CHỦ ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN.

Phương pháp 1. Sử dụng các tính chất về quan hệ chia hết.

Khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn lẻ,… để tìm ra điểm đặc biệt của các ẩn số cũng như các biểu thức chứa ẩn trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn..

- Xét số dư hai vế của phương trình để chỉ ra phương trình không có nghiệm, tính chẵn lẻ của các vế, …
- Đưa phương trình về dạng phương trình ước số.
- Phát hiện tính chia hết của các ẩn.
- Sử dụng tính đồng dư của các đại lượng nguyên.

Ví dụ 1. Chứng minh các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

Lời giải

a) Dễ dàng chứng minh được $x^2; y^2$ chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1 nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 3. Còn vế phải 1998 chia cho 4 dư 2. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Dễ dàng chứng minh được x^2; y^2 chia cho 4 có số dư 0 hoặc 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có các số dư 0, 1, 2. Còn vế phải 1999 chia cho 4 dư 3. Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 2 = y^2 + y$

Lời giải

Biến đổi phương trình: $9x + 2 = y\left(y + 1\right)$

Ta thấy vế trái của phương trình là số chia hết cho 3 dư 2 nên $y\left(y+1\right)$ chia cho 3 dư 2.

Như vậy chỉ có thể $y = 3k + 1$ và $y + 1 = 3k + 2$ với k là một số nguyên.

Khi đó ta được $9x+2=(3k+1)(3k+2) \Leftrightarrow 9x=9k(k+1) \Leftrightarrow x=k(k+1)$

Thử lại ta thấy $x=k(k+1)$ và $y=3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x=k(k+1) \\ y=3k+1 \end{cases}$ với k là số nguyên tùy ý.

Ví dụ 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-5y^2=27$

Lời giải

Một số nguyên x bất kì chỉ có thể biểu diễn dưới dạng $x=5k$ hoặc $x=5k\pm1$ hoặc $x=5k\pm2$, trong đó k là một số nguyên. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $x=5k$, khi đó từ $x^2-5y^2=27$ ta được $(5k)^2-5y^2=27 \Leftrightarrow 5(5k^2-y^2)=27$.

Điều này vô lí vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

- Nếu $x=5k\pm1$, khi đó từ $x^2-5y^2=27$ ta được

$$(5k\pm1)^2-5y^2=27 \Leftrightarrow 25k^2\pm10k+1-5y^2=27 \Leftrightarrow 5(5k^2\pm2k-y^2)=26$$

Điều này vô lí vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

Nếu $x=5k\pm2$, khi đó từ $x^2-5y^2=27$ ta được

$$(5k\pm2)^2-5y^2=27 \Leftrightarrow 25k^2\pm20k+4-5y^2=27 \Leftrightarrow 5(5k^2\pm4k-y^2)=23$$

Điều này vô lí vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y là số nguyên, còn vế phải không chia hết cho 5

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm là số nguyên

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau $19x^2+28y^2=729$.

Lời giải

Cách 1. Viết phương trình đã cho dưới dạng $(18x^2+27y^2)+(x^2+y^2)=729$

Từ phương trình trên suy ra x^2+y^2 chia hết 3

Chú ý là một số chính phương khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Nên từ x^2+y^2 chia hết 3 ta suy ra được x và y đều chia hết cho 3.

Đặt $x=3u; y=3v\ (u;v\in Z)$. Thay vào phương trình đã cho ta được $19u^2+28v^2=81$

Từ phương trình $19u^2+28v^2=81$, lập luận tương tự trên ta suy ra

$u=3s; v=3t\left(s;t\in Z\right)$

Thay vào phương trình $19u^2+28v^2=81$ ta được $19s^2+28t^2=9$

Từ phương trình $19s^2+28t^2=9$ suy ra s, t không đồng thời bằng 0

Do đó ta được $19s^2+28t^2\ge 19>9$. Vậy phương trình $19s^2+28t^2=9$ vô nghiệm và do đó phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

Cách 2. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm

Dễ thấy $28y^2$ chia hết cho 4 và 729 chia 4 dư 1. Từ đó ta suy ra $19x^2$ chia 4 dư 1.

