CHUYÊN ĐỀ COVID-19 - NĂM 2020

BÙI NGỌC DIỆP

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI
PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM
QUA CÁC KỲ THI OLYMPIC TOÁN

Mục lục

Mở đầu

Hàm số là một trong những đối tượng nghiên cứu trung tâm của Toán sơ cấp. Một trong những chủ đề liên quan đến hàm số thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh, kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia và kỳ thi Olympic toán Quốc tế là giải phương trình hàm, bất phương trình hàm. Đối với các phương trình, bất phương trình đại số trong sách giáo khoa, mục tiêu của chúng ta là tìm các biến chưa biết nhưng đối với phương trình hàm, bất phương trình hàm chúng ta cần phải tìm một "hàm số" thỏa mãn một số điều kiện ràng buộc cho trước của bài toán. Đây là một chủ đề khó. Đừng trước mỗi bài toán thuộc chủ đề này, học sinh phải nắm vững được những kĩ thuật, phương pháp giải, cũng như phải có sự xử lí khéo léo khi đứng trước những tình huống cụ thể. Chúng ta có nhiều phương pháp cũng như hướng tiếp cận khác nhau đối với các bài toán thuộc chủ đề này. Với mục tiêu muốn đóng góp một phần nào đó trong việc hoàn thành một bức tranh tổng thể về các phương pháp giải phương trình hàm và bất phương trình hàm, trong chuyên đề này chúng tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc hai phương pháp thường được sử dụng để giải quyết các bài toán thuộc chủ đề này thông qua các bài toán cụ thể, đó là **phương pháp giải tích** và **phương pháp tổng hợp**. Trong từng phương pháp, chúng tôi sẽ đưa ra một hệ thống các bài toán với những lời giải chi tiết, rõ ràng. Hơn nữa, sau mỗi lời giải, chúng tôi ra đưa những nhận xét, phân tích, bình luận để giúp người đọc có một cách nhìn tổng quan hơn về bài toán đó cũng như phương pháp được sử dụng.

Mục tiêu của chuyên đề này là giới thiệu phương pháp giải tích và phương pháp tổng hợp với những kĩ thuật đặc trưng của nó thông qua các ví dụ cụ thể thông qua một số bài toán phương trình hàm, bất phương trình đã xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Chuyên đề được bố cục như sau.

Trong chương 1, chúng tôi sẽ giới thiệu phương pháp giải tích thông qua hệ thống các bài toán cùng với những kĩ thuật và lưu ý cần thiết khi sử dụng phương pháp này.

Trong chương 2, chúng tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc phương pháp tổng hợp thông qua hệ thống gồm mười bài toán khác nhau. Đây là phương pháp thông dụng nhất, nó là sự kết hợp giữa nhiều phương pháp, kĩ thuật khác nhau.

Trong chương 3, chúng tôi đưa một số bài toán khác mà phương pháp giải chúng là hai phương pháp nói trên nhưng không kèm theo các nhận xét, phân tích.

Trong chương 4, chúng tôi đưa một hệ thống các bài toán không có lời giải dành cho bạn đọc tự luyện tập.

Chương 1

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Phép lấy giới hạn được coi phép toán cơ bản thứ năm trong toán học sau các phép toán cộng, trừ nhân, chia. Về mặt bản chất phép toán này cho phép ta "xấp xỉ" các đại lượng đang cần tìm (cần tính) bởi một đại lượng đã có từ trước (hoặc dễ dàng tính toán được). Với ý tưởng xuất phát từ nguyên lý kẹp cũng như các tính chất so sánh giới hạn trong dãy số và hàm số, phương pháp giải tích trong các bài toán phương trình hàm, bất phương trình hàm là phương pháp sử dụng phép lấy giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số để thu được các tính chất của nghiệm hàm hay công thức tổng quát của nghiệm hàm. Đặc biệt, nó tỏ ra vô cùng hữu dụng trong các bài toán tìm một chặn trên (hoặc chặn dưới) của nghiệm hàm. Ở đây, chúng tôi nhắc lại một số kỹ thuật và lưu ý thường xuyên được sử dụng trong phương pháp này.

(1) Để tìm công thức tổng quát của hàm số $f(x)$ thỏa mãn một điều kiện cho trước, chúng ta sẽ xây dựng bất đẳng thức có dạng

$$H_n \leq f(x) \leq G_n$$

với x cố định và với $\forall n \in \mathbb{N}$. Trong đó $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ và $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy số thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} G_n = K(x).$$

Khi đó cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên và chú ý rằng $f(x)$ là một hàm hằng đối n, ta được

$$f(x) = K(x).$$

(2) Từ kỹ thuật trên và hãy quan sát bất đẳng thức

$$H_n \leq f(x) \leq G_n$$

với x cố định và với $\forall n \in \mathbb{N}$. Nhìn từ vế phía bên trái (so với hàm số $f(x)$) của bất đẳng thức trên, ta nhận thấy rằng để tìm chặn dưới nào đó cho hàm số $f(x)$ ta sẽ cố gắng thiết lập một bất đẳng thức có dạng

$$f(x) \geq H_n(x)$$

với x cố định và với $\forall n \in \mathbb{N}$. Trong đó $\{H_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số thường được xác định như sau

$$H_n(x) = K(x) - u_n$$

với

$$u_n \geq 0 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$

hoặc

$$H_n(x) = u_n K(x)$$

$$v_n \leq 1 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 1,$$

(3) Tương tự để tìm một chặn trên nào đó của hàm số $f(x)$ ta sẽ cố gắng xây dựng một bất đẳng thức có dạng

$$f(x) \leq G_n(x)$$

với x cố định và với $\forall n \in \mathbb{N}$. Trong đó $\{G_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số thường được xác định như sau

$$G_n(x) = K(x) + v_n$$

với

$$v_n \geq 0 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

hoặc

$$H_n(x) = v_n K(x)$$

$$v_n \geq 1 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

(4) Trong một số bài toán tìm công thức tổng quát của hàm số $f(x)$ ta sẽ sử dụng công thức nghiệm của phương trình sai phân để tìm công thức tổng quát của các dãy lặp của hàm số $f(x)$ rồi áp dụng các kĩ thuật nói trên để tìm ra công thức tổng quát của hàm số $f(x)$.

(5) Sự tương ứng giữa giới hạn của dãy số và giới hạn hàm số đóng vài trò quan trọng đối với việc giải một lớp các bài toán phương trình hàm liên tục. Sự tương ứng này được phát biểu qua định lý sau.

Nếu hàm số $f : I \to \mathbb{R}$ với $I \subseteq \mathbb{R}$ có giới hạn là k tại điểm x_0 khi và chỉ khi với mỗi dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ trong I, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = k$.
Từ định lý trên ta thấy rằng, nếu f là một hàm số liên tục tại điểm x_0 tức là

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

thì với mỗi dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ trong I, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ ta có

$$f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Để minh họa cho những kĩ thuật được nói ở trên, đầu tiên chúng ta sẽ đến với bài toán sau, năm trong đề thi của kỳ thi Putnam dành cho học sinh và sinh viên của Mỹ và Canada.

Bài toán 1. (Putnam 1966). Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3.$$

Lời giải. Ta xác định hàm số $f(x)$ như sau

$$f(x) \equiv \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\ldots}}}}, \quad \forall x \geq 1.$$

Từ công thức trên ta có

$$f(x+1) \equiv \sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)\sqrt{1+\ldots}}}}, \quad \forall x \geq 1.$$

Do đó, hàm số $f(x)$ thỏa mãn mối quan hệ sau

$$f(x) = \sqrt{1 + xf(x+1)}, \quad \forall x \geq 1.$$

Đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$f(x+1) = \frac{f^2(x) - 1}{x}, \quad \forall x \geq 1. \tag{1.1}$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ tìm một chặn dưới cho hàm số $f(x)$. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \ldots}}}} &\geq \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\cdots}}}} \\ &= x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}.\end{aligned}$$

Chú ý rằng dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ với

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó, ta có

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \tag{1.2}$$

Vì $2x \geq x + 1, \forall x \geq 1$ nên từ đây ta được

$$\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \ldots}}}} \geq x \geq \frac{x+1}{2}, \quad \forall x \geq 1. \tag{1.3}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \ldots}}}} &\leq \sqrt{(1+x)\sqrt{2(x+1)\sqrt{3(x+1)\sqrt{\cdots}}}} \\ &= \sqrt{1\sqrt{2 + \frac{2}{4}}(x+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}} \\ &< \sqrt{1\sqrt{2 + \frac{2}{4} + \ldots}}(x+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} \\ &= \sqrt{2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots}}(x+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}.\end{aligned}$$

Đặt
$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} + \ldots$$
Khi đó, ta có
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \ldots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} + \ldots$$
Kết hợp hai đẳng thức trên với (3.80), ta được
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = 1.$$
Do đó $S = 2$. Từ đây, ta suy ra
$$\begin{aligned}\sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \ldots}}}} &< \sqrt{2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{8}+\ldots}}(x+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots} \\ &= 2(x+1), \quad \forall x \geq 1. \qquad (1.4)\end{aligned}$$
Từ (1.3) và (1.4), ta được
$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) < 2(x+1), \quad \forall x \geq 1. \qquad (1.5)$$
Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp quy nạp toán học theo n
$$\frac{x+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}} < f(x) < \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}(x+1), \quad \forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1.6)$$
Trong (1.5), thay x bởi $x+1$, ta được
$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) < 2(x+1), \quad \forall x \geq 1.$$
Kết hợp bất đẳng thức trên với (1.1), ta có
$$\begin{aligned}f^2(x) = xf(x+1) + 1 &\geq \frac{x(x+2)}{2} + 1 \\ &= \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{1}{2} > \frac{(x+1)^2}{2}, \quad \forall x \geq 1,\end{aligned}$$
và
$$\begin{aligned}f^2(x) = xf(x+1) + 1 &< x[2(x+2)] + 1 \\ &= 2x^2 + 4x + 1 < 2(x+1)^2, \quad \forall x \geq 1\end{aligned}$$

Từ hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{(x+1)^2}{2} < f^2(x) < 2(x+1)^2, \quad \forall x \geq 1,$$

hay

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} < f(x) < \sqrt{2}(x+1), \quad \forall x \geq 1.$$

Do đó bất đẳng thức (1.6) đúng với $n = 0$. Giả sử đẳng thức (1.6) đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}$, tức là

$$\frac{x+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}} < f(x) < \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}(x+1), \quad \forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Trong (1.7), thay x bởi $x+1$, ta được

$$\frac{x+2}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}} < f(x+1) < \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{k}}(x+2), \quad \forall x \geq 1.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (1.1), ta có

$$\begin{aligned} f^2(x) = xf(x+1) + 1 &\geq \frac{x(x+2)}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}} + 1 \\ &= \frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}} + 1 - \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}} > \frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}}, \quad \forall x \geq 1, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} f^2(x) = xf(x+1) + 1 &< x\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}(x+2)\right] + 1 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}} x^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2k}} x + 1\cdot \\ &< \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}(x+1)^2, \quad \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên ta được

$$\frac{x+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}} < f^2(x) < \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}(x+1), \quad \forall x \geq 1,$$

hay

$$\frac{x+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}} < f(x) < \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}(x+1), \quad \forall x \geq 1.$$

Do đó bất đẳng thức (1.6) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (1.6) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$. Như vậy, ta đã chứng minh được bất đẳng thức (1.6). Chú ý rằng

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = \left(\sqrt{2}\right)^0 = 1.$$

Do đó, cho $n \to +\infty$ trong (3.84), ta có

$$x + 1 \leq f(x) \leq x + 1, \quad \forall x \geq 1.$$

Vì vậy

$$f(x) = x + 1, \quad \forall x \geq 1.$$

Từ đây, ta được

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \ldots}}}} = f(2) = 3$$

Ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét.

(1) Bài toán là một bài toán chứng minh đẳng thức. Điểm thú vị ở đây là chúng ta đã đưa nó về một bài toán giải phương trình thỏa mãn các điều kiện cho trước. Việc thiết lập mối quan hệ giữa $f(x+1)$ và $f(x)$ là đơn giản và tự nhiên. Hơn nữa, vì hình thức của bài toán được phát biểu dưới dạng vô hạn nên việc thiết lập mối quan hệ này là cần thiết. Sau khi thiết lập được các hệ thức (1.1), chúng ta cũng nhanh chóng đưa ra được các ước lượng chặn trên và chặn dưới cho hàm số $f(x)$. Sau khi thu được bất đẳng thức (1.6) trong trường hợp $n = 0$, bằng cách lập lại quá trình như vậy, chúng ta thu được bất đẳng thức (1.6) trong trường hợp $n = 1$, để từ đó dễ dàng dự đoán được bất đẳng thức (1.6).

(2) Sau khi chứng minh được rằng

$$f(x) < 2(x + 1), \quad \forall x \geq 1,$$

thì chúng ta có thể sử dụng luôn kết quả này để chứng minh

$$f(x) \geq x \geq \frac{x+1}{2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Thật vậy, từ (1.1) ta có

$$f^2(x) \geq x+1, \quad \forall x \geq 1.$$

Từ đây, ta suy ra

$$f^2(x) = 1 + xf(x+1) \geq 1 + x\sqrt{x+1} > x^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x \geq 1.$$

Vì vậy, ta có

$$f(x) > x^{\frac{3}{4}} = x^{1-\frac{1}{2^2}}, \quad \forall x \geq 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được

$$f(x) > x^{1-\frac{1}{2^n}}, \quad \forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên, ta được

$$f(x) \geq x \geq \frac{x+1}{2}, \quad \forall x \geq 1.$$

Như vậy, ta đã chứng minh được bất đẳng thức (1.3) bằng việc sử dụng bất đẳng thức (1.4). Hơn nữa ngoài ước lượng chặn dưới cho hàm số $f(x)$ như trong bất đẳng thức (1.7), bằng phương pháp quy nạp toán học, ta có thể đưa ra một chặn dưới khác cho hàm số $f(x)$ như dưới đây

$$f(x) > x + 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3) Đẳng thức trong Bài toán 1 được đưa ra lần đầu tiên vào năm bởi nhà toán học thiên tài người Ấn Độ, Ramanujan. Đặc biệt hơn ông đã chứng minh được đẳng thức này khi mới là học sinh trung học. Phương pháp của ông là sử dụng liên tiếp đồng nhất thức sau $n+2 = \sqrt{1+(n+1)(n+3)}$, tức là

$$\begin{aligned} n(n+2) &= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}\cdot \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Chứng minh trên rõ ràng là đơn giản và dễ dàng hơn cách chứng minh được trình bày trong Bài toán 1. Tuy nhiên cách chứng minh chỉ đúng trong trường hợp tổng hữu hạn và hơn nữa nó đã bỏ qua cách xác minh rằng liệu rằng kết quả này còn đúng khi chuyển từ tổng hữu hạn sang tổng vô hạn. Lưu ý rằng đẳng thức được yêu cầu chứng minh phải dưới dạng tổng vô hạn. Đây là kiến thức có liên quan đến lý thuyết chuỗi số ở chương trình Toán cao cấp. Để giúp bạn đọc dễ hình dung, chúng tôi đưa ra một ví dụ ý tưởng của Ramanujan, nhưng kết quả thu được là khác với bài toán trên, mặc dù hình thức vế phải là giống nhau.

$$\begin{aligned} 4 &= \sqrt{1+2\frac{15}{2}} \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\frac{221}{12}}} \\ &\cdots \\ &= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots}}} \end{aligned}.$$

Bằng phương pháp chứng minh tương tự như trong bài toán, chúng ta có thể chứng minh kết quả tổng quát dưới sau. Nếu ta có

$$\begin{aligned} &f(x) \\ &\equiv \sqrt{ax+(n+a)^2+x\sqrt{a(x+n)+(n+a)^2+(x+n)\sqrt{a(x+2n)+(n+a)^2+\cdots}}} \end{aligned}$$

thì khi đó

$$f(x) = x+n+a.$$

(4) Dưới đây là một số bài toán liên quan

i) **(Đề dự tuyển IMO 1969).** Chứng minh rằng với $a > b^2$,

$$\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-b\sqrt{a+b\sqrt{a-\ldots}}}}} = \sqrt{a-\frac{3b^2}{4}}-\frac{b}{2}.$$

ii) Chứng minh rằng

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\cdots}}}} = 4.$$

Bài toán 2. (Olympic Toán sinh viên Toàn Quốc 2016). Cho $a \geq 1$ là một số thực và hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

(1) $(f(ax))^2 \le a^3x^2 f(x)$ với mọi số thực x.

(2) f bị chặn trong một lân cận nào đó của 0.

Lời giải. Trong (1) thay $x = 0$ ta thu được

$$[f(0)]^2 \le 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Với mọi $x \ne 0$, từ (1) ta có

$$f(x) \ge \frac{[f(ax)]^2}{a^3x^2} \ge 0$$

với $\forall x \ne 0$. Từ đó, ta được

$$f(x) \ge 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nếu $a = 1$ thì từ (1) ta được

$$[f(x)]^2 \le x^2 f(x).$$

Từ đây, ta suy ra

$$f(x) \le x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, bất đẳng thức cần chứng minh đúng với trường hợp $a = 1$. Bây giờ, ta sẽ xét trường hợp $a > 1$. Đặt

$$g(x) = \frac{|f(x)|}{\dfrac{x^2}{a}} = \frac{f(x)}{\dfrac{x^2}{a}} \ge 0$$

với mọi $x \ne 0$ thì

$$f(x) = \frac{x^2}{a} g(x), \quad \forall x \ne 0.$$

Khi đó, từ (1) ta suy ra

$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax)\right)^2 \le a^3x^2 \frac{x^2}{a} g(x), \quad \forall x \ne 0$$

$$\Leftrightarrow [g(ax)]^2 \le g(x), \quad \forall x \ne 0. \tag{1.8}$$

Ta sẽ chứng minh

$$g(x) \le g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}}, \quad \forall x \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1.9}$$

bằng phương pháp quy nạp toán học theo n. Thật vậy, trong (1.8) thay x bởi $\frac{x}{a}$ ta được

$$g(x) \leq \left[g\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \neq 0. \tag{1.10}$$

Như vậy, mệnh đề (1.9) đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 2$ tức là

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^k}\right)^{2^{-k}}, \quad \forall x \neq 0. \tag{1.11}$$

Trong (1.11) thay x bởi $\frac{x}{a}$ ta được

$$g\left(\frac{x}{a}\right) \leq g\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)^{2^{-k}}, \quad \forall x \neq 0. \tag{1.12}$$

Từ (1.10) và (1.12) , ta suy ra

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^{k+1}}\right)^{2^{-(k+1)}}, \quad \forall x \neq 0. \tag{1.13}$$

Do đó, mệnh đề (1.9) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học mệnh đề (1.9) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, ta có

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}},$$

với $\forall x \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ định nghĩa của hàm g ta thu được

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} = \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2}{a}}\right)^{2^{-n}}. \tag{1.14}$$

Vì $x \neq 0$ và $a > 1$nên với n đủ lớn thì $\frac{x}{a^n}$ sẽ thuộc một lân cận nào đó của điểm 0. Do đó, từ (2) ta suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ và $M > 0$ sao cho với $n \geq n_0$ ta có

$$f\left(\frac{x}{a^n}\right) \leq M.$$

Kết hợp với (1.14) ta được

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} = \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2}{a}}\right)^{2^{-n}} \leq \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{1.15}$$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học như trên, ta được

$$2^{n+1} \geq n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó, ta có

$$0 < \frac{2n+1}{2^n} = \frac{4n+2}{2^{n+1}} < \frac{4n+2}{n^2} = \left(\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right).$$

Chú ý rằng

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 0.$$

Vì vậy theo nguyên lý kẹp, ta được

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0.$$

Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}} = 1.$$

Từ (1.15) cho $n \to +\infty$, ta thu được $g(x) \leq 1$ với mọi $x \neq 0$ hay

$$\frac{f(x)}{\frac{x^2}{a}} \leq 1, \quad \forall x \neq 0.$$

Từ đây, ta có

$$f(x) \leq \frac{x^2}{a}, \quad \forall x \neq 0.$$

Chú ý rằng $f(0) = 0$ và $f(x) \geq 0$ nên ta được

$$|f(x)| \leq \frac{x^2}{a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét.

