

Câu 1. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 5\sqrt{2} - \sqrt{18}$

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{3-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$

Lời giải

a) $A = 5\sqrt{2} - \sqrt{3^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) Với $x > 0, x \neq 9$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})} \right) \cdot (3-\sqrt{x}) \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})} \cdot (3-\sqrt{x}) = \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Câu 2. (ts Quảng Trị 2022-2023) Bằng các phép biến đổi đại số, hãy rút gọn các biểu thức sau:

$A = \sqrt{27} - \sqrt{12};$

$B = \sqrt{a} - \frac{a-4}{\sqrt{a}+2},$ với $a \geq 0.$

Lời giải

Rút gọn các biểu thức:

$A = \sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3};$

$B = \sqrt{a} - \frac{a-4}{\sqrt{a}+2},$ với $a \geq 0.$

$$B = \sqrt{a} - \frac{a-4}{\sqrt{a}+2} = \sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{\sqrt{a}+2} = \sqrt{a} - (\sqrt{a}-2) = \sqrt{a} - \sqrt{a} + 2 = 2.$$

Câu 3. (ts Sơn La 2022-2023) Tìm điều kiện xác định của biểu thức: $A = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}$

Lời giải

ĐKXD: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy điều kiện xác định của biểu thức A là $x \geq 2$

Câu 4. (ts Tây Ninh 2022-2023) Tính giá trị của biểu thức $P = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2$

Lời giải

$P = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 + 7 - 3 = 6$

Câu 5. (ts Quảng Bình 2022-2023) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 4\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{45}.$

b) $B = \frac{a-2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ (với $0 < a \neq 1$).

Lời giải

a) $A = 4\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{45} = 4\sqrt{5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$

b) $B = \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ (với $0 < a \neq 1$)
 $= \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} - 1 + \sqrt{a} + 1 = 2\sqrt{a}.$

Vậy $B = 2\sqrt{a}$ (với $0 < a \neq 1$).

Câu 6. (ts Nghệ An 2022-2023)

a) Tính $A = \sqrt{81} - \sqrt{36} + \sqrt{49}.$

b) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{2022}$, với $x > 0, x \neq 1.$

Lời giải

a) $A = \sqrt{81} - \sqrt{36} + \sqrt{49}$
 $= 9 - 6 + 7$
 $= 10$

b) Với $x > 0, x \neq 1$ ta có: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{2022}$
 $= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{2022}$
 $= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{2022}$
 $= \frac{1}{2022}$

Câu 7. (ts Quảng Ninh 2022-2023)

a) Thực hiện phép tính: $2\sqrt{9} - \sqrt{4}$

b) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{2}{x - 1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Lời giải

a) Ta có $2\sqrt{9} - \sqrt{4} = 2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = 4$

b) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{2}{x - 1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$\Rightarrow A = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right) : \frac{2}{x - 1}$
 $= \frac{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} : \frac{2}{x - 1} = \frac{2\sqrt{x}}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{2} = \sqrt{x}$

Câu 8. (ts Hải Phòng 2022-2023) Cho hai biểu thức:

$A = (\sqrt{80} - 3\sqrt{20} + \sqrt{5}) : \sqrt{5}; B = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn các biểu thức $A, B.$

b) Tìm các giá trị của x để $A + B = 2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (\sqrt{80} - 3\sqrt{20} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} = (\sqrt{4^2 \cdot 5} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} \\ &= (4\sqrt{5} - 3 \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} \\ &= (4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} \\ &= -\sqrt{5} : \sqrt{5} = -1. \end{aligned}$$

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \\ &= \sqrt{x}-1 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}-1. \end{aligned}$$

Vậy $A = -1, B = 2\sqrt{x}-1 (x \geq 0, x \neq 1)$.

b) $A + B = -1 + 2\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x} - 2$.

$$A + B = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (tm).}$$

Vậy để $A + B = 2$ thì $x = 4$.

Câu 9. (ts Lạng Sơn 2022-2023)

a) Tính giá trị các biểu thức: $A = \sqrt{81} - \sqrt{16}; B = \sqrt{(2 + \sqrt{11})^2} - \sqrt{11}$.

b) Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a) **Tính giá trị các biểu thức:**

$$A = \sqrt{81} - \sqrt{16} = \sqrt{9^2} - \sqrt{4^2} = 9 - 4 = 5.$$

$$B = \sqrt{(2 + \sqrt{11})^2} - \sqrt{11} = |2 + \sqrt{11}| - \sqrt{11} = 2 + \sqrt{11} - \sqrt{11} = 2.$$

b) Xét biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

1. **Rút gọn biểu thức P :**

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}-1}.$$

2. **Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$:**

Khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn điều kiện xác định), ta có:

$$\sqrt{a} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = |\sqrt{2} + 1| = \sqrt{2} + 1;$$

$$\text{Suy ra: } P = \frac{2}{\sqrt{a} - 1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Vậy $P = \sqrt{2}$ khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 10. (ts Ninh Bình 2022-2023) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{24} + 2\sqrt{54}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{24} + 2\sqrt{54} \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 6} + 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 6} \\ &= 2\sqrt{6} + 2 \cdot 3\sqrt{6} \\ &= 2\sqrt{6} + 6\sqrt{6} \\ &= 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

Câu 11. (ts Điện Biên 2022-2023) Tính giá trị của biểu thức $A = 2022 + \sqrt{9} - \sqrt{4}$.

Lời giải

$$A = 2022 + \sqrt{9} - \sqrt{4} = 2022 + 3 - 2 = 2023$$

Câu 12. (ts Thừa Thiên Huế 2022-2023)

a) Tìm điều kiện của a để biểu thức $A = \sqrt{x-3}$ có nghĩa.

b) Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{3}) + \sqrt{6}$.

c) Rút gọn biểu thức $C = \frac{x}{\sqrt{x+x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

Lời giải

a) Biểu thức $A = \sqrt{x-3}$ có nghĩa khi $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy A có nghĩa khi $x \geq 3$

b) $B = \sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{3}) + \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{6} = 4$

c) Với $x > 0$; $x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} C &= \frac{x}{\sqrt{x+x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = 1 \end{aligned}$$

Câu 13. (ts Thái Bình 2022-2023) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 9$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A > \frac{1}{2}$.

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức A.

Ta có $A = \left(\frac{3 + \sqrt{x} - (3 - \sqrt{x})}{(3 - \sqrt{x}) \cdot (3 + \sqrt{x})} \right) \cdot \frac{3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(3 - \sqrt{x}) \cdot (3 + \sqrt{x})} \cdot \frac{3 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{(3 - \sqrt{x})}$

Vậy với $x > 0$ và $x \neq 9$ thì $A = \frac{2}{(3 - \sqrt{x})}$

2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

Với $x = 4$ thỏa mãn điều kiện xác định, thay vào ta có $A = \frac{2}{(3 - \sqrt{4})} = 2$

Vậy với $x = 4$ thì $A = 2$

3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A > \frac{1}{2}$.

$$A > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3 - \sqrt{x}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3 - \sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4 - (3 - \sqrt{x})}{2(3 - \sqrt{x})} > 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{x}}{2(3 - \sqrt{x})} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{x} > 0 \text{ (do } 1 + \sqrt{x} > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ và kết hợp đkxđ $\Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Câu 14. (ts Đắc Nông 2022-2023)

a) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{8} - 2\sqrt{2} + \sqrt{18}$

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{x^2 - x}{x - 1}$ ($x \neq 2, x \neq 1$)

Lời giải

a) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{8} - 2\sqrt{2} + \sqrt{18}$

Ta có: $A = \sqrt{8} - 2\sqrt{2} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{x^2 - x}{x - 1}$ ($x \neq 2, x \neq 1$)

Ta có: $P = \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} + \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x + 2 + x = 2x + 2$.

Câu 15. (ts Lào Cai 2022-2023) Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $2 + \sqrt{36}$ b) $\sqrt{25} - \sqrt{9}$

Lời giải

a) $2 + \sqrt{36} = 2 + 6 = 8$

b) $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$

Câu 16. (ts Đà Nẵng 2022-2023)

a. Tính $A = \sqrt{9} + \sqrt{16} + 2\sqrt{2} - \sqrt{8}$.

b. Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{x + 1}{x - 1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Lời giải

a. Tính $A = \sqrt{9} + \sqrt{16} + 2\sqrt{2} - \sqrt{8}$.

Ta có $A = \sqrt{9} + \sqrt{16} + 2\sqrt{2} - \sqrt{8} = 3 + 4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 7$

b. Ta có $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) : \frac{x+1}{x-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} + \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \right) : \frac{x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} \cdot \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1} = 1$$

Vậy $B = 1$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Câu 17. (ts Khánh Hòa 2022-2023) Không dùng máy tính cầm tay. Rút gọn biểu thức:

$$A = \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{75}$$

Lời giải

Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{75}$

$$\begin{aligned} \sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{75} &= \sqrt{4 \cdot 3} + 3\sqrt{9 \cdot 3} - 2\sqrt{25 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} = \\ &= 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Câu 18. (ts Nam Định 2022-2023)

a) Rút gọn biểu thức $T = \frac{8\sqrt{2} - \sqrt{32} - 4}{1 - \sqrt{2}}$.

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{7}{x-4} \right) \cdot (\sqrt{x}-1)$.

Lời giải

a) $T = \frac{8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4}{1 - \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{1 - \sqrt{2}} = -4$.

b) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$.

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x} - 4 - \sqrt{x} - 2 + 7}{x-4} \right) \cdot (\sqrt{x}-1) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} \right) \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{x-1}{x-4}$$

Câu 19. (ts Bắc Kạn 2022-2023) Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = 3\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{48}$.

2. $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 \right) : \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Lời giải

1. $A = 3\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{48}$

$$A = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$$

$$A = 5\sqrt{3}$$

Vậy $A = 5\sqrt{3}$

2.

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1 \right) : \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt{x} + 1 - (x-1) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

$$B = \frac{x+1-x+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

$$B = \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Câu 20. (48 . Đồng Tháp - 2022) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{9} + 2\sqrt{16}$.

Lời giải

Ta có: $A = \sqrt{9} + 2\sqrt{16} = 3 + 2 \cdot 4 = 11$.

Câu 21. (ts Vĩnh Long 2022-2023) Tính giá trị biểu thức

a) $A = \sqrt{72} + \frac{1}{5}\sqrt{50} - \sqrt{162}$

b) $B = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{14}}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}$

Lời giải

a) $A = \sqrt{72} + \frac{1}{5}\sqrt{50} - \sqrt{162} = \sqrt{2 \cdot 6^2} + \frac{1}{5}\sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2 \cdot 9^2} = 6\sqrt{2} + \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$
 $= 6\sqrt{2} + \sqrt{2} - 9\sqrt{2} = (6+1-9)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

b) $B = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{14}}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{14}}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{7} - 2$
 $= \frac{\sqrt{2}(5 - \sqrt{7})}{\sqrt{2}} + \sqrt{7} - 2 = 5 - \sqrt{7} + \sqrt{7} - 2 = 3$

Câu 22. (ts Tiền Giang 2022-2023) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} - \sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $A = \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} - \sqrt{5}$
 $= |3 + \sqrt{5}| - \sqrt{5}$
 $= 3 + \sqrt{5} - \sqrt{5}$
 $= 3$

Câu 23. (ts THANH HÓA 2022-2023) Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-3}{x-1}$, với $x \geq 0, x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{P} = \frac{4}{3}$.

Lời giải

1. Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{x-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{2x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{x-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}+x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ (Với $x \geq 0, x \neq 1$).

2. Xét: $P = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$, ($x \geq 0, x \neq 1$) suy ra: $\frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x}+1}{3}$

Ta có: $\frac{1}{P} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=4 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (tmđk)

Vậy, với $x=9$ thì $\frac{1}{P} = \frac{4}{3}$.

Câu 24. (ts HÀ NỘI 2022-2023) Cho hai biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{x+4}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

3) Tìm số nguyên dương x lớn nhất thỏa mãn $A - B < \frac{3}{2}$.

Lời giải

1) Thay $x=9$ vào biểu thức A ta được $A = \frac{3\sqrt{9}}{\sqrt{9}+2} = \frac{3.3}{3+2} = \frac{9}{5}$.

Vậy với $x=9$ ta được $A = \frac{9}{5}$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$B = \frac{x+4}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+4-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.

3) Ta có:

$$A - B < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x} - 3(\sqrt{x+2})}{2(\sqrt{x+2})} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 6}{2(\sqrt{x+2})} < 0$$

Mà $2(\sqrt{x+2}) > 0$ do đó $\sqrt{x} - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 36$.

Kết hợp $x \geq 0; x \neq 4$, mà x là số nguyên lớn nhất nên $x = 35$.

Vậy $x = 35$ là giá trị cần tìm.

Câu 25. (ts Bình Phước 2022-2023)

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{64} + \sqrt{16}$$

$$B = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$$

2. Cho biểu thức: $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - 2$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = 49$.

Lời giải

1. Tính giá trị các biểu thức:

$$A = \sqrt{64} + \sqrt{16} = 8 + 4 = 12$$

$$B = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$$

$$= |2 + \sqrt{3}| - \sqrt{3}$$

$$= 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} \text{ (do } 2 + \sqrt{3} > 0 \text{)}$$

$$= 2$$

2. Cho biểu thức: $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - 2$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức P.

Với $x \geq 0, x \neq 4$

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x} - 2(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2}$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$= \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} - 2} = \sqrt{x} - 2$$

Cách khác: Với $x \geq 0, x \neq 4$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} - 2$$

$$= \sqrt{x} - 2$$

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = 49$.

Thay $x = 49$ (thỏa mãn điều kiện) vào P sau rút gọn ta được:

$$P = \sqrt{49} - 2 = 7 - 2 = 5$$

Vậy với $x = 49$ thì $P = 5$.

Câu 26. (ts Cao Bằng 2022-2023) Thực hiện phép tính: $5\sqrt{9} - \sqrt{36}$.

Lời giải

Thực hiện phép tính: $5\sqrt{9} - \sqrt{36}$.

$$5\sqrt{9} - \sqrt{36} = 5\sqrt{3^2} - \sqrt{6^2} = 5 \cdot 3 - 6 = 9$$

Câu 27. (ts Bình Dương 2022-2023) Thực hiện phép tính: $(\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Lời giải

$$(\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= \left(\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} \right) (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= (|\sqrt{5} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{2}|)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$= 3 - 2 = 1$$

Câu 28. (ts Lai Châu 2022-2023) Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+10}{x-4}$ (với

$x \geq 0, x \neq 4$).

a. Tính giá trị của A khi $x = 9$.

b. Rút gọn biểu thức B.

c. Cho biểu thức $P = A \cdot B$. Tìm các giá trị của x để $P \leq -1$.

Lời giải

a. Khi $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) ta có $A = \frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$

b. Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+10}{x-4}$

$$= \frac{3(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+10)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

c. Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{2\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}-2)^2}$

$$\text{Do đó } P \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-16}{(\sqrt{x}-2)^2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-16+(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2-13}{(\sqrt{x}-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \leq 13 \text{ (vì } (\sqrt{x}-2)^2 > 0, \forall x \geq 0, x \neq 4)$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x}-1| \leq \sqrt{13} \Leftrightarrow 1-\sqrt{13} \leq \sqrt{x} \leq 1+\sqrt{13} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1+\sqrt{13} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 14+2\sqrt{13}$$

Kết hợp điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ ta được $\begin{cases} x \neq 4 \\ 0 \leq x \leq 14+2\sqrt{13} \end{cases}$.

Câu 29. (ts Hải Dương 2022-2023) Rút gọn biểu thức $P = \frac{3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$

và $x \neq 4$.

Lời giải

Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$ ta có

$$P = \frac{3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{2-\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3+2(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{3+2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

Câu 30. (ts Cần Thơ 2022-2023) Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}}$

Lời giải

$$P = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2} - 4}{2 - \sqrt{2}}$$

$$P = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2} - 4}{2 - \sqrt{2}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} - \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} - 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3$$

Câu 31. (ts Bình Thuận 2022-2023) Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = (\sqrt{12} - 2\sqrt{7})\sqrt{3} + \sqrt{84}$.
2. $B = \left(\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + 1\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{4}$ với $x \geq 0$.

Lời giải

1.

$$A = (\sqrt{12} - 2\sqrt{7})\sqrt{3} + \sqrt{84}$$

$$A = \sqrt{12 \cdot 3} - 2\sqrt{7 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 21}$$

$$A = \sqrt{36} - 2\sqrt{21} + 2\sqrt{21}$$

$$A = 6 - 2\sqrt{21} + 2\sqrt{21}$$

$$A = 6.$$

2.

$$B = \left(\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + 1\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{4} \text{ với } x \geq 0.$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} + 1\right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{4}$$

$$B = (\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{4}{\sqrt{x} + 1}$$

$$B = 4.$$

Câu 32. (ts Bình Định 2022-2023) Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$; $x > 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức Q .
- b) Tìm số nguyên x để Q có giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 2.a) \quad Q &= \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\
 &= \left[\frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 - x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{x - 1}
 \end{aligned}$$

b) Q nguyên $\Leftrightarrow 2 : x - 1 \Rightarrow x - 1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

x-1	1	-1	2	-2
x	2	0	3	-1
Q	2	-2	1	Loại
	Thỏa			

Vậy x = 2 thì Q đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Câu 33. (ts Lào Cai 2022-2023) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}
 \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

b) Để $P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = 9$ thì $P = \frac{1}{2}$

Câu 34. (ts BẮC NINH 2022-2023) Rút gọn biểu thức $M = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$, với $x \geq 0, x \neq 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right), \text{ với } x \geq 0, x \neq 1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \frac{(2\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}. \text{ Vậy } M = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}, \text{ với } x \geq 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

Câu 35. (48 . Đồng Tháp - 2022) Tìm điều kiện của x để biểu thức $B = \sqrt{2x-4}$ có nghĩa.

Lời giải

Ta có: $B = \sqrt{2x-4}$ có nghĩa khi và chỉ khi $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Câu 36. (ts Bắc Giang 2022-2023) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} \right) : \frac{x}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0; x \neq 4$

Lời giải

Với $x > 0, x \neq 4$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} \right) : \frac{x}{\sqrt{x}-2} \\ A &= \frac{3\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{x} \\ A &= \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{x} \\ \text{Vậy } A &= \frac{2}{x} \text{ với } x > 0, x \neq 4 \end{aligned}$$

Câu 37. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Rút gọn biểu thức $A = 3\sqrt{8} + 5\sqrt{9} - 2\sqrt{18}$.

Lời giải

$$A = 3\sqrt{8} + 5\sqrt{9} - 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2} + 15 - 6\sqrt{2} = 15.$$

Câu 38. (ts Ha Nam 2022-2023) Cho biểu thức $P = \frac{a+6\sqrt{a}+9}{\sqrt{a}+3} + \frac{a-9}{\sqrt{a}-3}$ (với $a \geq 0; a \neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a = 19 - 6\sqrt{10}$.

Lời giải

a) Ta có:
$$P = \frac{a+6\sqrt{a}+9}{\sqrt{a}+3} + \frac{a-9}{\sqrt{a}-3} = \frac{(\sqrt{a}+3)^2}{\sqrt{a}+3} + \frac{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)}{\sqrt{a}-3} = \sqrt{a}+3 + \sqrt{a}+3$$

$$= 2\sqrt{a}+6.$$

b) Khi $a = 19 - 6\sqrt{10} = (\sqrt{10}-3)^2$ do đó: $\sqrt{a} = |\sqrt{10}-3| = \sqrt{10}-3$

Thay vào biểu thức P , ta có: $P = 2(\sqrt{10}-3)+6 = 2\sqrt{10}.$

Câu 39. (ts Bến Tre 22.23 2022-2023) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)$ với $a, b > 0$

Lời giải

Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$.

với $a, b > 0$ và $a \neq b$, ta có:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{2\sqrt{a}}{a-b}$$

$$A = \frac{2}{a-b}$$

Vậy với $a, b > 0$ và $a \neq b$ thì $A = \frac{2}{a-b}.$

Câu 40. (ts Bến Tre 2022-2023) Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$.

Lời giải

với $a, b > 0$ và $a \neq b$, ta có:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{2\sqrt{a}}{a-b}$$

$$A = \frac{2}{a-b}$$

Vậy với $a, b > 0$ và $a \neq b$ thì $A = \frac{2}{a-b}.$

Câu 41. (ts Ninh Bình 2022-2023) Rút gọn biểu thức $B = \left(5 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(5 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$ với $a \geq 0; a \neq 4$.

Lời giải

$$B = \left(5 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(5 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) \quad (\text{Với } a \geq 0; a \neq 4)$$

$$B = \left(5 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(5 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right)$$

$$B = (5 + \sqrt{a}) \cdot (5 - \sqrt{a})$$

$$B = 5^2 - (\sqrt{a})^2$$

$$B = 25 - a$$

Vậy với $a \geq 0; a \neq 4$ thì $B = 25 - a$.

Câu 42. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Tìm điều kiện của x để biểu thức $\sqrt{2x-1}$ có nghĩa.

Lời giải

$$\sqrt{2x-1} \text{ có nghĩa khi } 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 43. (ts Điện Biên 2022-2023) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

1. Rút gọn biểu thức B .
2. Tìm x để $B > 1$.

Lời giải

1. Với $x \geq 0; x \neq 9$ ta có:

$$B = \left(\frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \left(\frac{5(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{5\sqrt{x}+15+\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{6\sqrt{x}+12}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{6(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{6x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 9$ thì biểu thức $B = \frac{6x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$.

2. Với $x \geq 0; x \neq 9$, để $B > 1 \Leftrightarrow \frac{6x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{x-9} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x-x+9}{x-9} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+9}{x-9} > 0$$

$\Leftrightarrow 5x+9$ và $x-9$ cùng dấu.

Mà với $x \geq 0; x \neq 9 \Rightarrow 5x \geq 0 \Rightarrow 5x+9 > 0$. Do đó: $x-9 > 0 \Leftrightarrow x > 9$.

Kết hợp với điều kiện suy ra: $x > 9$.

Vậy với $x > 9$ thì $B > 1$.

Câu 44. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{4}{x-4} \right)$ với

$x > 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tìm x để $P = \frac{7}{3}$.

Lời giải

a) $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{4}{x-4} \right) = \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$.

b) $P = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x}} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow 3x - 7\sqrt{x} - 6 = 0$ (1).

Đặt $t = \sqrt{x} (t \geq 0)$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 3t^2 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$ (loại).

Ta có $t = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn).

Câu 1. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Tìm số thực để đường thẳng có phương trình $y = ax + 2$ đi qua điểm $A(3;8)$

Lời giải

Vì đường thẳng $y = ax + 2$ đi qua điểm $A(3;8)$ nên ta có
 $a.3 + 2 = 8 \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2$
 Vậy $a = 2$

Câu 3. (ts Quảng Bình 2022-2023) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x + 2$ đi qua điểm $A(1;4)$.

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y = (m-1)x + 2$ đi qua điểm $A(1;4)$ thì:
 $(m-1).1 + 2 = 4 \Leftrightarrow m - 1 + 2 = 4 \Leftrightarrow m + 1 = 4 \Leftrightarrow m = 3$.
 Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. (ts An Giang 2022-2023) Cho hàm số $y = x - 1$ có đồ thị là (d) .

- a) Vẽ đồ thị (d) trên mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm a để (d) tiếp xúc với Parabol $(P): y = ax^2$.

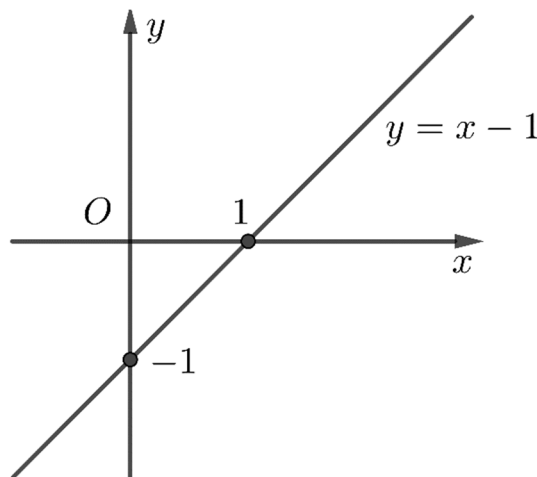
Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	0	1
$y = x - 1$	-1	0

\Rightarrow Đường thẳng d đi qua 2 điểm $(0; -1)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị:



b) Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình: $ax^2 = x - 1$ ($a \neq 0$).

$\Leftrightarrow ax^2 - x + 1 = 0$ (*)

Để d tiếp xúc (P) thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

Vậy $a = \frac{1}{4}$.

Câu 5. (ts Nghệ An 2022-2023) Xác định hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$, biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm $M(-1; 3)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Lời giải

Do đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(-1; 3)$ nên $-a + b = 3$ (1)

Do đồ thị của hàm số $y = ax + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $b = -2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow a = -5, b = -2$.

Câu 6. (ts Lạng Sơn 2022-2023)

a) Vẽ đồ thị hàm số: $y = x - 3$.

b) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - 3$.

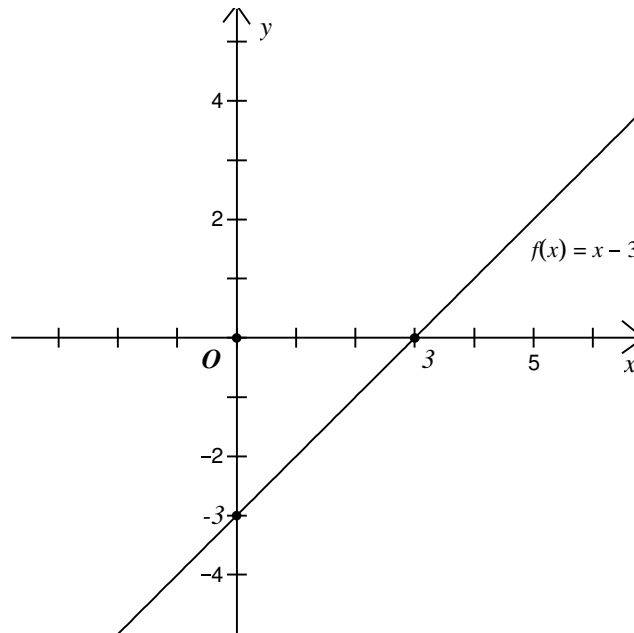
Lời giải

a) **Vẽ đồ thị hàm số:** $y = x - 3$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -3$;

Với $y = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$;

Vậy đồ thị hàm số $y = x - 3$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; -3)$ và $B(3; 0)$.



b) **Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - 3$.**

+) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - 3$ là nghiệm của phương trình: $-2x^2 = x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$.

+) Vì $a + b + c = 2 + 1 + (-3) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{-3}{2}$.

Với $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - 3 = -2$;

Với $x_2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{-3}{2} - 3 = \frac{-9}{2}$.

Vậy hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt là $M(1; -2)$ và $N\left(\frac{-3}{2}; \frac{-9}{2}\right)$.

Câu 8. (ts Ninh Bình 2022-2023) Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 20 + m$ đi qua điểm $N(2; 5)$?

Lời giải

Để đồ thị hàm số $y = x + m$ đi qua điểm $N(2; 5)$, thay $x = 2; y = 5$ vào công thức hàm số ta được :

$$5=2+m$$

$$\Rightarrow m=5-2$$

$$\Rightarrow m=3$$

Vậy $m=3$ thỏa mãn đề ra.

Câu 9. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y=2x+1$ với trục hoành, trục tung.

Lời giải

- Với $y=0, 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. Do đó tọa độ giao điểm với trục hoành là $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

- Với $x=0, y=2 \cdot 0+1=1$. Do đó tọa độ giao điểm với trục tung là $(0; 1)$.

Câu 10. (ts THANH HÓA 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình $y=(2-m)x+m+1$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải

Vì đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên đường thẳng (d) đi qua điểm $(2; 0)$

Thay $x=2; y=0$ vào phương trình ta được:

$$0=(2-m) \cdot 2+m+1$$

$$\Leftrightarrow 0=4-2m+m+1$$

$$\Leftrightarrow m=5$$

Vậy, với $m=5$ thì đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Câu 11. (ts Cao Bằng 2022-2023) Hàm số $y=-2x+3$ đồng biến hay nghịch biến trên \mathbb{R} ? Tại sao?

Lời giải

Hàm số $y=-2x+3$ đồng biến hay nghịch biến trên \mathbb{R} ? Tại sao?

Ta có: $a=-2 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

Câu 12. (ts Hải Dương 2022-2023) Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng sau cắt nhau tại một điểm: $y=6-4x; y=\frac{3x+5}{4}$ và $y=(m-1)x+2m-5$.

Lời giải

$$y=\frac{3x+5}{4} \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$$

$$\text{Để ba đường thẳng cắt nhau thì } \begin{cases} m-1 \neq \frac{3}{4} \\ m-1 \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{7}{4} \\ m \neq -3 \end{cases} (*)$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng có phương trình $y=6-4x$ và đường

$$\text{thẳng } y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \text{ ta có } 6-4x=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{19}{4}x=\frac{19}{4} \Leftrightarrow x=1$$

$$x=1 \Rightarrow y=6-4 \cdot 1 \Rightarrow y=2$$

Vì ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm nên giao điểm của hai đường thẳng $y=6-4x$ và đường

thẳng $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ thuộc đường thẳng $y=(m-1)x+2m-5$ nên ta có phương trình

$$2=(m-1) \cdot 1+2m-5 \Leftrightarrow 2=m-1+2m-5 \Leftrightarrow m=\frac{8}{3} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy với $m=\frac{8}{3}$ thì ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm.

Câu 13. (ts Thừa Thiên Huế 2022-2023) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 2mx - 1$

. Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 2)$

Lời giải

Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1; 2)$ nên:

$$2 = 2m \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow 2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Câu 14. (ts Bình Phước 2022-2023) Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

Lời giải

Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \cdot 2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(2; 3)$.

Câu 15. (ts Bình Định 2022-2023) Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = -x + 4$ và điểm $A(2, 2)$.

- a) Chứng tỏ điểm A thuộc đường thẳng (d) .
- b) Tìm a để parabol $(P): y = ax^2$ đi qua điểm A . Với giá trị a tìm được, hãy xác định tọa độ điểm B là giao điểm thứ hai của (d) và (P) .
- c) Tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải

a/ Thay $x = 2, y = 2$ vào pt $(d): 2 = -2 + 4$ (đúng)

Vậy điểm A thuộc đường thẳng (d)

b/ Thay $x = 2, y = 2$ vào pt $(P): 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. $(P): y = \frac{1}{2}x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) :

$$\frac{1}{2}x^2 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy giao điểm còn lại là $B(-4; 8)$.

c/ $O(0; 0)$. $A(2; 2)$. $B(-4; 8)$.

$$OB = \sqrt{(-4)^2 + (8)^2} = 4\sqrt{5}cm$$

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}cm$$

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (8-2)^2} = 6\sqrt{2}cm$$

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

Suy ra tam giác OAB vuông tại A

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12cm^2$$

Câu 16. (ts Lào Cai 2022-2023)

a) Tìm các giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1): y = (k-1)x + k$ song song với đường thẳng $(d_2): y = 3x - 12$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = -x + m + 1$ cắt Parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$.

Lời giải

a) Tìm các giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1): y = (k-1)x + k$ song song với đường thẳng $(d_2): y = 3x - 12$.

$$\text{Vì } (d_1) // (d_2) \text{ nên } \begin{cases} k-1=3 \\ k \neq -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ k \neq -12 \end{cases} \Rightarrow k=4 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Nên } (d_1): y = (4-1)x + 4 \Rightarrow (d_1): y = 3x + 4$$

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = -x + m + 1$ cắt Parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(d): y = -x + m + 1$ và $(P): y = x^2$ là:

$$x^2 = -x + m + 1 \Rightarrow x^2 + x - m - 1 = 0 (*)$$

$$(a=1; b=1 c=-m-1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4.1(-m-1)$$

$$\Delta = 5 + 4m$$

$$\text{Để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thì } \Delta > 0 \Rightarrow 5 + 4m > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{4}$$

$$\text{Vì } x_2 \text{ là một nghiệm của phương trình (*) nên } x_2^2 + x_2 - m - 1 = 0 \Rightarrow x_2^2 - m - 1 = -x_2$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét ta được : } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m-1}{1} = -m-1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - m - 1 - 4m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 5m = 0$$

$$\Rightarrow S^2 - 2P - 5m = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^2 - 2.(-m-1) - 5m = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2m + 2 - 5m = 0$$

$$\Rightarrow 3 - 3m = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-3}{-3} = 1 \text{ (nhận)}$$

Vậy với tham số $m=1$ thì đường thẳng $(d): y = -x + m + 1$ cắt Parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$.

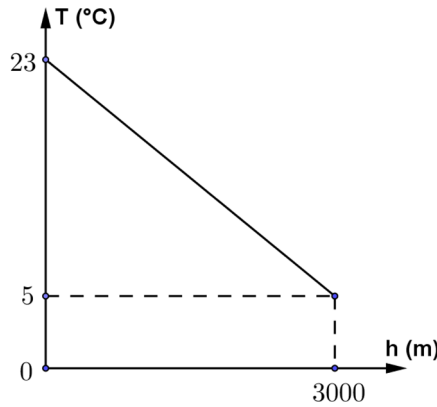
Câu 18. (ts TP HCM 2022-2023) Một vận động viên khi leo núi nhận thấy rằng càng lên cao thì nhiệt độ không khí càng giảm. Mối liên hệ giữa nhiệt độ không khí T và độ cao h (so với chân núi) được

cho bởi hàm số $T = a.h + b$ có đồ thị như hình vẽ bên (nhiệt độ T tính theo $^{\circ}C$ và độ cao h tính theo mét)

Tại chân núi, người đó đo được nhiệt độ không khí là $23^{\circ}C$ và trung bình cứ lên cao 100 m thì nhiệt độ giảm $0,6^{\circ}C$.

a) Xác định a, b trong công thức trên.

b) Bạn Minh đang leo núi và dùng nhiệt kế đo được nhiệt độ không khí tại vị trí dừng chân là $15,8^{\circ}C$. Hỏi bạn Minh đang ở độ cao bao nhiêu mét so với chân núi?



Lời giải

a) Thay $h = 0; T = 23$ vào hàm số ta có $23 = a.0 + b \Leftrightarrow b = 23$.

Thay $h = 3000; T = 5$ vào hàm số ta có $5 = a.3000 + 23 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{500}$.

Vậy $a = -\frac{3}{500}; b = 23$.

b) Độ cao bạn Minh đang ở so với chân núi là:

$$15,8 = -\frac{3}{500}.h + 23 \Leftrightarrow h = 1200 \text{ (mét)}$$

Câu 19. (48 . Đồng tháp - 2022) Cho hàm số $y = ax + 3$ ($a \neq 0$ là tham số). Xác định tham số a để đồ thị hàm số trên đi qua điểm $M(3;1)$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = ax + 3$ đi qua điểm $M(3;1)$ khi và chỉ khi $1 = a \cdot 3 + 3 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$ (TMĐK).

Vậy hệ số a cần tìm là $a = -\frac{2}{3}$.

Câu 20. (ts Tây Ninh 2022-2023) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d): $y = 2x + 6$ với trục hoành $y = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d): $y = 2x + 6$ và $y = 0$, ta có

$$2x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Vậy giao điểm của đường thẳng (d): $y = 2x + 6$ với trục hoành có tọa độ là $(-3;0)$

Câu 21. (ts Sơn La 2022-2023) Xác định đường thẳng $(d): y = ax + b$, biết rằng (d) đi qua điểm $A(3;2)$, cắt trục tung tại điểm có tung độ nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là số nguyên tố.

Lời giải

Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3;2)$ nên thay $x = 3; y = 2$ vào (d) ta có

$$2 = 3a + b \Leftrightarrow b = 2 - 3a. \text{ Khi đó } (d): y = ax + 2 - 3a$$

Vì (d) cắt trục tung nên $x = 0 \Rightarrow y = 2 - 3a$ là số nguyên dương $\Rightarrow \begin{cases} a < \frac{2}{3} \\ a = \frac{2-y}{3} \end{cases}$

Vì (d) cắt trục hoành nên $y = 0 \Rightarrow ax + 2 - 3a = 0 \Rightarrow x = \frac{3a-2}{a}; a \neq 0$

mà x là số nguyên tố nên $\begin{cases} \frac{3a-2}{a} \geq 2 \\ a = \frac{-2}{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a = \frac{-2}{x-3} \end{cases}$

Ta có $\frac{-2}{x-3} = \frac{2-y}{3} \Leftrightarrow (x-3)(2-y) = -6$

Lập bảng:

$x-3$	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6
$2-y$	6	-6	3	-3	2	-2	1	-1
x	2	4	1	5	0	6	-3	9
y	-4	8	-1	5	0	4	1	3
	Loại	Loại	Loại	Chọn	Loại	Loại	Loại	Loại

Với $x = 5; y = 5$ thì $a = -1$

Vậy $a = -1$.

Câu 22. (ts TP HCM 2022-2023) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$

- a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a)

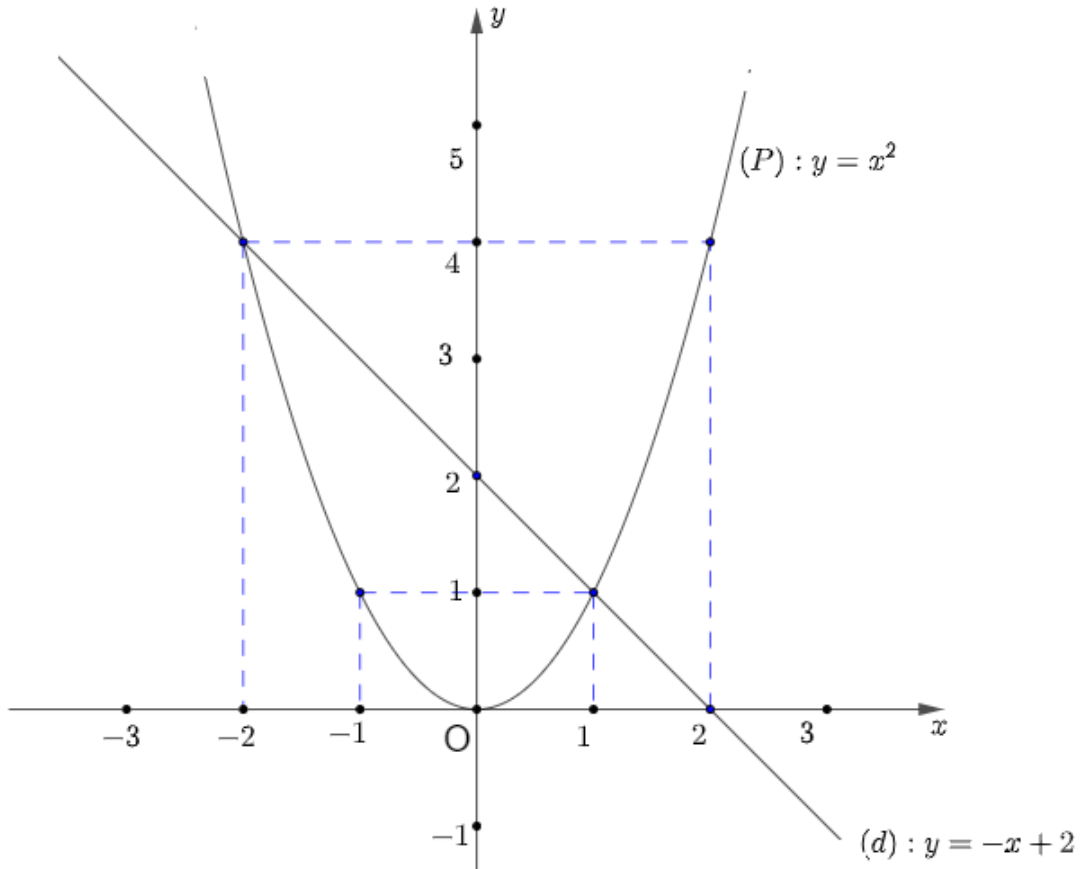
- Bảng giá trị:
- Với $(P): y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- Với (d) : $y = -x + 2$.

x	0	1
$y = -x + 2$	2	1

- Vẽ đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Với $x = 1$ thì $y = x^2 \Rightarrow y = 1$

Với $x = -2$ thì $y = x^2 \Rightarrow y = 4$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;1)$ và $(-2;4)$.

Câu 23. (ts Quảng Ninh 2022-2023) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) : $y = 2x + 3m$ đi qua điểm $B(1;5)$

Lời giải

c) Tìm các giá trị của m để đường thẳng $(d): y = 2x + 3m$ đi qua điểm $B(1;5)$

Thay $x=1$ và $y=5$ vào hàm số $y = 2x + 3m$ ta được:

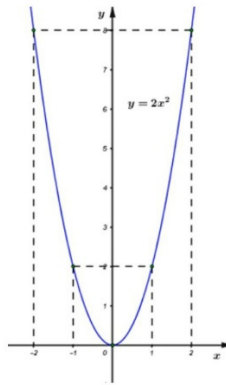
$$5 = 2.1 + 3m \Leftrightarrow 3m = 5 - 2 \Leftrightarrow 3m = 3 \Leftrightarrow m = 1$$

Câu 24. (ts Đắc Nông 2022-2023) Vẽ đồ thị hàm số (P): $y = 2x^2$

Lời giải

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	4	0	4	8



Đồ thị là một (P) có đỉnh tại gốc tọa độ và đi qua các điểm $(-2;8)$; $(-1;2)$; $(0;0)$; $(2;8)$; $(1;2)$

Câu 25. (ts Đà Nẵng 2022-2023) Cho hai hàm số $y = -x^2$ và $y = 2x - 3$

a. Vẽ đồ thị các hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b. Tìm tọa độ các giao điểm A và B của hai đồ thị đó. Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tọa độ và đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimet.

Lời giải

b. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$-x^2 = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$$

$A(-3; -9); B(1; -1)$

$$S_{\triangle OAC} = \frac{9}{2} (cm^2)$$

Đường thẳng AB cắt trục Oy tại $C(0; -3)$. $S_{\triangle OBC} = \frac{3}{2} (cm^2)$

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} = 6cm^2$$

Câu 26. (ts Bình Phước 2022-2023)

1. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Lời giải

1. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

+ Xét parabol (P): $y = x^2$

Hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$ và có bề lõm hướng lên trên

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

⇒ Parabol (P) là đường cong có đỉnh $O(0;0)$, qua các điểm $(1;1), (-1;1), (2;4), (-2;4)$

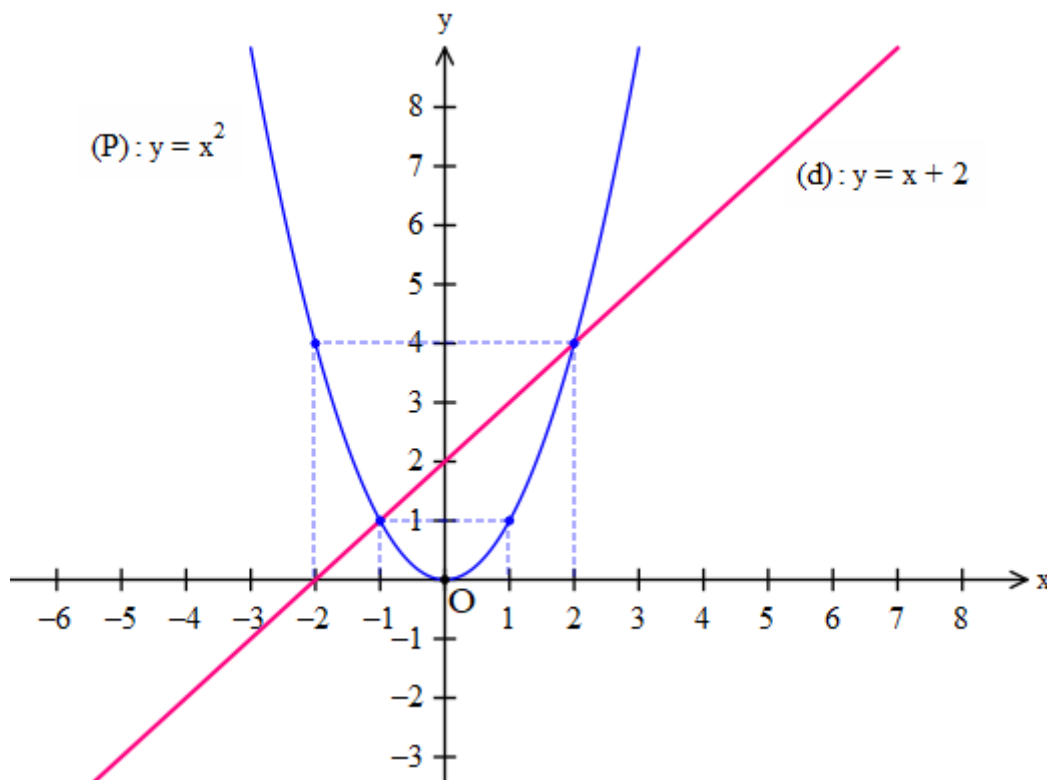
+ Xét đường thẳng (d): $y = x + 2$

Bảng giá trị:

x	0	-2
$y = x + 2$	2	0

⇒ Đường thẳng (d) cắt trục Ox tại điểm $(-2;0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0;2)$

Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .



b) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d):

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$a - b + c = 0 \text{ nên phương trình có hai nghiệm } x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = 2$$

+ Với $x_1 = -1 \rightarrow y_1 = -1 + 2 = 1$

+ Với $x_2 = 2 \rightarrow y_2 = 2 + 2 = 4$

Vậy parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm $(-1;1), (2;4)$.

Câu 27. (ts Bình Dương 2022-2023) Cho Parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$

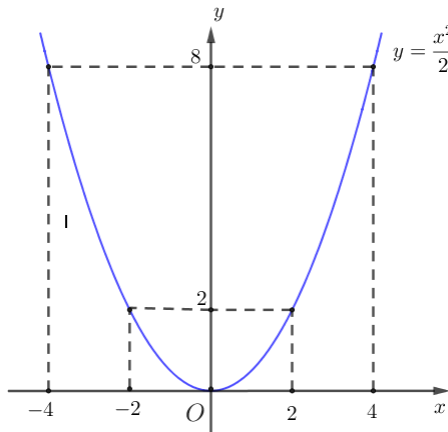
- a. Lập bảng giá trị và vẽ Parabol (P).
- b. Tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng $\Delta : y = 3x - 4$ bằng phép tính.

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

Vẽ Parabol



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Δ) :

$$\frac{1}{2}x^2 = 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 > 0$$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = 4, \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = 2$$

Với $x_1 = 4$ thì $y_1 = 3 \cdot 4 - 4 = 8$

Với $x_2 = 2$ thì $y_2 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (Δ) là $(4;8), (2;2)$

Câu 28. (ts Quảng Trị 2022-2023) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) : $y = 2x - m$ (m là tham số).

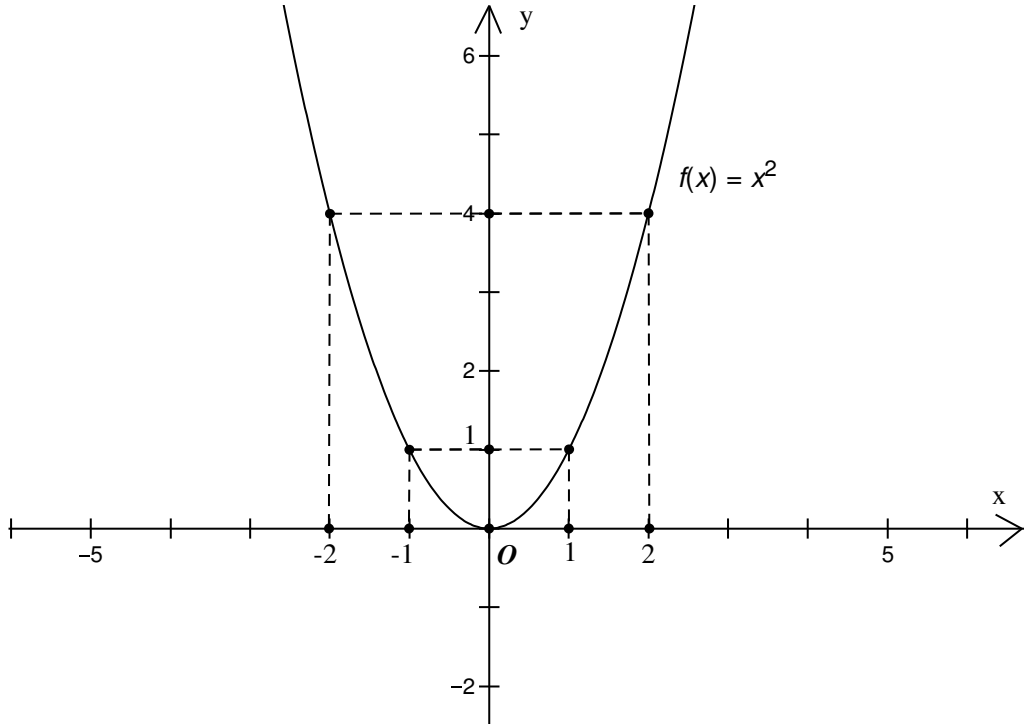
- a) Vẽ (P).
- b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.
- c) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $Q = x_1 x_2 (y_1 + y_2 - 2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Vẽ (P) : $y = x^2$, ta có bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vậy đồ thị hàm số $y = x^2$ là một Parabol qua $(-2;4), (-1;1), (0;0), (1;1), (2;4)$ và nhận Oy làm trục đối xứng.



b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Đề đường thẳng $(d): y = 2x - m$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 thì $y = 1$ khi $x = 0$

Thay $x = 0; y = 1$ vào phương trình đường thẳng $(d) \Rightarrow 1 = 2.0 - m \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

c) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $Q = x_1x_2(y_1 + y_2 - 2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = 2x - m \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0 \quad (1);$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 1.m > 0 \Leftrightarrow m < 1;$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm của (d) và (P) ,

$$\Rightarrow y_1 = 2x_1 - m; y_2 = 2x_2 - m.$$

Theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m \end{cases};$$

Theo bài ra, ta có:

$$Q = x_1x_2(y_1 + y_2 - 2) = x_1x_2(2x_1 - m + 2x_2 - m - 2) = x_1x_2[2(x_1 + x_2) - 2m - 2]$$

$$\begin{aligned}
 &= m(2.2 - 2m - 2) \\
 &= -2m^2 + 2m \\
 &= -2(m^2 - m) \\
 &= -2\left(m^2 - 2.m.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
 &= -2\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \\
 &= -2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ với } \forall m
 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} (tm)$

Vậy $MaxQ = \frac{1}{2}$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Câu 29. (ts Bến Tre 22.23 2022-2023) Vẽ đồ thị hàm số: $y = x^2$.

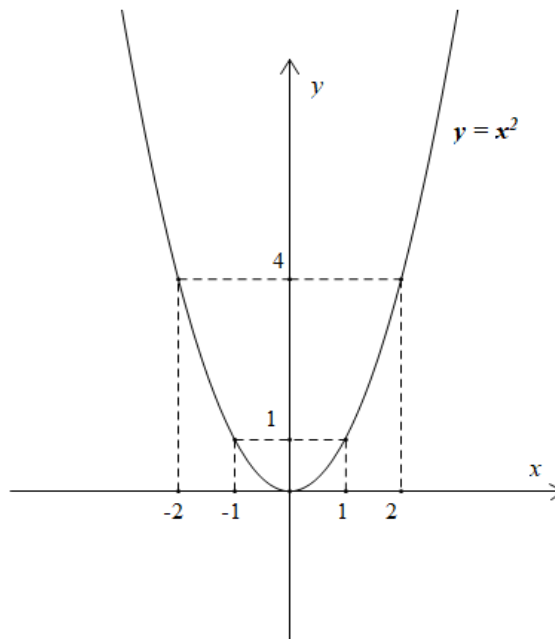
Lời giải

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2						
$y = x^2$	4	1	0	1	4						

\Rightarrow Parabol $y = x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2; 4), (-1; 1), (0, 0), (1; 1), (2; 4)$.



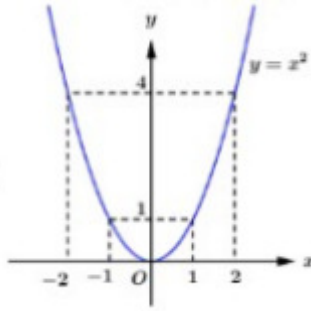
Câu 30. (ts Bến Tre 2022-2023) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$

Lời giải

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2						
$y = x^2$	4	1	0	1	4						

⇒ Parabol $y = x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2;4), (-1;1), (0,0), (1;1), (2;4)$.



Câu 31. (ts Lai Châu 2022-2023) Cho hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ (với m là tham số).

- a. Vẽ parabol (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$.
- b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải

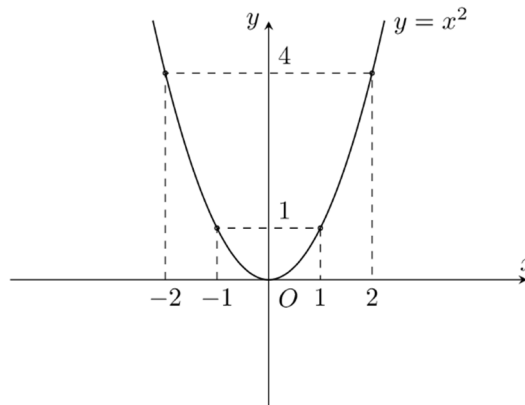
$(P): y = x^2, (d): y = -x - m + 1$

a. Vẽ $(P): y = x^2$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là đường cong Parabol đi qua điểm O , nhận Oy làm trục đối xứng, bề lõm hướng lên trên.



b. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 = -x - m + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + m - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 1 - 4(m - 1) = 5 - 4m$$

(P) cắt (d) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\Leftrightarrow \Delta > 0$$

$$\Leftrightarrow 5 - 4m > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

Theo hệ thức Vi – et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Ta có $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4(m - 1) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$.

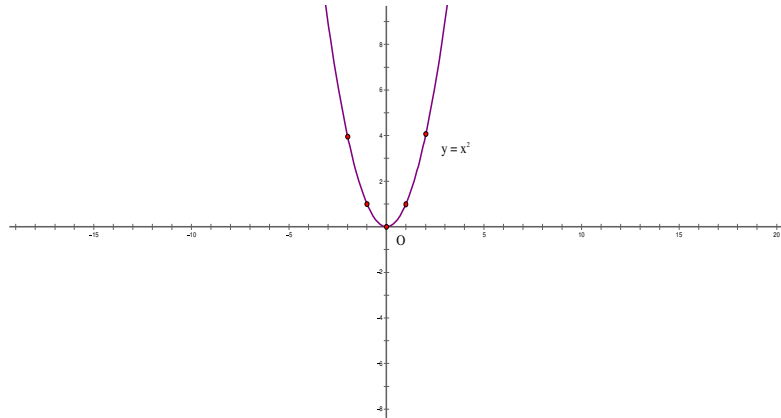
Câu 32. (ts Cần Thơ 2022-2023) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$

Lời giải

Để vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ ta cần lập bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Tiến hành vẽ các điểm trên lên hệ trục tọa độ Oxy .



Câu 33. (ts Bình Thuận 2022-2023) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

- Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + 5m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$.

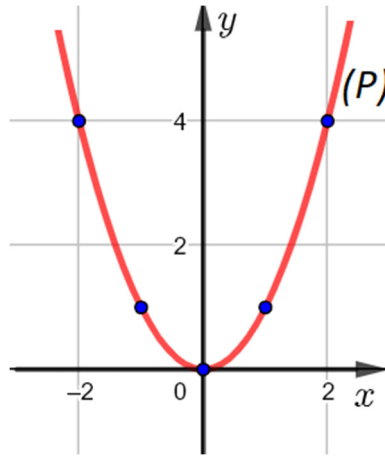
Lời giải

1. Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy :

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ có dạng như sau:



2. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + 5m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2x + 5m \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5m = 0.$$

Do (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 nên $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1^2 + 5m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.

Khi đó, theo Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{-5m}{1} = -5m & (2) \end{cases}.$$

Theo đề bài ta có: $x_1 \cdot x_2^2 - x_1(5m + 3x_2) = 10115$ (3).

Từ (1) $\Rightarrow x_1 = 2 - x_2$. Thay vào (2) và (3), ta có:
$$\begin{cases} (2 - x_2)x_2 = -5m \\ (2 - x_2) \cdot x_2^2 - (2 - x_2)(5m + 3x_2) = 10115 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2 - x_2) \cdot x_2^2 - (2 - x_2)(x_2^2 - 2x_2 + 3x_2) = 10115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ (2 - x_2) \cdot x_2^2 - (2 - x_2)(x_2^2 + x_2) = 10115 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ 2x_2^2 - x_2^3 - 2x_2^2 - 2x_2 + x_2^3 + x_2^2 = 10115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = x_2^2 - 2x_2 \\ x_2^2 - 2x_2 = 10115 \end{cases}.$$

$\Rightarrow 5m = 10115 \Leftrightarrow m = 2023$ (thỏa mãn).

Vậy, $m = 2023$.

Câu 34. (ts Thái Bình 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng:

$(d): y = x + 2$

1. Tìm tọa độ hai giao điểm A, B của (d) với (P) .

2. Gọi (c) là đường thẳng đi qua điểm $C(-1; 4)$ và song song với đường thẳng (d) . Viết phương trình đường thẳng (c) .

Lời giải

1. Tìm tọa độ hai giao điểm A, B của (d) với (P) .

Hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $(d): y = x + 2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ (1)

(1) là phương trình bậc hai có $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$

Với $x = -1$ thay vào (P) hoặc (d) ta có $y = 1$

Với $x = 2$ thay vào (P) hoặc (d) ta có $y = 4$

Vậy hai giao điểm của (P) và (d) là $A(-1;1)$ và $B(2;4)$

2. Gọi (c) là đường thẳng đi qua điểm $C(-1;4)$ và song song với đường thẳng (d) . Viết phương trình đường thẳng (c) .

Giả sử đường thẳng (c) có phương trình $y = ax + b$

Do (c) song song với (d) mà (d) có hệ số góc bằng 1 nên $a = 1$ và $b \neq 2$ (1)

Do (c) đi qua điểm $C(-1;4)$ nên ta có $4 = -a + b$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a = 1$ và $b = 5$

$\Rightarrow (c)$ có phương trình $y = x + 5$

Câu 35. (ts Vinh Long 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị (P) . Vẽ đồ thị (P)

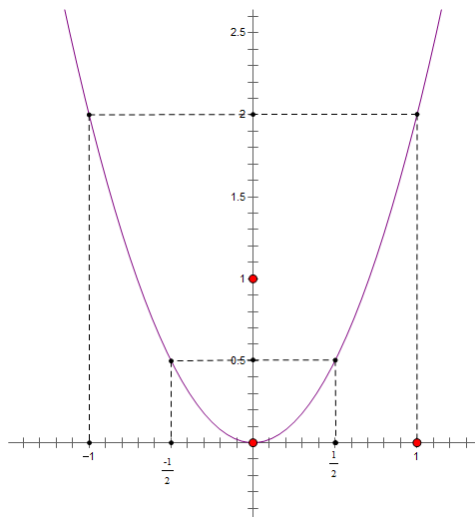
Lời giải

a)

Bảng giá trị

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = 2x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Đồ thị hàm số là đường cong đi qua các điểm $(-1; 2)$, $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(0;0)$, $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(1; 2)$



Câu 36. (ts Tiên Giang 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + 3$.

1. Vẽ parabol (P) . Bằng phép tính, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

2. Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P) . Tính tọa độ tiếp điểm M của (d') và (P) .

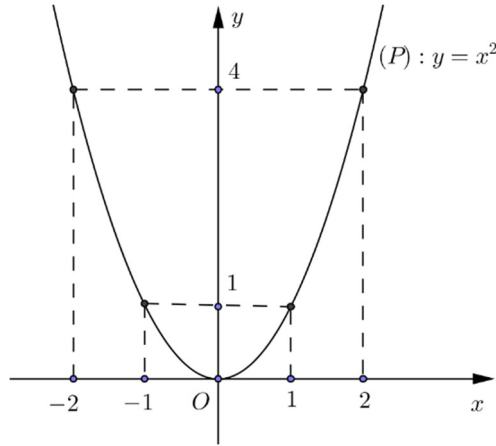
Lời giải

1.