Mặt khác một số chính phương khi chia 4 có số dư là 0 hoặc 1, do đó $19x^2$ chia 4 có số dư là 0 hoặc 3, điều này mâu thuẫn với $19x^2$ chia 4 dư 1. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 5. Xác định tất cả các cặp nguyên dương $\left(x;n\right)$ thỏa mãn phương trình: $x^3+3367=2^n$

Lời giải

Để sử dụng được hằng đẳng thức $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ ta chứng minh n chia hết cho 3 .

Nhận thấy 3367 chia hết cho 7 nên từ phương trình $x^3+3367=2^n$ suy ra x^3 và 2^n có cùng số dư khi chia cho 7(hay $x^3\equiv 2^n$ (mod 7)).

Nếu n không chia hết cho 3 thì 2^n khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0 hoặc 2 hoặc 4, trong khi đó x^3 khi chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0 hoặc 1 hoặc 6. Do đó để x^3 và 2^n có cùng số ư khi chia cho 7 thì n phải chia hết cho 3.

Đặt $n=3m\left(m\in N^*\right)$. Thay vào phương trình đã cho ta được $x^3+3367=2^{3m}$

Hay ta được $\left(2^m-x\right)\left(\left(2m-x\right)^2+3x.2^m\right)=3367$

Từ phương trình trên ta suy ra 2^m-x là ước nguyên dương của 3367

Hơn nữa $\left(2^m-x\right)^3<2^{3m}-x^3=3367$ nên $\left(2^m-x\right)\in\left\{1;7;13\right\}$. Ta xét các trường hợp sau

- Xét $2^m-x=1$, thay vào $x^3+3367=2^{3m}$ ta suy ra $2^m\left(2^m-1\right)=2.561$, phương trình vô nghiệm.

- Xét $2^m - x = 7$, thay vào $x^3 + 3367 = 2^{3m}$ ta suy ra $2^m\left(2^m - 13\right) = 2.15$, phương trình vô nghiệm.

- Xét $2^m - x = 13$, thay vào $x^3 + 3367 = 2^{3m}$ ta suy ra $2^m\left(2^m - 7\right) = 24.32$. Từ đó ta có $m = 4$ nên ta suy ra được $n = 12$ và $x = 9$.

Vậy cặp số nguyên dương $\left(x;n\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(9;12\right)$

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ra được

$$2x^2 + 4x + 2 = 21 - 3y^2 \Leftrightarrow 2\left(x+1\right)^2 = 3\left(7 - y^2\right)$$

Ta thấy $3\left(7 - y^2\right) \vdots 2 \Rightarrow 7 - y^2 \vdots 2 \Rightarrow y$ là số lẻ

Ta lại có $7 - y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$. Khi đó ta được $2\left(x+1\right)^2 = 18$

Từ đó ta được $x = 2$ và $x = -4$

Suy ra các cặp số $\left(2;1\right),\left(2;-1\right),\left(-4;1\right),\left(-4;-1\right)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 7. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2x - 11 = y^2$

Lời giải

Cách 1. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^2 - 2x - 11 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 12 = y^2 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow \left(x - 1 + y\right)\left(x - 1 - y\right) = 12$$

Ta có các nhận xét:

+ Vì phương trình đã cho chứa y có số mũ chẵn nên có thể giả sử $y \geq 0$. Thế thì $x - 1 + y \geq x - 1 - y$

+ Ta có $\left(x - 1 + y\right) - \left(x - 1 - y\right) = 2y$ nên $x - 1 + y$ và $x - 1 - y$ cùng tính chẵn lẻ. Tích của chúng bằng 12 nên chúng cùng là số chẵn.

Với các nhận xét trên ta có hai trường hợp

- Trường hợp 1: Ta có $\begin{cases} x - 1 + y = 6 \\ x - 1 - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

- Trường hợp 1: Ta có $\begin{cases} x-1+y=-2 \\ x-1-y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(5;2),(5;-2),(-3;2),(-3;-2)$

Cách 2. Viết thành phương trình bậc hai đối với x là $x^2-2x-(11+y^2)=0$

Khi đó ta có $\Delta^{'}=1+11+y^2=12+y^2$

Điều kiện cần để bậc hai có nghiệm nguyên $\Delta^{'}$ là số chính phương.