(1) Bài toán trên là một bài toán về bất phương trình hàm có sử dụng tính chất giải tích và khá nặng về mặt kĩ thuật. Để chứng minh $f(x) \leq P(x)$ về mặt ý tưởng ta tìm một đánh giá $f(x) \leq P(x).u_n$ với $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ hoặc $f(x) \leq P(x) + u_n$với $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, trong bài toán này thì

$$u_n = \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}$$

và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$. Khi tìm được đánh giá (13), thì ta thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{a^n} = 0$ với mọi $a \geq 1$ nên ta có thể sử dụng giả thiết (2) của bài toán để tiếp tục đánh giá. Bài toán trên là bài toán tổng quát của bài toán dưới đây, là đề thi học sinh giỏi quốc gia môn Toán của Trung Quốc (CMO) năm 1998.

(CMO 1998). Cho hàm số$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

a) $[f(x)]^2 \leq 2x^2.f\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) \leq 1, \forall x \in (-1, 1)$.

Chứng minh rằng

$$f(x) \leq \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) Ngoài cách giải đã trình bày ở trên, ta có thể tiếp cận bài toán theo hướng khác như sau: Vẫn như lời giải ở trên, ta chứng minh được

$$f(0) = 0, \quad f(x) \geq 0,$$

với mọi x và bất đẳng thức cần chứng minh đúng khi $a = 1$ và chỉ còn xét trường hợp $a > 1$. Trong i. thay x bởi $\frac{x}{a}$ ta được

$$[f(x)]^2 \leq ax^2 f\left(\frac{x}{a}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Giả sử rằng tồn tại $z \neq 0$ sao cho $f(z) > z^2$. Từ (2) ta lần lượt có:

$$f\left(\frac{z}{a}\right) > \frac{1}{az^2}\left(z^2\right)^2 = \frac{z^2}{a};$$
$$f\left(\frac{z}{a^2}\right) > \frac{1}{a\left(\frac{z}{a}\right)^2}\left(\frac{z}{a}^2\right)^2 = \frac{z^2}{a}.$$

Từ đó ta được

$$f\left(\frac{z}{a^3}\right) > \frac{1}{a\left(\frac{z}{a^2}\right)^2} = az^2.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta có:

$$f\left(\frac{z}{a^n}\right) > a^{2n-5}z^2, \quad \forall n \geq 2. \tag{1.16}$$

Do điều kiện thứ hai của bài toán, vế trái của (1.16) bị chặn trên, trong khi vế phải lớn tùy ý khi n đủ lớn, vô lý! Do đó điều giả sử là sai hay

$$f\left(x\right) \le x^2, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}. \tag{1.17}$$

Xét hàm số

$$h\left(x\right) = f\left(x\right) - \frac{x^2}{a} \le f\left(x\right)$$

thì từ i. ta được

$$\left(h(x) + \frac{x^2}{a}\right)^2 \le ax^2\left(h\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x^2}{a^3}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}.$$

Điều này tương đương

$$\left[h\left(x\right)\right]^2 + 2\frac{x^2}{a}h\left(x\right) \le ax^2 h\left(\frac{x}{a}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$$

Từ đó, ta được

$$2\frac{x^2}{a}h\left(x\right) \le ax^2 h\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow h\left(x\right) \le \frac{a^2}{2}h\left(\frac{x}{a}\right),$$

bất đẳng thức này đúng cả khi $x = 0$ vì $h(0) = 0$. Bằng phương pháp quy nạp toán học ta có

$$h\left(x\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n h\left(\frac{x}{a^n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Từ (1.17) và (1.18) ta được

$$h\left(x\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n h\left(\frac{x}{a^n}\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n f\left(\frac{x}{a^n}\right).$$

Do đó, ta có

$$h\left(x\right) \le \left(\frac{a^2}{2}\right)^n \left(\frac{x}{a^n}\right)^2 = \frac{x^2}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì n có thể lớn tùy ý nên điều này chỉ đúng khi và chỉ khi $h\left(x\right) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đây, ta suy ra điều phải chứng minh.

(3) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bị chặn trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn điều kiện

a) $f(1) = 1$,

b) $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2, \forall x \neq 0.$

ii) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bị chặn trên $[a, b]$, $f(1) = 1$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

iii) **(Olympic Toán Trại hè Hùng Vương 2016).** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

a) $f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$

b) $f(x) \leq e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Bài toán 3. (VMO 2003, bảng A). Gọi $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{1.19}$$

Tìm hằng số α lớn nhất để với mọi $f \in \mathcal{F}$ và với $\forall x \geq 0$, ta đều có

$$f(x) \geq \alpha x.$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Ta thấy rằng

$$f(f(2x)) + x = f(x) + x = \frac{3x}{2} = f(3x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Do đó, ta đươc $f \in \mathcal{F}$. Nếu α là số thực sao cho

$$f(x) \geq \alpha x, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall x > 0$$

thì khi đó thay hàm số $f(x) = \frac{x}{2}$ vào bất đẳng thức trên, ta được

$$\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Lấy một hàm số tùy ý $f \in \mathcal{F}$. Trong (1.19), thay x bởi $\frac{x}{3}$, ta có

$$f(x) \geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Vì $f(x) > 0$ nên

$$f(x) > \frac{x}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{1.20}$$

Xét dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ được xác định như sau

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \quad \text{và} \quad \alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp quy nạp toán học theo n

$$f(x) > \alpha_n x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.21}$$

Từ (1.20), ta thấy rằng bất đẳng thức trên đúng với $n = 1$. Giả sử đẳng thức trên đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$ tức là

$$f(x) > \alpha_k x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (3.97), ta được

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \\ &> \alpha_k f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} \\ &> \alpha_k^2 \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} \\ &= \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3} x = \alpha_{k+1} x. \end{aligned}$$

Do đó đẳng thức (1.19) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (1.21) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, ta đã chứng minh được bất đẳng thức (1.21). Từ công thức xác định của dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ta thấy rằng

$$\alpha_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

và

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

Giả sử rằng

$$\alpha_k < \frac{1}{2}, \qquad \text{vôi} \quad \forall k \geq 2.$$

Khi đó, ta có

$$\alpha_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{(2\alpha_k - 1)(2\alpha_k + 1)}{6} < 0.$$

Do đó, $\alpha_{k+1} < \frac{1}{2}$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta được

$$\alpha_n < \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, ta có

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3} - \alpha_n = \frac{2\alpha_n^2 - 3\alpha_n + 1}{3} = \frac{(\alpha_n - 1)(2\alpha_n - 1)}{3} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Điều này chứng tỏ $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy số tăng. Hơn nữa, nó bị chặn trên bởi giới hạn hữu hạn. Đặt

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = a \left(0 \leq a \leq \frac{1}{2}\right).$$

Khi đó, ta có

$$a = \lim_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2\alpha_n^2 + 1}{3}\right) = \frac{2a^2 + 1}{3}.$$

Từ đây, ta được

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.$$

Do đó, từ (1.21), ta có

$$f(x) \geq \lim_{n\to+\infty} (\alpha_n x) = \frac{1}{2}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Từ các kết quả trên ta thấy rằng $\alpha = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét.

(1) Tương tự như các bài toán tìm hằng số k tốt nhất sao cho thỏa mãn một bất đẳng thức đại số cho trước, trong bài toán này để tìm hằng số k đầu tiên ta phải tìm được những số hàm số $f \in \mathcal{F}$. Sau đó, thay chúng vào bất đẳng thức

$$f(x) \geq \alpha x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Hàm số f cần tìm nên có dạng $f(x) = ax$ với a là một hằng số. Vì khi đó ta có thể khử x ở cả hai vế của bất đẳng thức $f(x) \geq \alpha x$. Trong bất đẳng thức (1.19), thay $f(x) = ax$, ta được

$$3ax = f(3x) \geq f(f(2x)) + x = 2a^2x + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

hay

$$3a \geq 2a^2 + 1.$$

Do đó, ta có

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1.$$

Từ những nhận định trên, ta thấy rằng nên chọn hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x$ để thay vào bất đẳng thức

$$f(x) \geq \alpha x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(2) Dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ trong bài toán trên được tìm ra bằng phương pháp giả định như sau. Giả sử có dãy $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ thỏa mãn (1.21). Khi đó ở bước quy nạp thứ $k = n + 1$ trong phép chứng minh quy nạp ta phải có

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \\ &> \alpha_k f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} \\ &> \alpha_k^2 \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3}x. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta nên chọn

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta xây dựng được dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ như trong phần chứng minh của bài toán. Bài toán trên có thể được xem như là một mở rộng của bài toán sau đây.

(Olympic Toán Belarus 1997). Cho hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(2x) \geq f(f(x)) + x, \quad \forall x > 0.$$

Chứng minh rằng

$$f(x) \geq x, \quad \forall x > 0.$$

(3) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) Tìm số thực k lớn nhất để nếu $f(x)$ là hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn bất phương trình hàm

$$\sqrt{3f(x)} - \sqrt{3f(x) - \frac{9}{4}f\left(\frac{4}{3}x\right)} \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

thì ta luôn có

$$f(x) \geq k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii) Tìm các số $a > 1$ sao cho tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

$$2f(x) \leq x + af\left(\frac{x}{a}\right), \quad \forall x > 0,$$

$$f(x) \leq x, \quad \forall\, (0; 1], \quad \text{và} \quad f(2019) > 2019.$$

Bài toán 4. (VMO 2012). Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

(1) f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

(2) f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;

(3)

$$f(f(x)) = f(x) + 12x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện của bài toán. Nếu $f(x) = f(y)$ thì

$$f(f(x)) = f(f(y)).$$

Từ (1.22), ta được

$$f(x) + 12x = f(y) + 12y.$$

Do đó $x = y$. Điều này chứng tỏ f là một đơn ánh. Kết hợp với giả thiết f là một toàn ánh, ta được f là một song ánh. Gọi f^{-1} là hàm ngược của f. Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x_1 \geq x_2$, ta có

$$f\left(f^{-1}(x_1)\right) = x_1 \geq x_2 = f\left(f^{-1}(x_2)\right).$$

Vì f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2).$$

Từ đây, ta thấy rằng f^{-1} cũng là một hàm số tăng. Trong (1.22), thay $x = 0$, ta được

$$f(f(0)) = f(0).$$

Vì f là một đơn ánh nên $f(0) = 0$. Do đó, ta được

$$0 = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0).$$

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$f_{-n}(x) = f^{-1}\left(f^{-1} \dots \left(f^{-1}(x)\right)\right) \quad \left(n \text{ lần } f\right).$$

Vì f^{-1} là hàm tăng nên f_{-n} cũng là hàm tăng. Hơn nữa, ta thấy rằng

$$f_{-n}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xét dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định như sau

$$\alpha_0 = f(x), \quad \alpha_1 = x \quad \text{ và } \quad \alpha_n = f^{-1}(\alpha_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Thay x bởi $f^{-1}(\alpha_{n-1})$ vào (3.100), ta được

$$\begin{aligned}\alpha_{n-2} = f(\alpha_{n-1}) &= f\left(f\left(f^{-1}(\alpha_{n-1})\right)\right)\\ &= f\left(f^{-1}(\alpha_{n-1})\right) + 12 f^{-1}(\alpha_{n-1})\\ &= \alpha_{n-1} + 12\alpha_n.\end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng của dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là

$$12A^2 - A - 1 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt

$$A_1 = -\frac{1}{3} \quad \text{và} \quad A_2 = \frac{1}{4}.$$

Do đó, công thức tổng quát của dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định như sau

$$\alpha_n = C_1\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Từ công thức trên, ta có

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = \alpha_1 = x, \\ -3C_1 + 4C_2 & = \alpha_0 = f(x). \end{cases}$$

Từ hệ phương trình trên, ta được

$$C_1 = \frac{4x - f(x)}{7} \quad \text{và} \quad C_2 = \frac{3x + f(x)}{7}.$$

Vì vậy

$$\alpha_n = \frac{4x - f(x)}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3x + f(x)}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} f_{-n}(x) = f^{-1}(\alpha_n) &= \alpha_{n+1} \\ &= \frac{4x - f(x)}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{3x + f(x)}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Xét $x > 0$, cố định. Vì f_{-n} là hàm tăng nên

$$f_{-n}(x) > f_{-n}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chú ý rằng f cũng là hàm số tăng nên

$$3x + f(x) > 0, \quad \text{với} \quad \forall x > 0.$$

Cho $n = 2k$ trong (1.23), ta được

$$\frac{4x - f(x)}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} + \frac{3x + f(x)}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k} > 0.$$

Điều này suy ra

$$\frac{f(x) - 4x}{f(x) + 3x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2k}.$$

Tương tự cho $n = 2k+1$ trong (1.23), ta được

$$\frac{4x - f(x)}{f(x) + 3x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2k+1}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^{2k+1} \leq \frac{f(x) - 4x}{f(x) + 3x} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2k}.$$

Cho $k \to +\infty$ trong hai bất đẳng thức trên, ta thu được

$$f(x) = 4x, \quad \forall x > 0.$$

Xét $x < 0$, cố định. Khi đó

$$f_{-n}(x) < f_{-n}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

và

$$3x + f(x) > 0, \quad \text{với} \quad x < 0.$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên, ta cũng suy ra

$$f(x) = 4x, \quad \forall x < 0.$$

Vì $f(0) = 0$, nên từ các kết quả trên ta thấy rằng

$$f(x) = 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = 4x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét.

(1) Từ giả thiết thứ (3) của bài toán, ta có thể thấy ngay rằng một trong những phương pháp có thể giải quyết bài toán trên đó là phương pháp sai phân. Tuy nhiên nếu ta thiết lập hệ thức truy hồi cho dãy lặp của hàm số f thì sẽ rất khó để giải quyết bài toán. Thật

vậy, với $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$f_n(x) = f(f \ldots (f(x))) \quad \big(n \text{ lần } f\big).$$

Xét dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ được xác định như sau

$$\alpha_0 = x, \quad \alpha_1 = f(x) \quad \text{và} \quad \alpha_n = f(\alpha_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Thay x bởi $f(\alpha_{n-2})$ vào (1.22), ta được

$$\begin{aligned}\alpha_n = f(\alpha_{n-1}) &= f(f(\alpha_{n-2})) \\ &= f(\alpha_{n-2}) + 12\alpha_{n-2}, \\ &= \alpha_{n-1} + 12\alpha_{n-2}\end{aligned}$$

hay

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} - 12\alpha_{n-2} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Phương trình đặc trưng của dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là

$$A^2 - A - 12 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt

$$A_1 = -3 \quad \text{và} \quad A_2 = 4.$$

Tương tự như lời giải trên, ta được

$$f_n(x) = \frac{4x - f(x)}{7}(-3)^n + \frac{3x + f(x)}{7}4^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \tag{1.24}$$

Chú ý rằng, ta cũng có

$$f_n(x) > 0, \quad \forall x > 0,$$

và

$$f_n(x) < 0, \quad \forall x < 0.$$

Hơn nữa $f_n(x)$ cũng là một hàm số tăng. Xét $x > 0$, cố định. Tương tự như lời giải trên, khi cho $n = 2k$ trong (1.24), ta được

$$\frac{f(x) - 4x}{f(x) + 3x} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{2k}.$$

Chú ý rằng

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2k} \to +\infty \quad \text{khi} \quad k \to +\infty.$$

Do đó nếu cho $k \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta cũng không thể thu được chặn trên của hàm số $f(x) - 4x$. Vì vậy, nếu ta sử dụng kĩ thuật thường dùng khi sử dụng phương pháp sai phân để giải phương trình hàm thì sẽ không thu được bất kì kết quả khả quan nào. Đó chính là lí do chúng ta cần xét hàm ngược của hàm f. Đây cũng là ý tưởng của tác giả khi xây dựng bài toán trên. Tuy nhiên chính vì điều này, mà cách phát biểu của bài toán trở nên "khiên cưỡng" (cần thêm giả thiết f là toàn ánh và f là hàm đơn điệu tăng).

