẳng (d): $y=(5m-6)x+2021$ với m là tham số.

a) Điểm O(0;0) có thuộc (d) không? Vì sao?

b) Tìm các giá trị của m để (d) song song với đường thẳng: $y=4x+5$.

Lời giải

a) Thay x = 0 và y = 0 vào phương trình đường thẳng: (d): $y=(5m-6)x+2021$ ta được:

$$0=(5m-6).0+2021\Leftrightarrow 0=2021 \text{ (vô lý)}$$

Vậy điểm O(0;0) không thuộc đường thẳng (d).

b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng: $y=4x+5\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6=4\\2021\neq 5\end{cases}\Leftrightarrow m=2$

Vậy m = 2 thỏa mãn đề bài.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=\frac{1}{2}x+m$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B$ sao cho tam giác OAB vuông tại A.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$2x^2=\frac{1}{2}x+m\Leftrightarrow 4x^2-x-2m=0\ \ (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A,\ B\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\Delta=1+32m>0\Leftrightarrow m>-\frac{1}{32}.$$

Vì tam giác OAB vuông tại A nên $OA\perp AB$, hay $OA\perp(d)$.

Mặt khác, đường thẳng OA đi qua O nên OA có phương trình là $y=-2x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của OA và (P): $2x^2=-2x$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1=0;\ x_2=-1$, suy ra $A(-1;2)$.

Vì (d) đi qua A nên $2=\frac{1}{2}.(-1)+m$, suy ra $m=\frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $m=\frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh 23-24)

Cho hai đường thẳng $(d_1): y=ax+5$ và $(d_2): y=3x+b-2$. Tìm a,b biết (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $M(2\,;-3)$.

Lời giải

Do (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $M(2;-3)$ nên ta có: $\begin{cases}2a+5=-3\\6+b-2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-7\end{cases}$.

Vậy $a=-4; b=-7$.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh)

Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=(7-m)x+3m-3$. Tìm các giá trị nguyên âm của m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 4.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P): y=2x^2$ và $(d): y=(7-m)x+3m-3$ là:

$2x^2=(7-m)x+3m-3\Leftrightarrow 2x^2-(7-m)x+3-3m=0$

$$\Delta=(7-m)^2-4.2.(3-3m)=m^2-14m+49-24+24m$$

$$=m^2+10m+25=(m+5)^2\ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$$

Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow m\ne -5$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{7-m-m-5}{4}=\frac{-2m+2}{4}=\frac{-m+1}{2};$$

$$x_2=\frac{7-m+m+5}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\frac{-m+1}{2}<4\Leftrightarrow -m+1<8\Leftrightarrow -m<7\Leftrightarrow m>-7$.

Vậy tập các giá trị nguyên âm thoả yêu cầu bài toán của m là: $\{-6;-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m-3)x + 3m - 5$ (m là tham số).

a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).

Lời giải

a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;3)$.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;3)$ nên ta có:

$$(2m-3).(-2) + 3m - 5 = 3$$

$\Leftrightarrow -4m + 6 + 3m - 5 = 3$

$\Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2$

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - (2m-3)x - 3m + 5 = 0$ (*)

$$\Delta = \left[-(2m-3)\right]^2 - 4(-3m+5) = 4m^2 - 12m + 9 + 12m - 20 = 4m^2 - 11$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol $(P) \Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm kép

$$4m^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Câu 14. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 5$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2 = 2(m-1)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$

Do $1.(-3) = -3 < 0$ nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Do đó đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 x_2 = -3 & (2) \end{cases}$

Lấy $x_1 + 2x_2 = 5$ trừ (1) vế theo vế ta được $\begin{cases} x_2 = 7 - 2m \\ x_1 = 2(m-1) - (7-2m) = 4m - 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = 7 - 2m \\ x_1 = 2(m-1) - (7-2m) = 4m - 9 \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được $(7-2m)(4m-9) = -3 \Leftrightarrow -8m^2 + 46m - 60 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2-23m+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\dfrac{15}{4} \end{array}\right.$

Vậy $m\in\left\{2;\dfrac{15}{4}\right\}$.

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y=ax+b$. Tìm a, b biết đường đường thẳng (d) đi qua $A(-1;2)$ và song song với đường thẳng (d'): $y=3x+2$.

Lời giải

(d) song song với đường thẳng $(d') \Leftrightarrow a=3; b\neq 2$

$\Rightarrow (d)$: $y=3x+b$ $(b\neq 2)$. (d) đi qua $A(-1;2) \Leftrightarrow 2=3.(-1)+b \Leftrightarrow b=5$ (TM)

Câu 16. (TS vào 10-Chuyên Tin Hoà Bình 23-24)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y=ax+b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(1;3)$ và $B(2;5)$.

Lời giải

(d) đi qua hai điểm $A(1;3)$ và $B(2;5)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=5 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $a=2$; $b=1$.

Câu 17. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=2x-m-2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+1=2x_2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P): $y=x^2$ và (d): $y=2x-m-2$ là:

$x^2=2x-m-2 \Leftrightarrow x^2-2x+m+2=0 (*)$

+ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ Pt (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 1-(m+2)>0 \Leftrightarrow m<-1$.

+ Theo định lí Vi- ét, ta có:

$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=2-x_1 \\ x_1.(2-x_1)=m+2, (**) \end{cases}$

Mà: $x_1^2+1=2x_2$ nên $x_1^2+1=2(2-x_1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_1=-3 \end{array}\right.$

+ Với $x_1=1$, thay vào (**) ta được: $m=-1$, (loại)

+ Với $x_1=-3$, thay vào (**) ta được: $m=-17$, (thỏa mãn)

Vậy $m=-17$.

Câu 18. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Hà Nội 23-24)

a) Một khay nước có nhiệt độ $125°F$ khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ của khay nước chỉ còn là $64°F$?

b) Cho parabol $(P): y = ax^2\ (a \neq 0)$ đi qua điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Lời giải

a) Nhiệt độ của khay nước sau mỗi giờ còn lại $80\% = \frac{4}{5}$. Gọi t (giờ) là thời gian để nhiệt độ giảm về $64°F$. Khi đó ta có phương trình sau

$$\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot 125 = 64 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{64}{125} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$\Leftrightarrow t = 3$

Vậy sau 3 giờ nhiệt độ của khay đá giảm về $64°\text{F}$.

b) Do parabol $(P): y = ax^2\ (a \neq 0)$ đi qua điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ nên $a\cdot(-1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Khi đó parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$, ta đặt $M\left(x_M;\frac{1}{2}x_M^2\right)$. Tức là khoảng cách từ điểm M đến trục tung là x_M, khoảng cách từ điểm M đến trục hoành là $\frac{1}{2}x_M^2$.

Do khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành nên

$x_M = 2\cdot\frac{1}{2}x_M^2 \Leftrightarrow x_M = x_M^2 \Leftrightarrow x_M(x_M - 1) = 0 \Leftrightarrow x_M = 0$ hoặc $x_M = 1$.

Vậy tất cả tọa độ điểm M thỏa mãn bài toán là $M(0;0)$ hoặc $M\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 19. (TS vào 10-Chuyên Bến Tre 23-24)

Cho Parabol $y = \frac{1}{2}x^2\ (P)$, đường thẳng $(d): y = -\frac{2}{m}x + 2$ với $m \neq 0$ và điểm $I(0;2)$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK là tam giác vuông.

c) Chứng minh rằng độ dài của đoạn thẳng AB lớn hơn 4.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{2}{m}x + 2, m \neq 0\ (1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{m}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{m}x - 4 = 0$$

Do $\Delta'_x = \frac{4}{m^2} + 4 > 0, \forall m \neq 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

Mặt khác, số nghiệm của phương trình(1) chính là số giao điểm của (P) và (d)

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Ta đặt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ hay $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1^2\right)$, $B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2^2\right)$. Khi đó $H(x_1; 0), K(x_2; 0)$.

Áp dụng Vi-et cho phương trình (1) với 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{m} \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}$

Ta tính được $\begin{cases} HK^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{16}{m^2} + 16 \\ IH^2 = (x_1 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = x_1^2 + 4 \\ IK^2 = (x_2 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = x_2^2 + 4 \\ IH^2 + IK^2 = x_1^2 + x_2^2 + 8 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 8 = \frac{16}{m^2} + 16 \end{cases}$

Suy ra $HK^2 = IH^2 + IK^2$, hay tam giác IHK vuông tại I.

c) Ta đi chứng minh $AB^2 > 16$ với mọi $m \neq 0$. Thật vậy,

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2(x_2 - x_1)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + \left[1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right] = \left(\frac{16}{m^2} + 16\right)\left(1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{64}{m^4} + \frac{80}{m^2} + 16 > 16, \forall m \neq 0$$

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Tin Hà Nội 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $a=x+y$, $b=xy$ $\left(a^2\ge 4b\right)$. Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a+3b=9 \\ a^3-3ab=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b=9-a \\ a^3-a(9-a)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b=9-a \\ a^3+a^2-9a-9=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b=9-a \\ (a+1)(a+3)(a-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{9-a}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-3 \\ a=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=\dfrac{10}{3} \end{cases} (\text{ktm}) \\ \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} (\text{ktm}). \\ \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} (\text{tm}) \end{array}\right.$$

Với $a=3;b=2$, từ đó ta tìm được nghiệm $(x;y)\in\{(1;2);(2;1)\}$.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Hải Phòng 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1 \\ y+4\sqrt{y}=x^2+3x-3-2(x+1)\sqrt{x} \end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 0;\ y\ge 0$.

PT thứ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (1).

PT thứ hai $\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+2\right)^2=\left(x+1-\sqrt{x}\right)^2$.

+TH1: $\sqrt{y}+2=x+1-\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1$. Kết kợp với (1):

$$\sqrt{x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3;\ y=7-4\sqrt{3} \text{ (tmđkxđ).}$$

+TH2: $\sqrt{y}+2=-x-1+\sqrt{x}$ (Vô lý vì $\sqrt{y}+2>0;-x-1+\sqrt{x}<0$).

Vậy $x=3;\ y=7-4\sqrt{3}$.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Đà Nẵng 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2-y)\sqrt{x-2}=x(y-x+2)\\(y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}\end{cases}$

Lời giải

Giải hệ: $\begin{cases}(x^2-y)\sqrt{x-2}=x(y-x+2) & (1)\\(y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2} & (2)\end{cases}$

ĐK: $x\ge 2$

Xét phương trình (1):

$(y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}\Rightarrow y^2-3xy-4y+3x+3=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}$

$\Rightarrow x^2(x-2)-3x^2\sqrt{x-2}-4x\sqrt{x-2}-x^2+6x+8\sqrt{x-2}=0$

$\Rightarrow (x^3-3x^2+6x)-\sqrt{x-2}(3x^2+4x-8)=0\Rightarrow x^3-3x(x-2)-\sqrt{x-2}(3x^2+4x-8)=0$

Đặt $t=\sqrt{x-2}$ thì $t^2=x-2$ và $4x-8=4t^2$

$(x^3-3xt^2)-t(3x^2+4t^2)=0\Rightarrow x^3-3x^2t-3xt^2-4t^3=0\Rightarrow(x-4t)(x^2+tx+t^2)=0$

Mà $x^2+tx+t^2=\left(x+\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}t^2>0$ (dấu bằng không xảy ra)

Ta được: $x=4t\Rightarrow x=4\sqrt{x-2}\Rightarrow x^2=16(x-2)\Rightarrow x^2-16x+32=0$

$x=8\pm4\sqrt{2}$: nhận

$x=8+4\sqrt{2}\Rightarrow y=x\sqrt{x-2}=(8+4\sqrt{2}).\sqrt{6+4\sqrt{2}}=(8+4\sqrt{2}).(2+\sqrt{2})=32+16\sqrt{2}$

$x=8-4\sqrt{2}\Rightarrow y=x\sqrt{x-2}=(8-4\sqrt{2}).\sqrt{6-4\sqrt{2}}=(8-4\sqrt{2}).(2-\sqrt{2})=32-16\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases}x=8+4\sqrt{2}\\y=32+16\sqrt{2}\end{cases}$ và $\begin{cases}x=8-4\sqrt{2}\\y=32-16\sqrt{2}\end{cases}$

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Cần Thơ 23-24)

Giải phương trình và hệ phương trình sau: $\begin{cases}x^3-y^3-35=0\\2x^2+3y^2-4x+9y=0\end{cases}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}x^3-y^3-35=0 & (1)\\2x^2-4x+3y^2+9y=0 & (2)\end{cases}$

Nhân hai vế của (2) với 3 ta được:

$3(2x^2-4x+3y+9y)=0\Leftrightarrow 6x^2-12x+9y^2+27y=0\ \ (3)$

lấy $(1)-(3)$ ta được:

$x^3-y^3-35-6x^2+12x-9y^2-27y=0$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8-y^3-9y^2-27y-27=0$

$\Leftrightarrow x^3-3x^{2.2}+3x.2^2-2^3-y^3-3y^{2.3}-3y.3^2-3^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^3-(y+3)^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^3=(y+3)^3$

$\Leftrightarrow x-2=y+3$

$\Leftrightarrow x=y+5$

$(1)\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=35\ \ (4)$

Thay $x=y+5$ vào (4) ta được:

$(y+5)^2+y(y+5)+y^2=7$

$\Leftrightarrow y^2+10y+25+y^2+5y+y^2=7$

$\Leftrightarrow 3y^2+15y+18=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=-3 \end{array}\right.$

+) Với $y=-2$, ta có $x=3$

+) Với $y=-3$, ta có $x=2$

Vậy nghiệm của hệ là $(3;-2)$ và $(2;-3)$.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Bắc Kạn 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2x^2-xy-y+2x=0 \\ \sqrt{x^2-y-1}+x+y=1 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} y^2-2x^2-xy-y+2x=0\ (1) \\ \sqrt{x^2-y-1}+x+y=1\quad (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x^2-y-1\ge 0$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow (y-2x)(y+x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=1-x \end{array}\right.$

Với $y=2x$ thay vào (2) ta được:

$\sqrt{x^2-2x-1}=1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{3} \\ x^2-2x-1=1-6x+9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{3} \\ 8x^2-4x+2=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Với $y=1-x$ thay vào (2) ta được: $\sqrt{x^2+x-2}=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình: $S=\{(1;0);(-2;3)\}$.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Bắc Giang 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x-2xy=2 \\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x^2+x-2xy=2 \\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ \left(x^4-4x^3y+4x^2y^2\right)+x^2-4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ \left(x^2-2xy\right)^2+x^2-4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ (2-x)^2+x^2-4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ 2x^2-4x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x\,(*) \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$

+) Với $x=0$, thay vào (*) ta được $0=2$ (vô lý).

+) Với $x=2$, thay vào (*) ta được $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2;1)$.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Bắc Ninh 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x+6y=2023|xy| \\ x-2y=3xy \end{cases}$.

Lời giải

$\begin{cases} 6x+6y=2023|xy| & (1) \\ x-2y=3xy & (2) \end{cases}$

TH1: Nếu $xy>0 \Rightarrow |xy|=xy$. Khi đó hệ phương trình có dạng

$\begin{cases} 6x+6y=2023xy \\ x-2y=3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\dfrac{1}{y}+6\dfrac{1}{x}=2023 \\ \dfrac{1}{y}-2\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\dfrac{1}{y}+6\dfrac{1}{x}=2023 \\ 3\dfrac{1}{y}-6\dfrac{1}{x}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\dfrac{1}{y}=2032 \\ \dfrac{1}{y}-2\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{2032}{9} \\ \dfrac{2032}{9}-2\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{9}{2032} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{2025}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{9}{2032} \\ x=\dfrac{18}{2025} \end{cases}$.

TH2: Nếu $xy<0 \Rightarrow |xy|=-xy$. Khi đó hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} 6x+6y=-2023xy \\ x-2y=3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\dfrac{1}{y}+6\dfrac{1}{x}=-2023 \\ \dfrac{1}{y}-2\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\dfrac{1}{y}+6\dfrac{1}{x}=2023 \\ 3\dfrac{1}{y}-6\dfrac{1}{x}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\dfrac{1}{y}=-2014 \\ \dfrac{1}{y}-2\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{-2014}{9} \\ \dfrac{-2014}{9}-2\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-9}{2014} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{-2041}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-9}{2014} \\ x=\dfrac{-18}{2041} \end{cases}.$$

TH3: $x=0$ hoặc $y=0$ khi đó ta có $(x;y)=(0;0)$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x;y)\in\left\{\left(\dfrac{18}{2025};\dfrac{9}{2032}\right);\left(\dfrac{-18}{2041};\dfrac{-9}{2014}\right);(0;0)\right\}$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Bình Định 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ (x+y)(4+3xy)=-2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

$$\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ (x+y)(4+3xy)=-2 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=7 \\ (x+y)(4+3xy)=-2 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y,\ b=xy$, khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3-3ba=7 \\ a(4+3b)=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ba=7 \\ 4a+3ab=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+4a=5 \\ 4a+3ab=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a^2+a+5)=0 \\ 4a+3ab=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 4.1+3.1b=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$.

Do đó x,y (nếu có) là hai nghiệm của phương trình $X^2-X-2=0$

$$\Leftrightarrow (X+1)(X-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-1 \\ X=2 \end{array}\right.$$

Suy ra $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình $S=\{(-1;2);\ (2;-1)\}$.

Câu 9 (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+7x-5y+6=0 \\ 4x^2-y^2+9x+9=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1} \end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+7x-5y+6=0 & (1) \\ 4x^2-y^2+9x+9=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1} & (2) \end{cases}$.

+) Điều kiện: $\begin{cases} 2x+y+2\ge 0 \\ x+4y+1\ge 0 \end{cases}$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow (2x^2-xy+3x)+(-2xy+y^2-3y)+(4x-2y+6)=0$

$\Leftrightarrow x(2x-y+3)-y(2x-y+3)+2(2x-y+3)=0$

$\Leftrightarrow (x-y+2)(2x-y+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y+2=0 \\ 2x-y+3=0 \end{array}\right.$

+) Trường hợp 1: $x-y+2=0\Leftrightarrow y=x+2$, thế vào phương trình (2) ta có:

$4x^2-(x+2)^2+9x+9=\sqrt{2x+x+2+2}+\sqrt{x+4(x+2)+1}$

$\Leftrightarrow 3x^2+5x+5=\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x+9}$

$\Leftrightarrow 3x^2+3x=\left[\sqrt{3x+4}-(x+2)\right]+\left[\sqrt{5x+9}-(x+3)\right]$

$\Leftrightarrow 3(x^2+x)=\dfrac{3x+4-(x+2)^2}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{5x+9-(x+3)^2}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}$

$\Leftrightarrow 3(x^2+x)=\dfrac{-x^2-x}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{-x^2-x}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}$

$\Leftrightarrow (x^2+x)\left[3+\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=0 \\ 3+\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ 3+\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Từ điều kiện ta có $x\ge -\dfrac{4}{3}$ $\Rightarrow x+2\ge \dfrac{2}{3}$ và $x+3\ge \dfrac{5}{3}$ nên phương trình (*) có vế trái luôn dương nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Với $x=0$ ta có $y=0+2=2$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $x=-1$ ta có $y=-1+2=1$ (thỏa mãn điều kiện)

+) Trường hợp 2: $2x-y+3=0 \Leftrightarrow y=2x+3$, thế vào phương trình (2) ta có:

$$4x^2-(2x+3)^2+9x+9=\sqrt{2x+2x+3+2}+\sqrt{x+4(2x+3)+1}$$

$$\Leftrightarrow -3x=\sqrt{4x+5}+\sqrt{9x+13}$$

$$\Leftrightarrow -3x-3=\left(\sqrt{4x+5}-1\right)+\left(\sqrt{9x+13}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9x+9}{\sqrt{9x+13}+2}+3x+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+13}+2}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\dfrac{9}{\sqrt{9x+13}+2}+3=0\ (**) \end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình (**) có vế trái luôn dương nên phương trình (**) vô nghiệm.

Với $x=-1$ ta có $y=2.(-1)+3=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(0;2);(-1;1)\}$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x|+y^2=10 \\ 2|x|-3y^2=-25 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau: $\begin{cases} 2|x|+2y^2=20 & (1) \\ 2|x|-3y^2=-25 & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế phương trình (2) và (1), ta được: $5y^2=45 \Leftrightarrow y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$

Với $y=\pm 3$, thay vào phương trình (1), ta được $|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S=\{(-1;3),(1;3),(-1;-3),(1;-3)\}$

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Đăk Lăk 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-6x^2+13x-10-(x-y+2)\sqrt{x-y+1}=0 \\ \left(3x^2+18x-2xy+6y-y^2\right)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0 \end{cases}$.

Lời giải

$\begin{cases} x^3-6x^2+13x-10-(x-y+2)\sqrt{x-y+1}=0 & (1) \\ \left(3x^2+18x-2xy+6y-y^2\right)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0 & (2) \end{cases}$. ĐK: $\begin{cases} x-y+1\ge 0 \\ x-y+6\ge 0 \end{cases}$.

Từ $(1) \Rightarrow (x-2)^3+x-2=\left(\sqrt{x-y+1}\right)^3+\sqrt{x-y+1}$

Đặt $\begin{cases} a=x-2 \\ b=\sqrt{x-y+1} \end{cases}$ ta được: $(a-b)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow x-2=\sqrt{x-y+1}$.

Từ $(2) \Rightarrow \left[(3x+y)(x-y)+6(3x+y)\right]\sqrt{x-y+6}-8(3x+y)=0$

$\Leftrightarrow (3x+y)\left[(x-y+6)\sqrt{x-y+6}-8\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3x \\ \sqrt{x-y+6}=2 \end{array}\right.$.

TH1: $\begin{cases} y=-3x \\ x-2=\sqrt{x-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x \\ x-2=\sqrt{4x+1}\ (*) \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-8x+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=4+\sqrt{13} \Rightarrow y=-12-3\sqrt{13}$.

TH2: $\begin{cases} \sqrt{x-y+6}=2 \\ x-2=\sqrt{x-y+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+1=-3 \\ x-2=\sqrt{x-y+1} \end{cases}$ (không thỏa mãn ĐK).

So với điều kiện, suy ra hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(4+\sqrt{13};-12-3\sqrt{13}\right)$.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Đăk Nông 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(y-x)=2x^2+3x+1 \quad (1) \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y+7}=7y-3x^2+1 \quad (2) \end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} x+y\geq 0 \\ x-y+7\geq 0 \end{cases}$

PT (1) $\Leftrightarrow 2x^2+xy-y^2+3x+1=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(2x-y)+(x+y)+(2x-y)+1=0$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+1)=0$

$\Leftrightarrow y=2x+1$ (vì $x+y\geq 0$ nên $x+y+1>0$).

Thay vào phương trình (2), ta được:

$\sqrt{x+2x+1}-\sqrt{x-2x-1+7}=14x+7-3x^2+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ (ĐKXĐ: $-\frac{1}{3}\leq x\leq 5$)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-4\right)-\left(\sqrt{6-x}-1\right)+3x^2-14x-5=0$

$\Leftrightarrow \frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4}-\frac{6-x-1}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0$

Vì $x\geq -\frac{1}{3}$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1>0$

Do đó $x=5 \Rightarrow y=11$ (thỏa mãn).

Vậy $(x,y)=(5;11)$.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Đồng Nai 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ (x+1)(y+1)=6 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ S + P = 5 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(5 - S) = 5 \\ P = 5 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 15 = 0 \quad (*) \\ P = 5 - S \end{cases}$.

Phương trình (*) có $\Delta' = 1^2 + 1.15 = 16$ nên $\left[\begin{array}{l} S = -5,\ P = 10 \\ S = 3,\ P = 2 \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases}$ thì $x,\ y$ là hai nghiệm của phương trình

$X^2 + 5X + 10 = 0$ (phương trình vô nghiệm).

Với $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$ thì $x,\ y$ là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$ (vì $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;\ 2)$ và $(2;\ 1)$.

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Đồng Tháp 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(3y + 1) - y = 3 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases} x(3y + 1) - y = 3 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3xy = 3 \\ (x - y)^2 + 3xy = 3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x - y \\ v = xy \end{cases}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + 3v = 3 \\ u^2 + 3v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + 3v = 3 \\ u^2 - u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3 - u}{3} \\ \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = \dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Với $\begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$ hệ có nghiệm là $\begin{cases} x = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{6} \\ y = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{6} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6} \\ y = \dfrac{-3 - \sqrt{33}}{6} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1;1)$, $(-1;-1)$, $\left(\frac{3+\sqrt{33}}{6};\frac{-3+\sqrt{33}}{6}\right),\left(\frac{3-\sqrt{33}}{6};\frac{-3-\sqrt{33}}{6}\right)$.

Câu 14. (TS vào 10-Chuyên Gia Lai 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y+2)+2=5y \\ (xy-1)^2+3(1-y^2)=0 \end{cases}$

Lời giải

+) Xét $x=-1; x=-2$ nhận thấy không phải là nghiệm của hệ phương trình.

+) Nhân hai vế của phương trình (1) với $(x+1)(x+2)$ rồi trừ đi phương trình (2) ta được phương trình: $(x-y)(x^2y+2x^2+8x-3y+10)=0$

+) TH1: $x=y \Rightarrow \begin{cases} x(y+2)+2=5y \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-3y+2=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=2 \end{array}\right.$

+) TH2: $x^2y+2x^2+8y-3y+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=5y-2x-2 \\ 5xy+6x-3y+10=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=5y-2x-2 \\ (5y-2x-2).x+2x^2+8x-3y+10=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=5y-2x-2 \\ 5xy+6x-3y+10=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=5y-2x-2 \\ 2x=11y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y^2+12y+4=0 \\ 2x=11y \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

$(x,y)\in\{(1;1);(2;2)\}$

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2)(2-y)=8 \\ \sqrt{11-4(x-y)}+x^2y^2+1=3xy. \end{cases}$

Lời giải

ĐK: $11-4(x-y)\ge 0$

$(x+2)(2-y)=8 \Leftrightarrow 2(x-y)-xy=4 \Rightarrow 2(x-y)=4+xy$

Thế vào phương trình (2) ta có:

$\sqrt{11-2(4+xy)}+x^2y^2-3xy+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{3-2xy}+x^2y^2-3xy+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3-2xy}-1\right)+x^2y^2-3xy+2=0$

$\Leftrightarrow \frac{2(1-xy)}{\sqrt{3-2xy}+1}+(1-xy)(2-xy)=0 \Leftrightarrow (1-xy)\left(\frac{2}{\sqrt{3-2xy}+1}+2-xy\right)=0$

$\Leftrightarrow xy=1$ (Do $\dfrac{2}{\sqrt{3-2xy}+1}+2-xy>0,\ \forall xy\le\dfrac{3}{2}$)

Ta có: $\begin{cases} xy=1 \\ 2(x-y)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ 2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ 2x^2-5x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{4} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

$(x;\ y)=\left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{4};\dfrac{-5+\sqrt{41}}{4}\right)$ và $\left(\dfrac{5-\sqrt{41}}{4};\dfrac{-5-\sqrt{41}}{4}\right)$

Câu 16. (TS vào 10-Chuyên Hà Nam 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y \\ \sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2 \end{cases}$.

Lời giải

2. Điều kiện: $\begin{cases} 3(x^2+y)+7\ge 0 \\ 5x^2+5y+14\ge 0 \end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với

$$2x^3+2xy^2-x^2y+2x^2+6x=xy+y^3+3y$$
$$\Leftrightarrow (2x^3-x^2y)+(2xy^2-y^3)+(2x^2-xy)+(6x-3y)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2(2x-y)+y^2(2x-y)+x(2x-y)+3(2x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-y)(x^2+y^2+x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-y)[(x+\frac{1}{2})^2+y^2+\frac{11}{4}]=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$$

Thay $y=2x$ vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2+6x+7}-2)+(\sqrt{5x^2+10x+14}-3)+(x^2+2x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1)^2}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5(x+1)^2}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+(x+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2(\frac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1)=0$$

Vì $\dfrac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\dfrac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1>0$ nên phương trình tương đương với

$(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=-2\ (tm)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;-2)$

Câu 17. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+2x+y=2 \\ x^2+y^2+2x+4y=3 \end{cases}$

Lời giải

2. Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} (x+1)(y+2)=4 \\ (x+1)^2+(y+2)^2=8 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=y+2 \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} a.b=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} ab=4 \\ a+b=-4 \end{cases} (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là S = $\{(1;0);(-3;-4)\}$

Câu 18. (TS vào 10-Chuyên Hậu Giang 23-24)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=3m-1 \\ 3x-y=m+3 \end{cases}$ (I) (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình (I) với $m=0$.

b) Tìm m để hệ phương trình (I) có nghiệm (x; y) sao cho x, y là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng 10.

Lời giải

a) Với $m=0$, hệ phương trình (I) trở thành $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên, ta được $\begin{cases} x=\dfrac{2}{5} \\ y=-\dfrac{9}{5} \end{cases}$.

b) Ta có $\begin{cases} 2x+y=3m-1 \\ 3x-y=m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3m-1 & (1) \\ 9x-3y=3m+9 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) trừ (1), ta có $7x-4y=10$.

Kết hợp với giả thiết, ta có hệ phương trình $\begin{cases}7x-4y=10\\x^2+y^2=100\end{cases}$ (với $0 < x, y < 10$).

Giải hệ trên với điều kiện $0 < x, y < 10$, ta được $\begin{cases}x=6\\y=8\end{cases}$.

Thay $\begin{cases}x=6\\y=8\end{cases}$ vào hệ phương trình (I), ta tìm được $m=7$.

Câu 19. (TS vào 10-Chuyên Hậu Giang 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3-3(2x^2-y^2)-5y+14x-9=0\\\sqrt{2-y}+\sqrt{3-x}=2x-2\end{cases}$.

Lời giải

. Điều kiện: $\begin{cases}3-x\ge 0\\2-y\ge 0\\2x-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 3\\y\le 2\end{cases}$.

Khi đó, ta có $(1)\Leftrightarrow (x-2)^3+2(x-2)=(y-1)^3+2(y-1)$ (3)

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\v=y-1\end{cases}$. Khi đó

$(3)\Leftrightarrow u^3+2u=v^3+2v$

$\Leftrightarrow u^3-v^3+2(u-v)=0 \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0$

$\Leftrightarrow (u-v)\left[\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3v^2}{4}+2\right]=0$ (Vì $\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3v^2}{4}+2>0$)

$\Leftrightarrow u-v=0 \Leftrightarrow u=v \Rightarrow x-2=y-1 \Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào (2), ta có

$\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}=2x-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3-x}=2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=x-1$

$\Leftrightarrow 3-x=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow x=2$ (thỏa điều kiện) hoặc $x=-1$ (thỏa điều kiện)

$\Rightarrow y=2-1=1$ (thỏa điều kiện).

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là: $(x;\ y)=(2;\ 1)$

Câu 20. (TS vào 10-Chuyên Chung Kum Tum 23-24)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=3m-3\\mx+y=2m-2\end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$, trong đó $x;y$ là các số nguyên.

Lời giải

$\begin{cases} x+my=3m-3 \\ mx+y=2m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+my=3m-3 \\ (m^2-1)x=2m^2-5m+3 \end{cases}.$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x=\dfrac{2m-3}{m+1}=2-\dfrac{5}{m+1} \\ y=3-\dfrac{5}{m+1} \end{cases}.$

Vì m nguyên để hệ phương trình có nghiệm duy nhất là các số nguyên thì $m+1$ phải là ước của 5 $\Rightarrow m+1\in\{1;-1;5;-5\} \Rightarrow m\in\{0;-2;4;-6\}$ (thỏa mãn).

Vậy $m\in\{0;-2;4;-6\}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$, trong đó $x;y$ là các số nguyên.

Câu 21. (TS vào 10-Chuyên Chung Kon Tum 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2-x)\sqrt{1-x}-y\sqrt{y-1}=0 & (1) \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=3 & (2) \end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\le 1$; $y\ge 1$.

$(1) \Leftrightarrow (1-x)\sqrt{1-x}-(y-1)\sqrt{y-1}+\sqrt{1-x}-\sqrt{y-1}=0$

Đặt $\sqrt{1-x}=u$ $(u\ge 0)$; $\sqrt{y-1}=t$ $(t\ge 0)$ ta được phương trình:

$u^3-t^3+u-t=0 \Leftrightarrow (u-t)(u^2+ut+t^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-t=0 \\ u^2+ut+t^2+1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow u-t=0 \Rightarrow 1-x=y-1 \Leftrightarrow x=2-y$

Từ (2) suy ra $\sqrt{4-y}+\sqrt{y+1}=3$ (ĐKXĐ: $1\le y\le 4$)

$\Rightarrow 5+2\sqrt{(4-y)(y+1)}=9 \Leftrightarrow \sqrt{4+3y-y^2}=2 \Rightarrow 3y-y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\ \ (KTM) \\ y=3\ \ (TM) \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;3)$.

Câu 22. (TS vào 10-Chuyên Hưng yên 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 \end{cases}.$

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 & (1) \\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (2) \end{cases}.$

$(2) \Leftrightarrow 2x^2-3x(y+1)+(y-1)^2=0$

$\Leftrightarrow (x-y+1)(2x-y+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-1 \\ x=\dfrac{y-1}{2} \end{array}\right.$

+) TH 1: $x=y-1$, thay vào (1) ta được:

$$(y-1)^2+y^2+(y-1)+y=8 \Leftrightarrow 2y^2+4y+2=8 \Leftrightarrow y^2+2y-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-3 \end{array}\right.$$

- Nếu $y=1$ thì $x=2$
- Nếu $y=-3$ thì $x=-4$

+) TH 2: $x=\frac{y-1}{2}$, thay vào (1) ta được: $\left(\frac{y-1}{2}\right)^2+y^2+\frac{y-1}{2}+y=8 \Leftrightarrow 5y^2+4y-33=0$

Ta có $\Delta'=2^2+5.33=169$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $y_1=\frac{-2-13}{5}=-3;\ y_2=\frac{-2+13}{5}=\frac{11}{5}$

- Nếu $y=-3$ thì $x=-2$
- Nếu $y=\frac{11}{5}$ thì $x=\frac{3}{5}$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;1);(-4;-3);(-2;-3);\left(\frac{3}{5};\frac{11}{5}\right)\right\}$.

Câu 23. (TS vào 10-Chuyên Lai Châu 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 & (1) \\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 & (1) \\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ (x-y+1)(2x-y+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ \left[\begin{array}{l} x=y-1 \\ y=2x+1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x=y-1 \end{cases} (*) \\ \begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ y=2x+1 \end{cases} (**) \end{array}\right.$$

Giải $(*)$ $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x=y-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ (y-1)^2 + y^2 + (y-1) + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải $(**)$ $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ y = 2x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + (2x+1)^2 + x + (2x+1) = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ 5x^2 + 7x + 2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ 5x^2 + 7x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{5} \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{11}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(1;2);(-3;2);(-2;-3);\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{11}{5}\right)$

Câu 24. (TS vào 10-Chuyên Lạng Sơn 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy - 3x + 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy - 3x + 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$.

Từ (1), ta có: $x^2 - 2y^2 + xy - 3x + 3y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy - xy - 2y^2 - 3x + 3y = 0$

$\Leftrightarrow x(x+2y) - y(x+2y) - 3(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y-3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y + 3 \end{array}\right.$$

Với $x = y$ thay vào (2), ta có:

$(2) \Leftrightarrow x^2 + x^2 + x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

Vì $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1;$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -2$.

Với $x = -2y + 3$ thay vào (2), ta có:

$(2) \Leftrightarrow (-2y+3)^2 + y^2 + (-2y+3) + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 + y^2 - 2y + 3 + y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 13y + 8 = 0$

Vì $a + b + c = 5 + (-13) + 8 = 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$y_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1;$

$y_4 = \frac{8}{5} \Rightarrow x_4 = -2.\frac{8}{5} + 3 = \frac{-1}{5}$.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{(1;1);(-2;-2);\left(\frac{-1}{5};\frac{8}{5}\right)\right\}$.

Câu 25. (TS vào 10-Chuyên Nam Định 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x - y + 2 \\ x^3 + y^3 = y(x+y+4) + x \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x - y + 2 \\ x^3 + y^3 = y(x+y+4) + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = x - y + 2 & (5) \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = xy + y^2 + 4y + x & (6) \end{cases}$$

Thay (5) vào (6) ta được $(x+y)(x-y+2) = xy + y^2 + 4y + x$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 + x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -y-1. \end{array}\right.$$

Với $x = 2y$, thay vào (5) được

$$4y^2 - 2y^2 + y^2 = y + 2 \Leftrightarrow 3y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Tìm được $(x;y) = (2;1)$ và $(x;y) = \left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Với $x = -y - 1$, thay vào (5) được

$$(y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = -y - 1 - y + 2 \Leftrightarrow 3y^2 + 5y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Tìm được $(x;y)=(-1;0)$ và $(x;y)=\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Vậy hệ có đúng bốn bộ nghiệm $(x;y)$ là $(2;1)$, $\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$, $(-1;0)$, $\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Câu 26. (TS vào 10-Chuyên Nghệ An 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y-x^2+2x}\\ \left(2-\sqrt{x+y}\right)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3}x\end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y-x^2+2x}\ (1)\\ \left(2-\sqrt{x+y}\right)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3}x\ (2)\end{cases}$.

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x+y\ge 0; 2y-x^2+2x\ge 0$.

Do $\sqrt{x+y}\ge 0;\sqrt{2y-x^2+2x}\ge 0$ nên từ hệ phương trình đã cho ta có

$$\Rightarrow\begin{cases}2x\ge\sqrt{x+y}\\ \left(2-\sqrt{x+y}\right)^2=2(x+y)-x^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x\ge\sqrt{x+y}\\ \left(x-\sqrt{x+y}\right)\left(5x+\sqrt{x+y}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{x+y}\ (2)$$

$$\Rightarrow (2-x)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3}x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ (2-x)^2\left(x^2+4\right)=12x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ \left(x^2+4\right)^2-4x\left(x^2+4\right)-12x^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ \left(x^2+4-6x\right)\left(x^2+4+2x\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x^2-6x+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=3-\sqrt{5}, y=11-5\sqrt{5}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(3-\sqrt{5};11-5\sqrt{5}\right)$.

Câu 27. (TS vào 10-Chuyên Ninh Bình 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$.

Lời giải

ĐK: $x \neq 0;\ y \neq 0$

Đặt $a = x+\dfrac{1}{y};\quad b = y+\dfrac{1}{x}$

HPT đã cho trở thành $\begin{cases} a+b=\dfrac{9}{2} & (1) \\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}a=ab & (2) \end{cases}$

Từ (1): $b=\dfrac{9}{2}-a$. Thay vào (2):

$\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}a=a\left(\dfrac{9}{2}-a\right) \Leftrightarrow 9+6a=2a(9-2a)$

$\Leftrightarrow 4a^2-12a+9=0 \Leftrightarrow (2a-3)^2=0$

$\Leftrightarrow 2a-3=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2} \Rightarrow b=3$.

Vậy:

$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy+2=3y & (3) \\ xy+1=3x & (4) \end{cases}$

$\Rightarrow y=2x$

Thay vào (4):

$2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$x=1 \Rightarrow y=2\quad (tm)$

$x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=1\ (tm)$

Vậy $(x;y) \in \left\{(1;2);\left(\dfrac{1}{2};1\right)\right\}$.

Câu 28. (TS vào 10-Chuyên Phú Thọ 23-24)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=1-y+\sqrt{y^2+3} \\ y^2-2(x-2)=3\sqrt{(y+1)\left(y^2+2x\right)} \end{cases}$ $\quad (x,\ y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

$$\begin{cases} 2\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=1-y+\sqrt{y^2+3} \quad (1) \\ y^2-2(x-2)=3\sqrt{(y+1)\left(y^2+2x\right)} \quad (2) \end{cases}$$

ĐK: $(y+1)\left(y^2+2x\right)\geq 0$

Từ phương trình (1)

$\Rightarrow(2x+y-1)=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow(2x+y-1)=\left[y^2+3-4\left(x^2-x+1\right)\right].\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow(2x+y-1)=\left[y^2-(2x-1)^2\right].\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow(2x+y-1)=(y-2x+1)(y+2x-1).\dfrac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow(2x+y-1)\left[\dfrac{y-2x+1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x+y-1=0 \\ y-2x+1=\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1} \end{array}\right.$

+) Trường hợp 1: $2x+y-1=0\Rightarrow 2x=-y+1$ thay vào phương trình (2) ta được

$(2)\Leftrightarrow y^2-1+y+4=3\sqrt{(y+1)\left(y^2-y+1\right)}\Leftrightarrow y^2-y+1+2y+2=3\sqrt{(y+1)\left(y^2-y+1\right)}$

Đặt $a=\sqrt{y+1}, b=\sqrt{y^2-y+1}$ (ĐK: $y\geq -1$)

$\Rightarrow 2a^2-3ab+b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(2a-b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=b \\ 2a=b \end{array}\right.$

- Với $a=b\Rightarrow y+1=y^2-y+1\Leftrightarrow y^2-2y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ y=2\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

- Với $2a=b\Rightarrow 4y+4=y^2-y+1\Leftrightarrow y^2-5y-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{37}+5}{2}\Rightarrow x=\dfrac{-\sqrt{37}-3}{4} \\ y=\dfrac{-\sqrt{37}+5}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{37}-3}{4} \end{array}\right.$

+) Trường hợp 2: $y-2x+1=\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}$ (ĐK: $y-2x+1\geq 0$)

Bình phương hai vế ta được

$$(y-2x+1)^2=y^2+3+4(x^2-x+1)+4\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow y^2+4x^2+1-4xy-4x+2y=y^2+4x^2-4x+7+4\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)}$$

$$\Leftrightarrow -4x+2y-6=4\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)} \;\Leftrightarrow -2x+y-3=2\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)} \quad (3)$$

ĐK: $y\geq 2x+3$

Bình phương hai vế của (3) ta được

$$(-2x+y-3)^2=4(y^2+3)(x^2-x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y=4x^2y^2-4xy^2+4y^2+12x^2-12x+12$$

$$\Leftrightarrow 3(4x^2+y^2+1-4xy-4x+2y)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y-1)^2=0 \Leftrightarrow 2x-y-1=0 \Leftrightarrow 2x=y+1$$

Kết hợp với điều kện $y\geq 2x+3$ ta có $2x=y+1\geq 2x+4 \Leftrightarrow 0\geq 4$ (vô lí)

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};0\right);\left(\frac{-1}{2};2\right);\left(\frac{-\sqrt{37}-3}{4};\frac{\sqrt{37}+5}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{37}-3}{4};\frac{-\sqrt{37}+5}{2}\right)\right\}$$

Phần I: Đề thi và đáp án.

Câu 29. (TS vào 10-Chuyên Quảng Trị 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} xy\geq 0 \\ x,y\geq -1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$ $(S^2\geq 4P)$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2+2\sqrt{S+P+1}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S\geq 3; \\ P=(S-3)^2 \\ 2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=7-S \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=7-S \Rightarrow 4(S^2-5S+10)=49-14S+S^2$$

$$\Leftrightarrow 3S^2-6S-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-1 \\ S=3 \end{array}\right.$$

Thử lại thấy $S=3$ thỏa mãn. Khi đó ta được $\begin{cases} S=3 \\ P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=0 \end{cases}$.

Giải ra ta được tập nghiệm của hệ $S = \quad 0;3 \ ; \ 3;0 \quad$.

Câu 30. (TS vào 10-Chuyên Quảng Ninh 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0 \\ x^2 + 3x - \sqrt{y^2 + 5x - 1} - 2 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

$x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1-y) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $y = x - 1$

Với $x = 1$ ta có phương trình $\sqrt{y^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow y = 0$

Với $y = x - 1$ ta có phương trình $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, $t \geq 0$, pt trở thành $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1$ (loại), $t = 2$ (thỏa mãn)

Với $t = 2$ ta được $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -4$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;0);(-4;-5)$.

Câu 31. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + x + y = 1 \\ (x^2+1)(x+y-1) = -2 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{cases} x^2 + x + y = 1 \\ (x^2+1)(x+y-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1) + (x+y-1) = 1 \\ (x^2+1)(x+y-1) = -2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + 1, \ (u \geq 1) \\ v = x + y - 1 \end{cases}$ (*) ta được hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 1 \\ u.v = -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -1 \\ v = 2 \end{cases} \text{(L)} \end{array} \right.$$

thay $u = 2, v = -1$ vào (*) ta có

$$\begin{cases} x^2+1=2 \\ x+y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(-1;1)$; $(1;-1)$

Câu 32. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (xy)^3+3xy^3+2=6y^2 \\ 3xy^3=y^2+2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} (xy)^3+3xy^3+2=6y^2\,(1) \\ 3xy^3=y^2+2\,(2) \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=xy \\ v=y^2 \end{cases}$. Dễ thấy $y\neq 0$. Từ (2) suy ra $3xy=\dfrac{y^2+2}{y^2}>0$, do đó ta luôn có $u>0, v>0\ (3)$.

Ta có hệ phương trình mới: $\begin{cases} u^3+3uv+2=6v\ \ (4) \\ 3uv=v+2\ \ (5) \end{cases}$

Thế (5) vào (4) ta được: $v=\dfrac{u^3+4}{5}\ \ (6)$

Thế (6) vào (5) ta được:

$3u^4-u^3+12u-14=0 \Leftrightarrow (u-1)(3u^3+2u^2+2u+14)=0\ \ (7)$

Đối chiếu với điều kiện (3) thì $3u^3+2u^2+2u+14>0$ nên (7) có nghiệm $u=1$.

Với $u=1$, từ (6) suy ra $v=1$ hay $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 1$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(-1;-1)$.

Câu 33. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2y-3}+2y^2+4y=0 \\ x^2+1=xy \end{cases}$.

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2y-3}+2y^2+4y=0\ \ (1) \\ x^2+1=xy\ \ (2) \end{cases}$.

Dễ thấy $x=0$ không thỏa (2) nên $(2)\Leftrightarrow y=x+\dfrac{1}{x}$. Thay vào (1), ta được

$$\sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2\left(x^2+2x+1\right)+2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2\left(x+1\right)^2+2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow -x-\frac{2}{x}-3=x+1=\frac{1}{x}+1=0$$

$\Leftrightarrow x=-1.$

Với $x=-1$, ta suy ra $y=-2$.

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;-2)$.

Câu 34. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}8\sqrt{xy-2y}-8y+4=(x-y)^2\\ 2\sqrt{2y-y^2}\left(\sqrt{8-2x}-2\sqrt{2y}+1\right)=4y+5\sqrt{2-y}-10\sqrt{x-2}\end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases}8\sqrt{xy-2y}-8y+4=(x-y)^2 & (1)\\ 2\sqrt{2y-y^2}\left(\sqrt{8-2x}-2\sqrt{2y}+1\right)=4y+5\sqrt{2-y}-10\sqrt{x-2} & (2)\end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases}0\le y\le 2\\ 2\le x\le 4\end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4(xy-2y)+8\sqrt{xy-2y}+4=(x+y)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy-2y}+2=x+y$

$\Leftrightarrow 4(xy-2)=x^2+y^2+2xy-4x-4y+4 \Leftrightarrow (x-y)^2-4(x-y)+4=0$

$\Leftrightarrow x=y+2$

Thế vào (2) ta được:

$2\sqrt{2y-y^2}(\sqrt{4-2y}-2\sqrt{2y}+1)=4y+5\sqrt{2-y}-10\sqrt{y}$ (3)

Đặt $a=\sqrt{2-y}\ge 0,\ b=\sqrt{y}\ge 0$, phương trình (3) trở thành:

$2ab(\sqrt{2}a-2\sqrt{2}b+1)=4b^2+5b-10b$

$\Leftrightarrow (a-2b)(2\sqrt{2}ab+2b-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}a=2b & (4)\\ 2\sqrt{2}ab+2b=5 & (5)\end{array}\right.$

+ Giải (4): $\sqrt{2-y}=2\sqrt{y}\Leftrightarrow 2-y=4y\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{5}\Rightarrow x=\dfrac{12}{5}$

+Giải (5): $2\sqrt{2}ab+2b\le(2a^2+b^2)+(b^2+1)=2(a^2+b^2)+1=5$

Dấu $"="$ xảy ra $"\Leftrightarrow" \begin{cases} b=1 \\ b=a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ \sqrt{y}=\sqrt{2(2-y)} \end{cases}$ (vô lý)

Suy ra phương trình (5) vô nghiệm.

Vậy $(x;y)=(\frac{12}{5};\frac{2}{5})$

Câu 35. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-xy^2-6y=0 \\ (x+y)(x+2y)=3(xy+2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3-xy^2-6y=0 & (1) \\ (x+y)(x+2y)=3(xy+2) & (2) \end{cases}$

Ta có $(2)\Leftrightarrow x^2+2y^2=6(3)$.

Lại có $(1)\Leftrightarrow x^3-xy^2-y(x^2+2y^2)=0 \Leftrightarrow x^3-xy^2-yx^2-2y^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+xy+y^2)=0$

Dễ thấy $(x;y)=(0;0)$ không là nghiệm của hệ nên $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0$

$\Rightarrow x=2y$ thay vào (3) ta được $6y^2=6 \Leftrightarrow y=\pm 1$

+ Nếu $y=1 \Rightarrow x=2$ (thử lại thoả mãn).

+ Nếu $y=-1 \Rightarrow x=-2$ (thử lại thoả mãn).

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$.