Từ đó ta đặt $12+y^2=k^2\,(k\in\mathbb{N})$ hay ta được $k^2-y^2=12 \Leftrightarrow (k+y)(k-y)=12$

Giả sử $y\ge 0$ thì $k+y\ge k-y$ và $k+y\ge 0$ lai có $(k+y)-(k-y)=2y$ nên $k+y$ và $k-y$ cùng tính chẵn lẻ và phải cùng chẵn.

Từ các nhận xét trên ta có $\begin{cases} k+y=6 \\ k-y=2 \end{cases}$

Do đó ta được $y=2$, khi đó ta được $x^2-2x-15=0$, suy ra $x=3$ hoặc $x=5$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(5;2),(5;-2),(-3;2),(-3;-2)$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$x^2+y^2+z^2=1999$

Lời giải

Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 dư 1.

Tổng $x^2+y^2+z^2$ là số lẻ nên trong ba số $x^2;y^2;z^2$ phải có một số lẻ và hai số chẵn hoặc cả ba số đều lẻ.

+ Trường hợp trong ba số $x^2;y^2;z^2$ có một số lẻ và hai số chẵn thì vế trái của phương trình đã cho chia cho 4 dư 1, còn vế phải là 1999 chia cho 4 dư 3, trường hợp này loại.

+ Trường hợp ba số $x^2;y^2;z^2$ đều lẻ thì vế trái của phương trình chia cho 8 dư 3, còn vế phải là 1999 chia cho 8 dư 7, trường hợp này loại.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 9. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}$

Lời giải

Nhân hai vế của phương trình với 6xy ta được $6y+6x+1=xy$

Đưa về phương trình ước số ta được $x(y-6)-6(y-6)=37 \Leftrightarrow (x-6)(y-6)=37$

Do vai trò bình đẳng của x và y nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge 1$, thế thì do x và y nguyên dương nên ta được $x-6\ge y-6\ge -5$.

Do đó chỉ có một trường hợp xẩy ra $\begin{cases} x-6=37 \\ y-6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=43 \\ y=7 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x;y)=(43;7),(7;43)$

Ví dụ 10. Tìm các số tự nhiên x và các số nguyên y sao cho: $2^x+3=y^2$

Lời giải

Lần lượt xét các giá trị tự nhiên của x như sau

+ Nếu $x=0$ thì $y^2=4$ nên $y=\pm 2$

+ Nếu $x=1$ thì $y^2=5$, phương trình không có nghiệm nguyên

Nếu $x\ge 2$, khi đó 2^x+3 là số lẻ nên y là số lẻ. Lại có $2^x \vdots 4$ nên 2^x+3 chia cho 4 dư 3, còn y^2 chia cho 4 dư 1. Do đó phương trình không có nghiệm.

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;2),(0;-2)$

Ví dụ 11. Giải phương trình với nghiệm nguyên dương: $2^x+57=y^2$

Lời giải

Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Nếu x là số nguyên lẻ. Đặt $x=2n+1(n\in\mathbb{N})$. Khi đó ta có

$2^x=2^{2n+1}=2.4^n=2(3+1)^n=2(3a+1)=6a+2$ với a là một số nguyên dương.

Khi đó vế trái của phương trình là số chia cho 3 dư 2, còn vế phải là số chính phương chia cho 3 không dư 2. Do đó trường hợp này loại.

- Trường hợp 1 : Nếu x là số nguyên chẵn. Đặt $x=2n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Khi đó ta có

$$y^2-2^{2n}=57 \Leftrightarrow \left(y+2^n\right)\left(y-2^n\right)=3.19$$

Ta thấy $y+2^n>0$ nên $y-2^n>0$ và $y+2^n>y-2^n$

Do đó có các trường hợp như sau

$y+2^n$	57	19
$y-2^n$	1	3
2^n	28(loại)	8
n		3
y		11
$x=2n$		6

Thử lại ta thấy $2^6+57=11^2$ đúng. Vậy nghiệm của phương trình là $(6;11)$.