⊕ Vẽ (P)

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



⊕ Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = -2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

Có: $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1^2 = 1$

Với $x = -3 \Rightarrow y = (-3)^2 = 9$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;1)$ và $(-3;9)$

2. Gọi phương trình đường thẳng (d') : $y = ax + b$

Vì $(d') \parallel (d)$

$$\text{Nên } \begin{cases} a = -2 \\ b \neq 3 \end{cases}$$

Khi đó: (d') : $y = -2x + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d')

$$x^2 = -2x + b$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - b = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b) = 4 + 4b$$

Vì (d') tiếp xúc với (P)

$$\text{Nên } \Delta = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -1 \text{ (tmđk)}$$

Khi đó (d') : $y = -2x - 1$

Thay $b = -1$ vào (1) ta được $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1$

Vậy tọa độ tiếp điểm là: $M(-1; 1)$

Câu 37. (ts Vĩnh Phúc 2022-2023) Cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng d : $y = -2x + m - 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ sao cho $(y_1 + y_2)^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$x^2 = -2x + m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m + 1 = 0 \quad (1)$$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Hay } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1^2 - 1 \cdot (-m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Vậy $m > 0$ thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

Khi đó ta có $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$

$$\text{Theo Vi - ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-2)^2 - 2(-m + 1) = 2m + 2$$

Theo bài ra ta có

$$(y_1 + y_2)^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 = 110 - (x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Leftrightarrow (2m + 2)^2 = 110 - (2m + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 5m - 52 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-52) = 441$$

Do $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-5 + 21}{4} = 4 \text{ (thoả mãn điều kiện } m > 0 \text{)}$$

$$m_2 = \frac{-5 - 21}{4} = \frac{-13}{2} \text{ (không thoả mãn điều kiện } m > 0 \text{)}$$

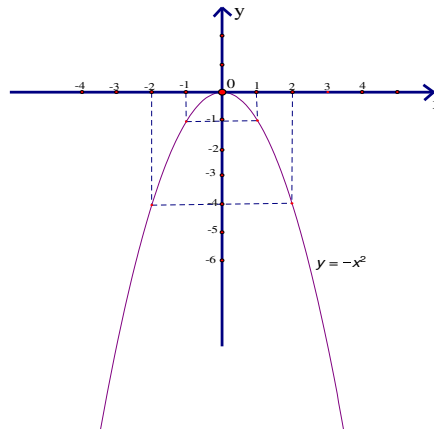
Vậy $m = 4$ để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ sao cho $(y_1 + y_2)^2 = 110 - x_1^2 - x_2^2$.

Câu 38. (ts Tây Ninh 2022-2023) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2$.

Lời giải

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



Câu 39. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2x + m$ (với m là tham số).

a) Vẽ Parabol (P) .

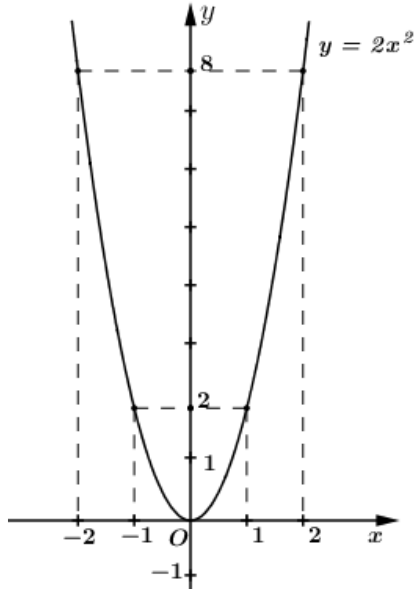
b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Lời giải

a) Vẽ Parabol (P) .

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$2x^2 = -2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta' = 1^2 - 2(-m) = 1 + 2m$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$

Với $m > -\frac{1}{2}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = \frac{-m}{2} \end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow -1 - 2\frac{-m}{2} = 1 \Leftrightarrow -1 + m = 1 \Leftrightarrow m = 2$ (TMĐK)

Vậy $m = 2$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$

Câu 40. (ts Khánh Hòa 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2x - m + 3$

(m là tham số) parabol $(P): y = x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Tìm các số nguyên m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2(x_2 + 2) + x_2^2(x_1 + 2)x_1 \leq 10$

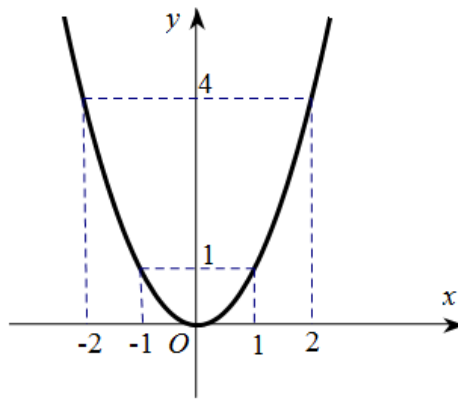
Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) .

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị:



b) Tìm các số nguyên m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2(x_2 + 2) + x_2^2(x_1 + 2)x_1 \leq 10$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) :
 $x^2 = 2x - m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 3 = 0 (*)$

$$\Delta' = 1 - (m - 3) = 4 - m$$

Đề (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$ (1)

Áp dụng định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$

Mà $x_1^2(x_2 + 2) + x_2^2(x_1 + 2)x_1 \leq 10$

$$\Leftrightarrow x_1^2 x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 x_1 + 2x_2^2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2(x_1^2 + x_2^2) \leq 10$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \leq 10 \quad (2)$$

Thay $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$ vào (2), ta có: $2(m - 3) + 2 \cdot 4 - 4(m - 3) \leq 10$

$$\Leftrightarrow 2(m - 3) + 2 \cdot 4 - 4(m - 3) \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 2m - 6 + 8 - 4m + 12 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow -2m + 14 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow -2m \leq -4$$

$$\Leftrightarrow m \geq 2$$

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $2 \leq m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2; 3\}$.

Vậy $m \in \{2; 3\}$

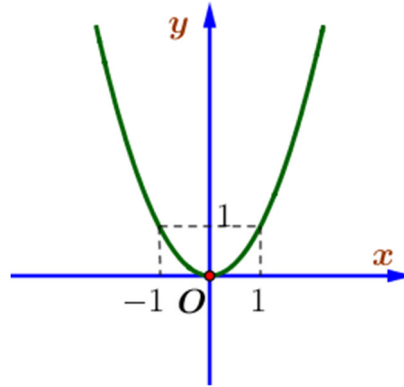
Câu 41. (48 . Đồng Tháp - 2022) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.

Lời giải

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đồ thị:



Câu 42. (ts Ha Nam 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx + 3 - 2m$ (m là tham số).

1. Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$.
2. Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của các điểm A, B . Tìm m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{14}$.

Lời giải

1. Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$ nên thay $x = 2, y = 1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có: $1 = 2m \cdot 2 + 3 - 2m \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = 2mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0 \quad (1)$$

Có $\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m hay đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

Áp dụng vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3 \end{cases}$$

Để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{14}$.

$$\begin{aligned} \text{thì } \begin{cases} x_1 > 0, x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 14 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ 2m - 3 > 0 \\ 4m^2 - 2(2m - 3) = 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ 4m^2 - 4m - 8 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m = -1 \\ m = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow m = 2. \end{aligned}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 43. (ts Hải Dương 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 5$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m , đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Tìm m để $x_1^2 = 9 - mx_2$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và (d) ta có $x^2 = mx + 5$

$$x^2 = mx + 5 \Leftrightarrow x^2 - mx - 5 = 0 (*)$$

$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = m^2 + 5 > 0, \forall m$ nên phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -5 \end{cases}$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên $x_1^2 - mx_1 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = mx_1 + 5$ thay vào $x_1^2 = 9 - mx_2$ ta được $mx_1 + 5 = 9 - mx_2$

$$\Leftrightarrow mx_1 + mx_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m(x_1 + x_2) = 4$$

Vì $x_1 + x_2 = m$ nên ta có

$$m \cdot m = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = 2; m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. (ts Ninh Bình 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3mx - 3m + 1$, trong đó m là tham số.

a) Với $m = 1$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 11$.

Lời giải

$(P): y = x^2$

$(d): y = 3mx - 3m + 1$.

a) Với $m=1$, đường thẳng (d) có dạng $y = 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Khi đó, phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1) \quad (a = 1; b = -3; c = 2)$$

#Cách 1:

Do $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2$.

#Cách 2:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

#Cách 3:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Với $x = x_1 = 1$ thì $y = 1^2 = 1$

Với $x = x_2 = 2$ thì $y = 2^2 = 4$

Vậy với $m=1$ thì toạ độ giao điểm của (d) và (P) là (1; 1); (2; 4).

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = 3mx - 3m + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3mx + 3m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m - 1) = 9m^2 - 12m + 4$$

$$= (3m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 2 + 2^2 = (3m - 2)^2$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành $x_1; x_2$ thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt } x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (3m - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow 3m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow 3m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{3} \quad (**)$$

Khi đó, theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 & (3) \end{cases}$

Ta có $x_1 + 2x_2 = 11 \quad (4)$

Từ (2); (4) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 + 2x_2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 11 - 3m \\ x_1 + 11 - 3m = 3m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 11 - 3m \\ x_1 = 3m + 3m - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6m - 11 \\ x_2 = M - 3m \end{cases}$$

Thế $x_1 = 6m - 11; x_2 = 11 - 3m$ vào (3) ta được:

$$(6m - 11) \cdot (11 - 3m) = 3m - 1$$

$$\Leftrightarrow 66m - 18m^2 - 121 + 33m - 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow -18m^2 + 96m - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18m^2 - 96m + 120 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 16m + 20 = 0 \quad (5)$$

#Cách 1:

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m - 6m + 20 = 0 \Leftrightarrow m(3m - 10) - 2 \cdot (3m - 10) = 0 \Leftrightarrow (3m - 10)(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 10 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{10}{3} & (t/m \text{ (*)}) \\ m = 2 & (t/m \text{ (**)}) \end{cases}$$

Vậy $m \in \left\{ 2; \frac{10}{3} \right\}$ thoả mãn đề bài ra.

#Cách 2:

$$\Delta' = (-8)^2 - 3 \cdot 20 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Vì $\Delta' > 0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{3} = \frac{10}{3} \quad (t/m (**))$$

$$m_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{3} = 2 \quad (t/m (**))$$

Vậy $m \in \left\{ 2; \frac{10}{3} \right\}$ thoả mãn đề ra.

#Cách 3:

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 16 > 0$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình (5) có 2 nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-(-16) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{10}{3} \quad (t/m (**))$$

$$m_2 = \frac{-(-16) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = 2 \quad (t/m (**))$$

Vậy $m \in \left\{ 2; \frac{10}{3} \right\}$ thoả mãn đề ra.

Câu 45. (ts Bắc Kạn 2022-2023)

1. Vẽ đồ thị các hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$ trên cùng mặt phẳng Oxy .
2. Tìm $a; b$ để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $M(2; -3)$ và vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2023$.

Lời giải

1. Đồ thị hàm số $y = -x^2$

Bảng giá trị :

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Vẽ Parabol là đường cong đi qua các điểm $(-2; -4), (-1; -1), (0; 0), (1; -1), (2; -4)$

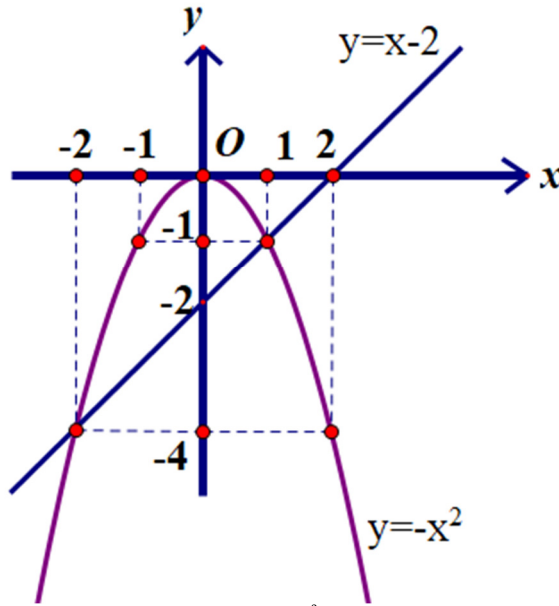
Đồ thị hàm số $y = x - 2$

Bảng giá trị :

x	0	2
$y = x - 2$	-2	0

Vẽ đường thẳng đi qua các điểm $(0; -2), (2; 0)$.

Vẽ đồ thị các hàm số $y = -x^2$ và $y = x - 2$ trên cùng mặt phẳng Oxy .



2. Tìm $a; b$ để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $M(2; -3)$ và vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2023$.

Vì d vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2023$. nên $a \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$.

\Rightarrow Phương trình (d) có dạng $y = -2x + b$

Mà (d) đi qua $M(2; -3) \Rightarrow -3 = -2 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy $a = -2, b = 1$.

Câu 46. (ts HÀ NỘI 2022-2023) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$.

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot (-m^2) = 1 + m^2$$

$$\text{Do } m^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + m^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \quad \forall m$$

Khi đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt (đpcm).

b) Theo câu a) đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$.

Theo hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m^2 \end{cases}.$$

Theo đề bài ta có:

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 3 = -3$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6}.$$

Vậy với $m = \pm\sqrt{6}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -3.$$

Chuyên đề

3

Phương trình

Câu 1. (ts Nghệ An 2022-2023) Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+3=\left(\frac{1}{x}-3\right)\left(\sqrt{9x^2-6x+2}+3\right)$ (1)

Lời giải

ĐKXD: $x \neq 0$

Ta có: $\sqrt{x^2+1}+3 > 0$, $\sqrt{9x^2-6x+2}+3 > 0$ nên để (1) có nghiệm thì $\frac{1}{x}-3 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{3}$

Do đó điều kiện để (1) có nghiệm là $0 < x < \frac{1}{3}$.

$$(1) \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+1}+3) = (1-3x)\left(\sqrt{(1-3x)^2+1}+3\right)$$

Đặt $a = x$, $b = 1 - 3x$ ($a > 0$, $b > 0$) khi đó ta có phương trình:

$$a(\sqrt{a^2+1}+3) = b(\sqrt{b^2+1}+3) \Leftrightarrow a\sqrt{a^2+1} - b\sqrt{b^2+1} + 3a - 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4 + a^2 - b^4 - b^2}{a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2+1}} + 3(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4 - b^4 + a^2 - b^2}{a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2+1}} + 3(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2+1)}{a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2+1}} + 3(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b) \left[\frac{(a+b)(a^2+b^2+1)}{a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2+1}} + 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow a-b=0 \text{ (do } a, b > 0 \text{ nên } \frac{(a+b)(a^2+b^2+1)}{a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2+1}} + 3 > 0)$$

Do đó $x - 1 + 3x = 0 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (tm)

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$

Câu 2. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Giải phương trình $(x-1)(x+1) - \sqrt{x^2+1} = 0$.

Lời giải

$$(x-1)(x+1) - \sqrt{x^2+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - \sqrt{x^2+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - \sqrt{x^2+1} - 2 = 0 \text{ (1)}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ ($t \geq 1$), phương trình (1) trở thành

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \text{ (loại)} \\ t_2 = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

Câu 3. (ts Điện Biên 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 - 1)(x_2^2 - 3x_2 + m - 6) = -3$.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 9 - m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 9$.

Theo hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 5 \end{cases}$$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình nên :

$$x_2^2 - 4x_2 + m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - 3x_2 - x_2 + m - 6 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - 3x_2 + m - 6 = x_2 - 1$$

$$\text{Mà } (x_1 - 1)(x_2^2 - 3x_2 + m - 6) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -3$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow m - 5 - 4 + 1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 5 (tm)$$

Vậy với $m = 5$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$(x_1 - 1)(x_2^2 - 3x_2 + m - 6) = -3.$$

Câu 4. (ts Sơn La 2022-2023) Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.

Lời giải

ĐKXD: $x \geq -1$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{x-2} = a; \sqrt{x+1} = b; b \geq 0 \Rightarrow x-2 = a^3; x+1 = b^2 \Rightarrow a^3 - b^2 = -3 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } a+b=3 \Rightarrow b=3-a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } a^3 - (3-a)^2 = -3$$

$$\Leftrightarrow a^3 - a^2 + 6a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-1) + 6(a-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a^2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow a-1=0 \text{ (do } a^2 + 6 > 0)$$

$$\Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=2$$

Ta có $x = 1^3 + 2 = 3$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Câu 5. (ts Điện Biên 2022-2023) Cho $f(x) = x^2 - 6x + 12$. Giải phương trình $f(f(f(f(x)))) = 65539$

Lời giải

1. Ta có: $f(x) = x^2 - 6x + 12$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 6x + 9 + 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 3 = (x-3)^2$$

Khi đó: $f(f(x)) = (f(x) - 3)^2 + 3 = (x-3)^4 + 3 \Rightarrow f(f(x)) - 3 = (x-3)^4$

$$f(f(f(x))) = [f(f(x) - 3)]^2 + 3 = (x-3)^8 + 3 \Rightarrow f(f(f(x))) - 3 = (x-3)^8$$

$$\Rightarrow f(f(f(f(x)))) = (x-3)^{16} + 3.$$

Do đó: $f(f(f(f(x)))) = 65539$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{16} + 3 = 65539$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{16} = 65536$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{16} = 2^{16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 5\}$.

Câu 6. (ts Vĩnh Long 2022-2023) Giải phương trình $(x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 - 6x + 3) = -7x^2$

Lời giải

$$(x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 - 6x + 3) = -7x^2 \quad (1)$$

+ Xét $x = 0$ thay vào phương trình (1) ta được $9 = -7 \cdot 0 = 0$ (vô lý)

$\Rightarrow x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1)

+ Xét $x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho x^2 , ta được:

$$\left(x + 2 + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(x - 6 + \frac{3}{x}\right) = -7 \quad (*)$$

Đặt $t = x + \frac{3}{x}$ thay vào phương trình (*) ta được:

$$(t+2).(t-6) = -7$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 12 = -7$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0$$

Ta có: $a - b + c = 1 - (-4) + (-5) = 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} t = -1 \\ t = 5 \end{cases}$

Với $t = -1 \Rightarrow x + \frac{3}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0$

Ta có: $\Delta = 1^2 - 4.3 = -13 < 0$

Suy ra phương trình vô nghiệm

Với $t = 5 \Rightarrow x + \frac{3}{x} = 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$

Ta có: $\Delta = (-5)^2 - 4.3 = 13 > 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} (tm) \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} (tm) \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right\}$

Câu 7. (ts Lai Châu 2022-2023) Không dùng máy tính, giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a. $2x - 8 = 0$

b. $5x^2 + x - 6 = 0$

c. $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$

Lời giải

a. $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{4\}$.

b. $5x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{6}{5} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{6}{5}; 1 \right\}$.

c. $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (3; 4)$.

Câu 8. (ts An Giang 2022-2023) Giải phương trình và hệ phương trình

a) $\sqrt{7}(x + \sqrt{7}) - \sqrt{7} = 7.$

b) $x^2 + 6x + 8 = 0.$

c) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$

Lời giải

a) $\sqrt{7}(x + \sqrt{7}) - \sqrt{7} = 7.$

$\Leftrightarrow \sqrt{7}x + 7 - \sqrt{7} = 7$

$\Leftrightarrow \sqrt{7}x - \sqrt{7} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{7}x = \sqrt{7}$

$\Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1.$

b) $x^2 + 6x + 8 = 0.$

Ta có: $\Delta = 6^2 - 4.8 = 36 - 32 = 4.$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 2}{2} = -2;$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 2}{2} = -4.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-2; 4\}.$

c) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3.2 + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 2).$

Câu 9. (ts Bắc Kạn 2022-2023) Giải các phương trình sau:

a) $2x + 6 = 0.$

b) $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

Lời giải

Giải các phương trình sau:

a) $2x + 6 = 0.$

$\Leftrightarrow 2x = -6$

$\Leftrightarrow x = -3$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-3\}.$

b) $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0. (1)$

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$, phương trình (1) trở thành:

$2t^2 + 5t - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 2t + 7t - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 2t(t - 1) + 7(t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2t + 7)(t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 7 = 0 \\ t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -7 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-7}{2} (ktm) \\ t = 1(tm) \end{cases}$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$

Câu 10. (ts Bến Tre 22.23 2022-2023) Giải phương trình: $2x^2 + 4x - 5 = 0$.

Lời giải

Giải phương trình $2x^2 + 4x - 5 = 0$

Ta có: $\Delta' = 2^2 - 2(-5) = 14 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{14}}{2} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2} \right\}$.

Câu 11. (ts Bến Tre 2022-2023) Giải phương trình $2x^2 + 4x - 5 = 0$

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 2^2 - 2(-5) = 14 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{14}}{2} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2} \right\}$.

Câu 12. (ts Hải Dương 2022-2023) Giải các phương trình sau:

a) $|x - 3| = 2$.

b) $x^2 - 3x + 6 = 2x$.

Lời giải

a) $|x - 3| = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \\ x - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 5\}$.

b) $x^2 - 3x + 6 = 2x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2; 3\}$.

Câu 13. (ts Cần Thơ 2022-2023) Giải phương trình và hệ phương trình sau :

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$

Lời giải

a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Ta có : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-2)(2) = 25 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$

Cách 1 :

$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 11 \\ x + 3(3x - 11) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Cách 2 :

$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ x + 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 11 & (1) \\ 3x + 9y = -9 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) ta có : $-10y = 20 \Leftrightarrow y = -2$, thay vào (1) ta có $3x + 2 = 11 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (3; -2)$

Câu 14. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Giải phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Lời giải

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Ta có $a+b+c=1+3-4=0$ nên phương trình có nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = -4$

Câu 15. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Không dùng máy tính cầm tay, giải phương trình $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

Lời giải

Ta có $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2; x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$.

Câu 16. (ts Bình Thuận 2022-2023) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2.
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Lời giải

1. Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$:

Do $1 + (-4) + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{1} = 3$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

2. Hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 12 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho nghiệm $(x; y)$ duy nhất là $(2; -1)$.

Câu 17. (ts BẮC NINH 2022-2023) Giải phương trình $x^2 - x - 6 = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x - 6 &= 0 \Leftrightarrow x(x-3) + 2(x-3) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-3=0 \text{ hoặc } x+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x=3 \text{ hoặc } x &= -2 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3; x = -2$.

Câu 18. (ts Ha Nam 2022-2023) Giải phương trình $2x^2 - 4x + 4 = x + 1$.

Lời giải

Ta có: $2x^2 - 4x + 4 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

Câu 19. (ts Vĩnh Phúc 2022-2023) Giải phương trình $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình có $a - b + c = 1 - (-5) - 6 = 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1; x_2 = 6$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1; x_2 = 6$

Câu 20. (ts Quảng Trị 2022-2023) Giải phương trình $(x-1)^2 - x + 1 = 0$.

Lời giải

$$(x-1)^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{1; 2\}$.

Câu 21. (ts Tây Ninh 2022-2023) Giải phương trình $x^2 + 5x + 6 = 0$

Lời giải

Phương trình: $x^2 + 5x + 6 = 0$ ($a=1, b=5, c=6$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0, \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+1}{2.1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-1}{2.1} = -3$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-2; -3\}$

Câu 22. (ts Điện Biên 2022-2023) Giải phương trình: $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Lời giải

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) + 3(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; -3\}$.

Câu 23. (ts TP HCM 2022-2023) Cho phương trình: $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là $x_1; x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 - x_2)^2$.

Lời giải

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét, ta có: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = 2 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Ta có:

$$A = (x_1 - x_2)^2$$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$A = 2^2 - 4 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)$$

$$A = 10$$

Vậy $A = 10$.

Câu 24. (ts Nam Định 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - mx + m - 5 = 0$ (1) (với m là tham số).

- a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
- b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để $x_1 + 2x_2 = 1$.

Lời giải

a) Vì (1) là phương trình bậc 2 nên ta có $\Delta = m^2 - 4m + 20 = (m - 2)^2 + 16 > 0 \forall m$.

Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Theo câu a) ta có với mọi giá trị của m phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Nên ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (2) \\ x_1 + x_2 = m - 5 & (3). \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $x_1 + 2x_2 = 1$ (4).

Từ (2) và (4) ta có $\begin{cases} x_2 = 1 - m \\ x_1 = -1 + 2m. \end{cases}$

Thay x_1, x_2 vào (3) ta được $(1 - m)(-1 + 2m) = m - 5$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2. \end{cases}$

Câu 25. (ts Vĩnh Long 2022-2023) Giải các phương trình và hệ phương trình sau

- a) $x^2 + 5x + 4 = 0$
- b) $x^2 - 3x = 0$
- c) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$
- d) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Lời giải

a) Xét phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0$ có $a = 1, b = 5, c = 4$
Ta thấy $a - b + c = 1 - 5 + 4 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -4$
Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-1; -4\}$

b) $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{0; 3\}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3 - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (3; -2)$

d) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow (t - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (thỏa mãn)

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-2; 2\}$

Câu 26. (ts Tiền Giang 2022-2023)

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^4 - 3x - 4 = 0$.

b)
$$\begin{cases} 5x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

2. Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 3 = 0$.

Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $B = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2$.

Lời giải

1.

a. $x^4 - 3x - 4 = 0$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0$

Có $a - b + c = 1 - (-3) + (-4) = 0$

Nên $t_1 = -1$ (ktm)

$$t_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4 \text{ (tmđk)}$$

Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{-2; 2\}$

b.
$$\begin{cases} 5x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 16 \\ 5x + y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5 \cdot 2 + y = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm hệ phương trình $S = \{(2; 1)\}$

2. $x^2 - 4x - 3 = 0$

Có $a.c = 1 \cdot (-3) = -3 < 0$

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4 \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3 \end{cases}$$

Ta có: $B = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2$

$$= 3(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2$$

$$= 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] - 5x_1x_2$$

$$= 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 5x_1x_2$$

$$= 3(x_1 + x_2)^2 - 11x_1x_2$$

$$= 3.4^2 - 11.(-3)$$

$$= 81$$

$$\text{Vậy: } B = 81$$

Câu 27. (ts Sơn La 2022-2023) Giải phương trình: $x^2 - 3x - 4 = 0$

Lời giải

Ta có: $1 - (-3) + (-4) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = 4$

Câu 28. (ts An Giang 2022-2023) Cho phương trình bậc hai $x^2 + 2(m+1)x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng -3 tìm nghiệm còn lại.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2 + x_2^2 = 2.$$

Lời giải

a) Với $x = -3$ thay vào phương trình ta được:

$$(-3)^2 + 2(m+1).(-3) + 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 6m - 6 + 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4m = -4$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Với $m = 1$, thay vào phương trình ta được:

$$x^2 + 2(1+1)x + 2.1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

Ta có: $1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = -3$.

Vậy $m = 1$ và nghiệm còn lại của phương trình là $x = -1$.

b) Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (2m+1) = m^2 + 2m + 1 - 2m - 1 = m^2$.

Để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 0$ (đúng với mọi m).

Khi đó, theo hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ P = x_1x_2 = 2m+1 \end{cases}$$

Theo giả thiết:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 2(m+1) - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(m^2 + 2m + 1) - 2m - 1 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m^2 + 4m + 2 - 2m - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m^2 + 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m(m+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 0, m = 1$.

Câu 29. (ts Nghệ An 2022-2023)

a) Giải phương trình $2x^2 - 9x + 10 = 0$.

b) Cho phương trình $x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $T = \frac{3|x_1 - x_2|}{x_1^2x_2 + x_1x_2^2}$.

Lời giải

a) $2x^2 - 9x + 10 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4.2.10 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+1}{4} = \frac{5}{2}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-1}{4} = 2$$

b) $x^2 + 3x - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4.1.(-1) = 13 > 0$$

Theo vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$

$$T = \frac{3|x_1 - x_2|}{x_1^2x_2 + x_1x_2^2} = \frac{3\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{x_1x_2(x_1 + x_2)} = \frac{3\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{x_1x_2(x_1 + x_2)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{3\sqrt{(-3)^2 - 4(-1)}}{(-1) \cdot (-3)} = \frac{3\sqrt{13}}{3} = \sqrt{13}$$

Câu 30. (ts Lạng Sơn 2022-2023) Cho phương trình bậc hai với tham số $m : x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m . Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn: $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (1).

1. Với $m = 0$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 - 2(0+1)x + 2.0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Vì $a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 3$.

Vậy $m = 0$ thì phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \{-1; 3\}$.

2. Phương trình (1) có $\Delta' = \left[-(m+1)^2 \right] - 1(2m-3) = m^2 + 2m + 1 - 2m + 3 = m^2 + 4 > 0$, với mọi m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Khi đó theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 3 \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có: $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 - 2(2m - 3) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 - 4m + 6 = 1$$

$$\Leftrightarrow -2m = -7$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{7}{2}$$

Vậy $m = \frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 31. (ts Đắc Nông 2022-2023) Giải phương trình bậc hai: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Lời giải

Giải phương trình bậc hai: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ta có: $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = 2$.

Câu 32. (ts Bình Định 2022-2023) Cho phương trình: $2x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm bằng tích của chúng.

Lời giải

$$2x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m-1)$$

$$= m^2 + 2m + 1 - 8m + 8$$

$$= m^2 - 6m + 9 = (m-3)^2 \geq 0, \forall m.$$

Phương trình đã cho luôn có nghiệm x_1, x_2 . Theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2} \quad (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Theo bài ra:

$$x_1 - x_2 = x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có hệ pt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2} \\ x_1 - x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được :

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 33. (ts Lào Cai 2022-2023) Giải phương trình: $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Lời giải

Giải phương trình: $x^2 + 2x - 8 = 0$ (1).

$$(a = 1; b = 2; c = -8)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1(-8) = 36 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{2.1} = 2 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{2.1} = -4 \end{cases}$$

Câu 34. (ts Khánh Hòa 2022-2023) Giải phương trình: $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $a + b + c = 1 - 8 + 7 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = 7$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 7\}$

Câu 35. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 9 = 0$ (1), m là tham số

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^3 + 9x_2 = 0$$

Lời giải

a) Với $m = 4$, thay vào phương trình (1) ta được: $x^2 - 8x - 9 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-4)^2 + 9 = 25 > 0$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = 4 + \sqrt{25} = 9 \\ x_2 = 4 - \sqrt{25} = -1 \end{cases}$

Vậy với $m = 4$, phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \{-1; 9\}$

b) Ta có $\Delta' = (-m)^2 - (-9) = m^2 + 9 > 0, \forall m$

\Rightarrow Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 x_2 = -9 & (2) \end{cases}$

Theo giả thiết ta có $x_1^3 + 9x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{x_1^3}{9}$

Thay vào (2) ta có $x_1 \cdot \frac{-x_1^3}{9} = -9 \Leftrightarrow x_1^4 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \Rightarrow x_2 = -3 \\ x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$

Thay vào (1) ta có $0 = 2m \Leftrightarrow m = 0$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm

Câu 36. (ts Cao Bằng 2022-2023) Giải phương trình: $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

Lời giải

Giải phương trình: $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

Ta có: $a + b + c = 2 + 3 - 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{2}$.

Câu 37. (ts Bình Dương 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - (m + 3)x + 2m + 2 = 0$ với là m tham số.

Tìm giá trị của tham số m để :

a. Phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Lời giải

a. Thay $x = 3$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$3^2 - (m + 3).3 + 2m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 3m - 9 + 2m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $m = 2$ thì phương trình có nghiệm $x = 3$.

b) $x^2 - (m + 3)x + 2m + 2 = 0$

$$\Delta = [-(m + 3)]^2 - 4.1.(2m + 2) = m^2 + 6m + 9 - 8m - 8 = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $(m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

$$\text{Theo định lý Vi-ét} \begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Theo đề bài } x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 13$$

$$\text{Hay } (m + 3)^2 - 2(2m + 2) = 13$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - 4m - 4 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4.1.(-8) = 36 > 0$$

Do đó phương trình có hai nghiệm

$$m_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2.1} = 2 \text{ (nhận)}$$

$$m_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2.1} = -4 \text{ (nhận)}$$

Vậy $m \in \{2; -4\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 38. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 4 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1(x_1 - 3) + x_2(x_2 - 3) = 6$

Lời giải

$$x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

Ta có

$$\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m^2 - 4) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 4 = -2m + 5$$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow -2m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 4 \end{cases}$

Theo bài ra:

$$x_1(x_1 - 3) + x_2(x_2 - 3) = 6$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - (3x_1 + 3x_2) = 6$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) = 6$$

$$\Rightarrow (2m - 2)^2 - 2(m^2 - 4) - 3(2m - 2) = 6$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 2m^2 + 8 - 6m + 6 = 6$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(m - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện $m = 1$ (thỏa mãn ĐK), $m = 6$ (không thỏa mãn ĐK)

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 39. (ts Quảng Bình 2022-2023) Cho phương trình: $x^2 + 2mx - 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 1.$$

Lời giải

a) Thay $m = 1$ vào phương trình (1), ta được:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) - (x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy khi $m = 1$ thì phương trình có hai nghiệm $x = -3$ và $x = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 1.$$

Xét phương trình: $x^2 + 2mx - 3 = 0$ (1).

Ta có: $\Delta = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4m^2 + 12 > 0$ với mọi m .

\Rightarrow Phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m .

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$.

Theo giả thiết: $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 = 1$
 $\Leftrightarrow (-2m)^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 1$.

Vậy $m \in \{-1; 1\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 40. (ts Quảng Ninh 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 2$

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + 3x_2 + 3x_1 x_2 = -11$

Lời giải

a) Thay $m = 2$ vào phương trình ta được: $x^2 - 2x - 5 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{24}}{2} = 1 + \sqrt{6}; \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{24}}{2} = 1 - \sqrt{6}$$

b) Xét phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 2m - 1 = 0$

$$\Delta = 4m^2 + 8 > 0 \text{ với mọi } m$$

Suy ra phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Áp dụng hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2m - 2; \quad x_1 x_2 = -2m - 1$

Theo đề bài ta có $2x_1 + 3x_2 + 3x_1 x_2 = -11 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + x_2 + 3x_1 x_2 = -11$

$$\Leftrightarrow 2(2m - 2) + x_2 + 3(-2m - 1) = -11 \Leftrightarrow 4m - 4 + x_2 - 6m - 3 = -11 \Leftrightarrow x_2 = 2m - 4$$

Thay $x_2 = 2m - 4$ vào phương trình ban đầu ta được:

$$(2m - 4)^2 - (2m - 2)(2m - 4) - 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 16 - 4m^2 + 8m + 4m - 8 - 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{6}$$

Câu 41. (ts Hải Phòng 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3$.

Lời giải

a) Với $m = 1$ thay vào phương trình (1), ta được: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$$a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0 \text{ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2.$$

Vậy với $m=1$ phương trình có tập nghiệm là $S = \{1; 2\}$.

b) Ta có $\Delta = (m+2)^2 - 4.2m = m^2 + 4m + 4 - 8m = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$.

Suy ra $\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$, phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi - ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 x_2 \leq 3$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \leq 3$

$\Leftrightarrow (m+2)^2 - 2m \leq 3$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow m+1 = 0$ (do $(m+1)^2 \geq 0, \forall m$)

$\Leftrightarrow m = -1$ (tm).

Vậy $m = -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3$.

Câu 42. (ts Lạng Sơn 2022-2023) Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Lời giải

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

+) Đặt $t = x^2$, với $t \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 3t + 2 = 0$

Vì $1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $t_1 = 1; t_2 = 2$ (thỏa mãn điều kiện $t \geq 0$)

Với $t_1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$;

Với $t_2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$;

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \{\pm 1; \pm\sqrt{2}\}$.

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ y = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (4; 1)$.

Câu 43. (ts Vĩnh Long 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số).

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2$

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (1) có $a = 1; b' = -2; c = m - 2$

$\Delta' = 4 - m + 2 = 6 - m$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$

Theo hệ thức Vi - et ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$$

Theo đề bài ta có $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 + x_2^2 - 4x_2 + 4 = 2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4^2 - 2(m-2) - 4 \cdot 4 + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 16 - 2m + 4 - 16 + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m = 10 \\ &\Leftrightarrow m = 5 \text{ (thỏa mãn)} \\ &\text{Vậy } m = 5 \text{ là giá trị cần tìm} \end{aligned}$$

Câu 44. (ts THANH HÓA 2022-2023)

- 1) Giải phương trình $-x^2 + 4x - 3 = 0$.
 2) Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\frac{2}{x_1^2} + \frac{5}{x_1x_2} = \frac{4}{x_2^2} \left(\frac{1}{x_1^2} - 1 \right)$.

Lời giải

- 1) Phương trình đã cho có: $a = -1; b = 4; c = -3$.

Ta thấy: $a + b + c = (-1) + 4 + (-3) = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{1; 3\}$.

- 2) Ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (m-1) = 1 - 4m + 4 = 5 - 4m$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thì :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4} \quad (1)$$

Để hệ thức $\frac{2}{x_1^2} + \frac{5}{x_1x_2} = \frac{4}{x_2^2} \left(\frac{1}{x_1^2} - 1 \right)$ có nghĩa thì $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ (2)

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases} \quad (3)$

Từ giả thiết: $\frac{2}{x_1^2} + \frac{5}{x_1x_2} = \frac{4}{x_2^2} \left(\frac{1}{x_1^2} - 1 \right) \Leftrightarrow \frac{2}{x_1^2} + \frac{5}{x_1x_2} = \frac{4}{x_1^2x_2^2} - \frac{4}{x_2^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{x_1^2x_2^2} + \frac{5x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \frac{4}{x_1^2x_2^2} - \frac{4x_1^2}{x_1^2x_2^2}$$

$$\Rightarrow 2x_2^2 + 5x_1x_2 = 4 - 4x_1^2 \quad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta được: $2x_2^2 + 5x_2(1 - x_2) = 4 - 4(1 - x_2)^2$

$$\Leftrightarrow 2x_2^2 + 5x_2 - 5x_2^2 = 4 - 4(1 - 2x_2 + x_2^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x_2^2 + 5x_2 - 5x_2^2 = 4 - 4 + 8x_2 - 4x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - 3x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Với $x_2 = 0$: Loại vì không thỏa mãn điều kiện (2)

Với $x_2 = 3$, thay vào (3) ta được:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3 \\ 3x_1 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ 3x_1 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ 3 \cdot (-2) = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ m = -5 \end{cases} \text{ (tmđk)}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -5$.

Câu 45. (ts Bình Phước 2022-2023)

1. Cho phương trình $x^2 + 2x + m - 5 = 0$ (1) (m là tham số)
- a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
- b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_2^2 - 2x_1 + m^2 - 11m + 26 = 0$.

Lời giải

1. Cho phương trình $x^2 + 2x + m - 5 = 0$ (1) (m là tham số)
- a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

Thay $m = 2$ vào phương trình (1) được pt: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = -3$.

Vậy với $m = 2$ phương trình có tập nghiệm $S = \{1; -3\}$.

- b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_2^2 - 2x_1 + m^2 - 11m + 26 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 1^2 - (m - 5) = 6 - m$

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 6$ (*)

Khi đó, theo định lí Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = m - 5 \end{cases}$

x_2 là nghiệm của (1) nên $x_2^2 + 2x_2 + m - 5 = 0 \rightarrow x_2^2 = -2x_2 - m + 5$

Do đó:

$$\begin{aligned} x_2^2 - 2x_1 + m^2 - 11m + 26 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x_2 - m + 5 - 2x_1 + m^2 - 11m + 26 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2(x_2 + x_1) + m^2 - 12m + 31 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2(-2) + m^2 - 12m + 31 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 12m + 35 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \text{ (thỏa mãn (*))} \\ m = 7 \text{ (không thỏa mãn (*))} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 5$.

- Câu 46.** (ts Sơn La 2022-2023) Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x - m - 1 = 0$ với m là tham số, biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm m để biểu thức $F = 4x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_2^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $\Delta = (2m - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m - 1) = 4m^2 + 4m + 9 = (2m + 1)^2 + 8 > 0$ với mọi m

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2m + 1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-m - 1}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} F &= 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 1 = 4(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_2 - 1 \\ &= 4(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 1 \end{aligned}$$

Thay Vi-et vào ta có:

$$\begin{aligned} F &= 4\left(\frac{-2m+1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-m-1}{2}\right) - 1 \\ &= (-2m+1)^2 - 3(-m-1) - 1 \\ &= 4m^2 - 4m + 1 + 3m + 3 - 1 \\ &= 4m^2 - m + 3 = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{47}{16} \geq \frac{47}{16} \end{aligned}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{47}{16}$ khi $2m - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}$

Câu 47. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho phương trình bậc hai $x^2 + 2mx + m^2 + 2m + 3 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 108$.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = m^2 - (m^2 + 2m + 3) = -2m - 3$

để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m - 3 > 0 \Leftrightarrow 2m < -3 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$,

Khi đó áp dụng hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = m^2 + 2m + 3 \end{cases}$$

Theo giả thiết, ta có: $x_1^3 + x_2^3 = 108$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 108$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^3 - 3(m^2 + 2m + 3)(-2m) = 108$$

$$\Leftrightarrow -2m^3 + 12m^2 + 18m - 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2m^3 + 18m) + (12m^2 - 108) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(m^2 - 9)(m - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(m - 3)(m + 3)(m - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 = 0 & \begin{cases} m = 3 & (\text{ktm}) \\ m = -3 & (\text{m}) \end{cases} \\ m + 3 = 0 \\ m - 6 = 0 & \begin{cases} m = 6 & (\text{ktm}) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $m = -3$.

Câu 48. (ts Cần Thơ 2022-2023) Tìm giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 8$

Lời giải

$$x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 2 = 0$$

Ta có : $\Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 2 = 2m - 2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Theo hệ thức Viet ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 2m + 2 \end{cases}$$

Theo giả thuyết ta có :

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1 + x_2 + 8$$

Thay vào ta có :

$$(2m)^2 - 2.(m^2 - 2m + 2) = 2m + 8$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m^2 + 4m - 4 - 2m - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 12 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0$$

Ta có $\Delta_m = 1 - 4(-6) = 25 > 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -3 \end{cases}$

Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu đề bài

Câu 49. (ts Thừa Thiên Huế 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (1) với x là ẩn số.

a) Giải phương trình (1) với $m = 0$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

c) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $F = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Với $m = 0$, phương trình (1) trở thành : $x^2 + 2x - 3 = 0$

Ta có: $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$

Vậy khi $m = 0$, phương trình có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -3$.

b) Ta có: $\Delta = [-2(m-1)]^2 - 4.1.(m^2 - 3) = 4(m^2 - 2m + 1) - 4(m^2 - 3) = -8m + 16$.

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -8m + 16 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Vậy $m \leq 2$ thì phương trình (1) có nghiệm.

c) Với $m \leq 2$, theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$$

Ta có: $F = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 + x_2$

$$= [2(m-1)]^2 - 2(m^2 - 3) + 2(m-1) = 2m^2 - 6m + 8 = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \geq \frac{7}{2}, \text{ với mọi } m \leq 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $m - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Vậy $m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 50. (ts Đà Nẵng 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - m^2 - 3 = 0 (*)$, với m là tham số.

- a. Giải phương trình (*) khi $m = 0$.
- b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 + x_2 - 6)^2 (x_2 - 2x_1) = (x_1 x_2 + 7)^2 (x_1 - 2x_2)$.

Lời giải

a. Giải phương trình (*) khi $m = 0$, phương trình trở thành: $x^2 - 2x - 3 = 0$

Nhận xét $a - b + c = 0$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -1; x_2 = 3$

b. Vì $a.c = -m^2 - 3 < 0$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Hệ thức Viet:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ P = x_1 \cdot x_2 = -m^2 - 3 \end{cases}$$

Vì $x_1 \cdot x_2 = -m^2 - 3 < 0$ nên x_1, x_2 trái dấu $\Rightarrow (x_2 - 2x_1); (x_1 - 2x_2)$ trái dấu.

Mặt khác $(x_1 + x_2 - 6)^2 \geq 0; (x_1 x_2 + 7)^2 \geq 0$

Nên
$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 - 6)^2 (x_2 - 2x_1) &= (x_1 x_2 + 7)^2 (x_1 - 2x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 6)^2 = (x_1 x_2 + 7)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (2m - 4)^2 &= (m^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \end{aligned}$$

Câu 51. (ts Bến Tre 22.23 2022-2023) Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 2mx + m^2 + 2m + 3 = 0$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa:

$x_1^3 + x_2^3 = 108$.

Lời giải

Cho phương trình bậc hai $x^2 + 2mx + m^2 + 2m + 3 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 108$.

Ta có: $\Delta' = m^2 - (m^2 + 2m + 3) = -2m - 3$

để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m - 3 > 0 \Leftrightarrow 2m < -3 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$,

Khi đó áp dụng hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = m^2 + 2m + 3 \end{cases}$$

Theo giả thiết, ta có: $x_1^3 + x_2^3 = 108$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 108$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^3 - 3(m^2 + 2m + 3)(-2m) = 108$$

$$\Leftrightarrow -2m^3 + 12m^2 + 18m - 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2m^3 + 18m) + (12m^2 - 108) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -2(m^2 - 9)(m - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(m - 3)(m + 3)(m - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 = 0 \\ m + 3 = 0 \\ m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 & (\text{ktm}) \\ m = -3 & (m) \\ m = 6 & (\text{ktm}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = -3$.

Câu 52. (ts Bắc Kạn 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 + 8m - 9 = 0$ (1) (với m là tham số).

1. Giải phương trình (1) với $m = 0$.
2. Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 - 48}{x_1 + x_2} \text{ nguyên}$$

Lời giải

1. Thay $m = 0$ phương trình (1) ta được:

$$x^2 - 2.4x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$$

Ta có $a - b + c = 1 - (-8) - 9 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là: $x = -1$; $x = -\frac{c}{a} = 9$

Vậy với $m = 0$ phương trình có tập nghiệm là $S = \{-1; 9\}$.

2. $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 + 8m - 9 = 0$ (1)

Phương trình (1) có $\Delta' = (m + 4)^2 - (m^2 + 8m - 9) = m^2 + 8m + 16 - m^2 - 8m + 9 = 25 > 0$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m .

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2(m + 4) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 + 8m - 9 \end{cases}$$

Điều kiện để có $\frac{x_1^2 + x_2^2 - 48}{x_1 + x_2}$ là $x_1 + x_2 \neq 0 \Leftrightarrow 2(m + 4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2 + x_2^2 - 48}{x_1 + x_2} &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 48}{x_1 + x_2} \\ &= \frac{4(m + 4)^2 - 2(m^2 + 8m - 9) - 48}{2(m + 4)} \\ &= \frac{4(m^2 + 8m + 16) - 2m^2 - 16m + 18 - 48}{2(m + 4)} \\ &= \frac{2m^2 + 16m + 34}{2(m + 4)} \\ &= \frac{2(m + 4)^2 + 2}{2(m + 4)} \\ &= m + 4 + \frac{1}{m + 4} \end{aligned}$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 - 48}{x_1 + x_2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m + 4 + \frac{1}{m + 4} \in \mathbb{Z}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + 4 \in \mathbb{Z}$

Do đó $m + 4$ là ước của 1 $\Leftrightarrow m + 4 \in \{-1; 1\} \Leftrightarrow m \in \{-5; -3\}$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq -4$)

Vậy $m \in \{-5; -3\}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 53. (48 . Đồng tháp - 2022) Giải phương trình $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Lời giải

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$).

$$\text{Phương trình trở thành } t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vì } t \geq 0 \text{ nên } t = 1. \text{ Khi đó } x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -1\}$.

Câu 54. (ts Tây Ninh 2022-2023) Cho phương trình $x^2 + 3x + m - 2 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 2x_2$

Lời giải

$$\text{Phương trình: } x^2 + 3x + m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4m + 8$$

$$\Delta = 17 - 4m$$

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 17 - 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{17}{4} \quad (*)$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Thay $x_1 = -2$ và $x_2 = -1$ vào (2) ta có $m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 4$ (TMĐK (*))

Vậy $m = 4$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 2x_2$

Câu 55. (ts Cao Bằng 2022-2023) Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m = 0$ (m là tham số)

Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x_1^2 + 2(m + 1)x_2 + 4x_1x_2.$$

Lời giải

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - 2m = m^2 + 2m + 1 - 2m = m^2 + 1 > 0, \forall m$ suy ra Phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi - ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 2m = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m+1)x_1 - 2m$$

Theo đề bài: $P = x_1^2 + 2(m+1)x_2 + 4x_1x_2$

$$= 2(m+1)x_1 - 2m + 2(m+1)x_2 + 4x_1x_2$$

$$= 2(m+1)(x_1 + x_2) - 2m + 4x_1x_2$$

$$= 2(m+1) \cdot 2 \cdot (m+1) - 2m + 4 \cdot 2m$$

$$= 4(m+1)^2 + 6m = 4(m^2 + 2m + 1) + 6m$$

$$= 4m^2 + 14m + 4$$

$$= (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 4 = \left(2m + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}.$$

Vì $\left(2m + \frac{7}{2}\right)^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow P \geq \frac{-33}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2m + \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{4}$ (tm).

Vậy GTNN của P là $-\frac{33}{4}$ khi $m = -\frac{7}{4}$.

Câu 56. (ts Nam Định 2022-2023) Giải phương trình $x + 4 = \sqrt{x^2 + 9x + 19} - 2\sqrt{x + 3}$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq -3$.

Phương trình tương đương với $2\sqrt{x + 3} + x + 4 = \sqrt{(x + 3) + (x + 4)^2}$

Đặt $u = \sqrt{x + 3}, v = x + 4$ ($u \geq 0; v \geq 1$). Ta được $2u + v = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Chú ý: Nếu học sinh không tìm điều kiện cho u, v vẫn cho 0,25 điểm.

$$\Rightarrow (2u + v)^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ 3u + 4v = 0 \end{cases}$$

$u = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$3u + 4v = 0$ vô nghiệm vì $u \geq 0; v \geq 1$.

Thử lại ta có nghiệm của phương trình đã cho là $x = -3$.

Câu 57. (ts Lai Châu 2022-2023) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$. (1)

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} 3x^2 + 6x + 7 \geq 0 \\ 5x^2 + 10x + 14 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+1)^2 + 4 \geq 0 \\ 5(x+1)^2 + 9 \geq 0 \end{cases} \text{ luôn đúng với mọi } x$$

Cách 1:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} &= 4 - 2x - x^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x^2 + 6x + 7} - 2) + (\sqrt{5x^2 + 10x + 14} - 3) &= -1 - 2x - x^2 \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6x + 3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5x^2 + 10x + 5}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + (x+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 \left[\frac{3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + 1 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \text{ (vì } \frac{3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + 1 > 0, \forall x) & \\ \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1\}$.

Cách 2:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} &= 4 - 2x - x^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} &= 5 - (x+1)^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} \geq 5, \forall x$

$$5 - (x+1)^2 \leq 5, \forall x$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1\}$.

Câu 1. (ts Hải Phòng 2022-2023) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4\sqrt{x-2} - y = 1 \\ 2\sqrt{x-2} + 3y = 25 \end{cases}$$

Lời giải

ĐK XD: $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} 4\sqrt{x-2} - y = 1 \\ 2\sqrt{x-2} + 3y = 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x-2} - y = 1 \\ 4\sqrt{x-2} + 6y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 49 \\ 4\sqrt{x-2} - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ 4\sqrt{x-2} - 7 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ 4\sqrt{x-2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ \sqrt{x-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (tmđk)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (6; 7)$.

Câu 2. (ts Bình Dương 2022-2023) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$

Câu 3. (ts Bình Định 2022-2023) Không dùng máy tính, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$$

Lời giải

Không dùng máy tính, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x - 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = -11 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -1)$

Câu 4. (ts Bắc Giang 2022-2023) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -1)$

Câu 5. (ts Bến Tre 22.23 2022-2023) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 7x + y = 6 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 7x + y = 6 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ 7x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 7x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 7(2y+5)+y=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 14y+35+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 16y=-29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \frac{-29}{15}+5=\frac{17}{15} \\ y=\frac{-29}{15} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{17}{15}; -\frac{29}{15}\right)$.

Câu 6. (ts Bến Tre 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=5 \\ 7x+y=6 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ 7x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 7x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 7(2y+5)+y=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 14y+35+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 16y=-29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \frac{-29}{15}+5=\frac{17}{15} \\ y=\frac{-29}{15} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{17}{15}; -\frac{29}{15}\right)$.

Câu 7. (ts Thừa Thiên Huế 2022-2023) Không dùng máy tính, giải hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=10 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3(1+2y)+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$.

Câu 8. (ts Thái Bình 2022-2023) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=1 \\ mx-y=-m \end{cases}$ với m là tham số.

1. Giải hệ phương trình với $m=1$.

2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = x + y$.

Lời giải

1. Giải hệ phương trình với $m=1$.

$$\text{Thay } m=1 \text{ vào ta có } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy với $m=1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 1)$

2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = x + y$.

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ mx - y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ m(1 - my) - y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ (m^2 + 1)y = 2m \end{cases}$$

Vì $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = 1 - m \cdot \frac{2m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{2m}{m^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1} \\ y = \frac{2m}{m^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1 + m^2}\right)^2 = \frac{1 - 2m^2 + m^4 + 4m^2}{(1 + m^2)^2} = \frac{(1 + m^2)^2}{(1 + m^2)^2} = 1$$

$$\text{Ta lại có } (x^2 + y^2) \leq 2 \cdot (x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x + y \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } T \text{ đạt GTLN bằng } \sqrt{2} \text{ khi } x = y \Leftrightarrow \frac{1 - m^2}{1 + m^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 + \sqrt{2} \text{ hoặc } m = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại vì khi đó } S = -\sqrt{2})$$

Câu 9. (ts Khánh Hòa 2022-2023) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình là } \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Câu 10. (ts Ha Nam 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y + 2) - y(x + 1) = 4 \\ 3x + y = 11. \end{cases}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x(y + 2) - y(x + 1) = 4 \\ 3x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ 3x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 2)$.

Câu 11. (ts Vĩnh Phúc 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3 \cdot 2 + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -1)$

Câu 12. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$

Câu 13. (ts Tây Ninh 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 \cdot 1 - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -2)$

Câu 14. (ts Quảng Bình 2022-2023) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 15. (ts Quảng Ninh 2022-2023) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -1)$

Câu 16. (ts Ninh Bình 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 17. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Không dùng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3(2y + 5) + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Câu 18. (ts Điện Biên 2022-2023) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x + y = 17 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 11)$.

Câu 19. (ts Đà Nẵng 2022-2023) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Vậy hệ phương trình có nghiệm } (2; -1)$$

Câu 20. (ts Nam Định 2022-2023) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \quad (1) \\ 3x^2 - xy - 8 = 0 \quad (2). \end{cases}$$

Lời giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow y = 2x - 2$

Thay vào phương trình (2) ta được $3x^2 - x(2x - 2) - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 2$

Với $x = -4 \Rightarrow y = -10$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(2; 2); (-4; -10)$.

Câu 21. (ts Bắc Kạn 2022-2023) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}.$$

Lời giải

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 12 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 22. (48 . Đồng Tháp - 2022) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 4x + 5y = 32 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3x + y = 13 \\ 4x + 5y = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 4y = 52 \\ 12x + 15y = 96 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 44 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 3x + 4 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 3x = 13 - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 4)$.

Câu 23. (ts THANH HÓA 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3 - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 24. (ts Đắk Nông 2022-2023) Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

Lời giải

Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3x - y = 9 + 6 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$.

Câu 25. (ts Cao Bằng 2022-2023) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Lời giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 8 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; -1)$.

Câu 26. (ts HÀ NỘI 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + \frac{12}{y+2} = 5 \\ 3x - \frac{4}{y+2} = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + \frac{12}{y+2} = 5 \\ 3x - \frac{4}{y+2} = 2 \end{cases}$$

Điều kiện $y \neq -2$.

Đặt $\frac{1}{y+2} = z (z \neq 0)$ ta được hệ phương trình mới:

$$\begin{cases} 2x + 12z = 5 \\ 3x - 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 12z = 5 \\ 9x - 12z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 3x - 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 \cdot 1 - 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = \frac{1}{4} (t/m) \end{cases}$$

Với $z = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{y+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow y+2 = 4 \Rightarrow y = 2 (t/m)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 27. (ts Sơn La 2022-2023) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 0)$

Câu 28. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -1)$

Câu 29. (ts Lào Cai 2022-2023) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -2)$

Câu 30. (ts Phú Thọ 2022-2023) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x+2)^2 - x(y+1) + y = 8 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-14} + \sqrt{y-1}) & (2) \end{cases}$$

Lời giải

ĐKXĐ: $y \geq \frac{14}{3}$

Từ (1) ta có: $(x+2)^2 - x(y+1) + y = 8$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - xy - x + y = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 - xy - x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + 4(x-1) - y(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-y+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x+4 \end{cases}$$

+ Nếu $x=1$ thay vào (2) ta được $15 = 5(\sqrt{3y-14} + \sqrt{y-1})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3y-14} + \sqrt{y-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4y - 15 + 2\sqrt{3y^2 - 17y + 14} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2y + \sqrt{3y^2 - 17y + 14} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3y^2 - 17y + 14} = 12 - 2y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2y \geq 0 \\ 3y^2 - 17y + 14 = 144 - 48y + 4y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 6 \\ y^2 - 31y + 130 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 6 \\ y = 5 \Leftrightarrow y = 5 \text{ (thỏa mãn ĐK)} \\ y = 26 \end{cases}$$

+ Nếu $y = x + 4$ thay vào (2) ta được $4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+3})$ (*)

ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$

$$(*) \Leftrightarrow 4x(x-6) = 5\left[\left(\sqrt{3x-2}-4\right) + \left(\sqrt{x+3}-3\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4x(x-6) = 5\left[\frac{3(x-6)}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{x-6}{\sqrt{x+3}+3}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \text{ (tmdk)} \\ 4x = 5\left[\frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+3}\right] \end{cases}$$

.) Nếu $x=6$ thì $y=10$ (thỏa mãn ĐK).

$$.) \text{ Nếu } 4x = 5\left[\frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+3}\right] \text{ thì } \frac{15}{\sqrt{3x-2}+4} - 3 + \frac{5}{\sqrt{x+3}+3} - 1 + 4 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{15 - 3\sqrt{3x-2} - 12}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{5 - \sqrt{x+3} - 3}{\sqrt{x+3}+3} + 4 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-3\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+3} + 4-4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-\sqrt{3x-2})}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+3} + 4(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(1-x)}{(\sqrt{3x-2}+4)(1+\sqrt{3x-2})} + \frac{1-x}{(\sqrt{x+3}+3)(2+\sqrt{x+3})} + 4(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x) \left[\frac{9}{(\sqrt{3x-2}+4)(1+\sqrt{3x-2})} + \frac{1}{(\sqrt{x+3}+3)(2+\sqrt{x+3})} + 4 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (do } \frac{9}{(\sqrt{3x-2}+4)(1+\sqrt{3x-2})} + \frac{1}{(\sqrt{x+3}+3)(2+\sqrt{x+3})} + 4 > 0 \text{)} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

$$\Rightarrow y=5 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(1;5), (6;10)\}$.

Chuyên đề

5

Giải bài toán bằng cách lập pt, hệ pt

Câu 1. (ts HÀ NỘI 2022-2023) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
 Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 20km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài 60km, tính vận tốc của mỗi xe. (Giả định rằng vận tốc mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB).

Lời giải

Đổi 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km / h). (ĐK: $x > 0$).

Vận tốc của ô tô là $x + 20$ (km / h).

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là $\frac{60}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là $\frac{60}{x + 20}$ (giờ)

Vì ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x + 20} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 60 \cdot (x + 20 - x) = x(x + 20) \Leftrightarrow x^2 + 20x - 2400 = 0$$

Ta có $\Delta' = 100 + 2400 = 2500 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 50$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = -10 + 50 = 40 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$x_2 = -10 - 50 = -60 \text{ (không thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 40 (km / h); vận tốc của ô tô là 60 (km / h).

Câu 2. (ts Hải Phòng 2022-2023) Bác An thuê nhà với giá 1500000 đồng/tháng, bác phải trả tiền dịch vụ giới thiệu là 500000 đồng (tiền dịch vụ chỉ trả một lần). Gọi x (tháng) là thời gian mà bác An thuê nhà, y (đồng) là tổng số tiền bác phải trả bao gồm tiền thuê nhà trong x (tháng) và tiền dịch vụ giới thiệu.

a) Lập công thức tính y theo x .

b) Tính tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng.

Lời giải

a) Lập công thức tính y theo x .

Tổng số tiền thuê trong x (tháng) bác An phải trả là $1500000x$ (đồng).

Tổng số tiền bác phải trả bao gồm tiền thuê nhà trong x (tháng) và tiền dịch vụ giới thiệu là:

$$y = 1500000x + 500000 \text{ (đồng).}$$

Vậy công thức tính y theo x là: $y = 1500000x + 500000$.

b) Tính tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng.

Tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng là:

$$y = 1500000 \cdot 5 + 500000 = 8000000 \text{ (đồng).}$$

Vậy tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng là 8000000 (đồng).

Câu 3. (ts TP HCM 2022-2023) Để đánh giá thể trạng (gầy, bình thường, thừa cân) của một người, người ta thường dùng chỉ số BMI (Body Mass Index). Chỉ số BMI được tính dựa trên chiều cao và cân nặng theo công thức sau:

$$BMI = \frac{\text{cân nặng (kg)}}{\text{chiều cao (m)} \times \text{chiều cao (m)}} \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

Đối với người trưởng thành, chỉ số này cho đánh giá như sau:

Phân loại	BMI (kg/m ²)
Cân nặng thấp (gầy)	< 18,5
Bình thường	18,5 – 24,9
Thừa cân	≥ 25
Tiền béo phì	25 – 29,9
Béo phì độ I	30 – 34,9
Béo phì độ II	35 – 39,9
Béo phì độ III	≥ 40

Hạnh và Phúc là hai người trưởng thành đang cần xác định thể trạng của mình.

