MỘT SỐ TÍNH CHẤT HÌNH HỌC CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ HỮU TỈ

Học sinh: Phạm Tùng Quân

Lớp: 11 Tin

Trường: Trung học Phổ thông Chuyên Thăng Long, Đà Lạt

Giáo viên hướng dẫn: Đặng Nhi Thảo

Cố vấn khoa học: PGS. TS. Phạm Tiến Sơn

Đà Lạt, Ngày 1 tháng 10 năm 2016

Mục lục

1 Giới thiệu

Trong chương trình toán trung học phổ thông, các sách giáo khoa và sách tham khảo thường chỉ trình bày tính chất của các đa thức bậc ≤ 3 và các hàm số hữu tỉ đơn giản. Em nhận thấy rằng rất ít tài liệu đề cập đến đa thức bậc cao. Một câu hỏi nảy sinh là các đa thức (bậc tùy ý) hay tổng quát hơn, các hàm số hữu tỉ, có những tính chất đặc trưng gì?

Các đồ thị hàm số bậc nhất $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ có tính chất đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trên đồ thị chứa trong đồ thị. Với đồ thị hàm số bậc hai $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a > 0)$ có tính chất đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trên đồ thị luôn nằm (thực sự) trên cung của đồ thị nối hai điểm này. Những quan sát này dẫn đến câu hỏi sau:

Câu hỏi 1. *Những hàm số f nào có tính chất đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn nằm (thực sự) trên cung của đồ thị nối hai điểm này.*

Khi vẽ đồ thị các hàm số đa thức $y = f(x)$ có bậc hai, ba, chúng ta thấy đồ thị không "dao động" và chỉ có hai nhánh hướng ra vô hạn (khi x tiến ra vô hạn) và các nhánh này hướng đến đường thẳng song song trục tung. Các hàm số hữu tỉ có tử số là đa thức bậc ≤ 2 và mẫu số là đa thức bậc 1 đều không dao động và luôn có một số chẵn nhánh hướng ra vô hạn. Câu hỏi tiếp theo là:

Câu hỏi 2. *Phải chăng phần đồ thị ở vô hạn của các hàm số hữu tỉ không dao động và luôn có một số chẵn nhánh hướng ra vô hạn?*

Chúng ta thường giải và biện luận về nghiệm và số nghiệm của phương trình $f(x) = t$ với t là tham số thực. Nếu f là đa thức bậc hai, thì phương trình $f(x) = t$ có nhiều nhất 2 nghiệm; hơn nữa dễ dàng xác định các nghiệm của phương trình này (nếu có). Mặt khác, chúng ta biết rằng nói chung không thể tìm nghiệm của các phương trình đa thức bậc lớn hơn năm. Vấn đề đặt ra là:

Câu hỏi 3. *Cho hàm số hữu tỉ f. Với những giá trị nào của tham số t thì phương trình $f(x) = t$ có nghiệm, không có nghiệm? Số nghiệm của phương trình phụ thuộc thế nào theo t? Liệu rằng chúng có "ổn định" như đối với các đa thức bậc nhất hoặc hai?*

Bài toán tìm nghiệm (hoặc/và nghiệm nguyên) của các bất phương trình đa thức cũng thường gặp. Nói chung rất khó để giải bài toán này khi bậc đa thức lớn (chẳng hạn đa thức có bậc ≥ 5). Một câu hỏi nảy sinh:

Câu hỏi 4. *Cho hàm số hữu tỉ f. Với những giá trị nào của tham số t thì bất phương trình $f(x) \leq t$ (hoặc $|f(x)| \leq t$) có nghiệm, không có nghiệm? Số nghiệm của phương trình khi t tiến ra vô hạn? Chúng có "ổn định" như đối với các đa thức bậc nhất hoặc hai?*

Mục đích:

Trong đề tài này em tìm hiểu một số tính chất của hàm số hữu tỉ một biến. Cụ thể em muốn tìm các câu trả lời cho những câu hỏi nêu trên.

Kết quả đạt được:

Thiết lập những tính chất sau của các hàm số hữu tỉ một biến:

- Tính lồi, lồi chặt.
- Mô tả hình học (tại vô hạn) của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Tiệm cận độ dài và số điểm nguyên của tập dưới mức của hàm số hữu tỉ.

Nội dung của bài báo cáo:

Phần 2 trình bày kiến thức chuẩn bị được sử dụng trong các chứng minh. Các kết quả nghiên cứu đạt được trình bày trong các phần **??**, **??** và **??**. Phần **??** là kết luận. Cuối cùng là các tài liệu tham khảo.

Lời cám ơn

Em tỏ lòng biết ơn chân thành nhất đến Thầy Đặng Văn Đoạt và Cô Đặng Nhi Thảo đã nhiệt tình, tận tụy hướng dẫn và đóng góp những ý kiến vô cùng quý báu cho em. trong suốt thời gian thực hiện đề tài.

2 Kiến thức chuẩn bị

Trong báo cáo, giả sử $f := \frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm hữu tỉ, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là đa các thức không có nghiệm chung, $Q(x) \not\equiv 0$.