Ví dụ 12. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+y^3=6xy-1$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$x^3+y^3=6xy-1 \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)=6xy-1$

Đặt $a=x+y; b=xy$ với a, b là các số nguyên.

Khi đó phương trình trên trở thành $a^3-3ab=6b-1 \Leftrightarrow a^3+1=3b(a+2)$

Từ đó ta suy ra được $a^3+1 \vdots a+2$ hay ta được $(a^3+8-7) \vdots (a+2)$ nên $7 \vdots a+2$

Suy ra $a+2$ là ước của 7, ta cũng có $b=\frac{a^3+1}{3(a+2)}$, nên ta có bảng giá trị như sau

$a+2$	1	-1	7	
a	-1	-3	5	
$b=\frac{a^3+1}{3(a+2)}$	0	Không nguyên	6	Không nguyên

Từ đó ta có các nghiệm của phương trình $a^3-3ab=6b-1$ là $(a;b)=(-1;0),(5;6)$

- Với $(a;b)=(-1;0)$ ta được $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=-1 \\ x=-1; y=0 \end{array}\right.$

- Với $(a;b)=(5;6)$ ta được $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=3 \\ x=3; y=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;-1),(-1;0),(2;3),(3;2)$.

Ví dụ 13. Giải phương trình nghiệm nguyên: $3x^2-2y^2-5xy+x-2y-7=0$.

Lời giải

Phương trình tương đương với i

$$\left(3x^2-6xy\right)+\left(-2y^2+xy\right)+\left(x-2y\right)=7 \Leftrightarrow 3x\left(x-2y\right)+y\left(x-2y\right)+\left(x-2y\right)=7$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2y\right)\left(3x+y+1\right)=7=1.7=7.1=-1.\left(-7\right)=-7.\left(-1\right)$$

Do đó ta có 4 trường hợp sau:

+Trường hợp 1: $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y+1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{7} \\ y=\dfrac{3}{7} \end{cases}$,(loại).

+Trường hợp 2: $\begin{cases} x-2y=7 \\ 3x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=7 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$,(nhận).

+trường hợp 3: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+y+1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{17}{7} \\ y=-\dfrac{5}{7} \end{cases}$,(loại).

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} x-2y=-7 \\ 3x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-7 \\ 3x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{11}{7} \\ y=\dfrac{19}{7} \end{cases}$,(loại).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $\left(1;-3\right)$.

Phương pháp 2. Đưa hai vế về tổng các bình phương.

Ý tưởng của phương pháp là biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bình phương và vế phải là tổng của các số chính phương.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+y^2-x-y=8$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^2+y^2-x-y=8 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4x-4y=32$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-4x+1\right)+\left(4y^2-4y+1\right)=34 \Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2+\left(2y-1\right)^2=34$$

Để ý là $34=3^2+5^2$. Do đó từ phương trình trên ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases} \left(2x-1\right)^2=3^2 \\ \left(2y-1\right)^2=5^2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \left(2x-1\right)^2=5^2 \\ \left(2y-1\right)^2=3^2 \end{cases}$$

Khi đó ta được $\begin{cases} \left|2x-1\right|=3 \\ \left|2y-1\right|=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \left|2x-1\right|=5 \\ \left|2y-1\right|=3 \end{cases}$

Giải lần lượt các phương trình trên ta thu được các nghiệm nguyên là

$(2; 3), (3;2), (-1;-2), (-2;-1)$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+xy+y^2=3x+y-1$

Lời giải

Biến đổi phương trình ta được

$$x^2+xy+y^2=3x+y-1 \Leftrightarrow 2x^2+2xy+2y^2=6x+2y-2$$
$$\Rightarrow (x+y)^2+(x-3)^2+(y-1)^2=8=0^2+2^2+2^2$$

Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Với $x+y=0$, ta được $(-y-3)^2+(y-1)^2=8 \Rightarrow y=-1, x=1.$

+ Với $x-3=0$, ta được $(-y-3)^2+(y-1)^2=8 \Rightarrow y=-1, x=1.$

+ Với $y-1=0$, ta được $(x+1)^2+(x-3)^2=8 \Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(1;-1), (3;-1), (1;1)$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $4x^2+y^2+4x-6y-24=0$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$4x^2+y^2+4x-6y-24=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2+(y-3)^2=34$$