Câu 36. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=x+2y \\ x^3+2x^2y=x^2+y^2-1 \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2+2xy-xy-2y^2=x+2y$

$\Leftrightarrow x(x+2y)-y(x+2y)=x+2y$

$\Leftrightarrow (x+2y)(x-y-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2y \\ x=y+1 \end{array}\right.$$

+) Với $x=-2y$ thế vào (2) ta có:

$$-8y^3+8y^3=4y^2+y^2-1 \Leftrightarrow 5y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$+)\, y=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$+)\, y=-\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

+) Với $x=y+1$ thế vào (2) ta có: $(y+1)^3+2(y+1)^2.y=(y+1)^2+y^2-1$

$$\Leftrightarrow (y+1)(3y^2+2y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ 3y^2+2y+1=0 \ \ (VN) \end{array}\right.$$

Với $y=-1 \Rightarrow x=0$

KL: Hệ có ba nghiệm $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right);(0;-1)$.

Câu 37. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3=2x+4y \\ 2x^3+y^3=3x+3y \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} 3x^3=2x+4y & (1) \\ 2x^3+y^3=3x+3y & (2) \end{cases}$$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) vế theo vế ta được:

$$x^3-y^3=-x+y \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)+x-y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+1)=0 \Leftrightarrow x=y \text{ do } x^2+xy+y^2+1=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1>0, \forall x,y$$

Thay $y=x$ vào phương trình (1), ta được $3x^3=6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S=\left\{(0;0);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$.

Câu 38. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy-3x-9=0 \\ \sqrt{x^2-y+3}=2x+y \end{cases}$.

Lời giải

Hai hướng biến đổi phương trình (1)

Cách 1: phương pháp tách.

$2x^2+y^2+3xy-3x-9=0$

$\Leftrightarrow \left(2x^2+xy+3x\right)+\left(y^2+2xy+3y\right)-3y-6x-9=0$

$\Leftrightarrow x\left(2x+y+3\right)+y\left(2x+y+3\right)-3\left(2x+y+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2x+y+3\right)\left(x+y-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x+3 \\ y=-2x-3 \end{array}\right.$

Cách 2. Coi (1) là phương trình bậc hai một ẩn y, ta có:

$\Delta = 9x^2-4(2x^2-3x-9)=\left(x+6\right)^2$ khi đó tìm được $y=-x+3$ và $y=-2x-3$

* TH1: Với $y=-x+3$ thay vào phương trình (2) ta được.

$\sqrt{x^2+x-3+3}=2x-x+3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x^2+x=x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{9}{5}$

Với $x=-\dfrac{9}{5} \Rightarrow y=\dfrac{9}{5}+3=\dfrac{24}{5}$

*TH2: Với $y=-2x-3$ thay vào (1) được.

$\sqrt{x^2+2x+3+3}=2x-2x-3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+6}=-3$ PT vô nghiệm=> hệ vô nghiệm

*Kết luận: hệ có nghiệm duy nhất $\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{24}{5}\right)$.

Câu 39. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Long 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$.

Lời giải

ĐK: $x\ne 0; y\ne 0$

$\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=6 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} xy=6 \\ x^2-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6}{x} \\ x^2-\dfrac{36}{x^2}=5 \end{cases}$

$x^2-\dfrac{36}{x^2}=5 \Leftrightarrow x^4-5x^2-36=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$

$x=3 \Rightarrow y=2$

$x=-3 \Rightarrow y=-2$

Vậy nghiệm của phương trình $S=\left\{(3;2),(-3;-2)\right\}$.

Câu 40. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=3\\ \dfrac{3}{x}-y=1\end{cases}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\neq 0$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+y=3\\ \dfrac{3}{x}-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{x}=4\\ \dfrac{3}{x}-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}(n)$$

Câu 41. (TS vào 10-Chuyên Tin Hoà Bình 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x(y-1)+y(x+1)=6\\ (x-1)(y+1)=2\end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases}x(y-1)+y(x+1)=6\\ (x-1)(y+1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy-(x-y)=5\\ xy+(x-y)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=3\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+y-3=0\\ x=y+1\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm: $\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

Câu 42. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y+\dfrac{x+2y}{xy}=6\\ x^2+y^2+\dfrac{x^2+4y^2}{(xy)^2}=14\end{cases}$$

Lời giải

ĐKXĐ : $x,y\neq 0$

$$\begin{cases}x+y+\dfrac{x+2y}{xy}=6\\ x^2+y^2+\dfrac{x^2+4y^2}{(xy)^2}=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=6\\ x^2+y^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{x^2}=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{2}{x}+y+\dfrac{1}{y}=6\\ \left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=20\end{cases}$$

Đặt $x+\dfrac{2}{x}=a$; $y+\dfrac{1}{y}=b$ thì hệ trở thành

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\ a^2+b^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=6\\ a^2+b^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=6-a\\ a^2+(6-a)^2=20\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 - a \\ a^2 - 6a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 - a \\ (a-2)(a-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 - a \\ a = 2; a = 4 \end{cases}$

+) TH1. Với $a = 2$ thì $b = 4$ ta có: $\begin{cases} x + \dfrac{2}{x} = 2 \\ y + \dfrac{1}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 0 \\ y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 1 = 0 \quad (1) \\ y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$

Ta thấy pt (1) vô nghiệm nên hệ phương trình vô nghiệm.

+) TH2. Với $a = 4$ thì $b = 2$ ta có:

$\begin{cases} x + \dfrac{2}{x} = 4 \\ y + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 2 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm (x, y) của hệ phương trình là $\left(2 - \sqrt{2}; 1\right); \left(2 + \sqrt{2}; 1\right)$.

Câu 43. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)(x+3y) = 20 \\ x^2 + 2x + 3y = 12 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ pt (I): $\begin{cases} x(x+1)(x+3y) = 20 \\ x^2 + 2x + 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3y) = 20 \\ x(x+1) + (x+3y) = 12 \end{cases}$

+ Đặt: $\begin{cases} m = x(x+1) \\ n = (x+3y) \end{cases}$

+ Khi đó hệ pt (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} m.n = 20 \\ m + n = 12 \end{cases}$, suy ra m, n là nghiệm của phương trình: $X^2 - 12X + 20 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m = 2 \\ n = 10 \end{cases}$

* Xét trường hợp $\begin{cases} m = 10 \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = x(x+1) \\ 2 = (x+3y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 10 = 0 \\ y = \dfrac{2-x}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2} \\ y = \dfrac{5-\sqrt{41}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2} \\ y = \dfrac{5+\sqrt{41}}{6} \end{cases} \end{array} \right.$$

* Xét trường hợp $\begin{cases} m=2 \\ n=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=x(x+1) \\ 10=(x+3y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=\dfrac{10-x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \end{array} \right.$

Vậy, tập ngiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$S=\left\{(1;3);(-2;4);\left(\frac{-1+\sqrt{41}}{2};\frac{5-\sqrt{41}}{6}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{41}}{2};\frac{5+\sqrt{41}}{6}\right)\right\}$$

Câu 44. (TS vào 10-Chuyên Năng Khiếu ĐH Quốc Gia TPHCM 23-24)

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x+y)\left(4+\dfrac{1}{xy}\right)=1 \\ \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=-20 \end{cases}.$$

Lời giải

ĐKXĐ: $x,y\neq 0$

$$\begin{cases} (x+y)\left(4+\dfrac{1}{xy}\right)=1 \\ \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=1 \\ \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=-20 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=4x+\dfrac{1}{x} \\ b=4y+\dfrac{1}{y} \end{cases}$, hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-20 \end{cases}$

Theo định lý Viete đảo, a và b là nghiệm của phương trình: $t^2-t-20=0 \Leftrightarrow (t-5)(t+4)=0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-4 \end{array} \right.$

* TH1: $a=5$ và $b=-4$. Ta có: $\begin{cases} 4x+\dfrac{1}{x}=5 \\ 4y+\dfrac{1}{y}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x+1=0 \\ 4y^2+4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x-1)(x-1)=0 \\ (2y+1)^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \; hay \; x=\dfrac{1}{4} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$: thỏa ĐK

* TH2: $a=-4$ và $b=5$.

Ta có: $\begin{cases} 4x+\dfrac{1}{x}=-4 \\ 4y+\dfrac{1}{y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4x+1=0 \\ 4y^2-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2=0 \\ (4y-1)(y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=1 \; hay \; y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$: thỏa ĐK

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là: $\left(1;-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{1}{2};1\right);\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

Câu 45. (TS vào 10-Chuyên Bến Tre 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{x} \\ x+y-\frac{4}{x}=\frac{4y}{x^2} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2+y^2\neq 0$

Ta có (2) $\Leftrightarrow x+y=\frac{4}{x^2}(x+y)\Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{4}{x^2}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ \frac{4}{x^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

+) Với $x=-y$, thay vào (1), ta được: $\frac{1}{y}=-\frac{9}{y}\Rightarrow \frac{10}{y}=0$ (vô lý).

+) Với $x=2$, thay vào (1), ta được: $y+\frac{1}{y}=\frac{9}{2}-2\Rightarrow 2y^2-5y+2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}(TM) \\ y=2(TM) \end{array}\right.$

+) Với $x=-2$, thay vào(1), ta được $y+\frac{1}{y}=-\frac{9}{2}+2\Rightarrow 2y^2+5y+2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2}(TM) \\ y=-2(TM) \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;2),(-2;-2),\left(2;\frac{1}{2}\right),\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\right\}$

Câu 46. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+2x+y=2 \\ x^2+y^2+2x+4y=3 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} (x+1)(y+2)=4 \\ (x+1)^2+(y+2)^2=8 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=y+2 \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} a.b=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} ab=4 \\ a+b=-4 \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

Câu 47. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Vinh 23-24)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x+y=x^2y^2-15 \\ 2x+3y=3x^2y^2-13xy-6 \end{cases}$

Lời giải

Ta đặt phương trình như sau $\begin{cases} 5x+y=x^2y^2-15 & (1) \\ 2x+3y=3x^2y^2-13xy-6 & (2) \end{cases}$

Trường hợp 1. Nếu $x=0$ thì $-15=y=-2$ vô lý nên trường hợp này vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $x \neq 0$, ta có biến đổi như sau

$(1).3-(2) \Leftrightarrow 13x=13xy-39 \Leftrightarrow xy=x+3 \Leftrightarrow y=1+\dfrac{3}{x}$

Thế $y=1+\dfrac{3}{x}$ vào phương trình (1), ta có: $5x+1+\dfrac{3}{x}=(x+3)^2-15$

$\Leftrightarrow 5x^2+x+3=x\left(x^2+6x+9\right)-15x \Leftrightarrow x^3+x^2-7x-3=0$

$\Leftrightarrow (x+3)\left(x^2-2x-1\right)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-3;1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}.$

Nếu $x=-3$ thì $y=1+\dfrac{3}{\mathrm{x}}=0$.

Nếu $x=1+\sqrt{2}$ thì $y=1+\dfrac{3}{x}=-2+3\sqrt{2}$.

Nếu $x=1-\sqrt{2}$ thì $y=1+\dfrac{3}{x}=-2-3\sqrt{2}$.

Vậy tất cả các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn là $(-3;0);\left(1+\sqrt{2},-2+3\sqrt{2}\right);\left(1-\sqrt{2},-2-3\sqrt{2}\right)$.

CHUYÊN ĐỀ 5. PHƯƠNG TRÌNH

PHẦN I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 23-24)

Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện $\dfrac{b-4c}{a}\ge\dfrac{1}{4}$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm âm.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a\ne 0$ và $\dfrac{a-4b+16c}{4}\le 0 \Rightarrow a(a-4b+16c)\le 0$

$\Rightarrow a^2-4ab+16ac\le 0\Rightarrow a^2-4ab+4b^2\le 4b^2-16ac\Rightarrow(a-2b)^2\le 4(b^2-4ac)$

$\Rightarrow \Delta\ge 0$

Do đó phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn: $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$; $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ (1)

Thay (1) vào $\dfrac{b-4c}{a}\ge\dfrac{1}{4}$ ta được: $-(x_1+x_2)-4x_1x_2\ge\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow(4x_1+1)(4x_2+1)\le 0$

Nếu $x_1;x_2$ đều không âm thì vô lý. Vậy phương trình phải có ít nhất một nghiệm âm.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Bắc Giang 23-24)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$.

Lời giải

Phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\Delta'>0$

$\Leftrightarrow(3m-1)^2-(m^2-m-4)>0$

$\Leftrightarrow 8m^2-5m+5>0$

$\Leftrightarrow 8\left(m-\dfrac{5}{16}\right)^2+\dfrac{135}{32}>0;\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Theo Vi ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(3m-1)\\x_1x_2=m^2-m-4\end{cases}$

Đặt $A=x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}$; $B=x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}$

Ta có $A.B=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}>0;\forall x_1,x_2$

Suy ra A và B luôn cùng dấu $\Rightarrow |A|+|B|=|A+B|$

Do đó $\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$

$\Leftrightarrow \left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}+x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$

$\Leftrightarrow |x_1+x_2|=1004$

$\Leftrightarrow 2|3m-1|=1004$

$\Leftrightarrow |3m-1|=502 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{503}{3} \\ m=-167 \end{array}\right.$.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Bình Dương 23-24)

a) Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$ (m là tham số)

Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) Cho phương trình $(ax^2+bx+c)(bx^2+cx+a)(cx^2+ax+b)=0$, x là ẩn số a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $ac+bc+3ab\le 0$. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Lời giải

a) Ta có: $\Delta'=m^2-(-1-2m)=m^2+2m+1=(m+1)^2\ge 0$ với mọi m

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

b) $(ax^2+bx+c)(bx^2+cx+a)(cx^2+ax+b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ bx^2+cx+a=0 \\ cx^2+ax+b=0 \end{array}\right.$

$\Delta_1=b^2-4ac$; $\Delta_2=c^2-4ab$; $\Delta_3=a^2-4bc$.

Ta có:

$ac+bc+3ab\le 0$

$\Leftrightarrow ac+bc\le -3ab$

$\Leftrightarrow -4(ac+bc)\ge 12ab$

Ta có:

$\Delta_1+\Delta_3=b^2-4ac+a^2-4bc=a^2+b^2-4(ac+bc)$

$\ge a^2+b^2+12ab=a^2+b^2+3(c^2-\Delta_2)=a^2+b^2+3c^2-3\Delta_2$

$\Rightarrow \Delta_1+\Delta_3+3\Delta_2\ge a^2+b^2+3c^2\ge 0$

$\Rightarrow \Delta_1+\Delta_3+3\Delta_2\ge 0$

Vì $\Delta_1+\Delta_3+3\Delta_2\ge 0$ nên có ít nhất một số không âm. Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Bình Định 23-24)

Giả sử phương trình $x^2-ax+2=0$ (a là tham số) có hai nghiệm x_1 và x_2.

Tính $P = x_1^3 + x_2^3$ theo a.

Lời giải

Phương trình $x^2 - ax + 2 = 0$ (a là tham số), có hai nghiệm x_1 và x_2 khi $\Delta = a^2 - 8 \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2 \ge 8 \Leftrightarrow a \le -2\sqrt{3}$ hoặc $a \ge 2\sqrt{3}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1x_2 = 2 \end{cases}$

Ta có: $P = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

$\Rightarrow P = a^3 - 3.2.a = a^3 - 6a$ với $a \le -2\sqrt{3}$ hoặc $a \ge 2\sqrt{3}$.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)

Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Lời giải

Phương trình có $\Delta = m^2 - 4\cdot 5\cdot(-28) = m^2 + 560 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt $m \in \mathbb{R}$.

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{5} & (1) \\ x_1x_2 = -\dfrac{28}{5} & (2) \end{cases}$ (1)

Kết hợp (1) và $5x_1 + 2x_2 = 1$ ta có hệ:

$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_2 = -m - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2.\dfrac{-m-1}{3} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-m-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2m+5}{15} \\ x_2 = \dfrac{-m-1}{2} \end{cases}$

Thay x_1, x_2 tìm được vào (2) ta có:

$\dfrac{2m+5}{15}\cdot\dfrac{-m-1}{3} = -\dfrac{28}{5}$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 7m - 247 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{19}{2} \\ m = -13 \end{array}\right.$ (nhận)

Kết luận: Để thỏa mãn bài toán thì $m \in \left\{-13; \dfrac{19}{2}\right\}$.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Cho n là số tự nhiên $(n > 1)$.

Gọi a và b là hai nghiệm của phương $x^2 - 2025nx - 2024 = 0$.

Gọi c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2023nx - 2024 = 0$.

Chứng minh rằng $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là một số chính phương.

Lời giải

Từ giả thiết a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2-2025nx-2024=0$ c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2-2023nx-2024=0$. Theo định lí Viet, ta có

$\begin{cases}a+b=2025n\\ab=-2024\end{cases}$ và $\begin{cases}c+d=2023n\\cd=-2024\end{cases}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Do đó $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$

$=\left[(a-c)(b+d)\right].\left[(b-c)(a+d)\right]$

$=(ab+ad-bc-cd)(ab+bd-ac-cd)$

$=(ad-bc)(bd-ac)$

$=abd^2-a^2cd-b^2cd+abc^2$

$=2024\left(a^2+b^2\right)-2024\left(c^2+d^2\right)$

$=2024\left[(a+b)^2-(c+d)^2\right]$

$=2024\left[(2025n)^2-(2023n)^2\right]$

$=(4048n)^2$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ là một số chính phương (đpcm).

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Đăk Lăk 23-24)

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2x-3m-2=0$ có nghiệm.

2) Gọi $x_1, x_2,\ x_3,\ x_4$ là các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=1$. Tính giá trị biểu thức $P=x_1x_2x_3x_4$.

Lời giải

1) Phương trình đã cho có nghiệm khi $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 1+3m+2\ge 0\ \Leftrightarrow m\ge -1$.

2) Phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right)-1=0$

Đặt $t=x^2+8x+7$ $(t\ge -9)$. Ta được $t^2+8t-1=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4+\sqrt{17}\ (TMĐK)\\t=-4-\sqrt{17}\ (TMĐK)\end{array}\right.$.

Khi đó, PT đã cho tương đương $\left[\begin{array}{l}x^2+8x+11-\sqrt{17}=0\\x^2+8x+11+\sqrt{17}=0\end{array}\right.$.

Vậy $P=x_1x_2x_3x_4=\left(11-\sqrt{17}\right)\left(11+\sqrt{17}\right)=104$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Đăk Lăk 23-24)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $2f(x)+3f(2-x)=5x^2-8x+3$ (1) với mọi số thực x.

a) Trong đẳng thức (1), thay x bởi $2-x$ và ghi ra kết quả.

b) Giải phương trình $f(x)=-1$.

Lời giải

$2f(x)+3f(2-x)=5x^2-8x+3$ (1)

a) Trong (1) thay x bởi $2-x$ ta được: $2f(2-x)+3f(x)=5(2-x)^2-8(2-x)+3$

$\Leftrightarrow 3f(x)+2f(2-x)=5x^2-12x+7$ (2)

b) Từ (1) và (2) ta được: $-5f\left(x\right)=2\left(5x^2-8x+3\right)-3\left(5x^2-12x+7\right)$

$\Leftrightarrow -5f\left(x\right)=-5x^2+20x-15 \Leftrightarrow f\left(x\right)=x^2-4x+3$.

Khi đó: $f\left(x\right)=-1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Đăk Nông 23-24)

Giải phương trình: $\left(x+3\right)^4+\left(x+5\right)^4=82$.

Lời giải

Đặt $x+4=t$. Khi đó phương trình trở thành: $\left(t-1\right)^4+\left(t+1\right)^4=82$

$\Leftrightarrow t^4-4t^3+6t^2-4t+1+t^4+4t^3+6t^2+4t+1=82$

$\Leftrightarrow t^4+6t^2-40=0 \Leftrightarrow \left(t^2+10\right)\left(t^2-4\right)=0$

$\Leftrightarrow t^2=4$ (vì $t^2+10>0\ \forall t$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \Rightarrow x=-2 \\ t=-2 \Rightarrow x=-6 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\left\{-2;-6\right\}$.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Đồng Nai 23-24)

Giải phương trình: $\left(x-2\right)\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+6\right)+56=0$.

Lời giải

Viết lại phương trình thành

$\left(x-2\right)\left(x+6\right)\left(x+1\right)\left(x+3\right)+56=0 \Leftrightarrow \left(x^2+4x-12\right)\left(x^2+4x+3\right)+56=0$.

Đặt $t=x^2+4x-12$, ta có

$t\left(t+15\right)+56=0 \Leftrightarrow t^2+15t+56=0$.

Ta có $\Delta=15^2-4.1.56=1$

Do đó phương trình trên có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=-7 \\ t=-8 \end{array}\right.$.

Với $t=-7$ thì $x^2+4x-12=-7 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$.

Giải tương tự trên, ta được $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Với $t=-8$ thì $x^2+4x-12=-8 \Leftrightarrow x^2+4x-4=0$.

Giải tương tự trên, ta được $\left[\begin{array}{l} x=-2+2\sqrt{2} \\ x=-2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;-5;-2+2\sqrt{2};-2-2\sqrt{2}\right\}$.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Đồng Tháp 23-24)
Cho phương trình $x^2+2mx+m^2-2m+4=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa:

$$(x_1+m)(x_2+m)=m^2-6m+7.$$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta'=2m-4>0 \Leftrightarrow m>2$.

Theo hệ thức Vi-et $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-2m \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m^2-2m+4 \end{cases}$

Ta có $(x_1+m)(x_2+m)=m^2-6m+7 \Leftrightarrow x_1x_2+m(x_1+x_1)+m^2=m^2-6m+7$

$\Leftrightarrow m^2-4m+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$

So với điều kiện ta có $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Đồng tháp 23-24)
Giải phương trình $x^4+5x^2-6=0$.

Lời giải

Đặt $t=x^2$ $(t\ge 0)$

Ta được phương trình $t^2+5t-6=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-6 \text{ (loai)} \end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm 1$.

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Gia Lai 23-24)
Cho phương trình $x^2+2(m+1)x+m^2+2m-3=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn ${x_1}^2+{x_2}^2=16$.

Lời giải

Xét phương trình bậc hai $x^2+2(m+1)x+m^2+2m-3=0$

Ta có: $\Delta'=(m+1)^2-(m^2+2m-3)$

$\Delta'=m^2+2m+1-m^2-2m+3$

$\Delta'=4>0$

Vậy với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

$$x_1=\frac{-(m+1)+2}{1}=-m+1$$

$$x_2=\frac{-(m+1)-2}{1}=-m-3$$

Theo đề bài: ${x_1}^2+{x_2}^2=16$

Nên $(-m+1)^2+(-m-3)^2=16$

$\Leftrightarrow m^2-2m+1+m^2+6m+9=16$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0$
$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (m-1).(m+3) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy với $m=1; m=-3$ thì thỏa mãn đề bài

Câu 14. (TS vào 10-Chuyên Hậu Giang 23-24)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (*)

a) Gọi *a* và *b* là các nghiệm của phương trình (*) khi $m = 2023.$ Tính $M = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$

b) Tìm *m* để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2} = 9.$$

Lời giải

a) Với $m = 2023,$ phương trình (*) trở thành $x^2 - 2023x + 2022 = 0$ (**)

Do $a + b + c = 1 - 2023 + 2022 = 0$ nên phương trình (**) có hai nghiệm.

Gọi *a* và *b* là các nghiệm của phương trình (**). Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} a+b = 2023 \\ ab = 2022 \end{cases}.$

Khi đó $M = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{2023}{2022}.$

b) Do $a + b + c = 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = m - 1.$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \neq 2$ (1)

Xét phương trình $x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2} = 9$ (2)

Với điều kiện (1), vì x_1 và x_2 có vai trò như nhau trong (2) nên ta giả sử $x_1 = 1; x_2 = m - 1.$

Ta có $x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2} = 9 \Leftrightarrow 1 + (\sqrt{m-1})^3 = 9$

$\Leftrightarrow (\sqrt{m-1})^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} = 2 \Leftrightarrow m - 1 = 4 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị cần tìm là m = 5.

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Chung Kom tum23-24)

Gọi $x_1;\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 3 = 0.$ Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức: $B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}.$

Lời giải

. Theo ĐL Viét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases}.$

Khi đó $B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{1^2 - 2.(-3)}{-3} = \frac{-7}{3}.$

Vậy $B = \frac{-7}{3}.$

Câu 16. (TS vào 10-Chuyên Chung Kom Tum 23-24)

Giải phương trình: $(4x^2-7x+4)(3x^2-4x+3)=3x^2$.

Lời giải

$(4x^2-7x+4)(3x^2-4x+3)=3x^2$ (1)

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Xét $x\neq 0$, chia cả 2 vế của (1) cho x^2 ta được phương trình.

$$\left(4x-7+\frac{4}{x}\right)\left(3x-4+\frac{3}{x}\right)=3\Leftrightarrow\left[4\left(x+\frac{1}{x}\right)-7\right].\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right]=3$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$. Ta được phương trình:

$$(4t-7)(3t-4)=3\Leftrightarrow 12t^2-37t+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{25}{12}\end{array}\right.$$

* Với $t=1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x+1=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ (Phương trình vô nghiệm).

* Với $t=\frac{25}{12}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{25}{12}\Rightarrow 12x^2-25x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\\ x=\frac{3}{4}\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phường trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{4}{3};\frac{3}{4}\right\}$.

Câu 17. (TS vào 10-Chuyên Hà Nam 23-24)

Cho parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=(m+2)x-m-8$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm nằm bên phải trục tung, có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3-x_2=0$.

Lời giải

. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng là:

$x^2=(m+2)x-m-8\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+m+8=0$ $(*)$

$\Delta=(m+2)^2-4(m+8)=m^2-28$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases}S=x_1+x_2=m+2 & (1)\\ P=x_1.x_2=m+8 & (2)\end{cases}$

Để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm nằm bên phải trục tung thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-28>0\\ m+8>0\\ m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\sqrt{7};m<-2\sqrt{7}\\ m>-8\\ m>-2\end{cases}\Leftrightarrow m>2\sqrt{7}.$$

Theo bài ra ta có $x_1^3-x_2=0\Leftrightarrow x_2=x_1^3$

Thay vào (1), (2) ta được: $\begin{cases} x_1 + x_1^3 = m+2 \\ x_1.x_1^3 = m+8 \end{cases}$

Suy ra $x_1^4 - x_1^3 - x_1 = 6 \Leftrightarrow (x_1-2)(x_1^3+x_1^2+2x_1+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 8$

Thay vào (1) ta được: $2+8 = m+2 \Leftrightarrow m = 8$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 18. (TS vào 10-Chuyên Khánh Hòa 23-24)

Cho phương trình $x^2 + bx - 7 + 2b = 0$ (1) (ẩn x), với b là tham số nguyên.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm b để $x_2^2 = 9x_1$.

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải

a) Giải phương trình: $5x^2 + 6x - 11 = 0$.

Cách 1.Ta có: $a+b+c = 5+6-11 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{64}}{5} = 1$; $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{64}}{5} = \dfrac{-11}{5}$

Cách 2. Ta có: $\Delta' = 3^2 - 5.(-11) = 64 > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{64}}{5} = 1$ và $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{64}}{5} = \dfrac{-11}{5}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{64}}{5} = 1$; $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{64}}{5} = \dfrac{-11}{5}$

b) Xét phương trình $x^2 - 2(m-3)x - 6m - 7 = 0$ có $a = 1$; $b' = -(m-3)$; $c = -6m-7$

Ta có: $\Delta' = [-(m-3)]^2 - (-6m-7) = m^2 + 16 > 0$ với mọi m thuộc R.

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2:

Theo vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-6 \\ x_1.x_2 = -6m-7 \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$C = (x_1+x_2)^2 + 8x_1x_2 = (2m-6)^2 + 8(-6m-7) = 4m^2 - 24m + 36 - 48m - 56$

$= 4m^2 - 72m - 20 = 4(m^2 - 18m + 81) - 4.81 - 20 = 4(m-9)^2 - 344$

Vì $(m-9)^2 \geq 0\ \forall m \Leftrightarrow 4(m-9)^2 \geq 0\ \forall m \Leftrightarrow (m-9)^2 - 344 \geq -344\ \forall m$

Vậy $C_{\min} = -344$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi m = 9

Câu 19. (TS vào 10-Chuyên Lai Châu 23-24)

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y=-x+m+1$ cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện :

$$x_1^2-x_2-4m+1=0.$$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$x^2=-x+m+1$

$\Leftrightarrow x^2+x-m-1=0$ $(*)$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt (P) thì (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 1+4(m+1)>0$ $\Leftrightarrow 4m+5>0$ $\Leftrightarrow m>\dfrac{-5}{4}$

Ta có: $x_1{}^2-x_2-4m+1=0$ (1)

Vì x_1 là nghiệm của $(*) \Rightarrow x_1{}^2=-x_1+m+1$ thay vào (1) ta được

$-x_1+m+1-x_2-4m+1=0$ $\Leftrightarrow -(x_1+x_2)-3m+2=0$

Theo Viet ta có: $x_1+x_2=-1 \Rightarrow 1-3m+2=0 \Leftrightarrow m=1$ (Nhận)

Vậy $m=1$

Câu 20. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)

Cho phương trình $x^2-(m-4)x-m-2=0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{x_1^2+2023}+x_1(m-8-x_1)=\sqrt{x_2^2+2023}+x_2(m-x_2).$$

Lời giải

Ta có: $\Delta=(m-4)^2-4(-m-2)=(m-2)^2+20>0 \forall m \in R$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình nên theo định lý Vi – et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m-4 \\ x_1.x_2=-m-2 \end{cases}$

$\sqrt{x_1^2+2023}+x_1(m-8-x_1)=\sqrt{x_2^2+2023}+x_2(m-x_2)$ (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+2023}-(x_1^2-mx_1)-8x_1=\sqrt{x_2^2+2023}-(x_2^2-mx_2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+2023}+4x_1-m-2-8x_1=\sqrt{x_2^2+2023}+4x_2-m-2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} = 4(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 4\left(\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}\right) \quad (2) \end{array}\right.$$

Từ (2) có:

$$\left(\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4046 + 2\sqrt{x_1^2 + 2023}.\sqrt{x_2^2 + 2023}$$

$$> x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| \geq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}\right)^2 > (x_1 - x_2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} < 1 \quad (3)$$

Từ (3) nên (2) không xảy ra do đó: $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Vậy m = 4 thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{x_1^2 + 2023} + x_1(m - 8 - x_1) = \sqrt{x_2^2 + 2023} + x_2(m - x_2)$$

Câu 21. (TS vào 10-Chuyên Nghệ An 23-24)

Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.

Lời giải

Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.

Biến đổi phương trình ta có

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 2x - 1\right) - 2x\left(x^2 - 2x - 1\right) + 3\left(x^2 - 2x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0$$

+ Với $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right\}$.

+ Với $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 = 0$, phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right\}$

Phần I: Đề thi và đáp án.

Câu 22. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

Tìm m để phương trình $x^2-2(m-1)x-m^2+2m-3=0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2+1}-x_1=\sqrt{x_2^2+1}+x_2$.

Lời giải

Ta có $ac=-(m-1)^2-2<0$, với mọi m.

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Ta có $\sqrt{x_1^2+1}-x_1=\sqrt{x_2^2+1}+x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}=x_1+x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=x_1+x_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=x_1+x_2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ \sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}=x_1-x_2 \end{array}\right.$$

TH1: $x_1+x_2=0 \Leftrightarrow 2(m-1)=0 \Leftrightarrow m=1$.

TH2: $\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}=x_1-x_2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_1^2+1}-x_1\right)+\left(\sqrt{x_2^2+1}+x_2\right)=0$ (vô lý).

Vậy $\mathrm{m}=1$.

Câu 23. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $x^2-2mx+m^2-m+1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2^2-x_1^2+4mx_1=16$.

Lời giải

Ta có: $\Delta'=m^2-(m^2-m+1)=m^2-m^2+m-1=m-1$

Để phương trình $x^2-2mx+m^2-m+1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì $\Delta'\geq 0$

$\Leftrightarrow m-1\geq 0 \Leftrightarrow m\geq 1$.

Theo định lí viet: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=m^2-m+1 \end{cases}$

Mặt khác: $x_2^2-x_1^2+4mx_1=16 \Leftrightarrow x_2^2-x_1^2+2(x_1+x_2)x_1=16$

$$\Leftrightarrow x_2^2-x_1^2+2x_1^2+2x_1.x_2=16 \Leftrightarrow x_2^2+x_1^2+2x_1.x_2=16$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2=16 \Leftrightarrow (2m)^2=16 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \quad \text{(t/m)} \\ m=-2 \ \text{(loai)} \end{array}\right.$$

Câu 24. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

Cho phương trình $x^2+2(m+1)x-m^2-3=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1<x_2$ thỏa mãn $|x_1|-|x_2+5|\geq 2023$.

Lời giải

Ta có $a.c=-m^2-3<0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu, suy ra

$x_1<0<x_2$.

Theo Vi et ta có $x_1+x_2=-2(m+1)$

Theo bài ra ta có $|x_1|-|x_2+5|\geq 2023 \Leftrightarrow -x_1-x_2-5\geq 2023$

$\Leftrightarrow x_1+x_2\leq -2028 \Leftrightarrow -2m-2\leq -2028$

$\Leftrightarrow 2m\geq 2026 \Leftrightarrow m\geq 1013$. Vậy $m\geq 1013$.

Câu 25. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ với a,b,c là các số thực thỏa $2a-b+c=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm không thể đều dương.

Lời giải

Ta có: $\Delta=b^2-4ac$ mà $2a-b+c=0$ nên $\Delta=(2a+c)^2-4ac=4a^2+c^2>0$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Giả sử 2 nghiệm đã cho là x_1,x_2. Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Từ giả thiết $2a-b+c=0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}=2$, do đó

$-(x_1+x_2)-x_1x_2=2 \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2+1)=-1\ (*)$. Nếu 2 nghiệm đều dương thì $(x_1+1)(x_2+1)>1$, mâu thuẫn với $(*)$.

Vậy 2 nghiệm của phương trình không thể đều dương.

Câu 26. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m;n)$ biết rằng hai phương trình $x^2-2mx-3n=0$ và $x^2-2nx-3m=0$ (với x là ẩn) đều có nghiệm nguyên.

Lời giải

Phương trình $x^2-2mx-3n=0\ (1)$ có $\Delta_1'=m^2+3n$.

Phương trình $x^2-2nx-3m=0\ (2)$ có $\Delta_2'=n^2+3m$.

Vì hai phương trình có nghiệm nguyên nên Δ_1', Δ_2', đều là số chính phương.

Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq n > 0$, khi đó

$m^2 < m^2 + 3n < (m+2)^2 \Rightarrow m^2 + 3n = (m+1)^2 \Rightarrow 3n = 2m + 1$.

Do đó n là số lẻ. Đặt $n = 2k + 1 \Rightarrow \Delta_2' = 4k^2 + 13k + 4$.

+) Nếu $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ thì Δ_2' không là số chính phương.

+) Nếu $k = 0 \Rightarrow \Delta_2' = 4 \Rightarrow m = n = 1$ (thỏa mãn).

+) Nếu $k = 5$ thì $\Delta_2' = 169 \Rightarrow m = 16, n = 11$ (thỏa mãn).

+ Nếu $k > 5$ thì $(2k+3)^2 < 4k^2 + 13k + 4 < (2k+4)^2 \Rightarrow \Delta_2'$ không là số chính phương.

Vậy các bộ số $(m; n)$ thỏa mãn là: $(1;1), (11;16), (16;11)$

PHẦN II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN.

Câu 27. (TS vào 10-Chuyên Quảng Ninh 23-24)

Giải phương trình $x^2 + x - 6 = 3(x-2)\sqrt{x+1}$.

Lời giải

aĐiều kiện: $x \geq -1$

Ta có $x^2 + x - 6 = 3(x-2)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (x-2)(x+3) - 3(x-2)\sqrt{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3-3\sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn đk) hoặc $x + 3 - 3\sqrt{x+1} = 0$

$x + 3 - 3\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$ (thỏa mãn đk)

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2; 3\}$.

b) $x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1-y) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $y = x - 1$

Với $x = 1$ ta có phương trình $\sqrt{y^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow y = 0$

Với $y = x - 1$ ta có phương trình $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, $t \geq 0$, pt trở thành $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1$ (loại), $t = 2$ (thỏa mãn)

Với $t = 2$ ta được $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -4$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1; 0); (-4; -5)$.

Câu 28. (TS vào 10-Chuyên Quảng Trị 23-24)

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Ta có $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2x-1}$

Bình phương hai vế, ta được

$$2\sqrt{2x-1}=x+1 \Leftrightarrow 4\ 2x-1\ =\ x+1\ ^{2} \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \text{(TM)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\ 1;5$

Câu 29. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

Giải phương trình $2\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=9$.

Lời giải

Điều kiện: $-9\le x\le 9$.

Ta có $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow \sqrt{81-x^2}+3\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{9-x}\right)-\dfrac{27}{2}=0$

Đặt $t=\sqrt{x+9}-\sqrt{9-x}$, suy ra $t^2=18-2\sqrt{81-x^2}$, ta có phương trình:

$$\frac{18-t^2}{2}+3t-\frac{27}{2}=0\Leftrightarrow -\frac{t^2}{2}+3t-\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(t-3)^2=0\Leftrightarrow t=3$$

Với $t=3$, ta có $\sqrt{x+9}-\sqrt{9-x}=3\Leftrightarrow \sqrt{x+9}=3+\sqrt{9-x}$

$\Leftrightarrow x+9=18-x+6\sqrt{9-x}\Leftrightarrow 6\sqrt{9-x}=2x-9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{9}{2} \\ 36(9-x)=4x^2-36x+81 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{9}{2} \\ 4x^2=243 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Câu 30. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 23-24)

Giải phương trình: $(x-4)\sqrt{x}-(x-1)\sqrt{5-x}=2x^2-10x+5$

Lời giải

ĐKXĐ: $0\le x\le 5$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x-4)(\sqrt{x}-(x-1)\sqrt{5-x}=2x^2-10x+8$

$$\Leftrightarrow (x-4)\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}-(x-1)\frac{4-x}{\sqrt{5-x}+1}=2x^2-10x+8$$

$$\Leftrightarrow (x-1)9x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}+1}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (x-1)(x-4)=0 & (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}+1}=2 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): $(x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \ (Thõa\ mãn\ ĐK)$

Giải (2): Với điều kiện $0\le x\le 5$ ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+1\geq 1\\ \sqrt{5-x}+1\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\leq 1\\ \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}\leq 1\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}+1}\leq 2$$

Dấu $"="$ không xảy ra nên phương trình (2) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=4$

Câu 31. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

a) Giải phương trình $3x^2+x-6=4x\left(\sqrt{5x-6}-1\right)$

Lời giải

Điều kiện $x\geq\frac{6}{5}$

Từ giả thiết ta có $-x^2+5x-6=4x\left(\sqrt{5x-6}-x\right)\Leftrightarrow -x^2+5x-6=4x.\dfrac{-x^2+5x-6}{\sqrt{5x-6}+x}$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+6\right).\left(\frac{4x}{\sqrt{5x-6}+x}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+6=0\ (*)\\ \dfrac{4x}{\sqrt{5x-6}+x}-1=0(**)\end{array}\right.$$

Giải phương trình (*): $(*)\Leftrightarrow(x-2)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2(t/m)\\ x=3(t/m)\end{array}\right.$

Giải (**): $(**)\Leftrightarrow 3x=\sqrt{5x-6}\Leftrightarrow 9x^2=5x-6\Leftrightarrow 9x^2-5x+6=0\Leftrightarrow 9x\left(x-\frac{5}{9}\right)+6=0$ vô nghiệm

vì $x\geq\frac{6}{5}\Rightarrow 9x\left(x-\frac{5}{9}\right)>0\Rightarrow 9x\left(x-\frac{5}{9}\right)+6>0$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{2;3\}$.

Câu 32. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Giải phương trình: $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x-5}=7.$

Lời giải

Điều kiện: $x^2-4x-5\geq 0(*)$ hay $(x\leq -1;\ x\geq 5)$

Phương trình $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x-5}=7\Leftrightarrow x^2-4x-5+\sqrt{x^2-4x-5}-2=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x-5}\ (t\geq 0)$ ta được phương trình $t^2+t-2=0$

Giải phương trình $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ \text{(t/m)} \\ t=-2\ \text{(loai)} \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có $\sqrt{x^2-4x-5}=1$

$\Leftrightarrow x^2-4x-5=1 \Leftrightarrow x^2-4x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{10} \\ x=2-\sqrt{10} \end{array}\right.$ (t/m (*))

KL: Phương trình đã cho có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{10} \\ x=2-\sqrt{10} \end{array}\right.$

Câu 33. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)

Cho phương trình $x^4-4x^2+m+2=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=-7$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=2x_1x_2x_3x_4.$$

Lời giải

a) Khi $m=-7$ phương trình (1) trở thành

$x^4-4x^2-5=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x^2=5 \end{array}\right. \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

b) Đặt $x^2=t$ ta có phương trình $t^2-4t+m+2=0$ (2)

+ Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương $t_1;t_2$ phân biệt,

Điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta'=4-m-2>0 \\ S=t_1+t_2=4>0 \\ P=t_1.t_2=m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<2$$

+ Khi đó, không mất tính tổng quát, giả sử

$x_1=-\sqrt{t_1}; x_2=\sqrt{t_1}; x_3=-\sqrt{t_2}; x_4=\sqrt{t_2}$

suy ra $x_1.x_2.x_3.x_4=t_1.t_2$ và $x_1^2=x_2^2=t_1; x_3^2=x_4^2=t_2$

+ Thay vào đẳng thức $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=2x_1x_2x_3x_4$ ta được

$2\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)=2t_1.t_2 \Rightarrow \frac{t_1+t_2}{t_1.t_2}=t_1.t_2$

Với $t_1+t_2=4$; $t_1.t_2=m+2$ suy ra

$\frac{4}{m+2}=m+2 \Rightarrow (m+2)^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=2 \\ m+2=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4\ (L) \end{array}\right. \Rightarrow m=0$

Câu 34. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Long 23-24)

a) Tìm tất cả các giá trị m của để phương trình $x^2-5x+3m+1=0$ (x là ẩn số; m là tham số) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $\left|x_1^2-x_2^2\right|=15$.

b) Giải phương trình: $(x-1)^4=x^2-2x+3$.

Lời giải

a) Có $\Delta=21-12m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Delta>0 \Leftrightarrow 21-12m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{7}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1.x_2=3m+1 \end{cases}$

Ta có $\left|x_1^2-x_2^2\right|=15 \Leftrightarrow \left|(x_1+x_2)(x_1-x_2)\right|=15 \Leftrightarrow \left|x_1-x_2\right|=3$

$(x_1-x_2)^2=9$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$

$\Leftrightarrow 5^2-4(3m+1)=9 \Leftrightarrow 21-12m=9$

$\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn)

Vậy $m=1$

b) $(x-1)^4=x^2-2x+3 \Leftrightarrow (x-1)^4=(x-1)^2+2 \Leftrightarrow (x-1)^4-(x-1)^2-2=0$.

Đặt $t=(x-1)^2$ $(t\ge 0)$

Phương trình trở thành $t^2-t-2=0$

$\Rightarrow t=-1$ (loại); $t=2$ (nhận)

Với $t=2 \Leftrightarrow (x-1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-\sqrt{2}+1 \\ x_2=\sqrt{2}+1 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{-\sqrt{2}+1;\sqrt{2}+1\right\}$.

Câu 35. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn điều kiện $4x_1+3x_2=1$.

Lời giải

Ta có $\Delta=-4m+29$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{29}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có : $x_1+x_2=2m-1$; $x_1.x_2=m^2-7$

Ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=2m-1 \\ 4x_1+3x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=4-6m \\ x_2=8m-5 \end{cases}$

$x_1.x_2=m^2-7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{13}{49} \end{array}\right.$ (nhận).

Câu 36. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)
Giải phương trình: $x^4-3x^2-4=0$

Lời giải

$x^4-3x^2-4=0$. Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$ ta được phương trình: $t^2-3t-4=0$. Tìm được $t=-1\ (l)$; $t=4\ (n)$

Suy ra được nghiệm của phương trình: $x=2;\ x=-2$.

Câu 37. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)
Cho phương trình $x^2-2mx+m^2-m+1=0$ (m là tham số).
a) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.
b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào tham số m.

Lời giải

a) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow m-1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 1$

b) Áp dụng hệ thức Vi – ét: $\begin{cases} x_1+x_2=2m & (1)\\ x_1x_2=m^2-m+1 & (2)\end{cases}$

Từ (1) ta có: $m=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, thay vào (2) ta được: $x_1x_2=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\dfrac{x_1+x_2}{2}+1$.

Câu 38. (TS vào 10-Chuyên Tin Hoà Bình 23-24)
a) Cho phương trình: $x^2-3mx+m^2-5=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn: $x_1^2+3mx_2-13\le 0$.
b) Giải phương trình: $(x^2-6x)^2+(x-3)^2=29$.

Lời giải

a) Ta có $\Delta=9m^2-4(m^2-5)=5m^2+20>0,\ \forall m$.

Suy ra phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3m\\ x_1.x_2=m^2-5\end{cases}$

$x_1^2+3mx_2-13\le 0 \Leftrightarrow x_1^2+(x_1+x_2)x_2-13\le 0 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-x_1.x_2-13\le 0$

$\Leftrightarrow (3m)^2-(m^2-5)-13\le 0 \Leftrightarrow 8m^2\le 8 \Leftrightarrow -1\le m\le 1$

b) $(x^2-6x)^2+(x-3)^2=29 \Leftrightarrow (x^2-6x)^2+(x^2-6x)-20=0$ (1)

Đặt $t=x^2-6x$, phương trình (1) trở thành: $t^2+t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4\\ t=-5\end{array}\right.$

Với $t=4 \Rightarrow x^2-6x=4 \Leftrightarrow x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13}\\ x=3-\sqrt{13}\end{array}\right.$

Với $t=-5 \Rightarrow x^2-6x=-5 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=5\end{array}\right.$.

Câu 39. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)
Chứng minh rằng phương trình $\left(ax^2+2bx+c\right)\left(bx^2+2cx+a\right)\left(cx^2+2ax+b\right)=0$ luôn có nghiệm

với mọi số thực a, b, c.

Lời giải

Ta có $\left(ax^2+2bx+c\right)\left(bx^2+2cx+a\right)\left(cx^2+2ax+b\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} ax^2+2bx+c=0 & (1) \\ bx^2+2cx+a=0 & (2) \\ cx^2+2ax+b=0 & (3) \end{array}\right.$

- Trường hợp 1: Nếu $a.b.c=0$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm

- Trường hợp 2: Nếu $a.b.c \neq 0$, ta có $\begin{cases} \Delta_1' = b^2 - ac \\ \Delta_2' = c^2 - ab \\ \Delta_3' = a^2 - bc. \end{cases}$

Khi đó $2\left(\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3'\right) = 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$

Suy ra một trong ba số $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3'$ không âm.

Do đó, một trong ba phương trình (1), (2), (3) có nghiệm nên ta có điều phải chứng minh

Câu 40. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Giải phương trình $2x^2+2x-1=3x\sqrt{2x-1}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x-1} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành:

$2x^2+t^2=3xt \Leftrightarrow t^2-3xt+2x^2=0 \Leftrightarrow (t-x)(t-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=2x \end{array}\right.$

Với $t=x, x \geq \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x-1}=x \Leftrightarrow 2x-1=x^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Với $t=2x,\ x \geq \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x-1}=2x \Leftrightarrow 2x-1=4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-2x+1=0$, phương trình vô nghiệm do $\Delta' < 0$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}$.

Câu 41. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)

Giải phương trình $x^2-5x+2+(3-2x)\sqrt{x^2+x+2}=0.$

Lời giải

$x^2-5x+2+(3-2x)\sqrt{x^2+x+2}=0.$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}-2x=0$ (vì $\sqrt{x^2+x+2}+3>0\,\forall x$) ĐK: $x \geq 0$

$\Leftrightarrow 3x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=1 (TM),\ x=-\frac{2}{3} (loai)$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 42. (TS vào 10-Chuyên Bình Thuận 23-24)

Giải phương trình $9x^2-53x=\sqrt{2x+1}-71$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\,(t\ge 0)$ suy ra $t=\sqrt{2x+1}\,(t\ge 0)\Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{t^4-2t^2+1}{4} \\ x=\dfrac{t^2-1}{2} \end{cases}$

Khi đó pt đã cho trở thành: $9t^4-124t^2-4t+399=0\Leftrightarrow (t-3)(3t+7)(3t^2+2t-19)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-3=0 \\ 3t+7=0 \\ 3t^2+2t-19=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \quad (n) \\ t=-\dfrac{7}{3}(l) \\ 3t^2+2t-19=0\,(4) \end{array}\right.$$

+ t = 3 suy ra $\sqrt{2x+1}=3\Leftrightarrow 2x+1=9\Leftrightarrow x=4(n)$

+ $3t^2+2t-19=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1+\sqrt{58}}{3}(n) \\ t=\dfrac{-1-\sqrt{58}}{3}(l) \end{array}\right.$

+ Với $t=\dfrac{-1+\sqrt{58}}{3}$ suy ra $\sqrt{2x+1}=\dfrac{-1+\sqrt{58}}{3}\Leftrightarrow 2x+1=\dfrac{59-2\sqrt{58}}{9}\Leftrightarrow x=\dfrac{25-\sqrt{58}}{9}$

Vậy $S=\left\{4;\dfrac{25-\sqrt{58}}{9}\right\}$.

Câu 43. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)

Tìm cặp số $(x;y)$ thỏa mãn: $4x^2+2y-4x\sqrt{y}+4x-6\sqrt{y}+5=0$.

Lời giải

Ta có $4x^2+2y-4x\sqrt{y}+4x-6\sqrt{y}+5=0\ \ (y\ge 0)$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x(\sqrt{y}-1)+(\sqrt{y}-1)^2+y-4\sqrt{y}+4=0\Leftrightarrow (2x-\sqrt{y}+1)^2+(\sqrt{y}-2)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}-2=0 \\ 2x-\sqrt{y}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};4\right)$.