Trong báo cáo, em sẽ sử dụng những kết quả đã biết sau (xem [2, 3]):

1. Đa thức bậc $n \geq 1$ có không quá n nghiệm (kể cả bội). Từ đó suy ra nếu f là hằng số trên đoạn $[a, b]$ thì f là hàm hằng.

2. Đạo hàm của f xác định bởi:

$$f'(x) \quad := \quad \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2},$$

   và do đó cũng là hàm số hữu tỉ.

3. Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ là đường thẳng có phương trình:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Suy ra $\vec{v}(1, f'(x_0))$ là vector chỉ phương của đường thẳng tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M(x_0, f(x_0))$.

Trong phần còn lại của phần này, giả sử hàm số f xác định trên đoạn $[a, b]$, tức là $Q(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Định lý 1 (Định lý Weierstrass)**.** *f đạt các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$.*

Ví dụ 1. Xét đa thức $f(x) := x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$ trên đoạn $[0, 5]$. Khi đó f đạt giá trị nhỏ nhất là 0 tại $x = 0$ hoặc $x = 3$ và f đạt giá trị lớn nhất là 20 tại $x = 5$. Đồ thị hàm số cho trong Hình 1.

Hình 1: Hàm số $f(x) := x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$ trên đoạn $[0, 5]$ có giá trị nhỏ nhất $f(0) = f(3) = 0$ và giá trị lớn nhất $f(5) = 20$.

Định lý 2 (Định lý giá trị trung gian)**.** *Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì có điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

Về mặt hình học, nếu $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ít nhất một điểm có hoành độ c thuộc đoạn $[a, b]$.

Ví dụ 2. Xét đa thức $f(x) := x^4 - 7\,x^3 + 14\,x^2 - 8\,x + 1$ trên đoạn $[-1, 3]$. Ta có $f(-1)f(3) = 31 \times (-5) = -155 < 0$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[-1, 3]$. Đồ thị hàm số cho trong Hình 2.

Hình 2: Đồ thị hàm số $f(x) := x^4 - 7\,x^3 + 14\,x^2 - 8\,x + 1$ cắt trục hoành tại 4 điểm trong đó có 3 điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1, 3]$.

Định lý 3 (Định lý Fermat)**.** *Nếu $c \in (a, b)$ là điểm cực tiểu (hoặc cực đại) của f trên đoạn $[a, b]$ thì $f'(c) = 0$.*

Về mặt hình học, tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(c, f(c))$ song song với trục hoành.

Ví dụ 3. Xét đa thức $f(x) := x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$ trên đoạn $[-1, 5]$. Ta có $x = 1 \in (-1, 5)$ là điểm cực đại và $x = 3 \in (-1, 5)$ là điểm cực tiểu. Tính toán có

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3).$$

Suy ra $f'(1) = f'(3) = 0$. Đồ thị hàm số cho trong Hình 3.

Hình 3: Hàm số $f(x) := x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$ có cực đại tại $x = 1$ và cực tiểu tại $x = 3$.

Định lý 4 (Định lý Lagrange)**.** *Với mọi số thực phân biệt a và b với $a < b$, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Về mặt hình học, tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(c, f(c))$ song song với dây cung nối hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$.

Ví dụ 4. Xét đa thức $f(x) := x^3 - x$ trên đoạn $[-2, 2]$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 1$ và $f(-2) = -6, f(2) = 6$. Suy ra $x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ và $x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ là hai giá trị thỏa mãn phương trình

$$f'(x) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = 3.$$

Đồ thị hàm số cho trong Hình 4.

Hình 4: Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) := x^3 - x$ tại hai điểm $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9})$ và $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})$ song song với dây cung nối hai điểm $(-2, -6)$ và $(2, 6)$.

3 Tính lồi, lồi chặt của hàm số $y = f(x)$

Phần này nghiên cứu tính lồi và lồi chặt của hàm f.

Định nghĩa 1. (ii) Hàm f gọi là *lồi trên khoảng* (α, β) nếu

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

với mọi $x, y \in (\alpha, \beta)$ và mọi $t \in [0, 1]$.

(ii) Hàm f gọi là *lồi chặt trên khoảng* (α, β) nếu

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$$

với mọi $x, y \in (\alpha, \beta), x \neq y$, và mọi $t \in (0, 1)$.

(iii) Hàm f gọi là *lõm* (tương ứng, *lõm chặt*) trên khoảng (α, β) nếu hàm $-f$ là lồi (tương ứng, *lồi chặt*) trên khoảng (α, β).

Về mặt hình học, trên khoảng (α, β), hàm lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trên đồ thị luôn nằm trên cung của đồ thị nối hai điểm này và hàm là lồi chặt nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trên đồ thị luôn nằm thực sự trên cung của đồ thị nối hai điểm này.

Ví dụ 5. (i) Mọi đa thức bậc một là lồi nhưng không lồi chặt.

(ii) Hàm số $2x^2$ là lồi.

(iii) Hàm số x^3 không lồi.

Đồ thị các hàm số trên cho trong Hình 5.

Hình 5: Đồ thị các hàm lồi nhưng không lồi chặt $y = x$, lồi chặt $y = 2x^2$, và không lồi $y = x^3$.