(2) Ngoài cách giải đã trình bày ở trên, ta có thể tiếp cận bài toán theo hướng khác như sau. Vẫn như lời giải ở trên, ta chứng minh được f là một song ánh và $f(0) = 0$. Vì f là hàm số tăng nên ta có

$$f(x) > 0, \quad \forall x > 0, \qquad \text{và} \qquad f(x) < 0, \quad \forall x < 0.$$

Từ (1.22), ta được

$$f(x) > x, \quad \forall x > 0.$$

Từ đây ta cũng suy ra

$$x < f(x) < 13x, \quad \forall x > 0.$$

Vì f là một hàm toàn ánh nên ta được

$$x < f(x) < 13x, \quad \forall x > 0.$$

Từ tính toàn ánh của hàm số f trên $\mathbb{R}^+$ ta thu được những tính chất sau

i) Nếu

$$f(x) > kx, \quad \forall x > 0 \quad (k > 0)$$

thì

$$f(x) < \left(1 + \frac{12}{k}\right) x, \quad \forall x > 0.$$

ii) Nếu

$$f(x) < hx, \quad \forall x > 0 \quad (h > 0)$$

thì

$$f(x) < \left(1 + \frac{12}{h}\right) x, \quad \forall x > 0.$$

Tiếp theo, ta đặt

$$g(x) = 1 + \frac{12}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Xét dãy số $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ và $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\alpha_1 = 1, \beta = 13 \quad \text{và} \quad \alpha_n = g\left(\beta_{n-1}\right), \beta_n = g\left(\alpha_{n-1}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Sử dụng tính chất i, ii của hàm số f và phương pháp quy nạp toán học theo n (tương tự như Bài toán số 3), ta được

$$\alpha_n x < f(x) < \beta_n x, \quad \forall x > 0. \tag{1.25}$$

Chú ý rằng g là một hàm số giảm. Hơn nữa $\alpha_1 < \beta_1$ nên $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng và bị chặn trên còn $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy giảm và bị chặn dưới. Do đó, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ và $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là các dãy hội tụ. Đặt

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = a, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = b.$$

Khi đó, ta có

$$a = 1 + \frac{12}{b} \quad \text{và} \quad b = 1 + \frac{12}{a}.$$

Giải hệ gồm hai phương trên, ta được $a = b = 4$. Như vậy

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = 4.$$

Cho $n \to +\infty$ trong (1.25), ta được

$$4x \le f(x) \le 4x, \quad \forall x > 0.$$

Vì vậy, ta có

$$f(x) = 4x, \quad \forall x > 0.$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên, ta cũng suy ra

$$f(x) = 4x, \quad \forall x < 0.$$

Vì $f(0) = 0$, nên từ các kết quả trên ta thấy rằng

$$f(x) = 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(3) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) **(Putnam 1988).** Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)\right) = 6x - f(x), \quad \forall x \geq 0.$$

ii) Tìm tất cả các hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(f(x) - x\right) = 2x, \quad \forall x \geq 0.$$

iii) **(Olympic Toán châu Á Thái Bình Dương 1988).** Tìm tất cả các song ánh thực sự $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + g(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trong đó $g(x)$ là hàm số ngược của $f(x)$.

Bài toán 5. (Olympic Toán của Bulgaria 1998). Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.26}$$

Lời giải. Từ (1.26) ta thấy rằng

$$f(-x) = f\left((-x)^2 + \frac{1}{4}\right) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ f là một hàm số chẵn. Do đó ta chỉ cần xét hàm f trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Lấy $a \geq 0$ bất kì. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $a \le \frac{1}{2}$. Xét dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ được xác định như sau

$$x_1 = a \quad \text{và} \quad x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó, ta có

$$f\left(x_{n+1}\right) = f\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right) = f\left(x_n\right) = f\left(x_{n-1}\right) = \cdots = f\left(x_1\right) = f(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.27}$$

Từ công thức xác định của dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, ta thấy rằng

$$x_n \ge 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

và

$$x_1 = a \le \frac{1}{2}.$$

Giả sử rằng

$$x_k \le \frac{1}{2}, \quad \text{với} \quad \forall k \ge 2.$$

Khi đó, ta có

$$x_{k+1} - \frac{1}{2} = x_k^2 - \frac{1}{4} = \left(x_k - \frac{1}{2}\right)\left(x_k + \frac{1}{2}\right) \le 0.$$

Do đó, $x_{k+1} \le \dfrac{1}{2}$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta được

$$x_n \le \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, ta có

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Điều này chứng tỏ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy số tăng. Hơn nữa, nó bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$ nên có giới hạn hữu hạn. Đặt

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \left(0 \le a \le \frac{1}{2}\right).$$

Khi đó, ta có

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right) = a^2 + \frac{1}{4}.$$

Từ đây, ta được $\lim_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$. Vì f là hàm số liên tục nên từ (1.27) ta có

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Trường hợp 2. $a > \frac{1}{2}$. Xét dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ được xác định như sau

$$x_1 = a \quad \text{và} \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó, ta có

$$x_n = x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó, ta được

$$f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n) = f(x_{n-1}) = \cdots = f(x_1) = f(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.28}$$

Từ công thức xác định của dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, ta thấy rằng

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*},$$

Mặt khác, ta có

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}} - x_n = \frac{-\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x_n - \frac{1}{4}} + x_n} \le 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Điều này chứng tỏ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy số giảm. Hơn nữa, nó bị chặn trên bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn. Đặt

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a (a \ge 0).$$

Khi đó, ta có

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{x_n - \frac{1}{4}}) = \sqrt{a - \frac{1}{4}}.$$

Từ đây, ta được

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Vì f là hàm số liên tục nên từ (1.28), ta có

$$f(a)=\lim_{n\to+\infty} f(a)=\lim_{n\to+\infty} f\left(x_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Từ kết quả của hai trường hợp trên, ta thấy rằng hàm số cần tìm là

$$f(x)=C, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

trong đó C là một hằng số tùy

Nhận xét.

- Phương trình hàm trong bài toán trên có dạng

$$f(x)=f(g(x))$$

  trong đó g là một hàm số cho trước và f là một hàm số liên tục, cần tìm. Để giải quyết lớp các bài toán nói trên, ta sẽ sử dụng phương pháp như sau. Đầu tiên ta lấy một giá trị a tùy ý thuộc tập xác định của hàm số f. Sau đó, ta xây dựng dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ với $x_1=a$, sao cho thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

  i) $f(a)=f\left(x_1\right)=\cdots=f\left(x_n\right)=f\left(x_{n+1}\right)=\cdots, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

  ii) Dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ hội tụ về b.

  Cuối cùng, ta sẽ sử dụng tính liên tục của hàm số f để chỉ ra f là một hằng số. Ta thường xây dựng dãy số $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ như sau

$$x_1=a, \quad x_{n+1}=g\left(x_n\right), \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

  hoặc

$$x_1=a, \quad x_{n+1}=g^{-1}\left(x_n\right), \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

  Trong đó

$$g^{-1}\left(x_n\right)=\left\{z: g(z)=x_n\right\}.$$

- Nếu ta đặt $f(x) = g\left(x - \frac{1}{6}\right)$ thì khi đó ta có

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(x + \frac{1}{6}\right) \\ &= f\left(\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &= f\left(\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{6}\right) \\ &= g\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right). \end{aligned}$$

Từ đây, ta nhận được bài toán sau.

(VNTST 2007). Tìm tất cả các hàm số liên tục $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$g(x) = g\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) Cho $0 < k < \dfrac{1}{4}$. Hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = f\left(x^2 + k\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

ii) **(VMO 2001, bảng A).** Cho $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định, liên tục trên khoảng $(-1; 1)$ và thỏa mãn hệ thức

$$\left(1 - x^2\right) f(g(x)) = \left(1 + x^2\right)^2 f(x), \quad \forall x \in (-1; 1).$$

iii) **(Chọn Đội tuyển Thanh Hóa 2018).**

a) Cho dãy số $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ được xác định bởi

$$x_1 = a \quad \text{và} \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng với $a > \dfrac{1}{2}$ thì dãy có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

b) Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 6. (Bài T11/400, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = \beta f\left(x + yf(x)\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{1.29}$$

Trong đó, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$ cho trước.

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện của bài toán. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x) \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}^+$ mà $f(x_0) \in (0; 1)$. Khi đó, thay

$$x = x_0, \quad y = \frac{x_0}{1 - f\left(x_0\right)}$$

vào (1.29) ta được

$$f\left(x_0\right) \cdot f\left(\frac{x_0}{1 - f\left(x_0\right)}\right) = \beta f\left(\frac{x_0}{1 - f\left(x_0\right)}\right).$$

Do đó $f(x_0) = \beta > 1$. Điều này là vô lí. Tiếp theo, ta chứng minh

$$f(x) \geq \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Giả sử tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}^+$ mà $f(y_0) \in (1; \beta)$. Khi đó, ta xét dãy số sau

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = x_n + y_0 f\left(x_n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ định nghĩa của hàm f, ta thấy rằng

$$x_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp quy nạp toán học theo n:

$$f\left(x_n\right) = \left(\frac{f\left(y_0\right)}{\beta}\right)^{n-1} f\left(x_1\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.30}$$

Rõ ràng, đẳng thức trên đúng với $n = 1$. Giả sử đẳng thức trên đúng với $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f\left(x_{k+1}\right) &= f\left(x_k + y_0 f\left(x_k\right)\right) \\ &= \frac{f\left(x_0\right)}{\beta} f\left(x_k\right) \\ &= \frac{f\left(x_0\right)}{\beta} \left(\frac{f\left(y_0\right)}{\beta}\right)^{k-1} f\left(x_1\right) \\ &= \left(\frac{f\left(y_0\right)}{\beta}\right)^{k} f\left(x_1\right). \end{aligned}$$

Do đó đẳng thức (1.30) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (1.30) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, ta đã chứng minh được đẳng thức (1.30). Chú ý rằng $f(y_0) \in (1;\beta)$ nên $0 < \frac{f(y_0)}{\beta} < 1$. Vì thế ta có

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{f\left(y_0\right)}{\beta}\right)^{n-1} f\left(x_1\right)\right] = f\left(x_1\right)\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(y_0\right)}{\beta}\right)^{n} = 0.$$

Điều này là vô lí do

$$f(x) \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Vì vậy, điều giả sử tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}^+$ mà $f(y_0) \in (1;\beta)$ là sai. Do đó, ta có

$$f(x) \geq \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (1.29) ta được

$$\beta f(x) \leq f(x)f(y) = \beta f(x + yf(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hay

$$f(x) \leq f(x + yf(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,$$

tức là $f(x)$ là hàm tăng (không giảm) trên $\mathbb{R}^+$. Giả sử $f(x) > \beta$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ thì $f(x)$ làm hàm đồng biến (tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$.

Trong (1.29) đổi vai trò của x và y ta nhận được

$$f(x + yf(x)) = f(y + xf(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

hay

$$x + yf(x) = y + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{f(y)-1}{y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Kết quả này chứng tỏ rằng $\dfrac{f(x)-1}{x}$ là một hằng số. Do đó, ta chọn được

$$f(x) = cx + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

với c là một hằng số tùy ý. Tuy nhiên hàm số này không thỏa mãn (1.29) với mọi giá trị của c. Vậy tồn tại $x_1 \in \mathbb{R}^+$ để $f(x_1) = \beta$. Do $f(x)$ không giảm nên

$$f(x) = \beta, \quad \forall x \in (0; x_1].$$

Trong (1.29) thay $x = x_1$, $y = x_1$ ta thu được $\beta = f((\beta+1)x_1)$. Lập luận tương tự, ta thu được

$$f(x) \equiv \beta, \quad \forall x \in [x_1; (\beta+1)x_1].$$

Tiếp tục quá trình này, theo nguyên lí quy nạp ta thu được $f(x) \equiv \beta$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện (1.29) bài toán. Vậy hàm duy nhất thỏa mãn bài toán là

$$f(x) = \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Nhận xét.

(1) Vì vế trái của phương trình hàm trong bài toán trên là một biểu thức đối xứng giữa x và y nên ta sẽ ngay đến việc hoán vị vai trò của x và y trong (1.29). Khi đó, ta được

$$f(x + yf(x)) = f(y + xf(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Từ điều này, ta thấy nhu cầu chứng minh f là một hàm đơn ánh, hoặc f là một hàm đơn điệu nổi lên khá rõ. Mặt khác, quan sát thấy rằng, từ (1.29) với mỗi giá trị của x ta có thể tìm được y sao cho

$$f(y) = f\left(x + yf(x)\right).$$

Tức là ở đây ta cần giải phương trình ẩn y

$$y = x + yf(x),$$

hay

$$y = \frac{x}{1 - f(x)}.$$

Từ phép thế này, ta có thể nhận thấy ngay rằng

$$f(x) \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Tuy nhiên, kết quả này vẫn chưa thể giúp chúng ta chứng minh f là hàm đơn ánh hoặc f là hàm đơn điệu, là mục tiêu mà chúng ta cần hướng tới. Vì vậy, chúng ta cần chứng minh một kết quả mạnh hơn nữa, đó là

$$f(x) \geq \beta > 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Đây cũng chính là chốt chặn khó nhất của bài toán trên. Kĩ thuật xây dựng dãy số dựa trên chính phương trình hàm đã cho trong chứng minh trên, thường xuyên được sử dụng để giải quyết một số các bài toán về bất phương trình hàm.

(2) Từ chứng minh trên, ta thấy ngay rằng trong trường hợp $\beta = 1$, Bài toán 6 có nghiệm hàm là

$$f(x) = ax + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

trong đó a là một hằng số. Một câu hỏi được đặt ra là trong trường hợp $\beta < 1$, thì khi đó "liệu có tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn phương trình (1.29)?". Câu hỏi này xin được dành cho bạn đọc.

(3) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) **(USAMO 2000).** Liệu có tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii) **(Olympic Toán Bulgaria, 2008).** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x + y^2\right) \geq (y+1)f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

iii) Tồn tại hay không hàm số $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(x + y\right) > y[f\left(x\right)]^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 7. (Chọn đội tuyển ĐH Vinh 2012). Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$2f(x) = f\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad \forall x \in [0; +\infty). \tag{1.31}$$

Lời giải. Vì f là hàm số liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f cũng liên tục trên $[0; 1]$. Do đó, tồn tại các số a, $b \in [0; 1]$ sao cho

$$f(a) = \max_{x \in [0,1]} f(x) = M, \quad \text{và} \quad f(b) = \min_{x \in [0,1]} f(x) = m.$$

Thay $x = a$ trong (1.31), ta được

$$2M = 2f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right) + f\left(\frac{a}{a^2 + a + 1}\right). \tag{1.32}$$

Vì $a \in [0; 1]$ nên ta có

$$0 < \frac{a+1}{2} \leq 1 \quad \text{và} \quad 0 \leq \frac{a}{a^2 + a + 1} \leq 1$$

Từ đây, ta suy ra

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) \leq M \quad \text{và} \quad f\left(\frac{a}{a^2 + a + 1}\right) \leq M.$$

Kết hợp điều này với (1.32), ta được

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) = f\left(\frac{a}{a^2 + a + 1}\right) = M.$$

Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp quy nạp toán học theo n

$$f\left(\frac{a + 2^n - 1}{2^n}\right) = M, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.33}$$

Vì $f(a) = M$ nên đẳng thức trên đúng với với $n = 0$. Giả sử đẳng thức trên đúng với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$f\left(\frac{a+2^k-1}{2^k}\right) = M.$$

Thay $x = \frac{a+2^k-1}{2^k}$ trong (1.31), ta được

$$2M = 2f\left(\frac{a+2^k-1}{2^k}\right) = f\left(\frac{2^k\left(a+2^k-1\right)}{\left(a+2^k-1\right)^2+2^k\left(a+2^k-1\right)+2^k}\right) + f\left(\frac{a+2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right).$$

Vì $a \in [0;1]$ nên ta có

$$0 < \frac{a+2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \le 1 \quad \text{và} \quad 0 \le \frac{2^k\left(a+2^k-1\right)}{\left(a+2^k-1\right)^2+2^k\left(a+2^k-1\right)+2^k} \le 1$$

Từ đây, ta suy ra

$$f\left(\frac{2^k\left(a+2^k-1\right)}{\left(a+2^k-1\right)^2+2^k\left(a+2^k-1\right)+2^k}\right) \le M \quad \text{và} \quad f\left(\frac{a+2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right) \le M.$$

Kết hợp điều này với (1.32), ta được

$$f\left(\frac{a+2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right) = M.$$

Do đó đẳng thức (1.33) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (1.33) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$. Như vậy, ta đã chứng minh được đẳng thức (1.33). Vì f là hàm số liên tục trên $[0;1]$, nên ta được

$$M = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a+2^n-1}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a-1}{2^n}\right)\right) = f\left(1\right).$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(1) = m$. Do đó $M = m$. Điều này chứng tỏ

$$f(x) \equiv c, \quad \forall x \in [0;1].$$

Khi đó, ta có thể viết lại phương trình ban đầu dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}c.$$

Từ đẳng thức này, cũng bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) c \\ &= \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) c. \end{aligned}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Cho $n \to +\infty$, ta được $f(x) \equiv c$. Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) \equiv c, \quad \forall x \in [0; +\infty).$$

Nhận xét.

(1) Trong bài toán này ta đã vận dụng một cách linh hoạt tính chất sau của hàm số liên tục. Đó là, nếu một hàm liên tục trên một đoạn thì có nó giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó. Kết quả này đã được chứng minh trong nhiều tài liệu tham khảo. Tuy nhiên về mặt "trực giác" chúng ta có thể hình dung kết quả này như sau. Nếu $f(x)$ là một hàm số liên tục thì đồ thị của nó là một nét liền không bị đứt đoạn. Khi đó nếu $x \in [a, b]$ thì ta sẽ kẻ đường thẳng từ x song song với trục tung. Nó cắt đồ thì của hàm số f. Từ đây, ta thấy nếu điểm nào nằm ở vị trí cao nhất (thấp nhất) trền đồ thị của f thì nó là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f. Hơn nữa nếu hai giá trị này bằng nhau thì rõ ràng đồ thị của hàm số f phải là một đường thẳng hay f là một hàm hằng trên đoạn $[a; b]$. Chú ý rằng kết quả của bài toán trên vẫn đúng nếu f là một hàm số đi từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

(2) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii) Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right)\right], \quad \forall x, y \in [0; 1].$$

Bài toán 8. (IMO 2011). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y) \le yf(x) + f\left(f(x)\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với $\forall x \le 0$.

Lời giải. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x) \le 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, giả sử tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a) > 0$. Thay $x = a$ trong (1.34), ta được

$$f(a+y) \le yf(a) + f\left(f(a)\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$f(a+y) \le (a+y)f(a) + f\left(f(a)\right) - af(a), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$f(t) \le At + B, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$A = f(a) > 0 \quad \text{và} \quad B = f(f(a)) - af(a).$$

Với số thực dương t tùy ý, thay $x = t, y = -t$ vào (1.34), ta được

$$\begin{aligned}
f(0) &\le tf(-t) + f(f(-t)) \\
&\le t(-At + B) + Af(-t) + B \\
&\le -t(At - B) + A(-At + B) + B \\
&= -At^2 - \left(A^2 - B\right)t + (A+1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$\begin{aligned}
f(0) = \lim_{t\to+\infty} f(0) &\le \lim_{t\to+\infty}\left[-At^2 - \left(A^2 - B\right)t + (A+1)B\right] \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left\{t^2\left[-A - \frac{\left(A^2 - B\right)}{t} + \frac{(A+1)B}{t^2}\right]\right\} = -\infty.
\end{aligned}$$

Điều này là vô lí. Vì vậy, ta có

$$f(x) \le 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp điều này với (1.34), ta được

$$f(x+y) \le yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.35}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng hàm số f có ít nhất một không điểm, tức là tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho $f(z) = 0$. Nếu $f(0) = 0$, chúng ta được điều phải chứng minh. Ta xét trường hợp $f(0) < 0$. Thay $x = 0$ vào (1.35), ta có

$$f(y) \le yf(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} (yf(0)) = +\infty$ nên từ bất đẳng thức trên, ta có

$$\lim_{x \to -\infty} f(y) = +\infty.$$

Do đó, tồn tại $a > 0$ sao cho

$$f^2(a) > -f(0).$$

Đặt $b = f(a)$ và thay $x = b, y = -b$ vào (1.35), ta được

$$-b^2 < f(0) \le -bf(b).$$

Điều này suy ra $b < f(b)$. Thay $x = b, y = f(b) - b$ vào (1.34), ta được

$$f\left(f(b)\right) \le \left(f(b) - b\right) f(b) + f\left(f(b)\right)$$

hay

$$(f(b) - b)f(b) \ge 0.$$

Vì $b < f(b)$ nên $f(b) \ge 0$. Chú ý rằng $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(b) = 0$. Như vậy là f có ít nhất một không điểm. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng nếu $f(a) = 0$ và $b < a$ thì khi đó $f(b) = 0$. Thật vậy, thay $x = b$ và $y = a - b$ vào (1.35), ta được

$$0 = f(a) \le (a - b)f(b).$$

Bất đẳng thức trên chứng tỏ rằng $f(b) \geq 0$ và do đó $f(b) = 0$. Từ khẳng định này ta thấy rằng, bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $f(0) = 0$. Gọi r là không điểm của hàm số f. Khi đó, ta có

$$f(r-1) = f(r) = 0.$$

Thay $x = r$ và $y = -1$ vào (1.34), ta được

$$0 = f(r-1) \leq -f(r) + f\left(f(r)\right) = f(0).$$

Do đó $f(0) = 0$. Ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét.