Chú ý là $34=3^2+5^2$ nên ta có các trường hợp $\begin{cases}(2x+1)^2=3^2\\(y-3)^2=5^2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}(2x+1)^2=5^2\\(y-3)^2=3^2\end{cases}$

Ta xét bảng giá trị tương ứng như sau

$2x+1$	3	3	–3	–3	5	5	–5	–5
$y-3$	5	–5	5	–5	3	–3	3	–3
x	1	1	–2	–2	2	2	–3	–3
y	8	–2	8	–2	6	0	6	0

Từ đó ta có các nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x;y)=(1;8),(1;-2),(-2;8),(-2;-2),(2;6),(2;0),(-3;6),(-3;0)$$

Ví dụ 4. Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^6-2x^3y+y^2=128$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình đã cho ta được

$$2x^6-2x^3y+y^2=128 \Leftrightarrow (x^3-y)^2+(x^3)^2=8^2+8^2=(-8)^2+8^2=8^2+(-8)^2=(-8)^2+(-8)^2$$

Từ đó ta có các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x^3 - y = 8 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x^3 - y = -8 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 16 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 16 \\ x = 2 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} x^3 - y = 8 \\ x^3 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -16 \\ x^3 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -16 \\ x = -2 \end{cases}$

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} x^3 - y = -8 \\ x^3 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;\ y) = (2;\ 0), (2;\ 16), (-2;\ -16), (-2;\ 0)$.

Cách khác 1: Đặt $t = x^3$, khi đó phương trình trở thành

$$2t^2 - 2yt + y^2 = 128 \Leftrightarrow 4t^2 - 4yt + 2y^2 = 256 \Leftrightarrow (2t - y)^2 + y^2 = 16^2 + 0^2 = 0^2 + 16^2$$

Cách khác 2: Đặt $t = x^3$, khi đó phương trình trở thành

$$2t^2 - 2yt + y^2 = 128 \Leftrightarrow 2t^2 - 2yt + y^2 - 128 = 0$$

Xem phương trình trên là phương trình ẩn t, ta có $\Delta'_t = -y^2 + 256$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'_t \ge 0 \Leftrightarrow -y^2 + 256 \ge 0 \Leftrightarrow -16 \le y \le 16$

Đến đây xét các trường hợp của y thế vào phương trình ta tìm được x.

Phương pháp 3. Sử dụng các tính chất của số chính phương.

Một số tính chất của số chính phương thường được dùng trong giải phương trình nghiệm nguyên

- Một số tính chất về chia hết của số chính phương
- Nếu $a^2 < n < (a+1)^2$ với a là số nguyên thì n không thể là số chính phương.
- Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đếu là số chính phương
- Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên đó bằng 0.

Ví dụ 1. Tồn tại hay không số nguyên dương x sao cho với k là số nguyên thì ta có $x(x+1) = k(k+2)$.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên dương x để $x(x+1) = k(k+2)$ với k nguyên.

Ta có $x^2 + x = k^2 + 2k \Rightarrow x^2 + x + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Do x là số nguyên dương nên $x^2 < x^2 + x + 1 = (k+1)^2$ (1)

Cũng do x là số nguyên dương nên $(k+1)^2 = x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Từ đó ta được $x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2$, điều này vô lý

Vậy không tồn tại số nguyên dương x để $x(x+1) = k(k+2)$

Ví dụ 2. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là một số chính phương:

$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$

Lời giải

Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ với y là một số tự nhiên.

Ta thấy $y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$

Ta sẽ chứng minh $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ với $a = x^2 + x$

Thật vậy, ta có $y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$. Lại có

$$(a+2)^2 - y^2 = (x^2 + x + 2)^2 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$$
$$= 3x^2 + 3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

Do $a^2 < y^2 < (a+2)^2$ nên $y^2 = (a+1)^2$ hay ta được

$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $x = 1$ hoặc hoặc $x = -2$ biểu thức đã cho bằng $9 = 3^2$

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Lời giải

Thêm xy vào hai vế ta được $x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1)$

Ta thấy xy và $xy + 1$ là hai số nguyên liên tiếp, tích của là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

+ Xét $xy = 0$. Khi đó từ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy$ ta được $x^2 + y^2 = 0$ nên $x = y = 0$

+ Xét $xy + 1 = 0$. Khi đó ta được $xy = -1$ nên $(x;y) = (-1;1)$ hoặc $(x;y) = (1;-1)$(-1 ; 1)

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình là $(0;0), (1;-1), (-1;1)$.