Tính chất 1. *Cho f là hàm số hữu tỉ xác định trên khoảng (α, β). Các điều sau là tương đương:*

(i) f là lồi trên khoảng (α, β).

(ii) $f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$ *với mọi* $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$.

(iii) $f''(x) \geq 0$ *với mọi* $x \in (\alpha, \beta)$.

Chứng minh. Các tính chất được chứng minh trong sách [1]. □

Ví dụ 6. (i) Giả sử $f(x) := x^2 + \frac{1}{1+x^2}$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,x - 2\,\frac{x}{(1+x^2)^2}, \\ f''(x) &= 2 + 8\,\frac{x^2}{(1+x^2)^3} - 2\,\left(1+x^2\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Ta có $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nên f là hàm số lồi trên $\mathbb{R}$.

(ii) Giả sử $f := x + 1/x$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x^{-2}, \\ f''(x) &= 2\,x^{-3}. \end{aligned}$$

Ta có $f''(x) > 0$ nếu $x > 0$ và $f''(x) < 0$ nếu $x < 0$. Suy ra f lồi trên khoảng $(0, +\infty)$ và f lõm trên khoảng $(-\infty, 0)$.

Tính chất 2. *Giả sử f là hàm số hữu tỉ (khác hằng) xác định trên khoảng (α, β). Khi đó có nhiều nhất một điểm thuộc khoảng (α, β) mà tại đó đạo hàm của f bằng không.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại hai điểm $a, b \in (\alpha, \beta)$ với $b \neq a$ sao cho $f'(a) = f'(b) = 0$. Tính chất 1 suy ra với mọi $x \in (\alpha, \beta)$ có

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq f'(a)(x-a) = 0, \\ f(x) - f(b) &\geq f'(b)(x-b) = 0. \end{aligned}$$

Do đó a, b là các điểm cực tiểu của f trên khoảng (α, β). Tính chất lồi suy ra f là hằng số trên đoạn $[a, b]$ và do đó là hằng số trên $\mathbb{R}$. Mâu thuẫn. □

Ví dụ 7.

Kết quả chính trong phần này là:

Định lý 5. *Giả sử f là hàm số hữu tỉ xác định trên khoảng (α, β) và không là hàm tuyến tính. Khi đó trên khoảng (α, β) hàm f là lồi nếu và chỉ nếu f lồi chặt.*

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh f lồi thì f lồi chặt.

Bằng phản chứng, giả sử tồn tại $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, $x_1 \neq x_2$, và $t_0 \in (0,1)$ sao cho

$$f((1-t_0)x_1 + t_0 x_2) = (1-t_0)f(x_1) + t_0 f(x_2).$$

Đặt

$$g(t) := f((1-t)x_1 + tx_2) - (1-t)f(x_1) - tf(x_2).$$

Ta có g là hàm số hữu tỉ xác định trên đoạn $[0,1]$ và khác hàm hằng (do f không là hàm tuyến tính). Ta có

$$g(0) = g(1) = g(t_0) = 0.$$

Theo Định lý Lagrange, tồn tại các số thực t_1 và t_2 với $0 < t_1 < t_0 < t_2 < 1$ sao cho

$$g'(t_1) = g'(t_2) = 0.$$

Mặt khác có

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'((1-t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2), \\ g''(t) &= f''((1-t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1)^2. \end{aligned}$$

Do $f(x)$ là lồi trên khoảng (α, β), nên theo Tính chất 1, hàm số f'' không âm trên khoảng (α, β). Suy ra g'' không âm trên khoảng $(0,1)$. Áp dụng Tính chất 1, có g là hàm lồi trên khoảng $(0,1)$. Theo Tính chất 2, g có duy nhất một điểm tại đó đạo hàm bằng không. Mâu thuẫn. Vậy f lồi chặt trên khoảng (α, β). □

Nhận xét rằng, nếu f là đa thức bậc 1 thì f bị chặn dưới trên mọi khoảng hữu hạn (α, β) và thỏa mãn

$$f(x) \;\; \geq \;\; \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \quad \text{với mọi} \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Định lý 6. *Giả sử f là hàm số hữu tỉ (không là đa thức bậc 1) xác định và lồi trên khoảng (α, β). Khi đó f bị chặn dưới trên khoảng (α, β), tức là tồn tại số thực m sao cho*

$$f(x) \;\; \geq \;\; m \quad \textit{với mọi} \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Chứng minh. Do $f(x)$ là lồi trên khoảng (α, β), nên theo Tính chất 1, hàm số $f''(x)$ không âm trên khoảng (α, β). Suy ra hàm số $f'(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng (α, β).

Trước hết giả sử tồn tại $a \in (\alpha, \beta)$ sao cho $f'(a) = 0$. Tính chất 1 suy ra với mọi $x \in (\alpha, \beta)$ có

$$f(x) - f(a) \;\; \geq \;\; f'(a)(x - a) \;\; = \;\; 0.$$

Nên $f(x) \geq f(a)$ với mọi $x \in (\alpha, \beta)$. Vậy $f(x)$ bị chặn dưới trên khoảng (α, β).

Kế tiếp giả sử $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (\alpha, \beta)$. Có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (\alpha, \beta)$.