(1) Đặt $f(0) = a$. Trong (1.34), thay $x = 0$, ta được

$$f(y) \leq ay + f(a), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay y bởi $a - x$ trong (3.114) và kết hợp với bất đẳng thức trên, ta được

$$f(a) \leq (a-x)f(x) + f\left(f(x)\right) \leq (a-x)f(x) + af(x) + f(a), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$0 \leq (2a - x)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây, ta được nếu $x < 2a = 2f(0)$ thì $f(x) \geq 0$. Từ kết quả này, ta thấy rằng yêu cầu của bài toán sẽ được chứng minh, nếu ta chỉ ra được $f(0) = 0$ và

$$f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét này đã cho ta những định hướng rõ ràng để giải quyết bài toán trên.

(2) Để chứng minh $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ trong lời giải trên ta đã sử dụng phương pháp phản chứng. Quan sát thấy rằng, vế trái của bất đẳng thức (1.34) là một hàm số bậc nhất theo biến y. Do đó, ta có thể nhanh chóng thiết lập được kết quả

$$f(t) \leq At + B, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

với $A > 0$. Sau đó, ta cần thế các giá trị của x và y trong (1.34) sao cho có thể "lợi dụng" được kết quả này.

(3) Một câu hỏi "tự nhiên" được đặt ra sau khi giải quyết xong bài toàn là "Có tồn tại hay không hàm số khác không thỏa mãn những điều kiện của bài toán. Câu trả lời là "có". Ở đây, chúng ta sẽ chỉ ra một lớp các hàm số như vậy. Đầu tiên, nếu chú ý rằng nếu $g : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ là hàm số thỏa mãn điều kiện

$$g(x + y) \geq yg(x)$$

với mọi số thực dương x và y. Khi đó hàm số f được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{nếu} \quad x > 0, \\ 0 & \text{nếu} \quad x \leq 0, \end{cases} \tag{1.36}$$

sẽ thỏa mãn (1.34). Thật vậy, từ định nghĩa của hàm số f ta thấy rằng

$$f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f\left(f(x)\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (1.36), ta có

$$f(x + y) \leq yf(x) = yf(x) + f\left(f(x)\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa, bất đẳng thức này là không hiển nhiên nếu x, y là những số thực dương. Bây giờ, ta chỉ cần chỉ ra một hàm số $g : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$g(x + y) \geq yg(x)$$

với mọi số thực dương x và y. Ta thấy rằng hàm số $g(x) = Ce^x$ với C là một hằng số dương thỏa mãn bất đẳng thức trên. Vì $e^x \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$g(x + y) = Ce^{x+y} = Ce^x e^y \geq yCe^x = yg(x).$$

Như vậy ta đã xây dựng được một hàm số f thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Bài toán số 8 có thể được lấy "cảm hứng" từ bài toán dưới đây, nằm trong đề thi Olympic Toán Sinh viên Quốc tế (IMC) năm 2001.

Bài toán 9. (IMC 2001). Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $f(0) > 0$ và

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.37}$$

Lời giải. Giả sử trái lại rằng tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) > 0$ và (1.37). Nếu như ta có

$$f(f(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

thì với bất kì $y < 0$, ta có

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)) \geq f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ rằng f là một hàm số giảm. Chú rằng

$$f(0) \geq 0 \geq f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này là vô lí. Vì vậy phải tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(f(a)) > 0$. Thay $x = a$ vào (1.37), ta được

$$f(a+y) \geq f(a) + yf(f(a)) = f(a) - af(f(a)) + (a+y)f(f(a)), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

hay

$$f(t) \geq f(a) - af(f(a)) + tf(f(a)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Từ đẳng thức trên, ta suy ra

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) \geq \lim_{t\to} [f(a) - af(f(a)) + tf(f(a))] = +\infty.$$

Do đó, ta có

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{1.38}$$

Mặt khác, thay $x = a$ và thay y bởi $f(x) - a$ trong (1.37), ta được

$$f(f(x)) \geq f(a) + (f(x) - a)f(f(a)) = f(a) - af(f(a)) + f(f(a))f(x).$$

Chú ý rằng

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(a) - af\left(f(a)\right) + f\left(f(a)\right)f(x)\right] = +\infty,$$

nên ta được

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(f(x)\right) = +\infty. \tag{1.39}$$

Từ (1.38) và (1.39), ta thấy rằng tồn tại các số thực $x > y > 0$ sao cho

$$f(x) \geq 0, \quad f(f(x)) > 1, \quad y \geq \frac{x+1}{f(f(x)) - 1}$$

và

$$f\left((x + y + 1)\right) \geq 0.$$

Từ đây, ta được

$$f(x + y) \geq f(x) + yf(f(x)) \geq x + y + 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= f\left((x+y+1) + [f(x+y) - (x+y+1)]\right) \\
&\geq f(x+y+1) + [f(x+y) - (x+y+1)]\, f(x+y+1) \\
&\geq f((x+y)+1) \geq f(x+y) + f\left(f(x+y)\right) \\
&\geq f(x) + yf\left(f(x)\right) + f(x+y) \\
&> f(x+y).
\end{aligned}$$

Điều này là vô lí. Vì vậy không tồn tại hàm số f thỏa mãn các điều kiện nói trên. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

(1) Bài toán trên là một bài toán rất khó. Với yêu cầu của bài toán là chỉ ra sự không tồn tại nên phương pháp để giải quyết bài toán này là sử dụng phản chứng. Việc nhận ra f là một hàm số không giảm và $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là dễ dàng. Hơn nữa, tương tự như kĩ thuật được sử dụng trong Bài toán số 5, ta cũng chỉ ra được các kết sau

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

Tuy nhiên, việc chọn ra các số x, y để sao cho thiết lập được các bất đẳng thức, từ đó chỉ ra được điều mâu thuẫn là khó và cần đòi hỏi sự "tinh tế".

(2) Nếu ta thay giả thiết f là một hàm số đi từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ và $f(0) > 0$ bởi một giả thiết mạnh hơn là f đi từ $(0; +\infty)$ vào $(0; +\infty)$ thì ta có một cách tiếp cách tiếp cận khác như sau. Vẫn như lời giải ở trên, ta chứng minh được

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

Trong (1.37), thay $y = 1$, ta được

$$f(x+1) \geq f(x) + f(f(x)), \quad \forall x, y \in (0, +\infty),$$

hay

$$f(x+1) - f(x) \geq f\left(f(x)\right), \quad \forall x \in (0, +\infty). \tag{1.40}$$

Từ đây, ta suy ra

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x+1) - f(x)\right] \geq \lim_{x \to +\infty} f\left(f(x)\right) = +\infty.$$

Do đó

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x+1) - f(x)\right] = +\infty.$$

Ta xét hai dãy số $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ và $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ được xác định như sau

$$x_n = f(n) \quad \text{và} \quad y_n = n.$$

Khi đó $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một dãy tăng thực sự và $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Hơn nữa, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} = \lim_{n\to+\infty} [f(n+1)-f(n)] = +\infty.$$

Theo định lí Stolz, ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

Do đó, tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\frac{f(n)}{n} > 3, \quad \forall n > n_0.$$

Với mọi số tự nhiên $n > n_0$ ta có

$$f(n) > 3n > n+1.$$

Do f là hàm tăng nên

$$f(f(n)) > f(n+1), \quad \forall n > n_0.$$

Mặt khác từ (1.40), ta được

$$f\,(n+1) \geq f\,(f(n)) + f(n) > f\,(f(n)) > f\,(n+1)\,, \quad \forall n > n_0.$$

Điều này là vô lí. Do đó không tồn tại hàm số thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Để kết thúc chương này, chúng ta đến với bài toán đã trở thành "kinh điển" với phương trình hàm Cauchy. Kết quả của bài toán được sử dụng nhiều khi giải quyết một lớp các bài toán liên quan đến phương trình hàm cộng tính. Hơn nữa, phương pháp chứng minh của bài toán cũng là "hình mẫu" để ta áp dụng trong việc giải một số bài toán về phương trình hàm.

Bài toán 10. (Phương trình hàm Cauchy). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.41}$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (1.41). Thay $x = y = 0$ trong (1.41), ta được

$$f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp qui nạp toán học theo n

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.42}$$

Vì $f(0) = 0$ nên ta thấy rằng đẳng thức trên đúng với $n = 0$. Giả sử đẳng thức (1.42) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$f(kx) = kf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f((k+1)x) &= f(kx + x) \\ &= f(kx) + f(x) \\ &= kf(x) + f(x) \\ &= (k+1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do đó đẳng thức (1.42) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (1.42) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$. Như vậy, ta đã chứng minh được đẳng thức (1.42). Thay y bởi $-x$ trong (1.41) và sử dụng $f(0) = 0$, ta được

$$f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bởi vậy f là một hàm số lẻ. Khi đó với $\forall n \in \mathbb{Z}$ và $n < 0$, sử dụng đẳng thức (1.42) ta có

$$f(nx) = f(-n(-x)) = -nf(-x) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (1.42), ta được

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.43}$$

Với $n \in \mathbb{N}^*$, sử dụng (1.43), ta có

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}x\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1.44}$$

Với $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ và $n > 0$, sử dụng (1.43) và (1.44) ta được

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n}f(x) = \frac{m}{n}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$$

Thay $x = 1$ trong đẳng thức trên, ta được

$$f(r) = rf(1), \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{1.45}$$

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = x.$$

Vì f là một hàm số liên tục nên ta có

$$f(x) = f\left(\lim_{n \to +\infty} r_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim_{n \to +\infty} [r_n f(1)] = f(1) \lim_{n \to +\infty} r_n = f(1)x.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó $a = f(1)$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số.

Nhận xét.

(1) Trong bài toán trên, nếu ta thay giả thiết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi hàm số f liên tục tại một điểm x_0 thì kết quả trên vẫn đúng. Thật vậy, nếu hàm số f liên tục tại một điểm x_0 thì

$$\lim_{t \to x_0} f(t) = f(x_0).$$

- Do đó, ta được

$$\begin{aligned}\lim_{u\to x} f(u) &= \lim_{u-x+x_0\to x_0} f\left((u-x+x_0)+(x-x_0)\right)\\ &= \lim_{t\to x_0} f\left(t+(x-x_0)\right)\\ &= \lim_{t\to x_0} f(t)+f\left(x-x_0\right)\\ &= f\left(x_0\right)+f\left(x-x_0\right)=f(x)\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ f là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Như vậy, nếu f là một hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, cộng tính và liên tục tại một điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ thì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Nếu ta thay giả thiết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ bởi hàm số f đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì kết quả trên vẫn đúng. Thật vậy, từ kết quả của bài toán 1 ta có

$$f(x)=ax, \quad \forall x\in\mathbb{Q}, \tag{1.46}$$

trong đó a là một hằng số. Ta sẽ chứng minh trong trường hợp f là một hàm đơn điệu tăng. Trường hợp f là một hàm đơn điệu giảm, cách chứng minh là tương tự. Với $x\in\mathbb{R}$, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ và $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \le x \le v_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

và

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

Vì f là một hàm số đơn điệu tăng nên ta có

$$f\left(u_n\right) \le f(x) \le f\left(v_n\right), \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Kết hợp điều này với (1.46) ta được

$$au_n \le f(x) \le av_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Cho $n\to+\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$ax \le f(x) \le ax, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số.

- Rõ ràng, từ kết quả của Bài toán 1, ta thấy rằng nếu f là một hàm số đi từ tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ hoặc tập số nguyên $\mathbb{Z}$ hoặc tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ và bỏ đi giả thiết f là một hàm số liên tục thì kết quả bài toán trên vẫn đúng.

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP

Trong chương trình này chúng ta sẽ nghiên cứu các bài toán mà lời giải của chúng thường có sự kết hợp giữa nhiều phương pháp, kĩ thuật khác nhau, mà chúng tôi gọi đó là phương tổng hợp. Thông thường giải phương trình hàm chúng ta đều cần phải thế biến. Nhưng các bài tập trong chương này mặc dù trung tâm của cách giải vẫn là các phép thế nhưng cần có sự phối hợp của một số kĩ thuật khác. Chúng tôi nhắc lại một số kĩ thuật cũng như những chú ý cần thiết khi sử dụng phương pháp tổng hợp để giải quyết các bài toán về phương trình hàm.

(i) Nếu một bộ phận nào đó của phương trình hàm đã cho có tính đối xứng giữa các biến, chẳng hạn như x, y. Chúng nên hoán vị giữa x và y nghĩa là thay x bởi y và thay y bởi x vào điều kiện ban đầu của bài toán.

(ii) Phép đặt "tổng-hiệu"

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

là một trong những phép đặt cơ bản thường được sử dụng đối với các phương trình hàm mà biểu thức thành phần của nó là các đa thức đối xứng giữa x và y (tức là các đa thức mà khi ta hoán vị giữa các biến, ta được đa thức mới bằng đa thức ban đầu.)

(iii) Các tính chất cơ bản hàm số như đơn ánh, toàn ánh, song ánh cần phải được nắm vững và vận dụng một cách linh hoạt. Trong nhiều bài toán của phương pháp thế chúng ta cần phải vận dụng được tính chất này để có thể tìm ra giá trị của hàm số tại những điểm đặc biệt.

(iv) Chúng ta nên dự đoán được một nghiệm nào đó của phương trình. Từ những dự đoán này chúng ta sẽ có những định hướng cụ thể để đưa ra các phép thế phù hợp hoặc tìm ra các tính chất của nghiệm hàm.

(v) Các kết quả liên quan đến hàm cộng tính (Bài toán 10) sẽ được thường xuyên sử dụng để giải quyết một lớp các bài toán phương trình hàm.

Đầu tiên, chúng ta sẽ đến với bài toán sau là Bài toán số 1 trong đề thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) năm 2019.

Bài toán 11. (IMO 2019). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \tag{2.1}$$

với mọi số nguyên a và b.

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (2.1). Thay $b = 0$ trong (2.1) ta được

$$f(2a) + 2f(0) = f(f(a)), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Thay $a = 0$ trong (2.1) ta có

$$f(0) + 2f(b) = f(f(b)), \quad \forall b \in \mathbb{Z}.$$

Từ hai đẳng thức trên, ta được

$$f(2a) + 2f(0) = f(0) + 2f(a), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Điều này suy ra

$$f(2a) = 2f(a) - f(0), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (2.1) ta được

$$2f(a) + 2f(b) - f(0) = f(f(a+b)), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Thay $a = 0$ và thay b bởi $a + b$ trong đẳng thức trên ta có

$$2f(a+b) + f(0) = f(f(a+b)), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Vì vậy, ta được

$$2f(a) + 2f(b) - f(0) = f(f(a+b)) = 2f(a+b) + f(0), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Do đó

$$f(a) + f(b) - f(0) = f(a+b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$, từ đẳng thức trên ta suy ra

$$g(a+b) = g(a) + g(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Từ đẳng thức trên và nhận xét 3 ở Bài toán 1 ta được

$$g(x) = kx, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Do đó

$$f(x) = kx + l, \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

trong đó $l = f(0)$. Thay kết quả này trở lại (2.1) ta được

$$2k(a+b) + 3l = k^2(a+b) + (k+1), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Đồng nhất hệ số hai vế ở đẳng thức trên, ta được

$$2k = k^2 \text{ và } 3l = (k+1)l.$$

Từ đó, ta được $k = 2$ và $l \in \mathbb{Z}$ là một hằng số.

Nhận xét.

(1) Bài toán 11 là một bài toán dễ và có thể được xem là một "hệ quả" trực tiếp của bài toán 10. Rõ ràng nếu ta thay giả thiết f là một hàm số đi từ $\mathbb{Z}$ vào $\mathbb{Z}$ bởi f là một hàm số đi từ $\mathbb{Q}$ vào $\mathbb{Q}$ hoặc f là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ hoặc f là một hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì kết quả của Bài toán 11 vẫn đúng. Có thể thấy rằng Bài toán 11 đã được xây dựng từ chính Bài toán 10.

(2) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\{f(x+y)\} = \{f(x)\} + \{f(y)\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong đó $[t]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá t và $\{t\} = t - [t]$.

ii) **(IMC 2010).** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y+xy) = f(x) + f(y) + f(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ đến với bài toán trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 (VMO) năm 2016.