- a) Hạnh cân nặng 50 kg và cao 1,63 m . Hãy cho biết phân loại theo chỉ số BMI của Hạnh?
- b) Phúc cao 1,73 m thì cân nặng trong khoảng nào để chỉ số BMI của Phúc ở mức bình thường? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

a) Chỉ số BMI của Hạnh là $BMI_1 = \frac{50}{1,63 \cdot 1,63} \approx 18,8 \text{ (kg/m}^2\text{)}.$

Vậy Hạnh có thể trạng bình thường.

- b) Gọi x (kg) là khối lượng của Phúc khi có thể trạng bình thường ($x > 0$).

Chỉ số BMI của Phúc ở mức bình thường

$$\Rightarrow 18,5 \leq BMI_2 \leq 24,9$$

$$\Rightarrow 18,5 \leq \frac{x}{1,73 \cdot 1,73} \leq 24,9$$

$$\Rightarrow 55,4 \leq x \leq 74,5.$$

Vậy cân nặng của Phúc từ 55,4 kg đến 74,5 kg thì Phúc có thể trạng bình thường.

Câu 4. (ts BẮC NINH 2022-2023) Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 15 km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h. Vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải

Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h) ($x > 0$).

Suy ra vận tốc của người đó khi đi từ B trở về A là $x + 3$ (km/h)

Thời gian người đó đi từ A đến B là $\frac{15}{x}$ (h)

Thời gian người đó đi từ B về A là $\frac{15}{x + 3}$ (h)

Do thời gian về ít hơn thời gian đi là 15 phút = $\frac{1}{4}$ (h) nên ta có phương trình

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x + 3} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{15(x + 3) - 15x}{x(x + 3)} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{45}{x(x+3)} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

Phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = 12 (TM); x_2 = -15 (L)$$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12 (km/h)

Câu 5. (ts Quảng Trị 2022-2023) Nhằm phục vụ khán giả cổ vũ giải bóng đá U23 châu Á, một xưởng may phải may 2000 áo cổ động viên trong một số ngày quy định. Trong ba ngày đầu, mỗi ngày xưởng may đúng số áo theo kế hoạch. Từ ngày thứ tư, nhờ cải tiến kỹ thuật, mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn 30 áo so với số áo phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế, trước khi hết thời hạn một ngày, xưởng đã may được 1980 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu áo?

Lời giải

Gọi số áo mà xưởng phải may mỗi ngày theo kế hoạch là x (chiếc), ($x < 2000, x \in \mathbb{N}^*$).

Thời số ngày phải may theo kế hoạch là $\frac{2000}{x}$ (ngày).

Số áo may được trong ba ngày đầu là: $3x$ (chiếc)

Thực tế từ ngày thứ tư, mỗi ngày xưởng may được $(x + 30)$ (chiếc)

Số ngày may thực tế là $3 + \frac{1980 - 3x}{x + 30}$ (ngày).

Vì số ngày may thực tế sớm hơn kế hoạch một ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{2000}{x} = 3 + \frac{1980 - 3x}{x + 30} + 1 \Rightarrow 2000(x + 30) = 4x(x + 30) + x(1980 - 3x)$$

$$\Leftrightarrow 2000x + 60000 = 4x^2 + 120x + 1980x - 3x^2 \Leftrightarrow x^2 + 100x - 60000 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 200$ (thỏa mãn); $x_2 = -300$ (loại);

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày xưởng phải may 200 chiếc áo.

Câu 6. (ts Sơn La 2022-2023) Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 30 km/h ; lúc trở về người đó đi với vận tốc 40 km/h nên thời gian lúc về ít hơn thời gian lúc đi 30 phút. Tính quãng đường AB.

Lời giải

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km) (điều kiện $x > 0$)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{x}{30}$ (giờ)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{x}{40}$ (giờ)

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{40} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{120} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60 (tm)$$

Vậy độ dài quãng đường AB dài 60 km

Câu 7. (ts Lai Châu 2022-2023) Quãng đường AB dài 100km . Một số ô tô dự định đi từ A đến B với tốc độ và thời gian dự định. Trên thực tế xe đi với vận tốc chậm hơn dự định 10km/h nên xe đến B chậm hơn dự định 30 phút. Tính vận tốc và thời gian ô tô dự định trên quãng đường AB .

Lời giải

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h), điều kiện $x > 0$

$$\text{Đổi } 30 \text{ phút} = \frac{1}{2} \text{ giờ}$$

$$\text{Thời gian ô tô dự định đi từ } A \text{ đến } B \text{ là: } \frac{100}{x} \text{ giờ}$$

$$\text{Thời gian thực tế ô tô đi từ } A \text{ đến } B \text{ là: } \frac{100}{x-10} \text{ giờ}$$

$$\text{Theo bài ta có phương trình } \frac{100}{x-10} - \frac{100}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ đó ta thu được phương trình } x^2 - 10x - 2000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = -40 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 50$.

Vậy vận tốc dự định của ô tô là 50km/h , thời gian dự định của ô tô là 2 giờ.

Câu 8. (ts Hải Dương 2022-2023) Bạn An đi xe đạp từ nhà đến trường trên quãng đường dài 4 km. Khi đi từ trường về nhà vẫn trên con đường đó, An đạp xe với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình lúc đi là 3 km/h. Tổng thời gian đạp xe cả đi và về của An là 36 phút. Tính vận tốc đạp xe trung bình của An lúc đi từ nhà đến trường.

Lời giải

Gọi vận tốc đạp xe trung bình của An lúc đi từ nhà đến trường là x km/h ($x > 0$)

$$\text{Thời gian lúc từ nhà tới trường là } \frac{4}{x} \text{ giờ}$$

Vì vận tốc lúc từ trường về nhà lớn hơn vận tốc đi từ nhà tới trường 3 km/h nên vận tốc lúc về là $x+3$ km/h

$$\text{Thời gian lúc từ trường về nhà là } \frac{4}{x+3} \text{ giờ}$$

$$\text{Đổi } 36 \text{ phút} = \frac{3}{5} \text{ giờ}$$

Theo bài, tổng thời gian đi và về là 36 phút nên ta có phương trình $\frac{4}{x} + \frac{4}{x+3} = \frac{3}{5}$

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{x+3} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 20(x+3) + 20x = 3x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 20x + 60 + 20x = 3x^2 + 9x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 31x - 60 = 0$$

$$\Delta = (-31)^2 - 4.3.(-60) = 1681 > 0$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{31 - \sqrt{1681}}{2.3} = \frac{-5}{3} \text{ (Không thỏa mãn)}$$

$$x_2 = \frac{31 + \sqrt{1681}}{2.3} = 12 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy vận tốc đạp xe trung bình của An lúc đi từ nhà đến trường là 12 km/h.

Câu 9. (ts Nghệ An 2022-2023) Trong kỳ SEA Games 31 tổ chức tại Việt Nam, thú Sao La được chọn làm linh vật. Một phân xưởng được giao sản xuất 420 thú nhồi bông Sao La trong một thời gian dự định để làm quà tặng. Biết rằng nếu mỗi giờ phân xưởng sản xuất thêm 5 thú nhồi bông Sao La thì sẽ rút ngắn được thời gian hoàn thành công việc là 2 giờ. Tính thời gian dự định của phân xưởng.

Lời giải

Gọi thời gian dự định hoàn thành công việc của phân xưởng là x (giờ), $x > 0$.

Thời gian thực tế để hoàn thành công việc là $x - 2$ (giờ)

Theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng sản xuất được $\frac{420}{x}$ (thú nhồi bông)

Thực tế mỗi ngày phân xưởng sản xuất được $\frac{420}{x-2}$ (thú nhồi bông)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{420}{x-2} - \frac{420}{x} = 5$

$$\Rightarrow 420x - 420(x-2) = 5x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 168 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot (-168) = 169$$

$$\Rightarrow x_1 = 14 \text{ (tm)}, x_2 = -12 \text{ (loại)}$$

Vậy thời gian dự định hoàn thành công việc của phân xưởng là 14 giờ

Câu 10. (ts Cần Thơ 2022-2023) Anh Thuận đến cửa hàng điện máy mua 1 máy lạnh và một máy giặt để sử dụng trong gia đình. Khi đến mua hàng thì giá tiền của 1 máy lạnh tăng thêm 15% và giá tiền của 1 máy giặt giảm bớt 20% so với giá niêm yết. Vì vậy, anh Thuận thanh toán tổng cộng 19 400 000 đồng khi mua hai món hàng trên. Biết rằng theo giá niêm yết của cửa hàng, tổng giá tiền 2 máy lạnh nhiều hơn tổng giá tiền của 3 máy giặt là 3 000 000 đồng. Hỏi giá tiền niêm yết của 1 máy lạnh và 1 máy giặt là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi giá niêm yết của máy lạnh là x (đồng) ($x > 0$)

Giá niêm yết của máy giặt là y (đồng) ($y > 0$)

Giá tiền của máy lạnh khi tăng thêm 15% so với giá niêm yết là: $x + x.15\% = 1,15x$ (đồng)

Giá tiền của máy giặt khi giảm bớt 20% so với giá niêm yết là: $y - y.20\% = 0,8y$ (đồng)

Anh Thuận thanh toán tổng cộng 19 400 000 đồng khi mua hai món hàng trên nên ta có:

$$1,15x + 0,8y = 19400000 \quad (1)$$

Tổng giá tiền 2 máy lạnh nhiều hơn tổng giá tiền của 3 máy giặt là 3 000 000 đồng nên ta có:

$$2x - 3y = 3000000 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1,15x + 0,8y = 19400000 \\ 2x - 3y = 3000000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12000000 \\ y = 7000000 \end{cases}$$

Vậy giá niêm yết của máy lạnh là 12 000 000 (đồng) và của máy giặt là 7 000 000 (đồng)

Câu 11. (ts Bình Thuận 2022-2023) Một xe khách và một xe tải xuất phát cùng một lúc từ thành phố A đến thành phố B trên quãng đường dài 180 km. Vận tốc xe khách lớn hơn vận tốc xe tải là 10 km/h nên xe khách đã đến B sớm hơn xe tải 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải

Đổi: 36 phút = $\frac{3}{5}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe khách là: x (km/h), (điều kiện: $0 < x < 10$).

Vận tốc của xe tải là: $x - 10$ (km/h).

Thời gian xe khách đi là: $\frac{180}{x}$ (h).

Thời gian xe tải đi là: $\frac{180}{x - 10}$ (h).

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{180}{x - 10} - \frac{180}{x} = \frac{3}{5}$.

$$\Rightarrow 5 \cdot 180x - 5 \cdot 180(x - 10) = 3x(x - 10) \Leftrightarrow 900x - 900x + 9000 = 3x^2 - 30x.$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 30x - 9000 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 3000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -50 \\ x = 60 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 60$.

Vậy vận tốc xe khách là 60 km/h và vận tốc xe tải là 50 km/h .

Câu 12. (ts Thừa Thiên Huế 2022-2023) Hưởng ứng chiến dịch tình nguyện “Mùa hè xanh” để giúp học sinh vùng cao đến trường thuận lợi hơn, hai tổ thanh niên A và B tham gia sửa một đoạn đường. Nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sửa xong đoạn đường đó trong bao lâu?

Lời giải

Gọi x (giờ) là thời gian tổ thanh niên A sửa xong đoạn đường đó một mình.

Gọi y (giờ) là thời gian tổ thanh niên B sửa xong đoạn đường đó một mình.

Điều kiện: $x, y > 0$.

Trong 1 giờ, tổ thanh niên A làm riêng sửa được $\frac{1}{x}$ đoạn đường và tổ thanh niên B làm riêng sửa được $\frac{1}{y}$ đoạn đường.

Nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ là xong việc nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$ (1).

Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ nên ta có phương trình $y - x = 12$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \\ y - x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 12} = \frac{1}{8} \\ y = x + 12 \end{cases}$ (*)

Xét phương trình (*) $\Rightarrow 8 \cdot (x + 12) + 8x = x(x + 12)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12(TM) \Rightarrow y = 24(TM) \\ x = -8(L) \end{cases}$$

Vậy: Thời gian tổ thanh niên A sửa xong đoạn đường đó một mình là 12 giờ.

Thời gian tổ thanh niên B sửa xong đoạn đường đó một mình là 24 giờ.

Câu 13. (ts Đà Nẵng 2022-2023) Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc không đổi. Nhưng sau khi đi được 2 giờ thì xe hỏng nên phải dừng lại 20 phút để sửa chữa. Do đó, để kịp đến B đúng thời gian dự định, người đó phải tăng tốc thêm 8 km/h. Tính vận tốc ban đầu của xe máy, biết rằng quãng đường AB dài 160 km.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc ban đầu của xe máy, điều kiện $x > 0$. 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ

Thời gian dự định đi từ A đến B là: $\frac{160}{x}$ (giờ).

Trong 2 giờ đầu người đó đi được $2x$ (km). Quãng đường còn lại là $160 - 2x$ (km)

Ta có phương trình thời gian: $2 + \frac{1}{3} + \frac{160 - 2x}{x + 8} = \frac{160}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 + 56x - 3840 = 0$ Giải được $x = -96$ km/h (loại) và $x = 40$ km/h (nhận)

Vậy vận tốc ban đầu của xe máy là 40 km/h

Câu 14. (ts TP HCM 2022-2023) Giá bán một cái bánh cùng loại ở hai cửa hàng A và B đều là 15 000 đồng, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau.

Cửa hàng A: đối với 3 cái bánh đầu tiên, giá mỗi cái là 15 000 đồng và từ cái bánh thứ tư trở đi khách hàng chỉ phải trả 75% giá bán.

Cửa hàng B: cứ mua 3 cái bánh thì được tặng thêm 1 cái bánh cùng loại.

Bạn Hằng cần đúng 13 cái bánh để tổ chức sinh nhật thì bạn ấy nên mua bánh ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm được bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia?

Lời giải

Giá bán 1 cái bánh từ thứ tư trở đi ở cửa hàng A là: $75\% \cdot 15\ 000 = 11\ 250$ (đồng)

Số tiền bạn Hằng phải trả khi mua 13 cái bánh ở cửa hàng A là:

$3 \cdot 15\ 000 + 10 \cdot 11\ 250 = 157\ 500$ (đồng).

Để mua được 13 cái bánh ở cửa hàng B, bạn Hằng phải mua 10 cái bánh và được khuyến mãi 3 cái.

Số tiền bạn Hằng phải trả khi mua 10 cái bánh ở cửa hàng B là: $10 \cdot 15\ 000 = 150\ 000$ (đồng).

Do $150\ 000 < 157\ 500$ nên bạn Hằng mua ở cửa hàng B sẽ tiết kiệm hơn, và số tiền tiết kiệm so với khi mua ở cửa hàng A là $157\ 500 - 150\ 000 = 7\ 500$ (đồng).

Câu 15. (ts Bắc Kạn 2022-2023) Bạn A dự định mua 2kg quả xoài và 2kg quả vải hết 100 000 đồng. Thực tế, A mua 3kg quả xoài và 1kg quả vải hết 90 000 đồng. Tính giá của 1kg quả xoài và giá của 1kg quả vải.

Lời giải

Gọi giá tiền của 1kg quả xoài là x (đồng) ($x > 0$)

và giá tiền của 1kg quả vải là y (đồng) ($y > 0$)

Bạn A dự định mua 2kg quả xoài và 2kg quả vải hết 100 000 đồng nên ta có phương trình:

$$2x + 2y = 100000 \Leftrightarrow x + y = 50000 \quad (1)$$

Bạn A thực tế mua 3kg quả xoài và 1kg quả vải hết 90 000 đồng nên ta có phương trình:

$$3x + y = 90000 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 50000 \\ 3x + y = 90000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 40000 \\ x + y = 50000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20000(tm) \\ y = 30000(tm) \end{cases}$$

Vậy giá 1kg quả xoài là 20 000 đồng và giá 1kg quả vải là 30 000 đồng.

Câu 16. (ts Tiền Giang 2022-2023) Một xe tải đi theo hướng từ A đến B cách nhau 210km. Sau 2 giờ, cũng trên quãng đường đó, một ô tô khởi hành theo hướng từ B đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 10km/h. Tính vận tốc của xe tải, biết hai xe gặp nhau tại nơi cách A một khoảng bằng 150km.

Lời giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe tải (ĐK: $x > 0$)

Vận tốc của ô tô là: $x+10$ (km/h)

Thời gian xe tải đi từ A đến lúc gặp ô tô là: $\frac{150}{x}$ (h)

Quãng đường ô tô đi từ B đến khi gặp xe tải là: $210-150=60$ (km)

Thời gian ô tô đi từ B đến lúc gặp xe tải là: $\frac{60}{x+10}$ (h)

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{150}{x} = 2 + \frac{60}{x+10}$$

$$\Leftrightarrow 150(x+10) = 2x(x+10) + 60x$$

$$\Leftrightarrow 150x + 1500 = 2x^2 + 20x + 60x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 70x - 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 35x - 750 = 0$$

Ta có: $\Delta = (-35)^2 - 4.1.(-750) = 4225 > 0$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-(-35) + \sqrt{4225}}{2.1} = 50 \text{ (tmđk)}$$

$$x_2 = \frac{-(-35) - \sqrt{4225}}{2.1} = -15 \text{ (kTM)}$$

Vậy vận tốc của xe tải là 50 km/h

Câu 17. (ts Vinh Phúc 2022-2023) Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 900 bộ quần áo trong một thời gian quy định, mỗi ngày phân xưởng may được số bộ quần áo là như nhau. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng may được bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi số bộ quần áo mà phân xưởng phải may trong mỗi ngày theo kế hoạch là x (bộ quần áo)

Điều kiện $x \in \mathbb{N}; x < 900$

Khi đó thời gian phân xưởng may xong 900 bộ quần áo theo kế hoạch là $\frac{900}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày may được $x+10$ (bộ quần áo) nên thời gian phân xưởng may xong 900 bộ quần áo là $\frac{900}{x+10}$ (ngày)

Do hoàn thành kế hoạch sớm hơn 3 (ngày) nên ta có phương trình:

$$\frac{900}{x} - \frac{900}{x+10} = 3$$

$$\Leftrightarrow 900(x+10) - 900x = 3x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 3000 = 0$$

Ta có $\Delta' = 5^2 - 1 \cdot (-3000) = 3025$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5 + 55}{1} = 50 \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 55}{1} = -60 \text{ (không thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải may 50 bộ quần áo

Câu 18. (ts Bắc Giang 2022-2023) Ban đầu, khán đài của nhà thi đấu các nội dung thuộc môn Bơi tại SEA Games chứa 1188 ghế được xếp thành các dãy, số lượng ghế ở các dãy bằng nhau. Để phục vụ đông đảo khán giả hơn, khán đài sau đó đã được lắp thêm 2 dãy ghế và mỗi dãy được lắp thêm 4 ghế. Vì thế, khán đài được tăng thêm 254 ghế. Tìm số dãy ghế ban đầu của khán đài.

Lời giải

Gọi số dãy ghế ban đầu của khán đài là x (dãy), $x \in \mathbb{N}^*$

Số ghế ban đầu ở mỗi dãy là $\frac{1188}{x}$ (ghế)

Sau khi lắp thêm 2 dãy và mỗi dãy lắp thêm 4 ghế thì số dãy ghế là $x + 2$ (dãy) và số ghế của mỗi dãy là $\frac{1188}{x} + 4$ (ghế)

Khán đài được tăng thêm 254 ghế, ta có phương trình:

$$(x + 2) \left(\frac{1188}{x} + 4 \right) = 1188 + 254 \Leftrightarrow 2x^2 - 123x + 1188 = 0$$

Giải phương trình tìm được nghiệm $\begin{cases} x = \frac{99}{2} \text{ (không thoả mãn)} \\ x = 12 \text{ (thoả mãn)} \end{cases}$

Vậy số dãy ghế ban đầu của khán đài là 12 dãy

Câu 19. (ts Bình Dương 2022-2023) Một người nông dân trồng hoa trên một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 15m. Cuối mỗi vụ thu hoạch, bình quân người đó bán được 20.000 đồng tiền hoa trên mỗi mét vuông đất. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó. Biết tổng số tiền bán hoa cuối vụ từ mảnh vườn người đó thu được là 252 triệu đồng.

Lời giải

Gọi chiều rộng mảnh vườn là x (m), điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, chiều dài mảnh vườn là $x + 15$ (m)

Diện tích mảnh vườn là: $252000000 : 20000 = 12600(m^2)$

Theo đề bài, ta có phương trình: $x(x + 15) = 12600 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 12600 = 0$

Giải phương trình, ta được: $x_1 = 105$ (nhận); $x_2 = -120$ (loại)

Vậy chiều rộng mảnh vườn là $105m$, chiều dài mảnh vườn là $105 + 15 = 120m$,

Câu 20. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Hướng ứng ngày “Ngày sách và văn hóa đọc Việt Nam năm 2022”, một nhà sách đã có chương trình giảm giá cho tất cả loại sách. Bạn Nam đến mua một cuốn sách tham khảo môn Toán và một cuốn sách tham khảo môn Ngữ Văn với tổng giá ghi trên hai quyển sách đó là 195000 đồng. Nhưng do quyển sách tham khảo môn Toán được giảm giá 20% và quyển sách tham khảo môn Ngữ văn được giảm giá 35% nên bạn Nam chỉ phải trả cho nhà sách

138000 đồng để mua hai quyển sách đó. Hỏi giá ghi trên mỗi quyển sách tham khảo đó là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi giá ghi trên hai quyển sách tham khảo môn Toán và môn Ngữ văn lần lượt là x, y (nghìn đồng) (ĐK: $x, y > 0$)

Do tổng giá ghi trên hai quyển sách đó là 195000 đồng nên ta có phương trình

$$x + y = 195 \quad (1)$$

Giá tiền quyển sách tham khảo môn Toán được giảm giá 20% là $(1 - 20\%)x = 0,8x$ (nghìn đồng)

Giá tiền quyển sách tham khảo môn Ngữ văn được giảm giá 35% là $(1 - 35\%)y = 0,65y$ (nghìn đồng)

Theo bài ra ta có phương trình: $0,8x + 0,65y = 138 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 195 \\ 0,8x + 0,65y = 138 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8x + 0,8y = 156 \\ 0,8x + 0,65y = 138 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,15y = 18 \\ x + y = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 \\ x + 120 = 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 \\ x = 75 \end{cases}$$

Đổi chiếu điều kiện $x = 75$ và $y = 120$ (thỏa mãn)

Vậy giá ghi trên quyển sách tham khảo môn Toán là 75000 đồng và giá ghi trên quyển sách tham khảo môn Ngữ văn là 120000 đồng.

Câu 21. (ts Quảng Ninh 2022-2023) Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành tròn 12 ngày. Nếu họ làm riêng thì đội II hoàn thành công việc hết nhiều thời gian hơn đội I là 10 ngày. Hỏi nếu làm riêng, mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc.

Lời giải

Gọi thời gian đội thứ nhất hoàn thành công việc là x (ngày) ($x > 0$)

Suy ra thời gian đội thứ hai hoàn thành công việc là $x + 10$ (ngày)

Trong 1 ngày đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), đội II làm được $\frac{1}{x + 10}$ (công việc).

Vì hai người hoàn thành công việc trong 12 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{x + 10} = 1 \Rightarrow 12(x + 10) + 12x = x(x + 10)$$

$$\Leftrightarrow 12x + 120 + 12x = x^2 + 10x \Leftrightarrow x^2 - 14x - 120 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 20 \text{ (thỏa mãn); } x_2 = -6 \text{ (loại)}$$

Vậy thời gian đội thứ nhất hoàn thành công việc là 20 (ngày)

Thời gian đội thứ hai hoàn thành công việc là 30 (ngày).

Câu 22. (ts Hải Phòng 2022-2023) Một người dự định trồng 210 cây theo thời gian định trước. Nhưng do thời tiết xấu nên thực tế mỗi ngày người đó trồng được ít hơn dự định 5 cây, vì thế hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến. Hỏi theo dự định ban đầu, mỗi ngày người đó trồng được bao nhiêu cây ?

Lời giải

Gọi số cây mỗi ngày người đó trồng theo dự định ban đầu là: x (cây) (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$).

Thời gian trồng cây theo dự định là: $\frac{210}{x}$ (ngày).

Số cây trồng theo thực tế là $x - 5$ (cây).

Thời gian trồng cây theo thực tế là: $\frac{210}{x - 5}$ (ngày).

Vì thời gian hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình

$$\frac{210}{x - 5} - \frac{210}{x} = 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{210x - 210(x - 5)}{x(x - 5)} = \frac{7x(x - 5)}{x(x - 5)}$$

$$\Leftrightarrow 210(x - x + 5) = 7x(x - 5)$$

$$\Leftrightarrow 210 \cdot 5 = 7x^2 - 35x$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 35x - 1050 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 150 = 0.$$

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-150) = 625 > 0, \sqrt{\Delta} = 25$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x = \frac{5 + 25}{2} = 15 \text{ (tm)} \\ x = \frac{5 - 25}{2} = -10 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy theo dự định ban đầu, người đó trồng được 15 cây mỗi ngày.

Câu 23. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B trên quãng đường 100 km. Khi từ B về A người đó đã giảm vận tốc 10 km/h so với lúc đi nên thời gian về nhiều hơn thời gian lúc đi là 30 phút. Tính vận tốc của người lúc đi.

Lời giải

$$\text{Đổi } 30 \text{ phút} = \frac{1}{2} \text{ giờ}$$

Gọi x (km/h) là vận tốc của người đó lúc đi (ĐK: $x > 10$)

Vận tốc của người đó lúc về là $x - 10$ (km/h)

$$\text{Thời gian đi từ A đến B là: } \frac{100}{x} \text{ (h)}$$

$$\text{Thời gian từ B về đến A là: } \frac{100}{x - 10} \text{ (h)}$$

$$\text{Theo đề bài ta có phương trình } \frac{100}{x - 10} - \frac{100}{x} = \frac{1}{2}$$

Biến đổi đưa về phương trình $x^2 - 10x - 2000 = 0$

$$\text{Giải phương trình ta được } \begin{cases} x_1 = 50 \text{ (nhân)} \\ x_2 = -40 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của người đó lúc đi là: 50 km/h

Câu 24. (ts Điện Biên 2022-2023) Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid - 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?

Lời giải

Gọi số kiện khẩu trang mỗi ngày mà tổ dự định phải làm là x (kiện khẩu trang, $x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang theo dự định là $\frac{120}{x}$ (ngày)

Số kiện khẩu trang làm thực tế mỗi ngày là $x + 5$ (kiện)

Thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang thực tế là $\frac{120}{x+5}$ (ngày).

Vì tổ hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = 2 \Leftrightarrow \frac{120(x+5)}{x(x+5)} - \frac{120x}{x(x+5)} = \frac{2x(x+5)}{x(x+5)}$$

$$\Rightarrow 120x + 600 - 120x = 2x^2 + 10x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 600 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$$

$$\text{Tính được } \Delta = 1225 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \text{ (tm)} \\ x_2 = -20 \text{ (ko tm)} \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi tổ phải làm 15 kiện khẩu trang mỗi ngày.

Câu 25. (ts Đắc Nông 2022-2023) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Thành phố Gia Nghĩa lên kế hoạch xét nghiệm Covid-19 cho 1000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 50 người. Vì thế, việc xét nghiệm hoàn thành sớm hơn kế hoạch 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ thành phố Gia Nghĩa xét nghiệm được bao nhiêu người.

Lời giải

Gọi x là số người xét nghiệm trong mỗi giờ theo kế hoạch (điều kiện $x \in \mathbb{N}$, đơn vị: người)

Khi đó thời gian hoàn thành theo dự định là: $\frac{1000}{x}$ (giờ)

Thực tế, số người xét nghiệm trong mỗi giờ là: $x + 50$ (người)

Thời gian khi thực hiện là: $\frac{1000}{x+50}$ (giờ)

Thời gian khi thực hiện xét nghiệm ít hơn thời gian theo kế hoạch là 1 giờ

$$\text{Ta có PT: } \frac{1000}{x} - \frac{1000}{x+50} = 1 \Leftrightarrow \frac{1000(x+50) - 1000x}{x(x+50)} = \frac{x(x+50)}{x(x+50)}$$

$$\Leftrightarrow 50000 = x(x+50) \Leftrightarrow x^2 + 50x - 50000 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = 25^2 + 50000 = 50625; \sqrt{\Delta'} = 225$$

$$x_1 = -25 - 225 = -250 \text{ (loại)}$$

$$x_1 = -25 + 225 = 200 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi giờ xét nghiệm được 200 người.

Câu 26. (ts Khánh Hòa 2022-2023) Nhằm đáp ứng nhu cầu sử dụng khẩu trang chống dịch COVID-19, theo kế hoạch, 1 tổ sản xuất của một nhà máy dự định làm 720000 khẩu trang. Do áp dụng kĩ thuật mới nên I đã sản xuất vượt kế hoạch 15% và tổ II vượt kế hoạch 12%, vì vậy họ đã làm được 819000 khẩu trang. Hỏi theo kế hoạch số khẩu trang của mỗi tổ sản xuất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số khẩu trang tổ I sản xuất theo kế hoạch.

Gọi y là số khẩu trang tổ II sản xuất theo kế hoạch.

(Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}; 0 < x, y < 720000$)

Theo dự định: $x + y = 720000$

Theo thực tế:

Số khẩu trang tổ I làm được: $115\%.x$ hay $1.15.x$ (khẩu trang)

Số khẩu trang tổ II làm được: $112\%.y$ hay $1.12.y$ (khẩu trang)

Ta có phương trình $1,15.x + 1,12.y = 819000$

Ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 720000 \\ 1,15.x + 1,12.y = 819000 \end{cases}$$

Giải tìm được
$$\begin{cases} x = 420000 \\ y = 300000 \end{cases}$$
 (Nhận)

Vậy theo kế hoạch tổ I sản xuất 420000 khẩu trang, tổ II sản xuất 300000 khẩu trang

Câu 27. (ts Vĩnh Long 2022-2023) Một xe máy và một ô tô cùng khởi hành đi từ thành phố A đến thành phố B cách nhau 120 km. Vì vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 10 km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của xe máy.

Lời giải

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc của ô tô là $x + 10$ (km/h)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là: $\frac{120}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đi từ A đến B là: $\frac{120}{x + 10}$ (h)

Vì ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút = $\frac{3}{5}$ (h) nên ta có phương trình

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x + 10} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{600(x + 10)}{5x(x + 10)} - \frac{600x}{5x(x + 10)} = \frac{3x(x + 10)}{5x(x + 10)}$$

$$\Rightarrow 600x + 6000 - 600x = 3x^2 + 30x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 30x - 6000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 40)(x + 50) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 40 = 0 \\ x + 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40(tm) \\ x = -50(ktm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 40 (km/h)

Câu 28. (ts Ha Nam 2022-2023) Lớp 9A giao cho An đi mua bánh và kẹo để tổ chức liên hoan. An mua tất cả 15 hộp bánh và 5 túi kẹo với số tiền phải trả là 850 nghìn đồng. Biết rằng, giá mỗi hộp bánh là như nhau, giá mỗi túi kẹo là như nhau và giá một hộp bánh hơn giá một túi kẹo là 10 nghìn đồng. Tính giá tiền để mua một hộp bánh và giá tiền để mua một túi kẹo.

Lời giải

Gọi giá tiền một hộp bánh là: x nghìn đồng.

Gọi giá tiền một túi kẹo là: y nghìn đồng (điều kiện: $x, y > 0$)

$$\text{Theo bài ra ta có: } \begin{cases} 15x + 5y = 850 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 5y = 850 \\ 5x - 5y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x = 900 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 35 \end{cases}$$

Vậy giá tiền để mua một hộp bánh là: 45 nghìn đồng.

Giá tiền để mua một túi kẹo là 35 nghìn đồng.

Câu 29. (ts Bình Phước 2022-2023) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng là $6m$. Tính chiều rộng và chiều dài khu vườn, biết diện tích khu vườn là $280m^2$.

Lời giải

Tính chiều rộng và chiều dài khu vườn:

Gọi kích thước chiều rộng khu vườn hình chữ nhật là $x(m)$, $x > 0$

Chiều dài khu vườn có kích thước $x + 6(m)$

Khu vườn có diện tích là $280m^2$ nên ta có phương trình

$$x(x + 6) = 280 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 280 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \text{ (th? a)} \\ x = -20 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$x(x + 6) = 280 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 280 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \text{ (thỏa mãn } x > 0) \\ x = -20 \text{ (không thỏa mãn } x > 0) \end{cases}$$

Vậy khu vườn có chiều rộng là $14m$ và chiều dài là $20m$.

Câu 30. (ts Cao Bằng 2022-2023) Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ thành phố Cao Bằng đến huyện Bảo Lạc, quãng đường dài 135 km. Biết rằng vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 9 km/h và ô tô đến huyện Bảo Lạc trước xe máy 45 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) (điều kiện: $x > 0$).

Khi đó vận tốc của ô tô là: $x + 9$ (km/h).

Thời gian Xe máy đi từ Cao Bằng đến Bảo Lạc là: $\frac{135}{x}$ (giờ).

Thời gian Ô tô đi từ Cao Bằng đến Bảo Lạc là: $\frac{135}{x + 9}$ (giờ).

Vì Ô tô đến Bảo lạc trước xe máy 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{135}{x} - \frac{135}{x + 9} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 135.4(x + 9) - 135.4x = 3x(x + 9)$$

$$\Leftrightarrow 540(x + 9) - 540x = 3x^2 + 27x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 27x - 4860 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x - 1620 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-36)(x+45) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \text{ (tm)} \\ x = -45 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vận tốc của xe máy là 36(km/h); vận tốc của ô tô là 45(km/h).

Câu 31. (ts Ninh Bình 2022-2023) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Theo kế hoạch, một xưởng may phải may 280 bộ quần áo. Khi thực hiện, mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn 5 bộ quần áo so với số bộ phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế xưởng đã hoàn thành công việc sớm một ngày so với kế hoạch. Hỏi theo kế hoạch ban đầu, mỗi ngày xưởng phải may bao nhiêu bộ quần áo?

Lời giải

Gọi số bộ quần áo mỗi ngày xưởng phải may theo kế hoạch x (bộ, $x \in N^*, x < 280$).

Thực tế, số bộ quần áo mỗi ngày xưởng phải may là $x+5$ (bộ).

Thời gian hoàn thành công việc của xưởng theo kế hoạch là : $\frac{280}{x}$ (ngày)

Thời gian hoàn thành công việc của xưởng thực tế là : $\frac{280}{x+5}$ (ngày)

Thực tế, xưởng hoàn thành công việc trước kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{280}{x} - \frac{280}{x+5} = 1 \Leftrightarrow \frac{280(x+5) - 280x}{x(x+5)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{280x+1400 - 280x}{x^2+5x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1400}{x^2+5x} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 1400 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 1400 = 0 \quad (1)$$

#Cách 1:

$$\Delta = 5^2 - 4.1.(-1400) = 5625 > 0$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5625}}{2.1} = 35 \text{ (thoả mãn)}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{5625}}{2.1} = -40 \text{ (loại)}$$

#Cách 2:

$$x^2 + 5x - 1400 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 35x + 40x - 1400 = 0 \Leftrightarrow x(x-35) + 40(x-35) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-35)(x+40) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-35=0 \\ x+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=35 & \text{(t/m)} \\ x=-40 & \text{(loại)} \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may 35 bộ quần áo.

Câu 32. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 12 giờ. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi khi làm riêng, mỗi đội hoàn thành công việc đó trong bao lâu ?

Lời giải

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian hoàn thành công việc của hai đội khi làm riêng, $x > 0, y > 0$.

Suy ra trong một giờ đội thứ nhất hoàn thành được $\frac{1}{x}$ công việc, đội thứ hai hoàn thành được

$\frac{1}{y}$ công việc.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 7 \\ \frac{12}{y+7} + \frac{12}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 7 \\ y = 21 \\ y = -4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \end{cases}$$

Vậy khi làm riêng thời gian hoàn thành của đội thứ nhất và đội thứ hai lần lượt là 28 giờ và 21 giờ.

Câu 33. (ts Lào Cai 2022-2023) Hai ô tô xuất phát cùng một thời điểm từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc mỗi ô tô không đổi. Sau 1 giờ quãng đường đi được của ô tô thứ nhất nhiều hơn quãng đường của ô tô thứ hai là 5 km. Quãng đường đi được của ô tô thứ hai sau 3 giờ nhiều hơn quãng đường đi được của ô tô thứ nhất sau 2 giờ là 35 km. Tính vận tốc mỗi ô tô.

Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất và ô tô thứ hai là x (km/h), y (km/h), ($x > 0, y > 0$).

Sau 1 giờ quãng đường đi được của ô tô thứ nhất nhiều hơn quãng đường của ô tô thứ hai là 5 km nên ta có phương trình:

$$x - y = 5 \quad (1).$$

Quãng đường đi được của ô tô thứ hai sau 3 giờ nhiều hơn quãng đường đi được của ô tô thứ nhất sau 2 giờ là 35 km nên có phương trình

$$3y - 2x = 35 \Leftrightarrow -2x + 3y = 35 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + 3y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ -2x + 3y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \text{ (TMĐK)} \\ y = 45 \text{ (TMĐK)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là 50 km/h, vận tốc của ô tô thứ hai là 45 km/h

Câu 34. (ts Bến Tre 22.23 2022-2023) Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 4,35 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 4,36 triệu đồng. Nếu chưa kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng?

Lời giải

Gọi số tiền phải trả cho loại hàng thứ nhất (chưa kể thuế VAT) là x (triệu đồng) ($\text{ĐK} : x > 0$)

Gọi số tiền phải trả cho loại hàng thứ hai (chưa kể thuế VAT) là y (triệu đồng) ($\text{ĐK} : y > 0$)

Vì một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 4,35, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai nên ta có phương trình:

$$1,1x + 1,08y = 4,35 \quad (1).$$

Vì nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 4,36 triệu đồng, nên ta có phương trình

$$1,09x + 1,09y = 4,36 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1,1x + 1,08y = 4,35 \\ 1,09x + 1,09y = 4,36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,1x + 1,08y = 4,35 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,1x + 1,08(4 - x) = 4,35 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,1x + 4,32 - 1 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,02x = 0,03 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 (tm) \\ y = 4 - 1,5 = 2,5 (tm) \end{cases}$$

Vậy số tiền phải trả cho loại hàng thứ nhất (chưa kể thuế VAT) là 1.5 triệu đồng và số tiền phải trả cho loại hàng thứ hai (chưa kể thuế VAT) là 2.5 triệu đồng.

Câu 35. (48 . Đồng tháp - 2022) Một chiếc xe máy đi từ A đến B, quãng đường dài 95 km. Sau khi xe máy xuất phát 1 giờ 30 phút, một chiếc xe ô tô bắt đầu đi từ B về A. Hai xe gặp tại địa điểm C cách A là 70 km. Tính vận tốc mỗi xe, biết rằng mỗi giờ xe ô tô đi nhanh hơn xe máy 15 km (giả định vận tốc của hai xe là không đổi trong suốt quá trình di chuyển).

Lời giải

Gọi x (km/h) (với $x > 0$) là vận tốc xe máy.

Vận tốc của xe ô tô là $x + 15$ (km/h).

Thời gian xe máy di chuyển từ A đến C là $\frac{70}{x}$ (h).

Thời gian xe ô tô chuyển từ B đến C là $\frac{25}{x + 15}$ (h).

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\frac{70}{x} - \frac{25}{x + 15} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(45x + 1050) = 3x(x + 15)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 45x - 2100 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 15x - 700 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 (n) \\ x = -20 (l) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 35 km/h.

Vận tốc của xe ô tô là 50 km/h.

Câu 36. (ts Tây Ninh 2022-2023) Căn cứ diễn biến mực nước hồ Dầu Tiếng và tình hình khí tượng thủy văn trên lưu vực, để chủ động phòng chống lũ cho công trình và khu vực hạ du, Công ty khai thác thủy lợi hồ Dầu Tiếng dự định xả một lượng nước ở hồ với lưu lượng 15 triệu m^3 trong một ngày. Do tình hình thời tiết có chiều hướng xấu Công ty đã quyết định điều chỉnh lưu lượng xả lên 20 triệu m^3 mỗi ngày nên đã hoàn thành công việc sớm hơn thời gian dự kiến 2 ngày. Hỏi Công ty đã xả bao nhiêu m^3 nước?

Lời giải

Gọi x (triệu m^3) là lượng nước công ty đã xả ra. Điều kiện: $x > 20$

Thời gian xả nước theo dự định $\frac{x}{15}$ (ngày)

Thời gian xả nước theo tình hình thực tế $\frac{x}{20}$ (ngày)

Do công ty điều chỉnh lưu lượng xả mỗi ngày nên đã hoàn thành công việc sớm hơn dự kiến 2 ngày, ta có phương trình

$$\frac{x}{15} - \frac{x}{20} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 120 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy lượng nước công ty đã xả ra là 120 triệu m^3

Câu 1. (ts Quảng Bình 2022-2023) Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y + 3xy = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức Côsi, với $x, y > 0$ ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. (Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$).

Suy ra: $x + y + 3xy \geq 2\sqrt{xy} + 3xy$.

$$\Rightarrow 5 \geq 2\sqrt{xy} + 3xy \quad (\text{vì theo đề bài: } x + y + 3xy = 5)$$

$$\Leftrightarrow 3xy + 2\sqrt{xy} - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3xy - 3\sqrt{xy} + 5\sqrt{xy} - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{xy}(\sqrt{xy} - 1) + 5(\sqrt{xy} - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{xy} - 1)(3\sqrt{xy} + 5) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} - 1 \leq 0 \quad (\text{vì } x, y > 0 \text{ nên } \sqrt{xy} > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{xy} + 5 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < xy \leq 1.$$

Ta có:

$$P = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$= (5 - 3xy)^2 - 2xy \quad (\text{vì } x + y + 3xy = 5 \text{ nên } x + y = 5 - 3xy)$$

$$= 25 - 30xy + (3xy)^2 - 2xy = (3xy)^2 - 32xy + 25$$

$$= (3xy)^2 - 18xy + 9 - 14xy + 16 = (3xy - 3)^2 - 14xy + 16.$$

$$\text{Vì } 0 < xy \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} (3xy - 3)^2 \geq 0 \\ -14xy \geq -14 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } P = (3xy - 3)^2 - 14xy + 16 \geq 0 - 14.1 + 16 = 2.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} (3xy - 3)^2 = 0 \\ -14xy - 14 \end{cases} \Leftrightarrow xy = 1 \quad (\text{thỏa mãn } 0 < xy \leq 1).$$

Kết hợp các điều kiện: $x, y > 0$; $x + y + 3xy = 5$; $x = y$ và ta có: $x = y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2$ khi $x = y = 1$.

Câu 2. (ts Thái Bình 2022-2023) Cho các số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2022$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + ca + 2a^2}$

Lời giải

Ta có:

$$4(2a^2 + ab + 2b^2) = 5(a^2 + 2ab + b^2) + 3(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 5(a+b)^2 + 3(a-b)^2 \geq 5(a+b)^2$$

Vì a, b là các số dương nên:

$$2\sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} \geq \sqrt{5}(a+b) \Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b) \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(b+c) \quad (2) \text{ Dấu bằng xảy ra khi } b = c$$

$$\sqrt{2c^2 + ca + 2a^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+c) \quad (3) \text{ Dấu bằng xảy ra khi } c = a$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có:

$$\sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + ca + 2a^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}.2(a+b+c) = 2022\sqrt{5}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 2022 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 674$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là: $2022\sqrt{5}$ khi $a = b = c = 674$

Câu 3. (ts BẮC NINH 2022-2023)

1. Chứng minh rằng nếu tất cả các cạnh của một tam giác luôn nhỏ hơn 2 thì diện tích của tam giác đó nhỏ hơn $\sqrt{3}$.

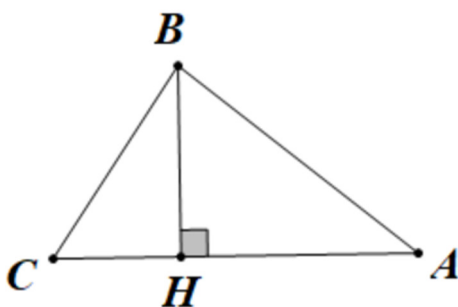
2. Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c + 2022 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2}$$

$$P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2}.$$

Lời giải

1. Chứng minh rằng nếu tất cả các cạnh của một tam giác luôn nhỏ hơn 2 thì diện tích của tam giác đó nhỏ hơn $\sqrt{3}$.



Giả sử \hat{A} là góc nhỏ nhất của tam giác ABC

$$\Rightarrow \hat{A} \leq 60^\circ \Rightarrow \sin A \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kẻ đường cao BH.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BH.AC = \frac{1}{2} AB.AC \sin A < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \text{ (đpcm)}$$

2. Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c + 2022 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Phương trình $ax^2 + bx + c + 2022 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm, ta có $a + b + c + 2022 = 0 \Leftrightarrow a + b + c = -2022$

Ta có: $3a^2 - 2ab + 3b^2 = (a + b)^2 + 2(a - b)^2 \geq (a + b)^2$

$$\sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} \geq |a + b|$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} \geq |b + c|$$

$$\sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2} \geq |c + a|$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$P \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|$$

$$P \geq |a + b + b + c + c + a|$$

$$P \geq 2|a + b + c|$$

$$P \geq 2|-2022|$$

$$P \geq 4044$$

$$\text{GTNN } P = 4044 \text{ tại } a = b = c = \frac{-2022}{3}$$

Câu 4. (ts Lạng Sơn 2022-2023) Cho các số thực a, b, c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}.$$

Lời giải

+) Với các số thực a, b, c dương, Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$P = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{a}{2(a+c)}} + 2\sqrt{\frac{b}{b+c} \cdot \frac{b}{b+a}} + \sqrt{\frac{c}{2(c+a)} \cdot \frac{2c}{c+b}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{a+b} + \frac{a}{2(a+c)} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2(c+a)} + \frac{2c}{c+b} \right)$$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}$$

$$= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+b} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{a+c} + \frac{c}{c+a} \right)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{9}{4}.$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{9}{4}, \text{ suy ra } \text{Max}P = \frac{9}{4} \text{ khi } \begin{cases} \frac{2a}{a+b} = \frac{a}{2(a+c)} \\ \frac{b}{b+c} = \frac{b}{b+a} \\ \frac{c}{2(c+a)} = \frac{2c}{c+b} \end{cases} \Leftrightarrow a = c = \frac{b}{7}.$$

Câu 5. (ts Nam Định 2022-2023) Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) - xyz$.

Lời giải

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\begin{cases} x \geq y \\ x \geq z. \end{cases}$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x + y - z > 0 \\ z + x - y > 0. \end{cases}$$

+) Nếu $y + z - x \leq 0$

Khi đó ta có $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq 0$

$$\Rightarrow P < 0.$$

+) Nếu $y + z - x > 0$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} \sqrt{(x + y - z)(y + z - x)} \leq y \\ \sqrt{(z + x - y)(y + z - x)} \leq z \\ \sqrt{(x + y - z)(z + x - y)} \leq x \end{cases} \Rightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz$$

$$\Rightarrow P \leq 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng 0 khi $x = y = z$.

Câu 6. (ts THANH HÓA 2022-2023) Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$xy + yz + zx = 3xyz. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } Q = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} + \frac{3}{2}xyz.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ngược dấu, ta có:

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{x+xy^2-xy^2}{1+y^2} = \frac{x(1+y^2)-xy^2}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2} \geq x - \frac{xy}{2}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}$$

$$\frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}$$

Cộng vế với vế và kết hợp với giả thiết, ta được:

$$Q = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} + \frac{3}{2}xyz \geq x+y+z - \frac{xy+yz+zx}{2} + \frac{3}{2}xyz$$

$$\Rightarrow Q = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} + \frac{3}{2}xyz \geq x+y+z \quad (1)$$

Mặt khác, ta lại có: $xy + yz + zx = 3xyz \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

Mà: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$

$$= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

$$\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\Rightarrow 3(x+y+z) \geq 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $3Q \geq 3(x+y+z) \geq 9 \Rightarrow Q \geq 3$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Vậy $\min Q = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 7. (ts Vinh Phúc 2022-2023) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{yz}{x^2 + xyz} + \frac{zx}{y^2 + xyz} + \frac{xy}{z^2 + xyz} \geq \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z}$.

Lời giải

$$\frac{yz}{x^2 + xyz} = \frac{yz}{x(x+y+z)} = \frac{yz}{x[x(x+y+z) + yz]} = \frac{yz}{x(x+y)x+z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số

$$\frac{yz}{x^2 + xyz} + \frac{x+y}{8xy} + \frac{x+z}{8xz} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{64x^3}} = \frac{3}{4x}$$

$$\Rightarrow \frac{yz}{x^2 + xyz} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{3}{4x}$$

Tương tự

$$\frac{xz}{y^2 + xyz} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{3}{4y}$$

$$\frac{xy}{z^2 + xyz} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{3}{4z}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$\frac{yz}{x^2 + xyz} + \frac{2x}{y^2 + xyz} + \frac{xy}{z^2 + xyz} \geq \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{yz}{x^2 + xyz} = \frac{x+y}{8xy} = \frac{x+z}{8xz} \\ \frac{xz}{y^2 + xyz} = \frac{y+z}{8yz} = \frac{y+x}{8xy} \\ \frac{xy}{z^2 + xyz} = \frac{z+x}{8xz} = \frac{z+y}{8yz} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Câu 8. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho các số a, b thỏa mãn $(1+a)(1-b) \geq \frac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = a^2 + 2b^2 + b$

Lời giải

Với mọi số thực x, y ta có BĐT $\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

Áp dụng BĐT trên. Ta có $(1+a)(1-b) \leq \frac{(a-b+2)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b+2)^2}{4} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow a-b+2 \geq 3 \Leftrightarrow a \geq b+1.$$

Thay vào P ta được : $P = a^2 + 2b^2 + b \geq (b+1)^2 + 2b^2 + b$

Ta có $(b+1)^2 + 2b^2 + b = b^2 + 2b + 1 + 2b^2 + b = 3b^2 + 3b + 1 = 3\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$

Từ đó suy ra $P \geq \frac{1}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi $b = -\frac{1}{2}; a = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$

Câu 9. (ts Hải Dương 2022-2023) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \frac{2022}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} \sqrt{a} = x \\ \sqrt{b} = y \\ \sqrt{c} = z \end{cases}$ khi đó $x > 0; y > 0; z > 0$ và $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$

$$T = x + y + z + \frac{2022}{x + y + z}$$

Ta có: $3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = \frac{(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2}{xyz} \geq \frac{xy^2z + xyz^2 + x^2yz}{xyz} = x + y + z$

Do đó, $0 < x + y + z \leq 3$

$$T = x + y + z + \frac{2022}{x + y + z} = \frac{2022}{x + y + z} + \frac{674}{3}(x + y + z) - \frac{671}{3}(x + y + z) \geq 2 \cdot \sqrt{2022 \cdot \frac{674}{3}} - \frac{671}{3} \cdot 3 = 677$$

Vậy GTNN của $T = 677$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 1$.

Câu 10. (ts Đắk Nông 2022-2023) Cho $P = \frac{4x^{4044} + 9x^{2022} + 6}{x^{2022} + 2}$. Tìm giá trị của x để biểu thức P đạt giá trị

nhỏ nhất.

Lời giải

Đặt $t = x^{2022} (t \geq 0)$ ta có

$$P = \frac{4t^2 + 9t + 6}{t + 2}$$

$$P = \frac{4(t+2)^2 - 7(t+2) + 4}{t + 2}$$

$$P = 4(t+2) + \frac{4}{t+2} - 7$$

$$P = t + 2 + \frac{4}{t+2} + 3(t+2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$t + 2 + \frac{4}{t+2} \geq 2\sqrt{(t+2)\frac{4}{t+2}} = 4 \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} t = 0(tm) \Rightarrow x = 0 \\ t = -4(ktm) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P \geq 4 + 3(0+2) - 7 = 3$$

Vậy Min $P = 3 \Leftrightarrow x=0$

Câu 11. (ts Ha Nam 2022-2023) Cho hai số a, b thỏa mãn $a + b \geq 1$ và $a > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{20a^2 + b}{4a} + 4b^2$.

Lời giải

Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= \frac{20a^2 + b}{4a} + 4b^2 = \frac{4a^2 - a + (a+b)}{4a} + (2b-1)^2 + 4(a+b) - 1 \geq \frac{4a^2 - a + 1}{4a} + 3 \\ &= a + \frac{1}{4a} + \frac{11}{4} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} + \frac{11}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Vậy $T_{\min} = \frac{15}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Cách 2:

Theo bài ra ta có: $a + b \geq 1 \Rightarrow b \geq 1 - a$

$$\begin{aligned} \text{TH1: } 1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1 \text{ thì: } T &= \frac{20a^2 - a + (a+b)}{4a} + 4b^2 \geq \frac{20a^2 - a + 1}{4a} + 4b^2 > \frac{20a - a + 1}{4a} \\ &= \frac{19}{4} + \frac{1}{4a} > \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

TH2: $1 - a \geq 0$ thì $b \geq 1 - a \Rightarrow b^2 \geq (1 - a)^2$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } T &\geq \frac{20a^2 + 1 - a}{4a} + 4(1 - a)^2 = 5a + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4} + 4a^2 - 8a + 4 = 4a^2 - 3a + \frac{1}{4a} + \frac{15}{4} \\ &= (2a - 1)^2 + \frac{(2a - 1)^2}{4a} + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4} \Rightarrow T \geq \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

So sánh cả hai trường hợp thì ta có $T_{\min} = 6$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Vậy $T_{\min} = 6$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Câu 12. (ts HÀ NỘI 2022-2023) Với các số thực không âm x và y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2$.

Xét $P^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = 4 + 3y^2 + 4xy$.

Do $x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow 3y^2 \geq 0; 4xy \geq 0$ nên $P^2 \geq 4 \Rightarrow P \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} y^2 = 0 \\ 4xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $MinP = 2$ khi $x = 2; y = 0$.

Câu 13. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$ và $a + b + 3 = ab$

Tìm GTLN của biểu thức $F = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{b} + \frac{1}{a^2 + b^2}$

Lời giải

Ta có $ab = a + b + 3 \geq 2\sqrt{ab} + 3 \Rightarrow (\sqrt{ab} + 1)(\sqrt{ab} - 3) \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{ab} - 3 \geq 0$ (do $\sqrt{ab} + 1 > 0$)

$\Rightarrow ab \geq 9 \Rightarrow a + b \geq 6$

Ta có $\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2ab} \leq \frac{1}{18}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{ab-3}{ab} = 1 - \frac{3}{ab} \geq 1 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{b} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{a^2 - 1}{a^2} + \frac{b^2 - 1}{b^2} \right) = 4 - 2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$

$\leq 4 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \leq 4 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{32}{9}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{b} \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Do đó $F = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{b} + \frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{18} = \frac{1 + 24\sqrt{2}}{18}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 3$

Vậy $F_{\max} = \frac{1 + 24\sqrt{2}}{18}$ khi $a = b = 3$.

Câu 14. (ts Hải Phòng 2022-2023) Cho a, b, c là các số dương : $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = \frac{a}{a + \sqrt{a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{c + ab}}$

Lời giải

Vì a, b, c là số dương, áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương a^2, bc ta có:

$$(a + b)(a + c) = ab + ac + a^2 + bc \geq ac + ab + 2a\sqrt{bc} = (\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a + b)(a + c)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{ab} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (1)$$

Tương tự:
$$\frac{b}{b + \sqrt{(b + c)(b + a)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (2)$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b + c)(b + a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \\ & \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1 \quad (4) \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a^2 = bc, b^2 = ac, c^2 = ab$

$$\text{Suy ra: } a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) } \Rightarrow \text{Max } P = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Câu 15. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Với các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ và $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 15$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Lời giải

Vì $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$

Đặt $x = a + 1; y = b + 1; z = c + 1 (a, b, c \geq 0)$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)^2 + 2(b + 1)^2 + 3(c + 1)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 2(a + 2b + 3c) = 9$$

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 2(a + 2b + 3c) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(a + b + c)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c) \geq 3$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq 1$$

$$\text{Mà } P = x + y + z = a + b + c + 3 \Rightarrow P \geq 4$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a = b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 4, khi $x = y = 1; z = 2$

Câu 16. (ts Ninh Bình 2022-2023) Biết a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Lời giải

#Cách 1:

$$a + b + c = 1, a, b, c > 0$$

$$\Rightarrow a = 1 - (b + c) = 1 - b - c$$

$$\Rightarrow a + bc = 1 - b - c + bc = (1 - b) - c(1 - b) = (1 - b)(1 - c)$$

$$= (a + b + c - b)(a + b + c - c) = (a + c)(a + b)$$

Chứng minh tương tự: $b + ac = (b + a)(b + c)$

$$c + ab = (c + a)(c + b)$$

Do đó

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} = \sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(b + c)(b + a)} + \sqrt{(c + a)(c + b)}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxky có

$$(a + b)(a + c) = \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \right] \cdot \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{c})^2 \right] \geq (\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{c})^2 = (a + \sqrt{bc})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a + b)(a + c)} \geq a + \sqrt{bc} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự $\sqrt{(b + a)(b + c)} \geq b + \sqrt{ac} \quad (2)$

$$\sqrt{(c + a)(c + b)} \geq c + \sqrt{ab} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta có:

$$\sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(b + a)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(c + b)} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ac} + \sqrt{c + ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + ca.$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \\ \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\ a + b + c = 1 \\ a, b, c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

#Cách 2:

$$a, b, c > 0, a + b + c = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$b + c \geq 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow a + b + c \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow 1 \geq a + 2\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow a \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} \Leftrightarrow a + bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc = (a + \sqrt{bc})^2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a + bc} \geq a + \sqrt{bc} \quad (*)$$

Chứng minh tương tự: $\sqrt{b + ac} \geq b + \sqrt{ac} \quad (**)$

$$\sqrt{c + ab} \geq c + \sqrt{ab} \quad (***)$$

Lấy vế cộng vế của (*); (**); (***) ta có:

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ac} + \sqrt{c + ab} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ac} + \sqrt{c + ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \\ a, b, c > 0 \end{cases}$$

Vậy $\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Câu 1. (ts Lào Cai 2022-2023) Chọn ngẫu nhiên một số trong các số tự nhiên từ 1 đến 10. Tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 5.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{1; 2; \dots; 10\}$

Suy ra $n\Omega = 10$

Gọi A là biến cố “Số được chọn chia hết cho 5”

Ta có: $A = \{5; 10\} \Rightarrow n(A) = 2$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Câu 2. (ts TP HCM 2022-2023) Đại hội Thể thao Đông Nam Á – SEA Games (South East Asian Games) là sự kiện thể thao được tổ chức 2 năm 1 lần với sự tham gia của các vận động viên trong khu vực Đông Nam Á. Việt Nam là chủ nhà của SEA Games 31 diễn ra từ ngày 12/5/2022 đến ngày 23/5/2022.



Ở môn bóng đá nam, một bảng đấu gồm có 5 đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?

b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Lời giải

a) Nếu có 5 đội tham gia thi đấu, mỗi đội phải đấu với 4 đội còn lại nên với 5 đội tham gia thì có $5.4 = 20$ trận đấu. Nhưng mỗi trận đấu có 2 đội tham gia nên tổng số trận đấu khi có 5 đội tham gia là $\frac{5.4}{2} = 10$ trận đấu.

b) Tổng số điểm của các đội là $10 + 9 + 6 + 4 + 0 = 29$ điểm.

Gọi x là số trận thắng – thua và y là số trận hòa.

Vì có 10 trận nên ta có: $x + y = 10(1)$

Mỗi trận thắng – thua có tổng số điểm là 3 và mỗi trận hòa có tổng số điểm là 2 nên ta có phương trình: $3x + 2y = 29$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $x = 9$ và $y = 1$.

Mỗi đội có 4 trận đấu với các đội còn lại mà đội A có 10 điểm tức đội A thắng 3 trận hòa 1 trận. Đội B có 9 điểm tức thắng 3 trận thua 1 trận. Đội C có 6 điểm tức thắng 2 trận thua 2 trận. Đội D có 4 điểm tức thắng 1 trận hòa 1 trận. Đội E không có điểm tức thua hết 4 trận. Vậy trận hòa là của đội A và đội D.