Khi đó hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng (α, β). Nếu $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ (có hệ số góc là $f'(x_0)$) sẽ tiến đến đường thẳng song song trục tung nên

$$\lim_{x_0\to\alpha^+} f'(x_0) = +\infty.$$

Điều này mâu thuẫn do $f'(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng (α, β). Vậy tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ và giới hạn này bằng $f(\alpha)$. Kết hợp tính chất đơn điệu tăng của $f(x)$ có $f(x) \geq f(\alpha)$ với mọi $x \in (\alpha, \beta)$. Từ đó có điều cần chứng minh.

Trường hợp 2: $f'(x) < 0$ **với mọi** $x \in (\alpha, \beta)$.

Khi đó hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm trên khoảng (α, β). Nếu $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ (có hệ số góc là $f'(x_0)$) sẽ tiến đến đường thẳng song song trục tung nên

$$\lim_{x_0 \to \beta^-} f'(x_0) = -\infty.$$

Điều này mâu thuẫn do $f'(x)$ đơn điệu tăng trên khoảng (α, β). Vậy tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \to \beta^-} f(x)$ và giới hạn này bằng $f(\beta)$. Kết hợp tính chất đơn điệu giảm của $f(x)$ có $f(x) \geq f(\beta)$ với mọi $x \in (\alpha, \beta)$. Từ đó có điều cần chứng minh. $\square$

Nhận xét 1. Định lý trên chứng tỏ hàm số hữu tỉ f xác định và lồi trên khoảng (α, β) thì phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ khi x thay đổi trong khoảng (α, β) nằm phía trên đường thẳng $y = m$.

4 Hướng tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$

Giả sử $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung. Trong phần này chúng ta tìm hiểu hướng tiệm cận của đồ thị (C) của hàm số hữu tỉ $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ khi x tiến ra vô cùng và khi x tiến đến α với $Q(\alpha) = 0$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ cho bởi phương trình:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Suy ra $\vec{v}(1, f'(x_0))$ là vector chỉ phương của đường thẳng tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M(x_0, f(x_0))$. Cố định điểm A với tọa độ (a, b). Độ dài vector v cho bởi công thức

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}.$$

và độ dài vector $\overrightarrow{AM} = (x_0 - a, f(x_0) - b)$ cho bởi công thức

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (f(x_0) - b)^2}.$$

Để xác định hướng tiệm cận của đồ thị (C), ta cần trả lời hai câu hỏi sau:

(i) Tính các giới hạn

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|},$$

(ii) Tính các giới hạn

$$\lim_{x_0 \to \alpha^\pm} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \alpha^\pm} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|}.$$

4.1 Hướng tiệm cận của đồ thị hàm số khi x tiến ra vô cùng

Ta có thể viết

$$f(x) = g(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

trong đó g, R là các đa thức, $\deg R < \deg Q$. Suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \to \pm\infty} |f(x) - g(x)| &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} \left|\frac{R(x)}{Q(x)}\right| = 0, \\ \lim_{x_0 \to \pm\infty} |f'(x) - g'(x)| &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} \left|\frac{R'(x)Q(x) - R(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2}\right| = 0. \end{aligned}$$

(Các đẳng thức đúng do bậc của đa thức ở tử nhỏ hơn thực sự bậc của đa thức ở mẫu). Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiệm cận với đồ thị hàm số $y = g(x)$. Nếu $\deg g = 0$ ta nói đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = a_0$; nếu $\deg g = 1$ ta nói đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận xiên $y = a_1 x + a_0$.

Giả sử

$$g(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Có 3 trường hợp xảy ra: g là đa thức hằng ($n = 0$), đa thức bậc một ($n = 1$) và đa thức có bậc $n > 1$.

Định lý 7. *Các điều sau đúng:*

(i) Nếu $n = 0$ thì $g(x) \equiv a_0$ là hàm hằng và

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (1,0) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \pm(1,0).$$

(ii) Nếu $n = 1$ thì $g(x) \equiv a_1 x + a_0$ là đa thức bậc 1 và

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,a_1)}{\sqrt{1+a_1^2}} \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \pm\frac{(1,a_1)}{\sqrt{1+a_1^2}}.$$

Chứng minh. (i) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \to \pm\infty} f(x_0) &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} g(x_0) = a_0, \\ \lim_{x_0 \to \pm\infty} f'(x_0) &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} g'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (1,0) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \pm(1,0).$$

(ii) Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \to \pm\infty} f(x_0) &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} g(x_0) = \begin{cases} \pm\infty & \text{nếu } a_1 > 0, \\ \mp\infty & \text{nếu } a_1 < 0, \end{cases} \\ \lim_{x_0 \to \pm\infty} f'(x_0) &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} g'(x_0) = a_1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,a_1)}{\sqrt{1+a_1^2}} \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \pm\frac{(1,a_1)}{\sqrt{1+a_1^2}}.$$

□

Định lý 8. *Giả sử đa thức $g(x)$ có bậc $n > 1$. Khi đó* *(i) Nếu $n > 1$ lẻ và $a_n > 0$ thì*

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (0,1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \pm(0,1).$$