Bài toán 12. (VMO 2016). Tìm tất cả các số thực a để tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

i) $f(1) = 2016$.

ii) Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + ay. \tag{2.3}$$

Lời giải. Nếu $a = 0$ thì từ (2.3) ta được

$$f(x + 2017) = f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, f là một hàm tuần hoàn chu kì 2017. Vì $f(1) = 2016$ nên

$$f(x) = 2016, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta xét trường hợp $a \neq 0$ thì trong (2.3) hoán vị vai trò của x và y ta được

$$f(x + y + f(x)) = f(y) + ax, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Nếu $f(x) = f(y)$ thì từ (2.3) và (2.4) ta suy ra $x = y$ hay f là một đơn ánh. Trong (2.3) cho $y = 0$ ta có

$$f(x + f(0)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là đơn ánh nên

$$x + f(0) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có $f(0) = 0$. Trong (2.3) thay $x = 0$, $y = 1$ ta được $a = f(2017)$. Tiếp tục thay y bởi $-\dfrac{f(x)}{a}$ trong (2.3) ta được

$$f\left(x - \frac{f(x)}{a} + f\left(\frac{-f(x)}{a}\right)\right) = f(x) - f(x) = 0 = f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì f là hàm đơn ánh nên

$$x - \frac{f(x)}{a} + f\left(\frac{-f(x)}{a}\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$f\left(\frac{-f(x)}{a}\right) = \frac{f(x)}{a} - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Trong (2.3) thay y bởi $-\dfrac{f(y)}{a}$ ta được

$$f\left(x - \frac{f(y)}{a} + f\left(\frac{-f(y)}{a}\right)\right) = f(x) - f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Sử dụng (2.5) kết hợp với (2.6) ta có

$$f\left(x + \frac{f(y)}{a} - y - \frac{f(y)}{a}\right) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f(x - y) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Trong (2.7) thay x bởi $x + y$ ta được

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ nhận xét của Bài toán 10 ta được

$$f(n) = nf(1) = 2016n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó

$$a = f(2017) = 2016 \cdot 2017.$$

Khi đó ta có hàm số $f(x) = 2016x$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Thật vậy, với

$$f(x) = 2016x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

thì

$$\begin{cases} f(1) = 2016 \\ f(x + y + f(x)) = 2016x + 2016.2017x = f(y) + ax, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy $a = 0$ và $a = 2016$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét.

1 Trong bài toán này để tính được giá trị của hàm số tại điểm $x = 0$ chúng ta đã sử dụng tính đơn ánh của hàm số. Việc nhận ra f đơn ánh là dễ dàng. Sau khi đã tính được $f(0)$ thì việc thế các giá trị như thế nào để có thể "tận dụng" được kết quả $f(0) = 0$ là tự nhiên. Chúng ta nhắc lại các tính chất cơ bản của một hàm số thường được dùng xuyên suốt trong các bài toán giải phương trình hàm. Hàm số f đi từ miền xác định $D \subset \mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ được gọi là đơn ánh nếu $f(x) = f(y)$ thì $x = y$ với $\forall x, y \in D$. Hàm số f được gọi là toàn ánh nếu với $z \in \mathbb{R}$ tồn tại $x \in D$ sao cho $z = f(x)$. Hàm số f là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.

(2) Trong Bài toán 12, ở trường hợp $a \neq 0$, ta đã chứng minh được f là một cộng tính và do đó kết quả của Bài toán 1 vẫn được sử dụng trong bài toán này. Nếu bài toán có thêm giả thiết f là một hàm số liên tục hoặc đơn điệu trên tập xác định thì ta có thể kết luận hàm số

$$f(x) = 2016x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

là nghiệm của phương trình trong trường hợp $a \neq 0$ vì hàm số f là một hàm cộng tính và $f(1) = 2016$. Chú ý rằng nếu phương trình hàm của bài toán là một phương trình có dạng "đối xứng" giữa các biến (ví dụ như Bài toán 12) ta thường dùng phép thế thay x bởi y và thay y bởi x, tức là hoán đổi vai trò của x, y trong phương trình ban đầu để có thể chứng minh được tính đơn ánh của nó.

Kết quả ở phần nhận xét của Bài toán 10 tiếp tục được sử dụng trong bài toán tiếp theo nằm trong Đề thi chọn đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán Quốc tế của Mỹ (USA TST) năm 2012.

Bài toán 13. (USA TST 2012). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x + y^2\right) = f(x) + |yf(y)|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (2.8). Thay $x = 0$ vào (2.8), ta được

$$f\left(y^2\right) = f(0) + |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Thay y bởi $-y$ vào (2.9), ta có

$$f\left(y^2\right) = f(0) + |-yf(-y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (2.9), ta được

$$|yf(y)| = |-yf(-y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$|f(y)| = |f(-y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

hay ta có

$$f^2(y) = f^2(-y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Thay x bởi $-y^2$ vào (2.8), ta được

$$f(0) = f\left(-y^2\right) + |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (2.9), ta được

$$f(0) = f\left(-y^2\right) + f\left(y^2\right) - f(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Điều này tương đương với

$$2f(0) = f\left(-y^2\right) + f\left(y^2\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$2f(0) = f(-x) + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Từ (2.10) và (2.11), ta có

$$[2f(0) - f(x)]^2 = f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đẳng thức trên, ta được

$$4f^2(0) - 4f(0)f(x) + f^2(x) = f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta có

$$f(0)[f(0) - f(x)] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì (2.12), ta được

$$f(x) = f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp kết quả này với (2.8), ta được

$$f(0) = f(0) + |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta có

$$|yf(y)| = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Điều này là vô lí. Như vậy, ta thu được

$$f(0) = 0.$$

Áp dụng kết quả này cho (2.9), ta được

$$f\left(y^2\right) = |yf(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Vì $f(0) = 0$ nên từ (2.11), ta có

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (2.8) và (2.13), ta được

$$f\left(x+y^2\right)=f(x)+f\left(y^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0. \tag{2.14}$$

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ và $\forall y<0$ ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= -f(-x-y) \\ &= -f(-x+(-y)) \\ &= -(f(-x)+f(-y)) \\ &= -(-f(x)-f(y)) \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (2.14) ta được

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, f là một hàm cộng tính. Từ (2.13) ta thấy rằng

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Do đó, với $\forall x \geq y$, ta có

$$f(x)=f(x-y+y)=f(x-y)+f(y) \geq f(y).$$

Điều này chứng tỏ, f là một hàm số tăng. Áp dụng nhận xét ở Bài toán 1, ta được

$$f(x)=a x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó a là một hằng số. Chú ý rằng $f(x) \geq 0$ với $\forall x \geq 0$. Từ đây, ta được $a \geq 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x)=ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong đó a là một hằng số không âm thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x)=a x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

với a là một hằng số không âm.

Nhận xét.

- Nếu "thoạt nhìn" vào Bài toán 13 thì ta cảm thấy một chút "băn khoăn" vì đây là phương trình hàm có chứa dấu giá trị tuyệt đối. Nhưng nếu quan sát kĩ thêm một chút, ta thấy rằng cả hai vế của phương trình này đều chứa các hàm chẵn đối với biến y. Điều này gợi ý ngay cho ta việc thay y bởi $-y$ trong phương trình (2.8), để từ đó thu được đẳng thức (2.10).

- Sau khi chứng minh đẳng thức (2.11), ta đã "coi" $f(x)$ và $f(-x)$ là những "biến số" của một hệ phương trình gồm hai phương trình (2.10) và (2.11). Từ đây, bằng phương pháp thế, ta đã tìm ra được đẳng thức quan trọng (2.12). Phần chứng minh f là một hàm cộng tính và đơn điệu ở phần cuối cùng là cơ bản và khá "quen thuộc".

- Dưới đây là một số bài toán liên quan.

  i) **(USA MO 2002).** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

  $$f\left(x^2-y^2\right)=xf(x)-yf(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

  ii) **(Olympic Romania 2006).** Giả sử r, $s\in\mathbb{Q}$ là hai số cho trước. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thỏa mãn

  $$f(x+f(y))=f(x+r)+y+s,\quad \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

  iii) **(IMO 1992).** Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

  $$f\left(x^2+f(y)\right)=y+(f(x))^2,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chúng ta thấy rằng cả ba Bài toán 11, 12 và 13 đều có chung một "mô hình" đó là chứng minh hàm số cần tìm là cộng tính và sử dụng những kết quả thu được ở Bài toán 10. Để kết thúc một lớp các bài toán có mô hình như vậy, chúng ta sẽ đến với bài toán sau đây nằm trong Đề thi chọn đội tuyển Quốc gia của Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế (VN TST) năm 2004.

Bài toán 14. (VN TST 2004). Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại duy nhất hàm số

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = [f(x)]^2 + ay, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Lời giải.

Ta thấy rằng nếu $a = 0$ thì có hai hàm số thỏa mãn phương trình (2.15) là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv 1$. Tiếp theo, chúng ta sẽ xét $a \neq 0$. Do vế phải là hàm bậc nhất theo y nên có tập giá trị là $\mathbb{R}$, do đó ta được

$$\left\{f\left(x^2 + y + f(y)\right) | y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}.$$

Điều này dẫn đến

$$\left\{x^2 + y + f(y) | y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}.$$

Do đó $\{f(y) | y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, hay f là toàn ánh. Vì vậy, tồn tại $b \in \mathbb{R}$ sao cho $f(b) = 0$. Ta sẽ chứng minh nếu $f(x) = 0$ thì $x = 0$. Từ (2.15) lấy $y = b$ ta được

$$f\left(x^2 + b\right) = [f(x)]^2 + ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Từ (2.16) thay x bởi $-x$ ta có

$$f\left(x^2 + b\right) = [f(-x)]^2 + ab, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2.16) ta được

$$[f(x)]^2 = [f(-x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này suy ra

$$|f(x)| = |f(-x)|, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Từ (2.17) suy ra $f(-b) = 0$. Từ (2.15) lấy $y = -b$ ta được:

$$f\left(x^2 - b\right) = [f(x)]^2 - ab, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

Từ (2.16) và (2.18) ta có

$$f\left(x^2 + b\right) - f\left(x^2 - b\right) = 2ab, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Từ (2.19) lấy $x = 0$ ta được

$$f(b) - f(-b) = 2ab$$

Vì $f(b) = f(-b)$ nên $2ab = 0$. Do đó ta phải có $b = 0$. Vậy ta thu được tính chất $f(0) = 0$ và nếu $f(x) = 0$ thì $x = 0$, cũng từ tính chất này ta có: nếu $x \neq 0$ thì $f(x) \neq 0$. Từ (2.15) cho $y = 0$ ta được:

$$f\left(x^2\right) = [f(x)]^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Từ (2.20) ta lấy $x = 1$ được

$$f(1) = f^2(1) \Rightarrow f(1) = 1.$$

Trong (2.15) cho $y = 1$ ta được:

$$f\left(x^2 + 2\right) = [f(x)]^2 + a = f\left(x^2\right) + a, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

Thay $x = 0$ vào (2.21) ta được $a = f(2)$. Do vậy

$$a^2 = f^2(2) = f\left(2^2\right) = f(4) = f\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\right) = f(2) + a = 2a.$$

Do đó, ta phải có $a = 2$. Khi đó (2.15) trở thành

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = [f(x)]^2 + 2y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Từ (2.22) lấy $y = -\dfrac{[f(x)]^2}{2}$ ta được:

$$f\left(x^2 - \frac{[f(x)]^2}{2} + f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right)\right) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy

$$x^2 - \frac{[f(x)]^2}{2} + f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f\left(-\frac{[f(x)]^2}{2}\right) = -x^2 + \frac{[f(x)]^2}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Từ (2.22) thay y bởi $-\frac{[f(y)]^2}{2}$ ta được:

$$f\left(x^2 - \frac{[f\,(y)]^2}{2} + f\left(-\frac{[f\,(y)]^2}{2}\right)\right) = [f\,(x)]^2 - [f\,(y)]^2,\ \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Từ (2.24) sử dụng (2.23) ta có

$$f\left(x^2 - \frac{[f\,(y)]^2}{2} - y^2 + f\left(-\frac{[f\,(y)]^2}{2}\right)\right) = [f\,(x)]^2 - [f\,(y)]^2,\ \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta được

$$f\left(x^2 - y^2\right) = f\left(x^2\right) - f\left(y^2\right),\ \forall x,\, y \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Từ (2.25) lấy $x = 0$ ta được

$$f\left(-y^2\right) = -f\left(y^2\right), \forall y \in \mathbb{R},$$

Từ đây, ta suy ra

$$f\,(t) = -f\,(-t)\,, \forall t \geq 0. \tag{2.26}$$

Với $t < 0$ thì $-t > 0$, sử dụng (2.26) ta thu được $f(-t) = -f(t)$. Kết hợp với (2.26) ta có

$$f(-t) = -f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

hay f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Từ đây kết hợp với (2.25) ta được:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \text{với} \quad x \geq 0, y \leq 0 \tag{2.27}$$

Từ (2.27) cũng có:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \text{với} \quad x \leq 0, y \geq 0. \tag{2.28}$$

Nếu $x > 0$ và $y > 0$ thì

$$f\,(x+y) = f\,(x - (-y)) = f\,(x) - f\,(-y) = f\,(x) + f\,(y)\,. \tag{2.29}$$

Nếu $x < 0$ và $y < 0$ thì theo (2.29) ta có $f(-x-y) = f(-x) + f(-y)$, suy ra

$$-f\,(x+y) = -f\,(x) - f\,(y) \Rightarrow f\,(x+y) = f\,(x) + f\,(y)\ \text{với}\ x < 0, y < 0. \tag{2.30}$$

Từ (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.31}$$

Sử dụng (2.20) và (2.31) ta có kết quả sau

$$[f(x+y)]^2 = f\left((x+y)^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} [f(x+y)]^2 &= [f(x) + f(y)]^2 \\ &= f^2(x) + 2f(x)f(y) + f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

và

$$\begin{aligned} f\left((x+y)^2\right) &= f\left(x^2 + 2xy + y^2\right) \\ &= f\left(x^2\right) + f(2xy) + f\left(y^2\right) \\ &= f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Từ (2.32), (2.33) và (2.34), ta có

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì $f\left(-y^2\right) = -f\left(y^2\right), \forall y \in \mathbb{R}$, nên

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Từ đó, với $x > y \geq 0$, ta được

$$f(x) - f(y) = f(x-y) > 0, \quad \forall x > y \geq 0.$$

Do f là một hàm lẻ nên điều này chứng tỏ rằng, f là một hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Từ tính cộng tính của hàm số f, ta được

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với tính chất nhân tính của hàm số f, ta thấy rằng

$$a = 0 \quad \text{hoặc} \quad a = 1.$$

Vì $f(1) = 1$ nên ta có

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện của bài toán. Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét.

(1) Bài toán này thuộc lớp các bài toán xác định tham số để phương trình hàm đã cho có nghiệm hoặc một lớp nghiệm mong muốn. Quan sát thấy rằng nếu $f(x) = x$ là nghiệm hàm thì sẽ dẫn đến $a = 2$. Và chúng ta mong muốn chứng minh rằng đây là hàm số duy nhất. Điều kiện về tính duy nhất nghiệm đã giúp ta loại bỏ được trường hợp $a = 0$.

(2) Chúng ta thấy rằng về mặt ý tưởng xây dựng, kết cấu cũng như hình thức, thì Bài toán số 14 và bài toán số 12 có nhiều nét tương đồng. Đây là một bài toán hay và khó, để giải quyết được bài toán này, học sinh phải nắm vững các tính chất cơ bản của hàm số, kết hợp với kinh nghiệm khi sử dụng các phép thế giải quyết các bài toán về phương trình hàm. Ở chứng minh phần cuối của bài toán, chúng ta tiếp tục sử dụng kết quả thu được từ Bài toán 10.

(3) Bài toán số 14 thực ra là kết quả tổng quát của bài toán dưới đây, được đăng trong phần đề ra kì này của tạp chí "The American Mathematical Monthly" năm 2001.
Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2 + y + f(y)\right) = [f(x)]^2 + 2y,$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Tiếp theo, chúng ta đi tới bài toán trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 (VMO) năm 2013.

Bài toán 15. (VMO 2013). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(0) = 0, f(1) = 2013 \tag{2.35}$$

$$(x-y)\left[f\left(f^2(x)\right)-f\left(f^2(y)\right)\right]=[f(x)-f(y)]\left[f^2(x)-f^2(y)\right] \tag{2.36}$$

đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ và $f^2(x)=(f(x))^2$.

Lời giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Từ (2.35) thay $x \neq 0$ và $y=0$, ta được

$$xf\left(f^2(x)\right)=f^3(x), \quad \forall x \neq 0.$$

Điều nay suy ra với $\forall x \neq 0$, ta có

$$f\left(f^2(x)\right)=\frac{f^3(x)}{x}, \quad \forall x \neq 0. \tag{2.37}$$

Thay (2.37) vào (2.35), với mọi $x \neq 0$, $y \neq 0$, ta được

$$(x-y)\left[\frac{f^3(x)}{x}-\frac{f^3(y)}{y}\right]=[f(x)-f(y)]\left[f^2(x)-f^2(y)\right]. \tag{2.38}$$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
&(x-y)\left[\frac{f^3(x)}{x}-\frac{f^3(y)}{y}\right]-[f(x)-f(y)]\left[f^2(x)-f^2(y)\right]\\
&=f^3(x)-\frac{xf^3(y)}{y}-\frac{yf^3(x)}{x}+f^3(y)-f^3(x)+f(x)f^2(y)+f(y)f^2(x)-f^3(y)\\
&=\left[f(x)f^2(y)-\frac{xf^3(y)}{y}\right]+\left[f(y)f^2(x)-\frac{yf^3(x)}{x}\right]\\
&=f^2(y)\left[f(x)-\frac{xf(y)}{y}\right]+f^2(x)\left[f(y)-\frac{yf(x)}{x}\right]\\
&=f^2(x)\frac{xf(y)-yf(x)}{x}-f^2(y)\frac{xf(y)-yf(x)}{y}\\
&=[xf(y)-yf(x)]\left[\frac{f^2(x)}{x}-\frac{f^2(y)}{y}\right], \quad \forall x \neq 0, y \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Kết hợp (2.38) và (2.39), ta được

$$[xf(y)-yf(x)]\left[xf^2(y)-yf^2(x)\right]=0, \quad \forall x \neq 0, y \neq 0. \tag{2.40}$$

Từ (2.40) thay $y=1$ ta có

$$(2013x-f(x))\left[2013^2x-f^2(x)\right]=0, \quad \forall x \neq 0. \tag{2.41}$$

Nếu $x < 0$ thì

$$2013^2x - f^2(x) < -f^2(x) < 0.$$

Khi đó, từ (2.41) ta được

$$f(x) = 2013x, \quad \forall x < 0.$$

Do đó, từ (2.40) thay $y = -1$ ta có

$$[-2013x + f(x)][2013^2x + f^2(x)] = 0, \quad x \neq 0. \tag{2.42}$$

Nếu $x > 0$ thì

$$2013^2x - f^2(x) > -f^2(x) > 0.$$

Khi đó, từ (2.42) ta được

$$f(x) = 2013x, \quad \forall x > 0.$$

Chú ý rằng $f(0) = 0$. Vì vậy, ta có $f(x) = 2013x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy rằng nếu $f(x) = 2013x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì khi đó

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, f(1) = 2013, \\ [f(x) - f(y)]\left[f^2(x) - f^2(y)\right] &= [2013x - 2013y]\left[2013^2x^2 - 2013^2y^2\right] \\ &= (x - y)\left[f\left(f^2(x)\right) - f\left(f^2(y)\right)\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = 2013x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét.