Câu 3. (ts Ninh Bình 2022-2023) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho $\frac{x-1}{x^2+1}$ là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

$$\Rightarrow A.(x+1) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x+1 \in \mathbb{Z}$. Khi đó nếu $A \in \mathbb{Z}$ thì $A.(x+1) \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } A.(x+1) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2 : (x^2+1) \Rightarrow x^2+1 \in U(2); U(2) = \{1; -1; 2; -2\}$$

Mà $x^2+1 \geq 1 \forall x$ nên $x^2+1 \in \{1; 2\}$

$$\Rightarrow x^2 \in \{0; 1\}.$$

+) Với $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (t/m $x \in \mathbb{Z}$)

+) Với $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ (t/m $x \in \mathbb{Z}$)

Thử lại, $x = 0; x = 1; x = -1$ thì $A \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x \in \{0; 1; -1\}$ thỏa mãn đề ra.

Câu 1. (ts HÀ NỘI 2022-2023) Quả bóng đá thường được sử dụng trong các trận thi đấu dành cho trẻ em từ 6 tuổi đến 8 tuổi có dạng một hình cầu với bán kính bằng 9,5cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng đó (lấy $\pi \approx 3,14$).



Lời giải

Diện tích bề mặt của quả bóng là:

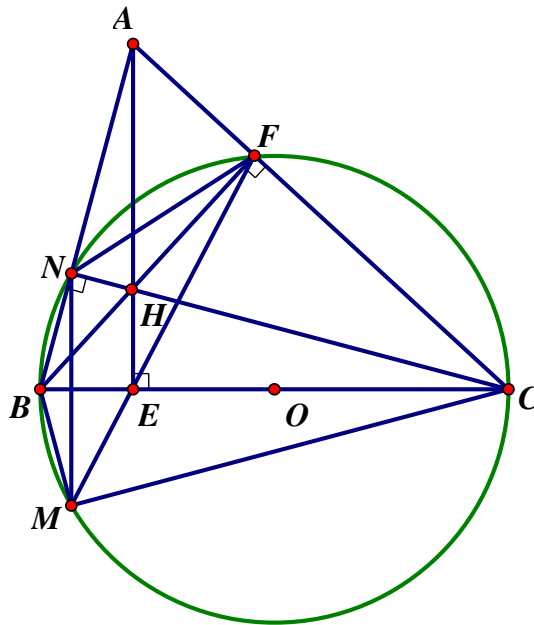
$$S = 4\pi R^2 \approx 4.3,14.9,5^2 = 1133,54 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích bề mặt của quả bóng là 1133,54 (cm²).

Câu 2. (ts An Giang 2022-2023) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AE , BF và CN cắt nhau tại H ($E \in BC$, $F \in AC$, $N \in AB$).

- a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.
- b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M . Chứng minh $BM = BN$.
- c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Lời giải



- a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp.

Ta có:

$$HF \perp AC \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{HFC} = 90^\circ$$

$$HE \perp BC \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{HEC} = 90^\circ$$

Xét tứ giác $CEHF$ có: $\widehat{HFC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau $\Rightarrow CEHF$ là tứ giác nội tiếp.

- b) Kéo dài FE cắt đường tròn đường kính BC tại M . Chứng minh $BM = BN$.

Ta có:

$$HN \perp AB \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{ANH} = 90^\circ$$

$$HF \perp AC(gt) \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ$$

Xét tứ giác $AFHN$ có: $\widehat{ANH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau
 $\Rightarrow AFHN$ là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{NFH} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung } HN \text{)} \quad (1)$$

Tứ giác $HECF$ nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HCE} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung } HE \text{)} \quad (2)$$

Ta có: $\widehat{BAE} = \widehat{NCB}$ (hai góc cùng phụ với \widehat{ABC}) $\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{HCE}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{NFH} = \widehat{HFE}$ hay $\widehat{NFB} = \widehat{BFM}$.

Xét (O) có: $\widehat{NFB} = \widehat{BFM}$:

$$\Rightarrow sd\widehat{BN} = sd\widehat{BM} \text{ (hai góc nội tiếp bằng nhau hai cung chắn bằng nhau).}$$

$$\Rightarrow BN = BM \text{ (hai cung chắn bằng nhau hai dây bằng nhau) (đpcm).}$$

c) Biết $AH = BC$. Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Xét hai tam giác vuông FAH và FBH ta có:

$$AH = BC \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{FAH} = \widehat{FBC} \text{ (vì cùng phụ với góc } \widehat{ACE} \text{)}$$

$$\text{Vậy } \triangle FAH = \triangle FBC$$

$$\Rightarrow FA = FB$$

Mặt khác tam giác AFB vuông có $FA = FB$ nên nó vuông cân

$$\text{Vậy } \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Câu 3. (ts Thái Bình 2022-2023)

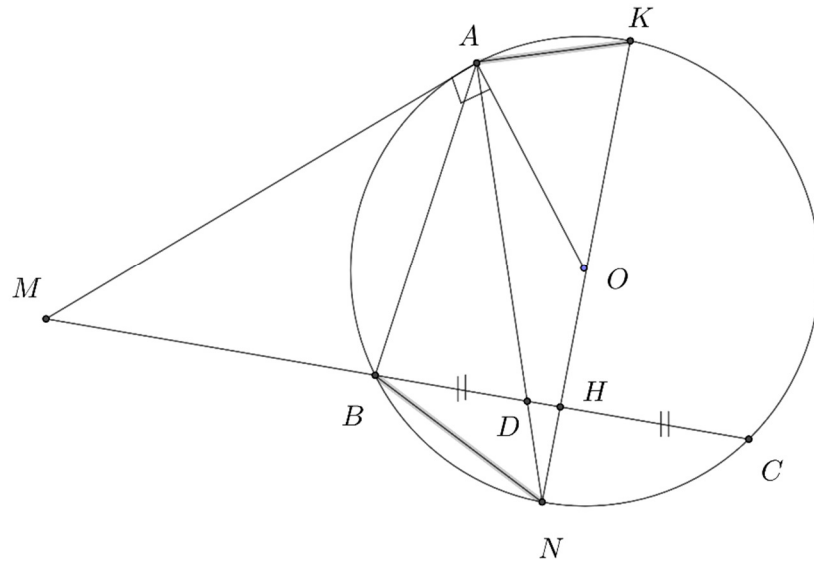
1. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M và C). Gọi H là trung điểm của BC . Đường thẳng OH cắt $(O; R)$ tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC

a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{NAB} = \widehat{NBD}$ và $NB^2 = NA \cdot ND$

c) Chứng minh rằng khi đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định, đồng thời cát tuyến MBC thay đổi, thì điểm D nằm trên đường tròn cố định.

Lời giải



1 a) Xét (O; R) có \widehat{KAN} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{KAN} = 90^\circ$
 Có BC là dây không đi qua tâm, H là trung điểm của BC, KN là đường kính của đường tròn (O; R). $\Rightarrow KN \perp BC \Rightarrow \widehat{KHN} = 90^\circ$

Tứ giác AKHD có $\widehat{KAN} + \widehat{KHD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

mà $\widehat{KAN}, \widehat{KHD}$ là hai góc đối diện

\Rightarrow Tứ giác AKHD là tứ giác nội tiếp

b) + Xét (O; R) có $KN \perp BC \Rightarrow N$ là điểm chính giữa cung BC

$\Rightarrow \widehat{BN} = \widehat{NC} \Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{NBC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau)

+ Xét $\triangle BND$ và $\triangle ANB$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BND} = \widehat{ANB} \\ \widehat{BAN} = \widehat{NBC} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BND \text{ đồng dạng } \triangle ANB \Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{BN}{ND} \Rightarrow NB^2 = NA \cdot ND$$

c) Tứ giác AKHD có $\widehat{ADH} + \widehat{AKH} = 180^\circ$ (hai góc đối nhau) (1)

Mà $\widehat{ADH} + \widehat{ADM} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) (2)

Nên $\widehat{AKH} = \widehat{ADM}$

Mặt khác $\widehat{AKH} = \widehat{MAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn \widehat{AN})

$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{ADM} \Rightarrow \triangle AMD$ cân tại M $\Rightarrow MA = MD$

Mà M, (O; R) cố định \Rightarrow tiếp tuyến MA cố định và độ dài MA không đổi

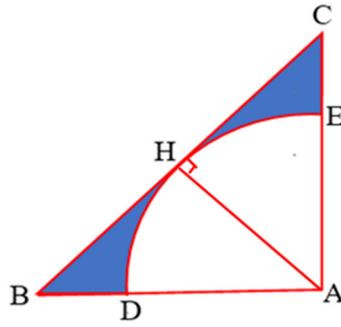
$\Rightarrow D$ thuộc đường tròn tâm M bán kính MA

2 . Hình trụ có chu vi đáy bằng 20π (cm) $\Rightarrow 2\pi R = 20\pi \Leftrightarrow R = 10$ (cm)

Thể tích của hình trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 7 = 700\pi$ (cm³)

Câu 4. (ts Nam Định 2022-2023)

1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = 4\text{cm}$. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC và vẽ cung tròn $(A; AH)$ cắt AB, AC lần lượt tại D, E (hình vẽ bên). Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ bên.



2) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với (O)

(M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua A cắt (O) tại hai điểm P, Q sao cho P nằm giữa A và Q , dây cung PQ không đi qua tâm O . Gọi I là trung điểm của đoạn PQ , J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và MN . Chứng minh rằng:

- a) Năm điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn và $\widehat{JIM} = \widehat{JIN}$.
- b) Tam giác AMP đồng dạng với tam giác AQM và $AP.AQ = AI.AJ$.

Lời giải

1) Diện tích tam giác ABC là $S_1 = \frac{1}{2}.AB.AC = 8\text{cm}^2$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\text{cm}$.

Ta có H là hình chiếu của A trên BC nên H là trung điểm của BC

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}\text{cm}.$$

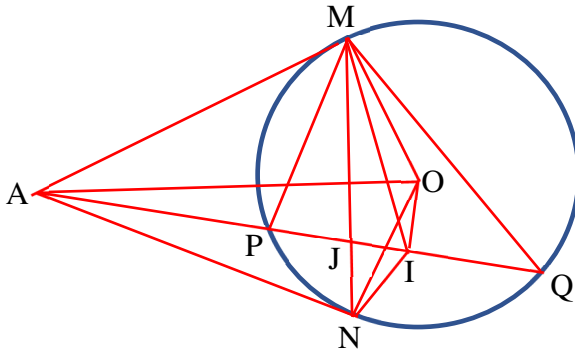
Xét $(A; AH)$ có $sđ\widehat{DHE} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

Nên diện tích hình quạt tròn tâm A tạo bởi hai bán kính AD, AE và cung \widehat{DHE} là

$$S_2 = \frac{1}{4}\pi AH^2 = 2\pi\text{cm}^2.$$

Diện tích phần tô đậm là $S = S_1 - S_2 = (8 - 2\pi)\text{cm}^2$.

2)



a)

Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{AIO} = 90^\circ$

Suy ra các điểm A, M, O, I, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO .

Xét đường tròn đường kính AO có $AM = AN \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{AN}$.

Suy ra $\widehat{JIM} = \widehat{JIN}$.

b) Xét hai tam giác AMP và tam giác AQM có \widehat{MAQ} chung và $\widehat{AMP} = \widehat{AQM}$ (hai góc cùng chắn cung \widehat{MP} của đường tròn (O)) Vậy $\Delta AMP \sim \Delta AQM$.

$$\Delta AMP \sim \Delta AQM \Rightarrow \frac{AM}{AQ} = \frac{AP}{AM} \Leftrightarrow AM^2 = AP \cdot AQ. \quad (1)$$

Xét hai tam giác AMJ và tam giác AIM có \widehat{MAJ} chung.

Tam giác AMN cân và tứ giác $AMIN$ nội tiếp nên $\widehat{AIM} = \widehat{ANM} = \widehat{AMN}$.

Do đó $\Delta AMJ \sim \Delta AIM$

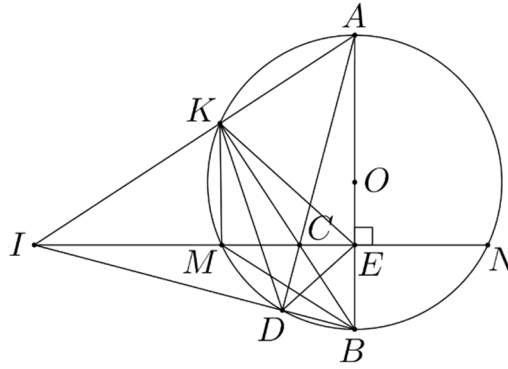
$$\Rightarrow AM^2 = AI \cdot AJ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AP \cdot AQ = AI \cdot AJ$

Câu 5. (ts BẮC NINH 2022-2023) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây MN cố định ($MN < 2R$). Kẻ đường kính AB vuông góc với dây MN tại E . Lấy điểm C thuộc dây MN (C khác M, N, E). Đường thẳng BC cắt $(O; R)$ tại điểm K (K khác B).

1. Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$.
3. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AK và MN ; D là giao điểm của hai đường thẳng AC và BI . Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của ΔDEK .

Lời giải



1. Chứng minh $AKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $AKCE$ có

$$\widehat{AKB} = 90^\circ \text{ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\widehat{AEC} = 90^\circ \text{ (Quan hệ giữa đường kính } AB \text{ và dây cung } MN, E \text{ là trung điểm } MN)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AKB} + \widehat{AEC} = 180^\circ$$

Mà $\widehat{AKB}, \widehat{AEC}$ là hai góc đối

Vậy tứ giác $AKCE$ nội tiếp.

2. Chứng minh $BM^2 = BK \cdot BC$.

Đường kính AB vuông góc với dây MN nên B là điểm chính giữa \widehat{MN}

$$\text{Suy ra } \widehat{BM} = \widehat{BN} \Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BMN} \text{ hay } \widehat{BKM} = \widehat{BMC}$$

Xét $\triangle BMC$ và $\triangle BKM$ có: \widehat{MBK} chung; $\widehat{BMC} = \widehat{BKM}$

$$\Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle BKM \text{ (góc-góc)}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow BM^2 = BK \cdot BC.$$

3. Chứng minh điểm C cách đều ba cạnh của $\triangle DEK$.

Ta có: $BK \perp AI$ (do $\widehat{AKB} = 90^\circ$); $IE \perp AB$ (do $AB \perp MN$) nên BK và IE là hai đường cao của $\triangle ABI \Rightarrow C$ là trực tâm của $\triangle ABI \Rightarrow AD$ là đường cao của $\triangle ABI \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$

$$\widehat{AKB} = \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow \text{Tứ giác } ABDK \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{ABK} \text{ và } \widehat{DKB} = \widehat{DAB}$$

Tứ giác $AKCE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CKE} = \widehat{CAE}$ hay $\widehat{BKE} = \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{DKB} = \widehat{BKE} \Rightarrow KB$ là tia phân giác của \widehat{DKE} (1)

$$\widehat{ADB} + \widehat{BEC} = 180^\circ \Rightarrow \text{Tứ giác } BDCE \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBE} \text{ hay } \widehat{ADE} = \widehat{ABK}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{ADE} \Rightarrow DA \text{ là tia phân giác của } \widehat{EDK} \text{ (2)}$$

Mà KB cắt DA tại C , kết hợp với (1) và (2) suy ra C là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEK$

Vậy điểm C cách đều ba cạnh của $\triangle DEK$.

Câu 6. (ts Quảng Trị 2022-2023) Cho đường tròn (O) bán kính R , đường kính AB , tiếp tuyến Ax . Trên Ax lấy điểm P sao cho $AP > R$. Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến thứ hai kẻ từ P của đường tròn (O) .

a) Chứng minh $AOMP$ là tứ giác nội tiếp.

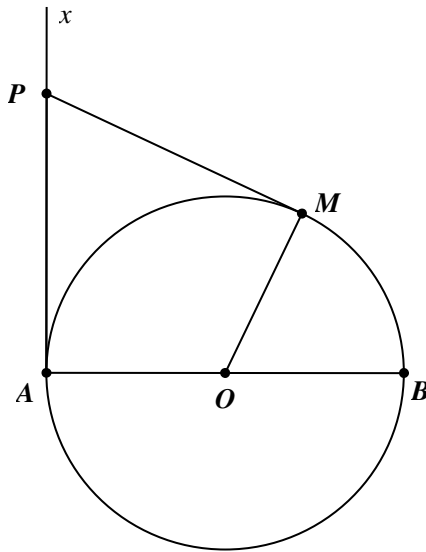
b) Chứng minh $BM \parallel OP$.

c) Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt BM tại N , OM cắt PN tại J .

i) Chứng minh $AONP$ là hình chữ nhật.

ii) Gọi K là tâm của hình chữ nhật $AONP$ và I là giao điểm của PM và ON . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh $AOMP$ là tứ giác nội tiếp.

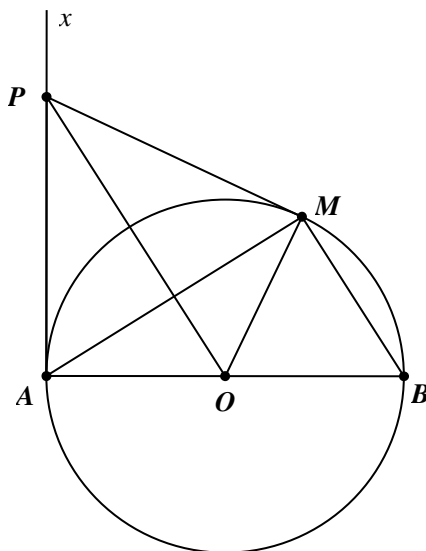
Ta có $\begin{cases} PA \perp OA \\ PM \perp OM \end{cases}$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle OAP = 90^\circ \\ \angle OMP = 90^\circ \end{cases}$$

Xét tứ giác $AOMP$ có: $\angle OAP + \angle OMP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

\Rightarrow tứ giác $AOMP$ nội tiếp (Dhnb)

b) Chứng minh $BM \parallel OP$.



Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BM \perp AM$;

Mặt khác ta có: $PA = PM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

\Rightarrow Điểm P thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AM (1)

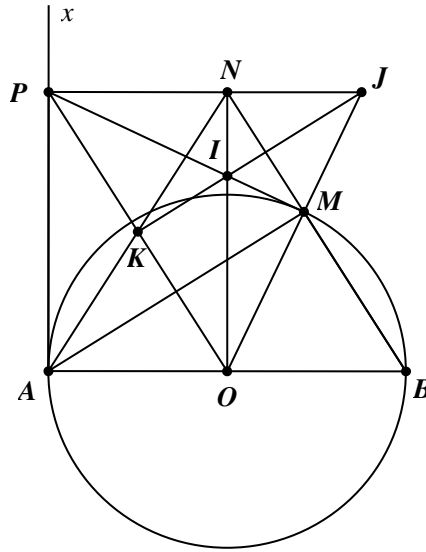
Lại có $OA = OM (= R)$

\Rightarrow Điểm O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AM (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OP$ là trung trực của $AM \Rightarrow OP \perp AM \Rightarrow BM \parallel OP$ (cùng vuông góc với AM).

c) Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt BM tại N , OM cắt PN tại J .

i) Chứng minh $AONP$ là hình chữ nhật.



Xét $\triangle AOP$ và $\triangle OBN$ có:

$$\widehat{PAO} = \widehat{NOB} (= 90^\circ);$$

$$OA = OB \text{ (bán kính (O))};$$

$$\widehat{AOP} = \widehat{OBN} \text{ (hai góc đồng vị, } BM \parallel OP);$$

$$\Rightarrow \triangle AOP = \triangle OBN \text{ (g.c.g)} \Rightarrow OP = BN;$$

Tứ giác $OBNP$ có $OP = BN$ (chứng minh trên); $OP \parallel BN$ ($OP \parallel BM$) \Rightarrow tứ giác $OBNP$ là hình bình hành $\Rightarrow OB \parallel NP$; $OB = NP \Rightarrow OA \parallel NP$; $OA = NP \Rightarrow$ tứ giác $AONP$ là hình bình hành có $\widehat{OAP} = 90^\circ \Rightarrow AONP$ là hình chữ nhật.

ii) Gọi K là tâm của hình chữ nhật $AONP$ và I là giao điểm của PM và ON . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Vì $AONP$ là hình chữ nhật $\Rightarrow ON \perp PJ$; Lại có $PM \perp OJ$ (tính chất của tiếp tuyến) $\Rightarrow ON, PM$ là hai đường cao của $\triangle OPJ$ cắt nhau tại $I \Rightarrow I$ là trực tâm của $\triangle OPJ \Rightarrow JI$ là đường cao của $\triangle OPJ$ (1);

Mặt khác vì K là tâm của hình chữ nhật $AONP \Rightarrow K$ là trung điểm của $OP \Rightarrow JK$ là trung tuyến của $\triangle OPJ$ (2);

Xét $\triangle OPJ$ có: $\widehat{OPJ} = \widehat{POA}$ (hai góc so le trong, $OA \parallel NP$), mà $\widehat{POA} = \widehat{POJ}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{OPJ} = \widehat{POJ} \Rightarrow \triangle OPJ$ cân tại J (3);

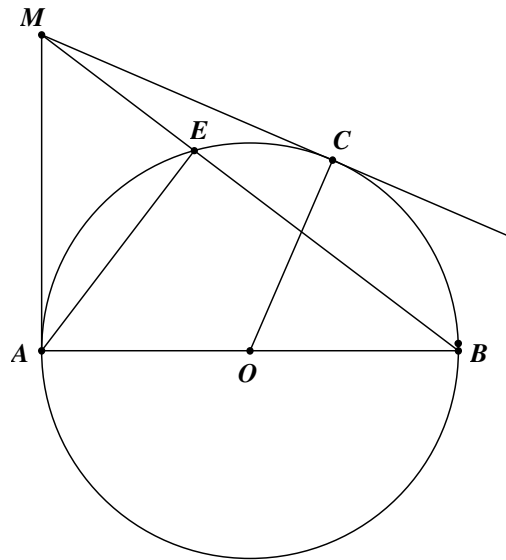
Từ (1), (2) và (3) ta có $IJ \equiv JK \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

Câu 7. (ts **Bến Tre 22.23 2022-2023**) Trên đường tròn (O) đường kính AB , lấy điểm E (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A . Đường thẳng BE cắt tiếp tuyến đó tại M . Từ điểm M kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại điểm C (C là tiếp điểm, $C \neq A$). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AOCM$ là tứ giác nội tiếp.

b) $EA^2 = EM \cdot EB$.

Lời giải



a) Tứ giác $AOCM$ là tứ giác nội tiếp

Vì MA là tiếp tuyến của (O) tại A nên $\widehat{OAM} = 90^\circ$

Vì MC là tiếp tuyến của (O) tại C nên $\widehat{OCM} = 90^\circ$

Tứ giác $AOCM$ có: $\widehat{OAM} + \widehat{OCM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

mà hai góc này là hai góc đối đỉnh

$\Rightarrow AOCM$ là tứ giác nội tiếp (dnhb)

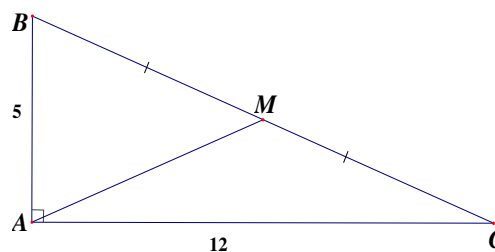
b) $EA^2 = EM \cdot EB$

Ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AE \perp EB$ hay $AE \perp BM$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABM , đường cao AE ta có: $EA^2 = EM \cdot EB$ (đpcm).

Câu 8. (ts Tây Ninh 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$ và $AC = 12$. Tính độ dài cạnh BC và trung tuyến AM (M thuộc BC).

Lời giải



Xét ΔABC vuông tại A có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (định lý Pytago)}$$

$$\text{Hay } BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{169} = 13$$

ΔABC vuông tại A có AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC (gt)

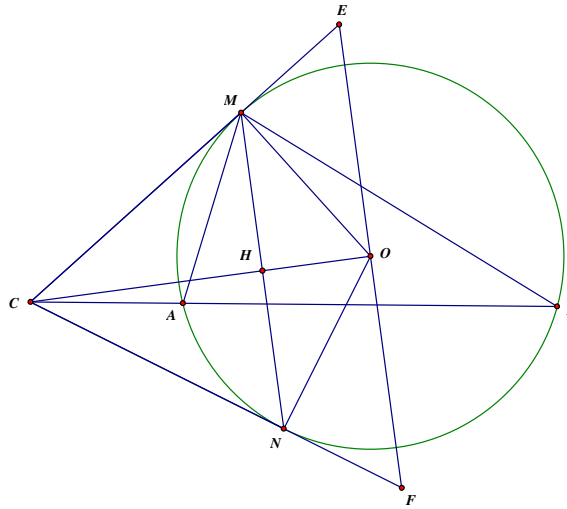
$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = 6,5$$

Vậy $BC = 13; AM = 6,5$

Câu 9. (ts Lai Châu 2022-2023) Cho đường tròn (O) bán kính R , đường thẳng d không qua tâm O và cắt đường tròn tại hai điểm A và B . Từ một điểm C trên d (A nằm giữa B và C) kẻ hai đường tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M, N là hai điểm, M và O nằm cùng phía đối với AB), MN cắt OC tại H .

- a. Chứng minh tứ giác $CMON$ nội tiếp đường tròn.
- b. Chứng minh $CM^2 = CA.CB$.
- c. Một đường thẳng đi qua O và song song với MN , cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F . Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

Lời giải



a. Tứ giác $CMON$ nội tiếp
 Vì CM, CN là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{CMO} = \widehat{CNO} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{CMO} + \widehat{CNO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 \Rightarrow Tứ giác $CMON$ nội tiếp

b. Chứng minh $CM^2 = CA.CB$
 Xét ΔCMA và ΔCBM có:
 \widehat{MCB} chung
 $\widehat{CMA} = \widehat{CBM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo \widehat{AM})

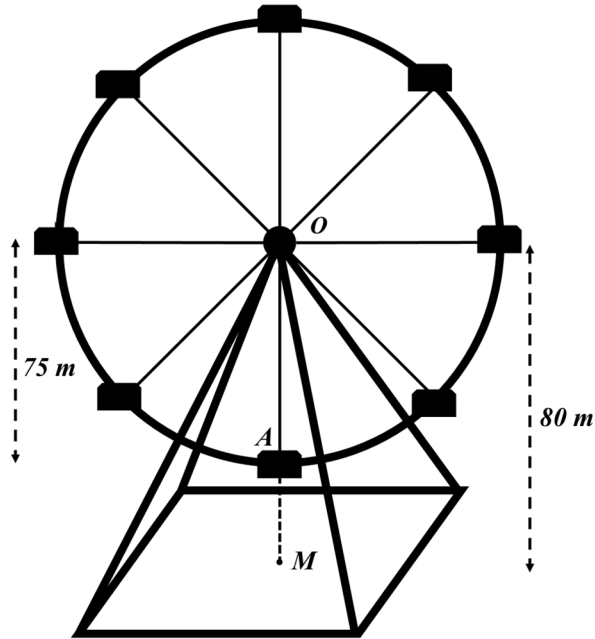
Suy ra: $\Delta CMA \sim \Delta CBM \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CB}{CM} \Leftrightarrow CM^2 = CA.CB$

c. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất
 Chỉ ra được $S_{CEF} = 2.S_{CEO} = CO.OE$

Xét ΔCOE :
 $\frac{1}{CO^2} + \frac{1}{CE^2} = \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{R^2}$
 Suy ra: $\frac{1}{R^2} = \frac{1}{CO^2} + \frac{1}{CE^2} \geq 2 \cdot \frac{1}{CO.CE}$

Hay $CO.CE \geq 2R^2$.
 Suy ra $S_{CEF} \geq 2R^2$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $CO = CE = R\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow C \in d$ sao cho $CO = R\sqrt{2}$
 Vậy $C \in d$ sao cho $CO = R\sqrt{2}$ thì $\min S_{CEF} = 2R^2$

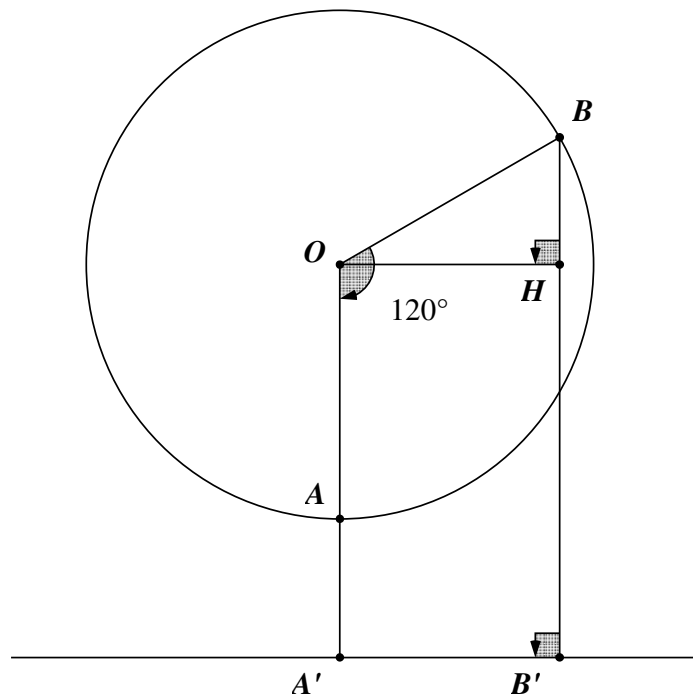
Câu 10. (ts An Giang 2022-2023) Một chiếc đu quay có bán kính 75 m , tâm của vòng quay ở độ cao 80 m so với mặt đất. Thời gian thực hiện mỗi vòng quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin ở vị trí thấp nhất của đu quay thì sau 10 phút người đó ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất (giả sử đu quay quay đều)?



Lời giải

Gọi vị trí ban đầu của người đó là điểm A .

Vì thời gian thực hiện mỗi vòng của đu quay là 30 phút nên khi đu quay quay đều thì 10 phút người đó đi được $\frac{1}{3}$ vòng tròn và đang ở vị trí điểm B như hình vẽ sau:



Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đất, kẻ $OH \perp BB'$.

Ta có: $\widehat{AOB} = \frac{1}{3} \cdot 360^\circ = 120^\circ, OA' = 80\text{ m}.$

Vì $OA'B'H$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) nên $HB' = OA' = 80(m)$

Ta có: $\widehat{AOH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOH} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

Xét tam giác vuông OBH có: $BH = OB \cdot \sin 30^\circ = 75 \cdot \frac{1}{2} = 37,5(m)$

$\Rightarrow BB' = BH + HB' = 37,5 + 80 = 117,5(m)$.

Vậy sau 10 phút người đó ở độ cao $117,5m$ so với mặt đất.

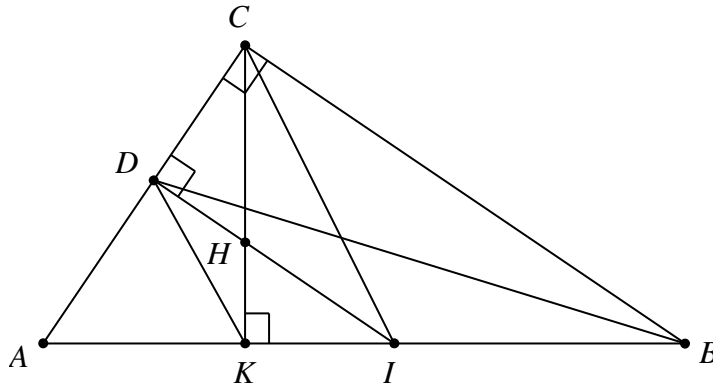
Câu 11. (ts Nghệ An 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại C ($AC < BC$), đường cao CK và đường phân giác BD ($K \in AB, D \in AC$). Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt CK, AB lần lượt tại H và I .

a) Chứng minh tứ giác $CDKI$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AC \cdot AD = DH \cdot AB$.

c) Gọi F là trung điểm của AD . Đường tròn tâm I bán kính ID cắt BC tại M (M khác B) và cắt AM tại N (N khác M). Chứng minh B, N, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{CDI} = 90^\circ$ (gt)

$\widehat{CKI} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{CDI} = \widehat{CKI}$

Vậy tứ giác $CDKI$ nội tiếp.

b) Ta có: BD là phân giác của tam giác ABC (gt) $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (1)

Xét ΔDCH và ΔCBA có:

$\widehat{CDH} = \widehat{BCA} (= 90^\circ)$

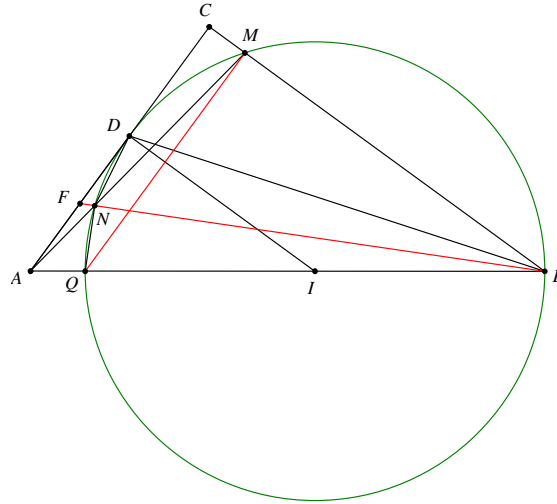
$\widehat{DCH} = \widehat{CBA}$ (cùng phụ \widehat{BAC})

$\Rightarrow \Delta DCH \sim \Delta CBA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{DH}{AC} = \frac{DC}{BC}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{DH}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AC \cdot AD = AB \cdot DH$

c)



Gọi F' là giao điểm của BN với AD, Q là giao điểm của AB với (I).

Ta có: $ID \parallel BC$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{DBC}$

Mà $\widehat{DBI} = \widehat{DBC}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{DBI}$

$\Rightarrow \Delta IDB$ cân tại I $\Rightarrow IB = ID \Rightarrow B \in (I)$

\Rightarrow tứ giác BMNQ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NBQ} = \widehat{NMQ}$

Ta có: $\widehat{QMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow QM \perp BC$

$\Rightarrow QM \parallel AC$ (cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow \widehat{NMQ} = \widehat{MAD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{NAF'} = \widehat{F'BA}$

Xét $\Delta F'AN$ và $\Delta F'BA$ có:

$\widehat{NAF'} = \widehat{F'BA}$ (c/m trên)

$\widehat{BF'A}$ chung

$\Rightarrow \Delta F'AN \sim \Delta F'BA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{F'A}{F'B} = \frac{F'N}{F'A} \Rightarrow F'A^2 = F'B \cdot F'N$ (3)

Ta lại có: $DA \perp ID$ (gt) nên DA là tiếp tuyến của (I) $\Rightarrow \widehat{F'DN} = \widehat{NBD}$

Xét $\Delta F'DN$ và $\Delta F'BD$ có:

$\widehat{F'DN} = \widehat{NBD}$ (c/m trên)

$\widehat{BF'D}$ chung

$\Rightarrow \Delta F'DN \sim \Delta F'BD$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{F'D}{F'B} = \frac{F'N}{F'D} \Rightarrow F'D^2 = F'B \cdot F'N$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow F'A^2 = F'D^2 \Rightarrow F'A = F'D$ Hay F' là trung điểm của AD

Do đó F' trùng với F

Vậy F, N, B thẳng hàng

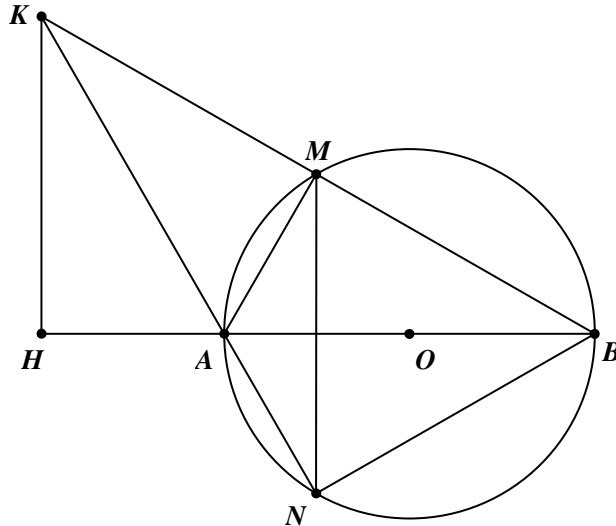
Câu 12. (ts Lạng Sơn 2022-2023) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây cung MN vuông góc với AB, ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác AHKM nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $NB \cdot HK = AN \cdot HB$.

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

+) Tứ giác $AHKM$ có: $\widehat{AHM} = 90^\circ$ (vì $KH \perp AB$)

và $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với \widehat{AMB})

Suy ra tứ giác $AHKM$ nội tiếp đường tròn đường kính AK .

b) Chứng minh rằng: $NB \cdot HK = AN \cdot HB$.

Xét $\triangle ANB$ và $\triangle KHB$ có:

+) $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{KHB} = 90^\circ$;

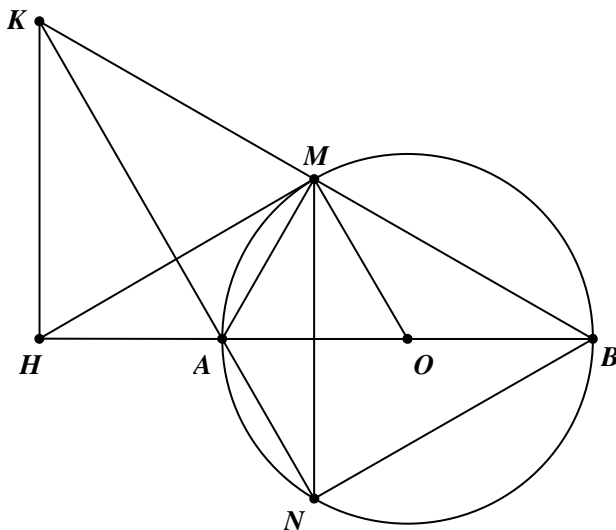
+) Đường kính $AB \perp MN \Rightarrow A$ là điểm chính giữa \widehat{MN} (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{AM} \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{KBH}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

Suy ra $\triangle ANB \sim \triangle KHB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{KH}{HB}$$

$$\Rightarrow NB \cdot HK = AN \cdot HB.$$

c) Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



+) Ta có HM giao với đường tròn (O) tại M , ta phải chứng minh $HM \perp OM$. Thật vậy:

Tứ giác $AHKM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{HAK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{HK});

$$\widehat{HAK} = \widehat{NAB} \text{ (hai góc đối đỉnh);}$$

$\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ ($AB \perp MN \Rightarrow B$ là điểm chính giữa MN , hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau);

$$\widehat{MAB} = \widehat{OMA} \text{ (}\Delta OAM \text{ cân tại } O\text{);}$$

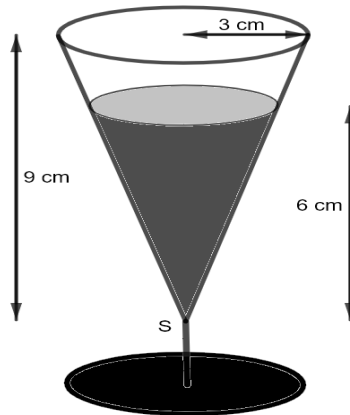
$$\Rightarrow \widehat{HMK} = \widehat{OMA} (= \widehat{HAK} = \widehat{NAB} = \widehat{MAB}) \Rightarrow \widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{OMA} + \widehat{HMA};$$

Mà $\widehat{HMK} + \widehat{HMA} = \widehat{AMK} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{AMB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$$\Rightarrow \widehat{OMA} + \widehat{HMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMO} = 90^\circ \Rightarrow HM \perp OM \text{ tại } M \in (O)$$

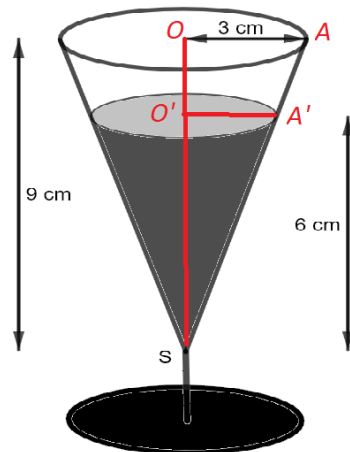
$\Rightarrow HM$ là tiếp tuyến của (O) .

Câu 13. (ts Bình Thuận 2022-2023) Một cái ly có phía trên dạng hình nón có đỉnh S có bán kính đáy bằng 3 cm , chiều cao bằng 9 cm . Người ta rót nước vào cái ly, biết chiều cao của nước trong ly bằng 6 cm (như hình bên). Tính thể tích của nước có trong ly. (Giả sử độ dày của thành ly không đáng kể, lấy $\pi \approx 3,14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

Ta gọi các điểm O, O', A, A' như hình vẽ:



$$\text{Ta có: } O'A' \parallel OA \Rightarrow \frac{O'A'}{OA} = \frac{O'S}{OS} \Leftrightarrow \frac{O'A'}{3} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow O'A' = 2 \text{ (cm)}.$$

Thể tích nước trong ly bằng thể tích khối nón có bán kính đáy bằng 2 cm , chiều cao bằng 6 cm và bằng:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 8\pi \approx 8 \cdot 3,14 = 25,12 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 14. (ts Bình Định 2022-2023) Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 13 cm, diện tích là 30 cm^2 . Tính độ dài các cạnh góc vuông.

Lời giải

Gọi x, y (cm) lần lượt là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông ($0 < x, y < 13$)

Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 13cm, Theo định lí Pytago ta có: $x^2 + y^2 = 169$ (1)

Diện tích tam giác vuông là 30 cm^2 : $\frac{1}{2}xy = 30. (\text{cm}^2)$ (2)

Từ (1) và (2) Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy = 60 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{60}{x} \\ x^2 + \frac{60^2}{x^2} = 169 \end{cases}$$

Ta có:

$$x^2 + \frac{60^2}{x^2} = 169 (x > 0)$$

$$\Rightarrow x^4 - 169x^2 + 60^2 = 0$$

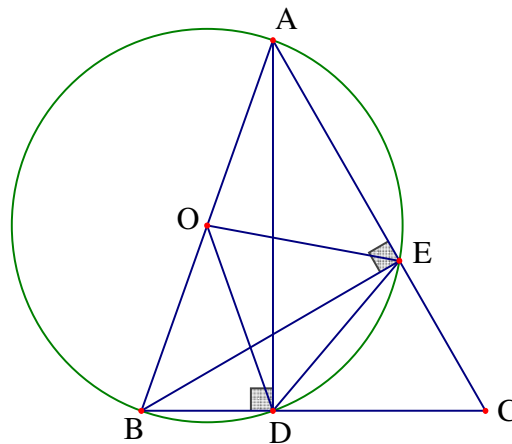
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 144 \\ x^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = 12 \end{cases}$$

Vậy độ dài các cạnh của tam giác vuông là 12cm và 5cm.

Câu 15. (ts Tiền Giang 2022-2023) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kẻ các đường cao AD và BE ($D \in BC$ và $E \in AC$).

1. Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn và xác định tâm O của đường tròn đó.
2. Chứng minh rằng $CD.CB = CE.CA$
3. Giả sử $\widehat{ACB} = 60^\circ$ và $AB = 6 \text{ cm}$. Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OD, OE và cung nhỏ DE của đường tròn (O).

Lời giải



1. Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn và xác định tâm O của đường tròn đó.

Ta có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (AD là đường cao)

Suy ra 3 điểm A, D, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB (1)

Ta có: $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (BE là đường cao)

Suy ra 3 điểm A, E, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm A, B, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính AB

Suy ra tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kính AB

Có tâm O là trung điểm của AB .

2. Chứng minh rằng $CD.CB = CE.CA$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BEC$

Ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{BEC}$ (cùng bằng 90°)

\widehat{ACB} : góc chung

Nên $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (g.g)

$$\text{Suy ra: } \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$$

$$\Rightarrow CD.CB = CE.CA$$

3. Giả sử $\widehat{ACB} = 60^\circ$ và $AB = 6\text{ cm}$. Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OD, OE và cung nhỏ DE của đường tròn (O).

Ta có: $AB = 6\text{ cm}$

$$\text{Suy ra: } OA = OB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$$

Suy ra: $OD = OE = 3\text{ cm}$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại C

Ta có: $\widehat{DAC} + \widehat{DCA} = 90^\circ$

$$\text{Hay: } \widehat{DAC} + 60^\circ = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{DAC} = 30^\circ$$

Xét (O)

Ta có: $\widehat{DOE} = 2.\widehat{DAE}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn \widehat{DE})

$$\text{Hay: } \widehat{DOE} = 2.30^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Khi đó: } S_{\text{quạt } DOE} = \frac{\pi.3^2.60}{360} = \frac{3\pi}{2}(\text{cm}^2)$$

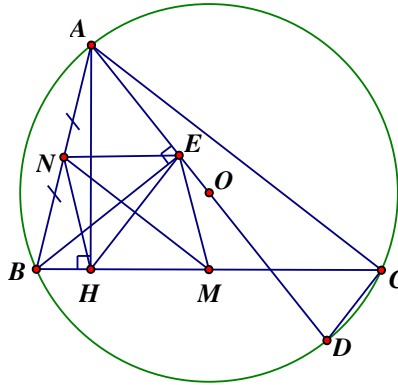
Câu 16. (ts THANH HÓA 2022-2023) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và E là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AO .

1. Chứng minh $AEHB$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh đường thẳng HE vuông góc với đường thẳng AC .

3. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính tỉ số $\frac{ME}{MH}$.

Lời giải



1. Ta có: $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ$
 $BE \perp AO$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$
 \Rightarrow Tứ giác $AEHB$ nội tiếp được đường tròn (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông).

2. Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) .

Ta có: $\widehat{BAE} + \widehat{BHE} = 180^\circ$ (vì tứ giác $AEHB$ nội tiếp)

$\widehat{EHC} + \widehat{BHE} = 180^\circ$ (hai góc bù nhau)

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{EHC}$ (1)

Lại có:

$\widehat{BAE} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (2) (hai góc nội tiếp cùng một đường tròn cùng chắn một cung)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EHC} = \widehat{BCD} \Rightarrow HE \parallel CD$ (3)

Mà: $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp CD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $HE \perp AC$ (đpcm).

3. Gọi N là trung điểm của cạnh AB . Khi đó:

Do M là trung điểm của cạnh BC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel AC$

Mà $HE \perp AC$ (chứng minh ở trên) $\Rightarrow HE \perp MN$ (5)

Ta lại có:

$NE = NH = \frac{1}{2} AB$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)

$\Rightarrow N$ thuộc trung trực của đoạn thẳng HE (6)

Từ (5) và (6) suy ra:

MN là trung trực của đoạn thẳng $HE \Rightarrow MH = ME \Rightarrow \frac{ME}{MH} = 1$

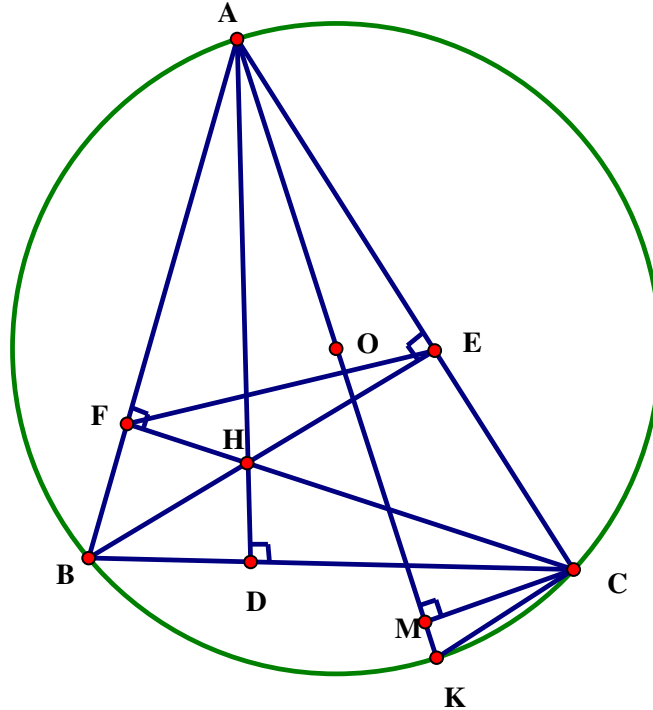
Vậy $\frac{ME}{MH} = 1$.

Câu 17. (ts Vinh Phúc 2022-2023) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC (D, E, F là chân các đường cao) đồng quy tại điểm H . Kẻ đường kính AK của đường tròn $(O; R)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AK .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn.

- b) Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC và MD song song với BK .
- c) Giả sử hai đỉnh B, C cố định trên đường tròn $(O; R)$ và đỉnh A di động trên cung lớn BC của đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng đường thẳng MF luôn đi qua một điểm cố định và tìm vị trí của đỉnh A sao cho diện tích tam giác AEH lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (vì BE là đường cao của ΔABC)

$\widehat{BFC} = 90^\circ$ (vì CF là đường cao của ΔABC)

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (theo chứng minh trên)

\Rightarrow Đỉnh E và F là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới một góc không đổi 90°

Do đó tứ giác $BCEF$ nội tiếp (đpcm)

b)

* Chứng minh rằng tam giác ABD đồng dạng với tam giác AKC

Ta có $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn \widehat{AC})

Xét ΔABD và ΔAKC có

$\widehat{ADB} = \widehat{ACK} = 90^\circ$

$\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (theo chứng minh trên)

Do đó $\Delta ABD \sim \Delta AKC$ (g.g)

* MD song song với BK .

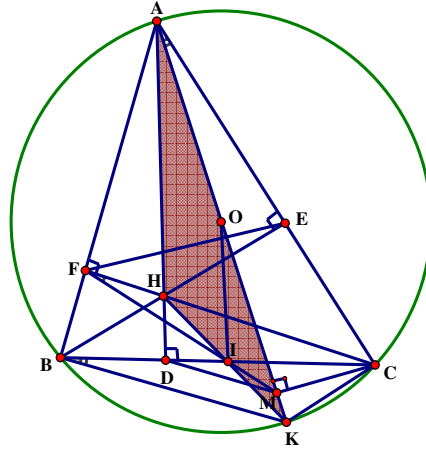
Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{CBK} = \widehat{KAC}$ (cùng chắn \widehat{KC}) (1)

Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{CDM}$ (cùng chắn \widehat{MC}) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBK} = \widehat{CDM} \Rightarrow DM \parallel BK$ (đpcm)

c)



Gọi I trung điểm BC

Ta có $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CK \perp AC$

Mà $BE \perp AC$ (BE là đường cao của ΔABC)

Suy ra $CK \parallel BE$ (1)

Tương tự $BK \parallel CF$ (2)

Xét tứ giác $CHBK$ có $\begin{cases} CK \parallel BE \\ BK \parallel CF \end{cases}$

Suy ra tứ giác $CHBK$ là hình bình hành.

Mà I trung điểm của BC

Suy ra I, H, K thẳng hàng.

Xét ΔAHK có O là trung điểm của AK

I là trung điểm của HK

Suy ra OI là đường trung bình của $\Delta AHK \Rightarrow AH = 2OI$

Do OI không đổi nên AH không đổi

Ta có $S_{\Delta AHE} = \frac{1}{2} AE \cdot HE$ (1)

Ta có ΔAEH vuông tại E nên $AE^2 + EH^2 = AH^2$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$AH^2 = AE^2 + EH^2 \geq 2\sqrt{AE^2 \cdot EH^2} = 2AE \cdot HE$$

$$\Rightarrow AE \cdot HE \leq \frac{1}{2} AH^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{\Delta AHE} \leq \frac{1}{4} AH^2$ không đổi

$$\Rightarrow S_{\Delta AHE} = \frac{1}{4} AH^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $AE = HE \Rightarrow \widehat{HAE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 45^\circ$

Câu 18. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho đường tròn (O) , đường kính AB , bán kính OC vuông góc với AB . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AH cắt OC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A)

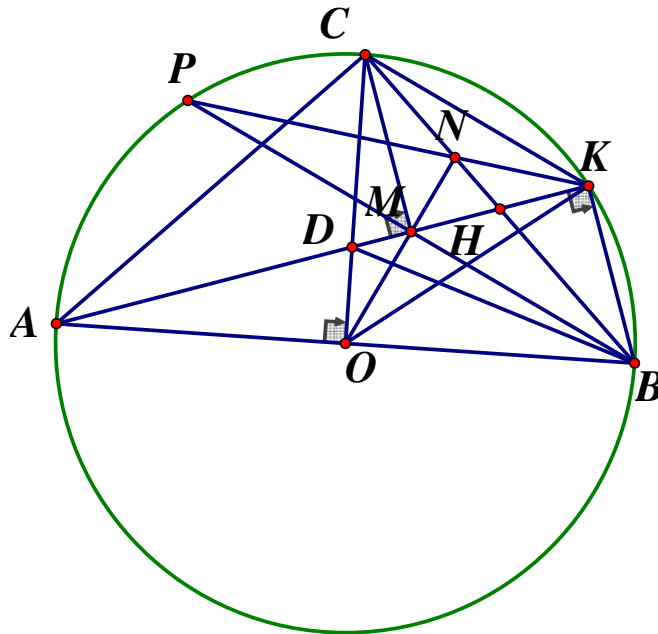
a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M . Chứng minh $\widehat{CMA} = 90^\circ$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N , NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K).

Chứng minh B đối xứng với P qua M .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

Xét (O) có: K thuộc đường tròn nên $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{DKB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BDK$ vuông tại K .

$\Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính BD (1)

Ta có $OC \perp AB$ tại O (gt) $\Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle OBD$ vuông tại O .

$\Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính BD (2)

Từ (1) và (2), suy ra O, K thuộc đường tròn đường kính BD

Vậy tứ giác $ODKB$ nội tiếp một đường tròn

b) Tia phân giác của góc COK cắt AK tại M . Chứng minh $\widehat{CMA} = 90^\circ$

Xét tam giác COK có $OC = OK \Rightarrow \triangle COK$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{CKO}$

Lại có ON là phân giác của \widehat{COK} (giả thiết)

$\Rightarrow ON$ đồng thời là đường trung trực của $\triangle COK$.

Mà $M \in ON \Rightarrow CM = MK$ (tính chất đường trung trực)

$\Rightarrow \triangle CMK$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MCK} = \widehat{MKC}$

Ta có: $\widehat{OCK} = \widehat{CKO}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{OCM} + \widehat{CMK} = \widehat{OKM} + \widehat{MKC} \Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OKM} \Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{DKO}$ (3)

Tứ giác $DKBO$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{DKO} = \widehat{DBO}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OD) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{OCM} = \widehat{DBO}$

Xét $\triangle ABD$ có: DO là đường cao (do OC vuông góc với AB tại O)

DO là đường trung tuyến (do O là trung điểm của AB)

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại $D \Rightarrow \widehat{DAO} = \widehat{DBO} \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{DBO}$

Mà $\widehat{OCM} = \widehat{DBO}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{OCM}$

Xét tứ giác $AOMC$ có: $\widehat{MAO} = \widehat{OCM}$ mà hai góc này có đỉnh kề nhau cùng chắn cung AC

$\Rightarrow AOMC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{AMC}$

Mà $\widehat{AOC} = 90^\circ$ (do AB vuông góc với CO tại O) $\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$

c) Đường thẳng OM cắt BC tại N , NK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P (P khác K).

Chứng minh B đối xứng với P qua M .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AHC có:

$$HM.HA = HC^2 = HB^2 \Rightarrow \frac{HM}{HB} = \frac{HB}{HA}$$

Xét $\triangle HBM$ và $\triangle HAB$ có: \widehat{AHB} chung; $\frac{HM}{HB} = \frac{HB}{HA}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle HBM \sim \triangle HAB$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HBM}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{HAB} = \widehat{KPB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KB) $\Rightarrow \widehat{KBP} = \widehat{HBM}$ hay $\widehat{NPB} = \widehat{NBP}$

$\Rightarrow \triangle NBP$ cân tại N (tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau) $\Rightarrow NB = NP$

Xét $\triangle ONB$ và $\triangle ONP$ có: $OB = OP$ (cùng bằng bán kính); ON chung
 $NB = NP$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle ONB = \triangle ONP$ (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{NOB} = \widehat{NOP}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow ON$ là phân giác của $\widehat{BOP} \Rightarrow OM$ là phân giác của \widehat{BOP}

Xét $\triangle OBP$ có: $OB = OP = R$, nên $\triangle OBP$ cân tại O

\Rightarrow phân giác OM đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow M$ là trung điểm của BP

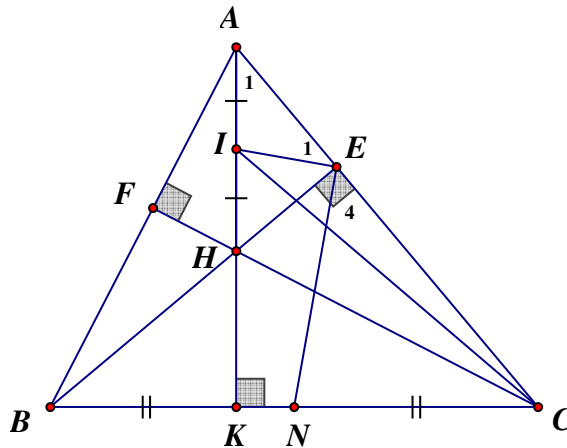
Vậy B đối xứng với P qua M .

Câu 19. (ts Bình Dương 2022-2023) Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AK , BE và CF cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của đoạn AH , N là trung điểm của đoạn BC .

a. Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

b. Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .

c. Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.



a) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F nằm trên cùng một đường tròn.

Ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (do BE là đường cao của $\triangle ABC$) hay $\widehat{AEH} = 90^\circ$

$\widehat{AFC} = 90^\circ$ (do CF là đường cao của $\triangle ABC$) hay $\widehat{AFH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{AEH}, \widehat{AFH}$ ở vị trí đối nhau

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

Suy ra bốn điểm A, E, H, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm)

b) Chứng minh NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH ;

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng AH nên I là tâm đường tròn đường kính AH

Suy ra $IA = IE$

$\Rightarrow \triangle IAE$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (1)

$\triangle EBC$ vuông tại E có EN là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow EN = NC \left(= \frac{BC}{2} \right)$

$\Rightarrow \triangle ENC$ cân tại N

$$\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{E}_4 \quad (2)$$

Xét ΔAKC vuông tại K có $\widehat{KCA} + \widehat{A}_1 = 90^\circ$ hay $\widehat{NCE} + \widehat{A}_1 = 90^\circ \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_4 = 90^\circ$

Lại có $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_4 + \widehat{IEN} = 180^\circ$ (do A, E, C thẳng hàng)

$$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{IEN} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{IEN} = 90^\circ$$

Suy ra $EN \perp EI$ tại E

Do đó NE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH (đpcm)

c) Chứng minh $CI^2 - IE^2 = CK.CB$.

Áp dụng định lí Py – Ta – Go ΔCIK vuông tại K , ta có: $CI^2 = CK^2 + IK^2$

Lại có $IA = IE = IH$ (cùng bán kính đường tròn tâm I)

$$\Rightarrow CI^2 - IE^2 = CK^2 + IK^2 - IE^2$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IE)$$

$$CI^2 - IE^2 = CK^2 + (IK + IE)(IK - IH) = CK^2 + AK.KH \quad (4)$$

$$\text{Ta lại có } CK.CB = CK(CK + KB) = CK^2 + CK.KB \quad (5)$$

Xét ΔKBH và ΔKAC có

$$\widehat{KBH} = \widehat{KAC} \text{ (Cùng phụ với } \widehat{ACB}); \widehat{BKH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$$

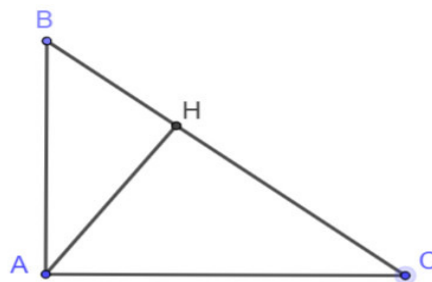
Do đó $\Delta AHK \sim \Delta ACB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{KH}{KC} \Rightarrow KA.KH = KB.KC \text{ hay } AK.KH = CK.KB \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra $CI^2 - IE^2 = CK.CB$ (đpcm)

Câu 20. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ($H \in BC$). Biết độ dài đoạn $BC = 10\text{cm}$ và $\sin \widehat{ABC} = \frac{4}{5}$. Tính độ dài các đoạn AC và BH.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8(\text{cm})$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow AB = 6(cm)$$

Xét tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Áp dụng hệ thức lượng ta có

$$BA^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{BA^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6(cm)$$

Vậy $AC = 8(cm); BH = 3,6(cm)$

Câu 21. (ts Sơn La 2022-2023) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AE, BF cắt nhau tại trực tâm H của tam giác, AO cắt đường tròn tại điểm thứ hai M.

- a) Chứng minh tứ giác EHFC nội tiếp được đường tròn.
- b) Chứng minh tứ giác BHCM là hình bình hành.
- c) Chứng minh $CO \perp EF$.