Ví dụ 4. Tìm các cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $(a-1)^2(a^2+9)=4b^2+20b+25$.

Lời giải

Ta có $(a-1)^2(a^2+9)=4b^2+20b+25 \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+9)=(2b+5)^2$

Do đó a^2+9 là số chính phương. Do $|a|^2<a^2+9\le(|a|+3)^2$, nên ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1: $a^2+9=(|a|+3)^2 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow 9=(2b+5)^2 \Leftrightarrow b=-1;\ b=-4$.

- Trường hợp 2: $a^2+9=(|a|+2)^2 \Leftrightarrow 4|a|=5$, không có số nguyên thỏa mãn.

- Trường hợp 3: $a^2+9=(|a|+1)^2 \Leftrightarrow |a|=4 \Leftrightarrow a=4;\ a=-4$.

+ Với $a=4$ ta được $9.25=(2b+5)^2 \Leftrightarrow b=5;\ b=-10$

+ Với $a=-4$ ta được $25.25=(2b+5)^2 \Leftrightarrow b=10;\ b=-15$

Vậy ta có các cặp số nguyên thỏa mãn bài toán là

$$(a;\ b)=(0;\ -1),\ (0;\ -4),\ (4;\ 5),\ (4;\ -10),\ (-4;\ 10),\ (-4;\ -15)$$

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4-2y^2=1$

Lời giải

Do x và y trong phương trình đều có số mũ chẵn nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge 0; y\ge 0$.

Từ phương trình ta suy ra được x là số lẻ. Do đó x^4 chia 4 dư 1 nên ta suy ra $2y^2$ chia hết cho 4 hay y là số chẵn.

Đặt $x=2m+1; y=2n$ với m, n là các số tự nhiên. Khi đó ta được

$$(2m+1)^4-2(2n)^2=1 \Leftrightarrow (4m^2+4m+1)^2-1=8n^2 \Leftrightarrow (4m^2+4m)(4m^2+4m+2)=8n^2$$

Thu gọn ta được $(m^2+m)(2m^2+2m+1)=n^2$.

Đặt $m^2+n^2=a$ suy ra $2m^2+2m+1=2a+1$, khi đó phương trình trở thành $a(2a+1)=n^2$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m=0$, khi đó ta suy ra được $x=1; y=0$
- Nếu $m\ge 1$, khi đó a và $2a+1$ là hai số nguyên dương và chúng nguyên tố cùng nhau.

Do tích của a và $2a+1$ là một số chính phương nên cả a và $2a+1$ cùng là số chính phương.

Đặt $a=k^2, k\in N$ thì ta được $m^2+m=k^2$, ta có

$$m^2<m^2+m<m^2+2m+1=(m+1)^2 \text{ nên } m^2<k^2<(m+1)^2$$

Suy ra k^2 nằm giữa hai số chính phương liên tiếp nên k^2 không thể là số chính phương.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(1;0),(-1;0)$

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $9x^2-6x=y^3$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được $9x^2-6x=y^3 \Leftrightarrow (3x-1)^2=y^3+1$

Từ đó ta suy ra được $y^3+1\ge 0 \Rightarrow y^3\ge -1 \Rightarrow y\ge -1$. Ta xét các trường hợp sau

- Xét $y=-1$, khi đó thay vào phương trình ta được

$(3x-1)^2=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$, loại.