Câu 44. (TS vào 10-Chuyên Thái Nguyên 23-24)

Giải phương trình : $2\sqrt{x+6}+x^2+4x-27=0$.

Lời giải

Có $2\sqrt{x+6}+x^2+4x-27=0$ đk: $x\ge -6$

$2\sqrt{x+6}+x^2+4x-27=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+6}-3\right)+x^2+4x-21=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[\dfrac{2}{\sqrt{x+6}+3}+(x+7)\right]=0$

$\Leftrightarrow x=3$ (Vì $\dfrac{2}{\sqrt{x+6}+3}+(x+7)>0$ đúng mọi x

KL: Nghiệm của PT là $x=3$.

Câu 45. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)

Giải phương trình: $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160$

Lời giải

$(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160 \Leftrightarrow \left(x^2+5x-6\right)\left(x^2+5x+6\right)=160$

$\Leftrightarrow \left(x^2+5x\right)^2-6^2=160 \Leftrightarrow \left(x^2+5x\right)^2=14^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=14 \\ x^2+5x=-14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+7)=0 \\ \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{31}{4}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2; x=-7$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2;7\}$.

Câu 46. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Hà Nội 23-24)

Cho phương trình $x^2-(2m-1)x-\left(m^2+1\right)=0$ (1) (m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

Lời giải

Ta có $\Delta_{(1)}=[-(2m-1)]^2-4.1.\left[-\left(m^2+1\right)\right]=(2m-1)^2+4m^2+4>0$.

Vì thế với mọi m, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo hệ thức Vi-et thì $x_1+x_2=2m-1$ và $x_1 \cdot x_2=-\left(m^2+1\right)$. Khi đó ta được

$\begin{cases} 4m^2=\left(x_1+x_2+1\right)^2 \\ m^2=-1-x_1 \cdot x_2 \end{cases}$

Từ đây ta được $\left(x_1+x_2+1\right)^2+4x_1x_2+4=0$. Hệ thức này không phụ thuộc vào m. Bài toán được chứng minh.

Câu 47. (TS vào 10-Chuyên Hoà Bình 23-24)

a) Cho phương trình: $x^2-3mx+m^2-5=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2+3mx_2-13\le 0$.

b) Giải phương trình: $(x^2-6x)^2+(x-3)^2=29$.

Lời giải

a) Ta có $\Delta=9m^2-4(m^2-5)=5m^2+20>0, \forall m$.

Suy ra phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3m \\ x_1.x_2=m^2-5 \end{cases}$

$x_1^2+3mx_2-13\le 0 \Leftrightarrow x_1^2+(x_1+x_2)x_2-13\le 0 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-x_1.x_2-13\le 0$

$\Leftrightarrow (3m)^2-(m^2-5)-13\le 0 \Leftrightarrow 8m^2\le 8 \Leftrightarrow -1\le m\le 1$

b) $(x^2-6x)^2+(x-3)^2=29 \Leftrightarrow (x^2-6x)^2+(x^2-6x)-20=0$ (1)

Đặt $t=x^2-6x,$ phương trình (1) trở thành: $t^2+t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-5 \end{array}\right.$

Với $t=4 \Rightarrow x^2-6x=4 \Leftrightarrow x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{13} \\ x=3-\sqrt{13} \end{array}\right.$

Với $t=-5 \Rightarrow x^2-6x=-5 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Câu 48. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)

Giải phương trình: $x^2+3x+8=2(x+1)\sqrt{x+7}$

Lời giải

$x^2+3x+8=2(x+1)\sqrt{x+7}$ ĐKXĐ: $x\ge -7$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+1\right)-2(x+1)\sqrt{x+7}+x+7=0 \Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{x+7}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{x+7}\right)=0$

$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{x+7}=0 \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x+7}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+2x+1=x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ (x-2)(x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=2; x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Câu 49. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)

Giải phương trình $x^2=x+2+2\sqrt{x+1}$.

Lời giải

Ta có: $x^2=x+2+2\sqrt{x+1}$, đặt $t=\sqrt{x+1}\ge 0,(x\ge -1) \Rightarrow t^2=x+1 \Rightarrow x=t^2-1$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$\left(t^2-1\right)^2=\left(t^2-1\right)+2+2t \Leftrightarrow t^4-3t^2-2t=0 \Leftrightarrow t(t+1)\left(t^2-t-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1,(l) \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1;3\}$

Câu 50. (TS vào 10-Chuyên Bến Tre 23-24)

Giải phương trình $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8$

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x-2\ge 0 \\ x^2+4x-120\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$

Phương trình ban đầu tương đương

$$\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)$$

$\Leftrightarrow 8\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+4x-12}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)^2=\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 1+x^2+4x-1+2\sqrt{x^2+4x-12}=x+6+x-2+2\sqrt{x^2+4x-12}$

$\Leftrightarrow x^2+2x-15=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3(tm) \\ x=-5(loai)\end{array}\right.$

Câu 51. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x-1}=2x+\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x}}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+3x\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$

Phương trình trở thành

$\sqrt{x(x+3)}+2\sqrt{x-1}-2x-\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{x}}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{x}}\right)+\left(2\sqrt{x-1}-2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}\left(x-\sqrt{x-1}\right)-2\left(x-\sqrt{x-1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}-2\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x-1}\ (1) \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}=2(2)\end{array}\right.$

$(1)\Leftrightarrow x^2=x-1\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm)

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x}=4\Leftrightarrow x+3=4x\Leftrightarrow x=1$ (Thoả mãn điều kiện)

Câu 52. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Vinh 23-24)

Giải phương trình $x^3-2x^2+x-5(x-1)\sqrt{x}-6=0$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\ge 0$. Đặt $t=(x-1)\sqrt{x}$ phương trình trở thành

$x^3-2x^2+x-5(x-1)\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2-5(x-1)\sqrt{x}-6=0$

$\Leftrightarrow t^2-5t-6=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6)=0$

Trường hợp 1. $t=-1$ suy ra $0\le x<1$. Đặt $\sqrt{x}=a$ $(0\le a<1)$, khi đó ta có

$(x-1)\sqrt{x}=-1 \Leftrightarrow a^3-a+1=0$ $(vô lý\ a^3+1-a>0)$.

Trường hợp 2. $t=6$. Đặt $\sqrt{x}=a(a\ge 0)$, khi đó ta có

$(x-1)\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow a^3-a-6=0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a+3)=0$

$\Leftrightarrow a=2\left(vì\ a^2+2a+3=(a+1)^2+2>2>0\right)$

$\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tất cả các nghiệm thỏa mãn phương trình là $x=4$.

âu 1. (TS vào 10-Chuyên Tin Hà Nội 23-24)

Giải phương trình $2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}$.

Từ phương trình, ta suy ra $5-x>0$ (do $2x+2>0$), tức $x<5$.

Với điều kiện $\dfrac{2}{3}\le x<5$, phương trình đã cho tương đương với:

$$(2x+2)^2=(5-x)^2(3x-2)\Leftrightarrow 3(x-1)(x-2)(x-9)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (\text{tm})\\x=2\ (\text{tm})\\x=9\ (\text{ktm})\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có nghiệm $S=\{1;2\}$.

Câu 53. (TS vào 10-Chuyên Toán hà Nội 23-24)

Giải phương trình $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8.$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge\dfrac{7}{2}$.

Phương trình tương đương với $(4-x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}+2\right)=0.$

TH1: $4-x=0\Leftrightarrow x=4.$

TH2: $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}+2=0.$ (Vô nghiệm)

Kết hợp với ĐKXĐ: tập nghiệm phương trình là $S=\{4\}$.

Câu 54. (TS vào 10-Chuyên Hải Phòng 23-24)
Giải phương trình: $\left(3x^2+4x+6\right)\sqrt{3x^2+4x+5}=27x^3+3x.$

Lời giải

Đặt $\sqrt{3x^2+4x+5}=a$, $3x=b$

Khi đó phương trình trở thành:

$a^3+a=b^3+b$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0 \Leftrightarrow a=b$ (vì $a^2+ab+b^2+1>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x+5}=3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 6x^2-4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{34}}{6}$.

Câu 55. (TS vào 10-Chuyên Đà Nẵng 23-24)
Giải phương trình $10x^2+3x+2=\left(6x+1\right)\sqrt{x^2+2}$.

Lời giải

Cách 1: Bình phương 2 vế rồi casio bậc 4.

Cách 2: Đặt $t=\sqrt{x^2+2} \Rightarrow t^2=x^2+2\ (t>0)$. Ta được:

$9x^2+3x+t^2=(6x+1)t \Rightarrow (9x^2-6xt+t^2)+3x-t=0 \Rightarrow (3x-t)^2+(3x-t)=0$

$\Rightarrow (3x-t)(3x-t+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=t \\ 3x+1=t \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\sqrt{x^2+2} \\ 3x+1=\sqrt{x^2+2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9x^2=x^2+2\ (3x\ge 0) \\ 9x^2+6x+1=x^2+2\ (3x+1\ge 0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{2}\ (3x\ge 0) \\ 8x^2+6x-1=0\ (3x+1\ge 0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{-3+\sqrt{17}}{8}\right\}$

Câu 56. (TS vào 10-Chuyên Cần Thơ 23-24)
Giải phương trình và hệ phương trình sau: $2x^2-\left(x-2\right)\sqrt{x^2-x+1}=5x-2$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2-x+1\ge 0$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$)

$2x^2-\left(x-2\right)\sqrt{x^2-x+1}=5x-2$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=\left(x-2\right)\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(2x-1\right)=\left(x-2\right)\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(x-2\right)=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-x+1}=2x-1 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)

$(2) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 4x^2 - 4x$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 4x(x-1)$

$\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ (nhận)

Vậy $S = \{0,1;2\}$

Câu 57. (TS vào 10-Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 23-24)

Giải phương trình $x^2 - x + 6 = 2\sqrt{x^3 + 8}$.

Lời giải

$x^2 - x + 6 = 2\sqrt{x^3 + 8} \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 2\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$ (1) (ĐK: $x \geq -2$)

Đặt $a = x + 2$; $b = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow x^2 - x + 6 = a + b$.

Phương trình (1) trở thành: $a + b = 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$

$\Leftrightarrow x + 2 = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta có: $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1$ (nhận); $x_2 = 2$ (nhận)

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1;2\}$.

Câu 58. (TS vào 10-Chuyên Bắc Giang 23-24)

Giải phương trình: $4\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = x + 7$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4 + \sqrt{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + \sqrt{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Câu 59. (TS vào 10-Chuyên Bắc Ninh 23-24)

Giải phương trình $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge \frac{-1}{4}$.

Ta có $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$

$\Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{(4x+1)(x+2)}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$

$\Leftrightarrow 8x+12+4\sqrt{(4x+1)(x+2)}=8\sqrt{x+2}+4\sqrt{4x+1}$

$\Leftrightarrow 4x+1+4x+8+3+2\sqrt{(4x+1)(4x+8)}=4\sqrt{4x+8}+4\sqrt{4x+1}$ (*)

Đặt $\begin{cases}\sqrt{4x+8}=a\\ \sqrt{4x+1}=b\end{cases}$ (với $a,b\ge 0$) $\Rightarrow a^2-b^2=7$

Khi đó phương trình (*) có dạng

$a^2+b^2+3+2ab-4a-4b=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2-4(a+b)+3=0$

$\Leftrightarrow (a+b-1)(a+b-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=1\\ a+b=3\end{array}\right.$

Nếu $a+b=1$ mà $a^2-b^2=7$ nên $\begin{cases}a+b=1\\ a-b=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\ b=-3\end{cases}$ (loại do $a,b\ge 0$)

Nếu $a+b=3$ mà $a^2-b^2=7$ nên $\begin{cases}a+b=3\\ a-b=\frac{7}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{8}{3}\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}$ (thoả mãn) $\Rightarrow x=\frac{-2}{9}$

Thử lại được nghiệm đúng. Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{-2}{9}\right\}$.

Câu 60. (TS vào 10-Chuyên Bình Dương 23-24)

Giải phương trình: $4x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x$ với $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện $x\ge \frac{-1}{3}$

$4x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=-4x^2+13x-5$

Đặt $\sqrt{3x+1}=2y+3$, điều kiện $y\ge \frac{-3}{2} \Rightarrow 3x+1=4y^2+12y+9$.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}2y+3=-4x^2+13x-5\\ 3x+1=4y^2+12y+9\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-13x+2y+8=0 \quad (1)\\ 4y^2-3x+12y+8=0 \quad (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$4(x^2-y^2)-10x+10y=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(4x-4y-10)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ 4x-4y-10=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x \\ y=\dfrac{2x-5}{2} \end{array}\right.$

Thay $y=-x$ vào (1) ta có:

$4x^2-13x-2x+8=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-15x+8=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{15+\sqrt{97}}{8} \Rightarrow y=-\dfrac{15+\sqrt{97}}{8} \quad (ktm) \\ x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8} \Rightarrow y=\dfrac{-15+\sqrt{97}}{8} \quad (tm) \end{array}\right.$

Thay $y=\dfrac{2x-5}{2}$ vào (1) ta có:

$4x^2-13x+2x-5+8=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-11x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8} \Rightarrow y=\dfrac{-9+\sqrt{73}}{8} \quad (tm) \\ x=\dfrac{11-\sqrt{73}}{8} \Rightarrow y=\dfrac{-9-\sqrt{73}}{8} \quad (ktm) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$; $x=\dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$.

Câu 61. (TS vào 10-Chuyên Bình Định 23-24)

Giải phương trình $\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^2-1}=2 \ \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện $x\geq\dfrac{1}{4}$

$\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^2-1}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{(4x-1)}\sqrt{4x+1}-2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x-1}\left(1+\sqrt{4x+1}\right)-2\left(1+\sqrt{4x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x-1}-2\right)\left(1+\sqrt{4x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4x-1}-2=0 \\ 1+\sqrt{4x+1}=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 4x-1=4$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4} \quad \left(TM\right)$

Vậy $S=\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

Câu 62. (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)

Giải phương trình: $(x+4)(x-2)=2\sqrt{x^2+2x-5}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2x-5\ge 0$

Ta có $(x+4)(x-2)=2\sqrt{x^2+2x-5}$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8=2\sqrt{x^2+2x-5}$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-5)-3=2\sqrt{x^2+2x-5}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-5}, t\ge 0$ ta có phương trình trở thành: $t^2-3=2t$

$\Leftrightarrow t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Với $t=-1$ (loại)

Với $t=3$ ta có $\sqrt{x^2+2x-5}=3$

$\Leftrightarrow x^2+2x-5=9$

$\Leftrightarrow x^2+2x-14=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{15} \\ x=-1+\sqrt{15} \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{-1-\sqrt{15};-1+\sqrt{15}\right\}$.

Câu 63. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Giải phương trình: $x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-4}=3$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x\ne 0 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\ge 0 \end{cases}$ $(*)$.

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t, |t|\ge 2$ $(**)$. Khi đó $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$, phương trình (3) có dạng:

$$t+\sqrt{t^2-6}=3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=3-t \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{6}\le t\le 3 \\ t\le -\sqrt{6} \end{array}\right. \\ t^2-6=(3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{6}\le t\le 3 \\ t\le -\sqrt{6} \end{array}\right. \\ t=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{5}{2}$$

Với $t=\dfrac{5}{2}$, thay vào $(**)$, ta được $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\ (\text{t/m}(*)) \\ x=2\ (\text{t/m}(*)) \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$.

Câu 64. (TS vào 10-Chuyên Hà Nam 23-24)

Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4.$

Lời giải

$$(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4 \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=(x-1)(2x-4)$$

$\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{x^2+6x+16}-2x+4)=0$

+) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

+) $\sqrt{x^2+6x+16}=2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-4\ge 0\\ x^2+6x+16=(2x-4)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ 3x^2-22x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ \left[\begin{array}{l}x=0(l)\\ x=\dfrac{22}{3}(tm)\end{array}\right.\end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1; x=\dfrac{22}{3}$

Câu 65. (TS vào 10-Chuyên Hà Tính 23-24)

Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2.$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases}x^2+3x+11\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -2$

$\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+5(x+2)}-\sqrt{x+2}=2(x-1)$

Xét $x=-2$ (không phải là nghiệm)

Xét $x>-2$ Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+2}$ ta được: $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x+2}+5}-1=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x+2}}$. Đặt $t=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ ta được phương trình: $\sqrt{t^2+5}-1=2t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5}=2t+1 \Leftrightarrow \begin{cases}2t+1\ge 0\\ t^2+5=(2t+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\ge -\dfrac{1}{2}\\ 3t^2+4t-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\ge -\dfrac{1}{2}\\ t=-2;\ t=\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$$

Khi $t=\dfrac{2}{3}$ ta được phương trình: $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases}x-1\ge 0\\ 4(x+2)=9(x-1)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ 9x^2-22x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x=\dfrac{11\pm 4\sqrt{7}}{9}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}.$$

Vậy phương trình có đúng 1 nghiệm $x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}$

Chú ý: Học sinh có thể giải theo cách: Đặt $\begin{cases}a=x-1\\ b=\sqrt{x+2}\ge 0.\end{cases}$

Câu 66. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x-1}=2x+\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x}}$.

Lời giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} x^2+3x\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$

Phương trình trở thành

$$\sqrt{x(x+3)}+2\sqrt{x-1}-2x-\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x}}\right)+\left(2\sqrt{x-1}-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}}\left(x-\sqrt{x-1}\right)-2\left(x-\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}-2\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x-1}\ (1) \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}=2\ (2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x^2=x-1\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm)

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x}=4\Leftrightarrow x+3=4x\Leftrightarrow x=1$ (Thoả mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Câu 67. (TS vào 10-Chuyên Hậu Giang 23-24)

Giải phương trình $4x-9\sqrt{x}+2=0$.

Lời giải

Đặt $X=\sqrt{x}$. Điều kiện: $X\geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành $4X^2-9X+2=0$.

Giải phương trình trên, ta có $X=2$ (nhận) hoặc $X=\dfrac{1}{4}$ (nhận).

* Với $X=2$, ta có $\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$.

* Với $X=\dfrac{1}{4}$, ta có $\sqrt{x}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{16}$.

Câu 68. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Giải phương trình $3x^3-7x^2+6x+4=\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$.

Lời giải

1. Giải phương trình $3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$.

Ta có $3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow 3x^3+9x^2+12x+6=16x^2+6x+2+3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow 3(x+1)^3+3(x+1)=16x^2+6x+2+3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}=t\Rightarrow 16x^2+6x+2=3t^3$

Ta có $3(x+1)^3+3(x+1)=3t^3+3t\Leftrightarrow (x+1-t)\left[(x+1)^2-(x+1)t+t^2\right]=0$

Mà $(x+1)^2-(x+1)t+t^2>0$ (do $t\neq 0$)

Nên $x+1-t=0\Leftrightarrow x+1=t$

Khi đó $\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}=x+1\Leftrightarrow 3x^3+9x^2+9x+31=16x^2+6x+2$

$\Leftrightarrow 3x^3-7x^2+3x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-4x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$

Thử lại thấy 3 giá trị vừa tìm đều thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x\in\left\{\dfrac{2-\sqrt{7}}{3};1;\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right\}$.

Câu 69. (TS vào 10-Chuyên Lạng Sơn 23-24)

Giải phương trình $\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}=2x-4$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x\geq\dfrac{2}{3}$.

$\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}=2x-4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-2-\sqrt{3x-2}+2-2x+4=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3x-2-4}{\sqrt{3x-2}+2}-2(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2}-2(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}-2\right)=0$

Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}-2<0$ với mọi $x\geq \dfrac{2}{3}$ nên $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S=\{2\}$.

Câu 70. (TS vào 10-Chuyên Nam Định 23-24)

Giải các phương trình: $2\left(\sqrt{x-1}+1\right)=x+\sqrt{x+2}$.

Lời giải

Xét phương trình (3): $2\left(\sqrt{x-1}+1\right)=x+\sqrt{x+2}$, điều kiện xác định là $x\geq 1$.

$(3)\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}\right)-(x-2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-6}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}-(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{3}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\,(\text{TMĐK}) \\ 2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3 \quad (4). \end{array}\right.$

Ta có $(4)\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2=9 \Leftrightarrow 5x-2+4\sqrt{x^2+x-2}=9$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+x-2}=11-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 11-5x\geq 0 \\ 16\left(x^2+x-2\right)=(11-5x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11-5x\geq 0 \\ 9x^2-126x+153=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{11}{5} \\ x^2-14x+17=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{11}{5} \\ x=7\pm 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=7-4\sqrt{2}\,(\text{TMĐK})$

Vậy phương trình (3) có đúng hai nghiệm là $x=2$, $x=7-4\sqrt{2}$.

Câu 71. (TS vào 10-Chuyên Ninh Bình 23-24)

Giải phương trình $\left(\sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)=8$.

Lời giải

Đk: $-7\leq x\leq 6$

Với đk trên thì $\sqrt{x+23}+\sqrt{x+7}\neq 0$ do đó (*)

$\Leftrightarrow 16\left(\sqrt{6-x}+2\right)=8\left(\sqrt{x+23}+\sqrt{x+7}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{6-x}+2\right)=\sqrt{x+23}+\sqrt{x+7}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+23}-5+\sqrt{x+7}-3+2\left(2-\sqrt{6-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x+23}+5}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}+2\dfrac{x-2}{2+\sqrt{6-x}}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+23}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2}{2+\sqrt{6-x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0\ \left(do\ \dfrac{1}{\sqrt{x+23}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2}{2+\sqrt{6-x}}>0\right)$

$\Leftrightarrow x=2\ (TMDK)$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

Câu 72. (TS vào 10-Chuyên Phú Thọ 23-24)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-8=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1+6=\sqrt{x_2}$.

Lời giải

Phương trình (1) có $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.\left(m^2-2m-8\right)=m^2-2m+1-m^2+2m+8=9>0$ với mọi m

$\Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{9}=3$.

Suy ra pt (1) có hai nghiệm phân biệt: $m+2$ và $m-4$

Xét hai trường hợp:

+ Trường hợp 1: $x_1=m+2, x_2=m-4$.

Để $x_1+6=\sqrt{x_2}$ thì $m+2+6=\sqrt{m-4}$ (ĐK: $m\geq 4$)

$\Leftrightarrow m+8=\sqrt{m-4}$

$\Leftrightarrow m^2+16m+64=m-4$

$\Leftrightarrow m^2+15m+68=0$ (2)

Pt (2) có $\Delta_m=15^2-4.1.68=-47<0$ suy ra pt (2) vô nghiệm

+ Trường hợp 2: $x_1=m-4, x_2=m+2$. Để $x_1+6=\sqrt{x_2}$ thì

$m-4+6=\sqrt{m+2}$ (ĐK: $m\geq -2$)

$\Leftrightarrow \sqrt{m+2}\left(\sqrt{m+2}-1\right)=0$

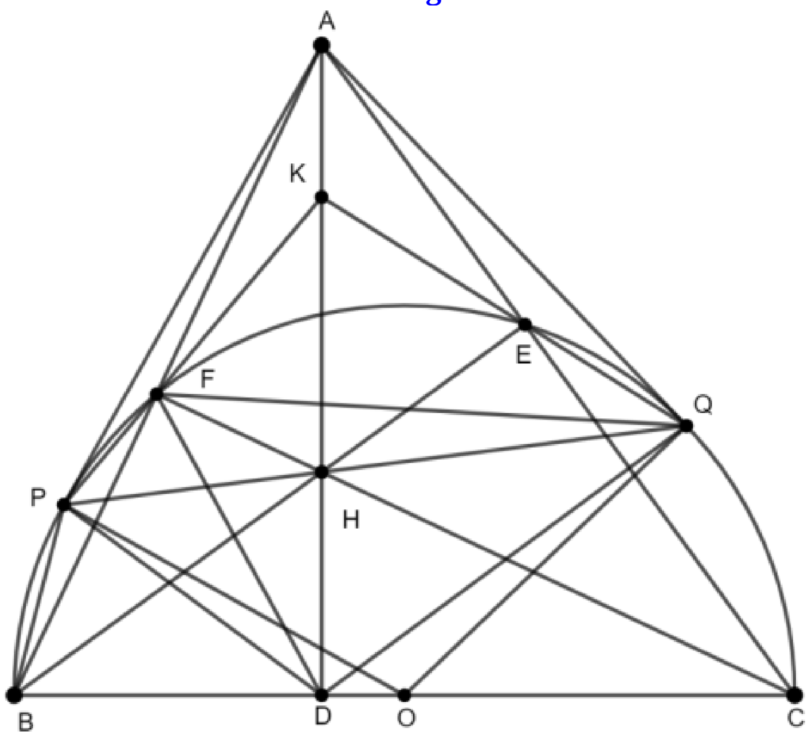
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m+2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-1 \end{array}\right.\ (t/m)$

Vậy $m\in\{-2;-1\}$ là giá trị cần tìm.

Phần I: Đề thi và đáp án.

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Quảng Trị 23-24)
Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại *H*. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ đến đường tròn tâm O, đường kính BC (P, Q là các tiếp điểm và P, F nằm cùng phía so với đường thẳng AD).
1. Chứng minh $AP^2 = AB.AF$ và 5 điểm A, P, D, O, Q nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh H, P, Q thẳng hàng.
3. Chứng minh PF, QE, AD đồng quy.

Lời giải



1. Chứng minh $AP^2 = AB.AF$ và 5 điểm A, P, D, O, Q nằm trên một đường tròn

Ta có $APF = ABP$ nên ΔAPF đồng dạng ΔABP suy ra $AP^2 = AF.AB$.

Ta có $APO = ADO = AQO = 90^o$ nên 5 điểm A, P, D, O, Q nằm trên đường tròn đường kính AO.

2. Chứng minh H, P, Q thẳng hàng.

Ta có ΔAFH đồng dạng ΔADB nên $AP^2 = AF.AB = AH.AD$. Suy ra ΔAPH đồng dạng ΔADP. Do đó $APH = ADP$ 1

3. Chứng minh PF, QE, AD đồng quy.

Gọi K là giao điểm QE và AD.

Ta có $KQF = EBF = HDF = KDF$ nên tứ giác $DFKQ$ nội tiếp.

Ta có $PFD = PFB + BFD = PCB + ACB$

Và $KQD = EQP + PQD = ACP + POD = ACP + 2PCD = ACB + PCB$

Suy ra $PFD = KQD$.

Do đó $PFD + DFK = KQD + DFK = 180^\circ$.

Suy ra PF đi qua K . Vậy PF, QE, AD đồng quy.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Quảng Ninh 23-24)

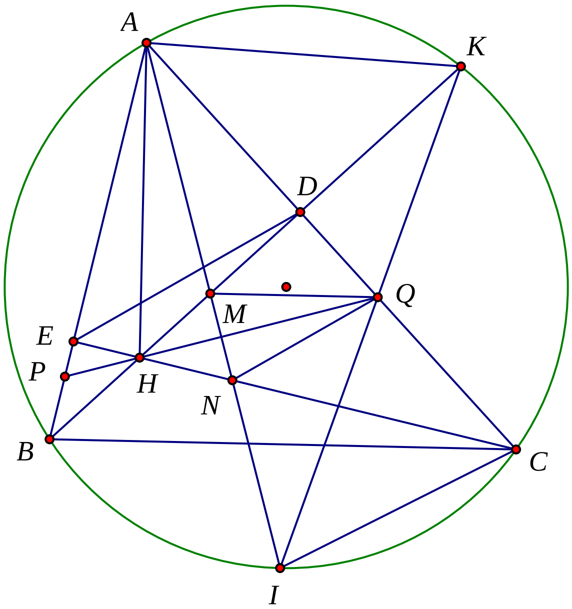
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia phân giác của góc BAC cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) theo thứ tự tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q, hai đường thẳng QH và AB cắt nhau tại P. Chứng minh:

a) Tứ giác $AMQK$ nội tiếp;

b) Tam giác APQ cân tại A;

c) $\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{MQ}$.

Lời giải



a) $BKI = BAI$ (nội tiếp (O) cùng chắn BI)

mà $BAI = IAC \Rightarrow MAQ = MKQ \Rightarrow$ tứ giác $AMQK$ nội tiếp

a) Tứ giác $AMQK$ nội tiếp $\Rightarrow MQA = MKA$, lại có $BKA = BCA$ (nội tiếp (O) cùng chắn AB)

$\Rightarrow MQA = BCA \Rightarrow MQ // BC$

H là trực tâm của ΔABC nên $AH \perp BC \Rightarrow MQ \perp AH$

ΔAHQ có $HD \perp AQ, MQ \perp AH$ nên M là trực tâm $\Rightarrow AM \perp HQ$

ΔAPQ có AM là phân giác, AM là đường cao nên ΔAPQ cân tại A.

c) Gọi N là giao điểm của AI và CE. $AIK = ABK$ (nội tiếp (O) cùng chắn AK), $ABD = ACE$ (cùng phụ với BAC) $\Rightarrow NIQ = NCQ \Rightarrow$ tứ giác $NICQ$ nội tiếp $\Rightarrow QNC = QIC$

Có $BEC = BDC = 90^0$ nên tứ giác $BEDC$ nội tiếp $\Rightarrow DEC = DBC$, $KBC = KIC$ (nội tiếp (O) cùng chắn KC) $\Rightarrow QNC = DEC \Rightarrow NQ // ED$

Tứ giác $NICQ$ nội tiếp nên $MNQ = QCI$, tứ giác $AMQK$ nội tiếp nên $QMN = AKQ$

mà $AKI = ACI$ (nội tiếp (O) cùng chắn AI) $\Rightarrow QMN = QNM \Rightarrow \Delta\ QMN$ cân $\Rightarrow QM = QN$.

MQ // BC $\Rightarrow \dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{DQ}{DC}$, NQ // ED $\Rightarrow \dfrac{NQ}{ED} = \dfrac{CQ}{CD}$,

lại có $MQ = NQ$ nên $\dfrac{MQ}{BC} + \dfrac{MQ}{DE} = \dfrac{DQ}{DC} + \dfrac{CQ}{CD} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{MQ}$.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

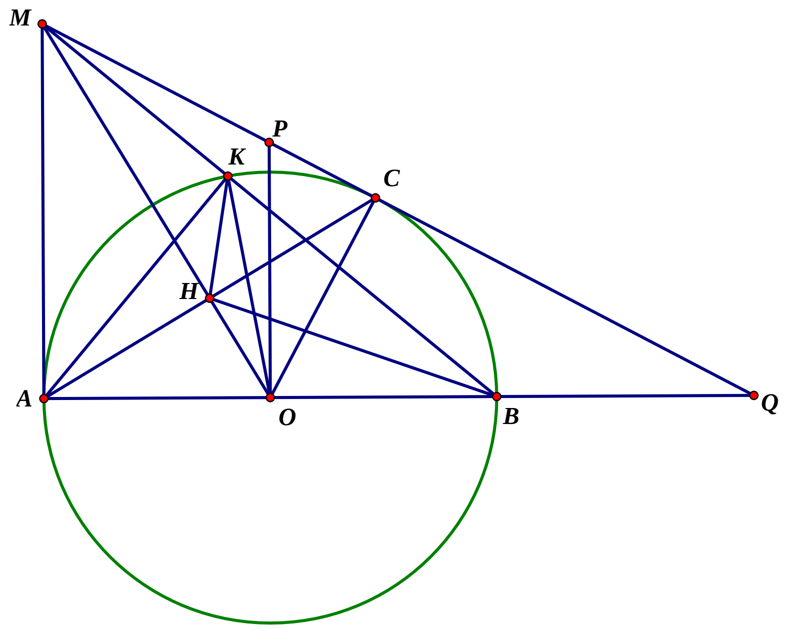
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy điểm C sao cho $AC > BC$ (C khác B). Các tiếp tuyến của (O) tại A và C cắt nhau tại M. Gọi H là giao điểm của OM và AC, K là giao điểm thứ hai của BM với (O).

a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp.

b) Chứng minh HC là tia phân giác của góc KHB.

c) Qua O, kẻ đường thẳng song song với AM cắt MC tại P, MC cắt AB tại Q. Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{MP} - \dfrac{MP}{QP} = 1$.

Lời giải



a) Ta có $AKB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $AKM = 90^0$ (1)

Lại có $MH \perp AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên $MHA = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp.

b) Ta có $MHK = MAK$ (cùng chắn cung MK)

Và $MAK = ABM$ (cùng chắn cung AK)

Suy ra $MHK = OBK$ (3)

Ta thấy $KHO + OBK = KHO + MHK = 180^0 \Rightarrow BOHK$ nội tiếp.

Nên $OHB = OKB$ (4)

Lại có ΔOBK cân tại O nên $OKB = OBK$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $OHB = OBK$ (6)

Từ (3) và (6) suy ra $MHK = OHB \Rightarrow KHC = BHC$

Hay HC là tia phân giác của KHB.

c) Vì $OP // AM$ (GT) nên $AMO = MOP$ (hai góc so le trong)

Mà $AMO = OMP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

nên $MOP = OMP$ (cùng bằng AMO)

Suy ra ΔMOP cân tại $P \Rightarrow MP = OP$

Áp dụng định lý Ta-lét trong ΔAMQ ta có $\dfrac{AM}{OP} = \dfrac{QM}{QP}$

$$\Rightarrow \frac{AM - OP}{OP} = \frac{QM - QP}{QP}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{OP} - 1 = \frac{MP}{QP} \Rightarrow \frac{AM}{OP} - \frac{MP}{QP} = 1$$

mà $MP = OP$ (chứng minh trên) nên $\dfrac{AM}{MP} - \dfrac{MP}{QP} = 1$ (đpcm).

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

Cho đoạn thẳng AB, với M là trung điểm. Trên đường trung trực Mt của đoạn thẳng AB lấy điểm I bất kỳ. Vẽ tia Ax sao cho AI là phân giác góc BAx. Đường thẳng AI cắt Ax tại N. Gọi C là điểm đối xứng của A qua N, H là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

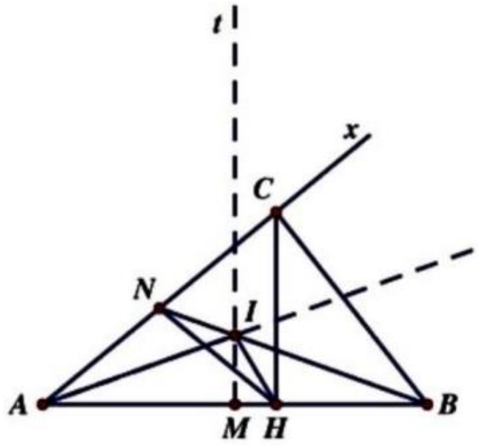
a) Chứng minh rằng tam giác NHB cân.

b) Chứng minh đẳng thức $BH^2 = HI.BN$

c) Khi điểm I di chuyển trên đường trung trực Mt đến vị trí làm cho tam giác ABC

vuông tại C. Hãy tính tỷ số $\frac{AB}{AC}$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tam giác NHB cân.

Ta có: ΔAHC vuông tại H có HN là trung tuyến nên $NA = NC = NH$ nên ΔHNA cân tại N, suy ra $NHA = NAH$, do đó $NHA = 2IAB = 2IBH = 2NBH$ (1).

Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì $NHA = HNB + HBN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HNB = HBN$ hay ΔNHB cân tại H.

b) Chứng minh đẳng thức $BH^2 = HI.BN$

Theo $a)$ ΔNHB cân tại H suy ra $HB = HN = \frac{1}{2}AC$ (3)

Xét ΔANI và ΔBHI, ta có:

$$\begin{cases} IAN = IBH \\ IA = IB \\ AN = BH\ (= HN) \end{cases} \Rightarrow \Delta ANI = \Delta BHI \Rightarrow IN = IH$$

Dẫn đến ΔNIH cân tại I $\Rightarrow INH = IHN \Rightarrow \Delta NHB \backsim \Delta NIH$ (Hai tam giác cân có góc ở đáy bằng nhau).

$$\Rightarrow \frac{BH}{BN} = \frac{HI}{HN} \Rightarrow BH.BN = HI.BN \Leftrightarrow BH^2 = HI.BN$$

c) Hãy tính tỷ số $\frac{AB}{AC}$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lý Py-ta-go ta có:

$BC^2 = BH.BA = AB^2 - AC^2 \Leftrightarrow AB^2 - BH.BA - AC^2 = 0$ (4)

Từ $(3),(4)$ ta có: $2AB^2 - AB.AC - 2AC^2 = 0$ (5)

Vì $AC > 0$, chia 2 vế cho AC^2 ta được phương trình bậc 2 với $x = \frac{AB}{AC}$ là:

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Do $\frac{1-\sqrt{17}}{4}<0\ (l)$ nên ta chọn $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$, hay $\frac{AB}{AC}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

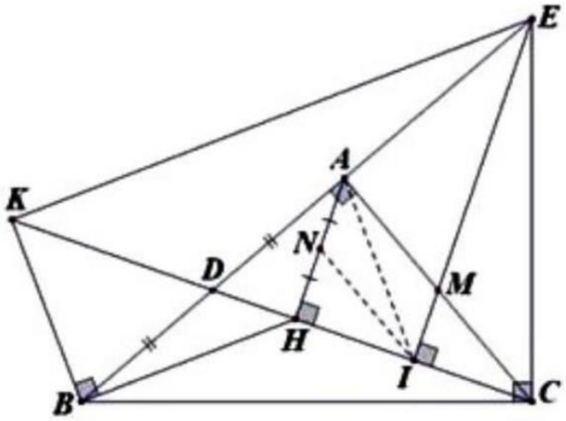
Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng DC. Đường thẳng qua C và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại E lên đường thẳng DC.

a) Chứng minh BH vuông góc với AI.

b) Đường thẳng qua B vuông góc với BH cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh tứ giác $BCEK$ nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh BH vuông góc với AI.

Gọi M là giao điểm của EI và AC, ta có M là trực tâm của tam giác ECD $\Rightarrow DM\,//\,BC$

Tam giác ABC có $DA=DB, DM\,//\,BC \Rightarrow MA=MC$

Tam giác AHC có $MA=MC, MI\,//\,AH \Rightarrow IH=IC$

Gọi N là trung điểm của AH ta có $IN\,//\,AC \Rightarrow IN\perp AD$

Tam giác ADI có $AH\perp DI, IN\perp AD$ do đó N là trực tâm $\Rightarrow DN\perp AI \Rightarrow BH\perp AI$

b) Chứng minh tứ giác $BCEK$ nội tiếp.

Từ $BH\perp AI \Rightarrow IN\,//\,AC \Rightarrow IAD=KBD$

Xét ΔKBD và ΔIAD có:

$IAD=KBD, DA=DB, ADI=BDK$

$\Rightarrow \Delta KBD=\Delta IAD$

$\Rightarrow DK=DI\ (1)$

Vì $\Delta DAC \backsim \Delta DIE\ (g-g) \Rightarrow \frac{DA}{DI}=\frac{DC}{DE} \Rightarrow DA.DE=DK.DC\ (2)$

Từ $(1),(2)$ kết hợp với $DA=DB$ suy ra $DB.DE=DK.DC$

$\Rightarrow \frac{DK}{DE}=\frac{DB}{DC} \Rightarrow \Delta DEK \backsim \Delta DCB \Rightarrow DEK=DCB$ dẫn đến $BCEK$ nội tiếp.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD và trực tâm H. Gọi E là điểm trên (O) sao cho hai dây AE và BC song song với nhau. Đường thẳng EH

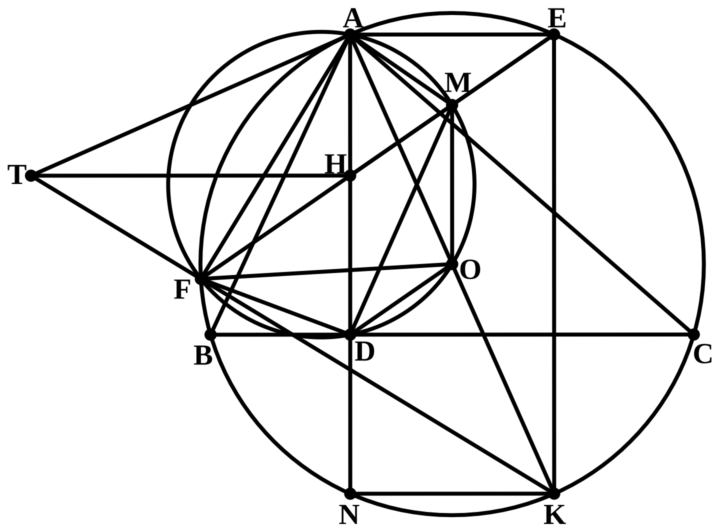
cắt (O) tại điểm thứ hai là F và cắt đường trung trực của BC tại M.

a) Chứng minh M là trung điểm của EH và $AMOF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $OFA + ODF = 180°$.

c) Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.

Lời giải



a) Chứng minh M là trung điểm của EH và $AMOF$ là tứ giác nội tiếp.

Vì hai dây AE và BC song song nên AH vuông góc với AE và trung trực của BC cũng là trung trực của AE.

Tam giác AEH vuông tại A nên đường trung trực của AE cũng chính là đường trung bình của tam giác đó. Suy ra M là trung điểm của EH.

Do đó $MA = ME = MH$, suy ra $AMH = AEM + EAM = 2AEM$, hay $AMF = 2AEF$.

Mặt khác, ta có $AOF = 2AEF$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AF)

Suy ra $AMF = AOF$, do đó tứ giác $AMOF$ nội tiếp. (1)

b) Chứng minh $OFA + ODF = 180°$.

Gọi N là giao điểm thứ hai của AH với (O).

Ta có $CBN = CAN$ (cùng chắn cung CN).

Ta lại có $CBH = CAN$ (cùng phụ với ACB). Suy ra $CBH = CBN$.

Tam giác BHN có BD vừa là đường cao vừa là phân giác nên D là trung điểm của HN.

Tứ giác $AENF$ nội tiếp (O) và AN cắt EF tại H nên ta có

HA.HN = HE.HF $\Leftrightarrow HA.2HD = 2HM.HF \Leftrightarrow HA.HD = HM.HF$

Suy ra tứ giác AMDF nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) ta có $AODF$ nội tiếp. Suy ra $OAF + ODF = 180°$.

Mặt khác, tam giác OAF cân tại O nên $OAF = OFA$.

Suy ra $OFA + ODF = 180°$.

c) **Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.**

Ta có $ATF = FAK$ (cùng phụ với AKF). (3)

Ta lại có $EAN = 90°$ nên EN là đường kính của (O).

Tứ giác $AEKN$ có hai đường chéo AK và NE bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên $AEKN$ là hình chữ nhật. Suy ra $AE = NK$, hay $\text{AE} = NK$.

Ta có $\text{FAK} = \frac{1}{2}\text{sđ}KN + \frac{1}{2}\text{sđ}NF = \frac{1}{2}\text{sđ}AE + \frac{1}{2}\text{sđ}NF = AHE.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $ATF = AHE$, do đó tứ giác $ATFH$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $AHT = AFT = 90°$.

Ta có $AH \perp TH$ và $AH \perp BC$ nên $TH \,//\, BC$.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn 23-24)

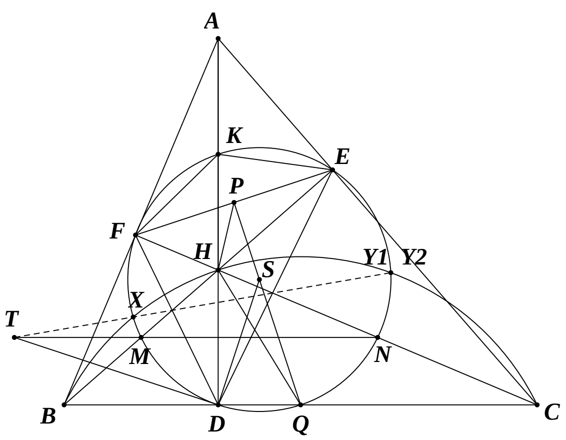
Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB < AC)$ có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi K là trung điểm của đoạn AH

1. Chứng minh tứ giác $DEKF$ nội tiếp đường tròn, gọi đường tròn đó là (S).

2. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF, BC. Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ.

3. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (S) với các đoạn thẳng BH, CH. Tiếp tuyến tại D của đường tròn (S) cắt MN tại T. Gọi X, Y là các giao điểm của đường tròn (S) với đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Chứng minh các điểm T, X, Y thẳng hàng.

Lời giải



1. Theo gt tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH \Rightarrow K$ là tâm của đường tròn này, suy ra $FKD = 2FAH$ (1) và $FAH = FEH$

Theo gt ta có tứ giác AEDB nội tiếp đường tròn đường kính AB suy ra : $DEH = BAD$ mà

$FAH = FEH \Rightarrow FED = FEH + DEH = 2FAH\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $FKD = FED$, suy ra tứ giác $KEDF$ nội tiếp đường tròn.

2. Theo gt ta có $\Delta BFC, \Delta BEC$ vuông tại F, E suy ra: $QE = QF \Rightarrow QP \perp EF$

Ta có: $\Delta HBC \sim \Delta HFE \Rightarrow \Delta HBQ \sim \Delta HFP\,(c.g.c) \Rightarrow HQP = HPF$

Suy ra : $DHQ = 90^0 - DQH = 90^0 - HPF = HPQ$

Suy ra: AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ

3. Chứng minh được: M, N lần lượt là trung điểm của HB, HC suy ra MN là đường trung bình cảu tam giác $HBC \Rightarrow MN//BC$

Lại do, $HD \perp BC \Rightarrow H, D$ đối xứng nhau qua MN

Do đó: $THB = TDM = DNM = TNF$ (tính chất đối xứng và tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Mặt khác, do $MN//BC \Rightarrow MNF = BCH$

Suy ra, $THB = BCH \Rightarrow TH$ là tiếp tuyến tại H của đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC

Gọi $Y_1; Y_2$ lần lượt là giao điểm của TX với (S) và (HBC)

Khi đó, chứng minh được: $TD^2 = TX.TY_1; TH^2 = TX.TY_2$ mà $TD = TH$

Do đó: $TX.TY_1 = TX.TY_2 \Rightarrow TY_1 = TY_2 \Rightarrow Y_1 \equiv Y_2$ mà hai đường tròn (S) và (HBC) cắt nhau tại $Y \Rightarrow Y_1 \equiv Y_2 \equiv Y \Rightarrow T, X, Y$ thẳng hàng (đpcm)

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

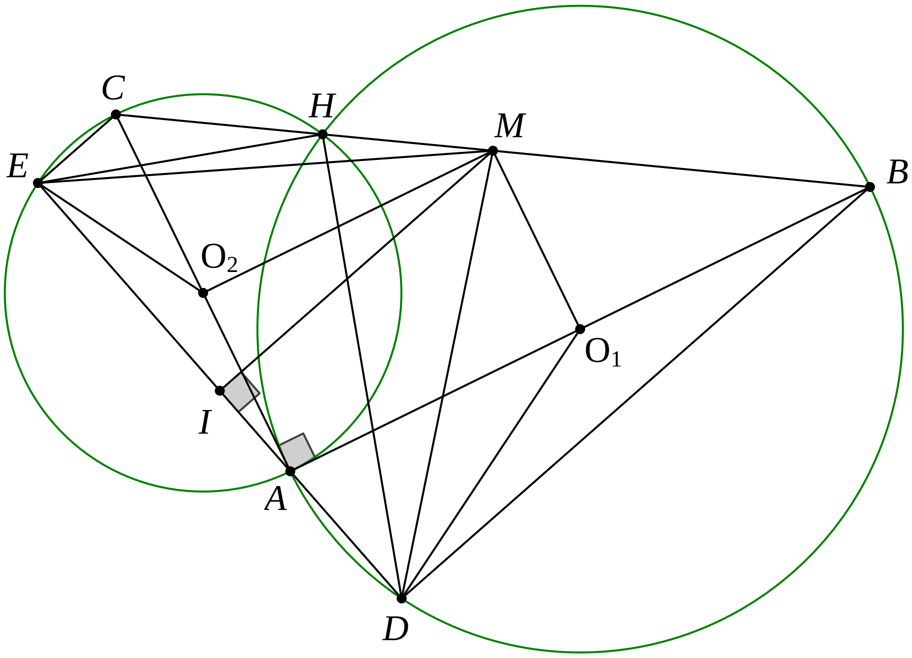
Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = c; AC = b$. Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính AB và đường tròn tâm O_2 đường kính AC. Gọi H là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm $D; E$ không trùng với A sao cho A nằm giữa D và E.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.

b) Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tứ giác $BDEC$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo b, c.

c) Kẻ đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn DE và vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2$.

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của DE, vẽ đường trung trực của DE cắt cạnh BC tại M

Vì D thuộc đường tròn đường kính AB nên ΔABD vuông tại D $\Rightarrow BD \perp DE$

Vì E thuộc đường tròn đường kính AC nên ΔACD vuông tại E $\Rightarrow CE \perp DE$

$\Rightarrow BD // CE$ $\Rightarrow$ tứ giác BCED là hình thang.

Vì IM là đường trung trực của DE nên $IM \perp DE \Rightarrow IM // BD // CE$, lại có I là trung điểm của DE nên M là trung điểm của BC

Mà BC cố định nên M cố định.

Vậy đường trung trực của DE luôn đi qua điểm M cố định là trung điểm của đoạn BC.

b) Ta có $2S_{BCED} = 2S_{ABD} + 2S_{ACE} + 2S_{ABC} = AD.BD + AE.CE + bc$

Áp dụng bđt AM – GM ta có

$$2S_{BCED} \le \frac{1}{2}\left(AD^2 + BD^2\right) + \frac{1}{2}\left(AE^2 + CE^2\right) + bc = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} + bc = \frac{1}{2}(b+c)^2$$

$$\Rightarrow S_{BCED} \le \frac{1}{4}(b+c)^2$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow AD = BD\,; AE = CE \Leftrightarrow$ d tạo với AB một góc $45°$.

c) Áp dụng định lí Pi – ta – go ta có: $KB^2 = IB^2 - IK^2 ; BD^2 = IB^2 - ID^2 ; KH^2 = IH^2 - IK^2$ (1).