Lời giải

a) Vì AE, BF là các đường cao nên $\widehat{HFC} = \widehat{HEC} = 90^\circ$

Xét tứ giác EHFC có $\widehat{HFC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà chúng là hai góc đối nên tứ giác EHFC nội tiếp được đường tròn.

b) Ta có $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $MC \perp AC$ mà $BH \perp AC$ (BF là đường cao)

$$\Rightarrow MC \parallel BH$$

Tương tự: $MB \parallel CH$

Ta có $MB \parallel CH, MC \parallel BH$ nên tứ giác BHCM là hình bình hành.

c) Kẻ tiếp tuyến Cx như hình vẽ, suy ra $Cx \perp OC$

Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{ACx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC) (1)

Xét tứ giác có $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$ (AE, BF là các đường cao) mà chúng cùng nhìn AB nên tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn)

$$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{EFC} \text{ (cùng bù với } \widehat{AFE} \text{)} \text{ (2)}$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ACx} = \widehat{EFC}$ mà chúng so le trong nên $Cx \parallel EF$ mà $Cx \perp OC \Rightarrow OC \perp EF$

Vậy $CO \perp EF$.

Câu 22. (ts Hải Dương 2022-2023)

1. Cho đường tròn (O) và dây cung BC không đi qua tâm O. Hai tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại A. Lấy điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C), gọi I, H, K theo thứ tự là các chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AB, AC.

a) Chứng minh các tứ giác MIBH, MICK nội tiếp;

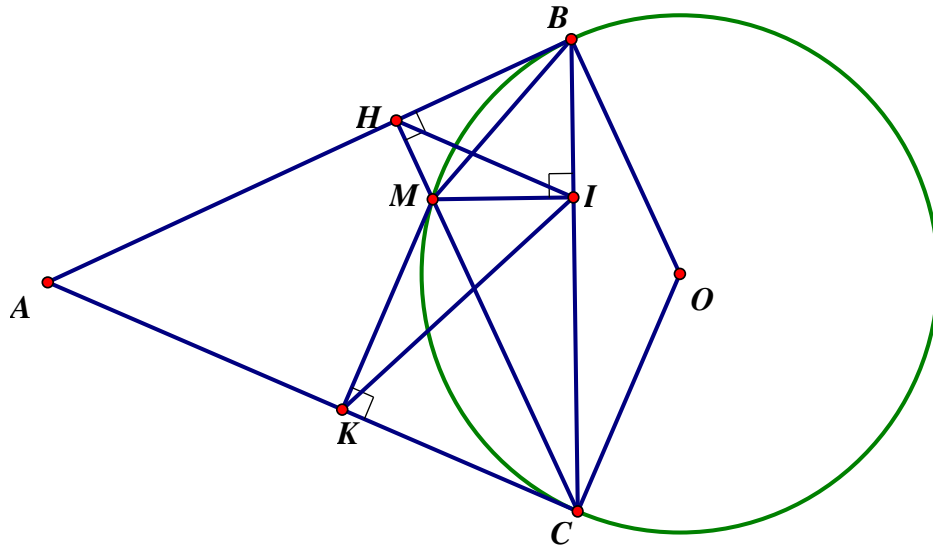
b) Chứng minh $MI^2 = MH \cdot MK$.

2. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến PQ, PR tới đường tròn với Q và R là các tiếp điểm. Đường thẳng qua P cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và F (E nằm giữa P

và F ; dây cung EF không đi qua tâm O). Gọi I là trung điểm của EF , K là giao điểm của PF và QR . Chứng minh rằng: $\frac{2}{PK} = \frac{1}{PE} + \frac{1}{PF}$.

Lời giải

1. a) Chứng minh các tứ giác $MIBH, MICK$ nội tiếp



I, H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ M đến BC, AB, AC nên $\widehat{MHB} = \widehat{MIB} = \widehat{MKC} = 90^\circ$
 Xét tứ giác $MIBH$ có

$\widehat{MIB} + \widehat{MHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà \widehat{MIB} và \widehat{MHB} là hai góc đối nhau
 Suy ra, tứ giác $MIBH$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có, $\widehat{MIB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $MICK$ có

$\widehat{MIC} + \widehat{MKC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà \widehat{MIC} và \widehat{MKC} là hai góc đối nhau
 Suy ra, tứ giác $MICK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $MI^2 = MH.MK$

Xét tứ giác nội tiếp $MICK$ có

$\widehat{MKI} = \widehat{MCI}$ (cùng chắn cung MI) (1)

$\widehat{MIK} = \widehat{MCK}$ (cùng chắn cung MK) (2)

Xét tứ giác nội tiếp $MIBH$ có

$\widehat{MIH} = \widehat{MBH}$ (cùng chắn cung MH) (3)

$\widehat{MHI} = \widehat{MBI}$ (cùng chắn cung MI) (4)

Trong đường tròn (O) có

$\widehat{MCI} = \widehat{MBH}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BM) (5)

$\widehat{MCK} = \widehat{MBI}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung CM) (6)

Từ (1), (3) và (5) suy ra: $\widehat{MKI} = \widehat{MIH}$

Từ (2), (4) và (6) suy ra: $\widehat{MIK} = \widehat{MHI}$

Xét ΔMHI và ΔMIK có

$\widehat{MKI} = \widehat{MIH}$ (chứng minh trên)

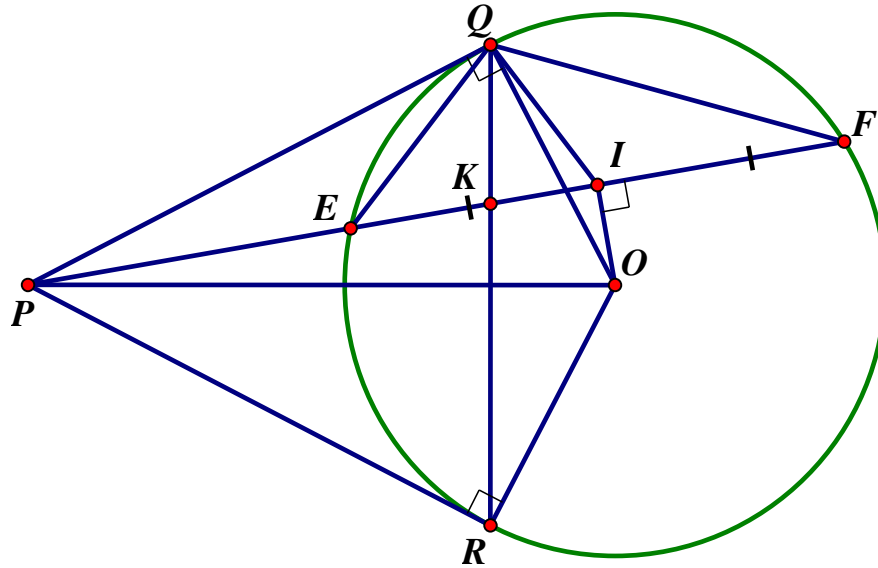
$\widehat{MIK} = \widehat{MHI}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MHI \sim \Delta MIK$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MI}{MK} = \frac{MH}{MI}$

$\Rightarrow MI^2 = MH.MK$.

2.

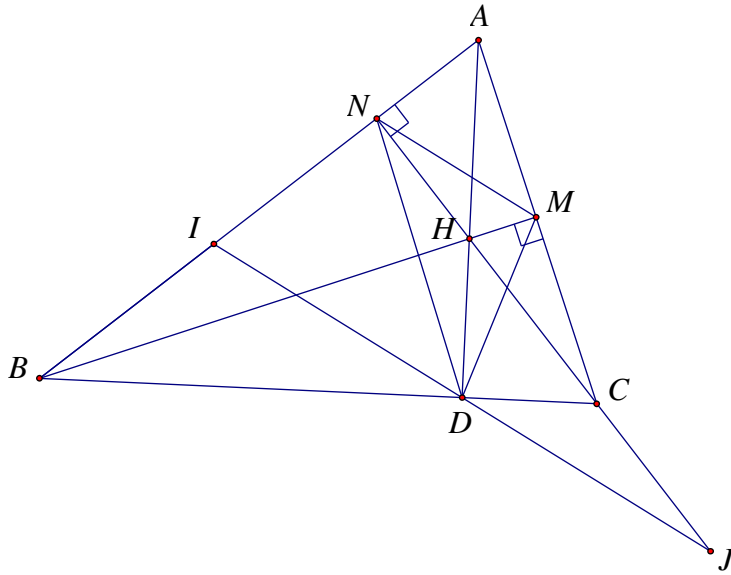


Vì O là trung điểm của dây EF nên $OI \perp EF$ suy ra $\widehat{OIP} = 90^\circ$
 PQ, PR là hai tiếp tuyến và Q, R là hai tiếp điểm nên $OQ \perp PQ; OR \perp PR$
 Suy ra $\widehat{PQO} = \widehat{PRO} = 90^\circ$
 Xét tứ giác $PQOR$ có $\widehat{PQO} + \widehat{PRO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà \widehat{PQO} và \widehat{PRO} là hai góc đối nhau
 Suy ra, $PQOR$ là tứ giác nội tiếp(1)
 Xét tứ giác $PIOR$ có $\widehat{OIP} + \widehat{ORP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà \widehat{OIP} và \widehat{ORP} là hai góc đối nhau
 Suy ra, $PIOR$ là tứ giác nội tiếp (2)
 Từ (1), (2) suy ra năm điểm $P; Q; I; O; R$ nội tiếp một đường tròn
 Xét đường tròn ngoại tiếp năm điểm $P; Q; I; O; R$ có $\widehat{PIQ} = \widehat{PRQ}$ (cùng chắn cung PQ)
 Xét đường tròn (O) có $\widehat{PQR} = \widehat{PRQ}$ (hai góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung QR). Vì $K \in QR$
 nên $\widehat{PQK} = \widehat{PRQ}$. Từ đó, suy ra $\widehat{PQK} = \widehat{PIQ}$
 Xét ΔPKQ và ΔPQI có \widehat{QPI} chung, $\widehat{PQK} = \widehat{PIQ}$ nên $\Delta PKQ \sim \Delta PQI$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{PK}{PQ} = \frac{PQ}{PI} \Rightarrow PQ^2 = PI \cdot PK$ (3)
 Ta có $\widehat{PQE} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{QE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung QE)
 $\widehat{PFQ} = \frac{1}{2} \text{sd}\widehat{QE}$ (góc nội tiếp chắn cung QE của đường tròn (O))
 $\Rightarrow \widehat{PFQ} = \widehat{PQE}$
 Xét ΔPQE và ΔPFQ có $\widehat{PFQ} = \widehat{PQE}$ và \widehat{QPF} chung
 $\Rightarrow \Delta PQE \sim \Delta PFQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PQ}{PF} = \frac{PE}{PQ} \Rightarrow PQ^2 = PE \cdot PF$ (4)
 Từ (3), (4) suy ra $PI \cdot PK = PE \cdot PF$
 $\Rightarrow \frac{1}{PK} = \frac{PI}{PE \cdot PF} \Rightarrow \frac{2}{PK} = \frac{2PI}{PE \cdot PF} \Rightarrow \frac{2}{PK} = \frac{PE + IE + PF - IF}{PE \cdot PF} \Rightarrow \frac{2}{PK} = \frac{PE + PF}{PE \cdot PF}$ (vì I là trung điểm của EF nên $IE = IF$)
 $\Rightarrow \frac{2}{PK} = \frac{1}{PF} + \frac{1}{PE}$.

- Câu 23.** (ts Quảng Bình 2022-2023) Cho ΔABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H .
 a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp.

- b) Gọi D là giao điểm của AH và BC . Chứng minh DA là tia phân giác của \widehat{MDN} .
 c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB , CN lần lượt tại I và J . Chứng minh D là trung điểm IJ .

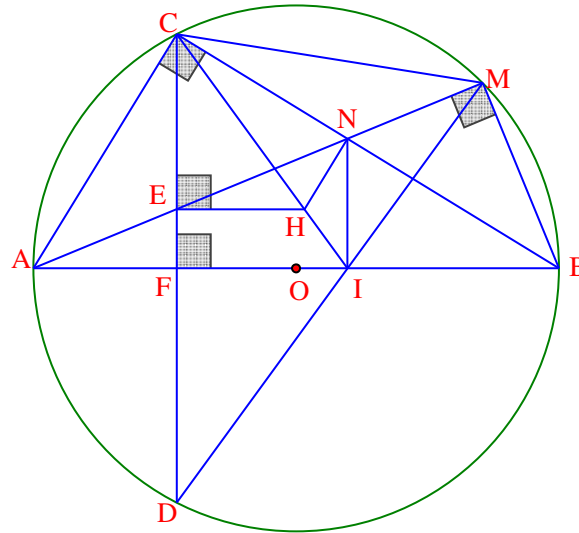
Lời giải



- a) Vì BM, CN là các đường cao của ΔABC nên $BM \perp AC, CN \perp AB$
 $\Rightarrow \widehat{BMA} = \widehat{CNA} = 90^\circ$ hay $\widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^\circ$.
 Xét tứ giác $AMHN$ có: $\widehat{HMA} + \widehat{HNA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AMHN$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).
 b) Xét ΔABC có hai đường cao BM, CN cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm ΔABC
 $\Rightarrow AH \perp BC$ tại D .
 Xét tứ giác $BNHD$ có: $\widehat{BNH} = \widehat{BDH} = 90^\circ$ (vì $CN \perp AB, AH \perp BC$)
 $\Rightarrow \widehat{BNH} + \widehat{BDH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BNHD$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).
 $\Rightarrow \widehat{NBH} = \widehat{NDH}$ (cùng chắn \widehat{NH} của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$).
 Hay $\widehat{ABM} = \widehat{NDA}$. (1)
 Chứng minh tương tự ta có tứ giác $CMHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDM} = \widehat{HCM}$ (tính chất).
 Hay $\widehat{ADM} = \widehat{NCA}$. (2)
 Lại có: ΔABM vuông tại $D \Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{NAM} = 90^\circ$,
 ΔACN vuông tại $D \Rightarrow \widehat{NCA} + \widehat{NAM} = 90^\circ$.
 Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{NCA}$. (3)
 Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{NDA} = \widehat{ADM} \Rightarrow DA$ là tia phân giác của \widehat{MDN} .
 c) Ta có: $\widehat{DJN} = \widehat{HNM}$ (hai góc so le trong và $MN \parallel DJ$)
 $= \widehat{HAM}$ (tứ giác $AMHN$ nội tiếp)
 $= \widehat{HBD}$ (do ΔADC vuông tại D và ΔMBC vuông tại M nên \widehat{HAM} và \widehat{HBD} cùng phụ với \widehat{ACB}).
 $= \widehat{HND}$ (tứ giác $BNHD$ nội tiếp).
 Như vậy $\widehat{DJN} = \widehat{HND} \Rightarrow \Delta NDJ$ cân tại $D \Rightarrow DN = DJ$.
 Xét ΔINJ vuông tại N có: $\widehat{IND} + \widehat{HND} = 90^\circ$ và $\widehat{NID} + \widehat{DJN} = 90^\circ$.
 Mà $\widehat{DJN} = \widehat{HND} \Rightarrow \widehat{IND} = \widehat{NID} \Rightarrow \Delta IND$ cân tại $D \Rightarrow DN = DI$.
 $\Rightarrow DI = DJ$ (cùng $= DN$) $\Rightarrow D$ là trung điểm IJ .

- Câu 24.** (ts Quảng Ninh 2022-2023) Cho đường tròn tâm O , đường kính AB , dây CD vuông góc với AB tại F . Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC (M khác B , M khác C), hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại E
- Chứng minh tứ giác $BMEF$ nội tiếp
 - Chứng minh tia MA là phân giác của góc CMD
 - Chứng minh $AC^2 = AE \cdot AM$
 - Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MD và AB , N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên đường thẳng CI

Lời giải



a) Xét tứ giác $BMEF$ có:

$$\widehat{BFE} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BFE} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BFE} + \widehat{BME} = 180^\circ$$

Mà hai góc \widehat{BFE} , \widehat{BME} nằm ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BMEF$ nội tiếp

b) Ta có $AB \perp CD \Rightarrow F$ là trung điểm của CD (mối liên hệ giữa đường kính và dây cung)

$$\Rightarrow AB \text{ là đường trung trực của } CD \Rightarrow sđ \widehat{AC} = sđ \widehat{AD}$$

$$\text{Ta có } \widehat{AMC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AC} \text{ và } \widehat{AMD} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AMD} \Rightarrow AM \text{ là phân giác của } \widehat{CMD}$$

c) Xét ΔACE và ΔAMC có: \widehat{A} : chung

$$\widehat{AMC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AC} \text{ và } \widehat{ACD} = \frac{1}{2} sđ \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ACD}$$

$$\Rightarrow \Delta ACE \sim \Delta AMC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AC}{AM} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AE \cdot AM$$

d) Trên CI lấy điểm H sao cho HE vuông góc với CD

Cần chứng minh tứ giác $CEHN$ nội tiếp đường tròn đường kính CH , ta đi chứng minh $\widehat{CNE} = \widehat{CHE}$

Ta có: $\widehat{NMI} = \widehat{NBI} \left(= \frac{1}{2}sd\widehat{AC} \right) \Rightarrow$ tứ giác $BMNI$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NIB} + \widehat{NMB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{NIB} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ACNI$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{CHE} = \widehat{CIA}$ (đồng vị); $\widehat{CNE} = \widehat{CIA}$ (cùng chắn cung \widehat{AC})

$\Rightarrow \widehat{CNE} = \widehat{CHE} \Rightarrow$ tứ giác $CEHN$ nội tiếp

Mà $\widehat{CEH} = 90^\circ \Rightarrow CH$ là đường kính

\Rightarrow tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEN nằm trên CI .

Câu 25. (ts Cần Thơ 2022-2023) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm K nằm ngoài đường tròn. Từ điểm K vẽ các tiếp tuyến KA, KB với A, B là các tiếp điểm; qua K vẽ đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và D sao cho $KD < KE$, A và O nằm khác phía so với đường thẳng EK .

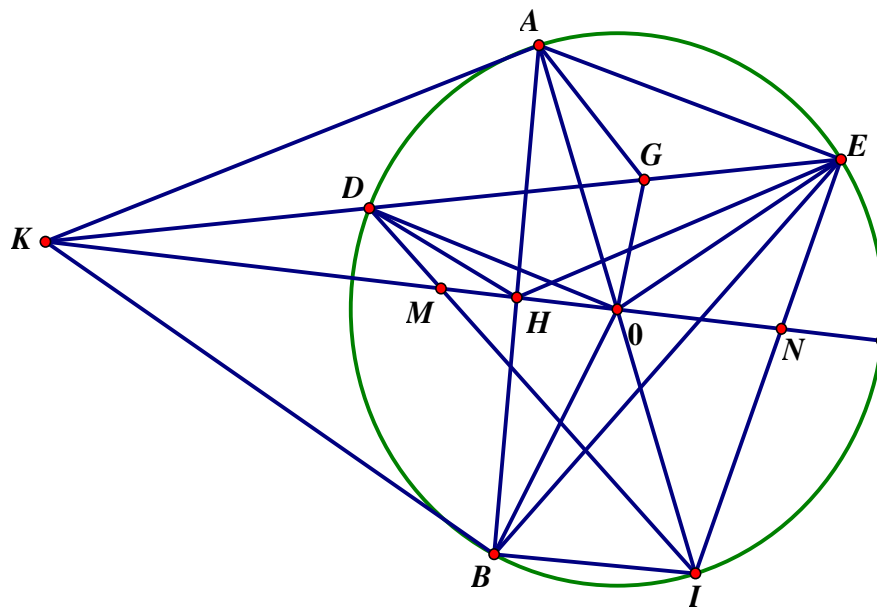
a) Chứng minh tứ giác $KAOB$ nội tiếp và OK vuông góc với AB .

b) Gọi H là giao điểm của OK và AB . Chứng minh $KD \cdot KE = KH \cdot KO$.

c) Vẽ đường kính AI của đường tròn (O) , các tia ID và IE cắt tia KO lần lượt tại M và N .

Chứng minh $\widehat{DHE} = \widehat{DOE}$ và $OM = ON$.

Lời giải



a) Xét tứ giác $KAOB$ có :

KA là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại $A \Rightarrow \widehat{OAK} = 90^\circ$

KB là tiếp tuyến của $(O; R)$ tại $B \Rightarrow \widehat{OBK} = 90^\circ$

Ta có : $\widehat{OAK} + \widehat{OBK} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $KAOB$ là tứ giác nội tiếp

Có KA, KB là hai tiếp tuyến (O) nên $KA = KB$ do đó K thuộc đường trung trực của AB .

Mà $OA = OB = R$ nên do đó O thuộc đường trung trực của AB .

Vậy OK là đường trung trực của AB nên OK vuông góc với AB .

b) Do H là giao điểm của OK và AB (gt) nên OK vuông góc với AH

Tam giác AOK vuông tại A có :

$$AK^2 = KO.KH \text{ (hệ thức lượng tròn tam giác vuông) (1)}$$

Xét $(O; R)$ có $\widehat{AED} = \widehat{KAD}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung \widehat{AD})

$$\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{KAD}$$

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle DAK$ có :

$$\widehat{AKE} \text{ chung}$$

$$\widehat{AEK} = \widehat{KAD} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AEK \sim \triangle DAK \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AK}{DK} = \frac{KE}{AK}$$

$$\Rightarrow AK^2 = KD.KE \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KD.KE = KH.KO$

c) Chứng minh $\widehat{DHE} = \widehat{DOE}$

$$\text{Có } KD.KE = KH.KO \Rightarrow \frac{KD}{KO} = \frac{KH}{KE}$$

Xét $\triangle KDH$ và $\triangle KOE$ có :

$$\widehat{EKO} \text{ chung}$$

$$\frac{KD}{KO} = \frac{KH}{KE} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle KDH \sim \triangle KOE \Rightarrow \widehat{KHD} = \widehat{KEO}$$

Xét tứ giác $DHOE$ có : $\widehat{KHD} = \widehat{KEO}$ mà cả hai góc cùng bù \widehat{DHO}

$\Rightarrow DHOE$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{DOE} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)}$$

Chứng minh $OM = ON$.

Vì B thuộc đường tròn $(O; R)$ nên $\widehat{ABI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow AB \perp BI$$

Ta có $\begin{cases} KN \perp AB \text{ (} KH \perp AB \text{)} \\ BI \perp AB \end{cases} \Rightarrow KN // BI$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

$\Rightarrow \widehat{NMI} = \widehat{BID}$ (2 góc so le trong)

Xét $(O; R)$ có $\widehat{DIB} = \widehat{BED}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

Nên $\widehat{BED} = \widehat{NMI}$.

Mà $\widehat{DBE} = \widehat{DIE}$ (cùng chắn \widehat{DE}) hay $\widehat{DBE} = \widehat{MIN} . MN$

Xét $\triangle EBD$ và $\triangle MIN$ có :

$$\begin{cases} \widehat{BED} = \widehat{NMI} \text{ (cmt)} \\ \widehat{DBE} = \widehat{MIN} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle EBD \sim \triangle MIN(g.g)$$

Nên $\frac{DE}{MN} = \frac{DB}{NI}$ (*)

Kẻ OG vuông góc DE $\Rightarrow \widehat{DGO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KGO} = 90^\circ$

Mặt khác ta có G là trung điểm DE (quan hệ giữa đường kính và dây cung) $\Rightarrow DE = 2GD$

Xét tứ giác $KGOB$ có $\widehat{KGO} + \widehat{KBO} = 180^\circ$ mà 2 góc này đối nhau nên tứ giác $KGOB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KGB} = \widehat{KOB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung KB)

Ta có KA,KB là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R) \Rightarrow OK$ là tia phân giác \widehat{AOB} (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{AOK} = \widehat{KOB}$

Do đó $\widehat{AOK} = \widehat{KGB}$.

Ta lại có $\widehat{AOK} = \widehat{NOI}$ (đối đỉnh)

Do đó, $\widehat{KGB} = \widehat{NOI}$ hay $\widehat{DGB} = \widehat{NOI}$

Ta có : $\triangle EBD \sim \triangle MIN$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{MNI}$ hay $\widehat{GDB} = \widehat{ONI}$

Xét $\triangle DGB$ và $\triangle NOI$ có :

$$\begin{cases} \widehat{DGB} = \widehat{NOI} \\ \widehat{GDB} = \widehat{ONI} \end{cases} \Rightarrow \triangle DGB \sim \triangle NOI(g.g)$$

$\Rightarrow \frac{BD}{IN} = \frac{GD}{ON}$ (**)

Từ (*),(**) ta có $\frac{DE}{MN} = \frac{GD}{ON}$

$$\frac{2GD}{MN} = \frac{GD}{ON}$$

$$\Rightarrow MN = 2ON$$

Mà M, N, O thẳng hàng nên O là trung điểm $MN \Rightarrow ON = OM$.

Câu 26. (ts Hải Phòng 2022-2023)Đề gò một chiếc thùng hình trụ bằng tôn không nắp có đường kính là 40 cm và chiều cao là 60 cm thì cần dùng tối thiểu bao nhiêu mét vuông tôn? (coi lượng tôn dùng để viền mép thùng không đáng kể, lấy $m \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải

Thùng hình trụ có đường kính là 40 cm nên bán kính đáy là $r = \frac{40}{2} = 20\text{ cm} \Rightarrow r = 0,2\text{ m}$.

Chiều cao $h = 60\text{ cm} = 0,6\text{ m}$.

Diện tích của mặt đáy chiếc thùng là $S_d = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot (0,2)^2 = 0,1256\text{ m}^2$.

Diện tích xung quanh chiếc thùng tôn là $S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi r h \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,7536\text{ m}^2$.

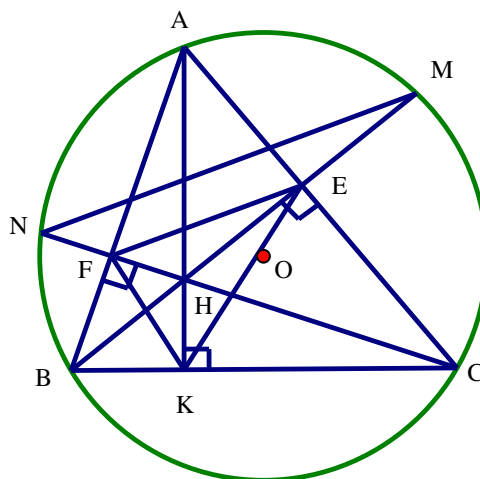
Diện tích toàn phần của chiếc thùng tôn là $S = S_d + S_{xq} \approx 0,8792\text{ m}^2$.

Vậy diện tích tôn cần dùng tối thiểu là $S = 0,88\text{ m}^2$.

Câu 27. (ts Bình Thuận 2022-2023)Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, có ba đường cao AK, BE và CF cắt nhau tại H .

1. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.
2. Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B ; N khác C). Chứng minh: $MN \parallel EF$.
3. Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



1. Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp:

Xét tứ giác $AEHF$, có: $\begin{cases} HE \perp AC \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ \\ HF \perp AB \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ \end{cases}$.

$$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

2. Hai đường thẳng BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N (M khác B ; N khác C). Chứng minh: $MN // EF$.

Xét tứ giác $BCEF$, có:
$$\begin{cases} BE \perp AC (gt) \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ \\ CF \perp AB (gt) \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^\circ \end{cases}$$

Tứ giác $BCEF$ có 2 đỉnh E, F liên tiếp nhau cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc 90° .

\Rightarrow Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{BCF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF) hay $\widehat{FEB} = \widehat{BCN}$. (1)

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{BMN} = \widehat{BCN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BN). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{BMN} = \widehat{FEB}$.

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow MN // EF$. (điều phải chứng minh).

3. Giả sử hai điểm B, C cố định, điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, C). Tìm vị trí của điểm A sao cho chu vi tam giác KEF đạt giá trị lớn nhất.

Xét đường tròn đường kính BC , có $\widehat{FBE} = \widehat{ECF}$ hay $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EF).

$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{AN} \Rightarrow AM = AN$.

Mà $OM = ON = R$ nên OA là đường trung trực của đoạn thẳng MN .

$\Rightarrow OA \perp MN$.

Lại có: $MN // EF$ (câu b) $\Rightarrow OA \perp EF$.

Tương tự: $OB \perp FK; OC \perp EK$.

Ta có:
$$S_{\Delta ABC} = S_{OEF} + S_{OFBK} + S_{OECK} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.FK + \frac{1}{2}OC.EK = \frac{1}{2}R.(EF + FK + EK)$$

$$= \frac{1}{2}.R.C_{\Delta KEF} \text{ (trong đó } C_{\Delta KEF} \text{ là chu vi } \Delta KEF \text{)}.$$

Khi đó: Chu vi ΔKEF lớn nhất khi và chỉ khi diện tích ΔABC lớn nhất.

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AK.BC$.

Theo đề bài BC cố định nên $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi AK lớn nhất. $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC .

Vậy chu vi ΔKEF lớn nhất khi và chỉ A là điểm chính giữa cung lớn BC .

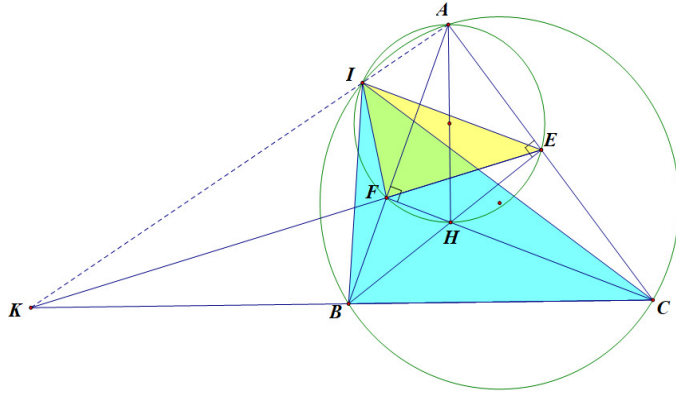
Câu 28. (ts Thừa Thiên Huế 2022-2023) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC .

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I (A không trùng với I). Chứng minh hai tam giác IBC và IFE đồng dạng với nhau.

c) Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K . Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $\widehat{AFH} = 90^\circ$ (Vì CF là đường cao của tam giác ABC)

$\widehat{AEH} = 90^\circ$ (Vì BE là đường cao của tam giác ABC)

Do đó $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét tứ giác $AEHF$, ta có: $\widehat{IEF} = \widehat{IAF}$ (cùng chắn \widehat{IF})

$\widehat{IAF} = \widehat{IBC}$ (cùng chắn \widehat{IB})

Do đó $\widehat{IEF} = \widehat{IBC}$

Tương tự, $\widehat{FIE} = \widehat{FAE}$ (cùng chắn \widehat{EF})

$\widehat{FAE} = \widehat{BIC}$ (cùng chắn \widehat{BC})

Do đó $\widehat{FIE} = \widehat{BIC}$

Xét $\triangle IBC$ và $\triangle IFE$, ta có: $\widehat{IEF} = \widehat{IBC}$ (cmt)

$\widehat{FIE} = \widehat{BIC}$ (cmt)

Do đó $\triangle IBC \sim \triangle IFE$ (g - g)

c)

Tứ giác $IAEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IFK} = \widehat{IAE}$

Tứ giác $IABC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{IAE}$

Suy ra $\widehat{IFK} = \widehat{IBK}$

Suy ra tứ giác $IFBK$ nội tiếp (có hai đỉnh B, F kề cùng nhìn cạnh IK dưới một góc bằng nhau).

Vậy $\widehat{KIF} + \widehat{KBF} = 180^\circ$, mà $\widehat{KBF} = \widehat{FEC} = \widehat{FIA}$

$\Rightarrow \widehat{KIF} + \widehat{FIA} = 180^\circ$ hay ba điểm A, I, K thẳng hàng.

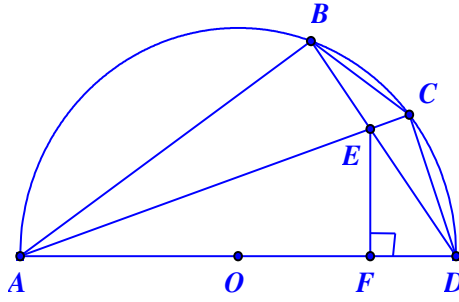
Câu 29. (ts Đắc Nông 2022-2023) Cho nửa đường tròn đường kính AD. Lấy điểm B thuộc nửa đường tròn (B khác A và D), trên cung BD lấy điểm C (C khác B và D), trên cung BD lấy điểm E (E khác B và D). Hai dây AC và BD cắt nhau tại điểm E. Kẻ đoạn thẳng EF vuông góc với AD (F thuộc AD).

a) Chứng minh tứ giác ABFE nội tiếp

b) Chứng minh $AE.AC = AF.AD$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BFC.

Lời giải



a. Ta có $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ABE} = 90^\circ$
 $EF \perp AB \Rightarrow \widehat{AFE} = 90^\circ$
 Xét tứ giác ABEF có $\widehat{ABE} + \widehat{AFE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 \Rightarrow Tứ giác ABEF nội tiếp.

b. Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ACD$ có

\widehat{CAD} chung \widehat{ACB}
 $\widehat{ACD} = \widehat{AFE} (= 90^\circ) \Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ACD (g.g)$
 $\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AF \cdot AD = AE \cdot AC$

c. Ta có $\widehat{EBF} = \widehat{EAF}$ (tứ giác ABEF nội tiếp)

Mà $\widehat{EAF} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{CBD}$ hay BE là phân giác trong của $\triangle BCF$

Chứng minh tương tự ta có : CE là phân giác trong của $\triangle BCF$

Suy ra E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCF$

Câu 30. (ts Bình Định 2022-2023) Từ một điểm S ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến SB, SC (B, C là các tiếp điểm) và một cát tuyến cắt (O) tại D và E (D nằm giữa S và E). Qua B kẻ đường thẳng song song với DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là A. BC và AC cắt DE lần lượt tại F và I.

a) Chứng minh: $\widehat{SIC} = \widehat{SBC}$.

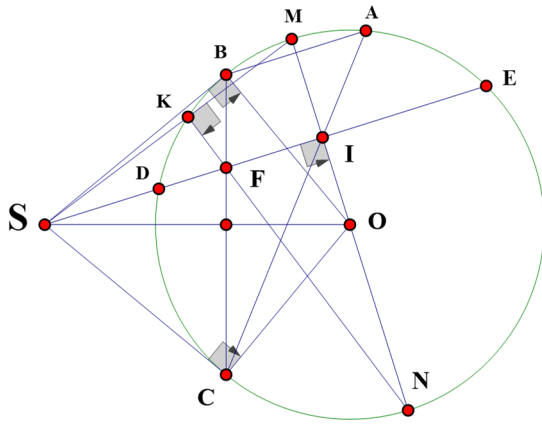
b) Chứng minh 5 điểm S, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh: $FI \cdot FS = FD \cdot FE$.

d) Đường thẳng OI cắt đường tròn (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng NF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh ba điểm S, K, M thẳng hàng.

Lời giải

a **Chứng minh:** $\widehat{SIC} = \widehat{SBC}$



Ta có: $\widehat{SBC} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn \widehat{BC})

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{SIC}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{SBC} = \widehat{SIC}$

b) Chứng minh: 5 điểm S, B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{SOB} + \widehat{SOC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

\Rightarrow tg : SBOC nội tiếp đường tròn

Mà $\widehat{SBC} = \widehat{SIC}$

Do đó B, I, cùng nhìn SC dưới 1 góc bằng nhau

\Rightarrow tg : SBIC nội tiếp đường tròn

Nên 5 điểm S, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh: FI.FS = FD.FE

Ta có: $\triangle FBS \sim \triangle FIC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{FB}{FI} = \frac{FS}{FC} \Rightarrow FI.FS = FB.FC \quad (1)$$

Mà

$\triangle FBD \sim \triangle FEC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{FB}{FE} = \frac{FD}{FC} \Rightarrow FB.FC = FE.FD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow FI.FS = FD.FE$ (đpcm).

d) Đường thẳng OI cắt (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng NF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh ba điểm S, K, M thẳng hàng.

$\triangle SFB \sim \triangle CFI$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{FS}{FC} = \frac{FB}{FI} \Rightarrow FB.FC = FS.FI \quad (*)$$

Lại có:

$$\Delta FBK \sim \Delta FNC \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{FB}{FN} = \frac{FK}{FC} \Rightarrow FB \cdot FC = FN \cdot FK \text{ (**)}$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow FS \cdot FI = FN \cdot FK$

$$\Rightarrow \frac{FS}{FN} = \frac{FK}{FI} \text{ và } \widehat{KFS} = \widehat{IFN} \text{ (đối đỉnh)}$$

Nên $\Delta KFS \sim \Delta IFN$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \widehat{FKS} = \widehat{FIN} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{NKM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{FKS} + \widehat{NKM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng.

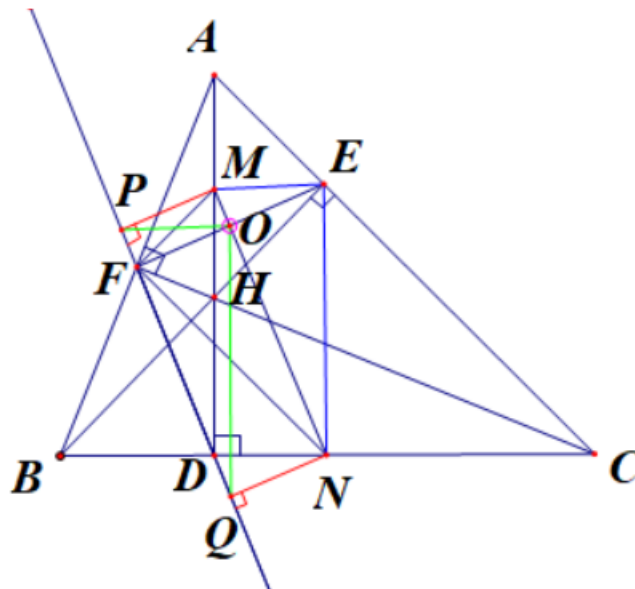
Câu 31. (ts Đà Nẵng 2022-2023) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Vẽ các đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ.

a. Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp.

b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BC . Chứng minh rằng $FM \cdot FC = FN \cdot FA$.

c. Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE và MN .

Lời giải



a. Chứng minh rằng các tứ giác $AEHF$ và $BFEC$ nội tiếp.

$$\text{Do } AD, BE, CF \text{ là các đường cao của } \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = \widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \\ \widehat{ADB} = 90^\circ \end{cases}$$

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$

\Rightarrow tứ giác $AEHF$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

Xét tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

\Rightarrow tứ giác $BFEC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

b. Chứng minh rằng $FM \cdot FC = FN \cdot FA$.

Xét $\triangle AFH$ có $\widehat{AFH} = 90^\circ$ và M là trung điểm của các đoạn thẳng AH

$$\Rightarrow MA = MF = MH$$

$$\Rightarrow \triangle MAF \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{MAF} = \widehat{MFA}$$

Tương tự $\triangle NCF$ cân tại $N \Rightarrow \widehat{NFC} = \widehat{NCF}$

Lại có $\widehat{BAD} = \widehat{BCF}$ (cùng phụ với \widehat{ABD})

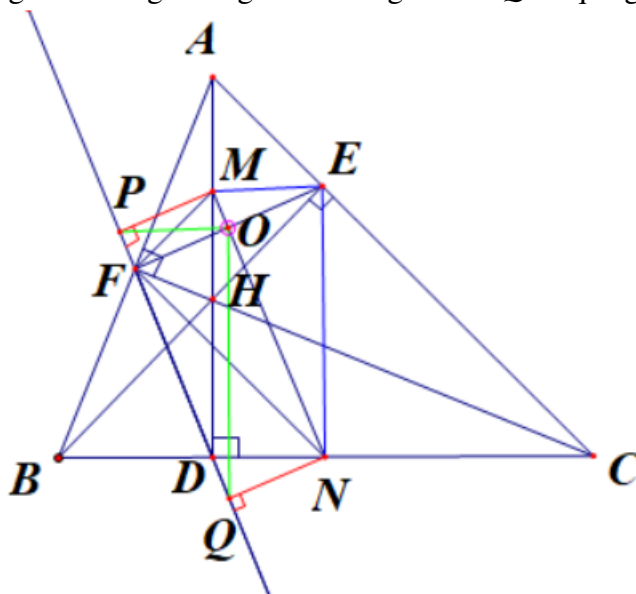
$$\text{Nên } \widehat{MAF} = \widehat{MFA} = \widehat{NFC} = \widehat{NCF}$$

Xét $\triangle MAF$ và $\triangle NCF$ có $\widehat{MAF} = \widehat{MFA} = \widehat{NFC} = \widehat{NCF}$

$$\Rightarrow \triangle MAF \sim \triangle NCF \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{FM}{NF} = \frac{AF}{CF} \Rightarrow FM \cdot CF = NF \cdot AF .$$

c. Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE và MN .



Gọi O là giao điểm của EF và MN

$$\text{Ta có } \widehat{AFC} = \widehat{AFM} + \widehat{MFC} = \widehat{NFC} + \widehat{MFC} = \widehat{MFN}$$

$$\text{Mà } \widehat{AFC} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{MFN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FMO} + \widehat{FNO} = 90^\circ \text{ (1)}$$

Ta có $MA = MF = MH$ (cmt)

Tương tự $MA = ME = MH$

Do đó $ME = MF$

Tương tự $NE = NF$

Suy ra MN là đường trung trực của đoạn thẳng $FE \Rightarrow MN \perp FE \Rightarrow \widehat{MOF} = \widehat{NOF} = 90^\circ$

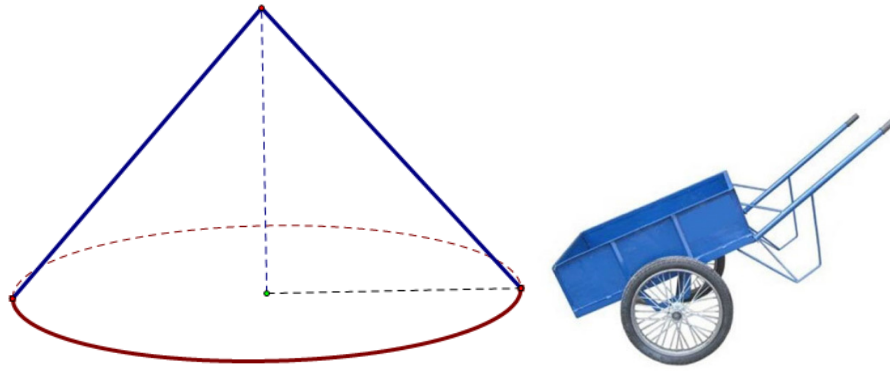
Do đó tứ giác $MOFP, NOFQ$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{OPF} = \widehat{OMF}; \widehat{OQF} = \widehat{ONF}$$

$$\Rightarrow \widehat{OPF} + \widehat{OQF} = \widehat{FMO} + \widehat{FNO} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{POQ} = 90^\circ$$

Do vậy đường tròn đường kính PQ đi qua giao điểm của FE và MN .

Câu 32. (ts TP HCM 2022-2023) Một đống cát dạng hình nón có chu vi đáy là $25,12\text{ m}$ và độ cao là $1,5\text{ m}$.



a) Tính thể tích của đống cát trên? Biết công thức tính chu vi của đường tròn là $C = 2\pi R$ và công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi.R^2.h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi = 3,14$)

b) Người ta dùng xe cải tiến để vận chuyển đống cát đó đến khu xây dựng. Biết thùng chứa của xe cải tiến có dạng hình hộp chữ nhật có kích thước dài 1 m , rộng 6 dm và cao 3 dm . Trong mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa nhiều hơn thể tích thực của nó là 10% để vận chuyển được nhiều cát hơn. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chuyến xe cải tiến để chuyển được hết đống cát trên?

Lời giải

a) Bán kính đường tròn đáy của hình nón là:

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{25,12}{2 \cdot 3,14} = 4\text{ m}$$

Thể tích của đống cát trên là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.R^2.h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 1,5 = 25,12\text{ m}^3$$

b) Đổi: $6\text{ dm} = 0,6\text{ m}; 3\text{ dm} = 0,3\text{ m}$

Thể tích 1 lần chở là:

$$V_{\text{cát trên xe}} = 1 \cdot 0,6 \cdot 0,3 \cdot (1 + 10\%) = 0,198\text{ m}^3$$

Số lần chở để chở hết đống cát trên là:

$$n = \frac{V_{\text{cát}}}{V_{\text{cát trên xe}}} = \frac{25,12}{0,198} \approx 126,8 \text{ (lần)}$$

Vậy cần ít nhất 127 lần chở để chở hết đống cát.

Câu 33. (ts Khánh Hòa 2022-2023) Cho nửa đường tròn tâm O bán kính 3 cm , có đường kính AB . Gọi C là điểm thu nửa đường tròn sao cho $AC > BC$. Vẽ OD vuông góc với AC (D thuộc AC) và CE vuông góc với AB (E thuộc AB). Tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn cắt tia AC tại F .

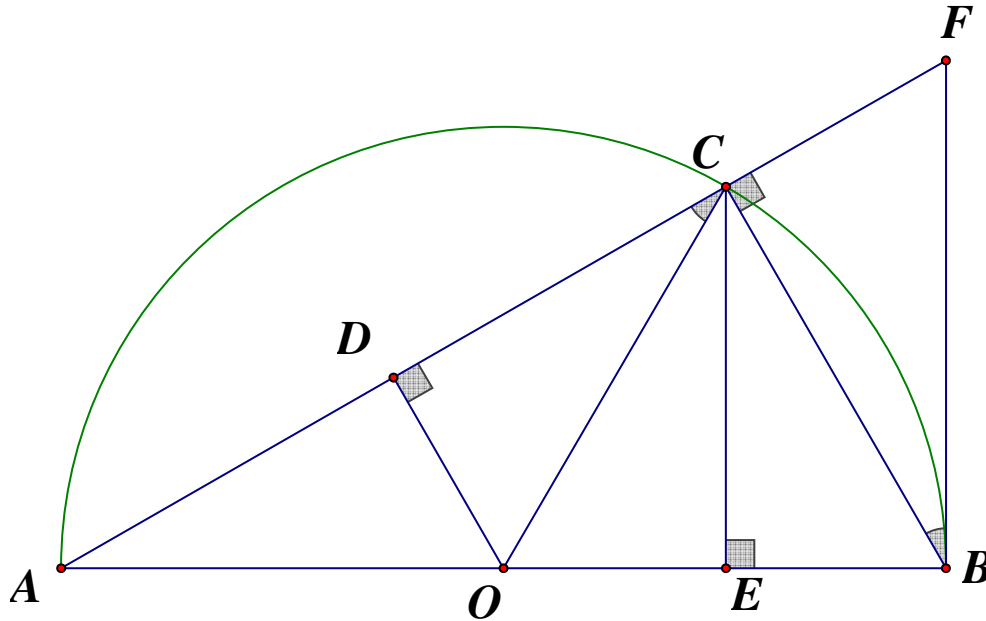
a) Chứng minh: $ODCE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{OCD} = \widehat{CBF}$.

c) Cho $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích phần tam giác ABF nằm bên ngoài đường tròn ($O; 3\text{ cm}$)

d) Khi C di động trên nửa đường tròn $(O; 3cm)$. Tìm vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác OCE lớn nhất.

Lời giải



a) Chứng minh: $ODCE$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{ODC} = 90^\circ$ (Vì $OD \perp AC$)

$\widehat{CEO} = 90^\circ$ (Vì $CE \perp AB$)

Xét tứ giác $ODCE$, ta có $\widehat{ODC} + \widehat{CEO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà \widehat{ODC} và \widehat{CEO} là hai góc đối nhau

Do đó $ODCE$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh: $\widehat{OCD} = \widehat{CBF}$.

Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{CBF}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung \widehat{CB}) (1)

Mặt khác ΔAOC cân tại O (Vì $OA = OC = R$) nên $\widehat{CAB} = \widehat{OCA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCD} = \widehat{CBF}$

c) Cho $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích phần tam giác ABF nằm bên ngoài đường tròn $(O; 3cm)$

Ta có $\widehat{BAC} = 30^\circ(gt) \Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ$.

Kẻ $OD \perp AC (D \in AC) \Rightarrow DA = DC$

Trong ΔABF ($\widehat{B} = 90^\circ$) có: $BF = AB \cdot \tan \widehat{BAD} = 2R \cdot \tan 30^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔOAD ($\widehat{D} = 90^\circ$) có:

$$AD = OA \cdot \cos \widehat{OAD} = R \cdot \cos 30^\circ = R \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AC = 2AD = R\sqrt{3} \text{ và } OD = OA \cdot \sin 30^\circ = \frac{R}{2}$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABF : S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2R^2 \sqrt{3}}{3} (cm^2)$$

$$\text{Diện tích } \triangle OAC : S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \frac{R}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} (cm^2)$$

$$\text{Diện tích hình quạt } OBC : S_3 = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6} (cm^2)$$

Vậy diện tích của phần tam giác ABF nằm ngoài hình tròn tâm O :

$$S = S_1 - S_2 - S_3 = \frac{2R^2 \sqrt{3}}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{6}$$

$$S = \frac{R^2 (5\sqrt{3} - 2\pi)}{12} = \frac{3^2 (5\sqrt{3} - 2\pi)}{12} = \frac{15\sqrt{3} - 6\pi}{4} (cm^2)$$

d) Khi C di động trên nửa đường tròn $(O; 3cm)$. Tìm vị trí điểm C sao cho chu vi tam giác OCE lớn nhất.

Đặt $OE = a; CE = b$.

Trong $\triangle OEC$ ($\widehat{E} = 90^\circ$), ta có: $OE^2 + CE^2 = OC^2$

$$\text{Nên } a^2 + b^2 = 3^2$$

Áp dụng BĐT $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

$$\text{Ta có: } (a+b)^2 \leq 2 \cdot 3^2$$

$$\text{Hay } a+b \leq 3\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó Chu vi tam giác CEO: } OE + CE + OC = a + b + 3 \leq 3\sqrt{2} + 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

$$\Leftrightarrow \triangle OEC \text{ vuông cân tại E} \Leftrightarrow \widehat{EOC} = 45^\circ \Leftrightarrow \text{sđ } \widehat{BC} = 45^\circ$$

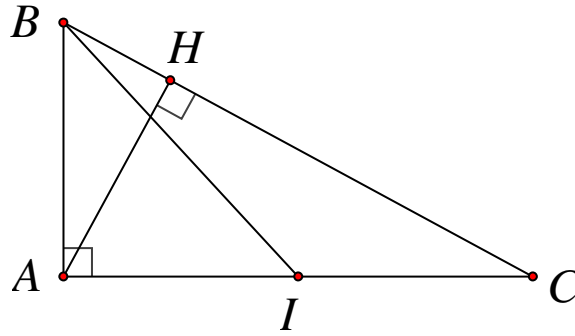
Vậy điểm C nằm trên nửa đường tròn sao cho $\widehat{BOC} = 45^\circ$ thì chu vi tam giác OCE lớn nhất là $3 + 3\sqrt{2}$ (cm).

Câu 34. (ts Vinh Long 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (H thuộc BC). Biết $AB = 3cm, BC = 5cm$.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AC và AH

b) Gọi I là trung điểm của AC , tính độ dài đoạn thẳng AI và số đo góc ABI (làm tròn đến độ)

Lời giải



a) Xét ΔABC vuông tại A có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \text{ (định lí Pi-ta-go)}$$

$$\Leftrightarrow 3^2 + AC^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + AC^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Leftrightarrow AC = 4\text{cm}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại A ta có:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$\Leftrightarrow AH \cdot 5 = 3 \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{12}{5} = 2,4\text{cm}$$

Vậy $AC = 4\text{cm}$ và $AH = 2,4\text{cm}$

$$AI = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\text{cm}$$

b) Ta có:

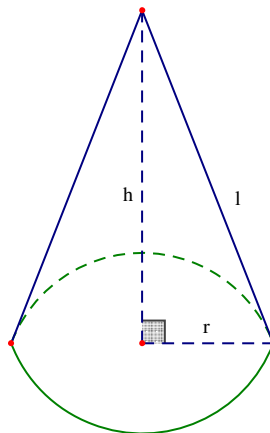
Xét ΔABI vuông có:

$$\tan \widehat{ABI} = \frac{AI}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{ABI} = 34^\circ$$

Vậy $AI = 2\text{cm}$ và $\tan \widehat{ABI} = 34^\circ$

Câu 35. (ts Tiền Giang 2022-2023) Một hình nón có bán kính đường tròn đáy là 5 cm và độ dài đường sinh là 13 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Lời giải



$$\text{Ta có: } h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$

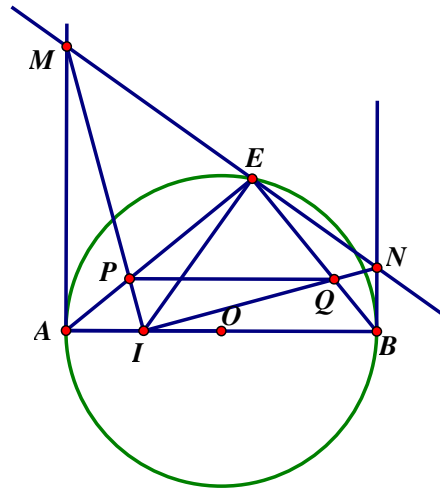
$$= 12(\text{cm})$$

Diện tích xung quanh của hình nón

$$\begin{aligned}
 S_{xq} &= \pi r l \\
 &= \pi \cdot 5 \cdot 13 \\
 &= 65\pi (\text{cm}^2) \\
 \text{Thể tích của hình nón:} \\
 V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\
 &= \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 13 \\
 &= 100\pi (\text{cm}^3)
 \end{aligned}$$

- Câu 36. (ts Ha Nam 2022-2023)** Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA và E là điểm thuộc đường tròn tâm O (E không trùng với A và B). Gọi Ax và By là các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm E). Qua điểm E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI cắt Ax và By lần lượt tại M và N .
1. Chứng minh tứ giác $AMEI$ nội tiếp.
 2. Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $AE \cdot IN = BE \cdot IM$.
 3. Gọi P là giao điểm của AE và MI ; Q là giao điểm của BE và NI . Chứng minh hai đường thẳng PQ và BN vuông góc với nhau.
 4. Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O) . Tính diện tích tam giác OMN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có: $d \perp EI \Rightarrow \widehat{MEI} = 90^\circ$ mà AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A nên $\widehat{MAI} = 90^\circ$. Do đó: $\widehat{MEI} + \widehat{MAI} = 180^\circ$ nên tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
 Chứng minh tương tự, ta có tứ giác $BNEI$ cũng là tứ giác nội tiếp.

b) Vì tứ giác $BNEI$ nội tiếp nên $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Vì tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EMI} = \widehat{EAI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Do đó $\triangle EAB \sim \triangle IMN$ (g.g) suy ra $\frac{EA}{IM} = \frac{EB}{IN} \Rightarrow EA \cdot IN = EB \cdot IM$ (đpcm).

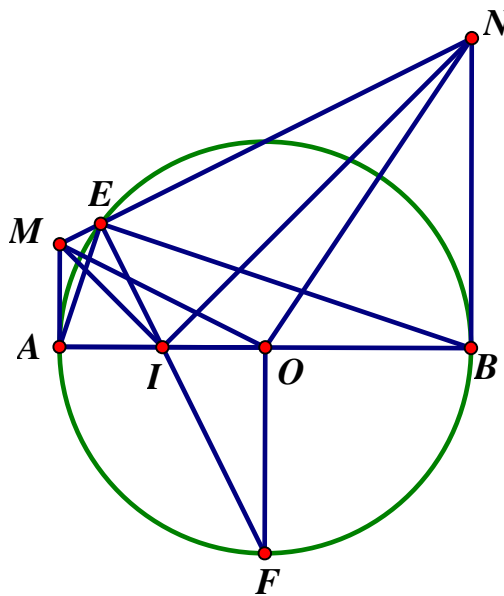
c) Vì $\triangle EAB \sim \triangle IMN$ (c.m.t) nên $\widehat{AEB} = \widehat{MIN}$ mà $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{AEB} = \widehat{MIN} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{PEQ} + \widehat{PIQ} = 180^\circ$ do đó tứ giác $EPIQ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EQP} = \widehat{EIP}$ (1)

Mặt khác: tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EIM} = \widehat{EAM}$ (2)

Và $\widehat{EAM} = \widehat{EBA}$ (3) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cung)

Từ (1),(2),(3) ta có: $\widehat{EQP} = \widehat{EBA} \Rightarrow PQ \parallel AB$ mà $AB \perp BN$ nên $PQ \perp BN$ (đpcm).

d)



Ta có: F là điểm chính giữa cung AB nên $\widehat{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$

Mà tứ giác $AMEI$ nội tiếp nên $\widehat{AMI} = \widehat{AEI} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AMI$ vuông cân tại A do đó:

$$AM = AI = \frac{R}{2}$$

Chứng minh tương tự: $\triangle BNI$ vuông cân tại B nên $BN = BI = \frac{3}{2}R$.

$$S_{OMN} = S_{ABNM} - S_{OMA} - S_{ONB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R}{2} + \frac{3R}{2} \right) \cdot 2R - \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot R - \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot R = R^2.$$

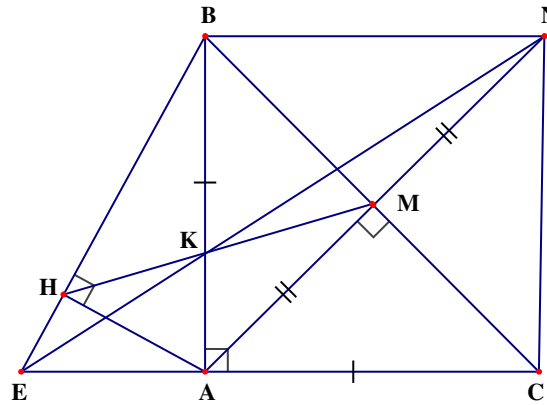
Vậy $S_{OMN} = R^2$.

Câu 37. (ts HÀ NỘI 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi E là một điểm bất kỳ trên tia CA sao cho điểm A nằm giữa hai điểm C và E . Gọi M và H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng BC và BE .

- 1) Chứng minh tứ giác $AMBH$ là tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh $BC \cdot BM = BH \cdot BE$ và HM là tia phân giác của góc AHB .

3) Lấy điểm N sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AN . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EN và AB . Chứng minh ba điểm H, K, M là ba điểm thẳng hàng.

Lời giải



1) Chứng minh tứ giác $AMBH$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có M và H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng BC và BE .

$$\Rightarrow AM \perp BC, AH \perp BE \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ, \widehat{AHB} = 90^\circ.$$

Xét tứ giác $AMBH$ có: $\widehat{AMB} + \widehat{AHB} = 180^\circ$.

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AMBH$ nội tiếp.

Vậy tứ giác $AMBH$ nội tiếp.

2) Chứng minh $BC \cdot BM = BH \cdot BE$ và HM là tia phân giác của góc AHB .

+ Tứ giác $AMBH$ nội tiếp đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{BM}).

$\triangle ABC$ vuông cân tại A có AM là đường cao nên AM cũng là phân giác
 $\Rightarrow \widehat{BAM} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BAM} = 45^\circ. (1)$$

Xét $\triangle BHM$ và $\triangle BCE$ có:

\widehat{EBC} chung; $\widehat{BHM} = \widehat{BCE} = 45^\circ$ (chứng minh trên).

$$\Rightarrow \triangle BHM \sim \triangle BCE (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BM}{BE} \Leftrightarrow BC \cdot BM = BH \cdot BE.$$

+ Lại có $\widehat{AHM} = \widehat{ABC} = 45^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{AM}). (2)

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{AHM} = 45^\circ.$$

$\Rightarrow HM$ là tia phân giác của \widehat{AHB} .

Vậy HM là tia phân giác của \widehat{AHB} .

3) Lấy điểm N sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AN . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EN và AB . Chứng minh ba điểm H, K, M là ba điểm thẳng hàng.

Xét $\triangle AHB$ có $\widehat{AHB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HBA} + \widehat{HAB} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{EAH} + \widehat{HAB} = \widehat{EAB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{HBA}$.

Xét $\triangle AHE$ và $\triangle BHA$ có:

$\widehat{AHE} = \widehat{AHB} = 90^\circ$,

$\widehat{EAH} = \widehat{HBA}$.

$\Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle BHA (g.g)$.

$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{AE}{BA}$.

Xét tứ giác $ABNC$ có hai đường chéo AN và BC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên tứ giác $ABNC$ là hình bình hành.

Mà $AN \perp BC \Rightarrow$ hình bình hành $ABNC$ là hình thoi.

Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow$ hình thoi $ABNC$ là hình vuông.

$\Rightarrow AE \parallel BN \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{AE}{BN}$ (Định lí Ta-lét).

$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{AK}{BK}$ (3)

Gọi HM cắt AB tại K' .

$\Rightarrow HK'$ là phân giác của \widehat{AHB} .