(ii) Nếu $n > 1$ lẻ và $a_n < 0$ thì

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (0,-1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = \mp(0,1).$$

(iii) Nếu $n > 1$ chẵn và $a_n > 0$ thì

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \pm(0,1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = (0,1).$$

(iv) Nếu $n > 1$ chẵn và $a_n < 0$ thì

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \mp(0,1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = (0,-1).$$

Chứng minh. (i) Ta có độ dài vector v cho bởi công thức

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}.$$

Giả thiết $n \geq 2$ lẻ và $a_n > 0$ suy ra đa thức $g'(x)$ có bậc chẵn với hệ số cao nhất $na_n > 0$. Từ đó có

$$\begin{aligned}
\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}} &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + [g'(x_0)]^2}} = 0, \\
\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}} &= \lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{g'(x_0)}{\sqrt{1 + [g'(x_0)]^2}} = 1.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (0,1).$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x_0 - a, f(x_0) - b)$. Nên

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (f(x_0) - b)^2}.$$

Kết hợp với giả thiết n lẻ, $n > 1$ và $a_n > 0$ ta có đẳng thức thứ hai.

(ii), (iii), và (iv): Chứng minh tương tự như (i). $\square$

4.2 Hướng tiệm cận của đồ thị hàm số khi x tiến đến α

Giả sử α là nghiệm bội $m \geq 1$ của đa thức $Q(x)$. Ta có thể viết $Q(x) = (x-\alpha)^m S(x)$ với $S(x)$ là đa thức khác không khi $x = \alpha$. Suy ra

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m S(x)} = \frac{h(x)}{(x-\alpha)^m},$$

trong đó $h(x) := \frac{P(x)}{S(x)}$. Ta có

$$f'(x) \;=\; \frac{h'(x)(x-\alpha)^m - h(x)(x-\alpha)^{m-1}m}{(x-\alpha)^{2m}} \;=\; \frac{h'(x)(x-\alpha) - h(x)(x-\alpha)m}{(x-\alpha)^{m+1}}.$$

Khi $x = \alpha$ tử số của biểu thức trên bằng $-h(\alpha)m = \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}m \neq 0$. Nên $f'(x)$ sẽ tiến ra vô cùng khi x tiến đến α. Điều này chứng tỏ tiếp tuyến của đồ thị (C) hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ sẽ tiến đến đường thẳng song song trục tung khi x tiến đến α.

Định lý 9. *Ta có các khẳng định sau:*

(i) Nếu $\lim_{x_0 \to \alpha^-} f(x) = +\infty$ *thì*

$$\lim_{x_0 \to \alpha^-} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (0,1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \alpha^-} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = (0,1).$$

(ii) Nếu $\lim_{x_0 \to \alpha^-} f(x) = -\infty$ *thì*

$$\lim_{x_0 \to \alpha^-} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (0,-1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \alpha^-} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = (0,-1).$$

(iii) Nếu $\lim_{x_0 \to \alpha^+} f(x) = +\infty$ *thì*

$$\lim_{x_0 \to \alpha^+} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (0,-1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \alpha^+} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = (0,1).$$

(iv) Nếu $\lim_{x_0 \to \alpha^+} f(x) = -\infty$ *thì*

$$\lim_{x_0 \to \alpha^+} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (0,1) \quad \text{và} \quad \lim_{x_0 \to \alpha^+} \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|} = (0,-1).$$

Chứng minh. (i) Giả sử $\lim_{x_0\to\alpha^-} f(x) = +\infty$. Khi đó với mọi x đủ gần α và $x < \alpha$, hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng thực sự và bởi vậy $f'(x) > 0$. Suy ra

$$\lim_{x_0\to\alpha^-} f'(x) \;=\; +\infty.$$

Vậy

$$\lim_{x_0\to\alpha^-} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \;=\; \lim_{x_0\to\alpha^-} \frac{(1, f'(x_0))}{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}} \;=\; (0,1).$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x_0 - a, f(x_0) - b)$. Nên $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_0-a)^2 + (f(x_0)-b)^2}$. Kết hợp với giả thiết ta có đẳng thức cần chứng minh.

(ii) Giả sử $\lim_{x_0\to\alpha^-} f(x) = -\infty$. Khi đó với mọi x đủ gần α và $x < \alpha$, hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm thực sự và bởi vậy $f'(x) < 0$. Suy ra

$$\lim_{x_0\to\alpha^-} f'(x) \;=\; -\infty.$$

Vậy

$$\lim_{x_0\to\alpha^-} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \;=\; \lim_{x_0\to\alpha^-} \frac{(1, f'(x_0))}{\sqrt{1+[f'(x_0)]^2}} \;=\; (0,-1).$$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x_0 - a, f(x_0) - b)$. Nên $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_0-a)^2 + (f(x_0)-b)^2}$. Kết hợp với giả thiết ta có đẳng thức cần chứng minh.