(1) Thông thường khi đứng trước một bài toán phương trình hàm, chúng ta thường "cố gắng" tìm được những giá trị đặc biệt của hàm số như $f(0), f(1), f(-1), ...$ với mục đích là tạo thêm "ràng buộc" cũng như dự đoán được "hình dáng" cũng như "tính chất" nghiệm "hàm" cần tìm. Nhưng đối với bài toán trên, giả thiết đã cho luôn $f(0) = 0$. Vì thế, ý tưởng đầu tiên khi giải bài toán là phải "lợi dụng" được $f(0) = 0$. Điều kiện này đã làm cho bài toán đơn giản hơn rất nhiều. Một câu hỏi được đặt ra cho bạn đọc là "nếu không có yếu tố $f(0) = 0$ thì chúng ta sẽ giải quyết bài toán trên như thế nào".

(2) Về điều kiện thứ hai của bài toán $f(1) = 1$, chúng ta có thể thấy rằng nó giúp cho bài

toán có hình thức đẹp hơn (khi có con số của năm thi xuất hiện trong đề thi) và cũng giúp học sinh có thêm phương án khi xử lý tình huống

$$[xf(y) - yf(x)]\left[xf^2(y) - yf^2(x)\right] = 0, \quad \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

Đây là một trong những "tình huống điển hình" thường xuyên xuất hiện trong các bài toán phương trình hàm của các đề thi học sinh Quốc gia. Nếu không có giả thiết $f(1) = 1$, chúng ta vẫn có thể hoàn toàn giải quyết trọn vẹn, nhưng lời giả sẽ phức tạp hơn lời giải được đưa ra ở trên. Từ (2.4), chúng ta có

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(x)}{x} \quad \text{hoặc} \quad \frac{f^2(x)}{x} = \frac{f^2(y)}{y}$$

với $\forall x \neq 0, y \neq 0$. Điều này giúp chúng ta có thể nhìn thấy ngay rằng một nghiệm của bài toán sẽ có dạng $f(x) = cx$. Vì một vế chỉ phụ thuộc vào x và một vế chỉ phụ thuộc vào y nên chúng phải bằng hằng số. Đây cũng chính là nội dung của kĩ thuật thường được sử dụng trong phương pháp thế có tên gọi là "phân ly biến số", kĩ thuật này bắt nguồn từ môn học "Phương trình vi phân" ở bậc Đại học. Nó tỏ ra vô cùng "tối ưu" khi giải quyết một số bài toán, ví dụ như bài toán dưới đây là đề thi Olympic Toán sinh viên Toàn Quốc năm 2011.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy\left(x^2+y^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đôi khi, trong một số bài toán về phương trình hàm, chúng ta không thể tính trực tiếp được các giá trị tại các điểm đặc biệt của hàm số, ta thường đặt chúng như là các tham số, ví dụ $f(0) = m$ rồi thế biến của phương trình bởi chính các giá trị của tham số này với mục tiêu là có thể tìm được chúng. Hơn nữa, để thực hiện được điều này, chúng ta cần phải chỉ ra một số tính chất của hàm số f như đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Bài toán tiếp theo xuất hiện trong Kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán năm 2005 sẽ minh họa cho kĩ thuật này.

Bài toán 16. (VMO 2005, bảng A). Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức:

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy \tag{2.43}$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải.

Giả sử $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (2.43). Đặt $f(0) = a$. Thế $x = y = 0$ vào (2.43) ta được

$$f(a) = a^2. \tag{2.44}$$

Thế $x = y$ vào (2.43) với lưu ý tới (2.44) ta được:

$$(f(x))^2 = x^2 + a^2, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.45}$$

Điều này suy ra $(f(x))^2 = (f(-x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ hay

$$(f(x) - f(-x))(f(x) + f(-x)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.46}$$

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$. Thế $y = 0$ vào (2.43) ta được:

$$f(f(x)) = af(x) - f(x) + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.47}$$

Thế $x = 0, y = -x$ vào (2.43) ta được:

$$f(f(x)) = af(-x) - f(-x) - a, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.48}$$

Từ (2.47) và (2.48) suy ra

$$a(f(-x) - f(x)) + f(x) + f(-x) = 2a, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.49}$$

Thế $x = x_0$ vào (2.49) ta được

$$f(x_0) = a. \tag{*}$$

Mặt khác, từ (2.45) suy ra nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1^2 = x_2^2$. Vì thế , từ (*) suy ra $x_0 = 0$, trái với giả thiết $x_0 \neq 0$. Mâu thuẫn chứng tỏ $f(x) \neq f(-x), \forall x \neq 0$. Do đó, từ (2.46) ta suy ra

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \neq 0 \tag{2.50}$$

Thế (2.50) vào (2.49)ta được: $a(f(x) - 1) = 0, \forall x \neq 0$. Suy ra $a = 0$, vì nếu ngược lại $a \neq 0$

thì $f(x) = 1, \forall x \neq 0$ trái với (2.50). Do đó, từ (2.45) ta có:

$$(f(x))^2 = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.51}$$

Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = x_0$. Khi đó, theo (2.47) ta phải có:

$$x_0 = f(x_0) = -f(f(x_0)) = -f(x_0) = -f(x_0) = -x_0.$$

Mâu thuẫn, do đó ta phải có

$$f(x) \neq x, \forall x \neq 0.$$

Vì vậy, từ (2.51) ta được $f(x) = -x_0, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm số tìm được ở trên thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Vậy hàm số

$$f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

là hàm số duy nhất cần tìm.

Nhận xét.

(1) Giống như bài toán trước, bài toán này chúng ta lại gặp một tình huống "quen thuộc" khi giải quyết các bài toán liên quan đến phương trình hàm là

$$[f\,(x) + x]\,[f\,(x) - x] = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đẳng thức trên, chúng ta chỉ có thể kết luận được rằng là giá trị của hàm f tại x và $-x$, chứ không thể suy ra được các hàm số thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi gặp trường hợp này chúng ta thường xử lý như sau, kiểm tra xem các hàm số $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ có thỏa mãn yêu cầu đề bài hay không, sau đó chứng minh ngoài hàm này ra không còn hàm nào khác thỏa mãn yêu cầu bài toán. Phương pháp thường dùng ở đây được dùng là phản chứng. Tìn huống này đã xuất hiện trong một bài phương trình hàm ở các kỳ thi VMO trước đó.

(2) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

i) **(VMO 2002 B).** Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(y - f(x)) = f\left(x^{2002} - y\right) - 2001yf(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii) **(Bài toán tổng quát của VMO 2002 B).** Cho số nguyên dương n. Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(y - f(x)) = f\left(x^{n+1} - y\right) - nyf(x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

iii) **(IMO 2008).** Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$\frac{[f(p)]^2 + [f(q)]^2}{f(r^2) + f(s^2)} = \frac{p^2 + q^2}{r^2 + s^2}, \quad \forall p, q, r, s > 0,$$

và $pq = rs$.

Bài tiếp theo nằm trong đề thi Chọn học sinh giỏi Quốc gia dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2014 (VNTST 2014), có cùng "ý tưởng" tìm ra giá trị $f(0)$ như Bài toán số 16.

Bài toán 17. (VNTST 2014). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.52}$$

Lời giải. Giả sử $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài. Đặt $a = f(0)$. Giả sử $f \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó từ (2.52), chúng ta thấy rằng

$$m = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Điều này là vô lý, do đó $f \equiv 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Vì vậy tồn tại $q \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(q) \neq 0$. Thay $m = q$ vào đẳng thức (2.52) ta được

$$f(2q + f(q) + f(q)f(n)) = nf(q) + q, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.53}$$

Nếu $f(n_1) = f(n_2)\ \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ thì từ (2.53), chúng ta được $n_1 = n_2$. Do đó, f là một hàm đơn ánh. Thay $n = 0$ vào (2.53), ta được

$$f(2m + (a+1)f(m)) = m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.54}$$

Với $\forall m \in \mathbb{Z}$, tồn tại $u = 2m + (a+1)f(m) \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn rằng $f(u) = m$. Do đó, f là một toàn ánh. Vì vậy tồn tại $b \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(b) = -1$. Thay $m = n = b$ vào (2.52), ta được $f(2b) = 0$. Thay $m = n = 0$ vào (2.52), ta cũng có $f(a^2 + a) = 0$. Do đó, ta có

$$f(a^2 + a) = 0 = f(2b).$$

Vì f là một đơn ánh, ta được

$$b = \frac{a^2 + a}{2}.$$

Mặt khác, thay $n = b$ vào (2.52), ta được

$$f(2m) = \frac{a^2 + a}{2} f(m) + m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2.55}$$

Thay m = 0 vào (2.52), ta được

$$f\left(af(n) + a\right) = an, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Thay $m = an$ vào (2.54) rồi kết hợp với đẳng thức trên, ta suy ra

$$(a+1)f(an) + 2an = af(n) + a, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.56}$$

Thay $n = b$, ta được

$$\frac{a(a^2 + a)}{2} = f(0) = a,$$

do đó ta có $a \in \{0, 1, -2\}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1$ thì từ (2.56), ta được

$$f(n) = 1 - 2n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

  Tuy nhiên, hàm số này không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- Nếu $a = 0$ thì từ (2.55), ta có

$$f(2m) = m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với kết quả (2.54), ta được

$$f(m) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

vô lý theo chứng minh ở trên.

- Nếu $a = -2$, thì từ (2.56) ta có

$$f(-2n) + 4n = 2f(n) + 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Từ (2.55), ta được

$$f(-2n) = f(-n) - n.$$

Do đó, ta có

$$f(-n) + 3n = 2f(n) + 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Thay n bởi $-n$ vào đẳng thức trên, ta cũng có

$$f(n) - 3n = 2f(-n) + 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp hai điều này lại, ta suy ra $f(n) = n - 2, \forall n \in \mathbb{Z}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy hàm số cần tìm là

$$f(n) = n - 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét. Ở bài toán trên nếu chúng ta dự đoán được nghiệm hàm là $f(n) = n - 2$ thì chúng ta sẽ có những định hướng rất rõ ràng trong thế biến để tìm ra được các giá trị đặc biệt. Đứng trước một bài toán phương trình hàm, chúng ta luôn "mò mẫm" tìm nghiêm trong lớp các hàm đa thức. Quan sát thấy rằng, nếu $f(n)$ là một hàm đa thức thì bậc của $f(n)$ phải nhỏ hơn hoặc bằng 1 vì nếu không vế trái của phương trình hàm ban đầu sẽ có bậc lớn hơn vế phải. Từ kết quả này chúng ta đặt $f(n) = an + b$ rồi thay vào (2.22), ta sẽ tìm được $a = 1$, và $b = -2$. Rõ ràng nếu chúng ta tính được $f(0)$ thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản. Nhưng $f(0)$ không thể tính được trực tiếp thông qua các phép thế các giá trị đặc biệt nên ở đây chúng ta đã phải đặt $a = f(0)$. Tính chất đơn ánh và toàn ánh được nhận thấy khá dễ dàng và nó là một công cụ đắc lực trong việc hỗ trợ chúng ta tìm được a. Từ cách giải trên, chúng ta có thể nhận ngay rằng kết quả bài toán đúng trên cả tập thực $\mathbb{R}$.

Bài toán 18. (IMO 2015). Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.57}$$

Lời giải. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, khi đó ta có (2.57). Thay $y = 1$ vào (2.57), ta được

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.58}$$

Từ đẳng thức trên, ta thấy rằng $x + f(x + 1)$ là một điểm bất động của hàm số f với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Chúng ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $f(0) \neq 0$. Thay $x = 0$ vào (2.57), ta có

$$f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Nếu y_0 là một điểm cố định của f thì khi đó thay y bởi y_0 vào đẳng thức trên, ta được

$$y_0 + f(0) = f\left(f\left(y_0\right)\right) + f(0) = y_0 + y_0 f(0).$$

Vì $f(0) \neq 0$ nên ta có $y_0 = 1$. Do đó, từ (2.58), ta được

$$x + f(x + 1) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$f(x) = 2 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2. Từ (2.57), thay $y = 0$ và thay x bởi $x + 1$, ta được

$$f(x + f(x + 1) + 1) = x + f(x + 1) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.59}$$

Thay $x = 1$ vào (2.57), ta có

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + yf(1). \tag{2.60}$$

Vì $f(0) = 0$ nên thay $x = -1$ vào (2.58), ta được $f(-1) = -1$.

Khi đó, thay (2.60), ta được $f(1) = 1$.

Do đó, từ (2.60), ta có

$$f(1+f(y+1))+f(y)=1+f(y+1)+y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.61}$$

Từ đẳng thức trên, ta thấy rằng nếu y_0 và y_0+1 là những điểm cố định của hàm số f thì khi đó

$$f(y_0+2)=f(1+f(y_0+1))=1+f(y_0+1)+y_0-f(y_0)=y_0+2.$$

Điều này chứng tỏ rằng y_0+2 cũng là một điểm cố định của hàm số f. Vì vậy, từ (2.58) và (2.59), ta được $x+f(x+1)+2$ là một điểm bất động của hàm số f với mỗi $x \in \mathbb{R}$, nghĩa là

$$f(x+f(x+1)+2)=x+f(x+1)+2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $x-2$ vào đẳng thức trên, ta được

$$f(x+f(x-1))=x+f(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, thay $y=-1$ vào (2.57), ta có

$$f(x+f(x-1))=x+f(x-1)-f(x)-f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$f(-x)=-f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x=-1$ và y bởi $-y$ vào (2.57) và sử dụng kết quả $f(-1)=-1$, ta được

$$f(-1+f(-y-1))+f(y)=-1+f(-y-1)+y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vì f là một hàm số lẻ nên phương trình trên trở thành

$$-f(1+f(y+1))+f(y)=-1-f(y+1)+y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức này với (2.61), ta được

$$f(x)=x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy các hàm số $f(x) = 2 - x$ và $f(x) = x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy các hàm số cần tìm là

$$f(x) = x \text{ và } f(x) = 2 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét.

(1) Bài toán trên thuộc lớp các phương trình hàm với biến tự do. Trong cách giải trên, chúng ta đã vận dụng một cách linh hoạt các điểm bất động của hàm số f. Việc tìm ra nghiệm $f(x) = 2 - x$ trong trường hợp $f(0) \neq 0$ là dễ dàng. Trong trường hợp $f(0) = 0$, mấu chốt là chúng ta cần chứng minh được f là một hàm số lẻ. Để chứng minh điều này, đầu tiên ta đã làm xuất hiện đồng thời cả $f(x)$ và $f(-x)$ bằng việc thay $y = -1$ vào (2.57). KHi đó, ta đã thu được đẳng thức

$$f(x + f(x-1)) = x + f(x-1) - f(x) - f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, để chứng minh f là hàm số lẻ ta chỉ cần chứng minh

$$f(x + f(x-1)) = x + f(x-1).$$

Nếu chúng ta cố gắng chứng minh đẳng thức này thì sẽ khó khăn vì nó không có sự liên kết với các kết quả đã thu được từ phía trước. Hơn nữa, chúng ta đã chỉ ra được 1 và $x + f(x+1)$ là những điểm bất động của hàm số f. Chính những kết quả này đã gợi ý chúng ta tịnh tiến x lên 2 đơn vị để viết đẳng thức trên lại thành

$$f(x + 2 + f(x+1)) = x + 2 + f(x+1).$$

Đó chính là lí do chúng ta cần chứng minh khẳng định "Nếu y_0 và $y_0 + 1$ là những điểm cố định của hàm số f thì $y_0 + 2$ cũng là một điểm cố định của hàm số f." Như vậy, ở trong lời giải trên chúng ta đã vận dụng một cách "triệt để" các điểm bất động của hàm số f.

(2) Dưới đây là một số bài toán liên quan.

(i) **(IMO 1983).** Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

a) $f\left(xf\left(y\right)\right) = yf\left(x\right), \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(ii) **(IMO 1994).** Gọi τ là tập hợp các số thực lớn hơn -1. Tìm tất cả các hàm số $f : \tau \to \tau$ thỏa mãn điều kiện

a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ với mọi $x, y \in \tau$.

b) $\frac{f(x)}{x}$ tăng ngặt trên khoảng $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Bài toán 19. (Olympic Toán học Châu Âu dành cho nữ năm 2012). Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1), \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{2.62}$$

Lời giải. Để cho thuận tiện, chúng ta sẽ sử dụng kí hiệu $P(u, v)$ chỉ việc thay x bởi u và thay y bởi v vào (2.62). Ví dụ $P(1, 1)$ là chỉ việc thay $x = 1$ và $y = 1$ vào (2.62). Giả sử $\frac{f(y)-1}{y-1} > 0$, khi đó với phép thay $P\left(\dfrac{f(y) - 1}{y - 1}, y\right)$, ta được

$$f\left(\frac{yf(y) - 1}{y - 1}\right) = yf\left(\frac{yf(y) - 1}{y - 1}\right), \quad \forall y \in (0; +\infty). \tag{2.63}$$

Điều này chứng tỏ rằng $y = 1, \forall y \in (0; +\infty)$. Đây là điều vô lý. Do đó

$$\frac{f(y) - 1}{y - 1} < 0, \ \ \forall y \in (0; +\infty) \setminus \{1\}. \tag{2.64}$$

Xét $y > 1$. Với phép thay $P\left(1 - \dfrac{1}{y}, y\right)$, ta có

$$f\left(1 - \frac{1}{y} + f(y)\right) = yf(y), \ \ \forall y > 1. \tag{2.65}$$

Ta xét các trường hợp dưới đây.
Nếu $f(y) > \dfrac{1}{y}$ thì $1 + f(y) - \dfrac{1}{y} > 1$. Do đó, ta có

$$f\left(1 + f(y) - \frac{1}{y}\right) = yf(y) > 1 \quad , \forall y > 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.64).

Nếu $f(y) < \dfrac{1}{y}$ thì $0 < 1 + f(y) - \dfrac{1}{y} < 1$. Do đó, ta có

$$f\left(1 + f(y) - \frac{1}{y}\right) = yf(y) < 1, \quad \forall y > 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.64). Từ hai trường hợp trên ta kết luận rằng

$$f(y) = \frac{1}{y}, \quad \forall y > 1.$$

Bây giờ, xét $x > 0$, ta có

$$\frac{1}{1 + f(x)} = f(1 + f(x)) = xf(x + 1) = \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Điều này suy ra rằng

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Nhận xét.