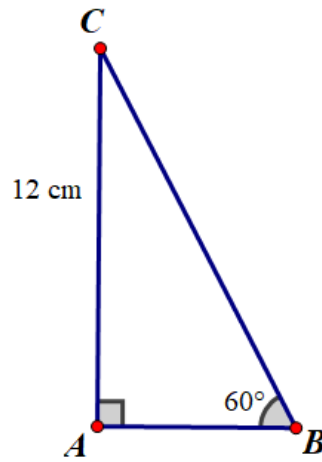
$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{AK'}{BK'}$ (tính chất đường phân giác). (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow K \equiv K'$.

Do đó ba điểm H, K, M thẳng hàng.

Câu 38. (ts Bình Phước 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 12\text{cm}, \widehat{B} = 60^\circ$. Hãy tính \widehat{C}, AB, BC và diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Vì ΔABC vuông tại A nên $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$AB = AC \cdot \cot \hat{B} = 12 \cdot \cot 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \approx 6,9 (cm)$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 12^2 + (4\sqrt{3})^2 = 192$$

$$\rightarrow BC = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \approx 13,9 (cm)$$

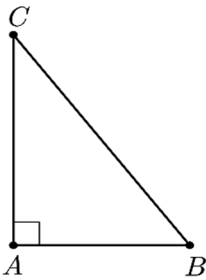
Diện tích tam giác ABC :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 12 = 24\sqrt{3} \approx 41,6 (cm^2)$$

Câu 39. (ts Cao Bằng 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm .

- a) Tính độ dài cạnh AC .
- b) Tính $\sin A$ và $\cos B$?

Lời giải



- a) Tính độ dài cạnh AC .

Tam giác ABC vuông tại A , Áp dụng định lí Pitago, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 5^2 - 3^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 16$$

$$\Rightarrow AC = 4 (cm).$$

- b) Tính $\sin A$ và $\cos B$?

Tam giác ABC vuông tại A , Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta có:

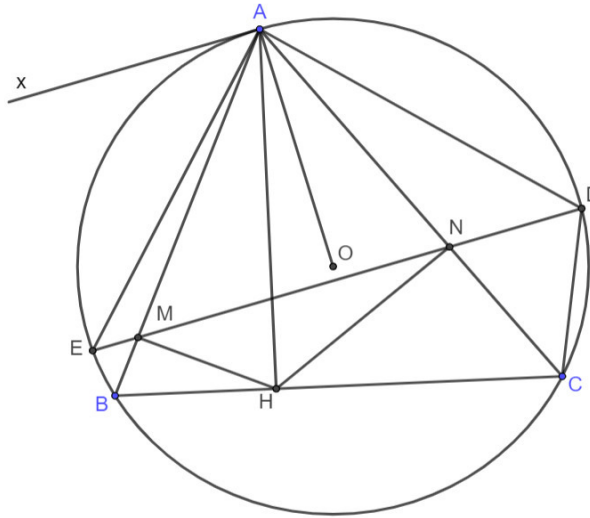
$$\sin A = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}; \cos A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}.$$

Câu 40. (ts Hà Tĩnh 2022-2023) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AH ($H \in BC$). Kẻ $HM \perp AB$ và $HN \perp AC$ ($M \in AB, N \in AC$).

a) Chứng minh AMHN là tứ giác nội tiếp.

b) Đường thẳng MN cắt cung nhỏ AC của đường tròn (O) tại D. Chứng minh $OA \perp MN$ và $AD = AH$.

Lời giải



a) Xét tứ giác AMHN có $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà 2 góc này ở vị trí đối nhau $\Rightarrow AMHN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ tiếp tuyến Ax của (O)

Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{AHN}$ (do tứ giác AMHN nội tiếp)

mà $\widehat{AHN} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với \widehat{CHN}) và $\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ ($= \frac{1}{2}sd\widehat{AB}$)

suy ra $\widehat{BAx} = \widehat{AMN} \Rightarrow Ax \parallel MN$ mà $Ax \perp OA \Rightarrow OA \perp MN$

Gọi E là giao điểm thứ hai của MN với (O).

Ta có $OA \perp DE \Rightarrow A$ là điểm chính giữa cung DE $\Rightarrow sd\widehat{AD} = sd\widehat{AE}$

mà $\widehat{ADN} = \frac{1}{2}sd\widehat{AE}$; $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}sd\widehat{AD} \Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ACD}$

Xét tam giác ADN và ACD có \widehat{A} chung; $\widehat{ADN} = \widehat{ACD}$

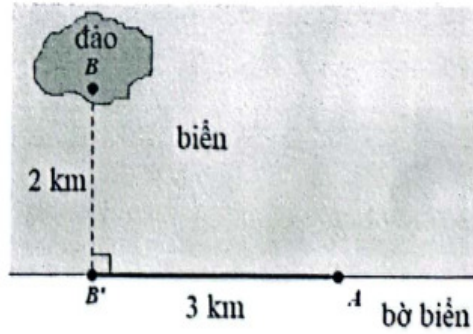
$$\Delta ADN \sim \Delta ACD (g - g) \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow AD^2 = AN.AC \quad (1)$$

Xét tam giác AHC vuông tại H, đường cao HN nên theo hệ thức lượng ta có $AH^2 = AN.AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD^2 = AH^2 \Rightarrow AD = AH$ (dpcm)

Câu 41. (ts Quảng Ninh 2022-2023) Một tỉnh dự định làm đường điện từ điểm A trên bờ biển đến điểm B trên một hòn đảo. B cách bờ một khoảng $BB' = 2km$, A cách B' một khoảng $AB' = 3km$ (hình vẽ). Biết chi phí làm 1km đường điện trên bờ là 5 tỷ đồng, dưới nước là 13 tỷ đồng. Tìm vị

trí điểm C trên đoạn bờ biển AB' sao cho khi làm đường điện theo đường gấp khúc ACB thì chi phí thấp nhất (coi bờ biển là đường thẳng).



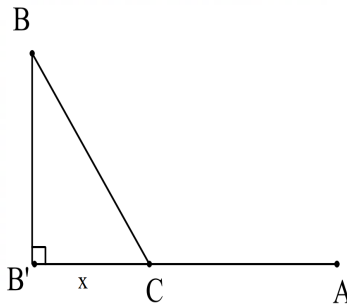
Lời giải

Đặt $B'C = x$ (km) (đk: $0 \leq x \leq 3$)

$\Rightarrow AC = 3 - x$ (km),

$BC = \sqrt{2^2 + x^2}$ (km)

Tổng số tiền làm đường điện theo đường gấp khúc ACB là:



$T = 13\sqrt{2^2 + x^2} + 5(3 - x)$ (tỷ đồng)

Ta có:

$13\sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{169(2^2 + x^2)} = \sqrt{(12^2 + 5^2)(2^2 + x^2)} \geq \sqrt{(24 + 5x)^2} = 24 + 5x$ (BĐT Bunhiacopxki)

$\Rightarrow T \geq 24 + 5x + 15 - 5x = 39$

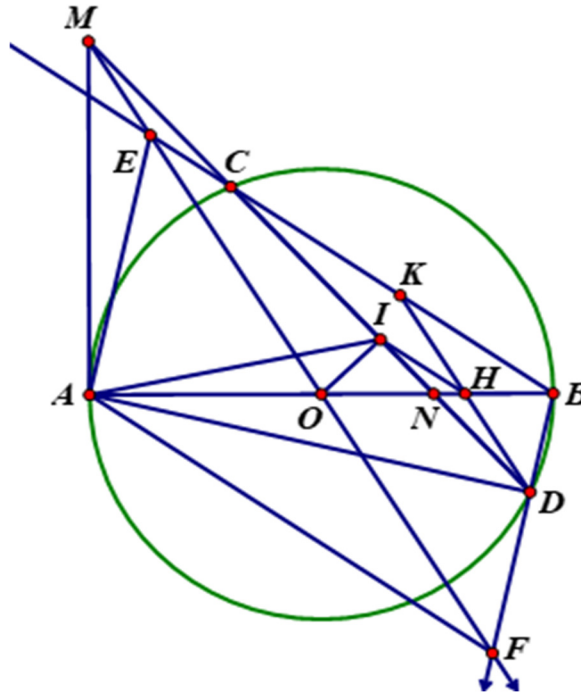
Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{12}{2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$

Vậy C cách B' một khoảng $\frac{5}{6}$ km thì chi phí thấp nhất.

Câu 42. (ts Hải Phòng 2022-2023) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M (M khác A). Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B). Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C và D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD .

- a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H . Chứng minh: $MA^2 = MC \cdot MD$ và $\widehat{IAB} = \widehat{MDH}$.
- c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC và BD . Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành.

Lời giải



Ta có $IC = ID$ (vì I là trung điểm của CD) nên OI vuông góc với $CD \Rightarrow \widehat{OIM} = 90^\circ$.

MA là tiếp tuyến của (O) nên MA vuông góc với $OA \Rightarrow \widehat{OAM} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AIMO$ có $\widehat{OIM} + \widehat{OAM} = 180^\circ$.

Vậy $AIMO$ nội tiếp đường tròn (tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180°).

b) Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MAD$ có

$\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC).

Góc \widehat{M} chung.

Suy ra $\triangle MAC$ và $\triangle MAD$ là hai tam giác đồng dạng.

Do đó $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ (đpcm).

Xét đường tròn đường kính OM có $\widehat{IAB} = \widehat{IMO}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn \widehat{OI}).

Mà $DK \parallel MO$ nên $\widehat{IMO} = \widehat{MDH}$ (2 góc so le trong).

Suy ra $\widehat{IAB} = \widehat{MDH}$ (đpcm).

c) Kéo dài DH cắt BC tại K . Vì $\widehat{IAB} = \widehat{MDK}$ nên tứ giác $AIHD$ nội tiếp.

□ $\widehat{IHA} = \widehat{IDA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Xét (O) có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Do đó $\widehat{HIA} = \widehat{CBA}$ vì 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $IH \parallel BC$.

Xét $\triangle CDK$ Có $IH \parallel BC$ và $IC = ID$ nên $HK = HD$

Xét $\triangle EBO$ có $KH \parallel OE$ nên $\frac{HK}{OE} = \frac{BH}{BO}$

Xét $\triangle FBO$ có $DH \parallel OF$ nên $\frac{HD}{OF} = \frac{BH}{BO}$

$\Rightarrow \frac{HK}{OE} = \frac{HD}{OF}$ mà $HK = HD$ nên $OE = OF$ hay O là trung điểm của EF

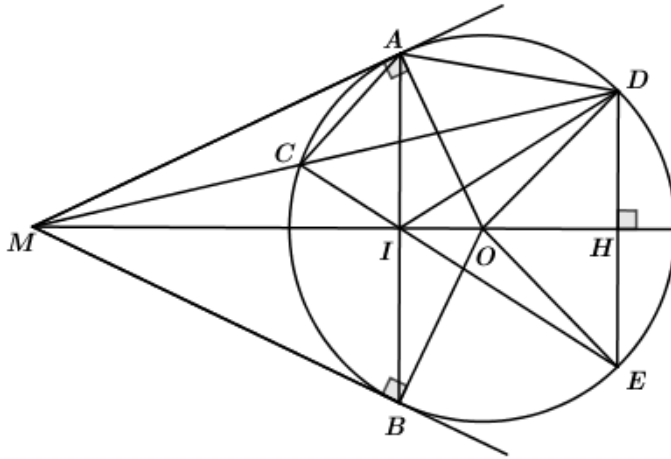
mà O là trung điểm của AB nên $AEBF$ là hình bình hành.

Câu 43. (ts Bà Rịa Vũng Tàu 2022-2023) Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB của (O) (A, B là hai tiếp điểm). Một đường thẳng qua M và không đi qua O cắt (O) tại hai điểm C, D (C nằm giữa M, D và A thuộc cung nhỏ CD).

a) Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp.

- b) Chứng minh $MA^2 = MC.MD$.
- c) Gọi I là giao điểm của AB và MO . Chứng minh tứ giác $CDOI$ nội tiếp.
- d) Kẻ đường thẳng qua D vuông góc với MO cắt (O) tại E khác D . Chứng minh ba điểm C, I, E thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp.
 Ta có MA, MB là hai tiếp tuyến của (O)
 Nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AMBO$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$
 Vậy tứ giác $AMBO$ nội tiếp.

b) Chứng minh $MA^2 = MC.MD$.
 Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$, có

$$\widehat{MAC} = \widehat{MDA} \text{ (cùng chắn } \widehat{AC} \text{)}$$

\widehat{AMD} góc chung

$$\Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MDA (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD$$

c) Gọi I là giao điểm của AB và MO . Chứng minh tứ giác $CDOI$ nội tiếp.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MA = MB \text{ (tctt)} \\ OA = OB \text{ (= R)} \end{cases}$$

Suy ra OM là đường trung trực AB

$$\Rightarrow OM \perp AB \text{ tại } I$$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A , đường cao AI

$$\Rightarrow MA^2 = MI \cdot MO \text{ (hệ thức lượng)}$$

$$\text{Mà } MA^2 = MC \cdot MD \Rightarrow MI \cdot MO = MC \cdot MD \Rightarrow \frac{MI}{MD} = \frac{MC}{MO}$$

Xét $\triangle MIC$ và $\triangle MDO$, có

$$\frac{MI}{MD} = \frac{MC}{MO} \text{ (cmt)}$$

\widehat{OMD} góc chung

$$\Rightarrow \triangle MIC \sim \triangle MDO (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{MDO} \text{ hay } \widehat{MIC} = \widehat{CDO}$$

Xét tứ giác $CDOI$ có $\widehat{CDO} + \widehat{CIO} = \widehat{MIC} + \widehat{CIO} = 180^\circ$ (kề bù)

Vậy tứ giác $CDOI$ nội tiếp.

d) Kẻ đường thẳng qua D vuông góc với MO cắt (O) tại E khác D . Chứng minh ba điểm C, I, E thẳng hàng.

Gọi H là giao điểm của DE và MO

Ta có $OD = OC (= R) \Rightarrow \triangle OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{OCD}$

Mà $\widehat{MDO} = \widehat{MIC}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{OCD}$

$$\Rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{OID} \text{ hay } \widehat{MIC} = \widehat{HID} \quad (1)$$

Mặt khác D và E đối xứng qua $MO \Rightarrow ID = IE \Rightarrow \widehat{HID} = \widehat{HIE} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{HIE}$

Ta lại có $\widehat{MIC} + \widehat{CID} + \widehat{DIH} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{HIE} + \widehat{CID} + \widehat{DIH} = 180^\circ$$

Vậy ba điểm C, I, E thẳng hàng.

Câu 44. (ts Ninh Bình 2022-2023) Một hình nón có bán kính đáy $r = 3\text{cm}$ và đường cao $h = 4\text{cm}$. Tính thể tích của hình nón (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải

Hình nón có bán kính đáy $r = 3\text{cm}$ và đường cao $h = 4\text{cm}$ thì có thể tích là

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 4 = 37,68 (\text{cm}^3).$$

Vậy thể tích hình nón là $37,68 (\text{cm}^3)$.

Câu 45. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB = 6\text{cm}$ và diện tích tam giác ABC bằng 24cm^2 . Tính độ dài các đoạn thẳng AC, BC, AH .

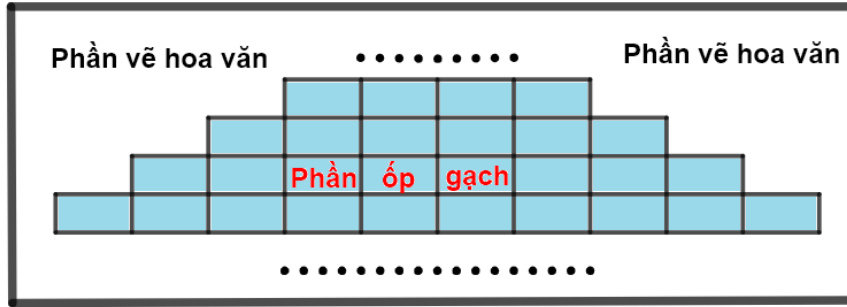
Lời giải

Ta có $AC = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{48}{6} = 8(\text{cm})$.

Theo định lí Py-ta-go $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10(\text{cm})$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8(\text{cm})$.

Câu 46. (ts Bình Thuận 2022-2023) Ông Bình trang trí một bức tường hình chữ nhật có kích thước $12\text{m} \times 3\text{m}$ bằng cách ốp gạch và vẽ hoa văn. Ông dùng loại gạch viên hình chữ nhật có kích thước $10\text{cm} \times 20\text{cm}$ để ốp. Phần gạch được ốp theo cách: Số viên gạch ở hai hàng kề nhau hơn kém nhau 2 viên, biết rằng hàng dưới cùng có 52 viên, hàng trên cùng có 2 viên và giá thành (gồm cả vật tư và công) cho phần ốp gạch là $400.000 \text{đồng}/\text{m}^2$. Giá thành cho phần vẽ hoa văn là $300.000 \text{đồng}/\text{m}^2$. Tính số tiền ông Bình phải trả để trang trí bức tường đó. (Biết rằng khoảng trống giữa các viên gạch là không đáng kể).



Hình minh họa
Lời giải

Diện tích của bức tường là: $12.3 = 36 (m^2)$.

Diện tích của một viên gạch là: $10.20 = 200 (cm^2) = 0,02 (m^2)$.

Tổng số viên gạch được ốp là: $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 52$ (viên).

Số số hạng của dãy tổng trên là: $\frac{52-2}{2} + 1 = 26$ (số).

$$\Rightarrow S = (2 + 52) \cdot \frac{26}{2} = 702 \text{ (viên)}.$$

Diện tích của phần ốp gạch là: $702 \cdot 0,02 = 14,04 (m^2)$.

Diện tích phần vẽ hoa văn là: $36 - 14,04 = 21,96 (m^2)$.

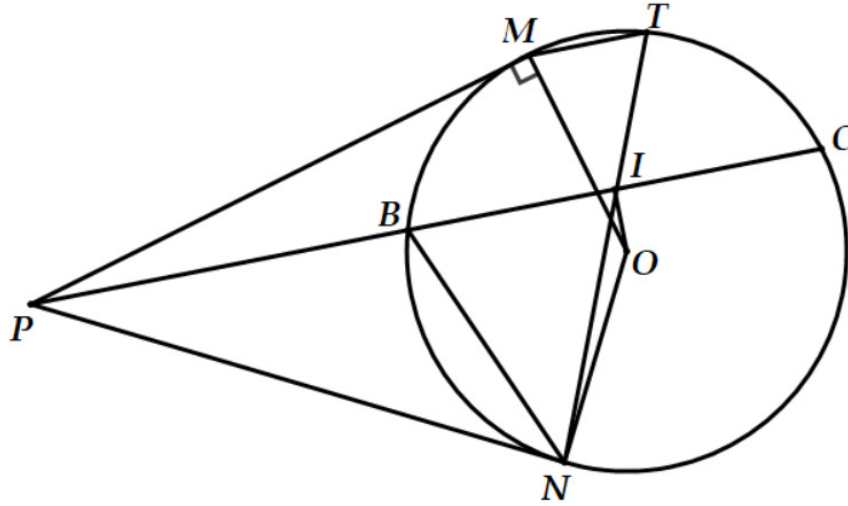
Số tiền ông Bình phải trả để trang trí bức tường đó là:

$$21,96.300000 + 14,04.400000 = 12204000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 47. (ts Điện Biên 2022-2023) Cho đường tròn (O) và điểm P nằm ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến PM, PN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua P cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C ($PB < PC, d$ không đi qua tâm O).

1. Chứng minh tứ giác $PMON$ nội tiếp.
2. Chứng minh $PN^2 = PB.PC$. Tính độ dài đoạn BC khi $PB = 4cm, PN = 6cm$.
3. Gọi I là trung điểm của BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh $MT \parallel BC$.

Lời giải



1. Chứng minh tứ giác $PMON$ nội tiếp

Vì PM, PN là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại M, N nên $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90^\circ$

Xét tứ giác $PMON$ có $\widehat{OMP} + \widehat{ONP} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nhau nên tứ giác $PMON$ nội tiếp.

2. Chứng minh $PN^2 = PB \cdot PC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $PB = 4cm, PN = 6cm$.

Xét $\triangle PNB$ & $\triangle PCN$ có:

$$\widehat{PNB} = \widehat{PCN} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung } BN \text{)}$$

$$\widehat{NPC} \text{ là góc chung}$$

$$\Rightarrow \triangle PNB \sim \triangle PCN \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{PB}{PN} = \frac{PN}{PC} \Rightarrow PN^2 = PB \cdot PC$$

Thay $PB = 4cm, PN = 6cm$ ta có: $6^2 = 4 \cdot PC \Rightarrow PC = 9(cm)$

Vậy $BC = PC - PB = 9 - 4 = 5cm$.

3) Gọi I là trung điểm của BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T .

Chứng minh $MT \parallel BC$.

Vì I là trung điểm của BC (gt) nên $OI \perp BC$ tại I (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow \widehat{OIP} = \widehat{OMP} = 90^\circ$, mà hai góc này ở vị trí kề nhau cùng nhìn cạnh OP nên tứ giác $OIMP$ nội tiếp.

Lại có tứ giác $OMPN$ nội tiếp (câu a) suy ra 5 điểm O, I, M, P, N cùng thuộc 1 đường tròn.

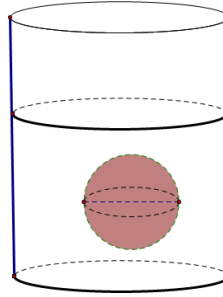
$$\Rightarrow \widehat{NIP} = \widehat{NMP} \text{ (cùng chắn cung } NP \text{)}$$

Mà $\widehat{NMP} = \widehat{NTM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MN)

$$\Rightarrow \widehat{NIP} = \widehat{NTM}$$

Hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MT \parallel BC$ (đpcm).

Câu 48. (ts Thừa Thiên Huế 2022-2023) Người ta nhấn chìm hoàn toàn một viên bi sắt đặc vào một cốc thủy tinh chứa nước có dạng hình trụ thì nước trong cốc dâng lên thêm 2cm và không tràn ra ngoài cốc (như hình vẽ bên). Biết đường kính đáy của cốc bằng 6cm (bỏ qua bề dày thành cốc). Tính thể tích viên bi.



Lời giải

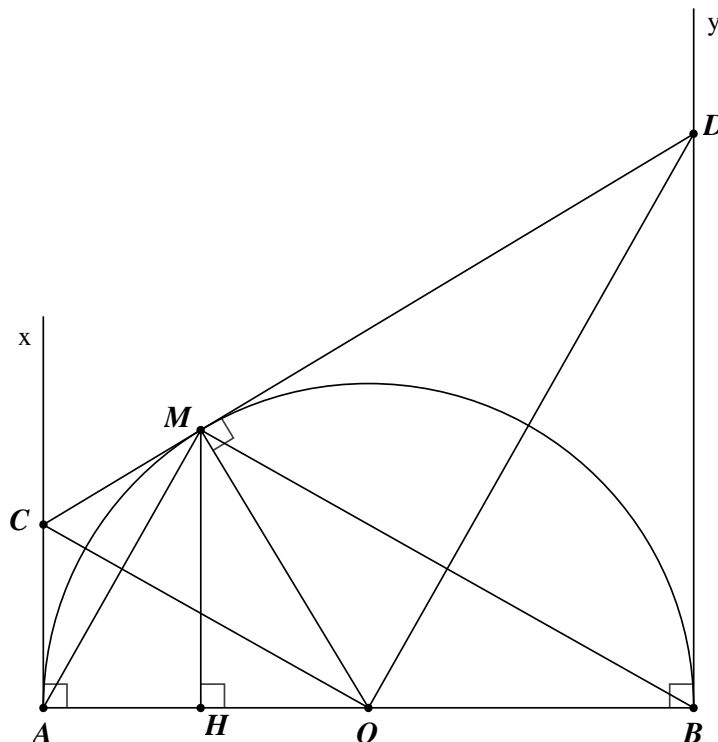
Bán kính đáy của cốc bằng $R = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$.

Thể tích viên bi chính là thể tích nước dâng lên nên thể tích viên bi là: $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 18\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 49. (ts Bắc Kạn 2022-2023) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB , M là một điểm bất kì thuộc nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M cắt các tiếp tuyến Ax và By của đường tròn (O) lần lượt tại C và D .

1. Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp.
2. Chứng minh CO vuông góc với OD .
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM và BDM .

Lời giải



1. Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp.

Vì Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A (gt) $\Rightarrow Ax \perp AB \Rightarrow \widehat{OAC} = 90^\circ$.

Vì CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M (gt) $\Rightarrow CD \perp OM \Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ACMO$ có $\widehat{OAC} + \widehat{OMC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau $\Rightarrow ACMO$ là tứ giác nội tiếp (dnhb).

2. Chứng minh CO vuông góc với OD .

Vì CA và CM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và M

$$\Rightarrow OC \text{ là phân giác của } \widehat{AOM} \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \Rightarrow \widehat{COM} = \frac{1}{2} \widehat{AOM}$$

Vì DB và DM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và M

$$\Rightarrow OD \text{ là phân giác của } \widehat{BOM} \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \Rightarrow \widehat{MOD} = \frac{1}{2} \widehat{MOB}$$

Mà $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\text{Do đó } \widehat{COM} + \widehat{MOD} = \frac{1}{2}(\widehat{AOM} + \widehat{MOB}) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp OD$$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM và BDM .

Ta có $CA = CM$; $DB = DM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $CD = CM + DM$ nên $CD = CA + DB = AC + BD$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông nên $CD \geq AB = 2R$

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = \frac{(AC + BD) \cdot AB}{2} = \frac{CD \cdot AB}{2} \geq \frac{AB \cdot AB}{2} = 2R^2$$

Kẻ $MH \perp AB \Rightarrow MH \leq MO = R$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$$S_{MAB} = \frac{MH \cdot AB}{2} \leq \frac{MO \cdot AB}{2} = R^2$$

$$S_{ACM} + S_{BDM} = S_{ABCD} - S_{AMB} \geq 2R^2 - R^2 = R^2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow M$ là điểm nằm chính giữa cung AB .

Vậy M nằm chính giữa cung AB thì tổng diện tích hai tam giác ACM và BDM có giá trị nhỏ nhất và bằng R^2 .

Câu 50. (ts Vinh Long 2022-2023) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ hai đường cao

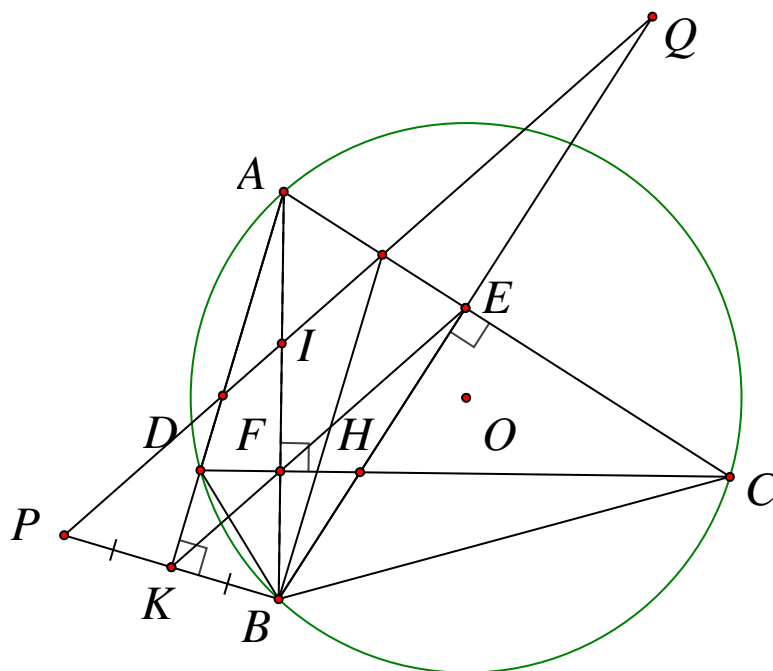
BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H (E thuộc AC , F thuộc AB).

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp được đường tròn

b) Chứng minh $BH \cdot BE = BF \cdot BA$

c) Đường thẳng CF cắt đường tròn (O) tại D ($D \neq C$). Gọi P, Q, I lần lượt là các điểm đối xứng của B qua AD, AC, CD ; K là giao điểm của BP và AD . Chứng minh ba điểm P, I, Q thẳng hàng.

Lời giải



a) BE là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AEH$ vuông tại E

$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AH (1)

CF là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{AFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AFH$ vuông tại F

$\Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AH (2)

Từ (1)(2) suy ra E, F thuộc đường tròn đường kính AH nên bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn.

Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp được đường tròn.

b) Tứ giác $AEHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{FHB}$ (cùng bù \widehat{EHF})

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{FHB}$

Xét ΔBAE và ΔBHF có:

\widehat{ABE} chung

$\widehat{BAE} = \widehat{FHB}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BAE \sim \Delta BHF$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BA}{BH} = \frac{BE}{BF} \Rightarrow BA \cdot BF = BH \cdot BE$ (đpcm)

c) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{KDB} = \widehat{ACB}$ (hai góc cùng bù với \widehat{ADB})

Mà $\widehat{DKB} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta DKB \sim \Delta CEB$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{DBK} = \widehat{EBC}$ (3)

Tứ giác $DKBF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DFK} = \widehat{DBK}$ (4)

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{EBC}$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{DFK} = \widehat{EFC}$

Mà $\widehat{DFK} + \widehat{KFC} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EFC} + \widehat{KFC} = 180^\circ$

$\Rightarrow K, F, E$ thẳng hàng (*)

Vì KF, FE lần lượt là đường trung bình của ΔBPI và ΔBIQ

$\Rightarrow \begin{cases} PI // KF \\ IQ // FE \end{cases}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra P, I, Q thẳng hàng (theo tiên đề O – clit)

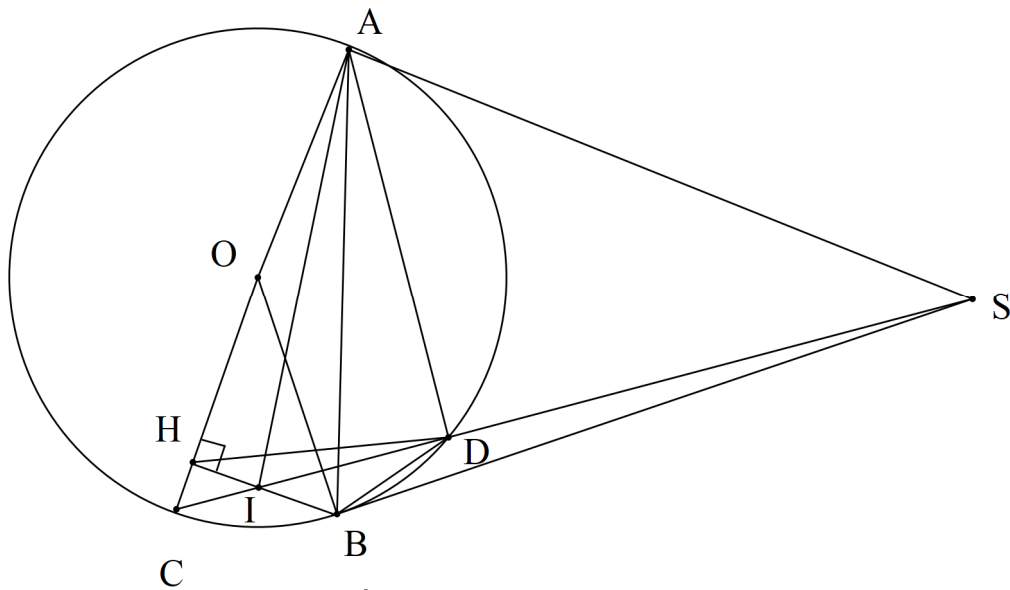
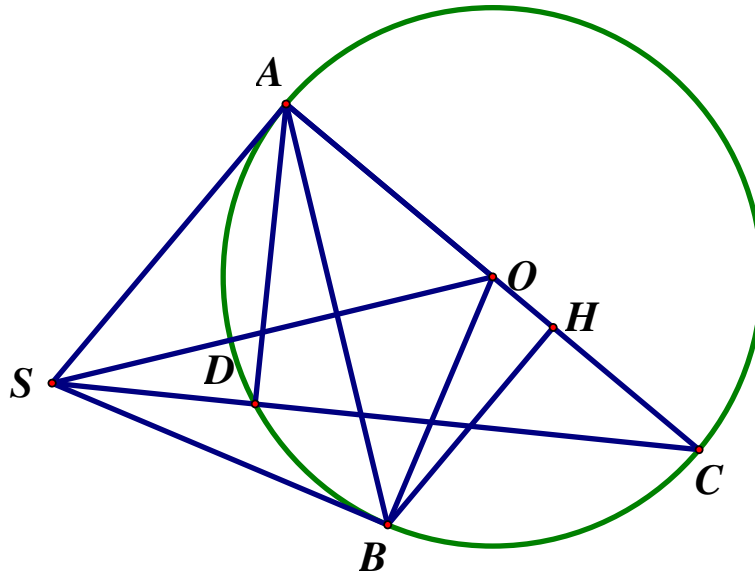
Câu 51. (ts Bình Phước 2022-2023) Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến SA, SB (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O), đường thẳng SC cắt đường tròn (O) tại điểm D (D khác C).

a) Chứng minh tứ giác $SAOB$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $SA^2 = SC \cdot SD$.

c) Kẻ BH vuông góc với AC tại điểm H . Chứng minh đường thẳng SC đi qua trung điểm của đoạn thẳng BH .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $SAOB$ nội tiếp đường tròn.

+ SA là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại $A \Rightarrow \widehat{SAO} = 90^\circ$

+ SB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại $B \Rightarrow \widehat{SBO} = 90^\circ$

Tứ giác $SAOB$ có $\widehat{SAO} + \widehat{SBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow SAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $SA^2 = SC \cdot SD$.

Xét (O) có: $\widehat{ACD} = \widehat{SAD}$ (góc nội tiếp; góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung \widehat{AD})

$\Rightarrow \widehat{ACS} = \widehat{SAD}$

Xét $\triangle SAD$ và $\triangle SCA$ có:

\widehat{ASC} chung

$\widehat{ACS} = \widehat{SAD}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle SAD \sim \triangle SCA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{SD}{SA}$$

$$\Rightarrow SA^2 = SC \cdot SD$$

c) Kẻ BH vuông góc với AC tại điểm H . Chứng minh đường thẳng SC đi qua trung điểm của đoạn thẳng BH .

SA, SB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $SA = SB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Gọi I là giao điểm của SC và BH

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BH \perp AC \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel AS \Rightarrow \frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \text{ (Định lý Ta-lét)}$$

$$\Rightarrow \frac{IH}{IC} = \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SC} \text{ (1)}$$

Ta có: $\widehat{HBC} = \widehat{BAC}$ (cùng phụ với \widehat{ACB})

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC)

$$\Rightarrow \widehat{HBC} = \widehat{BDC}$$

$$\Rightarrow \widehat{IBC} = \widehat{BDC}$$

Xét $\triangle IBC$ và $\triangle BDC$ có:

\widehat{BCD} chung

$$\widehat{IBC} = \widehat{BDC} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle IBC \sim \triangle BDC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IB}{BD} = \frac{IC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{BD}{BC} \text{ (2)}$$

Xét (O) có: $\widehat{SBD} = \widehat{SCB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung; góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Xét $\triangle SBD$ và $\triangle SCB$ có:

\widehat{BSC} chung

$$\widehat{SBD} = \widehat{SCB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle SBD \sim \triangle SCB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{SB}{SC} \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{IH}{IC} = \frac{IB}{IC} = \frac{SB}{SC}$$

$$\Rightarrow IH = IB \text{ mà } I \in BH \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } BH$$

Lại có $I \in SC$

Vậy SC đi qua trung điểm của BH .

Cách 2:

Gọi I là giao điểm của SC và BH

$$\text{Lấy điểm } K \text{ đối xứng với điểm } A \text{ qua điểm } S \rightarrow BS = SA = SK = \frac{1}{2} AK$$

Suy ra $\triangle ABK$ vuông tại $B \rightarrow \widehat{ABK} = 90^\circ$

$$\widehat{ABC} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ABK} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$

Suy ra C, B, K thẳng hàng

$$BH \perp AC, SA \perp AC \rightarrow BH \parallel SA \rightarrow \frac{IH}{SA} = \frac{IC}{SC} = \frac{IB}{SK}$$

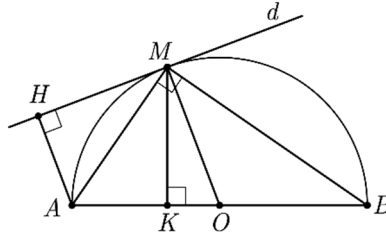
Mà $SA = SK$ nên $IH = IB$ do đó I là trung điểm của BH , hay SC qua trung điểm của BH (đpcm)

Câu 52. (ts Cao Bằng 2022-2023) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên nửa đường tròn lấy điểm M không trùng với điểm A sao cho $MA < MB$. Qua M kẻ tiếp tuyến d của nửa đường

tròn. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d và K là hình chiếu vuông góc của M trên AB .

- a) Chứng minh $AHMK$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh AHK là tam giác cân.

Lời giải



a/ Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên $d \Rightarrow AH \perp d \Rightarrow AH \perp HM \Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$.

K là hình chiếu vuông góc của M trên $AB \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AHMK$ có: $\widehat{AHM} + \widehat{AKM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc này đối nhau $\Rightarrow AHMK$ là tứ giác nội tiếp (dnhb).

b/ Chứng minh AHK là tam giác cân.

Xét (O) có: $\widehat{ABM} = \widehat{AMH}$ (góc nội tiếp; góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM).

Ta có: $\widehat{AMK} = \widehat{ABM}$ (hai góc cùng phụ với \widehat{BMK})

Suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{AKM} = \widehat{ABM}$

Xét $\triangle AMH$ và $\triangle AMK$ có:

AM chung

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AHM} = \widehat{AKM} = 90^\circ \\ \widehat{AMH} = \widehat{AMK} \text{ (cmt)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AMH = \triangle AMK \text{ (ch - cn)} \Rightarrow AH = AK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$\Rightarrow \triangle AHK$ cân tại A .

Câu 53. (ts Ninh Bình 2022-2023) Cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Điểm C nằm trên đường tròn sao cho $CA > CB$. Từ điểm O vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AC , đường thẳng này cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tâm O tại điểm M và cắt đường thẳng AC tại điểm I . Đường thẳng MB cắt đường tròn tâm O tại điểm thứ hai Q ($Q \neq B$).

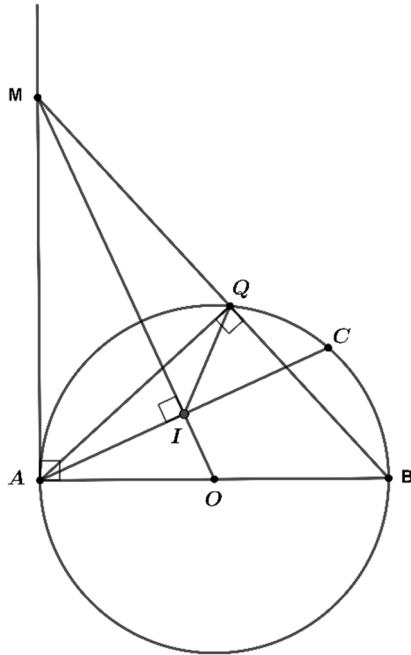
- a) Chứng minh tứ giác $AIQM$ là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh rằng $MQ \cdot MB = MO \cdot MI$

Lời giải

a) Xét (O) đường kính AB có:

$\widehat{AQB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AQ \perp QB$ tại Q hay $AQ \perp MB$ tại $Q \Rightarrow \widehat{AQM} = 90^\circ$



Ta có $OM \perp AC$ tại I hay $AI \perp OM$ tại $I \Rightarrow \widehat{AIM} = 90^\circ$

Tứ giác $AIQM$ có $\widehat{AQM} = \widehat{AIM} = 90^\circ$ (cmt)

Mà hai góc này có đỉnh Q và I kề cùng nhìn cạnh AM dưới góc bằng nhau ($= 90^\circ$)
 $\Rightarrow AIQM$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

b) Vì MA là tiếp tuyến của (O) , A là tiếp điểm

$$\Rightarrow MA \perp AB \text{ tại } A \Rightarrow \begin{cases} \Delta MAB \text{ vuông tại } A \\ \Delta MAO \text{ vuông tại } A. \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔMAB vuông tại A , đường cao AQ (do $AQ \perp MB$) có:

$$MA^2 = MQ \cdot MB \quad (*)$$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔMAO vuông tại A , đường cao AI (do $AI \perp OM$) có:

$$MA^2 = MI \cdot MO \quad (**)$$

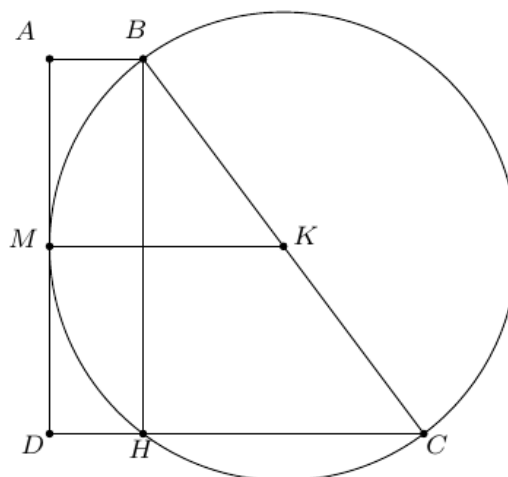
Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow MQ \cdot MB = MI \cdot MO$ ($= MA^2$) (điều phải chứng minh).

Câu 54. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Kẻ BH vuông góc với DC tại H . Biết $BH = 12$ cm, $AB = 4$ cm, $DC = 9$ cm.

a) Tính độ dài đoạn thẳng BC ;

b) Chứng minh đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC .

Lời giải



a) Tứ giác $ABHD$ có $\widehat{BAD} = \widehat{ADH} = \widehat{BHD} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

Suy ra $DH = AB = 4 \Rightarrow HC = DC - DH = 5(\text{cm})$.

Áp dụng định lí Py-ta-go ta có $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13(\text{cm})$.

b) Gọi K, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD .

Dễ thấy K là tâm đường tròn đường kính BC, MK là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Ta có $MK = \frac{AB+CD}{2} = \frac{13}{2} = \frac{BC}{2}$, do đó M thuộc đường tròn đường kính BC .

(1) Ta lại có $\begin{cases} MK // CD \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow MK \perp AD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC .

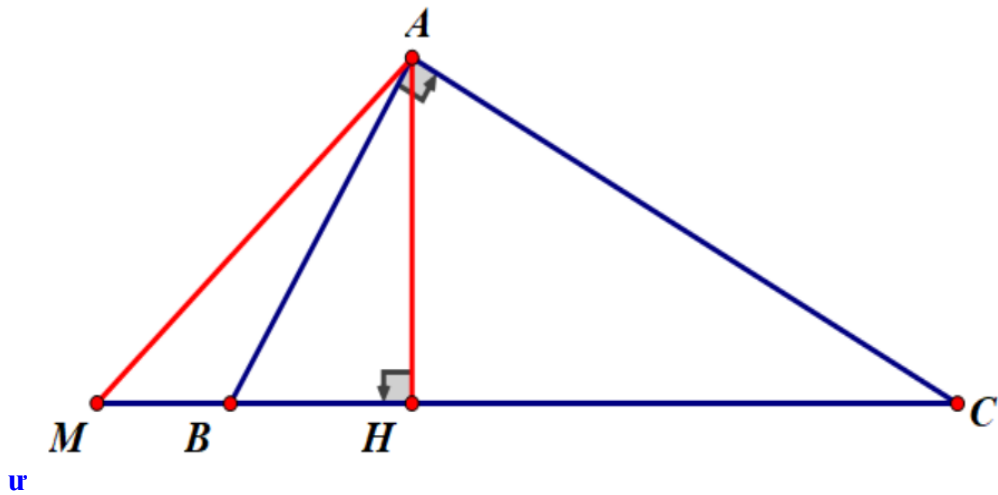
Câu 55. (ts Lào Cai 2022-2023) Cho tam giác ΔABC vuông tại A , độ dài các cạnh góc vuông:

$AB=1, AC = \sqrt{3}$

a) Tính độ dài cạnh BC .

b) Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $AM = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc \widehat{AMC}

Lời giải



a) Tính độ dài cạnh BC

Xét ΔABC vuông tại A có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (định lý Pytago thuận)}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{4} = 2$$

b) Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $AM = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo góc \widehat{AMC}

Kẻ đường cao AH ($H \in BC$) của ΔABC

Xét ΔABC vuông tại A , đường cao AH có:

$$\bullet \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có: $AH \perp BC$ (cách vẽ) $\Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$ suy ra $\triangle AHM$ vuông tại H

Xét $\triangle AHM$ vuông tại H có:

$$\sin \widehat{AMH} = \frac{AH}{AM}$$

$$\sin \widehat{AMH} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

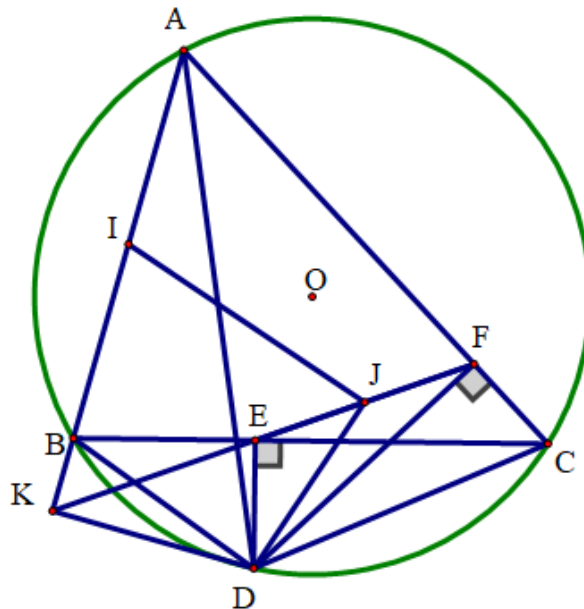
$$\Rightarrow \widehat{AMH} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = 45^\circ$$

Câu 56. (ts TP HCM 2022-2023) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $DB < DC$. Từ D kẻ DE vuông góc với BC (E thuộc BC), kẻ DF vuông góc với AC (F thuộc AC). Đường thẳng EF cắt tia AB tại K .

- a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.
- b) Chứng minh tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.
- c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và EF . Chứng minh IJ vuông góc với DJ .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

Xét tứ giác $CDEF$ có:

+) $\widehat{DEC} = 90^\circ$ (DE vuông góc với BC tại E)

+) $\widehat{DFC} = 90^\circ$ (DF vuông góc với AC tại F)

\Rightarrow Tứ giác $CDEF$ nội tiếp đường tròn đường kính DC (2 đỉnh E và F cùng nhìn cạnh DC dưới 1 góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{DCE} = \frac{1}{2} sd \widehat{DE}$$

Mà $\widehat{DCE} = \widehat{DCB} = \widehat{DAB} = \frac{1}{2} sd \widehat{BD}$ trong đường tròn (O).

Do đó: $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.

b) Chứng minh tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.

Ta có: $\widehat{KED} = \widehat{DCF}$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác $CDEF$ nội tiếp)

$\widehat{DCF} = \widehat{DCA} = \widehat{KBD}$ (góc ngoài bằng góc đối trong đối với tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O)).

Do đó: $\widehat{KBD} = \widehat{KED} = \widehat{DCA}$ không đổi.

Suy ra tứ giác $DKBE$ nội tiếp (2 đỉnh B, E cùng phía đối với cạnh KD và cùng nhìn cạnh KD dưới 1 góc không đổi)

$$\text{Ta có: } \widehat{EDF} = \widehat{ECF} = \frac{1}{2} sd \widehat{EF} = \widehat{BCA}$$

Và $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \frac{1}{2} sd \widehat{BA}$ trong đường tròn (O)

Suy ra $\widehat{BDA} = \widehat{EDF}$.

Xét $\triangle DBA$ và $\triangle DEF$ có:

+) $\widehat{DAB} = \widehat{DFE}$ (chứng minh trên)

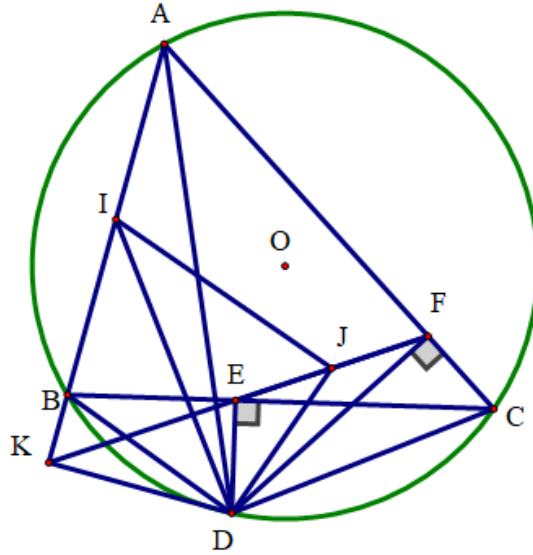
+) $\widehat{BDA} = \widehat{EDF}$ (chứng minh trên)

$\triangle DBA \sim \triangle DEF$ (góc - góc)

$$\Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{DA}{DF} = \frac{BA}{EF} \quad (*)$$

$\Rightarrow DB \cdot DF = DA \cdot DE$ (điều phải chứng minh)

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và EF . Chứng minh IJ vuông góc với DJ .



Từ (*) và I, J lần lượt là trung điểm của AB, EF nên ta có:

$$\frac{DB}{DE} = \frac{BA}{EF} = \frac{2IB}{2JE} = \frac{IB}{JE}$$

Xét $\triangle DBI$ và $\triangle DEJ$ ta có:

+) $\widehat{DBI} = \widehat{DEJ}$ ($\triangle DBA \sim \triangle DEF$ chứng minh trên)

+) $\frac{DB}{DE} = \frac{IB}{JE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle DBI \sim \triangle DEJ$ (cạnh – góc – cạnh)

$\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DJE} \Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{KJD} =$ góc không đổi.

\Rightarrow Tứ giác $IKDJ$ nội tiếp (2 đỉnh I, J cùng phía với cạnh KD và cùng nhìn cạnh KD dưới 1 góc không đổi)

$\Rightarrow \widehat{IKD} + \widehat{IJD} = 180^\circ$.

Mà tứ giác $DKBE$ nội tiếp nên $\widehat{IKD} = \widehat{BKD} = 180^\circ - \widehat{BED} = 90^\circ$

Do đó: \widehat{IJD} vuông hay IJ vuông góc với DJ .

Câu 57. (48 . Đồng tháp - 2022) Cho hình trụ (T) có chiều cao $h = 3$ dm, chu vi đường tròn đáy hình trụ là 4π dm. Tính thể tích hình trụ (T).

Lời giải

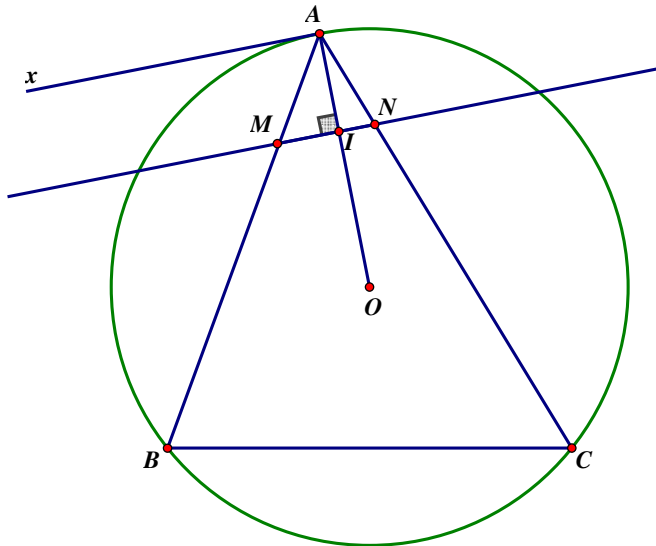
Bán kính đường tròn đáy là $R = \frac{CV}{2\pi} \Leftrightarrow R = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ (dm).

Thể tích hình trụ (T) là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot (2)^2 \cdot 3 = 12\pi$ (dm³)

Vậy thể tích hình trụ (T) là 12π (dm³).

Câu 58. (ts Tây Ninh 2022-2023) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $\widehat{BAC} < 60^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Trên đoạn thẳng OA lấy điểm I ($IA < IO$), đường thẳng qua I vuông góc OA cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh tứ giác $BCNM$ nội tiếp.

Lời giải



Qua A kẻ tiếp tuyến Ax với (O)

Ta có $\left. \begin{matrix} Ax \perp OA \\ MN \perp OA \end{matrix} \right\} \Rightarrow MN \parallel Ax \Rightarrow \widehat{xAM} = \widehat{AMN}$ (so le trong) hay $\widehat{xAB} = \widehat{AMN}$ (1)

Mặt khác ta có:

$\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn \widehat{AB}) (2)

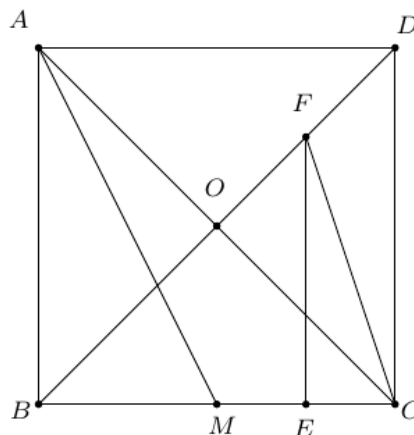
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{AMN}$

Do đó tứ giác BCNM nội tiếp (tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện)

Câu 59. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Cho hình vuông ABCD có AB = 4 cm. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng AM ;
- b) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC .

Lời giải



a) Áp dụng định lí Py-ta-go $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

b) Gọi O là tâm hình vuông ABCD; E, F lần lượt là trung điểm của MC và OD.

Dễ thấy BD là đường trung trực đoạn AC . (1)

Ta có $\frac{BF}{BD} = \frac{BE}{BC} = \frac{3}{4}$ suy ra $EF \parallel CD$, mà $CD \perp MC$ nên $EF \perp MC$.

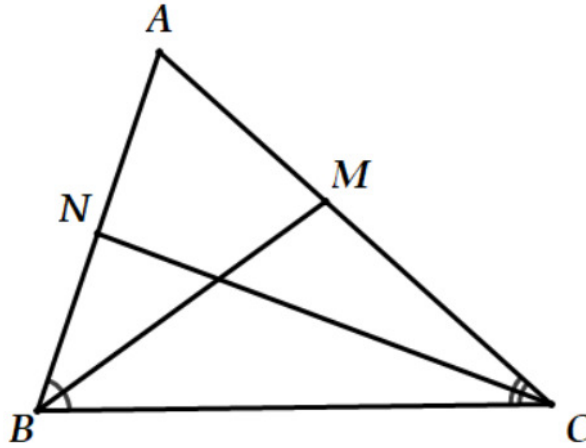
Khi đó EF là đường trung trực của đoạn MC . (2)

Từ (1) và (2) suy ra F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC và FC là bán kính của đường tròn đó.

Áp dụng định lí Py-ta-go $FC = \sqrt{EF^2 + EC^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}(\text{cm})$.

Câu 60. (ts Điện Biên 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN . Chứng minh bất đẳng thức $\frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải



Xét ΔABC có BM, CN là các đường phân giác, theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AB}; \frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AC} \quad (1)$$

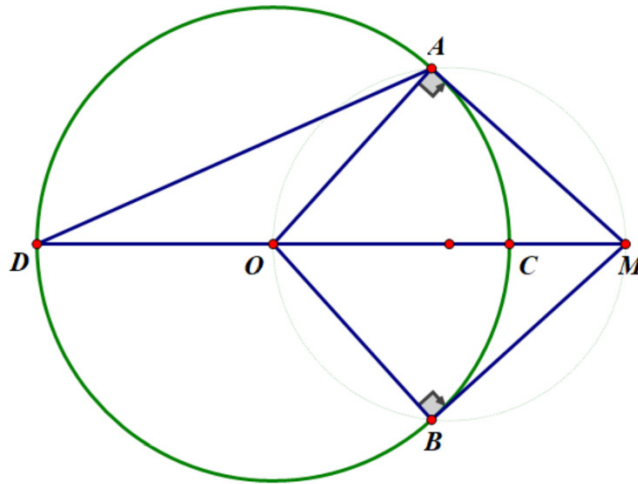
Áp dụng định lí Py – ta – go vào ΔABC vuông tại A ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} &= \frac{MC + MA}{MA} \cdot \frac{NB + NA}{NA} \\ &= \left(\frac{MC}{MA} + 1\right) \left(\frac{NB}{NA} + 1\right) \\ &= \left(\frac{BC}{AB} + 1\right) \left(\frac{BC}{AC} + 1\right) \\ &= \frac{BC^2}{AB \cdot AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} + 1 \\ &= \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} + BC \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right) + 1 \\ &= 1 + \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} + \sqrt{AB^2 + AC^2} \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right) \\ &\geq 1 + \frac{2 \cdot AB \cdot AC}{AB \cdot AC} + \sqrt{2 \cdot AB \cdot AC} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{AB} \cdot \frac{1}{AC}} \quad (\text{bất đẳng thức Cauchy}) \\ &= 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

- Câu 61.** (ts Lào Cai 2022-2023) Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến phân biệt MA, MB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm)
- Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp
 - Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) lần lượt tại hai điểm C, D phân biệt sao cho $MC < MD$. Chứng minh: $MA \cdot DA = MD \cdot AC$
 - Đường thẳng BO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E . Kẻ AI vuông góc với BE tại I . Đường thẳng ME cắt AI tại K , đường thẳng MO cắt AB tại H . Chứng minh hai đường thẳng HK và BE song song.

Lời giải



- a)** Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp

Xét tứ giác $MAOB$ có $\begin{cases} \widehat{MAO} = 90^\circ \text{ (} MA \text{ tiếp tuyến (} O \text{))} \\ \widehat{MBO} = 90^\circ \text{ (} MB \text{ tiếp tuyến (} O \text{))} \end{cases}$

Nên $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$. Mà $\widehat{MAO}; \widehat{MBO}$ là hai góc đối nhau

Suy ra tứ giác $MAOB$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° thì nội tiếp)

- b)** Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) lần lượt tại hai điểm C, D phân biệt sao cho $MC < MD$. Chứng minh: $MA \cdot DA = MD \cdot AC$

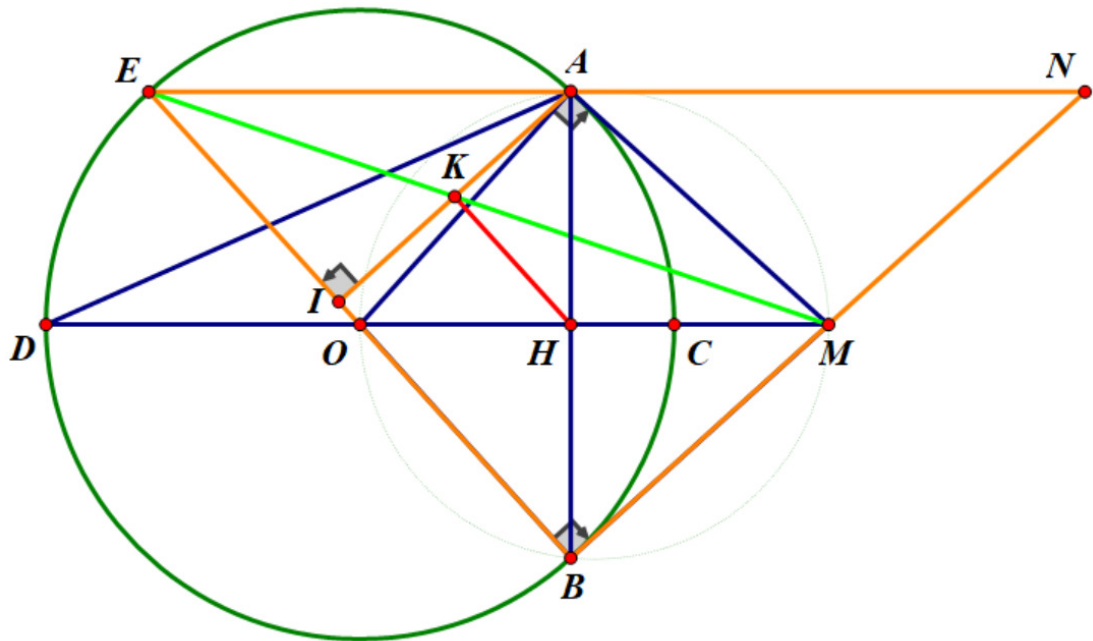
Xét (O) có: $\widehat{MAC} = \frac{1}{2}sd \widehat{AC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung \widehat{AC})

Và $\widehat{MDA} = \frac{1}{2}sd \widehat{AC}$ (góc nội tiếp chắn cung \widehat{AC})

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$ có: \widehat{AMD} chung và $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (cùng chắn \widehat{AC} , của (O))

Do đó $\triangle MAC \sim \triangle MDA$ (gg) $\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{DA} \Rightarrow MA \cdot DA = MD \cdot AC$

- c)** Đường thẳng BO cắt (O) tại điểm thứ hai là E . Kẻ $AI \perp BE$ tại I . Đường thẳng ME cắt AI tại K , đường thẳng MO cắt AB tại H . Chứng minh: $HK \parallel BE$.