(iii) và (iv) chứng minh tương tự. $\square$

5 Hình học của đồ thị hàm số $y = f(x)$ ngoài các đường tiệm cận

6 Hình học của đồ thị hàm số $y = f(x)$ giữa hai đường tiệm cận

Giả sử $f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ khác hàm hằng, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không có nghiệm chung. Ta có

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2}$$

với mọi x thuộc miền xác định $\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) \neq 0\}$ của f. Đặt

$$\begin{aligned} \Sigma(f) &:= \{x \in \mathcal{D} \mid f'(x) = 0\} \\ &:= \{x \in \mathcal{D} \mid P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) = 0\} \end{aligned}$$

Ta có $\Sigma(f)$ hoặc bằng trống hoặc là tập hữu hạn do $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)$ là đa thức không đồng nhất bằng không.

Giả sử

(i) $x = \alpha$ và $x = \beta$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ (tức là $Q(\alpha) = Q(\beta) = 0$); và

(ii) $Q(x) \neq 0$ với mọi x thuộc khoảng (α, β).

Phần này tìm hiểu tích chất hình học của đồ thị hàm số $y = f(x)$ giữa hai đường tiệm cận $x = \alpha$ và $x = \beta$.

Trường hợp:

+ 1a, 1b: $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$.

+ 2a, 2b, 3a, 3b: $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$.

Nhận xét 2. *Chứng minh các trường hợp 1a, 2a, 3a; các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.*

6.0.1 Trường hợp 1a:

Định lý 10. *Giả sử $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$ và*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = +\infty. \tag{1}$$

Khi đó với mọi $t \in \mathbb{R}$, đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

Chứng minh. Lấy $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

+ Từ giả thiết (1), có các số thực a, b với $\alpha < a < b < \beta$ sao cho

$$f(a) < t < f(b).$$

Suy ra

$$(f(a) - t)(f(b) - t) < 0.$$

Áp dụng định lý giá trị trung gian đối với hàm số $f(x) - t$ trên đoạn $[a, b]$, tồn tại số thực $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) - t = 0$. Suy ra đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = c$.

+ Giả sử đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $d \in (\alpha, \beta)$ với $d \neq c$. Không mất tổng quát có thể giả sử $c < d$. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $f(x)$ trên đoạn $[c, d]$, tồn tại số thực $e \in (c, d)$ sao cho

$$f'(e) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} = \frac{t - t}{d - c} = 0.$$

Suy ra $e \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Mâu thuẫn với giả thiết $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$.

Vậy với mọi $t \in \mathbb{R}$, đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β). $\square$

6.0.2 Trường hợp 1b:

Định lý 11. *Giả sử* $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$ *và*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty. \tag{2}$$

Khi đó với mọi $t \in \mathbb{R}$*, đường thẳng* $y = t$ *cắt đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại đúng một điểm có hoành độ thuộc khoảng* (α, β).

Chứng minh. Chứng minh tương tự Trường hợp1a. □

6.0.3 Trường hợp 2a:

Định lý 12. *Giả sử* $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$ *và*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = +\infty. \tag{3}$$

Gọi $x_*, x^* \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$ *sao cho*

$$\begin{aligned} f(x_*) &= \min\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}, \\ f(x^*) &= \max\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}. \end{aligned}$$

Khi đó

(i) Nếu $t < f(x_*)$ *hoặc* $t > f(x^*)$ *thì đường thẳng* $y = t$ *cắt đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại đúng một điểm có hoành độ thuộc khoảng* (α, β).

(ii) Nếu $f(x_*) \leq t \leq f(x^*)$ *thì đường thẳng* $y = t$ *cắt đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc khoảng* (α, β).

Chứng minh. (i) • Lấy $t < f(x_*)$ tùy ý.

+ Do $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = -\infty$, có số thực $a \in (\alpha, x_*)$ sao cho $f(a) < t$. Suy ra

$$(f(a) - t)(f(x_*) - t) < 0.$$

Áp dụng định lý giá trị trung gian đối với hàm số $f(x) - t$ trên đoạn $[a, x_*]$, tồn tại số thực $b \in (a, x_*)$ sao cho $f(b) - t = 0$. Suy ra đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = b$.

+ Giả sử đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $c \in (\alpha, \beta)$ với $b \neq c$. Không mất tổng quát có thể giả sử $b < c$. Do $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = +\infty$, có số thực $d \in (c, \beta)$ sao cho $t < f(d)$. Áp dụng định lý Weierstrass cho hàm số $f(x)$ trên đoạn $[b, d]$, tồn tại số thực $e \in [b, d]$ sao cho $f(e)$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[b, d]$. Chú ý $e \neq d$ do $f(e) \leq f(b) = t < f(d)$.

Nếu $e \neq b$ thì $e \in (b, d)$. Theo định lý Fermat, $f'(e) = 0$. Suy ra $e \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Mâu thuẫn vì

$$f(e) \leq f(b) = t < f(x_*).$$

Nếu $e = b$ thì $c \in (b, d)$ cũng là điểm cực tiểu của $f(x)$ trên đoạn $[b, d]$ nên $f'(c) = 0$ (theo định lý Fermat). Suy ra $c \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Mâu thuẫn vì $f(c) = t < f(x_*)$.

Vậy đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

• Lấy $t > f(x^*)$ tùy ý.