Xét $(O_1) : EDH = ABC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AH)

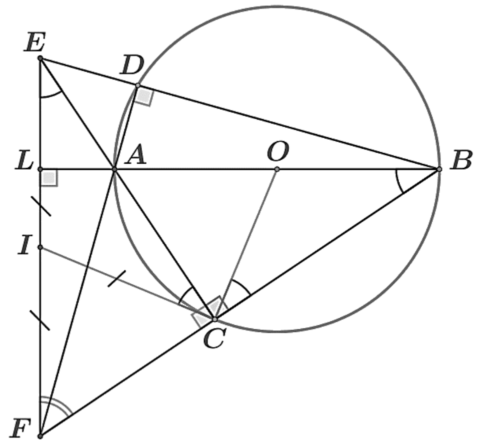
Xét $(O_2) : DEH = ACB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AH)

$\Rightarrow DHE = BAC = 90° \Rightarrow \Delta DHE$ vuông tại H

$$\Rightarrow HI = ID\left(=\frac{DE}{2}\right)\ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KB^2 = BD^2 + KH^2$ (đpcm)

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh 23-24)
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy hai điểm C, D nằm khác phía đối với AB và CD không đi qua O. Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AD và BC, I là trung điểm đoạn thẳng EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O).



▪ Xét ΔBEF có: $ADB = ACB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BA$ là đường cao thứ ba. Suy ra: $BLF = 90°\ (L \in EF)$.

▪ Ta có: $CEF = LBF\ \ (1)$ (cùng phụ với CFE).

▪ Xét $\Delta EFC\ \left(C = 90°\right)$ có CI là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow CI = IE \Rightarrow \Delta EIC$ cân tại I. Suy ra: $CEF = ICE\ \ (2)$

▪ Mặt khác: $OCB = LBF\ \ (3)$ (do ΔOBC cân tại O)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow OCB = ICE\ \ (*)$.

▪ Ta có: $OCI = ICE + OCA \overset{(*)}{=} OCB + OCA = ACB = 90°$.

▪ $\left.\begin{matrix} IC \perp OC \\ C \in (O) \end{matrix}\right\} \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O).

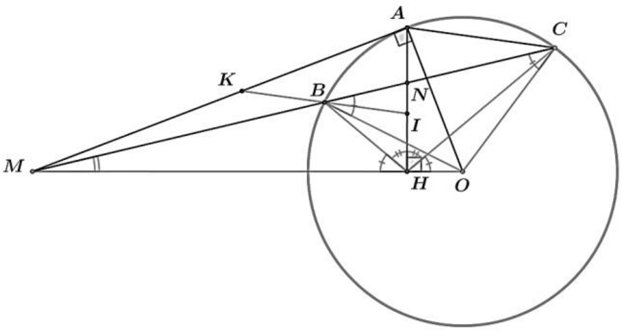
Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh 23-24)

Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O), vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC không đi qua O $(MB < MC)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên MO.

1. (1,0 điểm) Chứng minh: Tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

2. (1,0 điểm) Vẽ đường thẳng qua B song song với AC cắt các đường thẳng MA, AH lần lượt tại K, I. Chứng minh $KB = BI$.

Lời giải



1. Chứng minh: Tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

▪ Ta có: $\Delta MBA \backsim \Delta MAC$ (g – g) $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$.

▪ $\Delta MAO\left(A = 90°\right), AH \perp MO \Rightarrow MA^2 = MH.MO$.

Suy ra: $MB.MC = MH.MO \Rightarrow \dfrac{MB}{MO} = \dfrac{MH}{MC}$.

▪ Xét ΔBMH và ΔOMC có M chung và $\dfrac{MB}{MO} = \dfrac{MH}{MC} \Rightarrow \Delta BMH \backsim \Delta OMC$ $(\text{c}-\text{g}-\text{c})$.

Suy ra: $BHM = BCO$ mà $BHM + BHO = 180° \Rightarrow BCO + BHO = 180°$.

Vậy tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

2. Vẽ đường thẳng qua B song song với AC cắt các đường thẳng MA, AH lần lượt tại K, I. Chứng minh $KB = BI$.

Ta có:

▪ $BK // AC \Rightarrow \dfrac{BK}{AC} = \dfrac{MB}{MC}$ (1)

▪ $BI // AC \Rightarrow \dfrac{BI}{AC} = \dfrac{BN}{NC}$ (2)

▪ Do tứ giác $OHBC$ nội tiếp đường tròn nên: $OHC = OBC = OCB = BHM$.

Khi đó $\left.\begin{array}{l} AHC + OHC = 90° \\ AHB + BHM = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow AHC = AHB \Rightarrow AH$ là phân giác trong của BHC

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{BN}{NC}$ $(*)$

Mà $HM \perp AH \Rightarrow HM$ là phân giác ngoài của $BHC \Rightarrow \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{MB}{MC}$ $(**)$.

Từ $(1),(2),(*),(**)\Rightarrow \frac{BK}{AC}=\frac{BI}{AC}\Rightarrow BK=BI$.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của đường thẳng BC và EF; I là giao điểm của SA và đường tròn (O) (với I khác A).

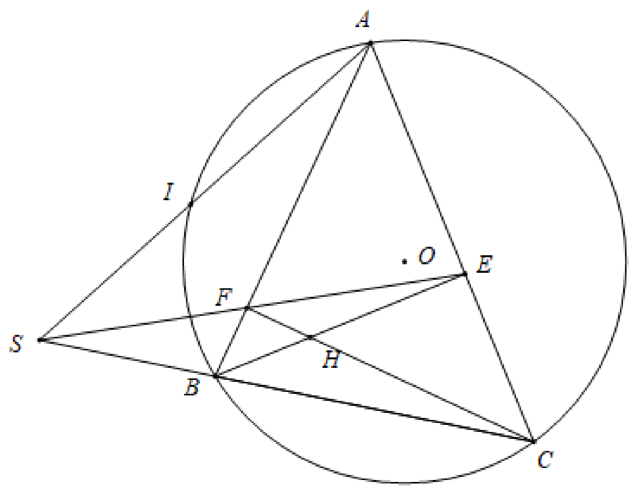
a) Chứng minh rằng tứ giác $AFHE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $SF.SE=SI.SA$ và $HI\perp SA$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, kẻ đường kính AD của (O). Chứng minh ba điểm H,M,D thẳng hàng và H là trực tâm tam giác ASM.

d) Giả sử T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác IST và tam giác ECT tiếp xúc với nhau.

Lời giải

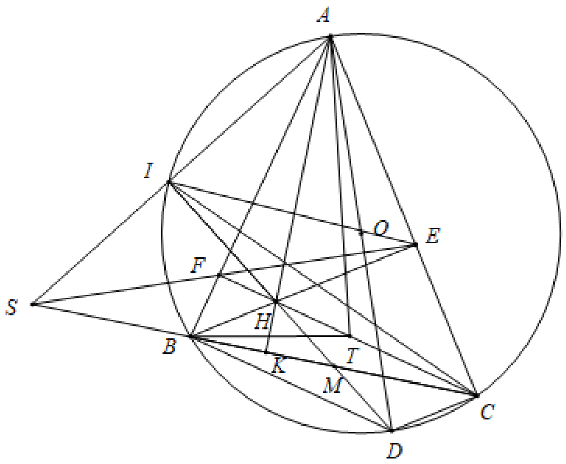


a) Chứng minh rằng tứ giác $AFHE$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có: $BEA=CFA=90^0$ (giả thiết)

$\Rightarrow HEA=HFA=90^0$ hay $HEA+HFA=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $AFHE$ nội tiếp.



b) Chứng minh $SF.SE = SI.SA$ và $HI \perp SA$.

* Chứng minh $SF.SE = SI.SA$

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp (vì có hai đỉnh E và F cùng nhìn BC dưới một góc vuông)

$\Rightarrow SFB = BCE$ (cùng bù với BFE) hay $\Rightarrow SFB = SCE$

Có $FSB = CSE$

$\Rightarrow \Delta SFB \backsim \Delta SCE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{SB}{SE} \Rightarrow SF.SE = SB.SC$ (1)

Ta lại có: $IAB = ICB$ (cùng chắn cung IB của (O)) hay $SAB = ICS$

$\Rightarrow \Delta SBA \backsim \Delta SIC$ ($SAB = ICS$ và S chung)

$\Rightarrow \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{SB}{SI} \Rightarrow SI.SA = SB.SC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SF.SE = SI.SA$

*Chứng minh $HI \perp SA$.

Do $SF.SE = SI.SA \Rightarrow \dfrac{SF}{SI} = \dfrac{SA}{SE} \Rightarrow \Delta SIE \backsim \Delta SFA$

$\Rightarrow IAF = IEF$ mà IAF, IEF cùng nhìn cạnh IF nên tứ giác $AIFE$ nội tiếp đường tròn.

Mặt khác: tứ giác $AFHE$ nội tiếp (câu a).

Hay các điểm I, A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow$Tứ giác $AIHE$ nội tiếp đường tròn mà $HEA = 90^o \Rightarrow HIA = 90^o \Rightarrow HI \perp SA$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, kẻ đường kính AD của (O). Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng và H là trực tâm tam giác ASM.

* Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng

M là trung điểm của BC và AD là đường kính nên ta có:

$BH // CD$ (cùng $\perp AC$) và $CH // BD$ (cùng $\perp AB$)

$\Rightarrow$ tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow$ BC và DH cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường hay H, M, D thẳng hàng (3)

* Chứng minh H là trực tâm tam giác ASM.

Ta có: $IH \perp IA$ (câu b) và $DI \perp IA$ (góc $AID = 90^\circ$) $\Rightarrow DI \equiv IH$ hay H, I, D thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow M, D, H, I$ thẳng hàng

$\Rightarrow MH \perp SA$ (5)

Mặt khác: $AH \perp BC$ (AH là đường cao thứ 3 của tam giác ABC) (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow H$ là trực tâm ΔASM.

d) Giả sử T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác IST và tam giác ECT tiếp xúc với nhau.

Ta chứng minh được

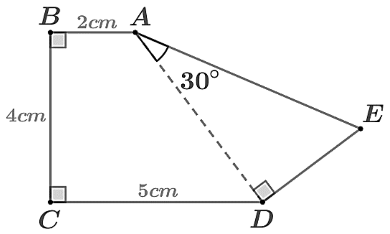
$AT^2 = AI.AS \Rightarrow AT$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔIST (7)

$AT^2 = AE.AC \Rightarrow AT$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔECT (8)

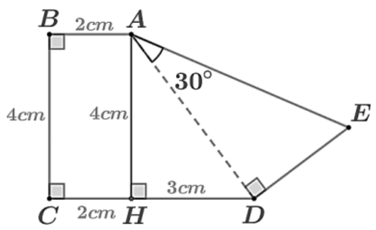
Từ (7) và (8) $\Rightarrow AT$ là tiếp tuyến chung hay hai đường tròn hay hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác ITS và tam giác ECT tiếp xúc với nhau.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh 23-24)

Cho hình phẳng có số liệu như hình vẽ. Tính độ dài đoạn thẳng AE.



Lời giải



Kẻ $AH \perp CD$.

Suy ra: $ABCH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = 4\,\text{cm}; HD = CD - CH = 3\,\text{cm}$.

Xét ΔAHD $\left(H = 90^\circ\right)$ có: $AD^2 = AH^2 + HD^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AD = 5\,\text{cm}$.

Xét ΔADE $\left(ADE = 90^\circ\right)$ có: $\cos 30^\circ = \dfrac{AD}{AE} \Rightarrow AE = \dfrac{AD}{\cos 30^\circ} = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $AE = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

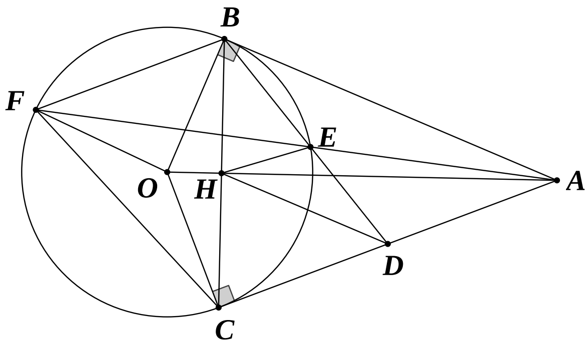
Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) $(B, C$ là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, D là trung điểm của AC, tia BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

1. Chứng minh $CDEH$ là một tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh rằng $DA^2 = DE.DB$

3. Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Lời giải



1. Chứng minh $CDEH$ là một tứ giác nội tiếp.

Ta có

$AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$OB = OC$ (bán kính (O))

Do đó AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

ΔABC có D là trung điểm AC, H là trung điểm BC nên HD là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $HD // AB$.

Khi đó $HDE = ABE = BCE = HCE = \dfrac{1}{2}$ sđ BE.

Do đó, tứ giác $CDEH$ nội tiếp.

2. Chứng minh rằng $DA^2 = DE.DB$

Xét ΔDCE và ΔDBC ta có

EDC chung

$DCE = DBC = \dfrac{1}{2}$ sđ BE.

Suy ra $\Delta DCE \sim \Delta DBC\,(\text{g} - \text{g})$

Do đó $\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DB}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DC}}$. Suy ra $DC^2=DE\cdot DB$

Mặt khác, do $DA=DC$ nên $DA^2=DE\cdot DB$

3. Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

+ Từ $DA^2=DE.DB$ nên ta có $\frac{DA}{DE}=\frac{DB}{DA}$

Xét hai tam giác DAE và tam giác DBA có

+) EDA chung;

+) $\frac{DA}{DE}=\frac{DB}{DA}$

Do đó $\Delta DAE\sim\Delta DBA(c.g.c)$

Suy ra $EAD=DBA=BFA=\frac{1}{2}$ sđ BE, do đó $BF//AC$.

Mà $OC\perp AC$ nên $OC\perp BF$.

Mặt khác, $OF=OB$ (bán kính của (O)) nên OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Câu 14. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)

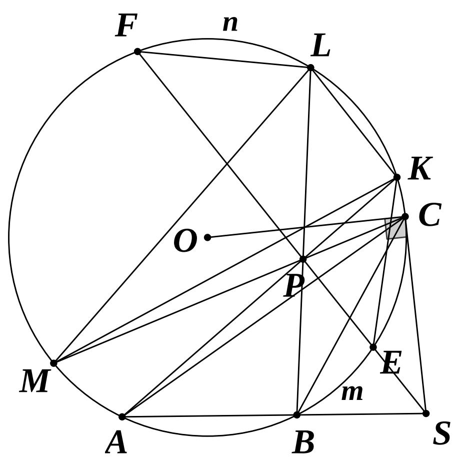
Cho tam giác tù ABC có $ABC>90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S. Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC=SP$. Đường thẳng SP cắt (O) tại hai điểm $E,F(E$ ở giữa S và $F)$. Các đường thẳng AP,BP cắt lại (O) lần lượt tại K,L. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACS đồng dạng với tam giác CBS;

b) $APS=PBS$;

c) Tứ giác $EKLF$ là hình thang cân.

Lời giải



a) Ta có $CAS=\frac{1}{2}$sđCEB (a).

Mặt khác $BCS=\frac{1}{2}$sđCEB (b).

Từ (a) và (b) suy ra $BCS = CAS$ (1).

Từ (1) và $ASC = BSC$ suy ra hai tam giác ACS và CBS đồng dạng.

b) Từ a) suy ra $\dfrac{CS}{BS} = \dfrac{AS}{CS} \Rightarrow SC^2 = SB.SA$ (c).

Vì $SC = SP$ nên $(c) \Rightarrow SP^2 = SB.SA \Rightarrow \dfrac{SP}{SB} = \dfrac{SA}{SP}$ (d).

Từ (d) và $PSA = BSP$ suy ra $\Delta PSA \sim \Delta BSP$.

Do đó $APS = PBS$.

c) Ta có $BPS = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\,BmE + \text{sđ}\,LnF\right)$ và $PAS = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\,BmE + \text{sđ}\,ECK\right)$ (e).

Vì $\Delta PSA \sim \Delta BSP$ nên $BPS = PAS$. Kết hợp với (e) suy ra $\text{sđ}\,LnF = \text{sđ}\,ECK$ (f).
Từ (f) suy ra

$$LFE + FLK = \frac{1}{2}\text{sđ}\,LKE + \frac{1}{2}\text{sđ}\,FAK = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\,LnF + \text{sđ}\,LtK\right) + \frac{1}{2}\text{sđ}\,FAK = 180^0 \Rightarrow LK \,//\, EF.$$

Do đó $EKLF$ là hình thang. Hơn nữa

$\text{sđ}\,LnF = \text{sđ}\,ECK \Rightarrow FL = KE \Rightarrow EKLF$ là hình thang cân.

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Long 23-24)

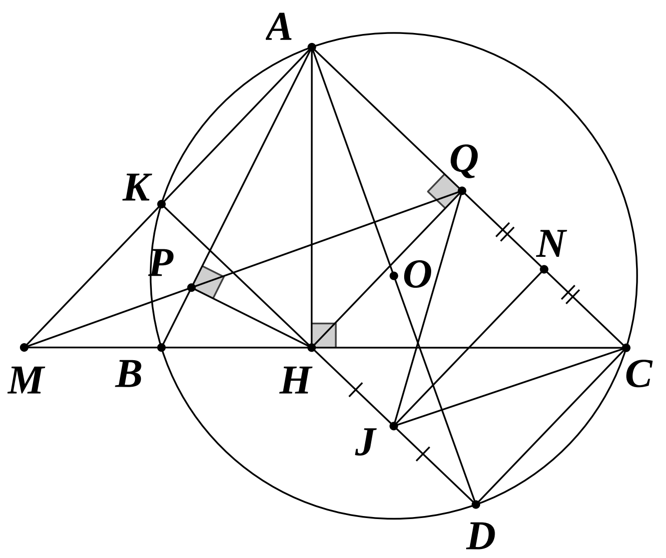
Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC). Gọi $P;Q$ lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh $PQH = BAH$.

b) Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh $\Delta MQH \backsim \Delta MHP$ và $MH^2 = MB.MC$.

c) Đường thẳng MA và cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại K (K khác A). KH cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại D (D khác K). Gọi J là trung điểm của HD. Chứng minh $JQ = JC$.

Lời giải



a) Tứ giác $APHQ$ có $APH + AQH = 180^0$

Suy ra tứ giác $APHQ$ nội tiếp

$\Rightarrow PQH = PAH$

Hay $PQH = BAH$.

b) có $PQH = BAH$ (cmt)

mà $BAH = MHP$ (cùng phụ PBH)

nên $MQH = MHP$

và PMH góc chung

$\Rightarrow \Delta MQH \backsim \Delta MHP(g.g) \Rightarrow \dfrac{MQ}{MH} = \dfrac{MH}{MP} \Rightarrow MH^2 = MP.MQ$ (1)

Chứng minh được tứ giác $BPQC$ nội tiếp $\Rightarrow MBP = MQC$

và BMP góc chung

$\Rightarrow \Delta MBP \backsim \Delta MQC(g.g) \Rightarrow \dfrac{MB}{MQ} = \dfrac{MP}{MC} \Rightarrow MP.MQ = MB.MC$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow MH^2 = MB.MC$

c) Vì $AKBC$ là tứ giác nội tiếp

nên $MKB = MCA$ (cùng bù với AKB), mà AMC là góc chung

$\Rightarrow \Delta MKB \backsim \Delta MCA(g.g) \Rightarrow \dfrac{MK}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow MK.MA = MB.MC$

Mà $MH^2 = MB.MC \Rightarrow MH^2 = MK.MA$

Do ΔAHM vuông tại $H \Rightarrow HK$ là đường cao của ΔAHM (vì $\Delta MHA \backsim \Delta MKH$)

$\Rightarrow AK \perp KH \Rightarrow AK \perp KD \Rightarrow AD$ là đường kính của (O)

Suy $ACD = 90^0$ nên $DC \perp AC$

Mà $HQ \perp AC \Rightarrow DC // HQ$ nên $HQCD$ là hình thang

Gọi N là trung điểm QC (3) $\Rightarrow JN$ của là đường trung bình của hình thang $HQCD$

$\Rightarrow JN // HQ \Rightarrow JN \perp QC$ (4)

Từ (3) và $(4) \Rightarrow JN$ là đường trung trực của $QC \Rightarrow JQ = JC$.

Câu 16. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)

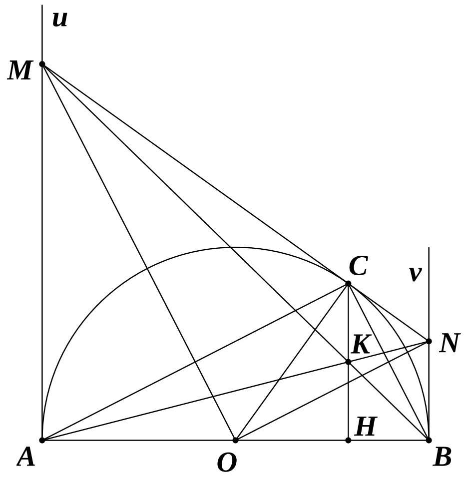
Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Từ A và B lần lượt kẻ hai tiếp tuyến Au, Bv với nửa đường tròn. Qua một điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Au và Bv theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn và $CBO = CNO$.

b) Kẻ CH vuông góc với AB tại H, gọi K là giao điểm của CH với AN. Chứng minh ba điểm M, K, B thẳng hàng.

c) Gọi S là diện tích của tam giác ABC, S_1 là diện tích của tam giác MON. Hãy tính tỉ số $\frac{S_1}{S}$ khi $AM = 1,5R$.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn và $CBO = CNO$.

Tứ giác $AMCO$ có :

$MAO = 90^{0}$; $MCO = 90^{0}$

$MAO + MCO = 180^{0}$

Vậy tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn.

Tương tự ta có tứ giác $COBN$ nội tiếp

$\Rightarrow CBO = CNO$

b) Chứng minh ba điểm M, K, B thẳng hàng.

Ta có: $CK // AM$ nên $\frac{KN}{KA} = \frac{CN}{CM}$

Mà $MC = MA$, $NC = NB$ nên $\frac{KN}{KA} = \frac{NB}{MA}$ (1)

Ta lại có $MAK = ANB$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) ta được $\Delta AKM \backsim \Delta NKB$

$\Rightarrow AKM = NKB$

Mà A, K, N thẳng hàng nên M, K, B thẳng hàng (đpcm).

c) Gọi S là diện tích của tam giác ABC, S_1 là diện tích của tam giác MON. Hãy tính tỉ số $\frac{S_1}{S}$ khi $AM = 1,5R$.

Ta có $\Delta MON \backsim \Delta ACB$ nên tam giác MON vuông tại O, cho ta: $OC^2 = CM.CN \Rightarrow CN = \frac{2}{3}R$;

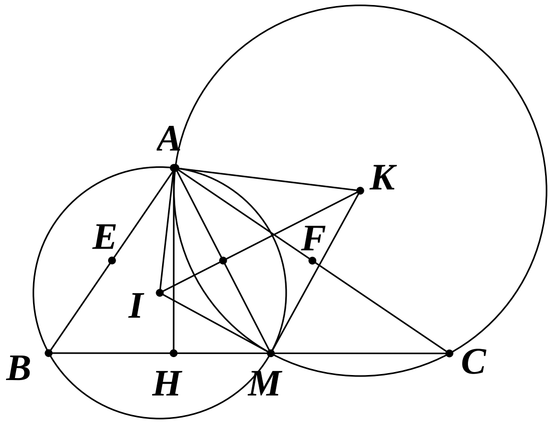
$MN = MC + CN = \frac{13}{6}R$

$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

Câu 17. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh BC, I và K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM và tam giác ACM. Xác định vị trí của M để diện tích tam giác AIK nhỏ nhất.

Lời giải



Ta có $ABC = \frac{1}{2}AIM = AIK$; $ACB = \frac{1}{2}AKM = AKI$.

$AIK + AKI = ABC + ACB = 90^0$ nên tam giác AIK vuông tại A

$S_{AIK} = \frac{1}{2}AI.AK \geq \frac{1}{2}AE.AF = \frac{1}{8}AB.AC$, với E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC

Đẳng thức xảy ra khi $I \equiv E$ và $K \equiv F$, khi đó $M \equiv H$.

Câu 18. (TS vào 10-Chuyên Bình Thuận 23-24)

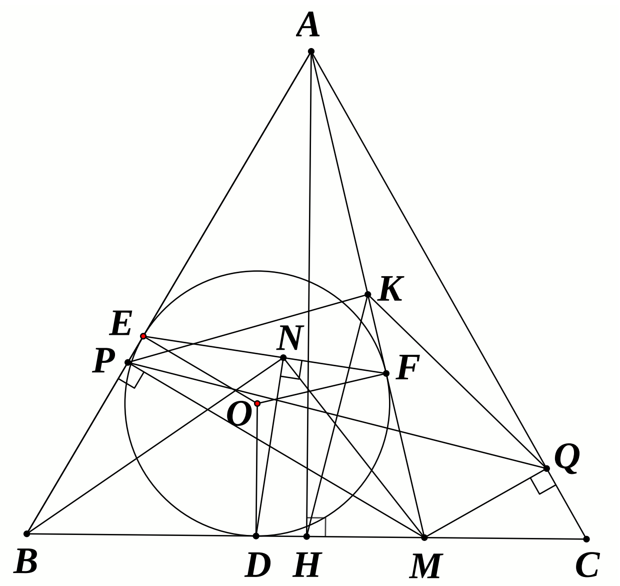
Cho tam giác ABC đều có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tuỳ ý (M không trùng B, H, C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

a) Chứng minh rằng $MP + MQ = AH$.

b) Gọi K là trung điểm của AM . Chứng minh $KH \perp PQ$.

c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM . Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM, AB, AM . Vẽ DN vuông góc với EF tại N . Chứng minh $BNE = MNF$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $MP + MQ = AH$.

* Do ΔABC đều nên $AB = AC = BC$.

* Ta có $S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}MP.AB + \frac{1}{2}MQ.AC = \frac{1}{2}AH.BC \Leftrightarrow MP + MQ = AH$

Cách 2:

ΔMQC vuông tại Q $\Rightarrow MQ = MC.\sin 60°$

ΔMPB vuông tại P $\Rightarrow MP = MB.\sin 60°$

Suy ra: MP + MQ $= MQ + MP = MC.\sin 60° + MB.\sin 60° = \left(MB + MC\right)\sin 60° = BC.\sin 60°$ (1)

ΔAHC vuông tại H $\Rightarrow AH = AC.\sin 60° = BC.\sin 60° (do\ AC = BC)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MP + MQ = AH$.

b) Gọi K là trung điểm của AM . Chứng minh $KH \perp PQ$.

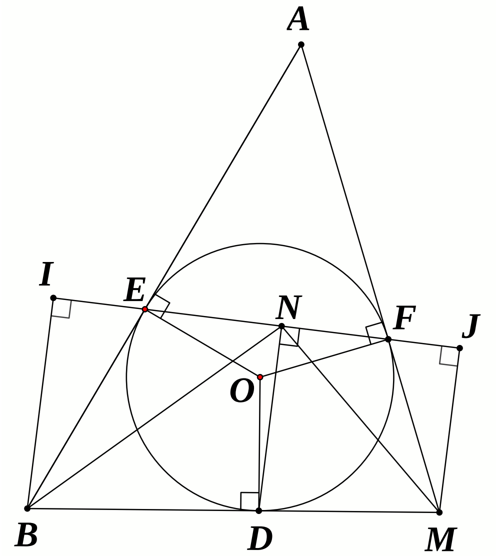
Ta có: $AHM = AQM = APM = 90°$ suy ra năm điểm $A,\ Q,\ M,\ H,\ P$ cùng thuộc một đường tròn mà $HAQ = HAP$ (ΔABC đều có AH là đường cao đồng thời là phân giác)

suy ra $HP = HQ \Rightarrow HP = HQ$ (3).

\+ Ta có: ΔMQC và ΔMPB vuông lần lượt tại Q và P có QK và PK lần lượt là đường trung tuyến ($KA = KM$ (gt)). $KP = KQ = \frac{AM}{2}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: HK là đường trung trực của PQ suy ra: $KH \perp PQ$.

c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM . Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM, AB, AM . Vẽ DN vuông góc với EF tại N . Chứng minh $BNE = MNF$.



+ Kẻ BI vuông góc với EF tại I, Kẻ MJ vuông góc với EF tại J,

Ta có : $AEF = AFE$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) suy ra: $IEB = JFC$ mà $BIE = CJF = 90°$

Ta có: ΔIBE đồng dạng với ΔJMF suy ra: $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{BE}{MF} = \dfrac{BD}{MD} = \dfrac{IN}{JN}$ (Ta lét)

Suy ra: $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{BE}{MF} = \dfrac{BD}{MD} = \dfrac{IN}{JN} = \dfrac{IN - IE}{JN - IF} = \dfrac{EN}{FN}$

suy ra: $\dfrac{BE}{MF} = \dfrac{EN}{FN}$ (do t/c tiếp tuyến nên BD=BE và DM =MF) mà $BEN = MFN$ (cùng kề bù với 2 góc bằng nhau $AEF = AFE$) suy ra: ΔBEN đồng dạng với ΔMFN suy ra: $ENB = MNF$.

Cách 2: Theo tính chất tiếp tuyến ta có ΔAEF cân tại A nên suy ra $AEF = AFE$, do đó $BEI = MFJ$

Từ đây ta được hai tam giác $\Delta BIE, \Delta MJF$ đồng dạng với nhau (g.g), suy ra $\dfrac{BI}{MJ} = \dfrac{BE}{MF} = \dfrac{BD}{MD} = \dfrac{IN}{JN}$

$\Rightarrow \dfrac{BI}{IN} = \dfrac{MJ}{JN} \Rightarrow$ hai tam giác $\Delta BIN, \Delta MJN$ đồng dạng với nhau. Do đó ta được: $BNI = MNJ$ hay $BNE = MNF$ (đpcm)

Câu 19. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định. Vẽ dây cung CD vuông góc với AB tại H sao cho $AH < AO$. Gọi K là điểm bất kỳ nằm trên đoạn CH, M là giao điểm của tia AK với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

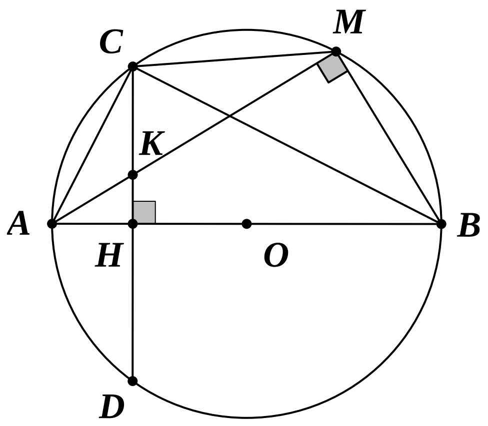
a) Tứ giác $BMKH$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) $AC^2 = AM.AK$.

c) $AK.AM - AH.HB = AH^2$.

d) Khi K di chuyển trên đoạn CH thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMK luôn thuộc m đường thẳng cố định.

Lời giải



a) Ta có $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$BHK = 90^0$ (gt). Suy ra $AMB + BHK = 180^0$ tứ giác $HKMB$ là tứ giác nội tiếp

b) AB ⊥ CD ⇒ $AC = AD \Rightarrow ACK = AMC$

⇒ ΔACK ∽ ΔAMC (vì A $chung$; $ACK = AMC$)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AK}{AC} \Rightarrow AC^2 = AK.AM$ (1)

c) $ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra tam giác ABC vuông tại C $\Rightarrow CH^2 = HA.HB$ (2)

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác HCA vuông tại H, ta có: $CH^2 + AH^2 = AC^2$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $AH^2 + AH.HB = AK.AM$ (đpcm).

d) $ACK = CMK = \dfrac{1}{2}$sđCK, mà $CMK = \dfrac{1}{2}$sđCK $\Rightarrow ACK = \dfrac{1}{2}$sđ$CK$.

nên CA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMCD (Định lí đảo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). Mà $CA \perp CB \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMCK nằm trên CB.

Ta có A, B, H cố định nên dây CD cố định. Suy ra CB cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMK luôn thuộc đường thẳng CB cố định.

Câu 20. (TS vào 10-Chuyên Tin Hoà Bình 23-24)

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, điểm H cố định thuộc tia đối của tia BC. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với BC. Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MP, MK với đường tròn (O). Dây PK cắt OM tại N và cắt OH tại Q.

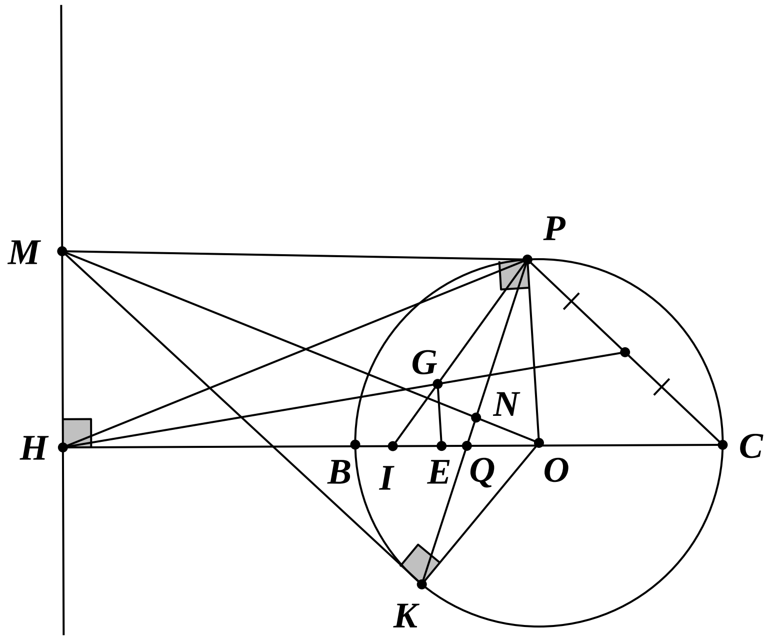
1. Chứng minh năm điểm M, P, O, K, H cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh rằng $OH.OQ = R^2$.

3. Cho $POK = 120^0$. Tính diện tích tứ giác $MPOK$ theo R.

4. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì trọng tâm G của tam giác HPC chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải



1. Ta có $MPO = MHO = MKO = 90°$

$\Rightarrow P,\ K,\ H$ thuộc đường tròn đường kính MO.

$\Rightarrow M,\ P,\ O,\ K,\ H$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

2. Xét ΔMPO vuông tại P, có PN ⊥ MO

$\Rightarrow ON \cdot OM = OP^2$ (1) (Hệ thức lượng trong tam giác vuông).

ΔONQ�ΔOHM (HOM chung; $ONQ = OHM = 90°$).

$$\Rightarrow \frac{ON}{OH} = \frac{OQ}{OM} \Leftrightarrow OM \cdot ON = OH \cdot OQ \ (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow OH \cdot OQ = OM \cdot ON = OP^2 = R^2$.

3. Vì $POK = 120^o$ nên $PMK = 60°$ và MO là phân giác của PMK

$\Rightarrow PMO = KMO = 30°$

ΔOPM vuông tại P, có: $OP = OM$. Sin PMO

$$\Rightarrow OM = \frac{R}{\sin 30°} = 2R\ (cm).$$

ΔPNO vuông tại N, có: $NP = OP.\sin PON$

mà $PON = 90° - OMP = 90° - 30° = 60°$ (ΔMPO vuông tại P).

$$\Rightarrow NP = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}\ (cm) \Rightarrow KP = R\sqrt{3}\ (cm)$$

Ta có $OM \perp KP \Rightarrow S_{MPOK} = \frac{1}{2}OM.KP = R^2\sqrt{3}\ (cm^2)$.

4. Lấy I là trung điểm của HC, $G \in PI$ sao cho $PG = \frac{2}{3}PI$.

Từ G kẻ đường thẳng song song với OP cắt HC tại E.

HC cố định $\Rightarrow I$ cố định

$\circ IPO$ có $GE \parallel PO \Rightarrow \dfrac{GE}{PO} = \dfrac{IE}{IO} = \dfrac{IG}{IP} = \dfrac{1}{3}$ (Định lí talet) (do G là trọng tâm của ΔPHC).

$\Rightarrow IE = \dfrac{IO}{3}$ không đổi. Mà I, O cố định $\Rightarrow$ E cố định. (1)

$GE = \dfrac{PO}{3} = \dfrac{R}{3}$ không đổi. (2)

(1), (2) $\Rightarrow G \in \left(E;\ \dfrac{R}{3}\right)$ cố định khi M chuyển động trên d.

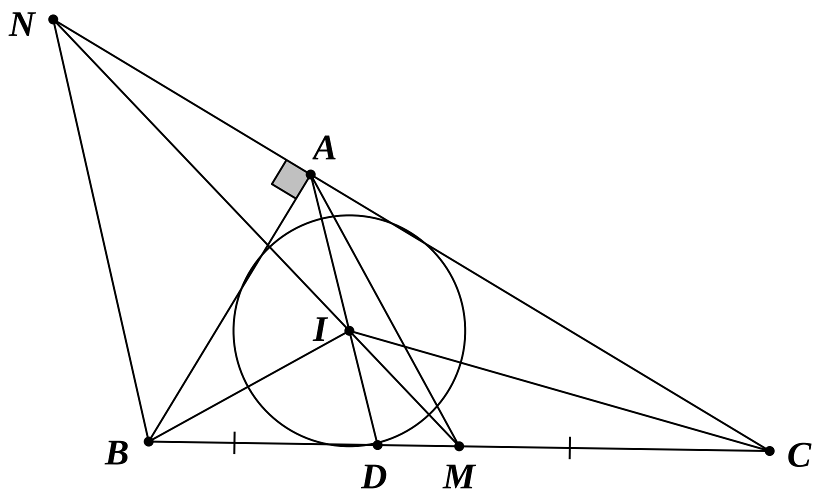
Câu 21. (TS vào 10-Chuyên Thái Nguyên 23-24)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $ACB = 30^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $AMC = AIC = 120^0$.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng MI và AC. Chứng minh rằng $AB = AN$.

Lời giải



a) Gọi D là giao điểm của AI và BC. Ta có $DIC = \dfrac{A}{2} + \dfrac{C}{2} = 45° + 15° = 60°$. Từ đó $AIC = 180° - 60° = 120°$. Lại có tam giác ABM cân tại và $ABM = 60°$ nên tam giác ABM đều. Dẫn đến $AMC = ABM + BAM = 2.60° = 120°$. Vậy $AMC = AIC = 120°$.

b) Theo câu a) ta có tam giác AMB đều. Suy ra $MA = AB = MB.$ Lại có $AMC = AIC = 120°$ nên tứ giác $AIMC$ nội tiếp. Suy ra $MNA = \dfrac{1}{2}\left(sđ\,MB - sđ\,MB\right) = 15° = NMA.$ Từ đó tam giác AMN cân tại A. Suy ra $MA = AN.$ Vậy $AB = AN$.

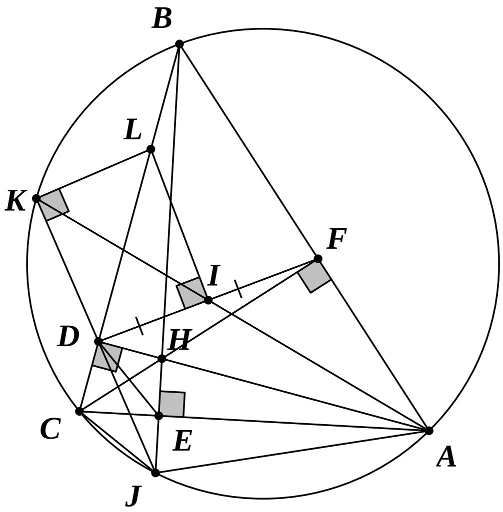
Câu 22. (TS vào 10-Chuyên Thái Nguyên 23-24)

Cho tam giác $ABC(AB > BC)$ có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Vẽ các đương cao AD, BE và CF của tam giác ABC. Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng DF. Tia AI cắt đường tròn (O) tại $K(K \neq A)$, tia BE cắt đường tròn (O) tại $J(J \neq B)$. Chứng minh rằng:

a) E là trung điểm của đoạn thẳng HJ;

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC

Lời giải



a) Ta có từ giác $AJCB$ nội tiếp nên $CJB = BAC$ mà $BAC = CHJ$ (cùng phụ với FCA). Từ đó $CJH = CHJ$, dẫn đến tam giác AHJ cân tại C có đường cao CE nên E là trung điểm của đoạn thẳng HJ .

b) Xét tam giác DEH và tam giác DAF có $EDH = ADF$ (vì DA là phân giác EDF) và $DEH = DAF$ (vì tứ giác $BDEA$ nội tiếp dường tròn đường kính AB) . Suy ra

$\frac{HE}{HD} = \frac{FA}{FD} \Leftrightarrow \frac{HE}{HD} = \frac{FA}{2FI} \Leftrightarrow \frac{2HE}{HD} = \frac{FA}{FI} \Leftrightarrow \frac{HJ}{HD} = \frac{FA}{FI}$. Từ đó $\Delta FAI \backsim \Delta HJD(c-g-c)$. Dẫn đến

$KJB = KAB = IAF = DJB$. Hay ba điểm J, D, K thẳng hàng.

Suy ra $DKI = JKA = JBA = ADF$. Suy ra AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD. Lại có $DA \perp BC$ nên tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC
.

Câu 23. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)

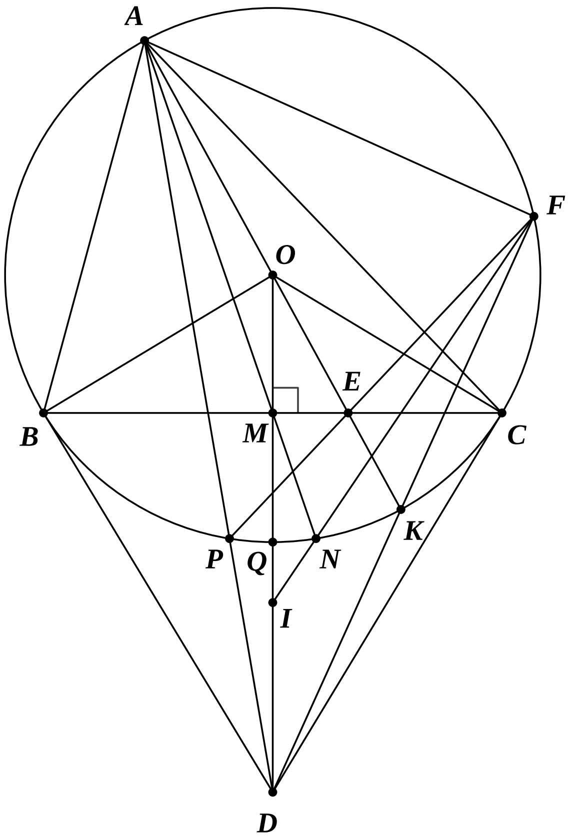
Cho tam giác A, B, C có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại E. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại N $(N \neq A)$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm B và C cắt nhau tại điểm D.

a) Chứng minh $AOND$ là tứ giác nội tiếp và tia DO là tia phân giác của ADN .

b) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại P $(P \neq A)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME cắt đường tròn (O) tại điểm F $(F \neq A)$. Chứng minh $AB.PC = AC.PB$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, K, F thẳng hàng và đường thẳng FN đi qua trung điểm của đoạn thẳng DM .

Lời giải



a) Do $OB = OC; DB = DC \Rightarrow OD$ là đường trung trực của BC

$$OD \perp BC \Rightarrow BM \perp OD$$

Xét tam giác ΔOBD có $BM \perp OD$ nên ta có $OB^2 = OM.OD$.

Mà $OB = ON\left(= R\right)$ nên $ON^2 = OM.OD$ $\Rightarrow \dfrac{ON}{OD} = \dfrac{OM}{ON}$ $\left(1\right)$.

Lại có $NOM = DON$ $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right),\left(2\right)$ suy ra $\Delta OMN \backsim \Delta OND$ $\left(c.g.c\right) \Rightarrow ONM = ODN$ $\left(3\right)$.

Lại có ΔOAN cân tại O do $OA = ON = R$ $\Rightarrow OAN = ONA = ONM$ $\left(4\right)$.

Suy ra $OAN = ODN$ và chúng cùng nhìn $ON \Rightarrow$Tứ giác $AOND$ nội tiếp.

$ONA = ODA$ (cùng chắn cung OA) $\left(5\right)$.

Từ $\left(3\right),\left(4\right),\left(5\right) \Rightarrow ODA = ODN$.

$\Rightarrow DO$ là phân giác của ADN .

b) Ta xét ΔDPB và ΔDBA có BDA chung ; $PBD = BAD$ (vì cùng chắn cung PB)

nên $\Delta DPB \backsim \Delta DBA$ $\left(g.g\right)$ $\Rightarrow \dfrac{DP}{DB} = \dfrac{BP}{AB}$.

Tương tự $\Delta DPC \backsim \Delta DCA$ $(g.g) \Rightarrow \dfrac{DP}{DC} = \dfrac{CP}{AC}$.

mà $DB = DC$

$\Rightarrow \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{CP}{AC} \Rightarrow AB.PC = AC.PB$

Gọi Q là giao điểm của DO với đường tròn $\left(O\right)$ suy ra Q là điểm chính giữa cung nhỏ BC .

Lại có $PAN = \frac{1}{2} PON \left(= \frac{1}{2} sd\, PN \right)$; $QON = PAN$.

Q là điểm chính giữa cung nhỏ PN

do đó ta có $PQ = QN$; $BQ = CQ \Rightarrow BN = CQ$.

Từ tứ giác $AMEF$ nội tiếp đường tròn ngoại tiếp ΔAME, ta có:

$CFE = MEF - BCF = \left(180^0 - NAF\right) - BCF$

$= 180^0 - \frac{1}{2} sd\, NCF - \frac{1}{2} sd\, BAF$

$= \frac{1}{2}\left(360^0 - sd\, NCF - sd\, BAF\right)$

$= \frac{1}{2} sd\, BPN = BAN$

Lại có với (O) thì $CFP = \frac{1}{2}$sd CNP

suy ra $CFE = CFP$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

suy ra tia FE và FP trùng nhau, do đó 3 điểm F, E, P thẳng hàng.

c) Từ tứ giác $AOND$ nội tiếp $\Rightarrow DON = DAN$.

Với đường tròn (O) ta có $DAN = PFN$; $NAK = NFK$

Suy ra $MOK = MFK$ nên tứ giác $OMKF$ nội tiếp $\Rightarrow OMK + OFK = 180°$ (6).

Áp dụng hệ thức lượng có: $OM.OD = OC^2 = OK^2 (= R^2)$

$\Rightarrow \frac{OM}{OK} = \frac{OK}{OD}$

$\Rightarrow \Delta OMK \backsim \Delta OKD$ (c-g-c) $\Rightarrow OMK = OKD$ (7).

Lại có ΔOKF cân (do $OK = OF = R$) $\Rightarrow OFK = OKF$ (8).

Từ $(6),(7),(8)$ suy ra: $OKD + OKF = 180^0$ $\Rightarrow$ 3 điểm D, K, F thẳng hàng.

* Chứng minh FN đi qua trung điểm của MD.

Gọi I là giao điểm của FN và MD.

Xét ΔIND và ΔIDF có: $NID = FID$; $IDN = DFI (= NAK)$

$\Rightarrow \Delta IND \backsim \Delta IDF$ (c-g-c) $\Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{ID}{IF} \Rightarrow ID^2 = IN.IF$.

Mặt khác $IMN = OMA = ODA + DAN = IFM$.

Từ đó suy ra $\Delta IMN \backsim \Delta IFM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{IM}{IF} = \frac{IN}{IM} \Rightarrow IM^2 = IN.IF$.

Suy ra $ID^2 = IM^2 \Rightarrow ID = IM$.

Câu 24. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, các đường cao AD, BE, CF $(D \in BC, E \in CA, F \in AB)$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt DF tại M, MC cắt (O) tại I khác C, IB cắt MD tại N.

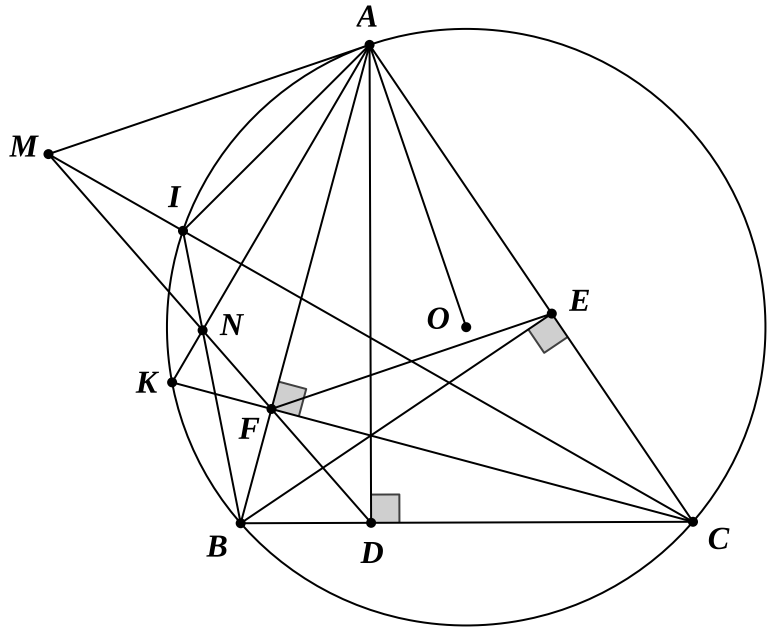
a) Chứng minh rằng $MA // EF$.

b) Chứng minh rằng ΔMAF cân, tứ giác $AINF$ nội tiếp.

c) Chứng minh rằng $MA^2 = MN \cdot MD$.

d) Gọi K là giao điểm của CF và đường tròn (O). Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có: $\Delta ABE \backsim \Delta ACF\,(g.g)$ nên $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$ suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta AEF\,(g.g)$ suy ra $AFE = ACB$

mà $MAB = ACB$ nên $MAB = AFE$

Vậy $MA//EF$

b) Chứng minh tương tự $\Delta ABC \backsim \Delta DBF\,(g.g)$ suy ra $BFD = BCA$ mà $MAF = ACB$ $BFD = AFM$

nên $MAF = AFM$ suy ra ΔMAF cân .