(1) Nhiều bạn học sinh sau khi đọc lời giải, sẽ tự đặt ra câu hỏi, bắt nguồn từ đâu chúng ta có thể tìm được phép thế "triệt tiêu" như vậy. Quan sát phương trình, chúng ta khá dễ dàng dự đoán được

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Chú ý rằng, để có $f(x + f(y)) = f(xy + 1)$ ta sẽ xét phương trình

$$x + f(y) = xy + 1$$

Điều này dẫn đến

$$x = \frac{f(y) - 1}{y - 1}.$$

Do chúng ta đã dự đoán được

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$$

nên ta cần chứng minh $yf(y) = 1$. Vậy từ (2.62) ta thấy rằng cần có

$$yf(xy+1) = yf(y),$$

vì thế ta cần xét

$$xy + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{y} = 1 - \frac{1}{y}.$$

Một kinh nghiệm khi giải các phương trình có sử dụng phép thế triệt tiêu đó là : Nếu muốn khử hai vế của phương trình $f(\phi(x,y))$, $f(\omega(x,y))$ ở hai vế của phương trình hàm ta xét phương trình

$$\phi(x,y) = \omega(x,y),$$

khi đó ta tìm được $y = \lambda(x)$ rồi thay $y = \lambda(x)$ vào phương trình hàm cần xét.

(2) Ngoài cách giải đã nêu ở trên, chúng ta có thể sử dụng kĩ thuật thế sau để có thể tìm nghiệm hàm của phương trình. Xét $x > 1$.

$$P\left(\frac{x-1}{x}, f(x)\right) \Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right) = xf(x), \quad \forall x > 1. \tag{2.66}$$

Thực hiện $P\left(x, \frac{x-1}{x} + f(x)\right)$ ta được:

$$f\left(x + f\left(\frac{x-1}{x} + f(x)\right)\right) = \left[\frac{x-1}{x} + f(x)\right] f(x + xf(x)), \quad \forall x > 1. \tag{2.67}$$

Từ (2.66) và (2.67) suy ra:

$$\frac{x-1}{x} + f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{x-1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 1. \tag{2.68}$$

Đến đây làm tương tự như cách 1. Như đã nói ở phần mở đầu, cũng như một số ví dụ đã nêu, phương pháp thế "bao trùm" lên tất cả các phương pháp khác. Phần lớn khi giải phương trình hàm ta đều cần phải thế biến. Vì thế đây là một phương pháp vô cùng quan trọng. Để kết thúc bài viết, chúng ta sẽ đi đến một ví dụ có sự phối hợp của nhiều phương pháp, nhưng "trung tâm" của cách giải phương trình hàm vẫn là phương pháp thế.

Bài toán 20. (IMO 2017). Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực x và

y,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy). \tag{2.69}$$

Lời giải. Giả sử $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn phương trình (2.69). Ta nhận thấy rằng $-f(x)$ cũng là hàm số thỏa mãn phương trình (2.69). Thật vậy,

$$-f(-f(x) \cdot -f(y)) - f(x+y) = -[f(f(x)f(y)) + f(x+y)] = -f(xy).$$

Do đó, không mất tính tổng quát, kể từ bây giờ, chúng ta sẽ giả sử rằng $f(0) \leq 0$. Quan sát thấy rằng, với một điểm cố định $x \neq 1$, chúng ta có thể chọn $y \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x + y = xy,$$

tương đương với

$$y = \frac{x}{x-1}$$

và do đó từ đẳng thức (2.69), ta có

$$f\left(f(x) \cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0 \quad (x \neq 1). \tag{2.70}$$

Thay $x = 0$ vào (2.70), ta được

$$f(f(0) \cdot f(0)) = f\left(f^2(0)\right) = 0.$$

Chúng ta xét hai trường hợp sau (chú ý rằng $f(0) \leq 0$):

Trường hợp 1: $f(0) = 0$. Khi đó, thay $y = 0$ vào (2.69), ta được

$$f(f(0) \cdot f(0)) = f\left(f^2(0)\right) = 0.$$

Do đó

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $f(0) < 0$. Ta sẽ chứng minh rằng nếu $f(a) = 0$ với $a \in \mathbb{R}$ thì khi đó $a = 1$. Thật vậy, giả sử $a \neq 1$. Khi đó, thay $x = a$ vào (2.70), ta được

$$0 = f\left(f(a) \cdot f\left(\frac{a}{a-1}\right)\right) = f(0).$$

Điều này là vô lí vì chúng ta đang xét trường hợp $f(0) < 0$. Vì vậy $a = 1$. Điều này suy ra $f^2(0) = 1$. Thay $y = 1$ vào (2.69), ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(x)f(1)) + f(x+1) \\ &= f(0) + f(x+1) \\ &= -1 + f(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.71}$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(x+n) = f(x) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2.72}$$

bằng phương pháp quy nạp toán học theo n. Với $n = 1$, từ (2.71) ta thấy rằng đẳng thức (2.72) đúng. Giả sử (2.72) đúng với $n = k > 1$, nghĩa là

$$f(x+k) = f(x) + k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, ta có

$$f(x+k+1) = f(x+1+k) = f(x+1) + k = f(x) + 1 + k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, đẳng thức (2.72) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, đẳng thức (2.72) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ (2.72), ta có

$$f(x) = f(x-n+n) = f(x-n) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đẳng thức này, ta được

$$f(x+(-n)) = f(x-n) = f(x) + (-n), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Kết hợp với (2.72), ta được

$$f(x+n) = f(x) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.73}$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh rằng f là một đơn ánh. Giả sử rằng $f(a) = f(b)$ với $a \neq b$.

Khi đó, theo (2.73), với mọi $N \in \mathbb{Z}$,

$$f(a+N+1) = f(b+N)+1. \tag{2.74}$$

Chọn số nguyên N tùy ý sao cho $N < -b$. Xét phương trình bậc hai ẩn X

$$X^2 - (a+N+1)X + b + N = 0.$$

Ta thấy rằng

$$(a+N+1)^2 \geq 0 > 4(b+N).$$

Do đó, phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_0, y_0. Hơn nữa, theo định lý Vi-ét chúng thỏa mãn

$$x_0 + y_0 = a+N+1 \text{ và } x_0y_0 = b+N.$$

Chú ý rằng

$$(x_0-1)(y_0-1) = x_0y_0 - x_0 - y_0 + 1 = b+N-a-N-1+1 = b-a \neq 0.$$

Do đó, $x_0 \neq 1$ và $y_0 \neq 1$. Thay $x = x_0$ và $y = y_0$ vào (2.69), ta được

$$f(b+N) = f(x_0y_0) = f(f(x_0)f(y_0)) + f(x_0+y_0) = f(f(x_0)f(y_0)) + f(a+N+1).$$

Kết hợp điều này với (2.73) và (2.74), ta có

$$f(f(x_0)f(y_0)+1) = f(f(x_0)f(y_0)) + 1 = 0.$$

Đẳng thức trên suy ra

$$f(x_0)f(y_0) = 0.$$

Điều này là vô lý vì $f(x_0) \neq 0$ và $f(y_0) \neq 0$ do $x_0 \neq 1$ và $y_0 \neq 1$. Vì vậy ta phải có nếu $f(a) = f(b)$ thì $a = b$. Do đó, f là một đơn ánh. Với $\forall t \in \mathbb{R}$, thay x bởi t và y bởi t trong (2.69) ta được

$$f(f(t)f(-t)) + f(0) = f\left(-t^2\right).$$

Kết hợp đẳng thức này với (2.73), ta được

$$f(f(t)f(-t)) = f\left(-t^2\right) + 1 = f\left(-t^2 + 1\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vì f là đơn ánh nên ta có

$$f(t)f(-t) = -t^2 + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tiếp theo, thay x bởi t và y bởi $1 - t$, ta được

$$f(t(1-t)) = f(f(t)f(1-t)) + f(1) = f(f(t)f(1-t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do f là đơn ánh nên ta có

$$f(t)f(1-t) = t(1-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng $f(1-t) = 1 + f(-t)$ theo (2.73). Do đó, ta được

$$\begin{aligned} t(1-t) &= f(t)f(1-t) \\ &= f(t)[1 + f(-t)] \\ &= f(t) + f(t)f(-t) \\ &= f(t) - t^2 + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta có

$$f(t) = t - 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy rằng các hàm số $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ và $f(x) = -x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nhận xét.

(1) Đây là một bài toán phương trình hàm khó khi tất cả các biến đều nằm trong biểu thức hàm. Một "thủ thuật nhỏ" mà chúng ta thường dùng khi đứng trước các bài toán phương trình hàm đó là dự đoán nghiệm hàm. Đối với bài toán này, sau khi thay $f(x) = ax + b$ trong đó a và b là các số thực, vào đẳng thức (2.69), ta sẽ thu được ba nghiệm hàm là $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ và $f(x) = -x + 1$. Điều này cho ta những định hướng tiếp theo để tiếp cận bài toán, cụ thể từ đây ta có thể nhận thấy nếu $f(x)$ là một nghiệm cần tìm thì $-f(x)$ cũng là một nghiệm và ta sẽ dự đoán được rằng $f(x)$ sẽ là một đơn ánh.

(2) Trong bài toán này, ý tưởng bật ra ngay từ đầu, đó là làm thế nào có thể triệt tiêu bớt các biểu thức hàm. Rõ ràng là điều này hoàn toàn có thể làm được bằng việc sử dụng "phép thế triệt tiêu". Cụ thể ở đây chúng ta đã tìm y sao cho $xy = x + y$ với x là một giá trị cố định nào đó. Để từ đó ta có thể khử được $f(x + y)$ và $f(xy)$ ở hai vế và việc tính giá trị $f(0)$ trở nên đơn giản hơn.

(3) Mấu chốt trong chứng minh trên là ở việc chỉ ra f là một hàm số đơn ánh. Nó là "không mẫu mực" như các bài toán phương trình hàm với biến tự do. Sau khi chứng minh được f là hàm số đơn ánh thì mọi thứ đã trở nên "đơn giản". Đến đây, chúng ta chỉ cần thay những giá trị của x và y sao cho lợi dụng được tính đơn ánh của hàm f và những tính chất trước đó.

(4) Ngoài cách giải "khá tự nhiên" ở trên, trong trường hợp $f(0) < 0$, chúng ta có thể đưa ra một cách giải khác như sau. Đầu tiên, ta cũng chỉ ra

$$f(1) = 0, \quad f(a) = 0 \Rightarrow a = 1, \quad f(0) = -1$$

và

$$f(x + n) = f(x) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Tương tự như cách chứng minh trên, tiếp theo ta đặt

$$g(x) = f(x) + 1.$$

Từ những kết quả đã nói ở trên với hàm f ta thấy rằng

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Thay x bởi $x + 1$ và y bởi $y + 1$ trong (2.69), ta được

$$f(f(x + 1)f(y + 1)) + f(x + y + 2) = f(xy + x + y + 1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức này với (2.73) ta có

$$f(f(x + 1)f(y + 1)) + f(x + y) + 2 = f(xy + x + y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$g(g(x)g(y)) + g(x+y) = g(xy+x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.75}$$

Ta thấy rằng

$$g(x+n) = f(x+n) + 1 = f(x) + n + 1 = g(x) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.76}$$

Từ đẳng thức trên, ta được

$$g(x) = g(x-n+n) = g(x-n) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Vì vậy

$$g(x) = n \Leftrightarrow g(x-n) = 0 \Leftrightarrow x - n = 0 \Leftrightarrow x = n. \tag{2.77}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$g(nx) = ng(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.78}$$

Ta có thể giả sử rằng $x \neq 0$ vì kết quả cần chứng minh ở trên là hiển nhiên nếu $x = 0$. Thay y bởi $\dfrac{n}{x}$, trong (2.75) kết hợp với (2.76) ta được

$$g\left(g(x)g\left(\frac{n}{x}\right)\right) + g\left(x + \frac{n}{x}\right) = g\left(n + x + \frac{n}{x}\right) = g\left(x + \frac{n}{x}\right) + n.$$

Từ đẳng thức trên và (2.77) , ta có

$$g\left(g(x)g\left(\frac{n}{x}\right)\right) = n \Leftrightarrow g(x)g\left(\frac{n}{x}\right) = n.$$

Do đó, với mọi $x \neq 0$ ta có

$$g(x) = \frac{n}{g\left(\dfrac{n}{x}\right)}.$$

Thay x bởi nx ở đẳng thức trên ta được

$$g(nx) = \frac{n}{g\left(\dfrac{1}{x}\right)} = ng(x).$$

Vì vậy, đẳng thức (2.78) được chứng minh. Từ đẳng thức này, ta thấy rằng $g(x)$ là một hàm số lẻ. Thay x bởi $-x$ và y bởi $-y$ trong (2.75), ta có

$$g(g(x)g(y)) - g(x+y) = -g(-xy+x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (2.75) và (2.78), ta được

$$g(2(x+y)) = 2g(x+y) = g(xy+x+y) + g(-xy+x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.79}$$

Mặt khác, với mọi số thực a, b thỏa mãn $a^2 \geq 4b$, theo định lý Vi-ét đảo, tồn tại các số thực x, y sao cho

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = xy \end{cases}$$

Điều này suy ra

$$\begin{cases} a + b = xy + x + y \\ a - b = -xy + x + y \end{cases}$$

Do đó, từ đẳng thức (2.79) , ta thấy rằng với mọi số thực a, b thỏa mãn $a^2 \geq 4b$ thì

$$g(a+b) + g(a-b) = 2g(a).$$

Rõ ràng, phương trình trên đúng với mọi $b \leq 0$ vì $a^2 \geq 0 \geq b$. Chú ý rằng biểu thức ở vế trái của phương trình trên đối xứng giữa b và $-b$ nên phương trình trên cũng thỏa mãn trong trường hợp $b > 0$. Vì vậy

$$g(a+b) + g(a-b) = 2g(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ g là một hàm số cộng tính. Thay $y = 1$ vào (2.75) và sử dụng (2.76) và (2.78) ta được

$$g(g(x)g(1)) + g(x+1) = g(2x+1) \Leftrightarrow g(g(x)) + g(x) + 1 = 2g(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đẳng thức này suy ra

$$g(g(x)) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ tính chất cộng tính của hàm số g, ta có

$$g(g(x) - x) = g(g(x)) - g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta được

$$g(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta có

$$f(x) = x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chương 3

MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Bài toán 21. (Đề dự tuyển IMO 2007). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Lời giải. Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$f(y) > y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Từ (3.1), ta được

$$f(x + f(y)) > f(x + y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Điều này chứng tỏ rằng $f(y) \neq y$. Nếu $f(y) < y$ với mỗi $y \in \mathbb{R}$, khi đó thay x bởi $y - f(y)$ trong (3.1), ta có

$$f(y) = f((y - f(y) + f(y))) = f(y - f(y) + y) + f(y) > f(y).$$

Điều này là vô lý. Vì vậy, ta được

$$f(y) > y, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Đặt $g(x) = f(x) - x$ thì khi đó $f(x) = g(x) + x$. Từ kết quả trên, chúng ta thấy rằng

$$g(x) > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Ta sẽ chứng minh hệ thức sau bằng phương pháp quy nạp toán học theo n

$$f(t+ng(y)) = f(t) + nf(y), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > y > 0. \tag{3.2}$$

Với số thực t tùy ý $t > y > 0$, thay x bởi $t-y$ vào (3.1), ta được

$$f(t-y+f(y)) = f(t+g(y)) = f(t) + f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Điều này chứng tỏ rằng đẳng thức (3.2) đúng với $n = 1$. Giả sử đẳng thức (3.2) đúng với $n = k$, với $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$f(t+kg(y)) = f(t) + kf(y), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > y > 0.$$

Với $t > 0$, thay x bởi $t - y + kf(y)$ vào (3.1), ta được

$$\begin{aligned} f(t+(k+1)g(y)) &= f(t-y+kg(y)+f(y)) \\ &= f(t+kg(y)) + f(y) \\ &= f(t) + kf(y) + f(y) \\ &= f(t) + (k+1)f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Do đó đẳng thức (3.2) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức (3.2) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy, ta đã chứng minh được đẳng thức (3.2). Lấy hai số thực dương tùy ý y, $z$và một số thực cố định $t > \max\{y, z\}$. Với mỗi số nguyên dương k, ta đặt

$$\ell_k = \left\lfloor k\frac{g(y)}{g(z)} \right\rfloor.$$

Khi đó, ta có

$$k\frac{g(y)}{g(z)} \geq \ell_k.$$

Điều này suy ra

$$t + kg(y) - \ell_k g(z) \geq t > z.$$

Do đó, áp dụng (3.2) ta được

$$f\left(t + kg(y) - \ell_k g(z)\right) + \ell_k f(z) = f(t+kg(y)) = f(t) + kf(y).$$

Từ đẳng thức này ta suy ra

$$0 < \frac{1}{k} f\left(t + kg(y) - \ell_k g(z)\right) = \frac{f(t)}{k} + f(y) - \frac{\ell_k}{k} f(z).$$

Vì $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ nên

$$\frac{g(y)}{g(z)} - \frac{1}{k} = \frac{k\dfrac{g(y)}{g(z)} - 1}{k} \leq \frac{\left\lfloor k\dfrac{g(y)}{g(z)} \right\rfloor}{k} = \frac{\ell_k}{k} \leq \frac{g(y)}{g(z)}.$$

Chú ý rằng

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{g(y)}{g(z)} - \frac{1}{k} \right) = \lim_{k\to+\infty} \frac{g(y)}{g(z)} = \frac{g(y)}{g(z)}.$$

Vì vậy, theo nguyên lý kẹp ta có

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ell_k}{k} = \frac{g(y)}{g(z)}.$$

Sử dụng kết quả này, ta được

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{k\to+\infty} \left[\frac{1}{k} f\left(t + kg(y) - \ell_k g(z)\right) \right] \\ &= \lim_{k\to+\infty} \left[\frac{f(t)}{k} + f(y) - \frac{\ell_k}{k} f(z) \right] \\ &= f(y) - \frac{g(y)}{g(z)} f(z) \\ &= f(y) - \frac{f(y) - y}{f(z) - z} f(z). \end{aligned}$$

Do đó

$$f(y)[f(z) - z] \leq f(z)[f(y) - y].$$

Điều này suy ra

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(z)}{z}.$$

Hoán vị vai trò của y và z trong bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{f(z)}{z} \leq \frac{f(y)}{y}.$$

Vì vậy, ta có

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(z)}{z}.$$

với y và z là những số thực dương tùy ý. Kết quả này chứng tỏ rằng $\frac{f(x)}{x}$ là một hằng số. Do đó, ta được

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

với $c > 0$. Thay kết quả này trở lại (3.1) ta được

$$cx + c^2y = cx + 2cy, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Do $c > 0$ nên từ đẳng thức trên ta được $c = 2$. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 22. (Olympic Toán Iran 2018, vòng 2). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)f\left(x^2 - xy + y^2\right) = x^3 + y^3 \tag{3.3}$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn đề bài. Thay $y = 0$ vào (3.3), ta được

$$f(x)f\left(x^2\right) = x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Thay $x = 0$ vào (3.4) ta được $f(0) = 0$. Thay $x = 1$ vào (3.4) ta nhận được

$$f(1) = 1 \quad \text{hoặc} \quad f(1) = -1.$$

Nếu $f(1) = 1$ thì đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, từ (3.4) ta có

$$g(x)g(x^2) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.5}$$

Trong (3.5), thay x bởi $-x$, ta được

$$g(-x)g(x^2) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.6}$$

Từ (3.5) và (3.6) suy ra g là hàm số chẵn trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trong (3.3), ta thay y bởi $1 - x$ thì được

$$f\left(3x^2 - 3x + 1\right) = 3x^2 - 3x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng tập giá trị của hàm số $h(x) = 3x^2 - 3x + 1$ trên $\mathbb{R}$ là $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ nên