- Gọi N là giao điểm của BM và EA

Xét (O) có: $\triangle ABE$ nội tiếp ($A, B, E \in (O)$) và BE đường kính (BO cắt (O) tại E)

Nên $\triangle ABE$ vuông tại A (tam giác nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BAE} = 90^\circ$

Mà $\widehat{NAB}; \widehat{BAE}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{NAB} = 90^\circ \Rightarrow AN \perp AB$ (1)

Ta có:
$$\begin{cases} MA = MB (MA; MB \text{ tiếp tuyến}) \\ OA = OB (= R) \end{cases}$$

Suy ra MO là đường trung trực của đoạn thẳng AB

nên $MO \perp AB$ tại H là trung điểm AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MH \parallel AN$.

Xét $\triangle ABN$ có: $MH \parallel AN$ (cmt) và H là trung điểm AB

Nên M là trung điểm của đoạn BN (định lý mở đầu đường trung bình trong tam giác)

Ta có:
$$\begin{cases} AI \perp BE (gt) \\ BN \perp BE (BN \text{ tiếp tuyến } (O)) \end{cases}$$

$\Rightarrow AI \parallel BN \Rightarrow AK \parallel MN; KI \parallel MB$

Xét $\triangle MNE$ có $AK \parallel MN$, ta được: $\frac{AK}{MN} = \frac{EK}{EM}$ (định lý Thales thuận)

Xét $\triangle BME$ có $KI \parallel MB$, ta được: $\frac{KI}{BM} = \frac{EK}{EM}$ (định lý Thales thuận)

Suy ra $\frac{AK}{MN} = \frac{KI}{BM} \left(= \frac{EK}{EM} \right)$

Mà $BM = MN$ (vì M là trung điểm BN)

Do đó $AK = KI$ lại có $K \in AI$ nên K là trung điểm của đoạn AI

Xét $\triangle ABI$ có: H là trung điểm đoạn AB (cmt) và K là trung điểm đoạn AI (cmt)

Suy ra HK là đường trung bình của $\triangle ABI \Rightarrow HK \parallel BI$ hay $HK \parallel BE (I \in BE)$

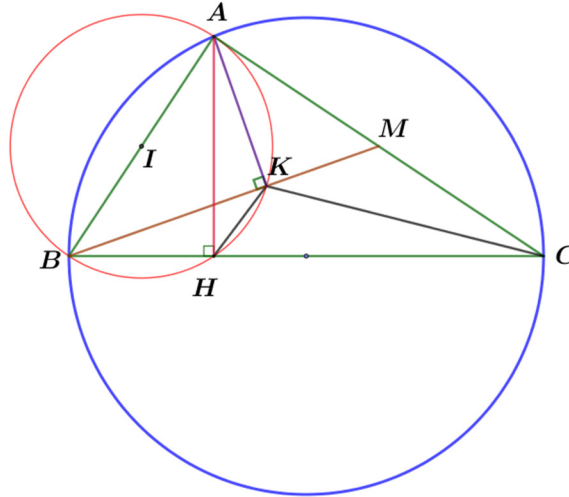
Câu 62. (48 . Đồng tháp - 2022) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính BC có đường cao $AH (H \in BC)$. Gọi M là trung điểm AC , kẻ AK vuông góc BM tại K .

a) Chứng minh tứ giác $ABHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AH \cdot BK = 2AB \cdot HK$.

Lời giải

Hình vẽ:



Ta có $\widehat{AHB} = 90^\circ$ và $\widehat{AKB} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{AHB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ mà 2 đỉnh H, K kề nhau cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Vậy tứ giác $ABHK$ nội tiếp.

b) **(1,0 điểm)** Chứng minh $AH \cdot BK = 2AB \cdot HK$.

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{BKH}$ (cùng chắn \widehat{BH})

Mà $\widehat{BAH} = \widehat{MCB}$ (cùng phụ \widehat{HAC})

Suy ra $\widehat{BKH} = \widehat{MCB}$

Xét $\triangle BHK$ và $\triangle BMC$, ta có:

\widehat{MBC} là góc chung

$\widehat{BKH} = \widehat{MCB}$

Do đó $\triangle BHK \sim \triangle BMC$ (g.g).

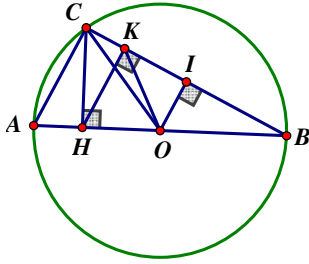
$$\Rightarrow \frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{AC}{2BC}$$

Ta lại có: $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB}$.

Suy ra $\frac{HK}{BK} = \frac{AH}{2AB} \Rightarrow 2AB \cdot HK = AH \cdot BK$.

Câu 63. (ts Tây Ninh 2022-2023) Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2\sqrt{2022}$. Lấy điểm C trên (O) sao cho $AC < BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB (H khác A). Kẻ HK vuông góc BC tại K. Tính $HK^2 + OK^2$.

Lời giải



Kẻ $OI \perp BC$ tại I

Xét tam giác CHB vuông tại H, đường cao HK, ta có

$$HK^2 = CK.KB \text{ (hệ thức lượng)}$$

$$HK^2 = (CI - KI)(BI + KI)$$

$$HK^2 = CI^2 - KI^2 \text{ (do } OI \perp BC \text{ tại I nên } CI = IB = \frac{1}{2}BC \text{)} \quad (1)$$

Do ΔKOI vuông tại I nên $KI^2 = KO^2 - OI^2 \quad (2)$

Mà ΔCOI vuông tại I nên $CI^2 = CO^2 - OI^2 \quad (3)$

Thay (2), (3) vào (1) ta được $HK^2 = CO^2 - OI^2 - KO^2 + OI^2$

$$\text{Hay } HK^2 + OK^2 = CO^2 = (\sqrt{2022})^2 = 2022$$

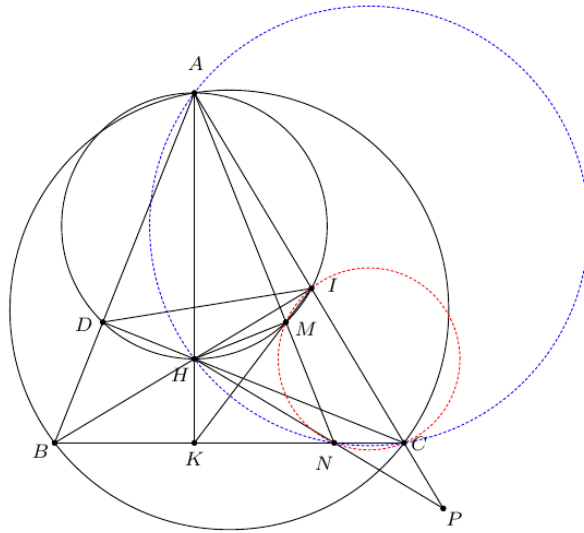
Vậy $HK^2 + OK^2 = 2022$

Câu 64. (ts Thái Nguyên 2022-2023) Cho tam giác ABC ($BC < AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kẻ $AK \perp BC$ ($K \in BC$), $BI \perp AC$ ($I \in AC$). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIH cắt đường thẳng KI tại điểm M ($M \neq I$). Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC.

a) Chứng minh bốn điểm C, I, M, N cùng thuộc một đường tròn;

b) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng AC và HN. Chứng minh $\frac{PA}{PH} = \frac{KN}{KH}$.

Lời giải



a) Tam giác AIH vuông tại I nên AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AIH . Gọi D là giao điểm của AB và đường tròn ngoại tiếp tam giác AIH , vì AH là đường kính nên $AB \perp DH$.

Mà $CH \perp AB$ suy ra ba điểm C, H, D thẳng hàng.

Ta có $\widehat{BIC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BCID$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ADI}$. (1) Ta lại có $\widehat{ADI} = \widehat{AMI}$ (cùng chắn cung \widehat{AI}). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{AMI}$ nên tứ giác $CIMN$ nội tiếp.

b) Các tứ giác $AHMI, CIMN$ nội tiếp suy ra $\begin{cases} KH.KA = KM.KI \\ KM.KI = KN.KC \end{cases} \Rightarrow KH.KA = KN.KC$

Do đó tứ giác $AHNC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{KCH}$ và $\widehat{PHC} = \widehat{PAN}$.

Hai tam giác vuông AKN và CKH có $\widehat{KAN} = \widehat{KCH}$ nên đồng dạng suy ra $\frac{KN}{KH} = \frac{AN}{HC}$

Hai tam giác PHC và PNA có $\begin{cases} \widehat{APH} \text{ (chung)} \\ \widehat{PHC} = \widehat{PAN} \end{cases}$ nên đồng dạng suy ra $\frac{PA}{PH} = \frac{KN}{KH}$.

Câu 1. (ts Vinh Phúc 2022-2023) Biểu thức $P = \frac{2022}{x}$ có nghĩa khi và chỉ khi

- A. $x < 0$. B. $x > 0$. **C. $x \neq 0$.** D. $x = 0$.

Lời giải

Biểu thức $P = \frac{2022}{x}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x \neq 0$

Câu 2. (ts Vinh Phúc 2022-2023) Hàm số $y = mx + 2023$ (m là tham số) nghịch biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi

- A. $m \leq 0$. **B. $m < 0$.** C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Hàm số $y = mx + 2023$ (m là tham số) nghịch biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi $m < 0$

Câu 3. (ts Vinh Phúc 2022-2023) Tích hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 5 = 0$ là

- A. 8. B. -8. C. -5. **D. 5.**

Lời giải

Ta có $\Delta' = (-4)^2 - 1 \cdot 5 = 11$

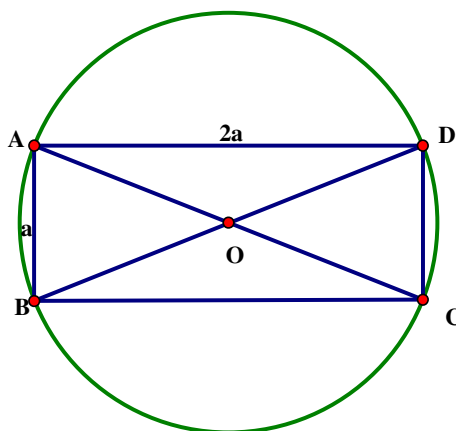
Do $\Delta' > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Vi - ét ta có $x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{1} = 5$

Câu 4. (ts Vinh Phúc 2022-2023) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = 2a (a > 0)$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$** B. a . C. $a\sqrt{5}$. D. $2a$.

Lời giải



Áp dụng định lí Pi ta có trong $\triangle ABD$ vuông tại A ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$$

$$BD = \sqrt{5}a$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có ABCD là hình chữ nhật nên $OA = OB = OC = OD = \frac{BD}{2}$

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD bằng $\frac{\sqrt{5}a}{2}$

Câu 5. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Biểu thức

$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ có giá trị là

A. -6.

B. -3.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases} \quad (1)$$

Mà $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -3.(-2) = 6$

Câu 6. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn, $\widehat{CDB} = 30^\circ$. Số đo của \widehat{CAB} bằng:

A. 90° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 150° .

Lời giải

Chọn B

Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn nên $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{CB})

Mà theo giả thiết có $\widehat{CDB} = 30^\circ$ nên $\widehat{CAB} = 30^\circ$

Câu 7. (ts Bắc Giang 2022-2023) Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{\frac{-2022}{x-3}}$ là

A. $x < 3$.

B. $x > 3$.

C. $x \leq 3$.

D. $x \geq 3$.

Lời giải

Chọn A

Biểu thức $\sqrt{\frac{-2022}{x-3}}$ xác định khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{-2022}{x-3} \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x < 3$$

Câu 8. (ts Bắc Giang 2022-2023) Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng $y = -2x + 1$?

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = 6 - 2(x + 1)$.

C. $y = 1 - 2x$.

D. $y = 2x + 1$.

Lời giải

Chọn B

+Ta có $-2 \neq 2$ nên đường thẳng $y = -2x + 1$ cắt đường thẳng $y = 2x - 1$.

+Ta có $y = 6 - 2(x+1) = -2x + 4$.

Vì $\begin{cases} -2 = -2 \\ 1 \neq 4 \end{cases}$ nên đường thẳng $y = -2x + 1$ song song với đường thẳng $y = 6 - 2(x+1)$.

+Vì $\begin{cases} -2 = -2 \\ 1 = 1 \end{cases}$ nên đường thẳng $y = -2x + 1$ trùng với đường thẳng $y = 1 - 2x$.

+Vì $-2 \neq 2$ nên đường thẳng $y = -2x + 1$ cắt đường thẳng $y = 2x + 1$.

Câu 9. (ts Bắc Giang 2022-2023) Căn bậc hai số học của 9 là

- A. $\sqrt{3}$. B. -3 . **C. 3**. D. $-3; 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$

Câu 10. (ts Bắc Giang 2022-2023) Đường thẳng $y = 2x - 3$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $N(-1; 1)$. B. $Q(-1; -1)$. C. $M(1; 1)$. **D. $P(1; -1)$** .

Lời giải

Chọn D

Thay $x = -1$ vào công thức hàm số trên ta được $y = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$.

Thay $x = 1$ vào công thức hàm số trên ta được $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

Do đó đường thẳng $y = 2x - 3$ đi qua điểm $P(1; -1)$.

Câu 11. (ts Bắc Giang 2022-2023) Giá trị của biểu thức $P = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3}$ là:

- A. $2\sqrt{5} - 4$. B. 4. C. $4 - 2\sqrt{5}$. **D. 0**.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3} = |2-\sqrt{5}| + 2-\sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 + 2 - \sqrt{5} = 0$

Câu 12. (ts Bắc Giang 2022-2023) Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là

- A. $(-2; -1)$. B. $(2; 1)$. **C. $(2; -1)$** . D. $(-2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + x - y = 3 + 3 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (2, -1)$

Câu 13. (ts Bắc Giang 2022-2023) Phương trình nào sau đây là phương trình bậc hai?

- A. $2x + 3 = 0$. B. $x^3 + 2x - 1 = 0$. C. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$. **D. $x^2 - 2x - 3 = 0$** .

Lời giải

Chọn D

Ta có $2x + 3 = 0$ là phương trình bậc nhất.

Ta có $x^3 + 2x - 1 = 0$ là phương trình bậc ba.

Ta có $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ là phương trình bậc bốn.

Ta có $x^2 - 2x - 3 = 0$ là phương trình bậc hai.

Câu 14. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho hai đường tròn $(O; 4\text{cm}), (O'; 3\text{cm})$ tiếp xúc ngoài. Độ dài đoạn OO' bằng:

- A. 5cm. **B. 7cm.** C. 1cm. D. $\sqrt{7}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai đường tròn $(O; 4\text{cm}), (O'; 3\text{cm})$ tiếp xúc ngoài. Độ dài đoạn $OO' = 4 + 3 = 7(\text{cm})$

Câu 15. (ts Bắc Giang 2022-2023) Khi phương trình $(m+1)x^2 - 2m + 3 = 0$ có một nghiệm là $x=1$ thì giá trị của tham số m là

- A. $m = 4$.** B. $m = -4$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $x=1$ là một nghiệm của phương trình trên nên:

$$(m+1).1^2 - 2m + 3 = 0$$

$$m+1 - 2m + 3 = 0$$

$$-m + 4 = 0$$

$$m = 4$$

Vậy $m = 4$

Câu 16. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3, BC = 6$. Số đo của \widehat{ACB} là

- A. 30° .** B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn vào tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3, BC = 6$. Ta có

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ \text{ vì } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Câu 17. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho đường tròn (O) bán kính 4cm Từ điểm M nằm ngoài (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (O) (A, B là các tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Diện tích tứ giác $MAOB$ là

- A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2$. **B. $16\sqrt{3}\text{cm}^2$.** C. $8\sqrt{3}\text{cm}^2$. D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau có $MA = MB \Rightarrow$ Tam giác MAB cân tại M

Mà theo giả thiết $\widehat{AMB} = 60^\circ \Rightarrow$ Tam giác MAB là tam giác đều $MA = MB = AB$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau có MO là tia phân giác của \widehat{AMB}

$$\Rightarrow \widehat{AMO} = \frac{1}{2} \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOM} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc vào tam giác MAO vuông tại A có:

$$MA = AO \cdot \tan \widehat{AOM} = 4 \cdot \tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$MO = \frac{AO}{\cos \widehat{AOM}} = \frac{4}{\cos 60^\circ} = 8$$

Có MO là tia phân giác của \widehat{AMB} mà $\triangle MAB$ cân tại M

Suy ra MO cũng là đường cao. Suy ra $MO \perp AB$

Tứ giác $MAOB$ có hai đường chéo vuông góc nhau nên

$$S_{MAOB} = \frac{1}{2} MO \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

Câu 18. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho biểu thức $P = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x - 1$ với $x < 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P = 3x - 5$.

B. $P = 3$.

C. $P = x + 3$.

D. $P = 3 - x$.

Lời giải

Chọn D

Biểu thức $P = 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x - 1$ với $x < 2$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= 2\sqrt{(x-2)^2} + x - 1 = 2|x-2| + x - 1 = 2(2-x) + x - 1 \quad (\text{vì } x < 2) \\ &= 4 - 2x + x - 1 = 3 - x \end{aligned}$$

Câu 19. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $BC = 4\text{cm}$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ngoài bằng:

A. 8cm .

B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{cm}$.

C. 4cm .

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ đường kính CD của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow$ Tam giác DBC vuông tại B (có $\widehat{DBC} = 90^\circ$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 30^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{CB})

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc vào tam giác DBC vuông tại B có:

$$CD = \frac{BC}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8 (\text{cm})$$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 (\text{cm})$

Câu 20. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho hai hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + y = b \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ tương đương với

nhau. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ là

A. 41 .

B. 53 .

C. 26 .

D. 17 .

Lời giải

Chọn A

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ được nghiệm $(x; y) = (-1; -3)$

Vì hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + y = b \end{cases}$ tương đương với $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ nên ta có

$$\begin{cases} a(-1) + (-3) = 2 \\ (-1) + (-3) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ -4 = b \end{cases}$$

Thay $\begin{cases} a = -5 \\ -4 = b \end{cases}$ vào biểu thức $a^2 + b^2$ được $a^2 + b^2 = (-5)^2 + (-4)^2 = 25 + 16 = 41$

Câu 21. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AC = 6\text{cm}$, $BH = 5\text{cm}$. Diện tích tam giác ABC bằng:

- A. $9\sqrt{3}\text{cm}^2$. B. $18\sqrt{3}\text{cm}^2$. C. $18\sqrt{5}\text{cm}^2$. **D. $9\sqrt{5}\text{cm}^2$.**

Lời giải

Chọn D

Đặt độ dài đoạn $CH = x(\text{cm})$, suy ra $BC = x + 5(\text{cm})$ (với $x > 0$)

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , ta có:

$$AC^2 = CH \cdot BC \Leftrightarrow 6^2 = x \cdot (x + 5) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 = 0.$$

Giải phương trình tìm được $x = 4 \Rightarrow BC = 9(\text{cm})$

Lại có $AH^2 = CH \cdot BH = 5 \cdot 4 = 20 \Rightarrow AH = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\text{cm})$

Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}(\text{cm}^2)$

Câu 22. (ts Bắc Giang 2022-2023) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m - 4)x^2 (m \neq 4)$ nghịch biến khi $x < 0$

- A. $m < 4$. **B. $m > 4$.** C. $m < -4$. D. $m > -4$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = ax^2$ (với $a \neq 0$) nghịch biến khi $x < 0$ với $a > 0$

Áp dụng vào hàm số $y = (m - 4)x^2$ (với $m \neq 4$) nghịch biến khi $x < 0$ với $m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$

Câu 23. (ts Bắc Giang 2022-2023) Tọa độ các giao điểm của đường thẳng $y = -x + 2$ và parabol $y = x^2$ là:

- A. $(-1; 1)$ và $(-2; 4)$. B. $(-1; 1)$ và $(2; 4)$. **C. $(1; 1)$ và $(-2; 4)$.** D. $(1; 1)$ và $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -x + 2$ và parabol $y = x^2$ là:

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với $x = 1$, thay vào đường thẳng $y = -x + 2$ được: $y = -1 + 2 = 1$, ta có giao điểm $(1; 1)$

Với $x = -2$, thay vào đường thẳng $y = -x + 2$ được: $y = -(-2) + 2 = 4$, ta có giao điểm $(-2; 4)$

Vậy tọa độ các giao điểm của đường thẳng $y = -x + 2$ và parabol $y = x^2$ là $(1; 1)$ và $(-2; 4)$

Câu 24. (ts Bắc Giang 2022-2023) Cho ba đường thẳng $y = 2x + 1(d_1)$, $y = x + 3(d_2)$ và $y = (m + 1)x - 5, m \neq -1$. Khi ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm thì hệ số góc của đường thẳng (d_3) bằng:

- A. 5.** B. 6. C. 3. D. 4

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1$ và đường thẳng

$(d_2): y = x + 3$ là:

$$2x + 1 = x + 3 \Leftrightarrow x = 2$$

Với $x = 2$, thay vào đường thẳng $y = 2x + 1$ được: $y = 2.2 + 1 = 5$

Ta có giao điểm của đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1$ và đường thẳng $(d_2): y = x + 3$ là: $M(2; 5)$

Để ba đường thẳng $(d_1); (d_2); (d_3)$ cùng đi qua một điểm thì điểm $M(2; 5)$ phải thuộc đường thẳng (d_3) , ta có: $5 = (m + 1).2 - 5 \Leftrightarrow (m + 1).2 = 10 \Leftrightarrow (m + 1) = 5 \Rightarrow$ Hệ số góc của (d_3) là 5.

Câu 25. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cặp số $(-1; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình nào trong các hệ phương trình sau?

A. $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 8 \\ x = -3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Câu 26. (ts Hưng Yên 2022-2023) Tổng các nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$ bằng

A. 5.

B. -5.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$ có $\Delta = 21 > 0$ nên theo Vi-et ta có tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = 5$

Câu 27. (ts Hưng Yên 2022-2023) Điểm nào trong các điểm sau thuộc đồ thị hàm số $y = -x^2$?

A. $(-1; 1)$.

B. $(1; -1)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(-1; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = -x^2$

Thay $x = 1, y = -1$ vào hàm số ta được $-1 = -1^2$ (khẳng định đúng)

Do đó điểm $(1; -1)$ thuộc đồ thị hàm số.

Câu 28. (ts Hưng Yên 2022-2023) Điểm $(2; -1)$ thuộc đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y = x + 3$.

B. $y = -2x + 1$.

C. $y = -x + 3$.

D. $y = 2x - 5$.

Lời giải

Chọn D

Thay $x = 2, y = -1$ vào hàm số $y = 2x - 5$ ta được $-1 = 2.2 - 5$ (khẳng định đúng)

Do đó điểm $(2; -1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 5$.

Câu 29. (ts Hưng Yên 2022-2023) Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x + 2022}$ là

A. $x \geq -2022$.

B. $x < 2022$.

C. $x < -2022$.

D. $x \geq 2022$.

Lời giải

Chọn A

Biểu thức $\sqrt{x+2022}$ xác định khi $x+2022 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2022$.

Câu 30. (ts Hưng Yên 2022-2023) Hệ số góc của đường thẳng $y = -2x + 1$ bằng

A. -2.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $y = -2x + 1$ có hệ số góc là -2.

Câu 31. (ts Hưng Yên 2022-2023) Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên \mathbb{R} ?

A. $y = 1 - 2x$.

B. $y = -3x + 2$.

C. $y = \frac{x}{3} - 1$.

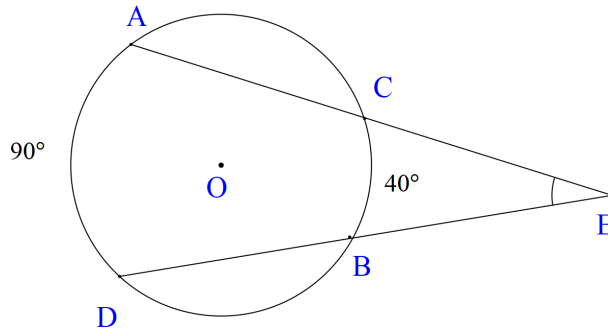
D. $y = \frac{1-x}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \frac{x}{3} - 1$ có $a = \frac{1}{3} > 0$ nên đồng biến trên \mathbb{R} .

Câu 32. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hình vẽ, biết số đo cung nhỏ AD bằng 90° và số đo cung nhỏ BC bằng 40° . Tính $2.\widehat{AED}$



A. 55° .

B. 25° .

C. 30° .

D. 50° .

Lời giải

Chọn D

$2.\widehat{AED} = sđ\widehat{AD} - sđ\widehat{BC} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

Câu 33. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $AC^2 = BH \cdot BC$.

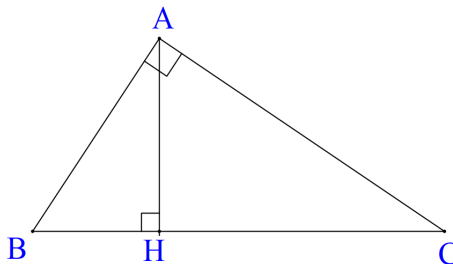
B. $AC^2 = BC \cdot CH$.

C. $AC^2 = AH \cdot BC$.

D. $AC^2 = CH \cdot BH$.

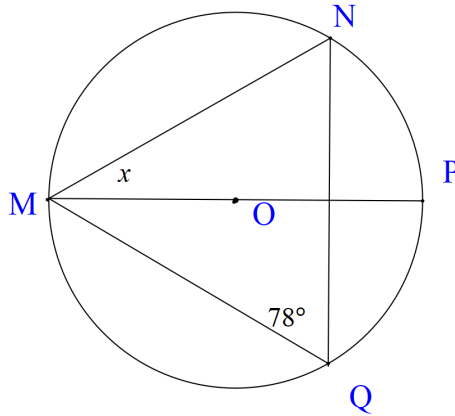
Lời giải

Chọn B



Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông. Hệ thức đúng là $AC^2 = BC \cdot CH$.

Câu 34. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hình vẽ, biết MP là đường kính của (O) , $\widehat{MQN} = 78^\circ$. Số đo \widehat{NMP} bằng



- A. 24° . B. 13° . C. 6° . **D. 12° .**

Lời giải

Chọn D

Do \widehat{MQN} là góc nội tiếp, MP là đường kính nên ta có
 $sd\widehat{NP} = sd\widehat{MP} - sd\widehat{MN} = 180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{NMP} = \frac{1}{2}sd\widehat{NP} = \frac{1}{2}.24^\circ = 12^\circ$.

Câu 35. (ts Hưng Yên 2022-2023) Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ($A \geq 0; B > 0$). B. $\sqrt{A^2} = A$ ($A \geq 0$).
C. $\sqrt[3]{A^3} = -A$ ($A < 0$). D. $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ ($A; B \geq 0$).

Lời giải

Chọn C

Vì $\sqrt[3]{A^3} = A$ với mọi biểu thức A .

Câu 36. (ts Hưng Yên 2022-2023) Giá trị rút gọn của biểu thức $P = 5\sqrt{27} - \sqrt{300} + 2\sqrt{75}$ bằng

- A. $15\sqrt{3}$.** B. $-15\sqrt{3}$. C. $-5\sqrt{3}$. D. $35\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$P = 5\sqrt{27} - \sqrt{300} + 2\sqrt{75}$$

$$P = 5 \cdot 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 2 \cdot 5\sqrt{3}$$

$$P = (15 - 10 + 10)\sqrt{3}$$

$$P = 15\sqrt{3}$$

Câu 37. (ts Hưng Yên 2022-2023) Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao $10m$, chu vi đáy bằng $5m$

- A. $50m^2$.** B. $50\pi m^2$. C. $100\pi m^2$. D. $100m^2$.

Lời giải

Chọn A

Với hình trụ: Diện tích xung quanh = chu vi đáy x chiều cao

Nên $S_{xq} = 10 \cdot 5 = 50m^2$.

- Câu 38.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 8$, $BC = 10$. Tính $\sin B$
A. $\sin B = 0,6$. **B.** $\sin B = 0,75$. **C.** $\sin B = 0,8$. **D.** $\sin B = 0,4$.

Lời giải

Chọn C

Trong tam giác ABC vuông tại A có $AC = 8$, $BC = 10$ thì

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

- Câu 39.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Trong các phương trình sau đây, phương trình nào có nghiệm kép?
A. $x^2 - x + 15 = 0$. **B.** $2x^2 - x - 9 = 0$. **C.** $x^2 - 6x + 5 = 0$. **D.** $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $4x^2 + 4x + 1 = 0$ có $a = 4$, $b = 4$, $c = 1$ nên

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$$

nên phương trình này có nghiệm kép.

- Câu 40.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Thể tích của hình cầu tâm O , bán kính R bằng
A. $4\pi R^3$. **B.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **C.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **D.** πR^3 .

Lời giải

Chọn B

Thể tích của hình cầu tâm O , bán kính R bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$.

- Câu 41.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ là
A. hai nghiệm. **B.** một nghiệm. **C.** vô số nghiệm. **D.** vô nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ($\frac{2}{2} \neq \frac{1}{-1}$) nên hệ có một nghiệm.

- Câu 42.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Trong các hệ phương trình sau đây, hệ phương trình nào vô số nghiệm?
A. $\begin{cases} -2x + y = -9 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$ có vô số nghiệm vì: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ($\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{7}{14}$).

- Câu 43.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Hai đường tròn ($A; 6cm$) và ($B; 8cm$) tiếp xúc ngoài. Độ dài AB bằng
A. $AB = 2cm$. **B.** $AB = 8cm$. **C.** $AB = 7cm$. **D.** $AB = 14cm$.

Lời giải

Chọn D

Vì hai đường tròn tiếp xúc ngoài nên độ dài đoạn nối tâm: $AB = R + r = 8 + 6 = 14\text{cm}$.

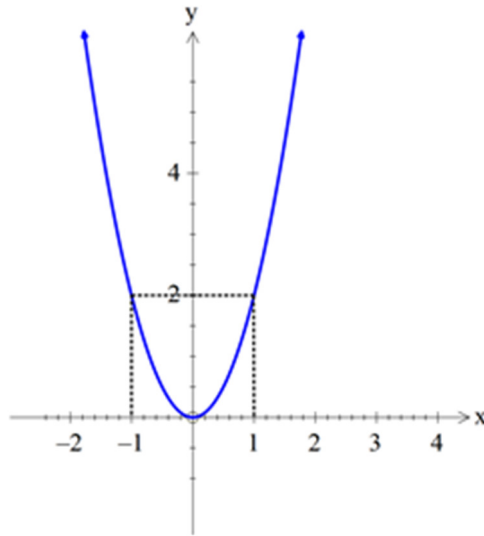
- Câu 44.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Số nào sau đây là một nghiệm của phương trình: $x^2 + 10x - 11 = 0$?
 A. -1. B. 10. **C. -11.** D. 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a + b + c = 1 + 10 + (-11) = 0$. Nên phương trình có một nghiệm bằng 1, một nghiệm bằng $\frac{c}{a} = -11$.

- Câu 45.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đó là



- A. $y = x^2$. **B. $y = 2x^2$.** C. $y = -2x^2$. D. $y = -x^2$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 46.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hàm số $y = (m + 5)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số trên luôn đồng biến.
 A. $m > 5$. **B. $m > -5$.** C. $m < 5$. D. $m < -5$.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số đồng biến thì $m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -5$.

- Câu 47.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Tìm giá trị của m để hai đường thẳng $y = (m - 2)x - 5$ và $y = -mx + 5$ song song.
 A. $m = -1$. **B. $m = 1$.** C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Để hai đường thẳng song song với nhau thì $m - 2 = -m \Leftrightarrow m = 1$.

- Câu 48.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = -3 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất là $(x; y)$. Khi đó $x - y$ bằng

A. -3.

B. 3.

C. -5.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = -3 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$ được $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$.

Khi đó $x - y = 1 - (-4) = 5$.

Câu 49. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho $\alpha = 25^\circ, \beta = 65^\circ$. Câu trả lời nào sau đây sai?

A. $\sin \alpha = \cos \beta$.

B. $\tan \alpha = \cot \beta$.

C. $\cos \alpha = \sin \beta$.

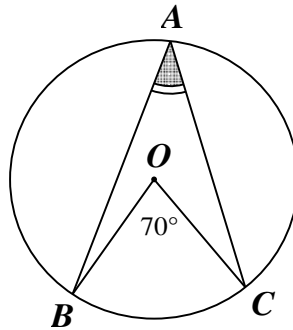
D. $\sin \alpha = \sin \beta$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\alpha = 25^\circ, \beta = 65^\circ$ nên $\sin \alpha \neq \sin \beta$.

Câu 50. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hình vẽ dưới đây, biết $\widehat{BOC} = 70^\circ$. Khi đó \widehat{BAC} bằng



A. 35° .

B. 210° .

C. 70° .

D. 140° .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$ (quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm).

Câu 51. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 4 cm và diện tích xung quanh của hình trụ bằng $48\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ.

A. $V = 80\pi \text{ cm}^3$.

B. $V = 96\pi \text{ cm}^3$.

C. $V = 192\pi \text{ cm}^3$.

D. $V = 32\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Chiều cao của hình trụ là:

Từ công thức $S_{xq} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi R} = \frac{48\pi}{2\pi \cdot 4} = 6 \text{ (cm)}$

Thể tích của hình trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 52. (ts Hưng Yên 2022-2023) Rút gọn biểu thức $C = \sqrt[3]{8a^3} - 6a$, ta được kết quả là

A. $-8a$.

B. $-4a$.

C. $8a$.

D. $4a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C = \sqrt[3]{8a^3} - 6a = \sqrt[3]{(2a)^3} - 6a = 2a - 6a = -4a.$

Câu 53. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hàm số $y = 5x - 2m + 3$, xác định m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 9.

- A. $m = -6.$ **B. $m = -3.$** C. $m = 3.$ D. $m = 6.$

Lời giải

Chọn B

Để đồ thị hàm số $y = 5x - 2m + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 9 thì tung độ gốc bằng 9

Suy ra $-2m + 3 = 9 \Leftrightarrow -2m = 6 \Leftrightarrow m = -3.$

Câu 54. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 , giá trị của biểu

thức $A = \frac{x_1 + x_2}{5x_1x_2}$ bằng

- A. $-\frac{1}{15}.$** B. $-\frac{3}{5}.$ C. $-\frac{5}{3}.$ D. $\frac{1}{15}.$

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hệ số a, c trái dấu nên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{x_1 + x_2}{5x_1x_2} = \frac{1}{5 \cdot (-3)} = -\frac{1}{15}.$

Câu 55. (ts Hưng Yên 2022-2023) Giá trị biểu thức $\frac{1}{2 + \sqrt{5}} + \frac{1}{2 - \sqrt{5}}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}.$ **B. 4.** C. 1.. D. -4..

Lời giải

Chọn B

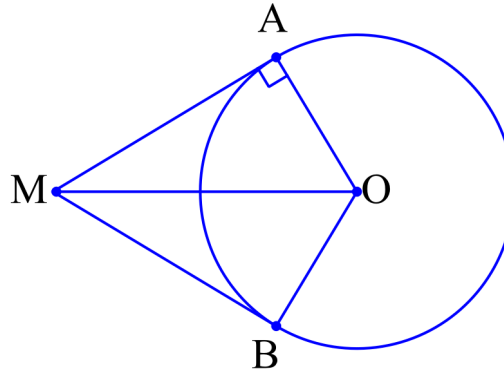
$$\frac{1}{2 + \sqrt{5}} + \frac{1}{2 - \sqrt{5}} = \frac{2 - \sqrt{5}}{4 - 5} + \frac{2 + \sqrt{5}}{4 - 5} = 2 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 4.$$

Câu 56. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho $(O; 5\text{cm})$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là tiếp điểm), biết $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính OM .

- A. $\frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$ B. $2,5 \text{ cm}.$ **C. $10 \text{ cm}.$** D. $5\sqrt{3} \text{ cm}.$

Lời giải

Chọn C



Ta có: MA, MB là các tiếp tuyến của (O)

$$\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{BMO} = \frac{1}{2} \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A , ta có: $OM = \frac{OA}{\sin \widehat{AMO}} = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10 (cm)$.

Câu 57. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho đường tròn $(O; 10\text{ cm})$, dây cung $AB = 12\text{ cm}$. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB .

A. 8 cm.

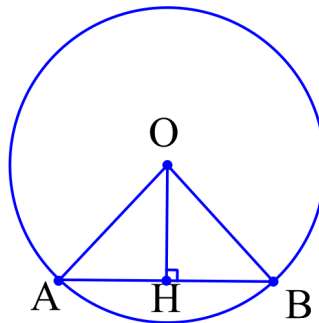
B. 10 cm.

C. 16 cm.

D. 4 cm.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $OH \perp AB (H \in AB)$

$$\Rightarrow HA = HB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 (cm)$$

Xét $\triangle OHA$ vuông tại H , ta có: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 (cm)$

Vậy khoảng cách từ tâm O đến dây AB là 8 cm.

Câu 58. (ts Hưng Yên 2022-2023) Xác định a và b , biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 5)$.

A. $a = 1$ và $b = -3$.

B. $a = -1$ và $b = 3$.

C. $a = -1$ và $b = -3$.

D. $a = 1$ và $b = 3$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B có dạng: $(d): y = ax + b$

Vì (d) đi qua điểm $A(1; 2)$, nên ta có: $a + b = 2 (1)$

(d) đi qua điểm $B(-2; 5)$, nên ta có: $-2a + b = 5 (2)$

Kết hợp (1); (2) ta có hệ:
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = -1; b = 3$.

Câu 59. (ts Hưng Yên 2022-2023) Tính cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(O; 3\text{ cm})$

A. $3\sqrt{2}\text{ cm}$.

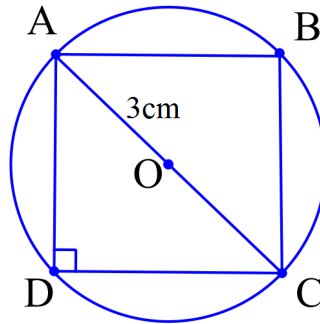
B. $\sqrt{3}\text{ cm}$.

C. 3 cm .

D. 9 cm .

Lời giải

Chọn A



Hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

$\Rightarrow AC$ là đường kính của (O) : $AC = 2OA = 6(\text{cm})$

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại D , ta có:

$AD^2 + DC^2 = AC^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow 2a^2 = 6^2 \Rightarrow 2a^2 = 36 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}(\text{cm})$

Vậy độ dài cạnh hình vuông là $3\sqrt{2}\text{ cm}$.

Câu 60. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 4m = 0$. Tập hợp các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2022$ là

A. $\{1010; 1012\}$.

B. $\{1010; -1012\}$.

C. $\{-1010; 1012\}$.

D. $\{-1010; -1012\}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 4m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì

$$\Delta' = [-(m-1)]^2 + 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } m)$$

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = -4m \end{cases}$$

$$\text{Để } x_1; x_2 \text{ thỏa mãn } |x_1 - x_2| = 2022 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = 2022$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} = 2022$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4(m-1)^2 + 16m} = 2022$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4m^2 - 8m + 4 + 16m} = 2022$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4(m+1)^2} = 2022$$

$$\Leftrightarrow |m+1| = 1011$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 1011 \\ m+1 = -1011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1010 \\ m = -1012 \end{cases}$$

Tập hợp các giá trị $m \in \{1010; -1012\}$.

Câu 61. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hình nón có chu vi đáy là 12π cm, độ dài đường sinh là 10 cm.

Thể tích hình nón là

A. $96\pi \text{cm}^3$.

B. $128\pi \text{cm}^3$.

C. $288\pi \text{cm}^3$.

D. $60\pi \text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Bán kính đáy của hình nón là $C = 2\pi r = 12\pi \Rightarrow r = 6$ cm.

Độ dài đường cao hình nón là $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm.

Thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 62. (ts Hưng Yên 2022-2023) Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc 60° và bóng của một tòa tháp trên mặt đất dài 20 m. Khi đó chiều cao của tòa tháp bằng

A. $60\sqrt{3}$ m.

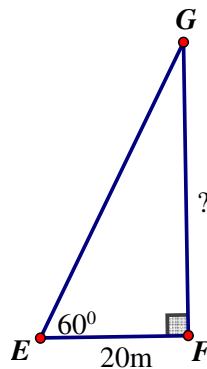
B. $10\sqrt{3}$ m.

C. $20\sqrt{3}$ m.

D. $30\sqrt{3}$ m.

Lời giải

Chọn C



Bài toán được minh họa bởi hình vẽ trên. Trong đó chiều cao của tòa tháp là đoạn GF

Áp dụng hệ thức cạnh và góc trong tam giác vuông ta có

$$GF = EF \cdot \tan E = 20 \cdot \tan 60^\circ = 20\sqrt{3} (m).$$

Câu 63. (ts Hưng Yên 2022-2023) Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x+1} = x-2$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\sqrt{2x+1} = x-2$. ĐK $x \geq 2$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$$

$\Leftrightarrow x_1 = 3 + \sqrt{6}$ (thỏa mãn): $x_2 = 3 - \sqrt{6}$ (loại). Vậy PT đã cho có một nghiệm.

Câu 64. (ts Hưng Yên 2022-2023) Xác định giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} (m-3)x - 2y = 1 \\ 2x - my = 2m^2 + m \end{cases}$

có nghiệm duy nhất

A. $m \neq 1$ và $m \neq 4$.

B. $m \neq -1$ và $m \neq 4$.

C. $m \neq -1$ và $m \neq -4$.

D. $m \neq 1$ và $m \neq -4$.

Lời giải

Chọn B

Xét $m = 0$ hệ phương trình $\begin{cases} -3x - 2y = 1 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-1}{2} \end{cases}$, hệ PT có nghiệm duy nhất.

Xét $m \neq 0$ hệ phương trình $\begin{cases} (m-3)x - 2y = 1 \\ 2x - my = 2m^2 + m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{m-3}{2} \neq \frac{-2}{-m} \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Vậy để hệ phương trình $\begin{cases} (m-3)x - 2y = 1 \\ 2x - my = 2m^2 + m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất thì $m \neq -1$ và $m \neq 4$.

Câu 65. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho đường thẳng $(d): y = x - 2$. Nếu đường thẳng $(d'): y = ax + b$ đi qua $A(2; -3)$ và song song với (d) thì $a^2 - 3b$ bằng

A. 14.

B. 16.

C. -16.

D. -14.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng $(d'): y = ax + b$ đi qua $A(2; -3)$ và song song với (d) nên ta có

$$\begin{cases} a = 1 \\ a \cdot 2 + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

Do đó $a^2 - 3b = 1^2 - 3(-5) = 16$.

Câu 66. (ts Hưng Yên 2022-2023) Rút gọn biểu thức $\frac{2}{x-y} \sqrt{\frac{9(x-y)^2}{4}}$ với $x < y$, ta được kết quả là

A. 3.

B. -3.

C. $\sqrt{3}$.

D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Do $x < y \Rightarrow x - y < 0$

$$\frac{2}{x-y} \sqrt{\frac{9(x-y)^2}{4}} = \frac{2}{x-y} \cdot \frac{3|x-y|}{2} = \frac{1}{x-y} \cdot 3(y-x) = -3.$$

Câu 67. (ts Hưng Yên 2022-2023) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 5x - m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt là

A. $m > -\frac{25}{4}$.

B. $m > \frac{25}{4}$.

C. $m < -\frac{25}{4}$.

D. $m < \frac{25}{4}$.

Lời giải

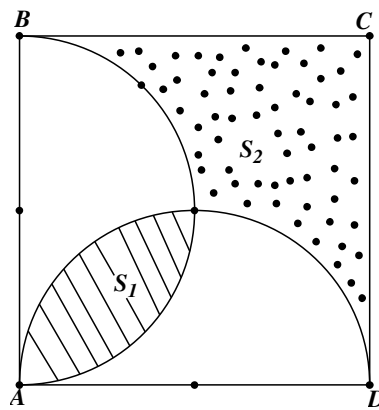
Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol là $x^2 - 5x + m = 0$ (*)

Để đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-5)^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{25}{4}.$$

Câu 68. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S_1 là diện tích phần giao của hai nửa đường tròn đường kính AB và AD , S_2 là diện tích phần còn lại của hình vuông nằm ngoài hai nửa đường tròn nói trên (S_1 là phần gạch chéo, S_2 là phần chấm chấm). Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{\pi}{6-\pi}$.

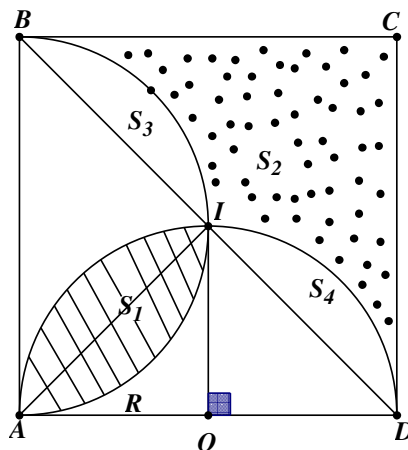
B. $\frac{\pi+2}{6-\pi}$.

C. $\pi-2$.

D. $\frac{\pi-2}{6-\pi}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ là a nên $AB = AD = a$.

Diện tích của hai nửa đường tròn đường kính AB và AD là bằng nhau và đều bằng a

Diện tích hình quạt AOI là

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi a^2}{16}$$

ΔAOI là tam giác vuông cân cạnh $\frac{a}{2}$

$$S_{AOI} = \frac{1}{2}OA^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}$$

Diện tích phần giao của hai nửa đường tròn đường kính AB và AD

$$S_1 = 2(S_q - S_{AOB}) = 2\left(\frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}\right) = (\pi - 2) \cdot \frac{a^2}{8}$$

ΔBCD là tam giác vuông cân cạnh a nên $S_{BCD} = \frac{a^2}{2}$

Do $S_1 = S_3 + S_4$

S_2 là diện tích phần còn lại của hình vuông nằm ngoài hai nửa đường tròn nói trên

$$S_2 = S_{BCD} - (S_3 + S_4) = S_{BCD} - S_1 = \frac{a^2}{2} - (\pi - 2) \cdot \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{8}(4 - \pi + 2) = \frac{a^2}{8}(6 - \pi)$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \left[(\pi - 2) \cdot \frac{a^2}{4} \right] : \left[\frac{a^2}{8}(6 - \pi) \right] = \frac{\pi - 2}{6 - \pi}.$$

Câu 69. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho điểm A nằm trên $(O; 5\text{cm})$ đường kính BC , sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại E (E khác A). Chu vi tứ giác $AECB$ bằng

A. 20 cm.

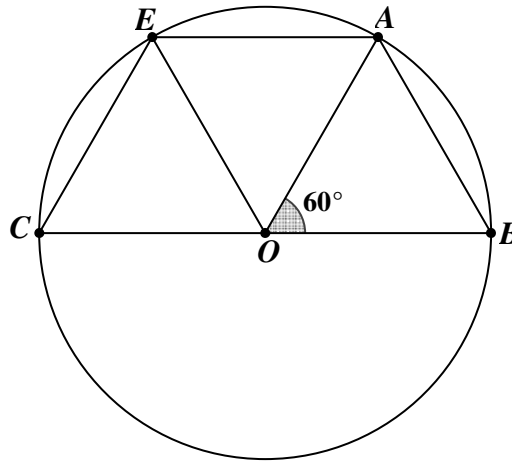
B. 25 cm.

C. 12,5 cm.

D. 50 cm.

Lời giải

Chọn B



Xét $\Delta AOB : OA = OB = 5; \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \Delta AOB$ đều $\Rightarrow AB = OA = OB = 5(\text{cm})$

Vì $AE \parallel BC \Rightarrow$ Tứ giác $AECB$ là hình thang

Mà tứ giác $AECB$ nội tiếp đường tròn (O) nên tứ giác $AECB$ là hình thang cân

$$AB = EC = 5(\text{cm})$$

$$AE \parallel BC \Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \Delta AOE$$
 đều $\Rightarrow AE = OA = 5(\text{cm})$

Chu vi tứ giác $AECB$ là

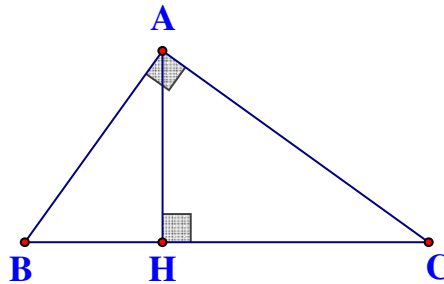
$$P_{ACEB} = AB + AE + EC + BC = 5 + 5 + 5 + 10 = 25 \text{ (cm)}.$$

Câu 70. (ts Hưng Yên 2022-2023) Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng 54cm^2 và 96cm^2 . Độ dài cạnh huyền bằng

- A. 27 cm. B. 48 cm. **C. 25 cm.** D. 21 cm.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có } S_{ABH} \cdot S_{ACH} = 54 \cdot 96 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot AH^2 \cdot BH \cdot CH = 54 \cdot 96 \Leftrightarrow AH^4 = 4 \cdot 54 \cdot 96 = 12^4 \Leftrightarrow AH = 12.$$

$$\text{Lại có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Leftrightarrow BC = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{AH} = \frac{2(54 + 96)}{12} = 25 \text{ (cm)}.$$

Câu 71. (ts Hưng Yên 2022-2023) Biết phương trình $3x + 1 - \sqrt{3x^2 + 7x} - \sqrt{3x - 1} = 0$ có một nghiệm có dạng $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính

$$S = a + b + c.$$

- A. $S = 21$. **B. $S = 10$.** C. $S = 14$. D. $S = 12$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐKXD: } x \geq \frac{1}{3}$$

$$3x + 1 - \sqrt{3x^2 + 7x} - \sqrt{3x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 - \sqrt{3x - 1} = \sqrt{3x^2 + 7x}$$

$$\Rightarrow (3x + 1 - \sqrt{3x - 1})^2 = 3x^2 + 7x$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 + 3x - 1 - 2(3x + 1)\sqrt{(3x - 1)} = 3x^2 + 7x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + x - (3x + 1)\sqrt{3x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)(x - \sqrt{3x - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 & (1) \\ x - \sqrt{3x - 1} = 0 & (2) \end{cases}$$

+) (1) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (TmĐK)

+) (2) $\Leftrightarrow x = \sqrt{3x-1} \Rightarrow x^2 = 3x-1 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (TmĐK)

Ta thấy $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ có dạng $x = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản.

Vậy $S = a+b+c = 3+5+2 = 10$.

Câu 72. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hình tròn $(O; OA)$, biết $OA = 50$ cm và diện tích hình tròn $(O; OB)$ bằng $\frac{81}{100}$ diện tích hình tròn $(O; OA)$. Tính $OA - OB$.

- A. 10 (cm). B. 25 (cm). **C. 5 (cm).** D. 5,1 (cm).

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{S_{(O;OB)}}{S_{(O;OA)}} = \frac{81}{100} \Leftrightarrow \frac{\pi \cdot OB^2}{\pi \cdot OA^2} = \frac{81}{100} \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{9}{10} \Rightarrow OB = \frac{9}{10} \cdot OA = 45$ (cm).

Do đó $OA - OB = 50 - 45 = 5$ (cm).

Câu 73. (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2x + 3 - m = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 2x_1)(x_2^2 - 2x_2) + 4m - 8$ bằng

- A. 2. **B. 1.** C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $x^2 - 2x + 3 - m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\Delta' = 1 - (3 - m) = m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 - m \end{cases}$

$S = (x_1^2 - 2x_1)(x_2^2 - 2x_2) + 4m - 8$

$= (x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4x_1 x_2 + 4m - 8$

$= (3 - m)^2 - 2(3 - m) \cdot 2 + 4(3 - m) + 4m - 8$

$= m^2 - 2m + 1$

$= (m - 2)^2 + 2m - 3$

Với $m \geq 2$ ta có $\begin{cases} (m - 2)^2 \geq 0 \\ 2m - 3 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow S = (m - 2)^2 + 2m - 3 \geq 1$.

Dấu “=” xảy ra khi $m = 2$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 2x_1)(x_2^2 - 2x_2) + 4m - 8$ bằng 1.

- Câu 74.** (ts Hưng Yên 2022-2023) Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m^2 + 2 \\ 2x + y = 5m \end{cases}$ (m là tham số) có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $x_0^2 - 6y_0^2$ bằng
- A. -75. **B. 75.** C. -23. D. 23.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} mx + y = 2m^2 + 2 & (1) \\ 2x + y = 5m & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế của (1) cho (2) ta được:

$$(m-2)x = 2m^2 - 5m + 2 \Leftrightarrow (m-2)x = (m-2)(2m-1) \quad (*)$$

Để hệ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thì (*) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Khi đó (*) $\Rightarrow x = \frac{(m-2)(2m-1)}{m-2} = 2m-1$.

Thay vào (2) ta được $y = -2x + 5m \Leftrightarrow y = -2(2m-1) + 5m \Leftrightarrow y = m + 2$.

Ta có $T = x_0^2 - 6y_0^2 = (2m-1)^2 - 6(m+2)^2$

$T = -2m^2 - 28m - 23 = -2(m+7)^2 + 75 \leq 75$ với mọi m .

Dấu “=” xảy ra khi $m = -7$ (TmĐK).

Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức $x_0^2 - 6y_0^2$ bằng 75.

- Câu 75.** (ts Yên Bái 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ và $AC = 4$. Khi đó độ dài đoạn thẳng BC bằng:
- A. 1. B. 25. C. 7. **D. 5.**

Lời giải

Theo định lý Pytago, ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Chọn đáp án D

- Câu 76.** (ts Yên Bái 2022-2023) Nghiệm của phương trình $2x + 1 = 0$ là:
- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = -\frac{1}{2}$. **D. $x = 1$.**

Lời giải

Ta có $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Chọn đáp án D

- Câu 77.** (ts Yên Bái 2022-2023) Kết quả của phép toán $(x+1)(x-2)$ bằng:

- A. $x^2 - x + 2$. B. $x^2 - 3x + 2$. C. $x^2 - x - 2$. D. $x^2 + x - 2$.

Lời giải

Ta có $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$

Chọn đáp án C

Câu 78. (ts Yên Bái 2022-2023) Trong một đường tròn, góc nội tiếp chắn cung 80° có số đo bằng:

- A. 20° . B. 100° . C. 160° . D. 40° .

Lời giải

Trong một đường tròn, góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung bị chắn. Do đó, góc nội tiếp chắn cung 80° có số đo bằng 40°

Chọn đáp án D

Câu 79. (ts Yên Bái 2022-2023) Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ$. B. $\sin 37^\circ = \cos 43^\circ$.
C. $\sin 37^\circ = \tan 53^\circ$. D. $\sin 27^\circ = \cot 53^\circ$.

Lời giải

Với $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì $\sin \alpha = \cos \beta$ nên $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ$

Chọn đáp án A

Câu 80. (ts Yên Bái 2022-2023) Đường thẳng đi qua điểm $A(0;4)$ và song song với đường thẳng

$y = \frac{1}{3}x - 7$ có phương trình là:

- A. $y = \frac{1}{3}x + 4$. B. $y = -3x + 4$. C. $y = -3x - 4$. D. $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

Lời giải

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 7$ có phương trình là $y = \frac{1}{3}x + b$ với $b \neq -7$. Lại có, (d) đi qua điểm $A(0;4)$ nên:

$$4 = \frac{1}{3} \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là $y = \frac{1}{3}x + 4$

Chọn đáp án A

Câu 81. (ts Yên Bái 2022-2023) Đồ thị hàm số $y = -2022x^2$ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

- A. $P(-1;2022)$. B. $M(0;-2022)$. C. $Q(0;2022)$. D. $N(-1;-2022)$.

Lời giải

Ta có $-2022 = -2022 \cdot (-1)^2$

Suy ra điểm $M(-1;-2022)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -2022x^2$

Chọn đáp án D

Câu 82. (ts Yên Bái 2022-2023) Điều kiện của x để biểu thức $\sqrt{5-x}$ có nghĩa là:

- A. $x > 5$. B. $x \neq 5$. **C. $x \leq 5$.** D. $x \geq 5$.

Lời giải

Biểu thức $\sqrt{5-x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$

Chọn đáp án C

Câu 83. (ts Yên Bái 2022-2023) Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $x + 3y = -1$. B. $-x + 10y = 5$.
C. $\frac{1}{x} - 3y = -2$. D. $x + 2y = -1$.

Lời giải

Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax + by = c$ với $a, b, c \in R$ và $a^2 + b^2 \neq 0$.

Do đó, phương trình $\frac{1}{x} - 3y = -2$ không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn

Chọn đáp án C

Câu 84. (ts Yên Bái 2022-2023) Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 2x + 2$?

- A. $M(0;2)$.** B. $P(1;0)$. C. $N(-1;2)$. D. $Q(0;-1)$.

Lời giải

Ta có: $2 = 2 \cdot 0 + 2$

Nên điểm $M(0;2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x + 2$

Chọn đáp án A

Câu 85. (ts Yên Bái 2022-2023) Điều kiện xác định của biểu thức $P = \sqrt{x-1} + \frac{2}{x-2}$ là:

- A. $x > 2$. **B. $x \geq 1$ và $x \neq 2$.** C. $x \geq 2$. D. $x \geq 1$.

Lời giải

Biểu thức $P = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Chọn đáp án B

Câu 86. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho mặt cầu có thể tích $V = 288\pi \text{cm}^3$. Đường kính hình cầu bằng:

- A. 4cm . **B. 12cm .** C. 8cm . D. 6cm .

Lời giải

Gọi đường kính hình cầu là $d(\text{cm})$. Khi đó ta có:

$$288\pi = V = \frac{1}{6}\pi d^3 \Rightarrow d = 12\text{cm}$$

Chọn đáp án B

Câu 87. (ts Yên Bái 2022-2023) Nghiệm tổng quát của phương trình $-x + 3y = 1$ là:

- A. $\begin{cases} x \in R \\ y = x + 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x \in R \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$. C. $\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$. **D. $\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$.**

Lời giải

Ta có $-x + 3y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ nên phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là:

$$\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án D

Câu 88. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho hai số x, y thỏa mãn $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $x + y = 14$. Giá trị của x là:

- A. $x = -4$. B. $x = 10$. **C. $x = 4$.** D. $x = -10$.

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{2+5} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2 = 4$

Chọn đáp án C

Câu 89. (ts Yên Bái 2022-2023) Số phần tử của tập hợp $M = \{a; b; c; d\}$ là:

- A. 5. **B. 4.** C. 3. D. 2.

Lời giải

Tập hợp $M = \{a; b; c; d\}$ có 4 phần tử

Chọn đáp án B

Câu 90. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho hàm số $y = (m-1)x^2$. Các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho là một parabol nằm phía dưới trục hoành là:

- A. $m > 1$. B. $m \neq 1$. C. $m = 1$. **D. $m < 1$.**

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = (m-1)x^2$ là một parabol nằm phía dưới trục hoành khi và chỉ khi $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Chọn đáp án D

Câu 91. (ts Yên Bái 2022-2023) Đường thẳng đi qua hai điểm $P(-1; 4)$ và $Q(2; -5)$ có phương trình là:

- A. $y = 3x + 1$.** B. $y = -2x - 1$.
C. $y = x - 3$. D. $y = x + 3$.

Lời giải

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $P(-1; 4)$ và $Q(2; -5)$ có phương trình dạng $y = ax + b$. Khi đó:

$$\begin{cases} 4 = -1.a + b \\ -5 = 2.a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 4 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy (d) có phương trình là $y = -3x + 1$

Chọn đáp án A

Câu 92. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của $\tan \alpha$ bằng:

- A. $\frac{4}{3}$.** B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Mà $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Từ đó ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$

Chọn đáp án A

Câu 93. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho hai điểm A, B thuộc đường tròn tâm O . Biết $\widehat{AOB} = 55^\circ$. Số đo của cung nhỏ AB bằng:

- A. 35° . **B. 55° .** C. 110° . D. 135° .

Lời giải

Trong một đường tròn, số đo góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn, do đó $55^\circ = \widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{AB}$

Chọn đáp án B

Câu 94. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho hai đường tròn $(O; 3\text{cm})$ và $(O'; 2\text{cm})$. Biết $OO' = 4\text{cm}$. Vị trí tương đối của (O) và (O') là:

- A. không có điểm chung. **B. Cắt nhau.**
C. tiếp xúc trong. D. Tiếp xúc ngoài.