Vì $\Delta ABC \backsim \Delta DBF\,(g.g)$ suy ra $NFA = BFD = BCD = \dfrac{1}{2}sd\,AIB$

Ta có: $NFA + NIA = \dfrac{1}{2}sd\,AIB + \dfrac{1}{2}sd\,ACB = 180^\circ$ suy ra tứ giác $AINF$ nội tiếp.

c) Vì tứ giác $AINF$ nội tiếp nên $MNI = IAF$ (cùng bù với INF) $= MCD$

suy ra $\Delta MNI \backsim \Delta MCD\,(g.g)$ suy ra $MI.MC = MN \cdot MD$

Ta có: $\Delta MAI \backsim \Delta MCA\,(g.g)$ suy ra $MA^2 = MI \cdot MC$

suy ra $MA^2 = MN \cdot MD$

d) Vì $MA^2 = MN \cdot MD$ suy ra $\Delta MAN \backsim \Delta MDA\,(c.g.c)$ suy ra $MAN = ADF$

Ta có: $FAD = AFM - ADF$ (góc ngoài tam giác)

$= AFN - MAN = MAF - MAN = NAF$

Lại có: $FAD = FCB = \dfrac{1}{2}sd\,BK$ suy ra $BAK = NAF = \dfrac{1}{2}sd\,BK$.

suy ra A, N, K thẳng hàng.

Câu 25. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Hà Nội 23-24)

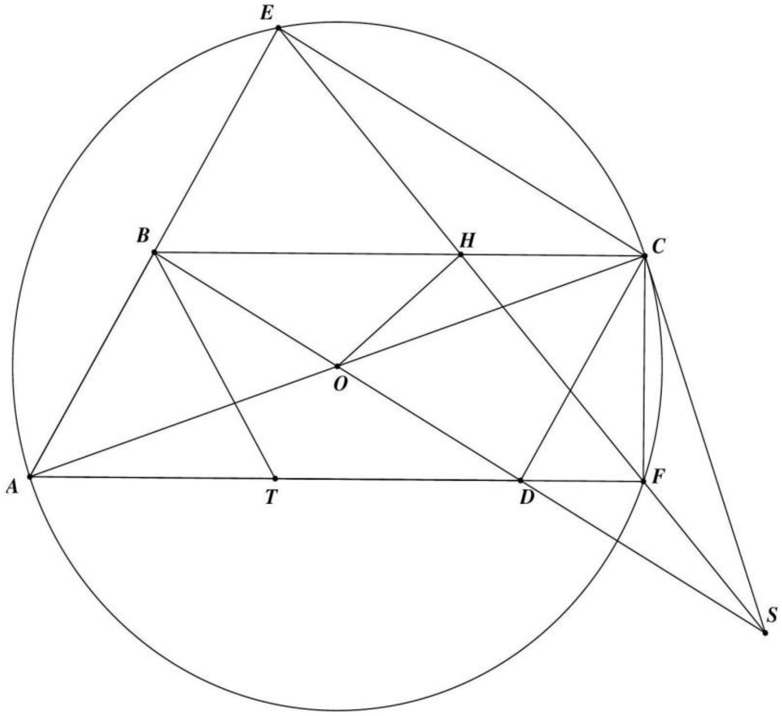
Cho hình bình hành $ABCD$ có $ABC = 120^\circ$ và $BC = 2AB$. Dựng đường tròn (O) có đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là các giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S. Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Gọi T là trung điểm của AD. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $BC = AD, BC//AD$ nên

$$BAD = 180° - ABC = 180° - 120° = 60°$$

và $TA = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = AB$ nên tam giác ABT đều suy ra $TB = TA = TD$.

Từ đây ta được B thuộc đường tròn đường kính AT hay $ABD = 90°$.
Bài toán được chứng minh.

b) Theo câu a) từ $ABD = 90°$ ta được $OB \perp AE$ nên B là trung điểm của AE.
Mà $BH//AF$ nên BH là đường trung bình của tam giác EAF. Do đó H là trung điểm EF. Vì EF là dây cung của (O) nên $OHE = 90° = OBE$. Từ đây ta suy ra $OBEH$ nội tiếp đường tròn đường kính OE.
Bài toán được chứng minh.

c) Vì $AECF$ là tứ giác nội tiếp, $BO//CE$ (cùng vuông góc với AB) và $BH//AF$ ta có

$$COS = COD = AOB = ECA = EFA = EHB = CHF = CHS$$

Từ đây ta được tứ giác $CHOS$ nội tiếp suy ra $OCS = OHS = OHE = 90°$. Vậy SC là tiếp tuyến của đường tròn (O). Bài toán được chứng minh.

Câu 26. (TS vào 10-Chuyên Năng Khiếu ĐHQG TPHCM 23-24)

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Gọi L là chân đường phân giác ngoài của BAC $(L \in BC)$. Vẽ tiếp tuyến LH với đường tròn (I) ($H \neq D$ là tiếp điểm).

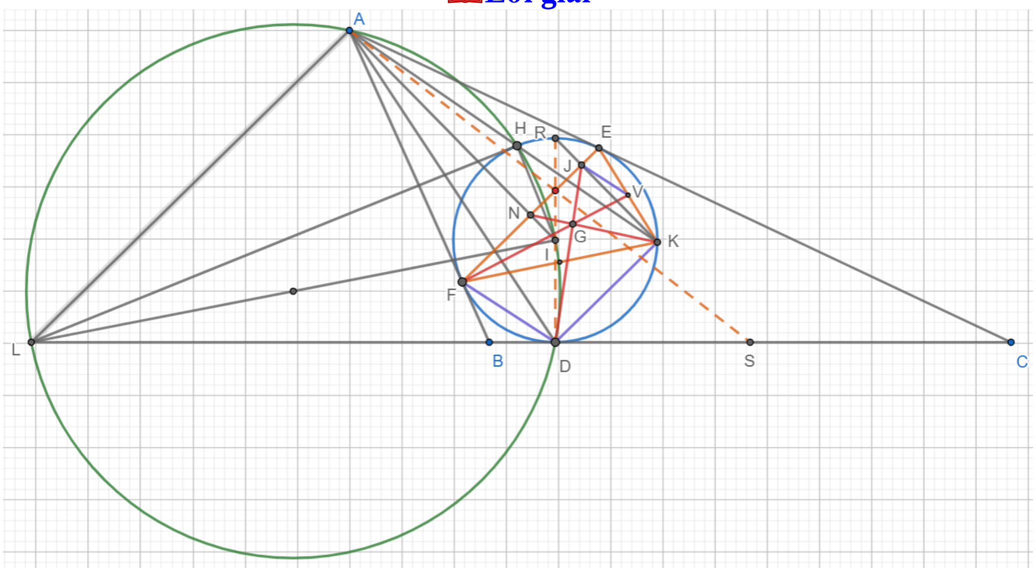
a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác HAL đi qua tâm I.

b) Chứng minh $BAD = CAH$.

c) AH kéo dài cắt (I) tại K $(K \neq H)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác KEF. DG cắt EF tại J. Chứng minh rằng $KJ \perp EF$.

d) Gọi S là trung điểm BC, KJ cắt (I) tại R $(R \neq K)$. Chứng minh rằng AS, IR, EF đồng quy.

Lời giải



a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác HAL đi qua tâm I.

Ta có: $IAL = IHL = IDL = 90°$ nên A, L, D, H, I cùng nằm trên đường tròn đường kính LI.

Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác HAL đi qua I.

b) Chứng minh $BAD = CAH$.

Xét đường tròn (HAL), do $IH = ID \Rightarrow DAI = HAI$ (chắn hai cung bằng nhau)

Mà $BAI = CAI$ nên $BAD = CAH$.

c) AH kéo dài cắt (I) tại K $(K \neq H)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác KEF. DG cắt EF tại J. Chứng minh rằng $KJ \perp EF$.

Ta có: $KDC = KHD = ALB$

$\Rightarrow DK // AL$ mà $AL // EF$ (cùng vuông góc IA), nên $DK // EF$.

Gọi V, N lần lượt là trung điểm KE, EF.

Do $DK // NJ$ nên theo định lý Thales, ta có: $\dfrac{DG}{GJ} = \dfrac{KG}{GN} = 2 = \dfrac{FG}{GV}$

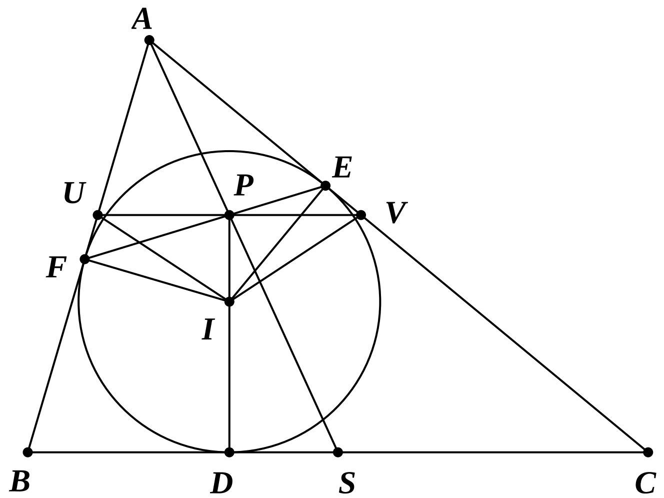
$\Rightarrow DF // JV$ và $\dfrac{DF}{JV} = \dfrac{DG}{GJ} = 2$

$\Rightarrow JV = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{EK}{2}$

Do đó ΔJKE vuông tại J nên $KJ \perp EF$

d) Gọi S là trung điểm BC, KJ cắt (I) tại R $(R \neq K)$. Chứng minh rằng AS, IR, EF đồng quy.

* Ta chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Gọi S là trung điểm của BC. Khi đó AS, DI, EF đồng quy.



Gọi P là giao điểm của EF và DI. Qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại U, V.

Ta có: các tứ giác $IPUF$ và $IPEV$ nội tiếp

$\Rightarrow IUP = IFP = IEP = IVP$

ΔIUV cân nên P là trung điểm UV.

Gọi S' là giao điểm của AP và BC.

Vì $UV // BC$ nên $\dfrac{PU}{S'B} = \dfrac{PV}{S'C}\left(=\dfrac{AP}{AS'}\right)$

$\Rightarrow S'B = S'C$ (do $PU = PV$)

Do đó: S' là trung điểm của BC

Mà S cũng là trung điểm của BC

Nên A, P, S thẳng hàng.

Vậy AS, DI, EF đồng quy.

* Trở lại bài toán, để ý rằng $DKR = 90^\circ$ nên D, I, R thẳng hàng. Theo bổ đề trên ta có DI, EF, AS đồng quy.

Do đó AS, IR, EF đồng quy.

Câu 27. (TS vào 10-Chuyên Hoà Bình 23-24)

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, điểm H cố định thuộc tia đối của tia BC. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với BC. Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MP, MK với đường tròn (O). Dây PK cắt OM tại N và cắt OH tại Q.

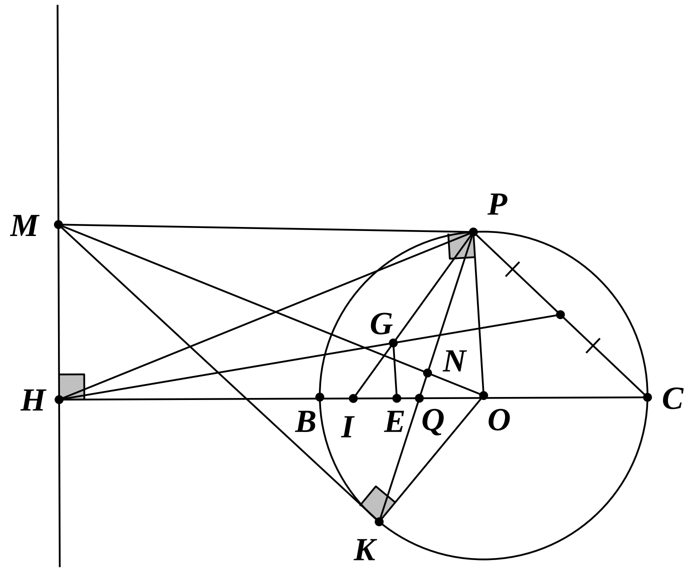
a) Chứng minh năm điểm M, P, O, K, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $OH.OQ = R^2$.

c) Cho $POK = 120^0$. Tính diện tích tứ giác $MPOK$ theo R.

d) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì trọng tâm G của tam giác HPC chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Ta có $MPO = MHO = MKO = 90°$

$\Rightarrow P, K, H$ thuộc đường tròn đường kính MO.

$\Rightarrow M, P, O, K, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

b) Xét ΔMPO vuông tại P, có PN ⊥ MO

$\Rightarrow ON \cdot OM = OP^2$ (1) (Hệ thức lượng trong tam giác vuông).

ΔONQ” ΔOHM $(HOM$ chung; $ONQ = OHM = 90°)$.

$$\Rightarrow \frac{ON}{OH} = \frac{OQ}{OM} \Leftrightarrow OM \cdot ON = OH \cdot OQ \ (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow OH \cdot OQ = OM \cdot ON = OP^2 = R^2$.

c) Vì $POK = 120^o$ nên $PMK = 60°$ và MO là phân giác của PMK

$\Rightarrow PMO = KMO = 30°$

ΔOPM vuông tại P, có: $OP = OM\ .\mathrm{Sin}\, PMO$

$$\Rightarrow OM = \frac{R}{\sin 30°} = 2R\ (cm).$$

ΔPNO vuông tại N, có: $NP = OP.\sin PON$

mà $PON = 90° - OMP = 90° - 30° = 60°$ (ΔMPO vuông tại P).

$$\Rightarrow NP = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}\ (cm) \Rightarrow\ KP = R\sqrt{3}\ (cm)$$

Ta có $OM \perp KP \Rightarrow S_{MPOK} = \frac{1}{2} OM.KP = R^2\sqrt{3}\ (cm^2)$.

d) Lấy I là trung điểm của HC, $G \in PI$ sao cho $PG = \frac{2}{3}PI$.

Từ G kẻ đường thẳng song song với OP cắt HC tại E.

HC cố định $\Rightarrow I$ cố định

° IPO có $GE \parallel PO \Rightarrow \frac{GE}{PO} = \frac{IE}{IO} = \frac{IG}{IP} = \frac{1}{3}$ (Định lí talet) (do G là trọng tâm của ΔPHC).

$\Rightarrow IE = \frac{IO}{3}$ không đổi. Mà I, O cố định $\Rightarrow$ E cố định. (1)

$GE = \dfrac{PO}{3} = \dfrac{R}{3}$ không đổi. (2)

(1), (2) $\Rightarrow G \in \left(E;\ \dfrac{R}{3} \right)$ cố định khi M chuyển động trên d .

Câu 28. (TS vào 10-Chuyên Bến Tre 23-24)

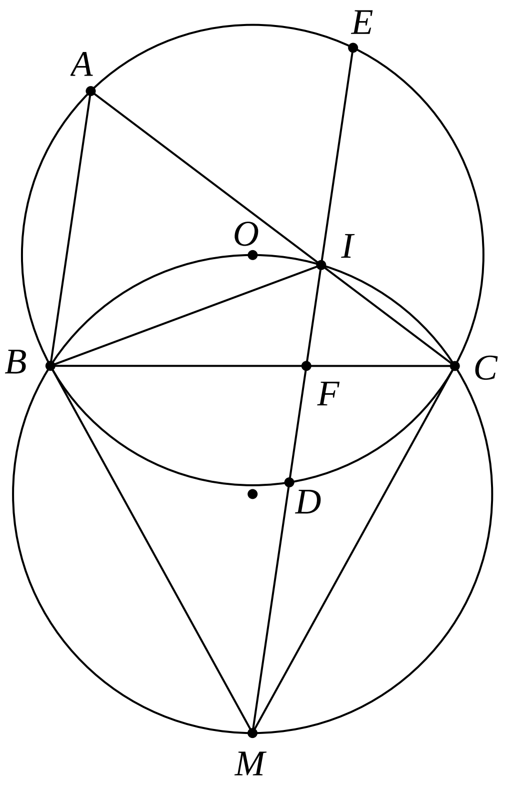
Cho tam giác ABC không có góc tù ($AB < AC$, $BC < 2R$) nội tiếp đường tròn $(O;R)$ (B,C cố định, A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M . Từ M kẻ đường thẳng song song với AB , đường thẳng này cắt (O) tại D và E ($D \neq E$, D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F và cắt AC tại I .

a) Chứng minh rằng $MBIC$ là tức giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $FI.FM = FD.FE$ FI.

c) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Lời giải



a) Do MB thuộc tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) và $MI//AB$ nên ta có:

$MBC = BAC = MIC$.

Do đó, $MBIC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\Delta BFI \backsim \Delta MFC$ (g.g) vì

$BFI = MFC$ (đối đỉnh)

$BIF = MCF$ (cùng chắn cung BM)

Từ đây suy ra $FB.FC = FI.FM$

Tương tự với cặp tam giác BFE và DFC , ta cũng có $FB.FC = FD.FE$

Suy ra $FI.FM = FD.FE$.

c) Ta có $S_{IBC} = \dfrac{1}{2}.BC.d(I,BC)$.

Do B và C là hai điểm cố định nên độ dài của đoạn BC không đổi nên S_{IBC} có diện tích lớn nhất khi cà chỉ khi $d\left(I,BC\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Mặt khác, do MB và MC lần lượt là hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn $\left(O\right)$ nên $MOB = MCO = 90^{\circ}$, tức là tứ giác $MBOC$ nội tiếp đường tròn đường kính OM (gọi là đường tròn $\mathcal{C}$), lại có $MBIC$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra 5 điểm M, B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn cố định $\mathcal{C}$ (do O, M cố định).

Lại có $OB = OC = R$ nên O là điểm chính giữa cung BC của $\mathcal{C}$, vì I di chuyển trên cung này nên $d\left(I,BC\right) \le d\left(O,BC\right)$ (không đổi).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv O$, hay A, O, C thẳng hàng.

Vậy khi A là giao điểm của OC và $\left(O\right)$ thì tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Câu 29. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

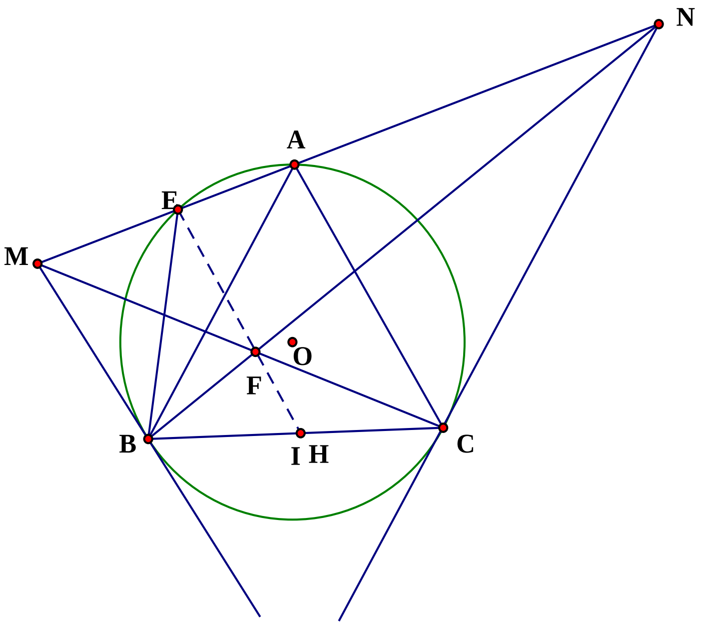
1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$, điểm E thuộc cung nhỏ AB của đường tròn $\left(O\right)$ $\left(E \ne A, E \ne B\right)$. Đường thẳng AE cắt các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn $\left(O\right)$ lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $MB.NC = AB^2$.

b) Gọi F là giao điểm của MC và BN, H là trung điểm BC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, H thẳng hàng.

2. Cho đường tròn $\left(O\right)$ và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn $\left(O\right)$ sao cho $AOB = 120^{\circ}$. Điểm M thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn $\left(O\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải



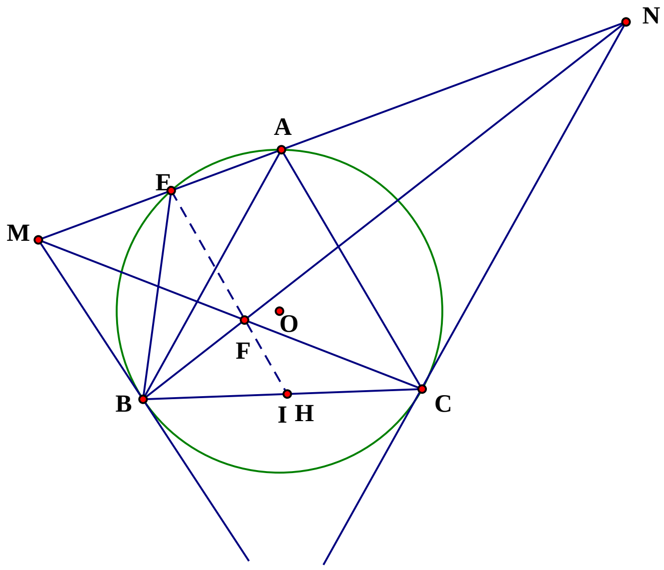
a) Ta có $ABM = ACB = BAC = 60^{\circ} \Rightarrow BM \,//\, AC \Rightarrow BMA = CAN$ (1)

Tương tự ta có $CN // AB \Rightarrow BAM = CNA\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có ΔAMB đồng dạng ΔNAC (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{MB}{AC} = \dfrac{AB}{NC} \Rightarrow MB.NC = AB.AC \Rightarrow MB.NC = AB^2$

b) Gọi F là giao điểm của MC và BN, H là trung điểm BC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, H thẳng hàng.



Gọi I là giao điểm của EF và BC. Từ a) suy ra $MB.NC = BC^2 \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{NC}\ (3)$

Mặt khác $MBC = MBA + ABC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Tương tự $BCN = 120^\circ$

Suy ra $MBC = BCN\ (4)$

Từ (3) và (4) ta có ΔMBC” ΔBCN (c-g-c). Suy ra $BMC = NBC$

Ta có $BFM = BCF + FBC = BCF + BMC = 180^0 - MBC = 60^\circ\ (5)$

Do $BEAC$ nội tiếp nên $BEM = BCA = 60^\circ\ (6)$

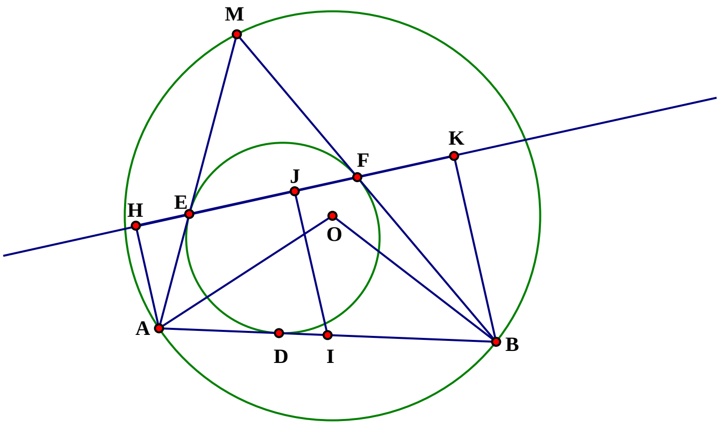
Từ (5) và (6) ta có $BFM = BEM$. Suy ra $BMEF$ nội tiếp

$BEF = BMF = NBC = FBI$. Do đó ΔIBF” ΔIEB (g-g). Suy ra $\dfrac{IB}{IE} = \dfrac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IE.IF\ (7)$

Chứng minh tương tự ta có $IC^2 = IE.IF\ (8)$.

Từ (7) và (8) suy ra $IB = IC \Rightarrow I \equiv H$. Vậy E, F, H thẳng hàng.

2.



Gọi I là trung điểm của AB. Vẽ AH, IJ, BK cùng vuông góc EF.

Ta có $AOB = 120° \Rightarrow AMB = 60°$, hơn nữa $ME = MF$ nên tam giác MEF đều.

Tam giác vuông AHE có $AH = AE.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.AE = \frac{\sqrt{3}}{2}.AD \ (1)$

Tam giác vuông BKF có $BK = BF.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}BF = \frac{\sqrt{3}}{2}BD \ (2)$

Cộng vế (1) và (2) ta có

$AH + BK = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow 2IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow IJ = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$ không đổi.

Vì điểm I cố định nên EF tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I, bán kính $\frac{\sqrt{3}}{4}AB$.

Câu 30. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Vinh 23-24)

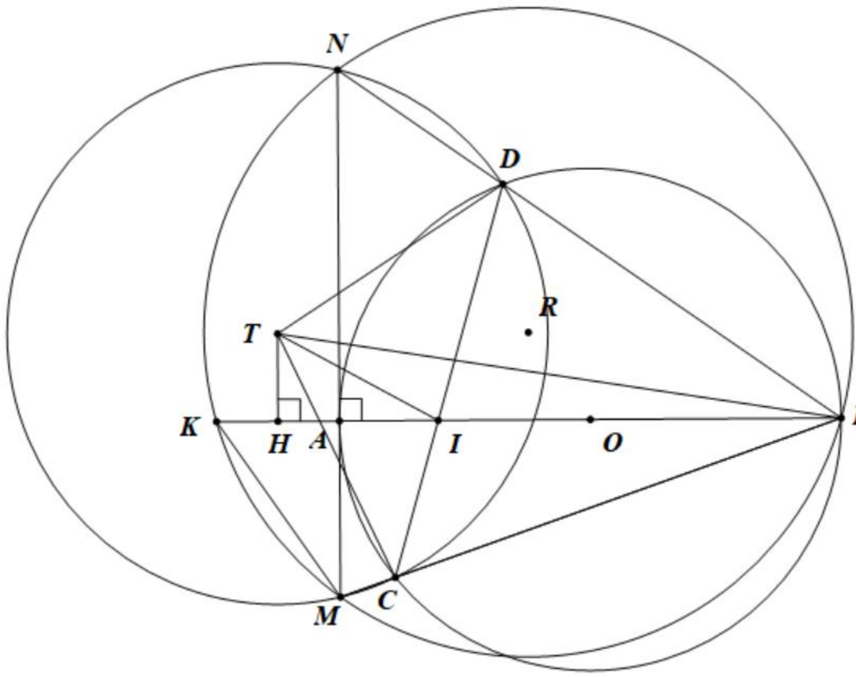
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A, I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I. Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $CDMN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB. Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM.AN$ không đổi.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Lời giải



a) Áp dụng hệ thức lượng cho hai tam giác BAM và BAN với hai đường cao tương ứng là AC, AD ta có $BA^2 = BC \cdot BM = BD \cdot BN$. Vì vậy tứ giác $CDNM$ nội tiếp.

b) Ta có biến đổi góc $MKB = MNB = DCB$, vì vậy tứ giác $CIKM$ nội tiếp.
Do đó $BC \cdot BM = BI \cdot BK = BA^2$, từ đây suy ra K là điểm cố định.
Từ đây ta suy ra $AM \cdot AN = AK \cdot AB$ cố định.
c) Gọi r là bán kính của (T) thì $r^2 - TA^2 = AN \cdot AM = a$ không đổi. Ta cũng có $ID.IC$ không đổi, đặt $b = ID \cdot IC = r^2 - TI^2$ suy ra $TI^2 - TA^2 = a - b$.
Gọi H là hình chiếu của K lên AB theo định lý Pythagore ta có.
$\left(AI + 2AH\right) \cdot AI = HI^2 - HA^2 = \left(TI^2 - TH^2\right) - \left(TA^2 - TH^2\right) = TI^2 - TA^2 = a - b$
Từ đây kết hợp với AI không đổi (A và I cố định) suy ra H cố định do đó BH không đổi.
Khi đó, theo định lý Pytagore ta có.
$BT^2 = TH^2 + BH^2 \geq BH^2$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi T trùng với H tức là BA là trung trực của CD suy ra CD vuông góc AB tại I. Vậy khi CD vuông góc với AB tại I thì độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

CHUYÊN ĐỀ 7. BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Đà Nẵng 23-24)

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2023(x+y+z).$$

Lời giải

+ AM.GM ba số $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$

+ Ta có: $2008(x^2+y^2+z^2)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2008\frac{(x+y+z)^2}{3}+15.\frac{9}{x+y+z}$

Đặt $t = x+y+z (t \geq 3)$, ta phải chứng minh: $2008\frac{(x+y+z)^3}{3}+15.\frac{9}{x+y+z} \geq 2023(x+y+z)$

Tức là: $2008\frac{t^3}{3}+15.\frac{9}{t} \geq 2023t$

$\Rightarrow 2008t^3+405 \geq 6069t^2$

$\Rightarrow (t-3)(2008t^2-45t-135) \geq 0$ (1)

Trong đó:

$2008t^2-45t-135 = 1993t^2+15t^2-45t-135$

$= 1993t^2+15t(t-3)-135 \geq 1993.3^2+15.3.0-135 > 0$

$\Rightarrow 2008t^2-45t-135 > 0$

Tức là (1) đúng.

Vậy bài toán được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Tin Hà Nội 23-24)

Với các số thực a, b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = (a-1)(b-1)(c-1)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |a|+|b|+|c|$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $ab+bc+ca = -1$. Trong ba số a, b, c, ta thấy có hai số cùng không nhỏ hơn 0 hoặc cùng không lớn hơn 0 (ba số với hai trường hợp không giao nhau: lớn hơn hoặc bằng 0 (không nhỏ hơn 0) và nhỏ hơn 0).

Ngoài ra, có thể thấy rằng khi thay (a, b, c) bởi $(-a; -b; -c)$ thì giả thiết bài toán cũng như biểu thức P đều không đổi.

Vì vậy, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq 0; b \geq 0$. Khi đó, do $ab + bc + ca = -1 < 0$ nên $c < 0$. Đặt $x = -c\left(x > 0\right)$, ta có $ab - ax - bx = -1$ và $P = a + b + x$.

Từ $ab - ax - bx = -1$, ta suy ra $x = \dfrac{ab+1}{a+b}$. Do đó:

$$P = a + b + \frac{ab+1}{a+b} \geq a + b + \frac{1}{a+b} \geq 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $b = 0; a = 1; c = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2$.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Toán Hà Nội23-24)

Với các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(a + 6b + 6c\right)\left(a + b + c\right)$.

Lời giải

$$\frac{3}{2}P = \left(\frac{3}{2}a + 9b + 9c\right)\left(a + b + c\right) \geq \left(\sqrt{\frac{3}{2}}a + 3b + 3c\right)^2 \geq \left(a + 2b + 3c\right)^2 = 1.$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{3}.$$

Mặt khác, khi $a = 0; b = 0; c = \dfrac{1}{3}$ thì $P = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $\min P = \dfrac{2}{3}$.

$$4P = \left(a + 6b + 6c\right)\left(4a + 4b + 4c\right) \leq \frac{\left(5a + 10b + 10c\right)^2}{4} \leq \frac{\left(5a + 10b + 15c\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4P \leq \frac{25\left(a + 2b + 3c\right)^2}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow P \leq \frac{25}{16}.$$

Mặt khác, khi $a = \dfrac{1}{4}; b = \dfrac{3}{8}; c = 0$ thì $P = \dfrac{25}{16}$.

Suy ra $\max P = \dfrac{25}{16}$.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Hải Phòng 23-24)

Cho các số thực $a,\ b,\ c$ thoả mãn $a + b + c = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a-1}{a^2+2}+\frac{2b-1}{b^2+2}+\frac{2c-1}{c^2+2}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $ab\ge 0$. Khi đó

$$P+3\ge\frac{\left(a+b+2\right)^2}{(a+b)^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}=\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}$$

Xét BĐT: $\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow c^2\left(c-2\right)^2\ge 0$ (đúng).

Vậy $P\ge\frac{-3}{2}$; dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a=b=c=0$, $a=b=-1, c=2$.

Do đó $P_{\min}=\frac{-3}{2}$.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Cần Thơ 23-24)

Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như sau

Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau và trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng của ba số còn lại tương ứng trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Lời giải

Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng

Ta thấy tổng 4 số lớn nhất trong bảng không vượt quá tổng của 4 số $M, M-1, M-2, M-3$

Trong khi đó tổng của 12 số còn lại đạt được nhỏ nhất là tổng 12 số nguyên dương đầu tiên

Nên ta có $M+\left(M-1\right)+\left(M-2\right)+\left(M-3\right)\ge 1+2+3+\cdots+12=78$

$\Leftrightarrow 4M\ge 84$

$\Leftrightarrow M\ge 21$

Do đó giá trị nhỏ nhất của M là 21.

Xây dựng mô hình:

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Cần Thơ 23-24)

Cho a,b,c là các số thực dương không nhỏ hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}\le\frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}-\frac{1}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)}$$

Lại theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)}\le\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự, ta có: $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ab-1}}{\dfrac{\sqrt{bc-c}}{c+a}}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c}+a-\dfrac{1}{b}\right)\\ \dfrac{\sqrt{ca-1}}{a}\left(\dfrac{1}{a}+b-\dfrac{1}{c}\right)\\ \dfrac{\sqrt{c+b}}{4}\left(\dfrac{1}{b}+c-\dfrac{1}{a}\right)\end{cases}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{a+b+c}{4}\text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Vũng Tàu 23-24)

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{\sqrt{(1+8a^3)(1+8b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+8b^3)(1+8c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+8c^3)(1+8a^3)}}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sqrt{1+8a^3}=\sqrt{(1+2a)(1-2a+4a^2)}\le\frac{1+2a+1-2a+4a^2}{2}=2a^2+1$$

Tương tự: $\sqrt{1+8b^3}\le 2b^2+1$; $\sqrt{1+8c^3}\le 2c^2+1$

Do đó: $P\ge\frac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)}+\frac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)}+\frac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)}$

Ta chứng minh: $\frac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)}+\frac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)}+\frac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)}\ge\frac{1}{3}$ (*)

Thật vậy: (*) $3(2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2)\ge(2a^2+1)(2b^2+1)(2c^2+1)$

$\Leftrightarrow 6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(a^2+b^2+c^2)\ge 8(abc)^2+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a^2+b^2+c^2)+1$

$\Leftrightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2\ge 9$ (Đúng)

Vì $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}=3\ \Rightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 6$

và $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{3}$ khi $a=b=c=1$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Bắc Giang 23-24)

Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0$;

Giả thiết trở thành: $ab+bc+ca=1;P=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

Để ý rằng:

$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

$b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(b+a)(b+c)$

$c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(c+b)$

Lúc này ta có:

$$P=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}}.\sqrt{\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}.\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}.\sqrt{\frac{c}{c+b}}.$$

Theo bất đẳng thức Cô – si (AM-GM), ta có:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right) \text{ hay } P\le\frac{3}{2}.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x=y=z=\sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Bắc Ninh 23-24)

1. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=xyz$.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{15}{ab+bc+ca}\ge 6-abc.$$

Lời giải

1. Theo a) ta có $(x+y+z)^3-3xy(x+y)-3(x+y)z(x+y+z)=18(x+y+z)$

$\Rightarrow (x+y+z)^3-3(x+y)(xy+yz+zx+z^2)=18(x+y+z)$

$\Rightarrow (x+y+z)^3=18(x+y+z)+3(x+y)(y+z)(z+x)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM suy ra

$$(x+y+z)^3=18(x+y+z)+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 18(x+y+z)+3\left(\frac{2x+2y+2z}{3}\right)^3$$

$\Rightarrow t^3\le 18t+\frac{8t^3}{9}\Rightarrow t\le 9\sqrt{2}$ với $t=x+y+z$ mà $t>0; t\,\vdots\,6$ nên $t\in\{6;12\}$

* **TH1**: Nếu $t=6$ thì $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=108 \\ x+y+z=6 \end{cases}$. Giả sử $x\ge y\ge z>0$ thì $z\le 2\Rightarrow z\in\{1;2\}$

+ Với $z=1$ thì $\begin{cases} x^3+y^3=107 \\ x+y=5 \end{cases}$ không có $x,y\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn.

+ Với $z=2$ thì $\begin{cases} x^3+y^3=100 \\ x+y=4 \end{cases}$ không có $x,y\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn.

* **TH2**: Nếu $t=12$ thì $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=216 \\ x+y+z=12 \end{cases}$. Giả sử $x\ge y\ge z>0$ thì $z\le 4\Rightarrow z\in\{1;2;3;4\}$

+ Với $z=1$ thì $\begin{cases} x^3+y^3=215 \\ x+y=11 \end{cases}$ mà $x\ge y\Rightarrow y\in\{1;2;3;4;5\}$ không có $x\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn.

+ Với $z=2$ thì $\begin{cases} x^3+y^3=208 \\ x+y=10 \end{cases}$ mà $x\ge y\ge 2\Rightarrow y\in\{2;3;4;5\}$ không có $x\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn.

+ Với $z=3$ thì $\begin{cases} x^3+y^3=189 \\ x+y=9 \end{cases}$ mà $x\ge y\ge 3\Rightarrow y\in\{3;4\}\Rightarrow y=4;x=5\Rightarrow F=60$ thỏa mãn.

+ Với $z=4$ thì $\begin{cases} x^3+y^3=152 \\ x+y=8 \end{cases}$ mà $x\ge y\ge 4\Rightarrow y=4;x=4$ không thỏa mãn.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức F là 60 khi $x=5$; $y=4$; $z=3$ và các hoán vị của chúng.

2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $P=\dfrac{15}{ab+bc+ca}+abc\ge 6$

Trong ba số $a-1,\,b-1,\,c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0$ $\Leftrightarrow ab\ge a+b-1=2-c$ $\Leftrightarrow abc\ge(2-c)c$

Lại có $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(3-c)^2$; $bc+ca=c(3-c)$

nên $P\ge\dfrac{15}{\frac{1}{4}(3-c)^2+c(3-c)}+(2-c)c=f(c)$

Cần chứng minh $f(c)\ge 6$ với $0<c<3$

Hay $\dfrac{15.4}{(3-c)(3+3c)}+2c-c^2\ge 6$

$\Leftrightarrow 20+c(c+1)(3-c)(2-c)\ge 6(3-c)(c+1)$

$\Leftrightarrow 20+\left[c(2-c)\right]\left[(c+1)(3-c)\right]-6\left[(3-c)(c+1)\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow (c-1)^2\left(c^2-2c+2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow (c-1)^2\left[(c-1)^2+1\right]\ge 0$ luôn đúng.

Vậy $\dfrac{15}{ab+bc+ca}\ge 6-abc$. Dấu “=” khi $a=b=c=1$.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Bình Dương 23-24)

Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$ (m là tham số)

Tìm m để biểu thức $P=\dfrac{2023(2x_1x_2+1)}{x_1^2-2mx_2+1-2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Với mọi m phương trình đã cho luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=-1-2m \end{cases}$

Vì x_1 là một nghiệm của phương trình đã cho nên:

$x_1^2+2mx_1-1-2m=0 \Leftrightarrow x_1^2-1-2m=-2mx_1$

Ta có:

$$P=\frac{2023(2x_1x_2+1)}{x_1^2-2mx_2+1-2m}$$

$$=\frac{2023(2x_1x_2+1)}{x_1^2-1-2m-2mx_2+2}$$

$$=\frac{2023(2x_1x_2+1)}{-2mx_1-2mx_2+2}$$

$$=\frac{2023(2x_1x_2+1)}{-2m(x_1+x_2)+2}$$

$$=\frac{2023\left[2(-1-2m)+1\right]}{-2m(-2m)+2}$$

$$=\frac{2023(-1-4m)}{4m^2+2}$$

$$=2023\left(\frac{-1-4m+4m^2+2}{4m^2+2}-1\right)$$

$$=2023\left(\frac{4m^2-4m+1}{4m^2+2}-1\right)$$

$$=\frac{2023(2m-1)^2}{4m^2+2}-2023\geq -2023 \text{ ,với mọi } m$$

Dấu “=” xảy ra khi $2m-1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Vậy biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất bằng – 2023 khi $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh: $\dfrac{bc}{2a+b+c}+\dfrac{ca}{2b+c+a}+\dfrac{ab}{2c+a+b}\leq\dfrac{a+b+c}{4}$.

Lời giải

Ta luôn có bất đẳng thức: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$, với mọi $a,b,c>0,(*)$

Thật vậy $(*)\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$ (luôn đúng). Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng (*) ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(a+b)+(a+c)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)\Rightarrow\frac{bc}{2a+b+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$$

Tương tự, ta có $\frac{ac}{2b+a+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}\right)$ và $\frac{ab}{2c+a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$.

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\le\frac{1}{4}\left[\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}\right)+\left(\frac{bc}{a+c}+\frac{ab}{a+c}\right)+\left(\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{b+c}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\le\frac{a+b+c}{4}\ \text{(đpcm)}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Với a, b, c là ba số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh BĐT sau: Với 4 số thực a, b, x, y và x, y. Ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\ \text{(2), dấu } "=" \text{ xảy ra khi } \frac{a}{x}=\frac{b}{y}.$$

Thật vậy, ta viết BĐT (2) dưới dạng:

$a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\ge(a+b)^2xy \Leftrightarrow (ay-bx)^2\ge 0$ (luôn đúng). Dấu $"="$ xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Áp dụng BĐT (2) hai lần ta được: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Dấu $"="$ xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Theo Bổ đề (1) ta có: $\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}$.

Mặt khác, theo BĐT GM – AM:

$$\sum_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sum_{cyc}\left(\sqrt{3a+2b}\cdot\sqrt{a+4b}\right)\le\sum_{cyc}\frac{(3a+2b)(a+4b)}{2}=5(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{5}$$

Hay $\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{a+b+c}{5}$ (đpcm).

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Đăk Lăk 23-24)

Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+t^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=xy+xz+xt+yz+yt+3zt$.

Lời giải

Ta có: $xy\le\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$

$$xz=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x.\frac{\sqrt{5}-1}{2}z\le\frac{\sqrt{5}+1}{4}\left[x^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2z^2\right]=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\left[x^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}z^2\right]$$

Tương tự: $xt\le\frac{\sqrt{5}+1}{4}\left[x^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}t^2\right]$; $yz\le\frac{\sqrt{5}+1}{4}\left[y^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}z^2\right]$

$$yt\le\frac{\sqrt{5}+1}{4}\left[y^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}t^2\right];\ zt\le\frac{1}{2}\left(z^2+t^2\right)\Leftrightarrow 3zt\le\frac{3}{2}\left(z^2+t^2\right)$$

Suy ra $A\le\frac{\sqrt{5}+2}{2}\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)=\frac{\sqrt{5}+2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=y\\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}z\\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}t\\ x^2+y^2+z^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{20}}\\ z=t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{20}}\end{cases}$.

Câu 14. (TS vào 10-Chuyên Đăk Nông 23-24)

Cho a, b là hai số thực dương.

a) Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge1+\sqrt{ab}$.

b) Cho $a+b=ab$ thỏa mãn $a^2+3a-b\ge0$ và $b^2+3b-a\ge0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a^2+3a-b}+\frac{1}{b^2+3b-a}+\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge1+\sqrt{ab}\Leftrightarrow1+a+b+ab\ge1+ab+2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge0$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ta có:

$$\frac{1}{a^2+3a-b}+\frac{1}{b^2+3b-a}\ge\frac{4}{\left(a^2+3a-b\right)+\left(b^2+3b-a\right)}=\frac{4}{a^2+b^2+2\left(a+b\right)}$$

$$\frac{1}{a^2+3a-b}+\frac{1}{b^2+3b-a}\ge\frac{4}{a^2+b^2+2ab}=\frac{4}{\left(a+b\right)^2}$$ (vì $a+b=ab$)

Mặt khác $\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}\ge 1+ab=1+\left(a+b\right)$ (theo câu a)

Suy ra $P\ge\dfrac{4}{\left(a+b\right)^2}+1+\left(a+b\right)$ $=\dfrac{4}{\left(a+b\right)^2}+\dfrac{a+b}{16}+\dfrac{a+b}{16}+\dfrac{7\left(a+b\right)}{8}+1$

+) Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 3 số dạng $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$, ta có:

$$\frac{4}{\left(a+b\right)^2}+\frac{a+b}{16}+\frac{a+b}{16}\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{\left(a+b\right)^2}\cdot\frac{a+b}{16}\cdot\frac{a+b}{16}}=\frac{3}{4} \qquad (1)$$

+) Ta có: $a+b=ab\le\dfrac{\left(a+b\right)^2}{4}\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2-4\left(a+b\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a+b-4\right)\ge 0\Leftrightarrow a+b\ge 4$ (vì $a,b>0$ nên $a+b>0$)

$\Rightarrow\dfrac{7\left(a+b\right)}{8}\ge\dfrac{7}{2}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $P\ge\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{2}+1=\dfrac{21}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{21}{4}$ khi $a=b=2$.

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Đồng Nai 23-24)

Cho hai số dương x và y thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Lời giải

Với hai số không âm a, b, ta chứng minh $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (1)

$$\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right) \qquad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Thật vậy

$\left(1\right)\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\ge 0$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

$(2) \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow 0 \le (a-b)^2$ (luôn đúng).

Áp dụng (2):

$$(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow 4 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2 \ge 2.$$

Áp dụng (1):

$$\frac{x^2+y^2}{4}+\frac{1}{x^2+y^2} \ge 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4(x^2+y^2)}} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{4}+\frac{1}{x^2+y^2} \ge 1.$$

Ta có $\min B = \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$

Vậy $\min B = \frac{5}{2}$.

Câu 16. (TS vào 10-Chuyên Hà Nam 23-24)

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

Lời giải

Với $a,b,c>0$, chứng minh được:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9 \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

Với $a,b>0$, ta có :

$$5a^2+2ab+2b^2=(4a^2+4ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$$

$$=(2a+b)^2+(a-b)^2 \ge (2a+b)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{5a^2+2ab+2b^2} \ge \sqrt{(2a+b)^2}=2a+b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} \le \frac{1}{2a+b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

$$P \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \Rightarrow P \le \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$

Vậy $\max P = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 17. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a>b>c; ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Lời giải

Ta sử dụng các bất đẳng thức $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \ge \dfrac{4}{m+n} \ge \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ với $m>0; n>0$

Dấu bằng xảy ra khi $m=n$

$$P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$P \ge \frac{4}{a-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}} = \frac{5}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Lại có: $\dfrac{5}{a-c}+\dfrac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \ge 5\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2+4(ab+bc+ca)}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2+4b(a+c)}}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \quad (do\ a+c=1-b)$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}} \ge \frac{10\sqrt{6}}{\frac{3-3b+1+3b}{2}} = 5\sqrt{6}$$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{6}$ khi

$$\begin{cases} a>b>c \\ a+b+c=1 \\ a-b=b-c \\ a-c=2\sqrt{b(a+c)+ca} \\ 3-3b=1+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>b>c \\ b=\dfrac{1}{3} \\ a+c=\dfrac{2}{3} \\ a-c=2\sqrt{\dfrac{2}{9}+ca} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b=\dfrac{1}{3} \\ c=\dfrac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Câu 18. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Cho a,b,c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Khi đó :

$$c\le a\Rightarrow c^2\le ac\Rightarrow a^2+c^2\le a^2+ac\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$c\le b\Rightarrow c^2\le bc\Rightarrow b^2+c^2\le b^2+bc\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$a^2+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$VT(*)\ge\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}$$

Đặt $x=a+\dfrac{c}{2};y=b+\dfrac{c}{2}$. Khi đó $x>0,y>0$ và $x+y=a+b+c$.

Ta có

$$VT(*)\ge\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\ge\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{3}{2xy}$$

$$=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}+3.\frac{2}{(x+y)^2}=\frac{10}{(x+y)^2}=\frac{10}{(a+b+c)^2}=VP(*)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} c=0 \\ x=y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=0 \\ a=b \end{cases}$.

Do vai trò của a,b,c bình đẳng nên dấu "=" của $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a,b,c có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

Câu 19. (TS vào 10-Chuyên Kon Tum 23-24)

Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a(a-1)+b(b-1)=ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\dfrac{a^3+b^3+2023(a+b)+4}{ab}$.

Lời giải

Từ giả thiết $a(a-1)+b(b-1)=ab \Rightarrow a^2+b^2-(a+b)=ab \Rightarrow a^2+b^2=ab+a+b$

Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có: $a^2+b^2\ge 2ab \Rightarrow ab+a+b\ge 2ab \Rightarrow a+b\ge ab \quad (1)$

Lại có: $ab+a+b+8=(a^2+4)+(b^2+4)\ge 4a+4b=4(a+b)\Rightarrow ab+8\ge 3(a+b)\ge 3ab$ (do (1))

$\Rightarrow ab\le 4$.