+ Do $\lim_{x \to \beta^-} f(x) = +\infty$, có số thực $a \in (x^*, \beta)$ sao cho $f(a) > t$. Suy ra

$$(f(a) - t)(f(x^*) - t) < 0.$$

Áp dụng định lý giá trị trung gian đối với hàm số $f(x) - t$ trên đoạn $[x^*, a]$, tồn tại số thực $b \in (x^*, a)$ sao cho $f(b) - t = 0$. Suy ra đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = b$.

+ Giả sử đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $c \in (\alpha, \beta)$ với $b \neq c$. Không mất tổng quát có thể giả sử $b > c$. Do $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = -\infty$, có số thực $d \in (\alpha, c)$ sao cho $t > f(d)$. Áp dụng định lý Weierstrass cho hàm số $f(x)$ trên đoạn $[d, b]$, tồn tại số thực $e \in [d, b]$ sao cho $f(e)$ là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[d, b]$. Chú ý $e \neq d$ do $f(e) \geq f(b) = t > f(d)$.

Nếu $e \neq b$ thì $e \in (d, b)$. Theo định lý Fermat, $f'(e) = 0$. Suy ra $e \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Mâu thuẫn vì

$$f(e) \geq f(b) = t > f(x^*).$$

Nếu $e = b$ thì $c \in (d, b)$ cũng là cực tiểu của $f(x)$ trên đoạn $[d, b]$ nên $f'(c) = 0$ (theo định lý Fermat). Suy ra $c \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Mâu thuẫn vì $f(c) = t > f(x^*)$.

Vậy đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

(ii) Giả sử $f(x_*) < t < f(x^*)$. Khi đó

$$(f(x_*) - t)(f(x^*) - t) < 0.$$

Áp dụng định lý giá trị trung gian đối với hàm $f(x) - t$ trên đoạn $[x_*, x^*]$ (hoặc $[x^*, x_*]$ nếu $x^* < x_*$) ta có ít nhất một điểm θ thuộc đoạn này sao cho $f(\theta) - t = 0$. Suy ra đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \theta$ thuộc khoảng (α, β). $\square$

6.0.4 Trường hợp 2b:

Định lý 13. *Giả sử* $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$ *và*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty. \tag{4}$$

Gọi $x_*, x^* \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$ *sao cho*

$$\begin{aligned} f(x_*) &= \min\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}, \\ f(x^*) &= \max\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}. \end{aligned}$$

Khi đó

(i) Nếu $t < f(x_*)$ *hoặc* $t > f(x^*)$ *thì đường thẳng* $y = t$ *cắt đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại đúng một điểm có hoành độ thuộc khoảng* (α, β).

(ii) Nếu $f(x_*) \leq t \leq f(x^*)$ thì đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

Chứng minh. Chứng minh tương tự Trường hợp 2a. □

6.0.5 Trường hợp 3a:

Định lý 14. *Giả sử $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$ và*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = +\infty. \tag{5}$$

Gọi $x_*, x^* \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(x_*) &= \min\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}, \\ f(x^*) &= \max\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}. \end{aligned}$$

Khi đó

(i) Nếu $t < f(x_*)$ thì đường thẳng $y = t$ không cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

(ii) Nếu $t > f(x^*)$ thì đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

(iii) Nếu $f(x_*) \leq t \leq f(x^*)$ thì đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

Chứng minh. (i) Lấy $t < f(x_*)$ tùy ý.

Giả sử đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $a \in (\alpha, \beta)$. Giả thiết (3) suy ra tồn tại các số thực $b, c \in (\alpha, \beta)$ với $b < a < c$ sao cho

$$f(a) = t < \min\{f(b), f(c)\}.$$

Theo định lý Weierstrass hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[b, c]$ tại điểm $d \in [b, c]$. Do $f(d) \leq f(a) = t < \min\{f(b), f(c)\}$ ta có $d \neq b$ và $d \neq c$. Tức là $d \in (b, c)$. Theo định lý Fermat, $f'(d) = 0$. Suy ra $d \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Điều này mâu thuẫn với $f(d) \leq t < f(x_*)$.

(ii) Lấy $t > f(x^*)$ tùy ý.

+ Do $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty$, có số thực $a \in (\alpha, x^*)$ sao cho $f(a) > t$. Suy ra

$$(f(a) - t)(f(x^*) - t) < 0.$$

Áp dụng định lý giá trị trung gian đối với hàm số $f(x) - t$ trên đoạn $[a, x^*]$, tồn tại số thực $b \in (a, x^*)$ sao cho $f(b) - t = 0$. Suy ra đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = b$.

+ Do $\lim_{x \to \beta^+} f(x) = +\infty$, có số thực $c \in (x^*, \beta)$ sao cho $f(c) > t$. Suy ra

$$(f(c) - t)(f(x^*) - t) < 0.$$

Áp dụng định lý giá trị trung gian đối với hàm số $f(x) - t$ trên đoạn $[x^*, c]$, tồn tại số thực $d \in (x^*, c)$ sao cho $f(d) - t = 0$. Suy ra đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = d$.

Cuối cùng, ta chứng minh đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ chỉ tại hai điểm có hoành độ $x = b$ và $x = d$.