Lời giải

Vì $|R - R'| < OO' < R + R'$ nên (O) và (O') cắt nhau

Chọn đáp án B

Câu 95. (ts Yên Bái 2022-2023) Công thức tính thể tích V của hình trụ có bán kính đáy r , chiều cao h là:

- A. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. **B. $V = \pi r^2 h$.** C. $V = \frac{1}{3}\pi r h$. D. $V = 2\pi r h$.

Lời giải

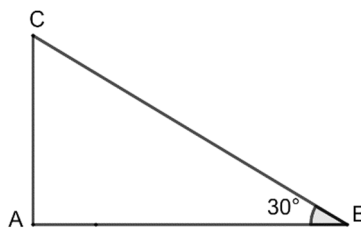
Công thức tính thể tích V của hình trụ bán kính đáy r , chiều cao h là $V = \pi r^2 h$

Chọn đáp án B

Câu 96. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = 4\text{cm}$. Độ dài cạnh AC bằng:

- A. 2cm .** B. 6cm . C. $2\sqrt{3}\text{cm}$. D. $4\sqrt{3}\text{cm}$.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = 4 \cdot \sin 30^\circ = 2\text{cm}$$

Chọn đáp án A

- Câu 97. (ts Yên Bái 2022-2023)** Cho đường tròn $(O; 25cm)$. Dây lớn nhất của đường tròn có độ dài bằng:
 A. $25cm$. B. $20cm$. **C. $50cm$.** D. $625cm$.

Lời giải

Dây lớn nhất của đường tròn có độ dài bằng đường kính của đường tròn và bằng $25.2 = 50cm$

Chọn đáp án C

- Câu 98. (ts Yên Bái 2022-2023)** Số ước nguyên dương của 24 là:
 A. 12. B. 4. **C. 8.** D. 24.

Lời giải

Dạng phân tích tiêu chuẩn của 24 là $24 = 2^3.3$. Từ đó, số ước nguyên dương của 24 là $(3+1).(1+1) = 8$

Chọn đáp án C

- Câu 99. (ts Yên Bái 2022-2023)** Giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -x^2 + 4x - 10$ bằng:
 A. -8 . B. 6. **C. -6 .** D. 0.

Lời giải

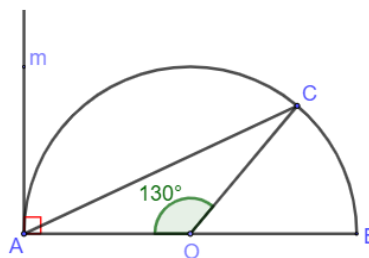
Ta có $M = -x^2 + 4x - 10 = -(x-2)^2 - 6 \leq -6$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$

Vậy giá trị lớn nhất của M là -6

Chọn đáp án C

- Câu 100. (ts Yên Bái 2022-2023)** Cho nửa đường tròn đường kính AB và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho số $\widehat{AC} = 130^\circ$. Kẻ tiếp tuyến Am với nửa đường tròn (hình vẽ). Số đo góc hợp bởi tia Am và AC là:
 A. 70° . B. 50° . C. 130° . **D. 65° .**

Lời giải



Góc tạo bởi hai tia Ax và AC là \widehat{mAC} và $\widehat{mAC} = \frac{1}{2}$ số $\widehat{AC} = 65^\circ$

Chọn đáp án D

- Câu 101. (ts Yên Bái 2022-2023)** Cho đường tròn $(O; 5cm)$. Khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d là $6cm$. Số điểm chung của đường thẳng d và đường tròn (O) là:
 A. vô số. B. 1. **C. 0.** D. 2.

Lời giải

Vì khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng (d) lớn hơn bán kính của (O) nên đường thẳng (d) và (O) không có điểm chung nào

Chọn đáp án C

Câu 102. (ts Yên Bái 2022-2023) Biểu thức $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5$ có giá trị bằng:

- A. 2^7 . **B. 2^{12} .** C. 2^2 . D. 2^{60} .

Lời giải

Ta có $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12}$

Chọn đáp án B

Câu 103. (ts Yên Bái 2022-2023) Hệ số góc của đường thẳng $y = 5x - 1$ là:

- A. -1 . B. 1 . **C. 5 .** D. -5 .

Lời giải

Hệ số góc của đường thẳng $y = 5x - 1$ là: 5

Chọn đáp án C

Câu 104. (ts Yên Bái 2022-2023) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Khi đó:

- A. $x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$. B. $x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$. C. $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$. **D. $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$.**

Lời giải

Theo hệ thức Vi-et ta có $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

Chọn đáp án D

Câu 105. (ts Yên Bái 2022-2023) Giá trị của biểu thức $\sqrt{25} - 3$ bằng:

- A. 16. B. 22. **C. 2.** D. -8 .

Lời giải

Ta có $\sqrt{25} - 3 = 5 - 3 = 2$

Chọn đáp án C

Câu 106. (ts Yên Bái 2022-2023) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên R ?

- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -3 - x$.
C. $y = 3 - 4x$. **D. $y = 2x + 1$.**

Lời giải

Hàm số $y = 2x + 1$ đồng biến trên R vì $2 > 0$

Chọn đáp án D

Câu 107. (ts Yên Bái 2022-2023) Số nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 10 = 0$ là:

- A. 0.** B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Phương trình $x^2 - 6x + 10 = 0$ có biệt thức $\Delta' = 9 - 10 = -1 < 0$ nên phương trình đã cho vô nghiệm

Chọn đáp án A

Câu 108. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $\widehat{A} = 70^\circ$ và $\widehat{B} = 60^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\widehat{D} = 110^\circ$. B. $\widehat{C} = 120^\circ$. C. $\widehat{D} = 130^\circ$. **D. $\widehat{C} = 110^\circ$.**

Lời giải

Vì tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$. Từ đó tính được $\widehat{C} = 110^\circ$ và $\widehat{D} = 120^\circ$. Do vậy khẳng định đúng là $\widehat{C} = 110^\circ$

Chọn đáp án D

Câu 109. (ts Yên Bái 2022-2023) Giá trị của biểu thức $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{27}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\sqrt{6}$ bằng:

A. $5+2\sqrt{6}$.

B. 1.

C. 5.

D. $5-2\sqrt{6}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\sqrt{8}-\sqrt{27}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\sqrt{6} = \frac{(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{3})^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \sqrt{6} = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{6} = 5$$

Chọn đáp án C

Câu 110. (ts Yên Bái 2022-2023) Kết quả rút gọn biểu thức $A = \frac{4x}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ ($x \geq 0; x \neq 9$)

có dạng $\frac{m\sqrt{x}+n}{\sqrt{x}-3}$ với $m, n \in R$. Giá trị của biểu thức $m-n$ bằng:

A. 4.

B. -4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có

$$A = \frac{4x}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{4x + (\sqrt{x}+3)^2 - (\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{4x + 12\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

Từ số suy ra $m = 4$ và $n = 0$, do đó $m-n = 4$

Chọn đáp án A

Câu 111. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho hai đường tròn $(O; 12cm)$ và $(I; 16cm)$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B . Biết $AB = 19,8cm$. Khoảng cách OI bằng:

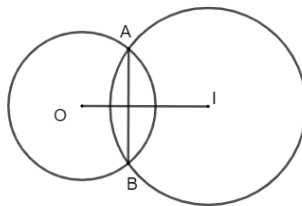
A. $20cm$.

B. $9,8cm$.

C. $9,6cm$.

D. $5,6cm$ hoặc $20cm$.

Lời giải



Trường hợp 1. O và I nằm về hai phía đối với đường thẳng AB

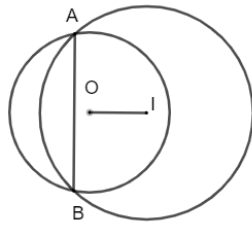
Theo định lý Pytago ta có:

$$OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{12^2 - 9,6^2} = 7,2$$

$$HI = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{16^2 - 9,6^2} = 12,8$$

Từ đó ta có $OI = OH + IH = 20cm$

Trường hợp 2. O và I nằm về cùng phía đối với đường thẳng AB



Theo định lý Pytago ta có:

$$OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{12^2 - 9,6^2} = 7,2$$

$$HI = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{16^2 - 9,6^2} = 12,8$$

Từ đó ta có $OI = OH + IH = 5,6cm$

Chọn đáp án **D**

Câu 112. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 3$. Giá trị của tham số m để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2} \text{ là:}$$

A. $m = 6$.

B. $m = 9$.

C. $m = -6$.

D. $m = -9$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta' = m^2 - m + 3 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} > 0$ với mọi m nên luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m , do đó (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$$

Từ đó:
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2m}{m - 3} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = -9$$

Chọn đáp án **D**

Câu 113. (ts Yên Bái 2022-2023) Giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 5m + 1 \\ x + 3y = 5m + 3 \end{cases}$ có nghiệm

duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x - y = 5$ là:

A. $m = 6$.

B. $m = 4$.

C. $m = -3$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Để thấy hệ $\begin{cases} 2x + y = 5m + 1 & (1) \\ x + 3y = 5m + 3 & (2) \end{cases}$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

Lấy 4 lần (1) trừ đi 3 lần (2), ta được:

$$4(2x + y) - 3(x + 3y) = 4(5m + 1) - 3(5m + 3) \Leftrightarrow 5(x - y) = 5m - 5$$

Mà $x - y = 5$ nên $5m - 5 = 25 \Leftrightarrow m = 6$

Chọn đáp án **A**

Câu 114. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH (H \in BC)$, $HB = 12,5\text{cm}$, $\widehat{B} = 65^\circ$. Độ dài cạnh AC bằng (kết quả làm tròn đến chữ số thứ hai phân thập phân)

A. $64,41\text{cm}$. B. $63,43\text{cm}$. C. $13,78\text{cm}$. D. 25cm .

Lời giải

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A và $\widehat{B} = 65^\circ$ nên $\widehat{C} = 25^\circ$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H , ta có: $AH = BH \cdot \tan B$

Từ đó, xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có:

$$AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{BH \cdot \tan B}{\sin C} = \frac{12,5 \cdot \tan 65^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 63,43\text{cm}$$

Chọn đáp án **B**

Câu 115. (ts Yên Bái 2022-2023) Số nghiệm của phương trình $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$ là:

A. 1. B. 2. C. 4. D. 0.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2x^4 - 3x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(2x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm

Chọn đáp án **B**

Câu 116. (ts Yên Bái 2022-2023) Khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng $4x - 3y + 10 = 0$ bằng:

A. 10. B. 5. C. 2. D. 4.

Lời giải

Khoảng cách từ $O(0;0)$ đến đường thẳng $4x - 3y + 10 = 0$ là:

$$A = \frac{4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 10}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

Chọn đáp án **C**

Câu 117. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho phương trình $x^2 - 2x - m + 1 = 0$. Điều kiện của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu là:

A. $m > 3$. B. $m < -1$. C. $m > 1$. D. $m > 2$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - 2x - m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi:

$$ac < 0 \Rightarrow -m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$$

Chọn đáp án **C**

Câu 118. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 4x - 3$ đồng thời cắt trục Ox tại A , cắt trục Oy tại B . Biết diện tích tam giác OAB bằng 2. Giá trị của $T = a^2 + b^2$ là:

A. $T = 40$. B. $T = 24$. C. $T = 32$. D. $T = 16$.

Lời giải

Do đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 4x - 3$ nên $a = 4$ và $b \neq -3$.

Từ đó, ta tìm được $A(\frac{-b}{4}; 0)$ và $B(0; b)$. Khi đó, ta có:

$$4 = 2S_{OAB} = OA \cdot OB = \frac{b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 16$$

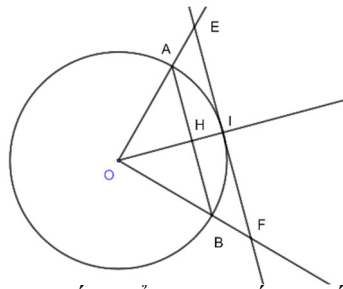
Suy ra $a^2 + b^2 = 4^2 + 16 = 32$

Chọn đáp án C

Câu 119. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho đường tròn $(O; 15cm)$, dây $AB = 24cm$. Một tiếp tuyến song song với AB cắt các tia OA, OB theo thứ tự tại E và F . Độ dài EF bằng:

- A. $48cm$. B. $42cm$. **C. $40cm$.** D. $20cm$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB và I là tiếp điểm của tiếp tuyến EF . Dễ thấy O, H, I thẳng hàng, I là trung điểm của EF và $OH \perp AB$. Theo định lý Pytago, ta có:

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$

Do $BH \parallel FI$ nên theo Ta-let, ta có:

$$\frac{HB}{IF} = \frac{OH}{OI} \Rightarrow IF = \frac{HB \cdot OI}{OH} = \frac{12 \cdot 15}{9} = 20$$

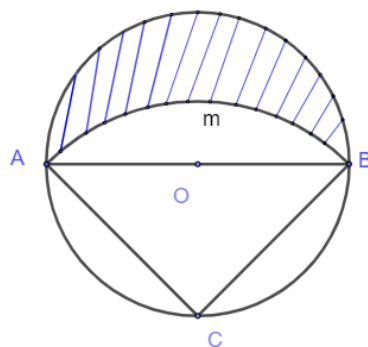
Từ đó ta có $EF = 2IF = 40cm$

Chọn đáp án C

Câu 120. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2\sqrt{3}cm$, C là điểm chính giữa của cung AB . Cung AmB có tâm C , bán kính CA (hình vẽ). Diện tích phần gạch chéo bằng:

- A. $\frac{9}{4}cm^2$. B. $\frac{4\pi}{3}cm^2$. C. $3\pi cm^2$. **D. $3cm^2$.**

Lời giải



Để thấy $CA = CB = \sqrt{6}cm$ và $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

Gọi S_1 là nửa diện tích hình tròn tâm O , S_2 là diện tích hình quạt giới hạn bởi CA, CB và \widehat{AmB} và S_3 là diện tích của $\triangle ABC$. Khi đó:

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi \frac{AB^2}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$S_2 = \frac{\pi CA^2 \cdot 90}{360} = \frac{3\pi}{2}$$

$$S_3 = \frac{CA \cdot CB}{2} = 3$$

Từ đó diện tích phần gạch chéo bằng: $S_1 + S_3 - S_2 = \frac{3\pi}{2} + 3 - \frac{3\pi}{2} = 3cm^2$

Chọn đáp án **D**

Câu 121. (ts Yên Bái 2022-2023) Số các giá thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ có 2 nghiệm nguyên phân biệt là:

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Đặt $k = 2m$ thì phương trình đã cho trở thành $x^2 - kx + k - 3 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta = k^2 - 4k + 12 = (k - 2)^2 + 8 > 0$ với mọi k nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = k$. Vì $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \mathbb{Z}$. Điều kiện cần để (*) có nghiệm nguyên là Δ là số chính phương, tức là:

$$(k - 2)^2 + 8 = a^2 \text{ với } a \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (k - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow (a - k + 2)(a + k - 2) = 8$$

Do $a - k + 2$ và $a + k - 2$ cùng tính chẵn lẻ, đồng thời $(a - k + 2) + (a + k - 2) = 2a \geq 0$ nên xảy ra các trường hợp sau:

$$\begin{cases} a - k + 2 = 2 \\ a + k - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = k = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thử lại thỏa mãn)}$$

$$\begin{cases} a - k + 2 = 4 \\ a + k - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (thử lại thỏa mãn)}$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \frac{3}{2}$ và $m = \frac{1}{2}$

Chọn đáp án **C**

Câu 122. (ts Yên Bái 2022-2023) Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà, người ta dùng một dụng cụ quan sát đỉnh C của ngọn núi (hình vẽ). Biết rằng chiều cao AB của tòa nhà là $70m$, phương nhìn AC tạo với phương ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có chiều cao so với mặt đất gần với kết quả nào sau đây nhất?

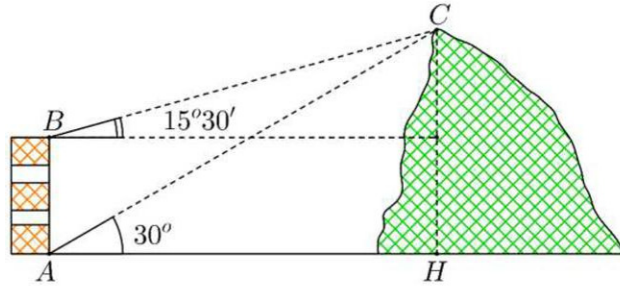
A. 145m.

B. 140m.

C. 135m.

D. 130m.

Lời giải



Ta có: $AB = DH = CH - CD = AH \cdot \tan 30^\circ - BD \cdot \tan 15^\circ 30' = AH \cdot (\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30')$

$$AH = \frac{AB}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'}$$

Từ đó $CH = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{AB \cdot \tan 30^\circ}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'} \approx 134,7m$

Chọn đáp án C

Câu 123. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho hình bình hành $ABCD (\widehat{A} > 90^\circ)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của C lên AD, DB và AB . Biết $MN = 5$ và $NP = 4$. Độ dài đoạn CN gần với kết quả nào sau đây nhất:

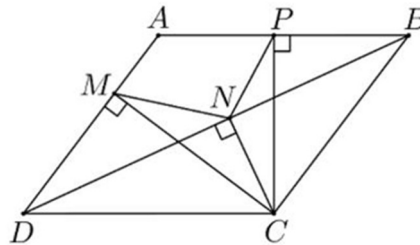
A. 4,4.

B. 4,6.

C. 4,8.

D. 4,2.

Lời giải



Dễ thấy $MNCD, BCNP$ là các tứ giác nội tiếp và $ABCD$ là hình bình hành, do đó:

$$\widehat{CMN} = \widehat{NDC} = \widehat{NBP} = \widehat{NCP}$$

$$\widehat{NCM} = \widehat{NDM} = \widehat{NBC} = \widehat{NPC}$$

Suy ra $\triangle MNC \sim \triangle CNP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MN}{NC} = \frac{NC}{NP} \Rightarrow NC^2 = MN \cdot NP \Rightarrow NC = \sqrt{MN \cdot NP} = \sqrt{5 \cdot 4} \approx 4,47$$

Chọn đáp án A

Câu 124. (ts Yên Bái 2022-2023) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{2}$

. Giá trị của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4$ là:

A. 1.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Theo Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{9}{4} = \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} \right)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(3 - x^2 - y^2 - z^2) \quad (*)$$

Mặt khác

$$(x^2 + y^2 + z^2)(3 - x^2 - y^2 - z^2) = -\left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \quad (**)$$

Từ (*) và (**), suy ra:
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{y} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{z} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{4}$$

Từ đó ta có $P = x^4 + y^4 + z^4 = \frac{3}{4}$

Chọn đáp án C

Câu 125. (ts Sơn La 2022-2023) Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{16a^2b}$ với $a \geq 0, b \geq 0$

A. $P = 4a\sqrt{b}$

B. $P = 16a\sqrt{b}$

C. $P = 4a^2\sqrt{b}$

D. $P = 4a^2b$

Lời giải

A. $P = 4a\sqrt{b}$

Câu 126. (ts Sơn La 2022-2023) Đồ thị hàm số $y = -2x + 1$ đi qua điểm nào dưới đây

A. $M(0; -1)$

B. $N(0; 1)$

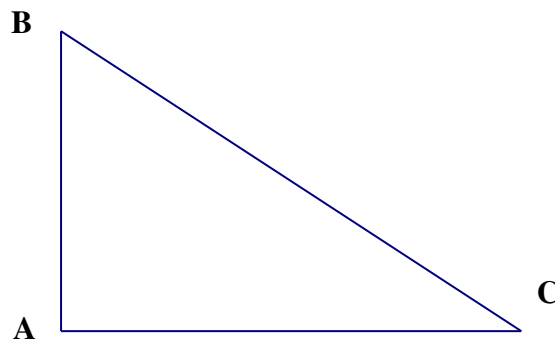
C. $Q(1; 0)$

D. $P(1; -2)$

Lời giải

B. $N(0; 1)$

Câu 127. (ts Sơn La 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan C = \frac{AB}{BC}$

B. $\tan C = \frac{AC}{AB}$

C. $\tan C = \frac{AC}{BC}$

D. $\tan C = \frac{AB}{AC}$

Lời giải

D. $\tan C = \frac{AB}{AC}$

Câu 128. (ts Sơn La 2022-2023) Cho phương trình $x + 2y - 1 = 0$ có nghiệm $(x; y)$ là

A. $(0; 0)$

B. $(1; 2)$

C. $(1; 0)$

D. $(1; -1)$

Lời giải

C. $(1; 0)$

Câu 129. (ts Sơn La 2022-2023) Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

A. $2x + y - 1 = 0$

B. $x^2 - 2x + 3 = 0$

C. $3x - 5 = 0$

D. $x^4 - 2x^2 - 4 = 0$

Lời giải

B. $x^2 - 2x + 3 = 0$

Câu 130. (ts Sơn La 2022-2023) Tìm a để đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $M(1; 2)$

A. $a = 2$

B. $a = 1$

C. $a = 4$

D. $a = \sqrt{2}$

Lời giải

A. $a = 2$

Câu 131. (ts Sơn La 2022-2023) Trong một đường tròn, nếu góc nội tiếp chắn cung có số đo 80° thì số đo góc nội tiếp đó bằng

A. 20°

B. 80°

C. 40°

D. 60°

Lời giải

C. 40°

Câu 132. (ts Sơn La 2022-2023) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , thì $x_1 + x_2$ bằng

A. $\frac{b}{a}$

B. $\frac{c}{a}$

C. $\frac{-c}{a}$

D. $\frac{-b}{a}$

Lời giải

D. $\frac{-b}{a}$

Câu 133. (ts Sơn La 2022-2023) Công thức tính diện tích mặt cầu bán kính R là

A. $S = 4\pi R^2$

B. $S = 4\pi R$

C. $S = \frac{4}{3}\pi R^2$

D. $S = 2\pi R^2$

Lời giải

A. $S = 4\pi R^2$

Câu 134. (ts Sơn La 2022-2023) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , khi đó số đo góc $\widehat{B} + \widehat{D}$ bằng

A. 360°

B. 120°

C. 90°

D. 180°

Lời giải

D. 180°

Câu 135. (ts Bến Tre 2022-2023) Giá trị của biểu thức $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$ bằng

A. 3

B. 6

C. 9

D. $\sqrt{3}m$

Câu 136. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho số thực a . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\sqrt{a^2} = a^4$.

B. $\sqrt{a^2} = a$

C. $\sqrt{a^2} = -a^4$

D. $\sqrt{a^2} = |a|$

Câu 137. (ts Bến Tre 2022-2023) Nghiệm của phương trình $\sqrt{9x} = 27$ là

A. $x = 3$

B. $x = 81$

C. $x = 27$

D. $x = 9$

Câu 138. (ts Bến Tre 2022-2023) Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số bậc nhất $y = (m - 6)x + 2022$ đồng biến trên \mathbb{R} là

A. $m \geq 6$

B. $m < 6$

C. $m \leq 6$

D. $m - 8 > 0$

Câu 139. (ts Bến Tre 2022-2023) Điều kiện để hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ ($a \neq 0, a' \neq 0$) song song là

A. $a = a'$ và $b = b'$

B. $a = a'$ và $b \neq b'$

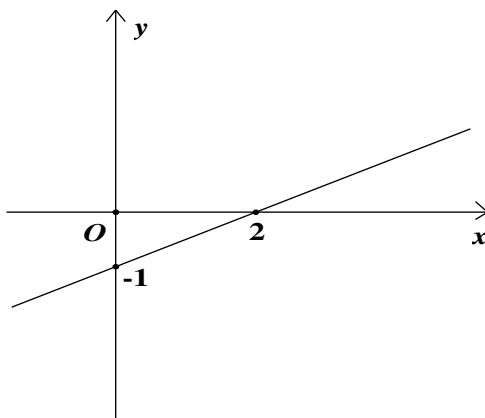
C. $a \neq a'$ và $b = b'$

D. $a \neq a'$ và $b \neq b'$

Câu 140. (ts Bến Tre 2022-2023) Đường thẳng $y = ax + 7$ đi qua điểm $A(2; 3)$ có hệ số góc a bằng

- A. 3 **B. -2** C. 5 D. -3

Câu 141. (ts Bến Tre 2022-2023) Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên ?



A. $y = \frac{1}{2}x - 1$

C. $y = x - 1$

B. $y = \frac{1}{2}x$

D. $y = x + 2$

Câu 142. (ts Bến Tre 2022-2023) Hệ phương trình nào sau đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y ?

A. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x - y = 7 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + \frac{2}{y} = 3y \end{cases}$

Câu 143. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho hàm số $y = 2022x^2$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$

B. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R}

C. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R}

D. Hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$

Câu 144. (ts Bến Tre 2022-2023) Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị của hàm số $y = (m - 6)x^2$ đi qua điểm $E(1; 2)$?

A. $m = 6$

B. $m = 4$

C. $m = 8$

D. $m = -8$

Câu 145. (ts Bến Tre 2022-2023) Tính biệt thức Δ của phương trình bậc hai $x^2 + 6x - 6 = 0$.

A. $\Delta = 42$

B. $\Delta = 36$

C. $\Delta = 15$

D. $\Delta = 60$

Câu 146. (ts Bến Tre 2022-2023) Phương trình bậc hai $7x^2 + 6x - 22 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

A. $\frac{22}{7}$

B. $-\frac{22}{7}$

C. $-\frac{6}{7}$

D. $\frac{6}{7}$

Câu 147. (ts Bến Tre 2022-2023) Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

A. $ax^2 + bx + c = 0$ với a, b, c là các số thực

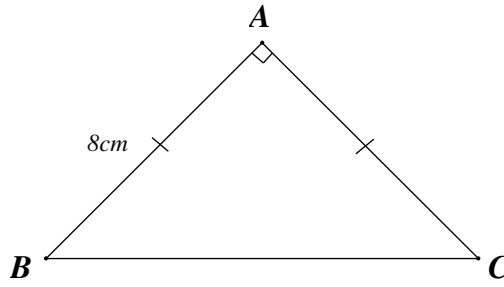
B. $ax + b = 0$ với a, b là các số thực

C. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ với a, b, c là các số thực

D. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ với a, b, c là các số thực và $a \neq 0$

Câu 148. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = 8$ cm.

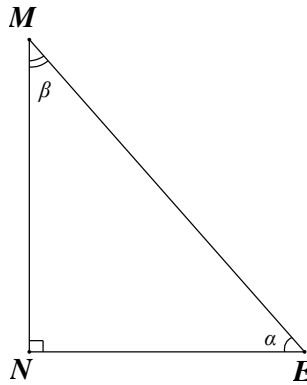
Độ dài đoạn thẳng BC bằng



- A.** $8\sqrt{2}$ cm **B.** 4 cm **C.** $16\sqrt{2}$ cm **D.** 128 cm

Câu 149. (ts Bến Tre 2022-2023) Trong hình vẽ bên, biết $\widehat{NEM} = \alpha, \widehat{NME} = \beta$.

Khẳng định nào sau đây không đúng ?



- A.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ **B.** $\sin\alpha = \cos\beta$ **C.** $\cos\alpha > 1$ **D.** $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Câu 150. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho đường tròn tâm O bán kính OA và đường tròn đường kính OA . Vị trí tương đối của hai đường tròn này là

- A.** nằm ngoài nhau
B. cắt nhau
C. tiếp xúc trong
D. tiếp xúc ngoài

Câu 151. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn như hình vẽ bên và $\widehat{BDC} = 70^\circ$

. Số đo \widehat{BAC} bằng

- A.** 70° **B.** 120° **C.** 110° **D.** 90°

Câu 152. (ts Bến Tre 2022-2023) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng

- A.** 180° **B.** 120° **C.** 360° **D.** 90°

Câu 153. (ts Bến Tre 2022-2023) Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy $r = 3$ cm, chiều cao $h = 5$ cm. Thể tích hình trụ đó bằng

- A.** 45 cm^3 **B.** $15\pi \text{ cm}^3$ **C.** $45\pi \text{ cm}^3$ **D.** $75\pi \text{ cm}^3$

Câu 154. (ts Bến Tre 2022-2023) Thể tích của một hình cầu có bán kính $R = 7$ cm bằng

- A.** $\frac{343}{3} \pi \text{ cm}^3$ **B.** $\frac{1372}{3} \pi \text{ cm}^3$ **C.** $343\pi \text{ cm}^3$ **D.** $196\pi \text{ cm}^3$

Câu 155. (ts Bến Tre 2022-2023) Giá trị của biểu thức $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$ bằng

- A. 3 B. 6 C. 9 D. $\sqrt{3m}$

Câu 156. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho số thực a . Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. $\sqrt{a^2} = a^4$. B. $\sqrt{a^2} = a$ C. $\sqrt{a^2} = -a^4$ D. $\sqrt{a^2} = |a|$

Câu 157. (ts Bến Tre 2022-2023) Nghiệm của phương trình $\sqrt{9x} = 27$ là

- A. $x = 3$ B. $x = 81$ C. $x = 27$ D. $x = 9$

Câu 158. (ts Bến Tre 2022-2023) Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số bậc nhất $y = (m - 6)x + 2022$ đồng biến trên \mathbb{R} là

- A. $m \geq 6$ B. $m < 6$ C. $m \leq 6$ D. $m - 8 > 0$

Câu 159. (ts Bến Tre 2022-2023) Điều kiện để hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ ($a \neq 0, a' \neq 0$) song song là

- A. $a = a'$ và $b = b'$ B. $a = a'$ và $b \neq b'$ C. $a \neq a'$ và $b = b'$ D. $a \neq a'$ và $b \neq b'$

Câu 160. (ts Bến Tre 2022-2023) Đường thẳng $y = ax + 7$ đi qua điểm $A(2;3)$ có hệ số góc a bằng

- A. 3 B. -2 C. 5 D. -3

Câu 161. (ts Bến Tre 2022-2023) Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên ?

- A. $y = \frac{1}{2}x - 1$ B. $y = \frac{1}{2}x$ C. $y = x - 1$ D. $y = x + 2$

Câu 162. (ts Bến Tre 2022-2023) Hệ phương trình nào sau đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y ?

- A. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x - y = 7 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + \frac{2}{y} = 3y \end{cases}$

Câu 163. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho hàm số $y = 2022x^2$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. Hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$
 B. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R}
 C. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R}
 D. Hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$

Câu 164. (ts Bến Tre 2022-2023) Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị của hàm số $y = (m - 6)x^2$ đi qua điểm $E(1;2)$?

- A. $m = 6$ B. $m = 4$ C. $m = 8$ D. $m = -8$

Câu 165. (ts Bến Tre 2022-2023) Tính biệt thức Δ của phương trình bậc hai $x^2 + 6x - 6 = 0$.

- A. $\Delta = 42$ B. $\Delta = 36$ C. $\Delta = 15$ D. $\Delta = 60$

Câu 166. (ts Bến Tre 2022-2023) Phương trình bậc hai $7x^2 + 6x - 22 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- A. $\frac{22}{7}$ B. $-\frac{22}{7}$ C. $-\frac{6}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

Câu 167. (ts Bến Tre 2022-2023) Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

- A. $ax^2 + bx + c = 0$ với a, b, c là các số thực B. $ax + b = 0$ với a, b là các số thực
 C. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ với a, b, c là các số thực D. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ với a, b, c là các số thực và $a \neq 0$

Câu 168. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = 8$ cm. Độ dài đoạn thẳng BC bằng

- A. $8\sqrt{2}$ cm B. 4 cm C. $16\sqrt{2}$ cm D. 128 cm

Câu 169. (ts Bến Tre 2022-2023) Trong hình vẽ bên, biết $\widehat{NEM} = \alpha, \widehat{NME} = \beta$. Khẳng định nào sau đây không đúng ?

- A. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ B. $\sin\alpha = \cos\beta$ C. $\cos\alpha > 1$ D. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Câu 170. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho đường tròn tâm O bán kính OA và đường tròn đường kính OA . Vị trí tương đối của hai đường tròn này là

- A. nằm ngoài nhau B. cắt nhau C. tiếp xúc trong
D. tiếp xúc ngoài

Câu 171. (ts Bến Tre 2022-2023) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn như hình vẽ bên và $\widehat{BDC} = 70^\circ$. Số đo \widehat{BAC} bằng

- A. 70° B. 120° C. 110° D. 90°

Câu 172. (ts Bến Tre 2022-2023) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn có số đo bằng

- A. 180° B. 120° C. 360° D. 90°

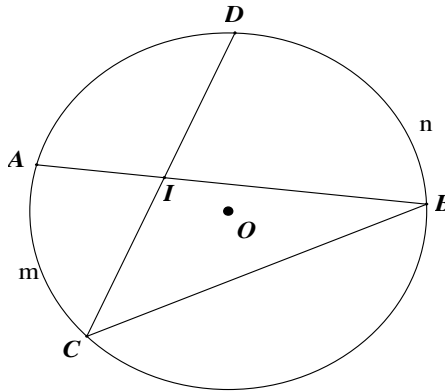
Câu 173. (ts Bến Tre 2022-2023) Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy $r = 3$ cm, chiều cao $h = 5$ cm. Thể tích hình trụ đó bằng

- A. 45 cm^3 B. $15\pi \text{ cm}^3$ C. $45\pi \text{ cm}^3$ D. $75\pi \text{ cm}^3$

Câu 174. (ts Bến Tre 2022-2023) Thể tích của một hình cầu có bán kính $R = 7$ cm bằng

- A. $\frac{343}{3} \pi \text{ cm}^3$ B. $\frac{1372}{3} \pi \text{ cm}^3$ C. $343\pi \text{ cm}^3$ D. $196\pi \text{ cm}^3$

Câu 175. (ts Cần Thơ 2022-2023) Cho đường tròn (O) có hai dây AB và CD cắt nhau tại I (như hình vẽ bên dưới), biết $\widehat{sdAmC} = 50^\circ, \widehat{sdBnD} = 80^\circ$. Số đo của \widehat{AIC} bằng :



- A. 30° .
B. 65° .
C. 130° .
D. 15° .

Lời giải

Ta có : \widehat{AIC} là góc có đỉnh bên trong đường tròn nên

$$\widehat{AIC} = \frac{\widehat{sdAmC} + \widehat{sdBnD}}{2} = \frac{50^\circ + 80^\circ}{2} = 65^\circ.$$

Câu 176. (ts Cần Thơ 2022-2023) Hàm số nào sau đây là hàm số bậc nhất ?

- A. $y = -\frac{1}{x}$ B. $y = -3\sqrt{x}$.

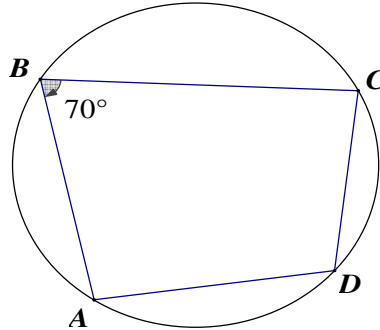
C. $y = -3x + 1.$

D. $y = -x^2 - 2.$

Lời giải

Hàm số bậc nhất một ẩn có dạng $y = ax + b$ nên ta chọn câu C

Câu 177. (ts Cần Thơ 2022-2023) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn và $\widehat{ABC} = 70^\circ$. Số đo \widehat{ADC} bằng :



A. $140^\circ.$

B. $20^\circ.$

C. $70^\circ.$

D. $110^\circ.$

Lời giải

Vì tứ giác ABCD nội tiếp (hình trên) nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

Câu 178. (ts Cần Thơ 2022-2023) Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn ?

A. $5x^2 - 9x + 4 = 0.$

B. $x^4 - 9x^2 + 7 = 0.$

C. $x^3 - 3x - 1 = 0.$

D. $3x - 5 = 0.$

Lời giải

Hàm số bậc nhất một ẩn có dạng $y = ax^2 + bx + c$ nên ta chọn câu A

Câu 179. (ts Cần Thơ 2022-2023) Tập nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$

A. $\{-3; 4\}.$

B. $\{-4; -3\}.$

C. $\{-4; 3\}.$

D. $\{3; 4\}.$

Lời giải

Giải phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$

Xét $\Delta = b^2 - 4ac = 1$, Vậy theo công thức nghiệm ta có : $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Câu 180. (ts Cần Thơ 2022-2023) Giá trị của biểu thức $2\sqrt{9} - \sqrt[3]{64} + \sqrt{3 \cdot 12}$ bằng

A. 8.

B. -4.

C. -8.

D. 4.

Lời giải

Thực hiện biến đổi $2\sqrt{9} - \sqrt[3]{64} + \sqrt{3 \cdot 12} = 2 \cdot 3 - 4 + 6 = 8$

Câu 181. (ts Cần Thơ 2022-2023) Diện tích của hình tròn có bán kính 12 cm là :

A. $1728\pi \text{ cm}^2.$

B. $36\pi \text{ cm}^2.$

C. $144\pi \text{ cm}^2.$

D. $12\pi \text{ cm}^2.$

Lời giải

Diện tích đường tròn là : $S = \pi R^2 = \pi 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

Câu 182. (ts Cần Thơ 2022-2023) Diện tích của mặt cầu có bán kính 11 cm là :

A. $121\pi \text{ cm}^2.$

B. $88\pi \text{ cm}^2.$

C. $1331\pi \text{ cm}^2.$

D. $484\pi \text{ cm}^2.$

Lời giải

Diện tích mặt cầu là : $S = 4\pi R^2 = 4\pi 11^2 = 484\pi \text{ cm}^2$

Câu 183. (ts Cần Thơ 2022-2023) Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai ?

A. $y = 4\sqrt{x}$.

B. $y = \frac{5}{x}$.

C. $y = \frac{3}{4}x^2$.

D. $y = 3x + 2$.

Lời giải

Hàm số bậc hai có dạng $y = ax^2 + bx + c$

Câu 184. (ts Cần Thơ 2022-2023) Điều kiện của x để biểu thức $\sqrt{3x-6}$ có nghĩa là

A. $x < 2$.

B. $x > 2$.

C. $x \leq 2$.

D. $x \geq 2$.

Lời giải

Điều kiện để biểu thức có nghĩa là $3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Câu 185. (ts Cần Thơ 2022-2023) Cặp số $(2, -3)$ là nghiệm của của hệ phương trình nào dưới đây ?

A. $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$

Lời giải

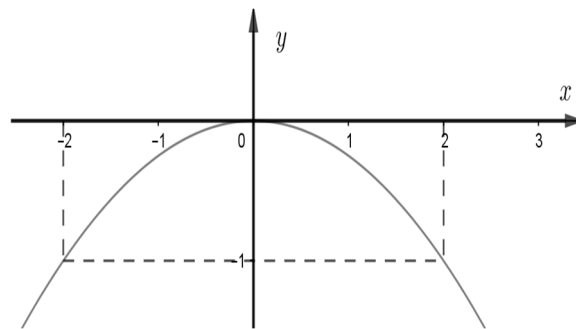
Có hai cách để xác định đáp án :

Cách 1 : Tiến hành giải từng đáp án , ta có $(2; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$

Cách 2 : Thay $x = 2, y = -3$ vào các đáp án và chọn đáp án thỏa mãn ta thấy hệ phương trình

$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu

Câu 186. (ts Cần Thơ 2022-2023) Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



A. $y = -x^2$.

B. $y = x^2$.

C. $y = -\frac{1}{4}x^2$.

D. $y = \frac{1}{4}x^2$.

Lời giải

Ta thấy đồ thị hàm số $y = ax^2$ (*) đi qua 2 điểm $(-2; -1)$ và $(2; -1)$ thay vào (*) ta có :

$4a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

Vậy đồ thị hàm số có dạng $y = -\frac{1}{4}x^2$

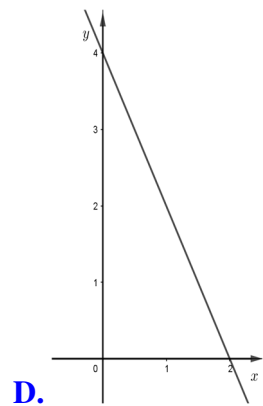
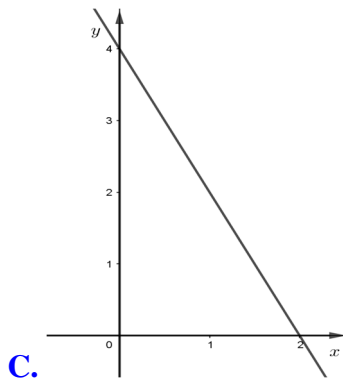
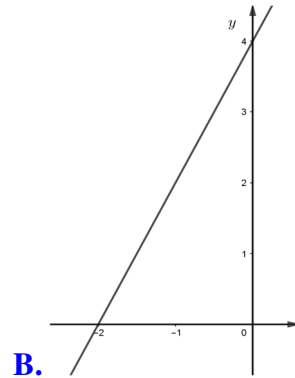
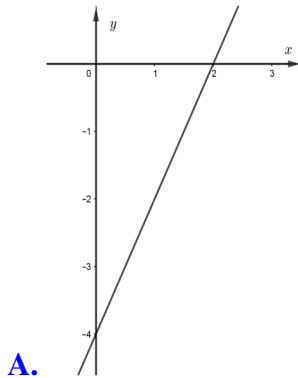
Câu 187. (ts Cần Thơ 2022-2023) Nghiệm của phương trình $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ x - y = -5 \end{cases}$ là

A. $(-3; -2)$. B. $(-2; 3)$ C. $(2; -3)$. D. $(3; -2)$.

Lời giải

Thực hiện giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-5 + y) + 5y = 11 \\ x = -5 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Câu 188. (ts Cần Thơ 2022-2023) Hàm số $y = -2x + 4$ có đồ thị là hình vẽ nào dưới đây ?



Lời giải

Ta chọn 2 điểm $A(0; y)$ và $B(x; 0) \in y = -2x + 4$ (*)

Thay $A(0; y)$ vào (*) ta có : $y = 0 \cdot (-2) + 4 = 4$ vậy điểm $A(0; 4)$

Thay $B(x; 0)$ vào (*) ta có : $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ vậy điểm $B(2; 0)$

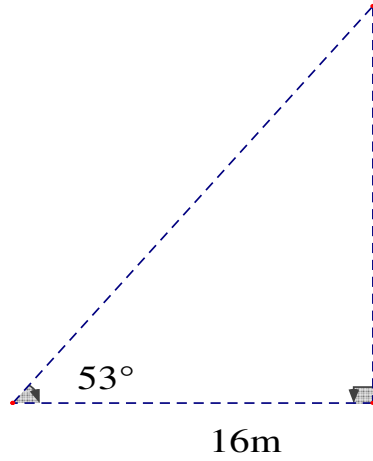
Câu 189. (ts Cần Thơ 2022-2023) Cho hàm số $y = ax + 3$ có đồ thị đi qua điểm $A(-2; -1)$. Giá trị hệ số a bằng ?

A. 2. B. -1. C. 1. D. -2.

Lời giải

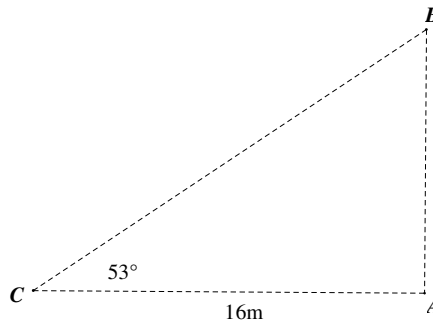
Do hàm số $y = ax + 3$ đi qua điểm $A(-2; -1)$ nên ta có : $-1 = -2a + 3 \Leftrightarrow a = 2$

Câu 190. (ts Cần Thơ 2022-2023) Một tòa tháp có bóng trên mặt đất dài 16m, biết rằng góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất là 35° (minh họa như hình vẽ bên dưới). Chiều cao của tòa tháp (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) bằng



- A.** 21,33m . **B.** 12,06 . **C.** 12,78m . **D.** 20,03m .

Lời giải



Gọi AB là chiều cao cần tìm của tòa tháp . Có $AB = AC \tan 53 = 16 \cdot \tan 53 \approx 21,23$

- Câu 191.** (ts **Cần Thơ 2022-2023**) Tọa độ giao điểm của đường thẳng $(d): y = 5x - 4$ và parabol $(P): y = x^2$ là
- A.** $(-1;1)$ và $(-4;16)$. **B.** $(1;1)$ và $(4;16)$.
C. $(-1;1)$ và $(4;16)$. **D.** $(1;1)$ và $(-4;16)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P) là : $5x - 4 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

- * Thay $x = 1$ vào $(P): y = x^2 \Rightarrow y = 1$
- * Thay $x = 4$ vào $(P): y = x^2 \Rightarrow y = 4^2 = 16$

- Câu 192.** (ts **Cần Thơ 2022-2023**) Thể tích hình nón có đường kính của đường tròn đáy bằng 14cm và độ dài đường cao bằng 9cm là :
- A.** $588\pi \text{ cm}^3$. **B.** $441\pi \text{ cm}^3$. **C.** $63\pi \text{ cm}^3$ **D.** $147\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải

Xét đường tròn đáy có : $d = 14 \Rightarrow R = \frac{14}{2} = 7$

Ta có thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 7^2 \cdot 9 = 147\pi \text{ cm}^3$

- Câu 193.** (ts **Cần Thơ 2022-2023**) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 6 = 0$. Giá trị biểu thức $x_1 + x_2 + x_1 x_2$ bằng

- A. -13. **B. 13.** C. -1. D. 1.

Lời giải

Cách 1 : Thực hiện giải phương trình $x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Gọi $A = x_1 + x_2 + x_1x_2 = 6 + 1 + 6.1 = 13$

Cách 2 : Xét $\Delta = 7^2 - 4.6 = 25 > 0$

Lập biểu thức Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} = 7 \\ x_1x_2 = P = \frac{c}{a} = 6 \end{cases}$

$A = x_1 + x_2 + x_1x_2 = S + P = 7 + 6 = 13$

Câu 194. (ts Cần Thơ 2022-2023) Hai bạn Lam và Trân đến nhà sách mua bút lông viết bảng và bút bi. Số tiền mà Lam phải trả khi mua 1 hộp bút lông và 4 hộp bút bi là 318 000 đồng. Giá tiền của một hộp bút lông và một hộp bút bi lần lượt là

- A. 150 000 đồng và 32 000 đồng. **B. 142 000 đồng và 44 000 đồng.**
 C. 44 000 đồng và 142 000 đồng. D. 178 000 đồng và 35 000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá tiền mua một hộp bút lông và y là giá tiền mua hộp bút bi, theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 4y = 318000 \\ 3x + 2y = 514000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 142000 \\ y = 44000 \end{cases}$$

Câu 195. (ts Nam Định 2022-2023) Hàm số nào sau đây nghịch biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = 2022x + 2023$. B. $y = 2023x + 2022$.
 C. $y = -2023x + 2022$. D. $y = 2022x - 2023$.

Câu 196. (ts Nam Định 2022-2023) Điều kiện xác định của biểu thức $\frac{3}{\sqrt{x-2022}}$ là

- A. $x \geq 2022$. B. $x > 2022$. C. $x < 2022$. D. $x \leq 2022$.

Câu 197. (ts Nam Định 2022-2023) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $2m$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Diện tích của tứ giác $ADCI$ bằng

- A. $3m^2$. B. $2m^2$. C. $\frac{5}{2}m^2$. D. $1m^2$.

Câu 198. (ts Nam Định 2022-2023) Hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$ có nghiệm là $(x_0; y_0)$, giá trị $x_0 - 4y_0$ bằng

- A. 2. B. -7. C. -2. D. 8.

Câu 199. (ts Nam Định 2022-2023) Phương trình $x^2 + 2022x - 2023 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

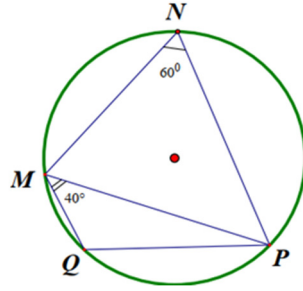
Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- A. 2022. B. 2023. C. -2022. D. -2023.

Câu 200. (ts Nam Định 2022-2023) Đường thẳng đi qua điểm $M(1;1)$ và song song với đường thẳng $d: y = 2x - 3$ có phương trình là

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = -2x + 3$. C. $y = 2x + 1$. D. $y = -2x - 1$.

Câu 201. (ts Nam Định 2022-2023) Cho tứ giác $MNPQ$ nội tiếp một đường tròn có $\widehat{MNP} = 60^\circ$ và $\widehat{PMQ} = 40^\circ$ (hình vẽ bên). Số đo \widehat{MPQ} bằng



- A. 10° .
- B. 20° .
- C. 40° .
- D. 50° .

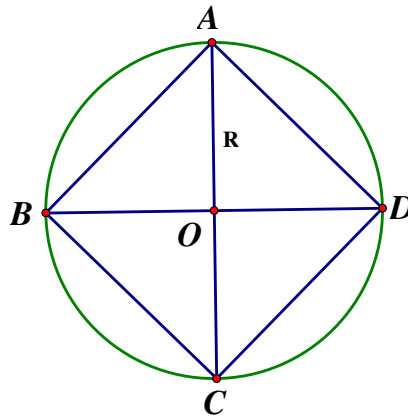
Câu 202. (ts Nam Định 2022-2023) Thể tích của hình cầu có đường kính 6 cm bằng

- A. $288\pi\text{ cm}^3$.
- B. $\frac{81}{4}\pi\text{ cm}^3$.
- C. $27\pi\text{ cm}^3$.
- D. $36\pi\text{ cm}^3$.

Câu 203. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Hình vuông có diện tích 36 cm^2 . Bán kính đường tròn ngoại tiếp của hình vuông đó bằng

- A. 6 cm .
- B. $3\sqrt{2}\text{ cm}$.
- C. $\sqrt{2}\text{ cm}$.
- D. 3 cm .

Lời giải



Đặt $OA = OB = R (R > 0)$

Cạnh của hình vuông là $\sqrt{36} = 6\text{ cm}$

Xét tam giác AOB vuông tại O có

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$R^2 + R^2 = 6^2 \Rightarrow R^2 = 18 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}.$$

Câu 204. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = (1 - \sqrt{2})x$.
- B. $y = -\sqrt{2}x^2$.
- C. $y = \sqrt{2}x^2$.
- D. $y = (\sqrt{2} - 1)x$.

Lời giải

Hàm số $y = (1 - \sqrt{2})x$ nghịch biến trên \mathbb{R} vì $a = 1 - \sqrt{2} < 0$.

Câu 205. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Biểu thức $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ có giá trị bằng

- A. 0.
- B. 4.
- C. $2\sqrt{3}$.
- D. $4 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải

$$\sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = 2 - \sqrt{3} + |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Câu 206. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Khi $x = -1$, biểu thức $\sqrt{x^2 + 8}$ có giá trị bằng?

A. 3.

B. $\sqrt{7}$.

C. 9.

D. ± 3 .

Lời giải

Thay $x = -1$ vào biểu thức $\sqrt{x^3 + 8} = \sqrt{(-1)^3 + 8} = \sqrt{7} = 3$.

Câu 207. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $A(-2;1)$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{4}$.

C. $m = -2$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $A(-2;1) \Leftrightarrow$ thay $x = -2; y = 1$ vào hàm số $y = mx^2$ ta được:

$$1 = m \cdot 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$ thì đồ thị hàm số $y = mx^2$ đi qua điểm $A(-2;1)$.

Câu 208. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Đường thẳng $(d): y = 4x - 3$ và parabol $(P): y = x^2$ cắt nhau tại hai điểm là:

A. $E(1;1)$ và $N(3;9)$.

B. $E(1;1)$ và $Q(-3;9)$.

C. $M(-1;1)$ và $N(3;9)$.

D. $M(-1;1)$ và $Q(-3;9)$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm ta có:

$$4x - 3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow E(1;1) \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow N(3;9) \end{cases}$$

Câu 209. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Cho α là một góc nhọn, có $\tan \alpha = \sqrt{3}$. Giá trị $\cot \alpha$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Câu 210. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Đường thẳng nào sau đây đi qua điểm $E(0;1)$ và song song với đường thẳng $y = 2x$.

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = -2x + 1$.

D. $y = 2x + 1$.

Lời giải

Giả sử đường thẳng đi qua điểm $E(0;1)$ và song song với đường thẳng $y = 2x$ có dạng là

$$y = ax + b (a \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \cdot a + b \\ a = 2 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + 1$$

Câu 211. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $(x; y) = (2; -2)$.

B. $(x; y) = (2; 1)$.

C. $(x; y) = (1; -1)$.

D. $(x; y) = (0; -3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -1)$

Câu 212. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Tích hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 2 = 0$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. 3.

D. -3.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 3x - 2 = 0$ ta có $ac = -2 < 0$. Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt. Theo Viét ta có $x_1 \cdot x_2 = -2$.

Câu 213. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Tất cả các giá trị của x để biểu thức $\sqrt{3-x}$ có nghĩa

- A.** $x \leq 3$. **B.** $x \geq 3$. **C.** $x < 3$. **D.** $x > 3$.

Lời giải

Biểu thức $\sqrt{3-x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

Câu 214. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 2\text{cm}$, $\widehat{C} = 30^\circ$. Diện tích tam giác ABC bằng

- A.** $\sqrt{2}\text{cm}^2$. **B.** $\sqrt{3}\text{cm}^2$. **C.** $2\sqrt{3}\text{cm}^2$. **D.** 12cm^2 .

Lời giải

tam giác ABC vuông tại A , c $AC = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\text{cm}^2$

Câu 215. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Phương trình $x^2 + x - a = 0$ (a là tham số) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

- A.** $a < -\frac{1}{4}$. **B.** $a < \frac{1}{4}$. **C.** $a > -\frac{1}{4}$. **D.** $a > \frac{1}{4}$.

Lời giải

Phương trình $x^2 + x - a = 0$ (a là tham số) có $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = 4a + 1$

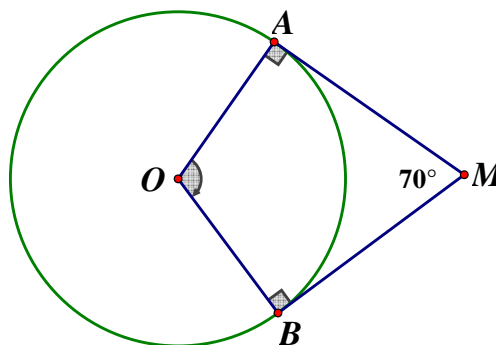
Để phương trình $x^2 + x - a = 0$ (a là tham số) có hai nghiệm phân biệt thì:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{4}$$

Câu 216. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Biết $\widehat{AMB} = 70^\circ$. Số đo góc ở tâm của đường tròn (O) tạo bởi OA, OB bằng

- A.** 55° . **B.** 30° . **C.** 220° . **D.** 110° .

Lời giải



Vì hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M nên $OA \perp AM, OB \perp BM$

$$\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$$

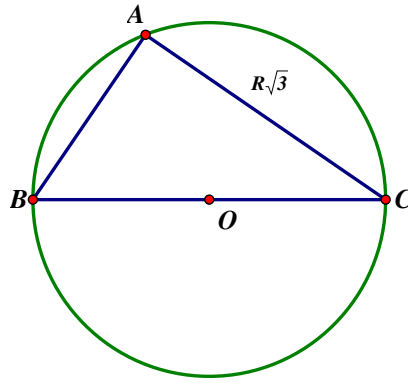
Xét tứ giác $OAMB$ có: $\widehat{OAM} + \widehat{AMB} + \widehat{OBM} + \widehat{BOA} = 360^\circ$ (tổng các góc của một tứ giác)

$$\Rightarrow 90^\circ + 70^\circ + 90^\circ + \widehat{BOA} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BOA} = 110^\circ$$

Câu 217. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ đường kính BC . Biết $AC = R\sqrt{3}$. Độ lớn của góc ACB bằng

- A.** 50° . **B.** 45° . **C.** 30° . **D.** 60° .

Lời giải



Tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ đường kính BC nên ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

\Rightarrow Tam giác ABC vuông tại A

Khi đó: $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ$.

Câu 218. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên không nhỏ hơn -10 của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ mx + y = 5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0 \cdot y_0 > 0$?

A. 19.

B. 20.

C. 21.

D. 18.

Lời giải

Xét hệ $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ mx + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ mx + 2x - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (m + 2)x = 6(3) \end{cases}$

Phương trình (3) có nghiệm x duy nhất $\Leftrightarrow m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

Khi đó $\begin{cases} y = 2 \cdot \frac{6}{m+2} - 1 \\ x = \frac{6}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{m+2} \\ y = \frac{10-m}{m+2} \end{cases} \quad S = a + 2b - c$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0) = \left(\frac{6}{m+2}; \frac{10-m}{m+2}\right)$ với $m \neq -2$.

Ta có $x_0 \cdot y_0 > 0 \Leftrightarrow \frac{6}{m+2} \cdot \frac{10-m}{m+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{6 \cdot (10-m)}{(m+2)^2} > 0(4)$.

Vì $(m+2)^2 > 0$ với $m \neq -2$ nên từ (4) ta có $10 - m > 0 \Leftrightarrow m < 10$.

Kết hợp với m nguyên không nhỏ hơn -10 ta có $\begin{cases} -10 \leq m < 10 \\ m \in \mathbb{Z} \\ m \neq -2 \end{cases}$

$\Rightarrow m \in \{-10; -9; -8; \dots; -3; -1; 0; \dots; 7; 8; 9\}$.

Do đó có 19 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 219. (ts Bắc Ninh 2022-2023) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = \sqrt{6}$ cm, $BH = 2$ cm.

Độ dài cạnh BC bằng

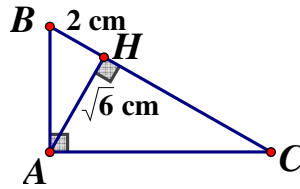
A. 10cm.

B. 4cm.

C. 6cm.

D. 5cm.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = \sqrt{6}$ cm, $BH = 2$ cm. Theo hệ thức lượng có $AH^2 = HB \cdot HC$ hay $(\sqrt{6})^2 = 2 \cdot HC \Leftrightarrow HC = 3$ cm.

Ta có $BC = BH + HC = 2 + 3 = 5$ cm

- Câu 220.** (ts Bắc Ninh 2022-2023) Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn $a + b + c - 21 = 2(\sqrt{a-7} + \sqrt{b-8} + \sqrt{c-9})$. Giá trị của biểu thức $S = a + 2b - c$ là
- A. $S = 36$. B. $S = 7$. **C. $S = 16$.** D. $S = 4$.

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} a \geq 7 \\ b \geq 8 \\ c \geq 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a + b + c - 21 &= 2(\sqrt{a-7} + \sqrt{b-8} + \sqrt{c-9}) \Leftrightarrow a + b + c - 21 = 2\sqrt{a-7} + 2\sqrt{b-8} + 2\sqrt{c-9} \\ \Leftrightarrow [(a-7) - 2\sqrt{a-7} + 1] &+ [(b-8) - 2\sqrt{b-8} + 1] + [(c-9) - 2\sqrt{c-9} + 1] = 0 \\ \Leftrightarrow [\sqrt{a-7} - 1]^2 &+ [\sqrt{b-8} - 1]^2 + [\sqrt{c-9} - 1]^2 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a-7} - 1 = 0 \\ \sqrt{b-8} - 1 = 0 \\ \sqrt{c-9} - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 9 \\ c = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu ĐK ta có $(a; b; c) = (8; 9; 10)$.

Do đó $S = a + 2b - c = 8 + 2 \cdot 9 - 10 = 16$.

- Câu 221.** (ts Bắc Ninh 2022-2023) Số nghiệm của phương trình $x^4 - (\sqrt{3} + 1)x^2 + \sqrt{3} = 0$ là:
- A. 2. **B. 4.** C. 1. D. 3.

Lời giải

Cách thứ nhất: Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$. Khi đó phương trình $x^4 - (\sqrt{3} + 1)x^2 + \sqrt{3} = 0$ có dạng:

$$t^2 - (\sqrt{3} + 1)t + \sqrt{3} = 0$$

Ta có: $1 - (\sqrt{3} + 1) + \sqrt{3} = 0$ nên phương trình $t^2 - (\sqrt{3} + 1)t + \sqrt{3} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$t_1 = 1 (t/m); t_2 = \sqrt{3} (t/m)$$

Suy ra phương trình $x^4 - (\sqrt{3} + 1)x^2 + \sqrt{3} = 0$ có 4 nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \sqrt[4]{3}; x_4 = -\sqrt[4]{3}$

Cách thứ hai: Bấm máy tính.

- Câu 222.** (ts Bắc Ninh 2022-2023) Cho hàm số $y = f(x) = (1 + m^4)x^2 + 1$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $f(2) < f(3)$.** B. $f(-4) < f(-2)$. C. $f(-1) > f(-5)$. D. $f(1) > f(2)$.

Lời giải

Ta có $1 + m^4 \geq 1 > 0$ với mọi m nên hàm số $y = f(x) = (1 + m^4)x^2 + 1$ đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

Vậy $f(2) < f(3)$.