Đặt $t=\sqrt{ab}\Rightarrow 0<t\le 2\Rightarrow \dfrac{2}{t}\ge 1 \Rightarrow \dfrac{4}{t^2}\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$F=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2023\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{4}{ab}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.\frac{b^2}{a}}+2023.2\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{4}{ab}=2t+4046.\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}$$

$$F\ge 2t+\frac{8}{t}+2019\cdot\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}.$$

Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có $2t+\dfrac{8}{t}\ge 2\sqrt{2t.\dfrac{8}{t}}=8\Rightarrow F\ge 8+2019+1=2028$.

Vậy $\min F=2028$, đạt khi $a=b=2$.

Câu 20. (TS vào 10-Chuyên Hưng yên 23-24)

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T=\sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}}+\sqrt{\frac{b}{3a^2c^2+abc}}+\sqrt{\frac{c}{3a^2b^2+abc}}.$$

Lời giải

Ta có a,b,c dương và $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$

Đặt $\dfrac{1}{a}=x,\ \dfrac{1}{b}=y,\ \dfrac{1}{c}=z\Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0\\ z+y+z=3\end{cases}$

Khi đó

$$\sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y^2z^2}+\frac{1}{zyz}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3x+yz}{xy^2z^2}}}=\sqrt{\frac{y^2z^2}{x(x+y+z)+yz}}=\sqrt{\frac{y^2z^2}{(x+y)(x+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}\right)$$

Suy ra $T \le \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x+y}+\frac{yz}{x+z}+\frac{zx}{y+z}+\frac{zx}{y+x}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xy}{z+y}\right)=\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{3}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{x+y}=\frac{1}{y+z}=\frac{1}{z+x}\\ x+y+z=3\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $MinT=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Câu 21. (TS vào 10-Chuyên Khánh Hòa 23-24)

a) Chứng minh $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$:

$$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right] \ge \left|(x+y-2)(z-1).\right|$$

Lời giải

a) Chứng minh $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

<u>Cách 1:</u>

*) Áp dụng bất đẳng thức B-C-S, ta có:

$$\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]\left[1^2+1^2\right] \ge \left[(x-1).1+(y-1).1\right]^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \ge \frac{(x+y-2)^2}{2} \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x=y$

*) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{(x+y-2)^2}{2}+(z-1)^2 \ge 2\sqrt{\frac{\left[(x+y-2)(z-1)\right]^2}{2}}=\sqrt{2}\left|(x+y-2)(z-1)\right| \quad (2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(x+y-2)^2}{2}=(z-1)^2$

*) Mặt khác: $\left|(x+y-2)(z-1)\right| \ge (x+y-2)(z-1)$ (3)

(Dấu "=" xảy ra khi $(x+y-2)(z-1) \ge 0$).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1) \quad (4)$$

*) Đẳng thức (4) xảy ra khi: $\begin{cases} x=y \\ |x+y-2|=\sqrt{2}|z-1| \\ (x+y-2)(z-1)\ge 0 \end{cases}$

(Chẳng hạn tại $x=y=z=1$)

Cách 2:

Đặt $((x-1), (y-1), (z-1))=(a, b, c)$

Ta có: $VT=a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}+c^2 \ge 2\sqrt{\dfrac{(a+b)^2.c^2}{2}} =\sqrt{2}|(a+b)c|\ge\sqrt{2}(a+b)c=VP$

Vậy $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\ge\sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$ với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{z-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

(Chẳng hạn tại $x=y=z=1$)

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$

$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]\ge|(x+y-2)(z-1).|$

Giả sử k là số thực nhỏ nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$:

$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]\ge|(x+y-2)(z-1)|$ (*)

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức $(*)$ cũng đúng khi $x=y$, $|x+y-2|=\left|\sqrt{2}(z-1)\right|$

(Hay $x=y$, $|z-1|=\sqrt{2}|x-1|$)

Do đó: $k\left[2(x-1)^2+2(x-1)^2\right]\ge\left|2(x-1).\sqrt{2}(x-1)\right|$

$\Leftrightarrow 4k(x-1)^2\ge 2\sqrt{2}(x-1)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Cho $x=2$, ta được: $4k\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

*) Ta chứng minh với mọi $k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Thật vậy:

$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$

$=\left(k-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$

$\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$

$\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}|(x+y-2)(z-1)|=|(x+y-2)(z-1)|$ (theo chứng minh của câu a).

Khi $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì theo chứng minh câu a ta cũng có bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Vậy giá trị k nhỏ nhất cần tìm là $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 22. (TS vào 10-Chuyên Lai Châu 23-24)

Cho $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có: $a+b+c=3$

$3^2=(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ac)\Leftrightarrow ab+bc+ac\le 3$

Ta có: $\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{bc}{\sqrt{a^2+ab+bc+ac}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$

Tương tự ta có: $\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}\right)$

$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{a+c}\right)$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{a+c}\right)$$

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ac}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c(a+b)}{a+b}+\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{a+c}\right)$$

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Mà $a+b+c=3$ nên $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$

Câu 23. (TS vào 10-Chuyên Lạng Sơn 23-24)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh:

a) $x^2+y^2+z^2 \ge 3$.

b) $\dfrac{3}{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2 \ge 4$.

c) $xy+yz+zx \ge 3\sqrt{xyz}$.

Lời giải

a) $x^2+y^2+z^2 \ge 3$.

Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Ta có:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (x+y+z)^2 \Leftrightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge 3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge 3$$

Vậy $x^2+y^2+z^2 \ge 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

b) $\dfrac{3}{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2 \ge 4$.

Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Ta có:

$$\frac{3}{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2 = \frac{3}{x^2+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{3}+\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{3}{x^2+y^2+z^2}.\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}+\frac{2.3}{3}=2+2=4 \text{ (Vì } x^2+y^2+z^2 \ge 3 \text{).}$$

Vậy: $\dfrac{3}{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2 \ge 4$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3} \\ x=y=z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

c) $xy+yz+zx \ge 3\sqrt{xyz}$.

Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Ta có:

$(xy+yz+zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz$.

Mặt khác:

$x^2y^2 + y^2z^2 \ge 2\sqrt{x^2y^4z^2} = 2xy^2z$

$y^2z^2 + z^2x^2 \ge 2\sqrt{x^2y^2z^4} = 2xyz^2$

$z^2x^2 + x^2y^2 \ge 2\sqrt{x^4y^2z^2} = 2x^2yz$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta có:

$2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) \ge 2\left(xy^2z + xyz^2 + x^2yz\right)$

$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge xy^2z + xyz^2 + x^2yz$

Từ đó ta có:

$(xy+yz+zx)^2 \ge 3\left(xy^2z + xyz^2 + x^2yz\right) = 3xyz(x+y+z) = 9xyz$

$\Rightarrow xy+yz+zx \ge 3\sqrt{xyz}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x^2y^2 = y^2z^2 \\ y^2z^2 = z^2x^2 \\ z^2x^2 = x^2y^2 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 24. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)

a) Cho $a \ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a^2 + \dfrac{2}{3a}$

b) Cho ba số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c \le 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)} + \dfrac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)} + \dfrac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)} \ge 12$.

Lời giải

a) Ta có: $a^2 + \dfrac{2}{3a} \ge \dfrac{83}{9}$

$\Leftrightarrow 9\left(3a^3+2\right) \ge 249a \Leftrightarrow 3\left(3a^3+2\right) \ge 83a \Leftrightarrow 9a^3 - 83a + 6 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-3)\left(9a^2+27a-2\right) \ge 0 \quad (*)$

(*) đúng vì $a-3 \ge 0$ và $9a^2+27a-2 \ge 9.3^2+27.3-2 > 0$

Dấu bằng xảy ra khi $a=3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q=\frac{83}{9}$ tại $a=3$

b) $\frac{a}{3ac+1}\left(\frac{3bc+1}{c}\right)^2+\frac{b}{3ab+1}\left(\frac{3ca+1}{a}\right)^2+\frac{c}{3bc+1}\left(\frac{3ab+1}{b}\right)^2\ge 12$

Đặt: $x=\frac{3bc+1}{c}, y=\frac{3ca+1}{a}, z=\frac{3ab+1}{b}$

bất đẳng thức trở thành: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 12$

Theo BĐT Cauchy – Schwarz: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}=x+y+z$

Mà $x+y+z=\frac{3bc+1}{c}+\frac{3ca+1}{a}+\frac{3ab+1}{b}=3(a+b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$\ge 3(a+b+c)+\frac{9}{a+b+c}\ge 3(a+b+c)+\frac{3}{a+b+c}+\frac{6}{a+b+c}\ge 6+\frac{6}{a+b+c}\ge 12$

Câu 25. (TS vào 10-Chuyên Nam Định 23-24)

1. Xét các số thực $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $0\le x,\ y,\ z\le 4$. Chứng minh rằng:

$x^2y+y^2z+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$.

2. Ban đầu trên bảng viết 2023 số thực. Mỗi lần biến đổi số trên bảng là việc thực hiện như sau: Chọn ra hai số a và b nào đó ở trên bảng, xóa hai số đó đi và viết thêm lên bảng số $\frac{a+b}{4}$. Giả sử ban đầu trên bảng ghi 2023 số 1 và ta thực hiện liên tiếp các biến đổi cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số, chứng minh rằng số đó lớn hơn $\frac{1}{2^{11}}$.

Lời giải

1. Có $P=\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)-\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)$

$=x^2(y-z)+y^2(z-y+y-x)+z^2(x-y)$

$=(y-z)\left(x^2-y^2\right)+(x-y)\left(z^2-y^2\right)=-(x-y)(y-z)(z-x)$.

$|P|=|x-y||y-z||z-x|$. Ta đi chứng minh $|P|\le 16$.

Không mất tổng quát coi $0\le z\le y\le x\le 4$. Khi đó

$$|P|=(x-z).(x-y)(y-z)\le(x-z).\frac{(x-y+y-z)^2}{4}=\frac{(x-z)^3}{4}.$$

Mặt khác $0\le x-z\le 4$ nên $|P|\le\frac{(x-z)^3}{4}\le\frac{4^3}{4}=16$. Suy ra $P\ge -16$ hay có điều phải chứng minh.

2. Nhận xét: Nếu ban đầu bảng viết toàn số dương thì sau mỗi bước biến đổi, các số viết trên bảng vẫn dương.

Kí hiệu T_i là tổng các nghịch đảo của các số thực viết trên bảng ngay sau bước biến đổi thứ i ($i=\overline{0,2022}$; $i=0$ coi là trạng thái ban đầu). Giả sử ở bước $i+1$ ta xóa đi hai số dương a,b và viết lên bảng số $\frac{a+b}{4}$ thì: $T_{i+1}-T_i=\frac{1}{\frac{a+b}{4}}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\le 0$.

Do đó có $T_{2022}\le T_{2021}\le\cdots\le T_0$.

Ban đầu có 2023 số 1 nên $T_0=2023$, sau 2022 bước thì trên bảng còn lại số dương x, khi đó $T_{2022}=\frac{1}{x}\le T_0=2023$, suy ra $x\ge\frac{1}{2023}>\frac{1}{2048}=\frac{1}{2^{11}}$.

Câu 26. (TS vào 10-Chuyên Nghệ An 23-24)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a,b,c\ge 1$ và $a^2+4b^2+c^2+2ab+12=3(a+5b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{a^3}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}$.

Lời giải

$$a^2+4b^2+c^2+2ab+12=3(a+5b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2-3(a+b)+c^2-3c+3(b-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2+c^2-3(a+b+c)=-3(b-2)^2\le 0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2+c^2\le 3(a+b+c)\qquad (1)$$

Mà $(a+b)^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{2}\le 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a+b+c\le 6\qquad (2)$$

Ta có $T=\dfrac{a^3}{a+(a+b)^2}+\dfrac{a^2}{a+c^2}\ge\dfrac{a^2}{a+(a+b)^2}+\dfrac{a^2}{a+c^2}\ge\dfrac{4a^2}{2a+(a+b)^2+c^2}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow(a+b)^2+c^2\le3(a+b+c)\le18$

$\Rightarrow T\ge\dfrac{4a^2}{2a+18}$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{4a^2}{2a+18}\ge\dfrac{1}{5}$ (3)

Thật vậy, $(3)\Leftrightarrow20a^2\ge2a+18$

Vì $a\ge1\Rightarrow\begin{cases}2a^2\ge2a\\18a^2\ge18\end{cases}$

$\Rightarrow20a^2\ge2a+18$ suy ra bất đẳng thức (3) đúng

$\Rightarrow T\ge\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow\min T=\dfrac{1}{5}$ đạt được $\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\a+b=c\\a+b+c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a=1\\c=3\end{cases}$

Câu 27. (TS vào 10-Chuyên Ninh Bình 23-24)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}}\ge2.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$\sqrt{b^3+1}=\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}\le\dfrac{b+1+b^2-b+1}{2}=\dfrac{b^2+2}{2}$

$\sqrt{c^3+1}\le\dfrac{c^2+2}{2}$; $\sqrt{a^3+1}\le\dfrac{a^2+2}{2}$

Do đó VT $\ge\dfrac{2a}{b^2+2}+\dfrac{2b}{c^2+2}+\dfrac{2c}{a^2+2}$

Ta cần CM: $S=\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}\ge 2$

Ta có: $\frac{2a}{b^2+2}=\frac{a\left(b^2+2\right)-ab^2}{b^2+2}=a-\frac{ab^2}{b^2+2}$

Lại có $\frac{ab^2}{b^2+2}=\frac{2ab^2}{b^2+b^2+4}\le\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{b^4.4}}=\frac{a\sqrt[3]{2b^2}}{3}\le\frac{a.(2+b+b)}{9}=\frac{2a(b+1)}{9}$

Tương tự ta được

$S\ge a+b+c-\frac{2(a+b+c)}{9}-\frac{2(ab+bc+ca)}{9}$

$=\frac{7(a+b+c)}{9}-\frac{2(cb+bc+ca)}{9}$.

Ta có $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$.

Do đó $S\ge\frac{7.6}{9}-\frac{2}{9}.\frac{6^2}{3}=2$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$. Ta có đpcm

Câu 28. (TS vào 10-Chuyên Phú Thọ 23-24)

Xét các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+9ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}.$$

Lời giải

Ta có $\left(a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}\right).F\ge(a+b+c)^2$

Đặt $Q=a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}$

$Q^2=\left[\sqrt{a}\sqrt{a^3+9abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+9abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc}\right]^2\le(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right)$

Ta lại có $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)\le(a+b+c)^3-24abc$

$\Rightarrow(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right)\le(a+b+c)\left[(a+b+c)^3+3abc\right]$ mà $3abc\le\frac{(a+b+c)^3}{9}$

$\Rightarrow(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right)\le\frac{10(a+b+c)^4}{9}$

$\Rightarrow Q\le \dfrac{\sqrt{10}\left(a+b+c\right)^2}{3}$ mà $\left(a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}\right).F\ge \left(a+b+c\right)^2$

Suy ra $F\ge \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Vậy $\min F=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ khi $a=b=c$

Câu 29. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $4a^2+b^2=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{4a}{2+b}+\frac{b}{1+a}+\frac{2024}{2a+b}.$$

Lời giải

Ta có $4a^2+b^2\ge 4ab\Leftrightarrow 2\left(4a^2+b^2\right)\ge \left(2a+b\right)^2$

$\Leftrightarrow 4\ge \left(2a+b\right)^2\Leftrightarrow 2a+b\le 2\Leftrightarrow a+\dfrac{b}{2}\le 1.$

Đặt $x=a;\ y=\dfrac{b}{2}$, ta có $x+y\le 1$.

Khi đó $\dfrac{1}{2}T=\dfrac{a}{1+\dfrac{b}{2}}+\dfrac{b}{2\left(1+a\right)}+\dfrac{506}{a+\dfrac{b}{2}}=\dfrac{x}{1+y}+\dfrac{y}{1+x}+\dfrac{506}{x+y}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$\dfrac{x}{1+y}+\dfrac{4}{9}x\left(1+y\right)\ge \dfrac{4}{3}x\Leftrightarrow \dfrac{x}{1+y}\ge \dfrac{8}{9}x-\dfrac{4}{9}xy$;

$\dfrac{y}{1+x}+\dfrac{4}{9}y\left(1+x\right)\ge \dfrac{4}{3}y\Leftrightarrow \dfrac{y}{1+x}\ge \dfrac{8}{9}y-\dfrac{4}{9}xy$.

Suy ra $\dfrac{1}{2}T\ge \dfrac{8}{9}\left(x+y\right)-\dfrac{8}{9}xy+\dfrac{506}{x+y}\ge \dfrac{8}{9}\left(x+y\right)+\dfrac{8}{9(x+y)}+\dfrac{4546}{9(x+y)}-\dfrac{8}{9}xy$.

$\ge \dfrac{8}{9}.2+\dfrac{4546}{9}-\dfrac{8}{9}.\dfrac{1}{4}=\dfrac{1520}{3}$. (để ý $xy\le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\le \dfrac{1}{4}$)

Do đó $T\ge \dfrac{3040}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$ hay $a=\dfrac{1}{2};\ b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\dfrac{3040}{3}$ đạt được khi $a=\dfrac{1}{2};\ b=1$.

Câu 30. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

Cho ba số thực dương $x\,;y\,;z$ thoả mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}-x^2-28y^2-28z^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=2.\sqrt{\frac{x}{x+y}.\frac{x}{x+z}}\le\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}=\frac{1}{4}.2.\sqrt{\frac{y}{y+z}.\frac{4y}{x+y}}\le\frac{1}{4}.\frac{y}{y+z}+\frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}\le\frac{1}{4}.\frac{z}{y+z}+\frac{z}{x+z}$$

$$\Rightarrow\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\quad(1)$$

Lại có $x^2+28y^2+28z^2=\frac{1}{2}(x-7y)^2+\frac{1}{2}(x-7z)^2+\frac{7}{2}(y-z)^2+7\ge7\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow P\le\frac{9}{4}-7=-\frac{19}{4}$

Dấu " =" xảy ra $\begin{cases}x=7y=7z\\xy+yz+zx=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{7\sqrt{15}}{15};y=z=\frac{\sqrt{15}}{15}$

Vậy $Max\,P=\frac{-19}{4}$.

Câu 31. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh 23-24)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\ge6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right).$$

Lời giải

▪ Ta có: $a+b+c\ge6$.

$$M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right)=\left(\frac{19}{6}a+\frac{10}{a}\right)+\left(\frac{22}{6}b+\frac{12}{b}\right)+\left(\frac{25}{6}c+\frac{14}{c}\right).$$

▪ Xét $k,m,n>0$: $ka+\frac{10}{a}\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{10k}$; $mb+\frac{12}{b}\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{12m}$; $nc+\frac{14}{c}\overset{Cauchy}{\geq}2\sqrt{14n}$

$*\ a=2\Rightarrow 2k+5\geq 2\sqrt{10k}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ka=\frac{10}{a}\Rightarrow 2k=5\Leftrightarrow k=\frac{5}{2}$.

$*$ Tương tự ta tìm được: $m=3$, $n=\frac{7}{2}$.

▪ Do đó: $M=\left(\frac{5}{2}a+\frac{10}{a}\right)+\left(3b+\frac{12}{b}\right)+\left(\frac{7}{2}c+\frac{14}{c}\right)+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c$

$\Rightarrow M\geq 2\sqrt{25}+2\sqrt{36}+2\sqrt{49}+\frac{2}{3}.6=40$.

▪ Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$.

▪ Vậy $M_{Min}=40$ khi $a=b=c=2$.

Câu 32. (TS vào 10-Chuyên Quảng Trị 23-24)

Cho các số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $ab+bc+ca=abc.$

1. Chứng minh $a+b+c\geq 9.$

2. Chứng minh $a+b+c\geq 4\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)+5.$

Lời giải

1. Ta có $ab+bc+ca=abc\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$

Cách 1: Khi đó $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$

Cách 2: $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 3+2+2+2=9$

2. Ta có:

$$a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}-3$$

$$\geq\frac{4(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}-3=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{abc}+5=4\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)+5$$

Câu 33. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy+2z^2+2z}+\frac{1}{yz+2x^2+2x}+\frac{1}{xz+2y^2+2y}\geq\frac{1}{xy+yz+zx}.$$

Lời giải

Ta có:

$$xy+2z^2+2z=xy+2z^2+2z(x+y+z)=(x+2z)(y+2z)$$

$$=\frac{(xy+2yz)(xy+2xz)}{xy}\leq\frac{\left[(xy+2yz)+(xy+2xz)\right]^2}{4xy}=\frac{(xy+yz+zx)^2}{xy}$$

Suy ra $\dfrac{1}{xy+2z^2+2z}\geq\dfrac{xy}{(xy+yz+zx)^2}$ (1)

Tương tự ta có

$$\frac{1}{yz+2x^2+2x}\geq\frac{yz}{(xy+yz+zx)^2}\ (2)$$

$$\frac{1}{zx+2y^2+2y}\geq\frac{zx}{(xy+yz+zx)^2}\ (3)$$

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{1}{xy+2z^2+2z}+\frac{1}{yz+2x^2+2x}+\frac{1}{xz+2y^2+2y}\geq\frac{xy+yz+zx}{\left(xy+yz+zx\right)^2}=\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Câu 34. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

Cho $x\geq1,\ 0<y\leq1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}\geq\dfrac{x}{x^2+y}+\dfrac{y}{y^2+x}$

Lời giải

Với giả thiết đã cho, ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{y+1}\geq\dfrac{x}{x^2+y}$ (1) và $\dfrac{1}{x+1}\geq\dfrac{y}{y^2+x}$ (2)

$(1)\Leftrightarrow xy+x-x^2-y\leq0\Leftrightarrow y\left(x-1\right)+x\left(1-x\right)\leq0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(y-x\right)\leq0\ (3)$

(3) đúng do $x\geq1, 0<y\leq1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1, 0<y\leq1$.

$(2)\Leftrightarrow xy+y-y^2-x\leq0\Leftrightarrow y\left(x-y\right)-\left(x-y\right)\leq0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(y-1\right)\leq0\ \ (4)$

(4) đúng vì $x\geq1, 0<y\leq1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.

Cộng vế theo vế, ta có $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{y^2+x}$ (đpcm)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.

Câu 35. (TS vào 10-ChuyênSơn La 23-24)

Cho $x;y;z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz.$

Lời giải

Ta có: $x+y+z=xyz\Leftrightarrow\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=1$

$$VT(*)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}+\sqrt{\frac{1+y^2}{y^2}}++\sqrt{\frac{1+z^2}{z^2}}$$

Xét $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}}$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ (dấu bằng xảy ra khi $y=z$)

Tương tự: $\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ (dấu bằng xảy ra khi $z=x$)

$\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$ (dấu bằng xảy ra khi $y=x$)

$$VT(*)\le\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{2}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$\le3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Vậy ta phải chứng minh $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le xyz$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\le(xyz)^2$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\le x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$

$\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)\le 2(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

Dấu bằng xảy ra $x=y=z$.

Câu 36. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x>1, y>1$

a) Chứng minh rằng $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{T}=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$

Lời giải

a) Chứng minh rằng $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số thực dương $(x-1)$ và 1 ta được

$x=(x-1)+1\ge 2\sqrt{(x-1)\cdot 1}=2\sqrt{x-1}$

Vậy $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$ với mọi số thực $x>1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=1\Leftrightarrow x=2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{T}=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số thực dương $\dfrac{x^2}{y-1}$ và $\dfrac{y^2}{x-1}$ ta được

$$T=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}\cdot\frac{y^2}{x-1}}=2\cdot\frac{x}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y-1}}\ge 2\cdot 2\cdot 2=8$$

Vậy $\min T=8$ khi $x=y=2$.

Câu 37. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}$ với $a>4$.

Lời giải

$$Q=\frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}=\frac{a-4\sqrt{a}+4+\sqrt{a}-2+4}{\sqrt{a}-2}$$

$$=\sqrt{a}-2+\frac{4}{\sqrt{a}-2}+1\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{a}-2\right).\frac{4}{\sqrt{a}-2}}+1=5$$

Dấu = xảy ra khi $\sqrt{a}-2=\frac{4}{\sqrt{a}-2}\Leftrightarrow\sqrt{a}-2=2\Leftrightarrow a=16$

Vậy $\min Q=5$ khi $a=16$.

Câu 38. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Long 23-24)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}$.

Lời giải

Đặt $P=\frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

$=\left(\frac{1}{9}\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)+\frac{8}{9}\sqrt{x^2+9}$

$\Rightarrow P\ge 2.\frac{1}{3}+\frac{8}{9}.3=\frac{10}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{10}{3}$ khi $x=0$.

Câu 39. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)

Cho $a\ge 0,b\ge 0$ thỏa mãn $2a+3b\le 6$ và $2a+b\le 4$. Chứng minh rằng: $-\frac{22}{9}\le a^2-2a-b\le 0$.

Lời giải

$2a+3b\le 6\Rightarrow -b\ge\frac{2}{3}a-2$

$a^2-2a-b\ge a^2-2a+\frac{2}{3}a-2=\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{22}{9}\ge-\frac{22}{9}(1)$

$2a+b\le 4\Rightarrow 2a^2+ab\le 4a$

$\Rightarrow a^2-2a-b\le-\frac{ab}{2}-b\le 0\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 40. (TS vào 10-Chuyên Bình Thuận 23-24)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{3}{2}$.

Lời giải

*Ta có $ab+bc+ca=3abc\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$.

* Theo AM – GM ta có: $a^2+bc\ge 2\sqrt{a^2bc}=2a\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\le\frac{1}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{4}.2\sqrt{\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{b}{b^2+ca} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ và $\frac{c}{c^2+ab} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Suy ra $\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$ (đpcm)

Câu 41. (TS vào 10-Chuyên Nga – Pháp – Trung Hoà Bình 23-24)

Cho a; b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a+b}{\sqrt{a(8a+b)}+\sqrt{b(8b+a)}}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a+b}{\sqrt{a(8a+b)}+\sqrt{b(8b+a)}}=\frac{3(a+b)}{\sqrt{9a(8a+b)}+\sqrt{9b(8b+a)}}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được:

$\sqrt{9a(8a+b)} \le \frac{9a+(8a+b)}{2}=\frac{17a+b}{2}$ (2) và $\sqrt{9b(8b+a)} \le \frac{9b+(8b+a)}{2}=\frac{17b+a}{2}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $\sqrt{9a(8a+b)}+\sqrt{9b(8b+a)} \le 9a+9b$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: $\frac{a+b}{\sqrt{9a(8a+b)}+\sqrt{9b(8b+a)}} \ge \frac{3(a+b)}{9a+9b}=\frac{1}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Vậy $\min P=\frac{1}{3}$, đạt khi $a=b$.

Câu 42. (TS vào 10-Chuyên Tin Hoà Bình 23-24)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2023}{1-x}+\frac{1}{x}$, với $0<x<1$.

Lời giải

Ta có $P=\frac{2023}{1-x}+\frac{1}{x}=\frac{(2023-2023x)+2023x}{1-x}+\frac{(1-x)+x}{x}$

$=2024+\frac{2023x}{1-x}+\frac{1-x}{x} \ge 2024+2\sqrt{\frac{2023x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{x}}=2024+2\sqrt{2023}$

(áp dụng BĐT Côsi với 2 số dương)

Đẳng thức xảy ra $\frac{2023x}{1-x}=\frac{1-x}{x} \Leftrightarrow 2023x^2=(1-x)^2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2023}+1}$

(loại nghiệm $x=\frac{1}{1-\sqrt{2023}}$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2024+2\sqrt{2023}$ khi $x=\frac{1}{\sqrt{2023}+1}$.

Câu 43. (TS vào 10-Chuyên Thái Nguyên 23-24)

Cho x, y là các số thực dương thoả mãn: $4x^2+9y^2=10$. CMR: $P=\dfrac{(2x+9y)^3}{4(x^2+y^2)-4x-8y+55}\le 20$

Lời giải

Nhận thấy $x=\dfrac{1}{2}; y=1$ là 1 điểm thoả mãn bài ra vì vậy:

$$(2x+9y)^2=(1.2x+3.3y)^2\le 10(4x^2+9y^2)=100\Rightarrow 2x+9y\le 10\Rightarrow (2x+9y)^3\le 1000$$

$$4(x^2+y^2)-4x-8y+55=(2x-1)^2+(2y-2)^2+50\ge 50$$

Vậy $P=\dfrac{(2x+9y)^3}{4(x^2+y^2)-4x-8y+55}\le 20$. Đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{1}{2}; y=1$

Câu 44. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)

a) Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

b) Cho 3 số thực không âm a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca+abc\le 4$. Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$

Lời giải

a) Ta có :

$$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$$

$$b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(a+b)(b+c)$$

$$c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+b)(a+c)$$

Khi đó thay vào P ta được: $P=\dfrac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\dfrac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}+\dfrac{c}{\sqrt{(c+b)(a+c)}}$

$$=2\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{2(c+b)}.\frac{2b}{a+b}}+\sqrt{\frac{2c}{a+c}.\frac{1}{2(b+c)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P\le\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2(c+b)}+\frac{2b}{(a+b)}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2c}{a+c}+\frac{c}{2(b+c)}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{4(b+c)}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{4(c+b}$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{a+b}{a+b}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+c}{4(b+c)}\Leftrightarrow P\le 1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra tại $\begin{cases} \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{a}{a+c} \\ \dfrac{b}{2(b+c)} = \dfrac{2b}{a+b} \\ ab+bc+ca=1 \\ \dfrac{2c}{a+c} = \dfrac{c}{2(c+b)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=7b=7c \\ 2ab+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{\sqrt{15}} \\ b=c=\dfrac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}$

b) Ta có : $ab+bc+ca+abc \le 4$

$\Leftrightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8 \le (ab+2a+2b+4)+(bc+2b+2c+4)+(ac+2a+2c+4)$

$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2) \le (a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)$

$\Leftrightarrow 1 \le \dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2} \Leftrightarrow 2 \le \dfrac{2}{a+2}+\dfrac{2}{b+2}+\dfrac{2}{c+2} \Leftrightarrow 3-2 \ge 1-\dfrac{2}{a+2}+1-\dfrac{2}{b+2}+1-\dfrac{2}{c+2}$

$\Leftrightarrow 1 \ge \dfrac{a}{a+2}+\dfrac{b}{b+2}+\dfrac{c}{c+2} = \dfrac{a^2}{a^2+2a}+\dfrac{b^2}{b^2+2b}+\dfrac{c^2}{c^2+2c}$

Lại có :

$\dfrac{a^2}{a^2+2a}+\dfrac{b^2}{b^2+2b}+\dfrac{c^2}{c^2+2c} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c}$

$\Rightarrow 1 \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c \ge (a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow 2a+2b+2c \ge 2ab+2ac+2bc$

$\Leftrightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca$ (đpcm)

Câu 45. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2023}{ab+bc+ca}$.

Lời giải

Phân tích: Dự đoán điểm rơi: $a=b=c=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \min P = 6072$

+ Ta có: $P = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2023}{ab+bc+ca} = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{ab+bc+ca}+\dfrac{1}{ab+bc+ca}+\dfrac{2021}{ab+bc+ca}$

+ Áp dụng bất đẳng thức phụ: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{9}{a+b+c}$, ta có:

$\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{ab+bc+ca}+\dfrac{1}{ab+bc+ca} \ge \dfrac{9}{(a+b+c)^2} \ge \dfrac{9}{1} = 9$, (vì $0 < a+b+c \le 1$)

+ Áp dụng bất đẳng thức phụ: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \Rightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{ab+bc+ca} \ge \dfrac{3}{(a+b+c)^2} \Rightarrow \dfrac{2021}{ab+bc+ca} \ge \dfrac{2021.3}{(a+b+c)^2} \ge \dfrac{6063}{1} = 6063$ (vì $0 < a+b+c \le 1$)

+ Suy ra: $P \ge 9+6063 = 6072$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

+ Vậy $\min P=6072$ đạt được khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Câu 46. (TS vào 10-Chuyên Năng Khiếu ĐHQG TPHCM 23-24)

Cho các số $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\le\sqrt{3}$.

b) Chứng minh rằng: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le abc\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\le\sqrt{3}$.

Từ giả thiết, ta suy ra: $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có: $(1+1+1)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$

hay: $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\le\sqrt{3\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}=\sqrt{3}$.

b) Chứng minh rằng: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le abc\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$.

Ta có: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}\le1$

$\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{abc}\Rightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le abc\ (1)$

Ta cũng có: $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)=3abc\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le abc\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Câu 47. (TS vào 10-Chuyên Hoà Bình 23-24)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2023}{1-x}+\dfrac{1}{x}$, với $0<x<1$.

Lời giải

Ta có $P=\dfrac{2023}{1-x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2023-2023x)+2023x}{1-x}+\dfrac{(1-x)+x}{x}$

$=2024+\dfrac{2023x}{1-x}+\dfrac{1-x}{x}\ge2024+2\sqrt{\dfrac{2023x}{1-x}\cdot\dfrac{1-x}{x}}=2024+2\sqrt{2023}$

(áp dụng BĐT Côsi với 2 số dương)

Đẳng thức xảy ra $\frac{2023x}{1-x}=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow 2023x^2=(1-x)^2\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2023}+1}$

(loại nghiệm $x=\frac{1}{1-\sqrt{2023}}$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2024+2\sqrt{2023}$ khi $x=\frac{1}{\sqrt{2023}+1}$.

Câu 48. (TS vào 10-Chuyên Bến Tre 23-24)

Cho số thực x thỏa mãn $0<x<\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{2-x}{1-2x}+\frac{1+2x}{3x}$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1}{x}, a>2$. Khi đó $A=\frac{2-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}}+\frac{1+\frac{2}{a}}{\frac{3}{a}}=\frac{2a-1}{a-2}+\frac{a+2}{3}=2+\frac{3}{a-2}+\frac{a-2}{3}+\frac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số dương $\frac{3}{a-2}$ và $\frac{a-2}{3}$, ta được:

$A\geq 2+2\sqrt{\frac{3}{a-2}}\Rightarrow\sqrt{\frac{a-2}{3}}+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=5\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$.

Câu 49. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Cho a,b,c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geq\frac{10}{(a+b+c)^2}$

Lời giải

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Khi đó :

$c\leq a\Rightarrow c^2\leq ac\Rightarrow a^2+c^2\leq a^2+ac\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$

$c\leq b\Rightarrow c^2\leq bc\Rightarrow b^2+c^2\leq b^2+bc\leq\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$

$a^2+b^2\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$

$VT(*)\geq\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}$

Đặt $x=a+\frac{c}{2}; y=b+\frac{c}{2}$. Khi đó $x>0, y>0$ và $x+y=a+b+c$.

Ta có $VT(*) \ge \dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}$

$$\ge \frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{3}{2xy}$$

$$=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}+3.\frac{2}{(x+y)^2}=\frac{10}{(x+y)^2}=\frac{10}{(a+b+c)^2}=VP(*)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}c=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=b\end{cases}$. Do vai trò của a,b,c bình đẳng nên dấu "=" của $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a,b,c có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

Câu 50. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Vinh 23-24)

Xét các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Lời giải

Ta có nhận xét sau $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+1}}\right)^2=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}$

$$=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}}\le\frac{a+b+2}{a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{a+b+1}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}\right)^2$$

Do đó ta được $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+1}}\le 1+\dfrac{1}{\sqrt{a+b+1}}$.

Mặt khác, ta có $(a+b+c)^2\ge a^2+b^2+c^2=1$ suy ra $a+b\ge 1-c$.

Tứ đây kết hợp với $c\le 1$ (vì $c\ge 0$ và $c^2\le 1$), ta suy ra

$$P\le 1+\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}=1+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}\right)^2}=1+\sqrt{\frac{1}{2-c}+\frac{1}{2+c}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}$$

$$=1+\sqrt{\frac{4}{4-c^2}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}\le 1+\sqrt{\frac{4}{4-1}+\frac{2}{\sqrt{4-1}}}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=b=0, c=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

CHUYÊN ĐỀ 8. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Tin Hà Nội 23-24)

Cho đa thức $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2022x+2023$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải

Ta thấy: ghiệm nếu có của đa thức $f(x)$ chắc chắn phải là số âm.

Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ. Xét một nghiệm hữu tỉ $\frac{-a}{b}\left(a,b\in\mathbb{Z}^+,(a,b)=1\right)$ của đa thức $f(x)$. Ta có

$$f\left(\frac{-a}{b}\right)=0\Leftrightarrow a^4-2a^3b+3a^2b^2-2022ab^3+2023b^4=0.$$

Suy ra a^4 chia hết cho b. Mà $(a,b)=1$ nên $b=1$. Từ đó:

$a^4-2a^3+3a^2-2022a+2023=0$.

Suy ra 2023 chia hết cho a hay $a\in\{1;7;17;119;289;2023\}$.

Thử lại ta thấy không có giá trị nào của a thỏa mãn.

Vậy đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Toán Hà Nội 23-24)

Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2-c^2=c, c^2-b^2=b$ và $b^2-a^2=a.$ Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=1.$

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $a+b+c=a^2-c^2+c^2-b^2+b^2-a^2=0.$

Mặt khác, $b^2-a^2=a\Leftrightarrow(a-b)(a+b)=-a\Rightarrow(a-b)c=a.$

Tương tự: $(b-c)a=b,\ (c-a)b=c.$

$\Rightarrow(a-b)(b-c)(c-a)abc=abc.$

Do a,b,c khác $0,$ suy ra $P=1.$

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $abc=2023$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M=\frac{2023a}{ab+2023a+2023}+\frac{b}{bc+b+2023}+\frac{c}{ca+c+1}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $abc=2023$, ta có

$$M=\frac{2023a}{ab+2023a+2023}+\frac{b}{bc+b+2023}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc}+\frac{b}{bc+b+abc}+\frac{c}{ac+c+1}$$

$$=\frac{a^2bc}{ab(ac+c+1)}+\frac{b}{b(ac+c+1)}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{ac}{ac+c+1}+\frac{1}{ac+c+1}+\frac{c}{ac+c+1}.$$

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Đăk Lăk 23-24)

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=1$. Tính giá trị biểu thức $P=x_1x_2x_3x_4$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right)-1=0$

Đặt $t=x^2+8x+7\ (t\ge -9)$. Ta được $t^2+8t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4+\sqrt{17}\ (TMĐK) \\ t=-4-\sqrt{17}\ (TMĐK) \end{array}\right.$.

Khi đó, PT đã cho tương đương $\left[\begin{array}{l} x^2+8x+11-\sqrt{17}=0 \\ x^2+8x+11+\sqrt{17}=0 \end{array}\right.$.

Vậy $P=x_1x_2x_3x_4=\left(11-\sqrt{17}\right)\left(11+\sqrt{17}\right)=104$.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Cho hai số dương x, y thoả mãn $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\sqrt{15}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$$

Lời giải

$P=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\sqrt{15}$

Đặt $M=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy \Rightarrow M^2=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+x^2y^2+2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$

$=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$

$=x^2\left(y^2+1\right)+y^2\left(x^2+1\right)+2x\sqrt{y^2+1}.y\sqrt{x^2+1}+1$

$=\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2+1$

$=16 \Rightarrow M=4$. Vậy $P=4-\sqrt{15}$.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)

Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ca}+\dfrac{1}{c^2+2ab}=0.$

Lời giải

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\Leftrightarrow ab+bc+ca=0$

Ta có : $a^2+2bc=a^2+bc+(-ab-ca)=(a-b)(a-c).$

Tương tự có : $b^2+2ca=(b-c)(b-a);\ c^2+2ab=(c-a)(c-b).$

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}=\frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0$$

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $abc\neq 0$ và $a+b+c\neq 0$. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}=-2$ thì $\dfrac{1}{a^{2023}}+\dfrac{1}{b^{2023}}+\dfrac{1}{c^{2023}}=\dfrac{1}{a^{2023}+b^{2023}+c^{2023}}$.

Lời giải

Điều kiện $abc\neq 0$ và $a+b+c\neq 0$

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=-2\Leftrightarrow (a+b)ab+(b+c)bc+(c+a)ca=-2abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2b+ab^2\right)+\left(b^2c+abc\right)+\left(bc^2+c^2a\right)+\left(ca^2+abc\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(ab+bc+c^2+ca\right)=0\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=0\\ b+c=0\\ c+a=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-b\\ b=-c\\ c=-a\end{array}\right.$$

Vì a,b,c vai trò như nhau. Giả sử $a=-b$

$$\frac{1}{a^{2023}}+\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{c^{2023}}=\frac{1}{(-b)^{2023}}+\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{c^{2023}+b^{2023}-b^{2023}}$$

$$=-\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{(-b)^{2023}+b^{2023}+c^{2023}}=\frac{1}{a^{2023}+b^{2023}+c^{2023}}$$

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Nam Định 23-24)

1. Cho $x,\ y,\ z$ là ba số thực khác 0 thỏa mãn $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=0$. Chứng minh rằng $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

2. Cho $f(n)=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức:

$$S=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40).$$

Lời giải

1. Từ $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$ suy ra $yz+2zx+3xy=0$ (1).

Từ $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ suy ra $1=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+2\left(x\cdot\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{3}+\frac{z}{3}\cdot x\right)$

$=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+\frac{3xy+yz+2zx}{3}$ (2).

Kết hợp (1) và (2) suy ra $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

2. Ta có $f(n)=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)}{(2n+1)-(2n-1)}$ (do $\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\neq 0$)

$=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$.

Áp dụng điều trên có:

$S=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$

$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+\cdots+\left(\sqrt{81}-\sqrt{79}\right)$

$=\sqrt{81}-\sqrt{1}=9-1=8$.

Vậy $S=8$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Ninh Bình 23-24)

a) Cho a,b là hai số thực dương phân biệt thỏa mãn $(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}-\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

b) Biết đa thức $f(x)=x^3-23x+24$ có ba nghiệm phân biệt a,b,c. Tính giá trị của biểu thức $Q=a^3+b^3+c^3$.

Lời giải

a) $P=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+b\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$

$$=\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

$*(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1$

$\Leftrightarrow 1-b-a+ab+2\sqrt{ab}=1$

$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b=ab$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{ab}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{ab} & (khi\ \ a>b)\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=-\sqrt{ab} & (khi\ \ a<b)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1\\ \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=-1\end{array}\right.$$

*Vậy $P=1\left(\text{khi}\, a>b\right)$ hoặc $P=-1$ (khi $a<b$).

b) Vì a,b,c là ba nghiệm của $f\left(x\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases}a^3-23a+24=0\\ b^3-23b+24=0\\ c^3-23c+24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3=23a-24\\ b^3=23b-24\\ c^3=23c-24\end{cases}$$

$\Rightarrow Q=23(a+b+c)-72$

Theo Viet: $a+b+c=0$.

Do đó: $Q=-72$.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Phú Thọ 23-24)

Cho $f\left(x\right)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}}$ với $x\neq 0, x\neq -1$. Tính $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+...+f\left(2023\right)$.

Lời giải

Xét biểu thức tổng quát $\left(1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)^2$ với $a\neq 0, a\neq -1$ ta có:

$$\left(1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)^2=1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(a+1\right)^2}+\frac{2}{a}-\frac{2}{a+1}-\frac{2}{a\left(a+1\right)}$$

$$=1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(a+1\right)^2}+\frac{2\left(a+1-a-1\right)}{a\left(a+1\right)}=1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(a+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1} \quad (*)$$

Áp dụng (*) ta có:

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2023)$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{(1+1)^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{(2+1)^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{(3+1)^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2023^2}+\frac{1}{(2023+1)^2}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2023^2}+\frac{1}{2024^2}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)$$

$$=2024-\frac{1}{2024}=\frac{4096575}{2024}$$

CHUYÊN ĐỀ 8. GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC
Phần I: Đề thi và đáp án.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Quảng Trị 23-24)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=a+b+c.$

Chứng minh $a=b=c.$

Lời giải

Ta có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=a+b+c \Leftrightarrow ab^{2}+bc^{2}+ca^{2}=abc(a+b+c)$

$\Leftrightarrow 2\ ab^{2}+2\ bc^{2}+2\ ca^{2}=2ab.bc+2bc.ca+2ca.ab$

$\Leftrightarrow\ ab-bc^{2}+bc-ca^{2}+ca-ab^{2}=0 \Leftrightarrow a=b=c$

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}.$

Lời giải

a) Ta có:

$$A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$$

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Phú Yên 23-24)

Cho biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{2}\ (a>1,b>1)$. Chứng minh rằng $ab-\sqrt{1-a^2b^2+a^2+b^2}=1$

Lời giải

b) Ta có:

$a>1,\ b>1$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=2a^2b^2-2ab$

Khi đó: $B=ab-\sqrt{1-a^2b^2+2a^2b^2-2ab}=ab-\sqrt{(ab-1)^2}$

Vì $a>1,\ b>1\Rightarrow ab>1$ nên $B=ab-ab+1=1$ (đpcm)

Câu 14. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn 23-24)

1. Cho các số thực x,y thõa mãn $x\neq 0$ và $\left(x+\sqrt{x^2+2023}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2023}\right)=2023$

Tính giá trị biểu thức: $\dfrac{2024x+y}{2023x-y}$

2. Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau thõa mãn: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$

Chứng minh rằng: $\dfrac{bc}{a^2+2bc}+\dfrac{ca}{b^2+2ca}+\dfrac{ab}{c^2+2ab}=1$

Lời giải

1. Ta có: $\left(\sqrt{x^2+2023}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2023}-x\right)=x^2+2023-x^2=2023$ (1) (1)

$$\left(\sqrt{y^2+2023}+y\right)\left(\sqrt{y^2+2023}-y\right)=y^2+2023-y^2=2023\ (2)$$

Từ 91) và (2) kết hợp với giải thiết ta suy ra $\sqrt{x^2+2023}-x=\sqrt{y^2+2023}+y$ (3)

Từ (20 kết hợp giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2+2023}-x=\sqrt{y^2+2023}-y$ (4)

Lấy $(3)-(4)$ theo vế ta được: $-2x=2y\Rightarrow y=-x$

Khi đó: $P=\dfrac{2024x-x}{2023x+x}=\dfrac{2023}{2024}$

2.Từ giả thiết: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\Rightarrow ab+bc+ca=0\Leftrightarrow bc=-ab-ac$

Suy ra: $a^2+2bc-(b-a)(b-c),c^2+2ab=(c-a)(c-b)$

Đặt $M=\dfrac{bc}{a^2+2bc}+\dfrac{ca}{b^2+2ca}+\dfrac{ab}{c^2+2ab}$. Ta có:

$$2M=\frac{2bc}{a^2+2bc}+\frac{2ca}{b^2+2ca}+\frac{2ab}{c^2+2ab}\Rightarrow 3-2M=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1$$

Ta có: $3-2M=1\Rightarrow M=1(dpcm)$

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

a) Cho các số thực $x;y$ khác 0, thoả mãn: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3$ và $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=10$.

Chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

b) Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn đồng thời các điều kiện $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=8$; $a+b+c=26; abc=144$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{bc}-\sqrt{a}+9}+\frac{1}{\sqrt{ca}-\sqrt{b}+9}+\frac{1}{\sqrt{ab}-\sqrt{c}+9}$$

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases}x^2+y^2=3xy\\x^3+y^3=10xy\end{cases}$$

$$\Rightarrow(x+y)\left(x^2+y^2\right)=3xy(x+y)\Rightarrow x^3+y^3+xy(x+y)=3xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 10xy=2xy(x+y)\Leftrightarrow x+y=5\left(x,y\neq 0\right)$$

Lại có $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=3xy+2xy=5xy\Rightarrow xy=5$

$$\Rightarrow\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \text{ (đpcm).}$$

b) Đặt $\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\right)=(x,y,z)$ (điều kiện $x,y,z\geq 0$)

$$\Rightarrow x+y+z=8; x^2+y^2+z^2=26; x^2y^2z^2=144$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}=19; xyz=12$$

Ta có $yz-x+9=yz-x+x+y+z+1=(y+1)(z+1)$

Tương tự $xz-y+9=(x+1)(z+1); xy-z+9=(x+1)(y+1)$

$$P=\frac{1}{\sqrt{bc}-\sqrt{a}+9}+\frac{1}{\sqrt{ca}-\sqrt{b}+9}+\frac{1}{\sqrt{ab}-\sqrt{c}+9}$$

$$=\frac{1}{yz-x+9}+\frac{1}{xz-y+9}+\frac{1}{xy-z+9}=\frac{x+1+y+1+z+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

$$=\frac{x+y+z+3}{xyz+x+y+z+xy+yz+zx+1}=\frac{11}{12+19+8+1}=\frac{11}{40}$$

Vậy $P=\frac{11}{40}$.

Câu 16. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)

Tính giá trị của biểu thức $T=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có: $T=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{12+2.2\sqrt{3}.1+1}-\sqrt{12-2.2\sqrt{3}.1+1}$ $=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}-\sqrt{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}$

$=\left|2\sqrt{3}+1\right|-\left|2\sqrt{3}-1\right|=2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+1=2$.

Câu 17. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh 23-24)

Cho a,b,c là ba số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{2a}{b}=\frac{3b}{c}=\frac{c}{6a}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{4ac-cb}{bc+2ab}$.

Lời giải

Đặt: $\frac{2a}{b}=\frac{3b}{c}=\frac{c}{6a}=t\Rightarrow\begin{cases}2a=bt\\ b=\frac{c}{3}t=2at^2\\ c=6at\end{cases}\Leftrightarrow 2a=2at^3\Leftrightarrow t=1$.

Suy ra: $\begin{cases}b=2a\\ c=6a\end{cases}$.

Do đó: $P=\frac{4ac-cb}{bc+2ab}=\frac{4a.6a-6a.2a}{2a.6a+2a.2a}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

Câu 18. (TS vào 10-Chuyên Sơn La 23-24)

Tính giá trị biểu thức Q khi $x=2024+2\sqrt{2023};\ y=2024-2\sqrt{2023}$.