Bằng phản chứng, giả sử đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $e \in (\alpha, \beta)$ với $e \neq b$ và $e \neq d$. Bằng cách đánh lại thứ tự các hoành độ giao, có thể giả sử $b < d < e$.

Theo định lý Weiertrass, hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[b, e]$ tại điểm có hoành độ $\theta \in [b, e]$.

Nếu $f(\theta) = t$ thì $d \in (b, e)$ cũng là điểm cực đại của $f(x)$ trên đoạn $[b, e]$. Theo định lý Fermat thì $f'(d) = 0$. Do đó $d \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Mâu thuẫn với giả thiết $f(d) = t > f(x^*)$.

Nếu $f(\theta) > t$ thì theo định lý Fermat có $f'(\theta) = 0$. Suy ra $\theta \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$. Mâu thuẫn với giả thiết $f(\theta) > t > f(x^*)$.

Vậy nếu $t > f(x^*)$ thì đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

(iii) Giả sử $f(x_*) < t < f(x^*)$. Khi đó

$$(f(x_*) - t)(f(x^*) - t) < 0.$$

Áp dụng định lý giá trị trung gian đối với hàm $f(x) - t$ trên đoạn $[x_*, x^*]$ (hoặc $[x^*, x_*]$ nếu $x^* < x_*$) ta có ít nhất một điểm θ thuộc đoạn này sao cho $f(\theta) - t = 0$. Suy ra đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \theta$ thuộc khoảng (α, β). $\square$

6.0.6 Trường hợp 3b:

Định lý 15. *Giả sử* $\Sigma(f) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$ *và*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty. \tag{6}$$

Gọi $x_*, x^* \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)$ *sao cho*

$$\begin{aligned} f(x_*) &= \min\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}, \\ f(x^*) &= \max\{f(x) \mid x \in \Sigma(f) \cap (\alpha, \beta)\}. \end{aligned}$$

Khi đó

(i) Nếu $t > f(x^*)$ *thì đường thẳng* $y = t$ *không cắt đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm có hoành độ thuộc khoảng* (α, β).

(ii) Nếu $t < f(x_*)$ *thì đường thẳng* $y = t$ *cắt đồ thị* (C) *của hàm số* $y = f(x)$ *tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng* (α, β).

(iii) Nếu $f(x_*) \leq t \leq f(x^*)$ thì đường thẳng $y = t$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ thuộc khoảng (α, β).

Chứng minh. Chứng minh tương tự Trường hợp3a. $\square$

Định lý 16. *Tồn tại số thực $R_0 > 0$ sao cho với mọi $R > R_0$, đường tròn $\{x^2 + y^2 = R^2\}$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ cắt tại đúng 2 điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng (α, β).*

Chứng minh. Đặt

$$\tilde{f}(x) := x^2 + [f(x)]^2.$$

Ta có $\tilde{f}$ là hàm số hữu tỉ, không âm và

$$\lim_{x \to \alpha^+} \tilde{f}(x) \;=\; \lim_{x \to \beta^-} \tilde{f}(x) \;=\; +\infty.$$

Lấy điểm $a \in (\alpha, \beta)$ tùy ý. Tồn tại các số thực b, c sao cho $\alpha < b < a < c < \beta$ và

$$\tilde{f}(b) > \tilde{f}(a) \quad \text{và} \quad \tilde{f}(c) > \tilde{f}(a).$$

Theo định lý Weierstrass, hàm số $\tilde{f}(x)$ trên đoạn $[b, c]$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $d \in [b, c]$. Ta có

$$\tilde{f}(d) \leq \tilde{f}(a) < \min\{\tilde{f}(b), \tilde{f}(c)\}.$$

Suy ra $d \neq b$ và $d \neq c$. Theo định lý Fermat, $\tilde{f}'(d) = 0$. Vậy

$$\Sigma(\tilde{f}) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset.$$

Lấy $x^* \in \Sigma(\tilde{f}) \cap (\alpha, \beta)$ sao cho

$$\tilde{f}(x^*) \;=\; \max\{\tilde{f}(x) \mid x \in \Sigma(\tilde{f}) \cap (\alpha, \beta)\}.$$

Áp dụng kết quả đã chứng minh trường hợp 3a đối với hàm số $\tilde{f}$ ta có với mọi $t > \tilde{f}(x^*) \geq 0$, đồ thị hàm số $y = \tilde{f}(x)$ cắt đường thẳng $\{y = t\}$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng (α, β). Đặt

$$R_0 := \sqrt{\tilde{f}(x^*)}.$$

Khi đó với mọi số thực $R > R_0$ ta luôn có đồ thị (C) cắt đường tròn $\{x^2 + y^2 = R^2\}$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc khoảng (α, β). $\square$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thị Bạch Kim, *Giáo trình các phương pháp tối ưu. Lý thuyết và thuật toán,* Nhà Xuất bản Bách Khoa - Hà Nội, 2008.

[2] Trần Văn Hạo (eds.), *Đại số 10,* Nhà Xuất bản Giáo dục, 2015.

[3] Đoàn Quỳnh (eds.), *Đại số và giải tích 11,* Nhà Xuất bản Giáo dục, 2015.