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Do đó

$$g(x) = 1, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Ta sẽ chứng minh

$$g(x) = 1, \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{4}\right).$$

Giả sử tồn tại số thực a thuộc $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ mà $g(a) \neq 1$. Trong (3.5), thay $x = \sqrt{a}$, ta được

$$g(a)g(\sqrt{a}) = 1.$$

Trong (3.5), ta lại cho $x = \sqrt[4]{a}$ được

$$g(\sqrt{a})g(\sqrt[4]{a}) = 1.$$

Do đó $g(a) = g(\sqrt[4]{a})$. Bằng phương pháp quy nạp, ta thu được

$$g(a) = g(\sqrt[2^n]{a}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Vì $0 < a < \frac{1}{4}$ nên tồn tại số nguyên dương N sao cho $\sqrt[2^N]{a} \geq \dfrac{1}{4}$. Dẫn đến $g(\sqrt[2^N]{a}) = 1$ hay $g(a) = 1$. Điều này mâu thuẫn. Vì vậy, $g(x) = 1$ với mọi số thực x khác 0. Mặt khác $f(0) = 0$ nên

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $f(1) = -1$ thì bằng cách đặt $h(x) = -f(x)$ và theo trường hợp trên, ta tìm được

$$f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, hai hàm số tìm được đều thỏa mãn (3.3). Vậy bài toán có đúng hai nghiệm hàm là

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

và

$$f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 23. (Olympic Toán châu Á Thái Bình Dương 2016). Hãy tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x) \tag{3.7}$$

với mọi số thực dương x, y, z.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn đề bài. Ta cho $x = y = 1$ vào (3.7) được

$$(z+1)f(2) = 2f(f(z)+1), \quad \forall z \in \mathbb{R}^+.$$

Do đó, hàm f không bị chặn trên. Ta sẽ chứng minh

$$f(a) + f(b) = f(c) + f(d) \tag{3.8}$$

với mọi số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b = c + d$. Thật vậy, xét bốn số thực dương a, b, c và d bất kì thỏa mãn $a + b = c + d$. Vì f không bị chặn trên nên tồn tại số thực dương e sao cho $f(e)$ lớn hơn 1, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{d}$ và $\frac{d}{c}$. Khi đó, ta có thể tìm được các số thực dương u, v, w, t thỏa mãn

$$\begin{cases} f(e)u + v = a \\ u + f(e)v = b \\ f(e)w + t = c \\ w + f(e)t = d. \end{cases}$$

Từ $a + b = c + d$, ta suy ra $u + v = w + t$. Ta cho $x = u$, $y = v$ và $z = e$ vào (3.7) được

$$(e+1)f(u+v) = f(a) + f(b).$$

Còn khi cho $x = w$, $y = t$ và $z = e$ vào (3.7), ta lại được

$$(e+1)f(w+t) = f(c) + f(d).$$

Từ đó, ta thu được

$$f(a) + f(b) = f(c) + f(d).$$

Tiếp theo, ta thay x và y bởi $\frac{x}{2}$ trong (3.7) thì được

$$(z+1)f(x) = f\left(\frac{x}{2}f(z) + \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}f(z) + \frac{x}{2}\right) \tag{3.9}$$

với mọi số thực dương x, z. Theo (3.8), ta có

$$f\left(\frac{x}{2}f(z) + \frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}f(z) + \frac{x}{2}\right) = f(xf(z)) + f(x) \tag{3.10}$$

với mọi số thực dương x, z. Từ (3.9) và (3.10), ta được

$$zf(x) = f(xf(z)) \tag{3.11}$$

với mọi số thực dương x, z.

Đặt $a = f\left(\frac{1}{f(1)}\right)$. Ta cho $x = 1$ và $z = \frac{1}{f(1)}$ vào (3.11) được

$$af(a) = f(af(a)),$$

suy ra $a = 1$ hay $f(1) = 1$. Ta cho $x = 1$ vào (3.11) được

$$z = f(f(z)) \tag{3.12}$$

với mọi số thực dương z. Mặt khác, từ (3.8) , ta thu được

$$f(x+y) + f(1) = f(x) + f(y+1)$$

với mọi số thực dương x, y và

$$f(y+1) + f(1) = f(y) + f(2)$$

với mọi số thực dương y. Do đó,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + C \tag{3.13}$$

với mọi số thực dương x, y ($C = f(2) - 2$). Ta thay $x = y = f(2)$ vào (3.13) được

$$f(2f(2)) = 2f(f(2)) + C.$$

Từ (3.11) và (3.12) ta có

$$f(2f(2)) = 2f(2) = 2(C+2) \text{ và } f(f(2)) = 2.$$

Do đó, $2(C+2) = 4 + C$, dẫn đến $C = 0$. Vì vậy,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

với mọi số thực dương x, y. Vì vậy $f(x) = x$ với mọi số thực dương x. Thử lại, ta thấy hàm số tìm được thỏa mãn (3.7). Vậy bài toán có nghiệm hàm duy nhất là

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 24. (Bài toán T128, Tạp chí Pi, tháng 12 năm 2017). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^3 + 2f(y)\right) = (f(x))^3 + 2y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Giả sử $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta luôn có

$$f\left(x^3 + 2f(y)\right) = (f(x))^3 + 2y. \tag{3.14}$$

Trước tiên, ta sẽ chứng minh f là một song ánh. Thật vậy, trong (3.14), chọn $x = 0$ và đặt $a = f(0)$, ta được

$$f\left(2f(y)\right) = 2y + a^3, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Từ đó, nếu $f(y_1) = f(y_2)$ thì

$$2y_1 + a^3 = f(2f(y_1)) = f(2f(y_2)) = 2y_2 + a^3,$$

suy ra $y_1 = y_2$. Do đó, f là một đơn ánh. Hơn nữa, do vế phải của (3.15) có thể nhận mọi giá trị thực (khi y chạy khắp $\mathbb{R}$) nên f là một toàn ánh. Vì thế, f là một song ánh. Do đó, tồn tại duy nhất $b \in \mathbb{R}$ để $f(b) = 0$. Thay $y = b$ vào (3.15) ta được

$$a = 2b + a^3 \tag{3.16}$$

Trong (3.14), chọn $x = b$, $y = 0$, ta được

$$f(b^3 + 2a) = 0 = f(b).$$

Từ đó vì f là đơn ánh, suy ra

$$b^3 + 2a = b. \tag{3.17}$$

Rút $b = \dfrac{a - a^3}{2}$ từ (3.16), rồi thay vào (3.17), ta được:

$$\begin{aligned}
&\frac{(a-a^3)^3}{8} + 2a = \frac{a-a^3}{2}\\
\Leftrightarrow& a\left[a^2(1-a^2)^3 + 16 - 4(1-a^2)\right] = 0\\
\Leftrightarrow& a\left(a^8 - 3a^6 + 3a^4 - 5a^2 - 12\right) = 0\\
\Leftrightarrow& a(a^2-2)(a^2+1)(a^4 - a^2 + 4) = 0\\
\Leftrightarrow& a(a^2-3) = 0\\
\Leftrightarrow& a^3 = a.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Do đó

$$b = \frac{a - a^3}{2} = -a. \tag{3.19}$$

Trong (3.14), chọn $y = b$ ta được

$$f(x^3) = (f(x))^3 + 2b, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Theo (3.14), (3.15), (3.16) và (3.20), ta có

$$\begin{aligned}
f(x^3) + f(2f(y)) &= (f(x))^3 + 2b + 2y + a^3\\
&= (f(x))^3 + 2y + 2b + a^3\\
&= f(x^3 + 2f(y)) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Từ đó, do x^3 và $2f(y)$ có thể nhận mọi giá trị thực nên ta có

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Trong (3.15), chọn $y = 0$ và sử dụng (3.18), ta được

$$f(2a) = a^3 = 3a. \tag{3.22}$$

Trong (3.21), chọn $x = y = a$ và sử dụng (3.22), ta được

$$f(a) = 2a. \tag{3.23}$$

Trong (3.21), chọn $x = 2a, y = a$ và sử dụng (3.22), (3.23) ta được

$$f(3a) = 4a. \tag{3.24}$$

Trong (3.20), chọn $x = a$ và sử dụng (3.18), (3.19), (3.23), (3.24), ta đi đến

$$4a = f(3a) = f(a^3) = (f(a))^3 + 2b = (2a)^3 - 2a = 8 \cdot 3a - 2a = 22a.$$

Suy ra $a = 0$, hay $f(0) = 0$; do đó $b = 0$. Vì vậy từ (3.20) và (3.21), ta có

$$f(x^3) = (f(x))^3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

$$f(x) + f(y) = f(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Trong (3.25), chọn $x = 1$, chú ý $f(1) \neq 0$ (do f là đơn ánh), ta được

$$(f(1))^2 = 1. \tag{3.27}$$

Vì thế, theo (3.26) ta có

$$f\left((x+1)^3\right) = f\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) = f\left(x^3\right) + 3f\left(x^2\right) + 3f(x) + f(1),$$

và

$$(f(x+1))^3 = (f(x) + f(1))^3 = (f(x))^3 + 3f(1)(f(x))^2 + 3f(x) + f(1).$$

Từ đó, do $f((x+1)^3) = (f(x+1))^3$ (theo (3.25)), suy ra

$$f(x^2) = f(1)(f(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Theo (3.27), chỉ có thể xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(1) = 1$, lúc này (3.28) trở thành

$$f(x^2) = (f(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, với mọi $x \geq 0$, ta có

$$f(x) = \left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 \geq 0.$$

Do đó, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ mà $x \geq y$, ta có

$$f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y) \geq f(y).$$

Vì vậy, f là một hàm không giảm trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (3.26), suy ra

$$f(x) = f(1)x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: $f(1) = -1$. Lúc này, (3.28) trở thành

$$f(x^2) = -(f(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, với mọi $x \geq 0$, ta có $f(x) = -\left(\sqrt{x}\right)^2 \leq 0$. Do đó, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ mà $x \geq y$, ta có

$$f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y) \leq f(y).$$

Vì vậy, f là một hàm không tăng trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (3.26) suy ra

$$f(x) = f(1)x = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, hai hàm số tìm được đều thỏa mãn (3.3). Vậy bài toán có đúng hai nghiệm hàm là

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

và

$$f(x) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 25. (Olympic Toán của Bulgaria 2014). Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to$

$(0; +\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

$$f(x+y) \geq f(x) + y, \quad \forall x, y \in (0; +\infty), \tag{3.29}$$

và

$$f(f(x)) \leq x, \quad \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{3.30}$$

Lời giải. Giả sử $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ là hàm số thỏa mãn các bất đẳng thức (3.111) và (3.112) của đề bài. Với a, b là những số thực dương tùy ý sao cho $a > b$ thì khi đó tồn tại số thực dương c thỏa mãn

$$a = b + c.$$

Thay $x = b, y = c$ vào (3.111), ta được

$$f(a) = f(b+c) \geq f(b) + c > f(b).$$

Điều này chứng tỏ rằng f là một hàm số đồng biến. Từ (3.111) và (3.112), ta có

$$x + y \geq f\left(f(x+y)\right) \geq f\left(f(x) + y\right), \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Trong (3.111), thay x bởi y và thay y bởi $f(x)$ và kết hợp với bất đẳng thức trên, ta được

$$x + y \geq f\left(f(x) + y\right) \geq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Vì f là một hàm số đồng biến và $f(x) > 0$ nên

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = c \geq 0.$$

Từ (3.112), ta có

$$0 \leq \lim_{x \to 0^+} f(f(x)) \leq \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

Theo nguyên lí kẹp, ta được

$$\lim_{x \to 0^+} f\left(f(x)\right) = 0$$

Nếu $c > 0$, vì f là một hàm số đồng biến nên ta có

$$f(x) \geq \lim_{x\to 0^+} f(x) = c.$$

Do đó

$$f(f(x)) \geq f(c), \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Từ bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$0 = \lim_{x\to 0^+} f\left(f(x)\right) \geq f(c) > 0.$$

Điều này là vô lí. Vì vậy, ta phải có $c = 0$. Khi đó, từ (3.113), ta được

$$\begin{aligned} x = \lim_{y\to 0^+}(x+y) &\geq \lim_{y\to 0^+} f(f(x)+y) \\ &\geq \lim_{y\to 0^+}(f(x)+f(y)) \\ &= f(x) + \lim_{y\to 0^+} f(y) \\ &= f(x), \quad \forall x \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Từ (3.111), ta có

$$f(x) \geq f(x-y) + y, \quad \forall x \in (0; +\infty), \forall y \in (0; x).$$

Cho $y \to x^-$ ở bất đẳng thức trên, ta được

$$f(x) \geq x, \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Từ đây ta suy ra

$$f(x) = x, \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x, \forall x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = x, \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

Chương 4

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ LUYỆN

Bài toán 26. Tìm tất cả các hàm số $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ thỏa mãn

$$(y + 1)f(x + y) = f(xf(y)), \qquad \forall x, y \in [0, +\infty).$$

Bài toán 27. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 28. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2f(x) = f(x + y) + f(x + 2y), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \geq 0.$$

Bài toán 29. Tìm tất cả các hàm số: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left((x - y)^2\right) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 30. Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn

$$g(f(x)) = f(g(y)) + x, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 31. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)], \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 32. (IMO 2010). Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f([x]y)=f(x)[f(y)],\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Ở đây $[a]$ được ký hiệu là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a.

Bài toán 33. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y)f(z)=12f(xyz)-16xyz,\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 34. Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f(x)f(y)=f(xy)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad \forall x,y\in(0;+\infty).$$

Bài toán 35. (Olympic Toán Nhật Bản 2012). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f\left(x+y\right)f\left(x-y\right)\right)=x^2-f\left(y\right),\quad \forall x,\,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 36. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$f\left(x+yf\left(x\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+xf\left(y\right),\ \forall x,\,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 37. (Olympic Toán Bulgaria 2006) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+y)-f(x-y)=4\sqrt{f(x)f(y)}$$

với mọi số thực $x>0,y>0$.

Bài toán 38. (Olympic Toán Bulgaria 1998) Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f^2(x)\geq f(x+y)[f(x)+y]$$

với mọi số thực $x>0,y>0$.

Bài toán 39. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y+z))+f(y+f(z+x))+f(z+f(x+y))=0,\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

với mọi số thực $x > 0, y > 0$.

Bài toán 40. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f\left(yf(x) + \frac{x}{y}\right) = xy \cdot f\left(x^2 + y^2\right),$$

với mọi số thực $x, y\,(y \neq 0)$.

Bài toán 41. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y - f(y)) = f(x) + f(y - f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 42. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) \leq yf(x) + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 43. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x^2\right) + 4y^2 f(y) = \left[f(x + y) + y^2\right]\left[f(x - y) + f(y)\right] \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 44. Tìm tất cả toàn ánh $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + 2y) - f(x - y) = 3\left[f(y) + 2\sqrt{f(x)f(y)}\right]$$

với mọi cặp số dương $x > y$.

Bài toán 45. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + 2y) - f(x - y) = 3\left[f(y) + 2\sqrt{f(x)f(y)}\right]$$

với mọi cặp số dương $x > y$.

Bài toán 46. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(f(x))) + f(f(x)) = 2x + 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 47. (Olympic Toán Brazil 2012) Tìm tất cả các toàn ánh $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$2xf(f(x)) = f(x)[x + f(f(x))], \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 48. (Olympic Toán Brazil 2012) Tìm tất cả các toàn ánh $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$2xf(f(x)) = f(x)[x + f(f(x))], \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 49. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x - f(y)) = f\left(x + y^{2019}\right) + f\left(f(y) + y^{2019}\right) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 50. Tìm tất cả các số $a > 0$ sao cho tồn tại hằng số $K > 0$ và hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + K|x - y|^a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết luận

Chuyên đề này đã đưa ra được những góc nhìn khá đầy đủ về phương pháp giải giải tích và phương pháp tổng hợp thông qua một hệ thống các bài toán xuất hiên trong các Kỳ thi Olympic Toán. Không những thế, sau mỗi bài toán chúng tôi luôn đưa ra những nhận xét, bình luận, phân tích để giúp cho các ban học sinh có những định hướng, tiếp cận, hình thành phương pháp giải quyết khi đứng trước các bài toán thuộc chủ đề này. Hơn nữa, trong nhiều bài toán chúng tôi đã đưa những lời giải khác nhằm giúp các bạn học sinh có cái nhìn tổng quan hơn về các bài toán đã cho. Đây cũng chính là những kinh nghiệm giải toán mà chúng tôi đã tiếp nhận được trong suốt một quá trình tiếp xúc với các bài toán về phương trình hàm, bất phương trình hàm. Qua đó, chúng tôi hy vọng sẽ tăng thêm sự tìm tòi, sáng tạo của các em học sinh.

Vì kiến thức và thời gian nghiên cứu còn hạn chế nên chuyên đề chắc hẳn còn tồn tại những thiếu sót. Tôi mong đón nhận sự trao đổi, góp ý của Quý Thầy Cô để chuyên đề ngày càng hoàn thiện và sâu sắc hơn nữa. Tôi xin chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung, *Chuyên khảo phương trình hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2014.

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, Nguyễn Đăng Khoa, *Áp dụng dãy số vào giải phương trình và bất phương trình hàm*, Tạp chí Epsilon, số 05, 10/2015.

[3] Trần Nam Dũng, *Lời giải và bình luận đề thi Học sinh giỏi Quốc gia môn Toán năm 2012*.

[4] Trần Nam Dũng, Lê Phúc Lữ, Phan Minh Đức, *Lời giải và bình luận đề thi Học sinh giỏi Quốc gia môn Toán năm 2013*.

[5] Trần Nam Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, Hoàng Đỗ Kiên, Lê Phúc Lữ, Nguyễn Huy Tùng*Lời giải và Bình luận đề thi Chọn học sinh giỏi toán Quốc gia lớp 12 dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2014*, Diễn đàn Mathscope.

[6] Lương Ngọc Huyên, *Phương trình sử dụng giới hạn dãy số để đánh giá cận trong các bài toán về bất phương trình hàm*, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 467, 2016.

[7] Phan Nguyễn Anh Khoa, *Phương trình hàm trên tập số thực*, Đà Nẵng, 2019.

[8] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.

[9] IMO Shortlists các năm 2007, 2009, 2011, 2015, 2017.

[10] Diễn đàn Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/

[11] Christopher G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007.