Lời giải

$$Q=\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2024-2\sqrt{2024}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2023}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2023}-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{2023}+1-\sqrt{2023}+1=2$$

Câu 19. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(x^2+2x+2021\right)^{2024}$ tại $x=\sqrt{\dfrac{2}{x-\sqrt{15}}}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$

Lời giải

Ta có:

$$x=\sqrt{\frac{2}{4-\sqrt{15}}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}-\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-1=\sqrt{3}-1$$

Suy ra $(x+1)^2=3\Leftrightarrow x^2+2x=2$

Do đó $P=\left(x^2+2x+2021\right)^{2024}=\left(2+2021\right)^{2024}=2023^{2024}$.

Câu 20. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Cho hai số dương x,y thoả mãn $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\sqrt{15}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$$

Lời giải

$$P=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\sqrt{15}$$

Đặt

$$M=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy\Rightarrow M^2=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+x^2y^2+2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$$

$$=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$$

$$=x^2\left(y^2+1\right)+y^2\left(x^2+1\right)+2x\sqrt{y^2+1}.y\sqrt{x^2+1}+1$$

$$=\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2+1$$

$=16\Rightarrow M=4$. Vậy $P=4-\sqrt{15}$.

CHUYÊN ĐỀ 9. SỐ HỌC

PHẦN 1: CHUYÊN ĐỀ CÁC BÀI TOÁN CHIA HẾT

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Tin Hà Nội 23-24)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 3, từ đó suy ra p^2 chia 2 và 3 đều dư 1. Suy ra p^2+2 có dạng $6k+3$ với k là số tự nhiên. Do đó:

$2^{p^2+2}-8=2^{6k+3}-8\equiv 1-8\equiv 0\pmod 7$.

Và

$2^{p^2+2}-8=2^{6k+3}-8\equiv -1-8\equiv 0\pmod 3$.

Như vậy $2^{p^2+2}-8$ chia hết cho cả 3 và 7 mà $(3,7)=1$ nên $2^{p^2+2}-8$ chia hết cho [3,7]=21.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Toán Hà Nội 23-24)

Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.

Lời giải

Chứng minh trong ba số a,b,c có ít nhất một số chẵn $\Rightarrow abc \vdots 2.$ (1)

Chứng minh trong ba số a,b,c tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3.

Giả sử $a\vdots 3\Rightarrow b^2+c^2\vdots 3$

Suy ra b và c chia hết cho $3\Rightarrow abc\vdots 27.$ (2)

Do $(2,27)=1$ nên từ (1) và (2) suy ra $abc\vdots 54.$

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Bắc Ninh 23-24)

Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$

Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$

$\Rightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3=18(x+y+z)$

$\Rightarrow (x+y+z)^3-3xy(x+y)-3(x+y)z(x+y+z)=18(x+y+z)$

Suy ra $(x+y+z)^3\vdots 3\Rightarrow (x+y+z)\vdots 3$ (vì 3 là số nguyên tố) (1)

Lại có $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$ suy ra $x^3+y^3+z^3$ chẵn

Suy ra x, y, z cùng chẵn hoặc có hai số lẻ và một số chẵn $\Rightarrow (x+y+z)\vdots 2$ (2)

Từ (1), (2) và $(2;3)=1$ suy ra $x+y+z$ chia hết cho 6.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)
Cho p là số nguyên tố lơn hơn 3. Chứng minh $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Lời giải

Ta có $(p-1)(p+1)=p^2-1$, vì p^2 là số chính phương nên p^2 chia 3 dư 0 hoặc 1, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho $3 \Rightarrow p^2$ không chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow p^2-1 \vdots 3\ (^*)$

Ta lại có p là số nguyên tố lơn hơn 3 nên p lẻ suy ra $(p-1)(p+1)$ là tích của 2 số chẵn liên tiếp suy ra tích $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 8 $(**)$.

Từ $(^*)$ và $(**)$ kết hợp với $(3;8)=1$ $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Đăk Lăk 23-24)
Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó, ta luôn chọn được 5 đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Lời giải

Gọi độ dài đường kính 17 đường tròn đó lần lượt là a_1, a_2, a_3, ... , a_{17} $(a_1, a_2, a_3, ... a_{17} \in \mathbb{Z})$

Chia 17 số trên thành các tập A_i trong đó A_i là tập các số chia 5 dư i $(i=0,4)$. Nếu có 1 tập nào đó chứa nhiều hơn 5 số thì tổng 5 số đó chia hết cho 5. Còn nếu mọi tập đều chứa ít hơn 5 phần tử, xét 4 tập bất kì, khi đó tổng số phần tử 4 tập này không quá 16 phần tử, do đó có ít nhất 1 phần tử thuộc vào tập còn lại.
Vậy ta có 5 phần tử thuộc 5 tập khác nhau nên tổng 5 số này chia hết cho 5.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Gia Lai 23-24)
Chứng minh tổng $1^3+2^3+3^3+...+103^3+104^3$ chia hết cho 7.

Lời giải

+) Ta đi chứng minh đẳng thức tổng quát.
$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$

- Với $n=1$; $n=2$ đẳng thức luôn đúng.
- Giả sử đẳng thức đúng với $n=k$: $1^3+2^3+3^3+...+k^3=(1+2+3+...+k)^2$
- Ta đi chứng minh đẳng thức đúng với *n=k+1*

Khi đó đẳng thức cần chứng minh:
$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=[1+2+3+...+k+(k+1)]^2$

Mà $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2} \Rightarrow (1+2+3+4+...+n)^2=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Suy ra $\dfrac{(k^2+k)^2}{4}+(k+1)^3=\dfrac{(k^2+3k+2)^2}{4}$

$\Leftrightarrow (k^2+3k+2)^2-(k^2+k)^2=\dfrac{(k^2+3k+2)^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4k^3+12k^2+12k+4=4(k+1)^3$

$\Leftrightarrow 4(k+1)^3=4(k+1)^3$ (luôn đúng)

+) Áp dụng công thức với $n=104$. Ta có
$1^3+2^3+3^3+...+103^3+104^3=(1+2+3+4+...+104)^2$

Mà $1+2+3+4+...+104=(1+104).104:2=5460$;

Lại có $5460 \vdots 7$

Nên $1^3+2^3+3^3+...+103^3+104^3 \vdots 7$ (đpcm)

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-2)

Tìm các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0$.

Lời giải

a) Tìm các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0$.

Ta có $4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0 \Leftrightarrow (2x-y+1)^2+4(y+1)^2\le 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=1\\(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=0\end{array}\right.$$

TH1: $(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y+1=0\\y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$.

TH2: $(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-y+1=0\\4(y+1)^2=1\end{cases}(vn)\\ \begin{cases}(2x-y+1)^2=1\\y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+2)^2=1\\y=-1\end{cases}(vn).\end{array}\right.$

Vậy có đúng một cặp số thỏa mãn (x; y) = (-1; -1).

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Khánh Hòa 23-24)

Chứng minh p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Lời giải

a) Ta có p^2 là số chính phương $\Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}p^2\equiv 0\pmod 3\\p^2\equiv 1\pmod 3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}p^2\equiv 0\pmod 5\\p^2\equiv 1\pmod 5\\p^2\equiv 4\pmod 5\end{array}\right.\end{cases}$

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \begin{cases}p^2\equiv 1\pmod 3\\ \left[\begin{array}{l}p^2\equiv 1\pmod 5\\p^2\equiv 4\pmod 5\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p^4\equiv 1\pmod 3\\p^4\equiv 1\pmod 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(p^4-1\right)\vdots 3\\ \left(p^4-1\right)\vdots 5\end{cases}$ (*)

Mặt khác từ (1) $\Rightarrow p$ lẻ $\Rightarrow p^4\equiv 1\pmod{16} \Rightarrow \left(p^4-1\right)\vdots 16$ (**)

Từ (*), (**) và 3, 5, 16 nguyên tố cùng nhau suy ra $\left(p^4-1\right)\vdots(3.5.16) \Rightarrow \left(p^4-1\right)\vdots 240$.

Vậy p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Cách 2:

Do $p \not\vdots 3,\ p\not\vdots 5$ nên theo định lí Fecma nhỏ ta có

$p^2-1 \vdots 3;\ p^4-1 \vdots 5 \Rightarrow p^4-1 \vdots 15$

Ta có $p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)$.

Dễ thấy $p-1<p+1<p^2+1$ và $p-1;\ p+1;\ p^2+1$ là ba số chẵn.

Mặt khác $p-1;\ p+1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 8$

$\Rightarrow (p-1)(p+1)(p^2+1) \vdots 16 \Rightarrow p^4-1 \vdots (16 \cdot 15)=240.$

Cách 3:

Ta có: $p^5-p=p(p^4-1)=p(p^2-1)(p^2+1) = p(p-1)(p+1)(p^2-4+5)$

$=(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)+5p(p-1)(p+1)$

Vì $p-2, p-1, p, p+1, p+2$ là 5 số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3 và 5

Mà (3,5) = 1 $\Rightarrow (p-2)(p+2)p(p-1)(p+1) \vdots 15$ (1)

Lại có: P là số nguyên tố >5 nên $p-1, p+1$ là hai số chẵn liên tiếp và $p^2+1 \vdots 2$

$\Rightarrow (p-1)(p+1)(p^2+1) \vdots 16$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (p-2)(p+2)p(p-1)(p+1) \vdots 240$ (vì $(15,16)=1$)

Dễ thấy với p là số nguyên tố >5 thì: $\left[\begin{array}{l} p \equiv 1 (\bmod 4) \\ p \equiv 3 (\bmod 4) \end{array}\right. \Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 16$ (*)

Mặt khác, $p, (p-1), (p+1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow p(p-1)(p+1) \vdots 3$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow 5p(p-1)(p+1) \vdots 240$

Suy ra $p^5-p \vdots 240$

Mà (p,240) =1

$\Rightarrow p^4-1 \vdots 240$ $\forall$p là số nguyên tố lớn hơn 5 (đpcm)

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Lạng Sơn 23-24)

Cho biết *Định lý Fermat nhỏ:* "Cho số nguyên tố p. Nếu số nguyên x không chia hết cho p thì $x^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$, hay $x^{p-1}-1 \vdots p$".

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^5-a \vdots 5$.

2) Cho hai số nguyên a, b. Gọi $p=4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) là số nguyên tố và p là ước của a^2+b^2. Chứng minh p là ước chung của a và b.

Lời giải

1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^5-a \vdots 5$.

Nếu $a \vdots 5$ thì $a(a^4-1) \vdots 5 \Rightarrow a^5-a \vdots 5$.

Nếu a không chia hết cho số nguyên tố 5 thì theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$a^{5-1}-1\vdots 5\Rightarrow a^4-1\vdots 5\Rightarrow a\left(a^4-1\right)\vdots 5\Rightarrow a^5-a\vdots 5$.

Vậy với mọi số nguyên a thì $a^5-a\vdots 5$.

2) Cho hai số nguyên a,b. Gọi $p=4k+3$ ($k\in\mathbb{N}$) là số nguyên tố và p là ước của a^2+b^2. Chứng minh p là ước chung của a và b.

Trường hợp 1: Nếu $a\vdots p$ thì $a^2\vdots p$ và do $a^2+b^2\vdots p\Rightarrow b^2\vdots p\Rightarrow b\vdots p$.

Nếu $b\vdots p$ thì $b^2\vdots p$ và do $a^2+b^2\vdots p\Rightarrow a^2\vdots p\Rightarrow a\vdots p$.

Vậy nếu một trong hai số chia hết cho p thì p là ước chung của a và b.

Trường hợp 2: Nếu cả hai số a và b đều không chia hết cho p thì theo định lý Fermat nhỏ, ta có: $a^{p-1}\equiv 1\pmod p$ và $b^{p-1}\equiv 1\pmod p$. Hay $a^{4k+2}\equiv 1\pmod p$ và $b^{4k+2}\equiv 1\pmod p$

Suy ra: $a^{4k+2}+b^{4k+2}\equiv 2\pmod p$

Mà $a^{4k+2}+b^{4k+2}\vdots a^2+b^2$ Suy ra $a^{4k+2}+b^{4k+2}\vdots p\Rightarrow 2\vdots p$ mà $p=4k+3$ là số lẻ suy ra điều này vô lý. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Vậy với $p=4k+3$ ($k\in\mathbb{N}$) là số nguyên tố và p là ước của a^2+b^2 thì p là ước chung của a và b.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Nam Định 23-24)

Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3\vdots b$, $b^3\vdots a$. Chứng minh $\left(a^4+b^4\right)\vdots ab$.

Lời giải

Ta có $a^4=a.a^3$ và $a^3\vdots b$ nên $a^4\vdots ab$.

Tương tự cũng có $b^4\vdots ab$. Suy ra $\left(a^4+b^4\right)\vdots ab$.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Ninh Bình 23-24)

Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $\left(x^2+1\right)\vdots p$ thì $(p-1)\vdots 4$.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lẻ nên p chỉ có 1 trong 2 dạng: $4k+1$ hoặc $4k+3$

Vì $\left(x^2+1\right)\vdots p$ nên p có dạng $4k+1$, hay $p-1=4k\vdots 4$.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Phú Thọ 23-24)

a) Cho các số nguyên a,b,c,d thoả mãn điều kiện $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0$. Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thoả mãn điều kiện

$P\left(x^2-2\right)$ chia hết cho $P(x)$.

Lời giải

a) Ta có:

$a^3+b^3-8c^3+28d^3=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3 \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d) \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b)^3+(c+d)^3 \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^3 \vdots 3$

$\Rightarrow a+b+c+d \vdots 3$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^2 \vdots 9$ (đpcm)

b) Xét đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$, với $a\in\mathbb{R}$, đa thức $P(x)$ có bậc là 2024

Ta có:

$P\left(x^2-2\right)=a\left(x^2-1\right)^{1012}\left(x^2-4\right)^{1012}=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}(x-1)^{1012}(x+2)^{1012}$

$=P(x)(x-1)^{1012}(x+2)^{1012}$

$\Rightarrow P\left(x^2-2\right)$ chia hết cho $P(x)$.

Vậy tồn tại đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$ với hệ số thực, có bậc 2024 thoả mãn đa thức $P\left(x^2-2\right)$ chia hết cho đa thức $P(x)$.

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n^2+2 chia hết cho $n+1$.

Lời giải

Ta có $n^2+2=n^2-1+3=(n-1)(n+1)+3$.

Vì $n^2+2 \vdots (n+1)$ mà $(n-1)(n+1) \vdots (n+1)$ nên $3 \vdots (n+1)$

Suy ra $n+1\in\{-3;-1;1;3\} \Rightarrow n\in\{-4;-2;0;2\}$

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 23-24)

Xác định số nguyên dương n lớn nhất sao cho với mọi số nguyên tố $p>7$ thì p^6-1 chia hết cho n

Lời giải

Ta có:

$p^6-1=(p-1)(p+1)(p^2-p+1)(p^2+p+1)$ (*)

Với $p=11$ ta có $p^6-1=1771560=2^3.3^2.5.7.19.37$

Với $p=13$ ta có $p^6-1=2^3.3^2.7.61.157$

Từ hai trường hợp trên, ta thấy rằng $n = 2^3.3^2.7 = 504$ là số nguyên dương lớn nhất thõa mãn $p^6 - 1$ chai hết cho n, với $p = 11, p = 13$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng $n = 504$ là số nguyên dương lớn nhất thõa mãn $p^6 - 1$ chia hết cho n, với mọi số nguyên tố $p > 13$

Vì p là số nguyên tố lẻ nên $(p-1)(p+8) \vdots 8$

(vì tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8)

Kết hợp (*), suy ra $p^6 - 1 \vdots 8$ (1)

Ta có: với mọi số nguyên tố $p > 7$ thì $p^6 - 1 = (p^3 - 1)(p^3 + 1) \vdots 7$ (2)

(vì lập phương của một số nguyên khi chia cho 7 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 6)

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(7-p)(7+p)$ chia hết cho 24. **Lời giải**

Do p là số nguyên tố và $p > 3$ nên p không là bội của 3 và 2.

$\Rightarrow p^2 \equiv 1 (mod\,3); p^2 \equiv 1 (mod\,8) \Rightarrow p^2 - 1 \vdots 3; p^2 - 1 \vdots 8 \Rightarrow p^2 - 1 \vdots 24$ vì $(3;8) = 1$.

Vì $48 \vdots 24; p^2 - 1 \vdots 24$ nên $(7-p)(7+p) = 49 - p^2 = 48 - (p^2 - 1) \vdots 24$ (đpcm).

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Thái Bình 23-24)

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2$ chia hết cho $n+1$.

Lời giải

Ta có $n^2 + 2 = n^2 - 1 + 3 = (n-1)(n+1) + 3$.

Vì $n^2 + 2 \vdots (n+1)$ mà $(n-1)(n+1) \vdots (n+1)$ nên $3 \vdots (n+1)$

Suy ra $n + 1 \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Cho hai số nguyên p, q thỏa mãn đẳng thức $p^2 + q^2 = 2(3pq - 4)$ (*). Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3

Lời giải

Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p, q là bội của 3

Giả sử trong hai số p, q không có số nào chia hết cho 3.

Khi đó p^2, q^2 chia 3 dư 1. Suy ra:

+) $p^2 + q^2$ chia 3 dư 2

+) Trong khi vế phải $2(3pq - 4) = 6pq - 9 + 1$ chia 3 dư 1, vô lý

Do đó tromg hai số p, q phải có ít nhất một số là bội của 3.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)

Chứng minh rằng $A=2^{2023}+3m^2+6n-23$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên m,n.

Lời giải

Vì $3m^2+6n \quad 3$ (1) nên để $A \quad 3$ thì $\left(2^{2023}-23\right) \quad 3$

Có $2^2 \equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow \left(2^2\right)^{1011} \equiv 1^{1011}(\bmod 3) \equiv 1(\bmod 3)$

hay $2^{2022} \equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow 2.2^{2022} \equiv 2.1(\bmod 3)$

suy ra $2^{2023} \equiv 2(\bmod 3)$ (2)

Mà $23 \equiv 2(\bmod 3)$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $2^{2023}-23 \equiv 0(\bmod 3)$ hay $\left(2^{2023}-23\right) \quad 3$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $A=2^{2023}+3m^2+6n-23$ chia hết cho 3

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Bình Thuận 23-24)

Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa $S(a)=S(b)=S(a+b)$. Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9 .

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$\left[a-S(a)\right] \vdots 9$ (1) (do $n, S(n)$ có cùng số dư khi chia cho 9)

$\left[b-S(b)\right] \vdots 9$ (2) (do $n, S(n)$ có cùng số dư khi chia cho 9)

$\left[(a+b)-S(a+b)\right] \vdots 9$ (3) (do $n, S(n)$ có cùng số dư khi chia cho 9)

Từ (3) ta có : $\left[a+\left(b-S(a+b)\right)\right] \vdots 9$ mà $S(a)=S(b)=S(a+b)$ nên $\left[a+\left(b-S(b)\right)\right] \vdots 9 \Rightarrow a \vdots 9$

Từ (3) ta có $\left[b+\left(a-S(a+b)\right)\right] \vdots 9$ mà $S(a)=S(b)=S(a+b)$ nên $\left[b+\left(a-S(a)\right)\right] \vdots 9 \Rightarrow b \vdots 9$ Vậy a và b chia hết cho 9.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Thái Nguyên 23-24)

Chứng minh rằng:

a) $10^{2023}+2024$ chia hết cho 3;

b) $n^3+2024n+2$ không chia hết cho $10^{2023}+2024$ với mọi số tự nhiên n

Lời giải

a) ta thấy $10^{2023}+2024=10...02024$ có tổng các chữ số chia hết cho 3 vậy $10^{2023}+2024$ chia hết cho 3.

b) $n^3+2024n+2=n^3-n+2025n+2=(n-1)n(n+1)+2025n+2$ không chia hết cho 3

vì $(n-1)n(n+1) \vdots 3$ và $2025n \vdots 3$ nhưng 2 không chia hết cho 3 mà $\left(10^{2023}+2024\right) \vdots 3$

vậy $n^3+2024n+2$ không chia hết cho $10^{2023}+2024$ với mọi số tự nhiên n.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Vinh 23-24)

Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại tập hợp con A có k phần tử của tập hợp M sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp A đều chia hết cho 3.

Lời giải

Trước hết, ta đếm số phần tử thuộc M mà chia hết cho 3.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là $1,4,7$ có 9 số thỏa mãn.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là $2,5,8$ có 9 số thỏa mãn.
Ứng với các số có chữ số hàng chục là $3,6,9$ có 9 số thỏa mãn.
Vì vậy số phần tử chia hết cho 3 thuộc M là 27, ta chứng minh $|A|_{max}=30$, thật vậy. Trước hết, A không thể chứa quá 4 phần tử không chia hết cho 3 bởi vì tích của chúng sẽ không chia hết cho 3.
Do đó, $|A|_{max}=30$.
Xây dựng dấu bằng. Xét A là tập hợp các số có 2 chữ số khác nhau chia hết cho 3 và 3 phần tử bất kỳ thuộc các số còn lại.
Vậy số nguyên dương lớn nhất thỏa yêu cầu đề bài là 30.

PHẦN 2: CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Hải Phòng 23-24)
Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

Lời giải

Ta có $(a-b)^2=4.5^m-20ab \vdots 5 \Rightarrow (a-b) \vdots 5 \Rightarrow (a-b)^2 \vdots 25$.

$a,b\geq 2 \Rightarrow a^2+b^2+18ab=4.5^m \geq 80 \Rightarrow m\geq 2$

$\Rightarrow 20ab=(a-b)^2-4.5^m \vdots 25 \Rightarrow 20ab \vdots 25 \Rightarrow ab \vdots 5$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \vdots 5 \\ b \vdots 5 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 5 \\ b \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow a=b=5; m=3.$

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Toán Hà Nội 23-24)
Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Lời giải

$x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0 \Leftrightarrow xy(x^2-x+1)=(2x-y)^2$.

Giả sử p là ước nguyên tố chung của xy và $x^2-x+1 \Rightarrow p=1$. (Vô lí)

Suy ra $(xy, x^2-x+1)=1$.

Do đó x^2-x+1 là một số chính phương. Từ đó tìm được $x=1$.

Từ đó, tìm được $y=1$ hoặc $y=4$.

Thử lại và kết luận: $(x,y)=(1,1)$ hoặc $(x,y)=(1,4)$.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Tin Hà Nội 23-24)
Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Lời giải

Đặt $a=x-y; b=xy\ (a,b\in\mathbb{Z})$, $(a^2\geq -4b)$ khi đó ta có:

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=a^3+3ab$.

Phương trình đã cho trở thành: $a^3+3ab=2a^2+17$.

Suy ra 17 chia hết cho a, hay $a \in \{-1;1;-17;17\}$.

Với $a = -1$, ta có $b = \dfrac{-20}{3}$ (loại).

Với $a = 1$, ta có $b = 6$, từ đây tìm được $(x, y) \in \{(3;2);(-2;-3)\}$.

Với $a = 17$, ta có $b = \dfrac{-254}{3}$ (loại).

Với $a = -17$, ta có $b = -108$, (loại).

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(x, y) \in \{(3;2);(-2;-3)\}$.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn phương trình

$$x^3 + x^2y - 2xy + 2x - 2y^2 + 2y + 1 = 0.$$

Lời giải

$x^3 + x^2y - 2xy + 2x - 2y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - 2y + 2) = -1$

Do đó ta có hai trường hợp xảy ra:

TH1: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - 2y + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ (nhận)

TH2: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 - 2y + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy có duy nhất cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn yêu cầu là: $(-1; 2)$.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Cần Thơ 23-24)

Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn phương trình

$$x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0.$$

Lời giải

$x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0 \; (x, y \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + 3x + xy - 2y^2 + 3y - x + 2y - 3 = 2$

$\Leftrightarrow x(x - 2y + 3) + y(x - 2y + 3) - (x - 2y + 3) = 2$

$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x - 2y + 3) = 2$

Do đó ta có bốn trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x + y - 1 = 2 \\ x - 2y + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ (Loại)

Trường hợp 1: $\begin{cases} x + y - 1 = 1 \\ x - 2y + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ (Nhận)

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=-1 \\ x-2y+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (Loại)

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ x-2y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ (Nhận)

Vậy cặp $(x;y)$ nguyên cần tìm là: $(1;1)$ và $(-2;1)$.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Bắc Giang 23-24)

Tìm các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023.$$

Lời giải

$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+3x^2y+2x^2z+3xy^2+2y^2z+z^2x+z^2y+4xyz=2023$

$\Leftrightarrow (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+(2x^2z+2y^2z+4xyz)+(z^2x+z^2y)=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)^3+2z(x+y)^2+z^2(x+y)=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2+2z(x+y)+z^2\right]=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+z)^2=7.17^2$

Vì x,y,z nguyên dương nên ta có $x+y+z>x+y>0$. Do đó:

$\begin{cases} x+y=7 \\ x+y+z=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ z=10 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

Có

$x+y=7$ mà x,y nguyên dương nên ta có

KL: Các bộ số cần tìm là $(1;6;10);(2;5;10);(3;4;10);(4;3;10);(5;2;10);(6;1;10)$.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)

Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

Lời giải

Ta có $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy$

$\Leftrightarrow (x+y)^2=xy(xy+1)$

Vì $xy(xy+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp và $(x+y)^2$ là một số chính phương.

$$\Rightarrow \begin{cases}(x+y)^2=0\\ xy(xy+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=0\\ \left[\begin{array}{l}xy=0\\ xy=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=0\\ xy=0\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=0\\ xy=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}\end{array}\right. \text{(thoả mãn)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{(0;0);(1;-1);(-1;1)\}$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Đăk Nông 23-24)
Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x,\,y)$ của phương trình: $xy-x+3y=6$.

Lời giải

Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x,\,y)$ của phương trình: $xy-x+3y=6$.

Ta có: $xy-x+3y=6 \Leftrightarrow x(y-1)+3(y-1)=3 \Leftrightarrow (x+3)(y-1)=3$.

Vì x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

$x+3$	-3	-1	1	3
$y-1$	-1	-3	3	1
x	-6	-4	-2	0
y	0	-2	4	2

Vậy $(x,\,y)\in\{(-6;\,0),(-4;-2),(-2;\,4),(0;\,2)\}$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)
Tìm các số nguyên $x,\,y$ thỏa mãn $4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0.$

Lời giải

Tìm các số nguyên $x,\,y$ thỏa mãn $4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0.$

Ta có $4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0 \Leftrightarrow (2x-y+1)^2+4(y+1)^2\le 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=1\\ (2x-y+1)^2+4(y+1)^2=0\end{array}\right.$$

TH1: $(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y+1=0\\ y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$.

TH2: $(2x-y+1)^2+4(y+1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-y+1=0\\ 4(y+1)^2=1\end{cases} (vn)\\ \begin{cases}(2x-y+1)^2=1\\ y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x+2)^2=1\\ y=-1\end{cases} (vn).\end{array}\right.$

Vậy có đúng một cặp số thỏa mãn (x; y) = (-1; -1).

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)
Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2+7xy+2y^2+x+y-2=0$.

Lời giải

Ta có phương trình

$6x^2+7xy+2y^2+x+y-1=1$

$\Leftrightarrow 6x^2+(7y+1)x+2y^2+y-1=1$

$\Leftrightarrow (2x+y+1)(3x+2y-1)=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y+1=1\\3x+2y-1=1\end{cases}\ (1)\\ \begin{cases}2x+y+1=-1\\3x+2y-1=-1\end{cases}\ (2)\end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=6\end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các cặp nghiệm nguyên là $(x;y)\in\{(-2;4);(-4;6)\}$

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Hưng yên 23-24)

Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $2024(x^2+y^2)-2023(2xy+1)=5$.

Lời giải

Ta có $2024(x^2+y^2)-2023(2xy+1)=5\Leftrightarrow 2023(x-y)^2+x^2+y^2=2023.1^2+1^2+2^2$

+) TH 1:

$$\begin{cases}(x-y)^2=1\\x^2=1\\y^2=2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-y|=1\\|x|=1\\|y|=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

+) TH 2:

$$\begin{cases}(x-y)^2=1\\x^2=2^2\\y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-y|=1\\|x|=2\\|y|=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $(x;y)\in\{(1;2);(2;1);(-1;-2);(-2;-1)\}$.

***Cách khác**: $2023(x-y)^2+x^2+y^2=2028(*)$

Ta có $x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow |x-y|\in\mathbb{N}$.

Nếu $|x-y|\ge 2\Rightarrow 2023(x-y)^2>2028$ nên (*) vô nghiệm. Do đó $|x-y|\le 1$.

+) TH 1: $|x-y|=0\Leftrightarrow x=y$. Khi đó (*) có dạng $2x^2=2028$. Phương trình không có nghiệm nguyên.

+) TH 2: $|x-y|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x-1\\y=x+1\end{array}\right.$

- Xét $y=x-1$ ta có $x^2+(x-1)^2=5\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\\y=1\end{array}\right.$

- Xét $y = x+1$ ta có $x^2 + (x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Vậy $(x;y) \in \{(1;2);(2;1);(-1;-2);(-2;-1)\}$.

Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Lai Châu 23-24)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$.

Lời giải

Tìm nghiệm nguyên của phương $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$

$(2x+y)(x-y)+x+8y=22$

$\Leftrightarrow (2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$

$\Leftrightarrow (2x+y)(x-y+3)-5(x-y+3)=7$

$\Leftrightarrow (x-y+3)(2x+y-5)=7$

Khi đó ta có các khả năng sau:

KN1: $\begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$

KN2: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

KN3: $\begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{-2}{3} \end{cases} (L)$

KN1: $\begin{cases} x-y+3=1 \\ 2x+y-5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{16}{3} \end{cases} (L)$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;\ y) \in \{(-2;\ 8);\ (-2;\ 2)\}$

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên Lạng Sơn 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $x^2+5x+6y+3xy+1=0$.

Lời giải

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $x^2+5x+6y+3xy+1=0$.

$x^2+5x+6y+3xy+1=0 \Leftrightarrow x^2+5x+6+3xy+6y-6+1=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+3)+3y(x+2)=5 \Leftrightarrow (x+2)(x+3+3y)=5$.

Ta có bảng sau:

$x+2$	1	5	-1	-5

$x+3+3y$	5	1	-5	-1
x	-1	3	-3	-7
y	1	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-5}{3}$	1
	Thỏa mãn	Loại	Loại	Thỏa mãn

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là: $(-1;1),(-7;1)$.

Câu 14. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thoả mãn: $x^{2025}-y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$

Lời giải

Đặt $x^{675}=a; y^{675}=b \quad (a,b\in z)$

Ta có: $a^3=b^3-b^2-b+2$

Xét: $a^3-(b-1)^3=b^3-b^2-b+2-\left(b^3-3b^2+3b-1\right)=2(b-1)^2+1>0\Rightarrow a^3>(b-1)^3$

Xét $a^3-(b+2)^3=b^3-b^2-b+2-\left(b^3+6b^2+12b+8\right)=-(b+1)(7b+6)$

Nếu $b=-1\Rightarrow a^3=(b+2)^3$

$b\ge 0\Rightarrow a^3<(b+2)^3$

$b\le -2\Rightarrow \begin{cases} b+1<0 \\ 7b+6<0 \end{cases} \Rightarrow a^3<(b+2)^3$

Tóm lại: $(b-1)^3<a^3\le(b+2)^3\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^3=b^3 \\ a^3=(b+1)^3 \\ a^3=(b+2)^3 \end{array}\right.$

$a^3=b^3\Leftrightarrow x=y=1$

$a^3=(b+1)^3\Leftrightarrow b^3-b^2-b+2=b^3+3b^2+3b+1\Leftrightarrow 4b^2+4b-1=0$ không có nghiệm nguyên.

$a^3=(b+2)^3\Leftrightarrow b=-1\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là: $(x;y)\in\{(1;1),(1;-1)\}$

Câu 15. (TS vào 10-Chuyên Nam Định 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x\left(x^2-y\right)+(y-3)\left(x^2+1\right)=0$.

Lời giải

Ta có $x\left(x^2-y\right)+\left(y-3\right)\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{-x^3+3x^2+3}{x^2-x+1}$ (do $x^2-x+1>0,\forall x$)

$\Leftrightarrow y=-x+2+\dfrac{3x+1}{x^2-x+1}$ (9).

Giả sử x,y là các số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi đó (9) suy ra $\left(3x+1\right)\vdots\left(x^2-x+1\right)\Rightarrow\left(3x+1\right)^2\vdots\left(x^2-x+1\right)$,

mà $\left(3x+1\right)^2=9\left(x^2-x+1\right)+15x-8$ nên $\left(15x-8\right)\vdots\left(x^2-x+1\right)$.

Suy ra $13=5\left(3x+1\right)-\left(15x-8\right)$ chia hết cho x^2-x+1, do đó $x^2-x+1\in\{1;13\}$.

Nếu $x^2-x+1=1$ thì $x^2-x=0\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$. Thay vào (9) tìm được $(x;y)=(0;3)$ và $(x;y)=(1;5)$ đều thỏa mãn yêu cầu.

Nếu $x^2-x+1=13$ thì $x^2-x-12=0\Leftrightarrow x\in\{-3;4\}$. Thay vào (9) tìm được $(x;y)=\left(-3;\dfrac{57}{13}\right)$ không thỏa mãn yêu cầu, $(x;y)=(4;-1)$ thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có ba cặp $(x;y)$ thỏa mãn là $(0;3),(1;5),(4;-1)$.

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Quảng Ninh 23-24)

Tìm các số nguyên dương a,b thỏa mãn $a^3-2(a+b)^2=b^3+19$.

Lời giải

$a^3-2(a+b)^2=b^3+19\Leftrightarrow(a-b-2)(a^2+ab+b^2)=2ab+19$

Vì $2ab+19>0,\ a^2+ab+b^2>0\Rightarrow a-b-2\ge1\Rightarrow a-b\ge3$

Từ $a-b-2\ge1\Rightarrow a^2+ab+b^2\le2ab+19\Rightarrow\left(a-b\right)^2<19\Rightarrow a-b\le4$

Vì $2ab+19$ lẻ $\Rightarrow a-b-2$ lẻ $\Rightarrow a-b$ lẻ $\Rightarrow\ a-b=3$

Từ $a-b=3\Rightarrow b^2+3b-10=0\Rightarrow b=-5$ (loại) hoặc $b=2$. Vậy $b=2;a=5$.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Quảng Bình 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m;n)$ biết rằng hai phương trình $x^2-2mx-3n=0$ và $x^2-2nx-3m=0$ (với x là ẩn) đều có nghiệm nguyên.

Lời giải

Phương trình $x^2-2mx-3n=0$ (1) có $\Delta_1'=m^2+3n$.

Phương trình $x^2-2nx-3m=0$ (2) có $\Delta_2'=n^2+3m$.

Vì hai phương trình có nghiệm nguyên nên Δ_1',Δ_2', đều là số chính phương.

Không mất tính tổng quát, giả sử $m \ge n > 0$, khi đó

$m^2 < m^2 + 3n < (m+2)^2 \Rightarrow m^2 + 3n = (m+1)^2 \Rightarrow 3n = 2m+1$.

Do đó n là số lẻ. Đặt $n = 2k+1 \Rightarrow \Delta_2' = 4k^2 + 13k + 4$.

+) Nếu $k \in \{1;2;3;4\}$ thì Δ_2' không là số chính phương.

+) Nếu $k = 0 \Rightarrow \Delta_2' = 4 \Rightarrow m = n = 1$ (thỏa mãn).

+) Nếu $k = 5$ thì $\Delta_2' = 169 \Rightarrow m = 16, n = 11$ (thỏa mãn).

+ Nếu $k > 5$ thì $(2k+3)^2 < 4k^2 + 13k + 4 < (2k+4)^2 \Rightarrow \Delta_2'$ không là số chính phương.

Vậy các bộ số $(m;n)$ thỏa mãn là: $(1;1),(11;16),(16;11)$

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $(2y-x^2)(2y+x^2) = x(x^4+1)+4y$

Lời giải

Ta có:

$(2y-x^2)(2y+x^2) = x(x^4+1)+4y \Leftrightarrow 4y^2 - x^4 = x^5 + x + 4y$

$\Leftrightarrow 4y^2 - 4y + 1 = x^5 + x^4 + x + 1 \Leftrightarrow (2y-1)^2 = (x+1)(x^4+1)$ (1)

$y \in Z \Rightarrow (2y-1)^2$ là số nguyên dương lẻ $\Rightarrow (x+1)(x^4+1)$ là số nguyên dương lẻ

$\Rightarrow x+1,\ x^4+1$ cùng lẻ và $x+1>0$

Giả sử: $(x+1, x^4+1) = d \Rightarrow d$ là số lẻ.

Do $(x+1) \vdots d \Rightarrow (x^2-1) \vdots d$

Lại có: $x^4+1 = (x^4-1)+2 = (x^2-1)(x^2+1)+2 \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d = 1$ (do d lẻ)

Mặt khác, $(1) \Rightarrow (x+1)(x^4+1)$ là số chính phương.

$x+1, x^4+1$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $x+1, x^4+1$ đều là số chính phương.

Do x^4, x^4+1 là hai số nguyên liên tiếp và cùng là số chính phương nên $x=0$

Với $x = 0 \Rightarrow 4y^2 - 4y = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$

Vậy $(x;y) = (0;0)$ hoặc $(x;y) = (0;1)$

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Tây Ninh)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2 + 2y^2(x+1) + (y+2)^2 - 9 = 0$.

Lời giải

Ta có: $(x+y)^2 + 2y^2(x+1) + (y+2)^2 - 9 = 0 \quad (*)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2xy^2 + 2y^2 + y^2 + 4y + 4 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 + 2x(y^2+y) + 4(y^2+y) = 1$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) + 2(y^2+y)(x+2) = 1$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2+2y^2+2y)=1$

TH1: $\begin{cases} x+2=1 \\ x-2+2y^2+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y^2+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \longrightarrow (-1;1),(-1;-2)$.

TH2: $\begin{cases} x+2=-1 \\ x-2+2y^2+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 2y^2+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \longrightarrow (-3;1),(-3;-2)$.

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình $(*)$ là: $(x;y)\in\{(-1;1),(-1;-2),(-3;1),(-3;-2)\}$.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Tiền Giang 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa mãn đẳng thức $p^2+q^2=2(3pq-4)$ $(*)$

Lời giải

Do vai trò của p,q như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử q là bội của 3.

Do q nguyên tố nên $q=3$

Khi đó từ $(*)$ ta có $p^2+9=2(2p-4)\Leftrightarrow p^2-18p+17=0\Leftrightarrow p=1$ hoặc $p=17$

Do p nguyên tố nên $p=17$.

Vậy các cặp số $(p;q)$ thỏa mãn $(*)$ là $(p;q)\in\{(17;3);(3;17)\}$.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Long 23-24)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2=-2(x^6-x^3y-32)$.

Lời giải

$y^2=-2(x^6-x^3y-32)\Leftrightarrow y^2-2x^3y+2x^6-64=0$

$\Delta'=-x^6+64\geq 0\Leftrightarrow |x|\leq 2$

$\Rightarrow x=\pm1;0;\pm2$

Với $x=0\Leftrightarrow y=\pm8$

Với $x=1\Rightarrow y^2-2y-62=0.$ (loại)

Với $x=-1\Rightarrow y^2+2y-62=0.$ (loại)

Với $x=2\Rightarrow y^2-16y+64=0\Leftrightarrow y=8$

Với $x=-2\Rightarrow y^2+16y+64=0\Leftrightarrow y=-8.$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(0;8)$; $(0;-8)$; $(2;8)$; $(-2;-8)$.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Bình Thuận 23-24)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$.

Lời giải

Ta có:

$$x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4 \Leftrightarrow x^2+x=y^4+2y^3+3y^2+2y$$
$$\Leftrightarrow x^2+x+1=y^4+2y^3+3y^2+2y+1$$
$$\Leftrightarrow x^2+x+1=\left(y^2+y+1\right)^2 \quad (*)$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)+1=\left(y^2+y+1\right)^2 \quad (*)$$

+ Nếu $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$ thì từ (*) suy ra $\left(y^2+y+1\right)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y^2+y+1=1\\y^2+y+1=-1\end{array}\right. \to y\in\{0;-1\}$.

Vậy trong trường hợp này phương trình (*) có 4 nghiệm là $(0;0),(0;-1),(-1;0),(-1;-1)$.

+ Nếu $x<-1$ thì do $(x+1)^2=x^2+2x+1=\left(x^2+x+1\right)+x<x^2+x+1<x^2$

nên (*) không có nghiệm nguyên.

+ Nếu $x>0$ thì do $(x+1)^2=x^2+2x+1=\left(x^2+x+1\right)+x>x^2+x+1>x^2$

nên (*) không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên là $(0;0),(0;-1),(-1;0),(-1;-1)$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thoả mãn đẳng thức $(y+2)x^2+1=y^2$

Lời giải

Ta có $(y+2)x^2+1=y^2 \Leftrightarrow (y+2)x^2=y^2-4+3 \Leftrightarrow (y+2)\left(x^2-y+2\right)=3$

Do x,y là các số nguyên nên ta có bảng:

$y+2$	1	-1	3	-3
x^2-y+2	3	-3	1	-1
y	-1	-3	1	-5
x^2	0	-8	0	-8
x	0 (tm)	/	0 (tm)	/

Vậy $(x,y)\in\{(0,1);(0,-1)\}$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thoả mãn đẳng thức $(y+2)x^2+1=y^2$

Lời giải

Ta có: $2x^2+2y^2-5xy+2x-y-3=0 \Leftrightarrow 2y^2-(5x+1)y+\left(2x^2+2x-3\right)=0,(*)$

+ Xét điều kiện cần để (*) có nghiệm nguyên là:

Δ_x phải là số chính phương

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+25=k^2,(k\in\mathbb{N}) \Leftrightarrow (3x-1)^2-k^2=-24 \Leftrightarrow (3x-1-k)(3x-1+k)=-24$

$\Rightarrow (3x-1-k)$ và $(3x-1+k)$ là ước của -24 cùng tính chẵn lẻ nên cùng chẵn và

$3x-1+k>3x-1-k$

+ Lập bảng giá trị:

$3x-1+k$	12	2	6	4
$3x-1-k$	-2	-12	-4	-6
$3x-1$	5	-5	1	-1
x	2	$\frac{-4}{3}$ (loại)	$\frac{2}{3}$ (loại)	0

+ Với $x=2$, Pt (*) trở thành: $2y^2-11y+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{9}{2} \\ y=1 \end{array}\right.$. Ta thấy $y=1$ thỏa mãn điều kiện.

+ Với $x=0$, Pt (*) trở thành: $2y^2-y-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{3}{2} \\ y=-1 \end{array}\right.$. Ta thấy $y=-1$ thỏa mãn điều kiện.

+ Vậy Phương trình đã cho có nghiệm nguyên là: $(x;y)\in\{(2;1);(0;-1)\}$

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2+7xy+2y^2+x+y-2=0$.

Lời giải

Ta có phương trình

$6x^2+7xy+2y^2+x+y-1=1$

$\Leftrightarrow 6x^2+(7y+1)x+2y^2+y-1=1$

$\Leftrightarrow (2x+y+1)(3x+2y-1)=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+y+1=1 \\ 3x+2y-1=1 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 2x+y+1=-1 \\ 3x+2y-1=-1 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=6 \end{cases}$

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Vinh 23-24)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-y^2+2(3y+y)=23$.

Lời giải

Ta biến đổi phương trình như sau

$$x^2-y^2+2(3x+y)=23 \Leftrightarrow (x^2+6x+9)-(y^2-2y+1)=31 \Leftrightarrow (x+3)^2-(y-1)^2=31$$

$$\Leftrightarrow (x-y+4)(x+y+2)=31$$

Từ đây. ta xét bảng sau

$x-y+4$	31	1	-31	-1
$x+y+2$	1	31	-1	-31
x	13	13	-19	-19
y	-14	16	16	-14

Vậy tất cả các nghiệm (x,y) thỏa mãn là $(13,-14);(13,16);(-19,16);(-19,-14)$.

PHẦN 3: CHUYÊN ĐỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Hải Phòng 23-24)

Cho phương trình: $x^2-2(a+1)x+a^2-2a+1=0$ (x là ẩn, a là tham số). Chứng minh nếu a là số chính phương thì phương trình đã cho có hai nghiệm cũng là những số chính phương.

Lời giải

Có $\Delta'=(a+1)^2-(a^2-2a+1)=4a\ge 0$

Khi đó $x_1=(a+1)-\sqrt{\Delta'}=(a+1)-2\sqrt{a}=(\sqrt{a}-1)^2$

$x_2=(a+1)+\sqrt{\Delta'}=(a+1)+2\sqrt{a}=(\sqrt{a}+1)^2$.

Do a là số chính phương nên $\sqrt{a}$ là số nguyên nên x_1; x_2 là số chính phương.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Bình Định 23-24)

1. Tìm tất cả giá trị nguyên của n để n^2+2026 là một số chính phương.
2. Một học sinh viết lên bảng một dãy gồm 2023 số nguyên dương sao cho trong dãy này có đúng 10 số hạng phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại những số hạng liên tiếp của dãy này có tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải

1. Đặt $n^2+2026=k^2$ (với $k\in\mathbb{Z}, k>n$)

$\Leftrightarrow k^2-n^2=2026$

$\Leftrightarrow (k+n)(k-n)=2026$

Ta nhận thấy k, n phải cùng tính chẵn, lẻ.

Suy ra $k+n$, $k-n$ đều là số chẵn.

Mà $2026=2.1013$ suy ra $k+n$, $k-n$ không cùng chẵn.

Do vậy không tồn tại số nguyên n để n^2+2026 là một số chính phương.

2. Gọi $a_1,a_2,\ldots,a_{2023}$ theo thứ tự là dãy gồm 2023 số nguyên dương được học sinh viết trên bảng, mỗi số trong dãy nhận một trong 10 giá trị $b_1,b_2,\ldots,b_{10}$.

Với mỗi $k=1,2,...,2023$, đặt $P_k=a_1\ldots a_k$ là tích của k số hạng đầu tiền của dãy.

Khi đó $P_k=b_1^{\alpha_{1k}}b_2^{\alpha_{2k}}\cdots b_{10}^{\alpha_{10k}}$ ở đây $\alpha_{1k},\ldots,\alpha_{10k}$ lần lượt là số lần xuất hiện của $b_1,b_2,\ldots,b_{10}$ trong k số hạng đầu tiên của dãy.

Xét 2023 bộ $(\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots,\alpha_{10k})$ (với $k=1,2,...,2023$) theo modulo 2. Ứng với mỗi bộ ta đặt

$(\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots,\alpha_{10k})\equiv(\beta_{1k},\beta_{2k},...,\beta_{10k})\pmod 2$

trong đó $\beta_{ik}\in\{0;1\}$ (với $i=1,2,...,10$).

Do có tối đa $2^{10}=1024$ bộ nhị phân độ dài 10 (1024 chiếc lồng) và có 2023 bộ $(\beta_{1k},\beta_{2k},...,\beta_{10k})$ (2023 con thỏ), nên tồn tại ít nhất hai bộ bằng nhau. Tức là tồn tại hai số m,n $(m<n)$ sao cho $(\beta_{1m},\beta_{2m},...,\beta_{10m})=(\beta_{1n},\beta_{2n},...,\beta_{10n})$

Suy ra các cặp $(\alpha_{1n},\alpha_{1m}),(\alpha_{2n},\alpha_{2m}),...(\alpha_{10n},\alpha_{10m})$ có cùng tính chất chẵn lẻ hay các hiệu $\alpha_{1n}-\alpha_{1m}$, $\alpha_{2n}-\alpha_{2m},...,\alpha_{10n}-\alpha_{10m}$ đều là số chẵn.

Khi đó $\dfrac{P_n}{P_m}=\dfrac{b_1^{\alpha_{1n}}b_2^{\alpha_{2n}}\ldots b_{10}^{\alpha_{10n}}}{b_1^{\alpha_{1m}}b_2^{\alpha_{2m}}\ldots b_{10}^{\alpha m}}=b_1^{\alpha_{1n}-\alpha_{1m}}b_2^{\alpha_{2n}-\alpha_{2m}}\ldots b_{10}^{\alpha_{10n}-\alpha_{10m}}$ là số chính phương.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Cao Bằng 23-24)

Cho n là số tự nhiên $(n>1)$. Gọi a và b là hai nghiệm của phương $x^2-2025nx-2024=0$. Gọi c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2-2023nx-2024=0$. Chứng minh rằng $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là một số chính phương.

Lời giải

Từ giả thiết a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2-2025nx-2024=0$ c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2-2023nx-2024=0$. Theo định lí Viet, ta có

$$\begin{cases} a+b=2025n \\ ab=-2024 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} c+d=2023n \\ cd=-2024 \end{cases} \left(n\in\mathbb{N}^*\right).$$

Do đó $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$

$=\left[(a-c)(b+d)\right].\left[(b-c)(a+d)\right]$

$=(ab+ad-bc-cd)(ab+bd-ac-cd)$

$=(ad-bc)(bd-ac)$

$=abd^2-a^2cd-b^2cd+abc^2$

$=2024\left(a^2+b^2\right)-2024\left(c^2+d^2\right)$

$=2024\left[(a+b)^2-(c+d)^2\right]$

$=2024\left[(2025n)^2-(2023n)^2\right]$

$=(4048n)^2\quad\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ là một số chính phương (đpcm).

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Hà Nam 23-24)

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho

$2^{2024}+2^{2027}+2^n=k^2 \Leftrightarrow 9.2^{2024}+2^n=k^2 \Leftrightarrow \left(k+3.2^{1012}\right)\left(k-3.2^{1012}\right)=2^n$.

$$\Rightarrow \begin{cases} k+3.2^{1012}=2^a \\ k-3.2^{1012}=2^b \\ a,b\in\mathbb{N}, a+b=n \end{cases} \Rightarrow 2^a-2^b=3.2^{1013}.$$

$$\Leftrightarrow 2^b(2^{a-b}-1)=3.2^{1013} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b}-1=3 \\ 2^b=2^{1013} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ b=1013 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1015 \\ b=1013 \end{cases} \Rightarrow n=2028$$

Vậy với $n=2028$ thì $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)

Cho x, y, z là các số chính phương. Chứng minh rằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ luôn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

Lời giải

Vì $x;\ y;\ z$ là các số chính phương ta viết thành $x=a^2;\ y=b^2;\ z=c^2\ (a;\ b;\ c\in Z)$

Ta có:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(a^2b^2+a^2+b^2+1)(c^2+1)=\left[(a+b)^2+(ab-1)^2\right](c^2+1)$$
$$=\left[(ac+bc)^2+(ab-1)^2\right]+\left[(a+b)^2+(abc-c)^2\right]$$

Áp dụng các đẳng thức $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ và $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$ có:

$$(ac+bc)^2+(ab-1)^2=(ab+bc+ca-1)^2-2(ac+bc)(ab-1)$$
$$=(ab+bc+ca-1)^2-2\left(a^2bc+b^2ac-ac-bc\right)$$
$$(a+b)^2+(abc-c)^2=(a+b+c-abc)^2+2(a+b)(abc-c)$$
$$=(a+b+c-abc)^2+2\left(a^2bc+b^2ac-ac-bc\right)$$

$$\Rightarrow (ac+bc)^2+(ab-1)^2+(a+b)^2+(abc-c)^2=(ab+bc+ca-1)^2+(a+b+c-abc)^2$$

Vậy $(x+1)(y+1)(z+1)$ là tổng của hai số chính phương.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $A=2p^4-p^2+16$

Với $p=3$ thì $A=169=13^2$ là số chính phương. Vậy $p=3$ thoả mãn.

Với $p>3$ thì $p^2\equiv 1(\text{mod}\,3)$. Suy ra $p^4=\left(p^2\right)^2\equiv 1(\text{mod}\,3)$

Suy ra $A=2p^4-p^2+16\equiv 2.1-1+16\equiv 2(\text{mod}\,3)$

Do các số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.

Vậy $p=3$.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)

Số nguyên dương m gọi là số tốt nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó (không tính 1 và m) bằng $6m+8$. Chứng minh rằng nếu có hai số nguyên tố p,q phân biệt và thoả mãn pq là số tốt thì $pq+2$ là số chính phương.

Lời giải

Vì pq là số tốt nên theo định nghĩa ta có:

$6pq+8=p^2+q^2\Rightarrow (p-q)^2=4(pq+2)\Rightarrow pq+2$ là số chính phương.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Nghệ An 23-24)

Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Lời giải

Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Đặt $2a = x^3; 5a = y^2$, khi đó dễ thấy $x, y > 0$

$$\Rightarrow 5x^3 = 2y^2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Để ý rằng $\frac{y}{x} \notin \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{2}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^2 \notin \mathbb{N}^*$.

Do đó $\frac{y}{x} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y \vdots x \Rightarrow y = kx, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = \frac{2}{5}k^2, x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k^2 \vdots 5$

Mà $a_{\min} \Rightarrow k_{\min} \Rightarrow k = 5 \Rightarrow x = 10, a = 500$

Vậy $a = 500$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Ninh Bình 23-24)

Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh $2023p + 23^p - 24$ không là số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên x sao cho $2023p + 23^p - 24 = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2023p + 23^p - 23$

Theo Fermat nhỏ, ta có $23^p - 23 \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow 2023p + 23^p - 23 \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 4k + 1$

$\Rightarrow 2023p + 23^p - 24 \equiv -p + (-1)^p \equiv 2 \pmod{4}$

Mà $x^2 \equiv 0,1 \pmod{4}$, mâu thuẫn

Vậy $2023p + 23^p - 24$ Không là số chính phương.

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Thừa Thiên Huế 23-24)

Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow ab = 2ac + 4bc \Leftrightarrow ab - 2ac - 4bc = 0$.

Khi đó $Q = a^2 + 4b^2 + 16c^2 = a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 4(ab - 2ac - 4bc)$

$= (a + 2b - 4c)^2$ là một số chính phương.

Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $x^2 - y$ và $x^2 + y$ đều là các số chính phương. Chứng minh y là số chẵn.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Long 23-24)
Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức x^2+x+6 là một số chính phương.

Lời giải

Giải sử x^2+x+6 là số chính phương , suy ra tồn tại số $k\in\mathbb{N}$ sao cho

$x^2+x+6=k^2 \Leftrightarrow 4\left(x^2+x+6\right)=4k^2$

$\Leftrightarrow (2k)^2-(2x+1)^2=23 \Leftrightarrow (2k+2x+1)(2k-2x-1)=23$

TH1: $\begin{cases}2k+2x+1=23\\2k-2x-1=1\end{cases}\Leftrightarrow x=5$

TH2: $\begin{cases}2k+2x+1=1\\2k-2x-1=23\end{cases}\Leftrightarrow x=-6$

TH3: $\begin{cases}2k+2x+1=-23\\2k-2x-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=-6$

TH4: $\begin{cases}2k+2x+1=-1\\2k-2x-1=-23\end{cases}\Leftrightarrow x=5$

Với $x\in\{-6;5\}$ thì x^2+x+6 là số chính phương

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Thái Nguyên 23-24)
Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\frac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Giả sử ta có $n=k^2;\frac{n-10}{3}=l^2$ ta có: $k^2=3l^2+10$ (1)

Ta có nhận xét sau: $m^2\equiv 0,1,4 \pmod 5$

Vậy: $\left.\begin{matrix}k^2\equiv 0;1;4 \pmod 5\\ 3l^2+10\equiv 0;3;2 \pmod 5\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3l^2\,\vdots\, 5\Rightarrow l^2\,\vdots\, 25$ vì (3;5)=1

$\Rightarrow 3l^2+10 \not\vdots\ 25\Rightarrow$ (1) không thoả mãn

Vậy không tồn tại n để thoả mãn bài ra.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)
Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3n+1$, $11n+1$ là số chính phương và $n+3$ là số nguyên tố.

Lời giải

Do $3n+1, 11n+1$ là số chính phương nên ta đặt $3n+1=a^2;11n+1=b^2$ (a,b nguyên dương)

Lại có $4a^2-b^2=12n+4-11n-1=n-3$ hay $(2a-b)(2a+b)=n+3$

Để $n+3$ là số nguyên tố mà $2a-b<2a+b$ do đó $\begin{cases}2a+b=n+3\\2a-b=1\end{cases}\Rightarrow 2b=n+2\Leftrightarrow 4b^2=(n+2)^2$

Mà $11n+1=b^2\Rightarrow 44n+4=4b^2$ suy ra $(n+2)^2=44n+4\Leftrightarrow n^2-40n=0\Leftrightarrow n(n-40)=0$

mà n là số nguyên dương nên $n-40=0\Rightarrow n=40$

Vậy $n=40$ thoả mãn.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)
Cho hai số tự nhiên m,n thỏa mãn $m^2+m=2n^2+n$. Chứng minh rằng $m+n+1$ là số chính

phương.

Lời giải

+ Ta có: $m^2+m=2n^2+n \Leftrightarrow (m-n)(m+n+1)=n^2,(*)$

+ Vì m,n là hai số tự nhiên gọi $UCLN(m-n;m+n+1)=d,(d\in\mathbb{N}*)$

+ Suy ra:

$$\begin{cases} m-n \vdots d \\ m+n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow (m-n)(m+n+1) \vdots d^2 \Rightarrow n^2 \vdots d^2 \Rightarrow n \vdots d$$

+ Mà: $m-n \vdots d \Rightarrow m \vdots d \Rightarrow m+n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$

$\Rightarrow (m-n)$ và $(m+n+1)$ là hai số nguyên tố cùng nhau; kết hợp với (*) $\Rightarrow (m-n)$ và $(m+n+1)$ là hai số chính phương.

Vậy $m+n+1$ là số chính phương.

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Năng Khiếu ĐHQG TPHCM 23-24)

Cho m, n là các số nguyên không âm thỏa mãn $m^2-n=1$. Đặt $a=n^2-m$.

Chứng minh rằng a không là số chính phương.

Lời giải

Giả sử a là số chính phương, đặt $a=b^2, b\in\mathbb{N}$

Nhận xét nếu $a=0$ thì vô lý.

Nếu $a=1$, thế vào ta được $\begin{cases} m^2-n=1 \\ n^2-m=1 \end{cases} \Rightarrow (m-n)(m+n+1)=0 \Rightarrow m=n$

Khi đó: $m^2-m-1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Xét với $a\geq 4$. Từ: $m^2=n+1 \Rightarrow m\geq 1$ và $n=m^2-1$.

Thay vào $n^2-m=a$, ta được: $(m^2-1)^2-m=b^2 \Leftrightarrow m=(m^2-1)^2-b^2=(m^2-1-b)(m^2-1+b)$

$\Rightarrow m \vdots (m^2-1+b) \Rightarrow m\geq |m^2-1+b|$

Mà $m^2-1+b\geq m^2+1\geq 2m$ nên suy ra vô lý.

Vậy a không thể là số chính phương.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Hải Dương 23-24)

Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $A=2p^4-p^2+16$

Với $p=3$ thì $A=169=13^2$ là số chính phương. Vậy $p=3$ thoả mãn.

Với $p>3$ thì $p^2\equiv 1 \pmod 3$. Suy ra $p^4=(p^2)^2\equiv 1 \pmod 3$

Suy ra $A=2p^4-p^2+16\equiv 2.1-1+16\equiv 2 \pmod 3$

Do các số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.

PHẦN 4: CHUYÊN ĐỀ SỐ NGUYÊN TỐ

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Toán Hà Nội 23-24)

Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) sao cho xy là số chính phương và x^2+xy+y^2 là số nguyên tố.

Lời giải

Đặt $xy = a^2\ (a \in \mathbb{N})$.

$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - a^2 = (x+y+a)(x+y-a)$.

Do $xy > 0$ nên x và y cùng dấu

TH1: $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y - a = 1 \Rightarrow x + y = a + 1$.

$\Rightarrow (a+1)^2 \geq 4a^2 \Rightarrow a = 1$.

Tìm được $(x, y) = (1,1)$.

TH2: $x < 0, y < 0$. Tương tự, tìm được $(x, y) = (-1,-1)$.

Kết luận: $(x, y) = (1,1)$ hoặc $(x, y) = (-1,-1)$.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Hà Tĩnh 23-24)
Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A = n^{2024} + n^{2023} + n^4 - n + 1$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có $A = n^{2024} + n^{2023} + n^4 - n + 1 = (n^{2024} - n^2) + (n^{2023} - n) + (n^4 + n^2 + 1)$

$= n^2(n^{2022} - 1) + n(n^{2022} - 1) + (n^4 + n^2 + 1) = (n^2 + n)(n^{2022} - 1) + (n^4 + n^2 + 1)$

Ta có $(n^2 + n)(n^{2022} - 1) = (n^2 + n)\left[(n^3)^{674} - 1\right]$

$= (n^2 + n)(n^3 - 1).B = (n^2 + n)(n-1)(n^2 + n + 1).B$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Lại có $n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Vậy $A = n^{2024} + n^{2023} + n^4 - n + 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 nên A không phải là số nguyên tố.

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)
Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) để $B = 3^{3m^2 + 6n - 22} + 4$ là một số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $X = 3m^2 + 6n - 22 < 0$ thì $B \notin \mathbb{Z}$, do đó $X = 3m^2 + 6n - 22 \geq 0$.

Ta có $X = 3(m^2 + 2n - 8) + 2 \Rightarrow X \equiv 2\ (\text{mod}\, 3) \Rightarrow X = 3k + 2\ (k \in \mathbb{N})$. Do đó

$B = 3^{3k+2} + 4 = 9.27^k + 4 \equiv 9.1 + 4 \equiv 0\ (\text{mod}\, 13) \Rightarrow B = 13$.

Từ $B = 13$ suy ra

$$k = 0 \Rightarrow 3m^2 + 6n - 22 = 2 \Rightarrow m^2 + 2n - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m^2 \leq 8 \\ m \,\vdots\, 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 0 \\ m^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Vậy cặp số (m, n) cần tìm là $(0, 4)$, $(2, 2)$.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)
Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3n + 1, 11n + 1$ là số chính phương và $n + 3$ là số nguyên tố.

Lời giải

Do $3n+1, 11n+1$ là số chính phương nên ta đặt $3n+1=a^2; 11n+1=b^2$ (a,b nguyên dương)

Lại có $4a^2-b^2=12n+4-11n-1=n-3$ hay $(2a-b)(2a+b)=n+3$

Để $n+3$ là số nguyên tố mà $2a-b<2a+b$ do đó $\begin{cases}2a+b=n+3\\2a-b=1\end{cases} \Rightarrow 2b=n+2 \Leftrightarrow 4b^2=(n+2)^2$

Mà $11n+1=b^2 \Rightarrow 44n+4=4b^2$ suy ra $(n+2)^2=44n+4 \Leftrightarrow n^2-40n=0 \Leftrightarrow n(n-40)=0$

mà n là số nguyên dương nên $n-40=0 \Rightarrow n=40$

Vậy $n=40$ thoả mãn.

PHẦN 5: CÁC DẠNG TOÁN KHÁC

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Bình Phước 23-24)

Cho một bảng gồm 2023 hàng, 2023 cột. Các hàng được đánh số từ 1 đến 2023 từ trên xuống dưới; các cột đánh số từ 1 đến 2023 từ trái qua phải. Viết các số tự nhiên liên tiếp $0,1,2,\ldots$ vào các ô của bảng theo đường chéo zíc-zắc (như hình vẽ bên). Hỏi số 2024 được viết ở hàng nào, cột nào? Vì sao?

Hàng \ Cột	1	2	3	4	…	2023
1	0	1	5	6		
2	2	4	7	13		
3	3	8	12			
4	9	11				
5	10					
…						
2023						

Lời giải

Theo yêu cầu bài toán ta thấy:

+) Đường chéo thứ 1 đánh một số 0.

+) Đường chéo thứ 2 đánh hai số 1, 2.

+) Đường chéo thứ 3 đánh ba số 3, 4, 5.

+) Đường chéo thứ n đánh n số (ta chưa cần biết cụ thể các số nào)

Nhận thấy trên mỗi đường chéo luôn viết nhiều hơn 1 số nên số 2024 phải ghi ở vị trí đường chéo n và $n<2023$.

Khi $n<2023$ ta có tổng các số đã viết là: $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Đến đây ta chỉ cần đi tìm 1 đường chéo liền trước của đường chéo chứa số 2024.

Dễ thấy $\dfrac{63\cdot 64}{2}=2016<2024$. Điều này có nghĩa là ở đường chéo thứ 63 sẽ có 63 số và số lớn nhất được ghi sẽ là 2015 (vì bắt đầu là số 0 nên số thứ 2016 sẽ là 2015). Vậy ở đường chéo thứ 64 sẽ có 64 số là: $2016, 2017, \ldots, 2079$ trong các số này có chứa số 2024.

Từ các đường chéo ban đầu ta thấy ở đường chéo thứ 64 các số 2017, 2018, ..., 2080 sẽ được ghi giảm dần tính từ trên xuống dưới.

Hàng đầu tiên sẽ là số 2016 nên số 2024 sẽ ở hàng thứ $2024-2016+1=9$, cột chứa số 2024 sẽ là $64-9+1=56$.

Vậy số 2024 được viết ở hàng 9 và cột 56.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Đăk Lăk 23-24)

Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích bằng S ?

Lời giải

Giả sử cạnh của 9 hình vuông lần lượt là x, $x+1$, $x+2$, ..., $x+8$ (với $x \in \mathbb{N}^*$).

Ta có: $S = x^2 + (x+1)^2 + ... + (x+8)^2 = 9x^2 + 72x + 204$.

Giả sử tồn tại hình vuông có cạnh bằng y, với $y \in \mathbb{N}^*$.

Theo giả thiết ta có: $y^2 = 9x^2 + 72x + 204 \Leftrightarrow y^2 = 3(3x^2 + 24x + 68)$ $(*)$

Do $\text{VP}_{(*)} \vdots 3$ nên $y^2 \vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $y \vdots 3$.

Khi đó $y^2 \vdots 9$ hay $\text{VT}_{(*)} \vdots 9$.

Lại có $\begin{cases} 9x^2 \vdots 9 \\ 72x \vdots 9 \\ 204 \not\vdots\, 9 \end{cases} \Rightarrow \text{VP}_{(*)} \not\vdots\, 9$. $\Rightarrow$ Không tồn tại y.

Vậy không tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích bằng S.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Đăk Nông 23-24)
Cho tập hợp $A = \{201; 203; ...; 2021; 2023\}$ gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp A sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

Lời giải

Xét các cặp số (a, b) trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là:

$$(2023; 265), (2021; 267), (2019; 269), ..., (1147; 1141), (1145; 1143) \qquad (*)$$

Số các cặp số (a, b) trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là:

$\dfrac{2023 - 1145}{2} + 1 = 440$.

Số các số trong tập hợp A mà không có số ghép đôi để tổng bằng 2288 là:

$912 - 2.440 = 32$.

Chọn ra 441 số từ (*), theo Dirichlet tồn tại một nhóm chứa 2 số có tổng bằng 2288.

Vậy cần chọn ít nhất $441 + 32 = 473$ số từ tập hợp A luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Đồng Nai 23-24)
Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực. Khi chia $P(x)$ cho đa thức $(x-5)$ thì được dư là 7 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $(x+1)$ thì được dư là 1. Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 4x - 5$. Tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho $Q(x)$.

Lời giải

Nhận xét $Q(x) = (x-5)(x+1)$.

Gọi $T(x)$ là đa thức thương, $R(x)$ là đa thức dư khi chia $P(x)$ cho $Q(x)$, nghĩa là $P(x) = Q(x)T(x) + R(x)$.

Vì bậc của $Q(x)$ là 2 nên bậc của $R(x)$ tối đa là 1.

Khi đó $R(x)=ax+b$ (với a, b là các hệ số thực).

Khi chia $P(x)$ cho đa thức $(x-5)$ thì được dư là 7, suy ra $P(5)=7$.

Khi chia $P(x)$ cho đa thức $(x+1)$ thì được dư là 1, suy ra $P(-1)=1$.

Ta có: $P(x)=(x-5)(x+1)T(x)+ax+b$.

Cho $x=5$, ta được: $7=5a+b$. (1)

Cho $x=-1$, ta được: $1=-a+b$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $R(x)=x+2$.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Gia Lai 23-24)

Bạn Tuấn lập kế hoạch tiết kiệm tiền để mua một cái laptop phục vụ cho việc học tập như sau:

Hằng tháng, Tuấn tiết kiệm các khoản chi tiêu cá nhân để dành ra một triệu đồng. Vào ngày 01 hằng tháng Tuấn gửi vào tài khoản tiết kiệm của mình một triệu đồng và bắt đầu gửi vào ngày 01 tháng 7 năm 2023 để hưởng lãi suất $0,5\%$/ tháng theo hình thức lãi kép (nghĩa là tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn để tính lãi cho tháng sau) và duy trì việc này liên tục trong 3 năm. (Biết tài khoản ban đầu của Tuấn là 0 đồng và hàng tháng Tuấn không rút vốn, lãi).

a) Tính số tiền tiết kiệm của Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày $02/8/2023$.

b) Tính đến ngày $02/10/2023$ thì số tiền trong tài khoản tiết kiệm của Tuấn là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

c) Hãy đề xuất công thức tính tổng số tiền trong tài khoản tiết kiệm sau kỳ gửi tháng thứ n (n là số tự nhiên, $n\geq 3$). Sử dụng công thức đó để tính số tiền Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày $02/7/2026$.

Lời giải

a) Tính số tiền tiết kiệm của Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày $02/8/2023$.

Sau 1 tháng, số tiền trong sổ tiết kiệm là $S_1=(1.0,5\%+1)+1=(1,005)^1+1$.

Vậy số tiền tiết kiệm của Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày $02/8/2023$ là:

$$S_1=(1,005)^1+1=2,005 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Tính đến ngày $02/10/2023$ thì số tiền trong tài khoản tiết kiệm của Tuấn là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Sau 2 tháng, số tiền trong sổ tiết kiệm là $S_2=(1,005)^2+(1,005)^1+1$.

Sau 3 tháng, số tiền trong sổ tiết kiệm là $S_3=(1,005)^3+(1,005)^2+(1,005)^1+1$.

Vậy số tiền tiết kiệm của Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày $02/10/2023$ là:

$$S_3=(1,005)^3+(1,005)^2+(1,005)^1+1=4,030100125 \text{ (triệu đồng).}$$

c) Hãy đề xuất công thức tính tổng số tiền trong tài khoản tiết kiệm sau kỳ gửi tháng thứ n (n là số tự nhiên, $n\geq 3$). Sử dụng công thức đó để tính số tiền Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày $02/7/2026$.

Sau n tháng (n là số tự nhiên, $n\geq 3$), số tiền trong tài khoản tiết kiệm là:

$$S_n=(1,005)^n+(1,005)^{n-1}+...+(1,005)^2+(1,005)^1+1=\frac{(1,005)^{n+1}-1}{0,005}$$ (triệu đồng).

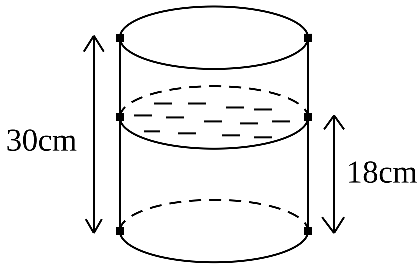
Vào ngày $02/7/2026$ (sau $3.12=36$ tháng), số tiền Tuấn có được trong tài khoản là:

$$S_n=\frac{(1,005)^{36+1}-1}{0,005}\approx 40,533$$ (triệu đồng).

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Hưng Yên23-24)

Có một bình thủy tinh hình trụ cao $30\,\text{cm}$ chứa nước, diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh, mặt nước cách đáy bình $18\,\text{cm}$ (*hình vẽ bên*). Cần đổ thêm bao nhiêu lít nước nữa để nước vừa đầy bình (*Bỏ qua bề dày của bình, cho* $\pi=3,14$ *và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*).

Lời giải



Gọi bán kính đáy, chiều cao hình trụ, chiều cao cột nước lần lượt là $r,\ h,\ h_1$ (cm)

Diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh nên ta có: $\pi r^2=\frac{1}{6}\cdot 2\pi rh \Leftrightarrow r=\frac{h}{3}=10(\text{cm})$

Thể tích nước cần đổ thêm bằng thể tích phần không có nước ở bình là:

$V=\pi r^2(h-h_1)=\pi.10^2.(30-18)=3768(\text{cm}^3)\approx 3,8(\text{dm}^3)=3,8(l)$.

Vậy, cần đổ thêm $3,8$ lít nước nữa để nước vừa đầy bình.

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Gia Lai 23-24)

Cho $P(x)=x^{81}+ax^{57}+bx^{41}+cx^{19}+2x+1$ và $Q(x)=x^{81}+ax^{57}+bx^{41}+cx^{19}+dx+e$ với a, b, c, d là các số thực. Biết $P(x)$ khi chia cho $(x-1)$ thì số dư là 5 và chia cho $(x-2)$ thì số dư là -4. Đồng thời $Q(x)$ chia hết cho $(x-1)(x-2)$. Hãy xác định các hệ số d, e

Lời giải

Ta có $Q(x)=P(x)+dx+e-(2x+1)$

Vì $Q(x)$ chia hết cho $(x-1)(x-2)$ nên $\left[\begin{array}{l}Q(1)=0\\ Q(2)=0\end{array}\right.$

Mà $P(x)$ khi chia cho $(x-1)$ thì số dư là 5 nên $P(1)=5$

và $P(x)$ chia cho $(x-2)$ thì số dư là -4 nên $P(2)=-4$

+) Cho $x=1$ ta có $Q(1)=P(1)+d+e-3\Rightarrow d+e=-2$

+) Cho $x=2$ ta có $Q(2)=P(2)+2d+e-5\Rightarrow 2d+e=9$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}d+e=-2\\ 2d+e=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=11\\ e=-13\end{cases}$$

Vậy $d=11; e=-13$ thỏa mãn bài.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Hậu Giang 23-24)
Tìm đa thức bậc hai $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=-2023$ và $xf(x-2)=(x-4)f(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$..

Lời giải

$f(x)$ là đa thức bậc hai nên $f(x)=ax^2+bx+c$

Cho $x=0$, ta có $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm của đa thức $f(x)\Rightarrow c=0$

Cho $x=4$, ta có $f(2)=0$ nên $x=2$ là nghiệm của đa thức $f(x)\Rightarrow 4a+2b=0$ (1)

$f(1)=-2023\Rightarrow a+b=-2023$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases}4a+2b=0\\ a+b=-2023\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2023\\ b=-4046\end{cases}$

Vậy đa thức $f(x)=2023x^2-4046x$.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên Lào Cai 23-24)
Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất sao cho tổng số chấm xuất hiện trên mặt của con súc sắc trong hai lần gieo không lớn hơn 6.

Lời giải

Không gian mẫu $\Omega=\{(1;1),(1;2),...,(1;6),(2;1),(2;2),...,(2;6),...,(6;1),(6;2),...,(6;6)\}$

$n(\Omega)=36$ "

Đặt biến cố A:" Tổng số chấm xuất hiện trên mặt của con súc sắc trong hai lần gieo không lớn hơn 6"

$A=\{(1;1),(1;2),...,(1;5),(2;1),...,(2;4),(3;1),(3;2),(3;3),(4;1),(4;2),(5;1)\}$

$n(A)=15$

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên Phú Thọ 23-24)
Bạn An viết lên trên bảng 11 số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) có tổng bằng 30. Chứng minh rằng bạn An có thể xoá đi một số sao cho các số còn lại trên bảng có tổng bằng 10.

Lời giải

Gọi 11 số nguyên dương là $a_1;a_2;a_3;...;a_{11}$. Ta có $a_1+a_2+a_3+...+a_{11}=30$

Xét dãy 11 số $a_1;a_1+a_2;a_1+a_2+a_3;...;a_1+a_2+a_3+...+a_{11}$

Nếu trong dãy không có số nào chia hết cho 10 thì tồn tại ít nhất hai số chia 10 có cùng số dư. Nên hiệu chia hết cho 10.

Đặt hiệu đó là A. Với A là tổng của một số số a_i (với $i\in\{1,2,3,...,11\}$.

Ta có $0<A<30$ mà $A\vdots 10$ nên $A\in\{10;20\}$.

Nếu $A=10$ bài toán được chứng minh.

Nếu $A=20$ mà $a_1+a_2+a_3+...+a_{11}=30$ suy ra các số còn lại có tổng bằng 10. Bài toán được chứng minh

Nếu trong dãy số có một số chia hết cho 10. Chứng minh tương tự như trên khi đó bài toán được chứng minh.

Câu 1. (TS vào 10-Chuyên Quảng Trị 23-24)

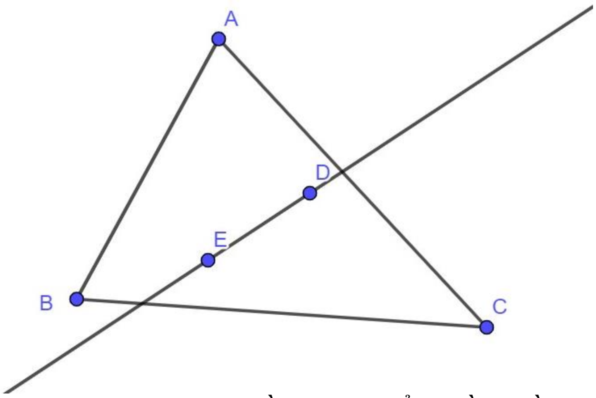
Trên mặt phẳng có 5 điểm tùy ý, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh tồn tại 4 điểm là 4 đỉnh của một tứ giác lồi.

Lời giải

Với mọi cặp điểm M,N bất kì, nếu 3 điểm còn lại nằm về một phía so với đường thẳng MN thì kẻ đoạn thẳng MN. Các đoạn thẳng vừa kẻ tạo thành một đa giác lồi.

Nếu đa giác lồi đó là ngũ giác hoặc tứ giác thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu đa giác lồi đó là tam giác, ta gọi các đỉnh là A,B,C. Kẻ đường thẳng đi qua 2 điểm D,E còn lại.



Khi đó, trong 3 đỉnh của tam giác ABC, tồn tại 2 điểm nằm về một phía so với đường thẳng DE, chẳng hạn là $A,B.$ Ta được A,B,D,E là 4 đỉnh của một tứ giác lồi. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. (TS vào 10-Chuyên Quảng Ninh 23-24)

Trên bảng cho 2023 số nguyên phân biệt, mỗi số đều có dạng a^2+b^2 trong đó $a,\ b$ là các số nguyên. Mỗi lần ta thực hiện một phép biến đổi như sau: Xóa hai số tùy ý rồi viết thêm một số bằng tích của hai số vừa xóa. Hỏi sau một số lần biến đổi, trên bảng có số bằng 26.3^{2023} hay không? Giải thích tại sao?

Lời giải

Do đẳng thức $\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)=\left(xz+yt\right)^2+\left(xt-yz\right)^2$ nên sau mỗi lần biến đổi, các số trên bảng luôn có dạng a^2+b^2

Do $a^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$ nên $a^2+b^2\equiv 0,1,2,4,5 \pmod 8$

Vì $26.3^{2023}\equiv 26.3.9^{1011}\equiv 6 \pmod 8$ nên số 26.3^{2023} không có trên bảng.

Câu 3. (TS vào 10-Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 23-24)

Cho tập hợp $X=\{1;2;...;120\}$ gồm 120 số nguyên dương đầu tiên, trong đó có 60 số được viết bằng màu đỏ và 60 số còn lại được viết bằng màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại 40 số nguyên dương liên tiếp của tập X trong đó 20 số được viết bằng màu đỏ và 20 số được viết bằng màu xanh.

Lời giải

Ta có:

$p^6 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)$ (*)

Với $p = 11$ ta có $p^6 - 1 = 1771560 = 2^3.3^2.5.7.19.37$

Với $p = 13$ ta có $p^6 - 1 = 2^3.3^2.7.61.157$

Từ hai trường hợp trên, ta thấy rằng $n = 2^3.3^2.7 = 504$ là số nguyên dương lớn nhất thõa mãn $p^6 - 1$ chai hết cho n, với $p = 11, p = 13$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng $n = 504$ là số nguyên dương lớn nhất thõa mãn $p^6 - 1$ chia hết cho n, với mọi số nguyên tố $p > 13$

Vì p là số nguyên tố lẻ nên $(p-1)(p+8) \vdots 8$

(vì tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8)

Kết hợp (*), suy ra $p^6 - 1 \vdots 8$ (1)

Ta có: với mọi số nguyên tố $p > 7$ thì $p^6 - 1 = (p^3 - 1)(p^3 + 1) \vdots 7$ (2)

(vì lập phương của một số nguyên khi chia cho 7 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 6)

Với mọi số nguyên tố $p > 3,$ khi chia cho 3 được số dư bằng 1 hoặc 2.

+ Nếu p chia 3 có số dư bằng 1 thì nó có dạng $p = 3m + 1$

Khi đó $(p-1)(p^2 + p + 1) = 3m(9m^2 + 9m + 3) = 9m(3m^2 + 3m + 1) \vdots 9$

+ Nếu p chia cho 3 có dư bằng 2 thì nó có dạng $p = 3m + 2$

Khi đó $(p+1)(p^2 - p + 1) = (3m + 3)(9m^2 + 9m + 3) = 9(m+1)(3m^2 + 3m + 1) \vdots 9$

Kết hợp (*), suy ra $p^6 - 1 \vdots 9$ với số nguyên tố $p > 3$ (3)

Mặt khác các số $7, 8, 9$ là 3 số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau, nên từ (1), (2) và (3) suy ra $p^6 - 1 \vdots 7.8.9 = 504$

Vậy $n = 504$ là số nguyên dương lớn nhất cần tìm.

Câu 4. (TS vào 10-Chuyên Tuyên Quang 23-24)

Ban đầu, trên bảng có n số nguyên dương đầu tiên được viết liên tiếp từ trái qua phải: $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$. Ta thực hiện trò chơi đổi số như sau: Mỗi lượt chơi, lấy ba số đứng liền nhau a, b, c và đổi chỗ a với c thành c, b, a. Hỏi sau hữu hạn lượt chơi như trên ta có thể thu được dãy số ngược lại $n, n-1, \ldots, 2, 1$ hay không, nếu:

a) $n = 5$;

b) $n = 2024$.

Lời giải

a) Với $n = 5$ ta thực hiện các bước biến đổi như sau:

1	2	3	4	5
1	4	3	2	5
3	4	1	2	5
3	4	5	2	1
5	4	3	2	1

b) Với $n = 2024$: Ta thấy rằng với cách đổi như trên thì các số lẻ luôn ở vị trí lẻ còn số chẵn luôn ở vị trí chẵn.

Ban đầu số 2024 ở vị trí chẵn, do đó nó không thể chuyển về vị trí đầu tiên trong dãy số 2024, 2023, …, 2, 1 được.

Câu 5. (TS vào 10-Chuyên Long An 23-24)

Ông Tuệ khóa két sắt bằng mật mã có 4 chữ số. Ông chỉ nhớ rằng trong 4 chữ số đó không có chữ số 0 và tổng của chúng bằng 9. Hỏi ông Tuệ phải thử tối đa bao nhiêu lần mật mã khác nhau để chắc chắn mở được két sắt đó?

Lời giải

Chia được thành các tổ hợp số:

$(1;1;1;6)$, $(2;2;2;3)$, $(1;1;2;5)$,$(1;1;3;4)$,$(2;2;1;4)$,$(3;3;1;2)$

Có 4 cách để thử mỗi tổ hợp số $(1;1;1;6)$, $(2;2;2;3)$

Có 12 cách để thử mỗi tổ hợp số $(1;1;2;5)$,$(1;1;3;4)$,$(2;2;1;4)$,$(3;3;1;2)$

Vậy ông Tuệ phải thực hiện tối đa $2.4 + 4.12 = 56$ lần

Câu 6. (TS vào 10-Chuyên Bình Thuận 23-24)

Chia bảng vuông có cạnh bằng 23cm thành các ô vuông có cạnh bằng 1cm. Ban đầu, tất cả các ô vuông được điền bởi dấu "+". Sau đó, người ta thực hiện đổi dấu (mỗi lần đổi dấu là chuyển "+" thành "-", "-" thành "+") trong các ô vuông ở các dòng và các cột của bảng theo qui tắc sau:

- Tất cả các ô của dòng thứ i được đổi dấu i lần ($i \in \mathbb{N}$ và $1 \le i \le 23$).
- Tất cả các ô của cột thứ j được đổi dấu $5j+1$ lần ($j \in \mathbb{N}$ và $1 \le j \le 23$).

Hỏi sau khi thực hiện tất cả thao tác đổi dấu, trên bảng còn bao nhiêu dấu "+"?

Lời giải

* Theo cách chia ta có bảng ô vuông 23x23; trong đó có 12 dòng mà i lẻ; 11 dòng mà i chẵn và 12 cột mà j lẻ; 11 cột mà j chẵn.

* Theo quy tắc đổi dấu thì ô vuông ở vị trí $\text{i} \times \text{j}$ (dòng thứ i và cột thứ j) sẽ phải đổi dấu $i + (5j+1) = i + 5j + 1$ lần.

* Do $(i+5j+1) - (i+j) = 4j+1$ luôn là số lẻ nên hai số $(i+5j+1)$; $(i+j)$ không có cùng tính chẵn lẻ. Do đó những ô vuông ở vị trí mà $(i+j)$ lẻ sẽ đổi dấu một số chẵn lần (do $i+5j+1$ chẵn), nên những ô này sau khi đổi dấu vẫn mang dấu (+); còn những ô vuông ở vị trí mà $(i+j)$ chẵn sẽ đổi dấu một số lẻ lần (do $i+5j+1$ lẻ), nên những ô này sau khi đổi dấu sẽ mang dấu (-).

*Ta có $11 \times 12 + 12 \times 11 = 264$ ô vuông mà $(i+j)$ lẻ, tức là sau khi đổi dấu theo quy tắc trên thì trên bảng còn lại 264 dấu (+)

Câu 7. (TS vào 10-Chuyên Vĩnh Phúc 23-24)

Sau khi tổ chức một trận đấu giao hữu giữa hai đội bóng lớp $9A$ và $9B$, ban tổ chức có 11 gói kẹo muốn chia cho hai đội. Mỗi đội được chia 5 gói làm phần thưởng và 1 gói ban tổ chức giữ lại để liên hoan. Biết rằng dù chọn bất kì gói nào để giữ lại, ban tổ chức luôn có thể chia 10 gói còn lại cho 2 đội mà tổng số viên kẹo trong 5 gói cho mỗi đội là bằng nhau. Chứng minh rằng 11 gói kẹo đó phải có số viên kẹo bằng nhau.

Lời giải

Gọi $a_1, a_2, ..., a_{11}$ lần lượt là số kẹo trong 11 gói.

Đặt $S = a_1 + a_2 + ... + a_{11}$.

Giả sử tồn tại $1 \le k, l \le 11$ mà $a_k \ne a_l$.

Theo bài ra ta suy ra được $S - a_1, S - a_2, ..., S - a_{11}$ đều là số chẵn

$\Rightarrow a_1, a_2, ..., a_{11}$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Ta thực hiện quá trình như sau:

+ Nếu $a_1, a_2, ..., a_{11}$ cùng chẵn ta thu được bộ mới $(b_1, b_2, ..., b_{11}) = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, ..., \frac{a_{11}}{2}\right)$.

+ Nếu $a_1, a_2, ..., a_{11}$ cùng lẻ ta thu được bộ mới $(b_1, b_2, ..., b_{11}) = \left(\frac{a_1 - 2}{2}, \frac{a_2 - 2}{2}, ..., \frac{a_{11} - 2}{2}\right)$.

Ta thấy 11 gói kẹo với số kẹo $b_1, b_2, ..., b_{11}$ cùng thỏa mãn đề bài.

Tiếp tục như vậy đến khi thu được bộ $(x_1, x_2, ..., x_{11})$ mà tồn tại $1 \le j, i \le 11$ sao cho $x_j = 0;\ x_i = 1.$

Mà bộ $(x_1, x_2, ..., x_{11})$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

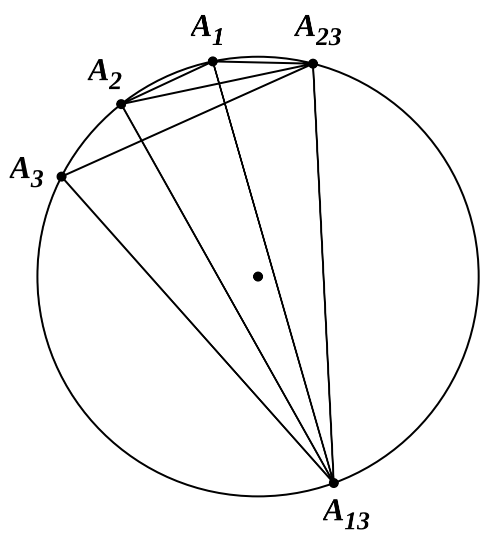
Nên $x_1, x_2, ..., x_{11}$ cùng tính chẵn lẻ (mâu thuẫn).

Điều giả sử là sai.

Vậy $a_1 = a_2 = ... = a_{11}$.

Câu 8. (TS vào 10-Chuyên Yên Bái 23-24)
Cho một đa giác đều có 23 đỉnh. Tô màu các đỉnh của đa giác bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba đỉnh của đa giác được tô cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Lời giải



Gọi đa giác đều 23 đỉnh là $A_1A_2...A_{23}$

Vì đa giác đều có 23 đỉnh là số lẻ nên luôn tồn tại 2 đỉnh cạnh nhau được tô cùng một màu, giả sử là A_1, A_2.

Không mất tính tổng quát giả sử A_1, A_2 được tô mà xanh.

+ Nếu A_{13} được tô màu xanh, ta được tam giác $A_1A_2A_{13}$ cân tại A_{13} tô màu xanh.

+ Nếu A_3 được tô màu xanh, ta được tam giác $A_1A_2A_3$ cân tại A_2 tô màu xanh.

+ Nếu A_{23} được tô màu xanh, ta được tam giác $A_1A_2A_{23}$ cân tại A_1 tô màu xanh.

+ Nếu $A_3; A_{13}; A_{23}$ không tô màu xanh, ta được tam giác $A_{13}A_{23}A_3$ cân tại A_{13} tô màu đỏ.

Vậy luôn tồn tại ba đỉnh của đa giác được tô cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Câu 9. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Hà Nội 23-24)

Có hay không các số nguyên a,b sao cho $(a+b\sqrt{2023})^2 = 2024+2023\sqrt{2023}$?

Lời giải

Giả sử tồn tại a,b là các số nguyên thỏa mãn

$$(a+b\sqrt{2023})^2 = 2024+2023\sqrt{2023}.$$

Từ đây ta suy ra

$$a^2+2023b^2+2ab\sqrt{2023} = 2024+2023\sqrt{2023}.$$

Khi đó ta được

$$(2ab-2023)\sqrt{2023} = 2024-a^2-2023b^2$$

Vì a,b là các số nguyên nên $2ab-2023 \neq 0$. Từ đó ta có $\sqrt{2023} = \dfrac{2024-a^2-2023b^2}{2ab-2023}$. Điều này vô lý, vì $\sqrt{2023}$ là số vô tỷ và $\dfrac{2024-a^2-2023b^2}{2ab-2023}$ là số hữu tỷ. Vậy câu trả lời là không tồn tại các số nguyên a,b sao cho $(a+b\sqrt{2023})^2 = 2024+2023\sqrt{2023}$.

Câu 10. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Hà Nội 23-24)

Trên bảng ta viết đa thức $P(x) = ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$.

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_1(x) = \dfrac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P(x)$.

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_2(x) = \dfrac{P_1(x+1)+P_1(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P_1(x)$.

Ta cứ tiếp tục làm như thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

Lời giải

Bằng các phép biến đổi ta có các đẳng thức sau

$$P_1(x) = \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2} = ax^2+bx+c+a$$

$$P_2(x) = \frac{P_1(x+1)+P_1(x-1)}{2} = ax^2+bx+c+2a$$

Tương tự như vậy bằng phép quy nạp, ta có

$$P_n(x) = ax^2+bx+c+na,\ n\in\mathbb{Z}^+$$

Lúc này, ta có

$$\Delta_{P_n} = b^2-4a(c+na) = (b^2-4ac)-4na^2.$$

Xét các số nguyên dương n thỏa mãn $n > \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ (vì $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ không đổi) thì $\Delta_{P_n} < 0$. Khi đó đa thức $P_n(x)$ không có nghiệm.

Câu 11. (TS vào 10-Chuyên Năng Khiếu ĐHQG TPHCM 23-24)

Cho bảng 4×4 được tô bằng ô đen hoặc trắng sao cho:

i) mỗi hàng có số ô đen bằng nhau;

ii) mỗi cột có số ô đen đôi một khác nhau.

a) Tìm số ô đen ở mỗi hàng.

b) Một cặp ô được gọi là "tốt" khi có một ô đen và một ô trắng đứng cạnh nhau. Tìm số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng; số cặp tốt nhiều nhất tính theo cột.

Lời giải

a) Cách 1:

Gọi x là số ô đen trên mỗi hàng. Khi đó tổng số ô đen của bảng là $4x$.

Do số ô đen trên các cột đôi một là khác nhau nên số lượng ô đen của các cột lần lượt là bốn trong năm số $0,1,2,3,4$.

Mà tổng số ô đen là $4x$, chia hết cho 4. Còn tổng $0+1+2+3+4=22$ chia 4 dư 2 nên trong tổng phải không có số 2.

Khi đó: $4x=0+1+3+4 \Leftrightarrow x=2$.

Cách 2:

Vì mỗi cột có số ô đen đôi một khác nhau nên tổng số ô đen trong bảng phải lớn hơn hoặc bằng $0+1+2+3=6$ và nhỏ hơn hoặc bằng $1+2+3+4=10$.

Mà mỗi hàng có số ô đen đều bằng nhau nên tổng số ô đen trong bảng phải chia hết cho 4.

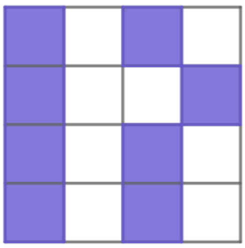
Do đó tổng số ô đen trong bảng là 8. Suy ra số ô đen ở mỗi hàng là 2.

b) $8=0+1+3+4$. Số ô đen trong các cột sẽ là 0, 1, 3, 4.

Xét số cặp tốt nhiều nhất tính theo cột:

- Trong cột chứa 0 ô đen luôn có 0 cặp tốt.
- Trong cột chứa 1 ô đen luôn có 2 cặp tốt.
- Trong cột chứa 3 ô đen luôn có 2 cặp tốt.
- Trong cột chứa 4 ô đen luôn có 0 cặp tốt.

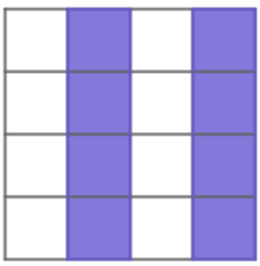
Vậy có tối đa 4 cặp tốt tính theo cột. Một ví dụ cụ thể là:

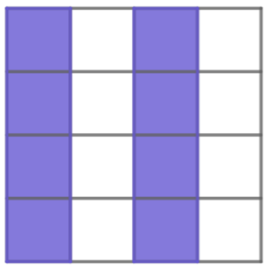


Xét số cặp tốt nhất tính theo hàng:

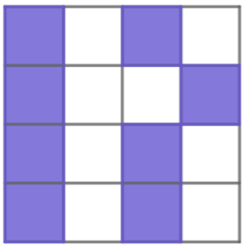
- Mỗi hàng đều chứa 2 ô đen. Và hàng 1×4 có đúng 2 ô đen sẽ chứa tối đa 3 cặp tốt và phải là 1 trong 2 cấu hình sau:

- Như vậy số cặp tốt nhiều nhất tính theo hàng trong bảng là $3\times 4=12$. Giả sử tồn tại 1 cấu hình A có 12 cặp tốt tính theo hàng và thỏa yêu cầu bài. Như vậy mỗi hàng phải có cấu hình là 1 trong 2 cấu hình trên. Và vì có 1 cột chứa 4 ô nên cấu hình A chỉ có thể là





Tuy nhiên 2 cấu hình trên đều không thỏa yêu cầu đề bài. Do đó trong bảng 4×4 chỉ có tối đa 11 cặp tốt theo hàng. Ví dụ:



Câu 12. (TS vào 10-Chuyên Năng Khiếu ĐHQG TPHCM 23-24)

Cho m, n là các số nguyên không âm thỏa mãn $m^2-n=1$. Đặt $a=n^2-m$.

a) Chứng minh rằng a là số lẻ.

b) Giả sử $a=3\cdot 2^k+1$, k là số nguyên không âm. Chứng minh rằng $k=1$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng a là số lẻ.

Vì $m^2-n=1$ là số lẻ nên m,n khác tính chẵn lẻ. Do đó $a=n^2-m$ là số lẻ.

b) Giả sử $a=3\cdot 2^k+1$, k là số nguyên không âm. Chứng minh rằng $k=1$

Ta có: $a-1=n^2-m-m^2+n=(n-m)(n+m+1)\Rightarrow 3\cdot 2^k=(n-m)(n+m+1)$

Vì $n-m$ lẻ nên $n+m+1\,\vdots\,2^k$, do đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $n+m+1=2^k$ thì $n-m=3$, kết hợp với $m^2-n=1$, ta được: $m^2-n-4=0\Rightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ (L)

- Nếu $n+m+1=3\cdot 2^k$ thì $n-m=1$, kết hợp với $m^2-n=1$, ta được $m^2-n-2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-1\end{array}\right.$

Do đó $m=2$ (do $m\ge 0$)

Từ đó suy ra $n=m+1=2+1=3$ và $3\cdot 2^k=n+m+1=3+2+1=6\Rightarrow k=1$

Vậy $k=1$.

Câu 13. (TS vào 10-Chuyên ĐHSP Vinh 23-24)

Cho đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c|\le 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b,c.

Lời giải

Gọi hai nghiệm nguyên của $P(x)=x^2+bx+c$ là u,v.

Theo định lý $Vi-$ et ta được $u+v=-b, uv=c$.

Vì $|P(9)|$ là số nguyên tố nên $|(9-u)(9-v)|$ là số nguyên tố dẫn đến $|9-u|=1$ hoặc $|9-v|=1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|9-u|=1\Leftrightarrow u\in\{8;10\}$.

Trường hopp 1. $u=10$, vì $|c|\le 16$, nên $|v|\in\{0;1\}\Leftrightarrow v\in\{-1;0;1\}$.

Mặt khác $9-1=8, 9-0=9, 9+1=10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.

Trường hopp 2. $u=8$, vì $|c|\le 16$, nên $|v|\le 2$.

Mà v phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v\in\{-2;2\}$. Thử lại cả hai giá trị này thỏa mãn và ta nhận được giá trị của b,c tương ứng là $-10,16$ và $-6,-16$.

Vậy tất cả cặp (b,c) thỏa mãn là $(b,c)\in\{(-10,16);(-6,-16)\}$.