- Xét $y=0$, khi đó thay vào phương trình ta được

$9x^2-6x=0 \Leftrightarrow 3(3x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$

- Xét $y=1$, khi đó thay vào phương trình ta được $(3x-1)^2=2$, loại.
- Xét $y\ge 2$, khi đó từ phương trình trên ta được $(3x-1)^2=(y+1)(y^2-y+1)$

Gọi $d=(y+1,y^2-y+1)$, khi đó ta có $\begin{cases} y+1 \,\vdots\, d \\ y^2-y+1 \,\vdots\, d \end{cases}$

Từ đó suy ra $y^2-y+1=y(y+1)-2(y+1)+3 \,\vdots\, d$ nên $3 \,\vdots\, d$.

Mặt khác $(3x-1)^2$ không chia hết cho 3 nên ta suy ra được $d=1$.

Do đó hai số nguyên dương $y+1$ và y^2-y+1 nguyên tố cùng nhau, mà tích của chúng là một số chính phương. Do đó mỗi số là một số chính phương.

Tuy nhiên $(y-1)^2<y^2-y+1<y^2$ nên y^2-y+1 không thể là một số chính phương.

Do đó trong trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;0)$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x;y;z)$ thỏa mãn đẳng thức sau:

$$2xy+6yz+3zx-|x-2y-z|=x^2+4y^2+9z^2-1$$

Lời giải

Đẳng thức dẫ cho tương đương với

$2x^2+8y^2+18z^2-4xy-12yz-6zx=2(1-|x-2y-z|)$

Hay ta được $(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=2(1-|x-2y-z|)$

Do $(x-2y)^2\ge 0;(2y-3z)^2\ge 0;(3z-x)^2\ge 0$ nên suy ra $1\ge|x-2y-z|$.

Do x, y, z là các số nguyên nên ta suy ra được $|x-2y-z|=0$ hoặc $|x-2y-z|=1$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $|x-2y-z|=1$, khi đó từ $(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=2(1-|x-2y-z|)$

Ta được $(x-2y)^2+(2y-3z)^2+(3z-x)^2=0$ nên $(x-2y)^2=(2y-3z)^2=(3z-x)^2=0$

Suy ra $x=2y=3z$, thay vào $|x-2y-z|=1$ ta được $|z|=1$, điều này dẫn đến x, y không nhận giá trị nguyên.

- Nếu $|x-2y-z|=0$ thì ta được $x-2y-z=0$.

Khi đó ta có phương trình $z^2+(2y-3z)^2+4(z-y)^2=2$.

Do $z^2\ge 0$ và $(2y-3z)^2\ge 0$ nên ta được $0\le 4(y-z)^2\le 2$.

Mà ta thấy $4(y-z)^2 \vdots 4$ nên suy ra $4(y-z)^2=0$ do đó $y=z$.

Thay vào phương trình $z^2+(2y-3z)^2+4(z-y)^2=2$ ta được $z^2=1$ hay $z=\pm1$.

+ Nếu $z=1$ thì ta được $x=3;y=1$

+ Nếu $z=-1$ thì ta được $x=-3;y=-1$.

Thử lại vào phương trình ta được các nghiệm là $(x;y;z)=(3;1;1),(-3;-1;-1)$.

Phương pháp 4. Phương pháp đánh giá.

Trong khi giải các phương trình nghiệm nguyên rất cần đánh giá các miền giá trị của các ẩn, nếu số giá trị mà biến số có thể nhận không nhiều có thể dùng phương pháp thử trực tiếp để kiểm tra. Để đánh giá được miền giá trị của biến số cần vận dụng linh hoạt các tính chất chia hết, đồng dư, bất đẳng thức …

- Phương pháp sắp thứ tự các ẩn.
- Xét khoảng giá trị của các ẩn.
- Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki.

Ví dụ 1. Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

Lời giải

Cách 1. Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z. Khi đó ta có $x+y+z=x.y.z$ (1)

Chú ý rằng các ẩn x, y, z có vai trò bình đẳng trong phương trình nên có thể sắp xếp thứ tự giá trị của các ẩn, chẳng hạn $1\le x\le y\le z$

Do đó ta được $xyz=x+y+z\le 3z$

Chia hai vế của bất đảng thức $xyz\le 3z$ cho số dương z ta được $xy\le 3$

Từ đó suy ra $xy\in\left\{1;2;3\right\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Với $xy=1$, khi đó ta có $x=y=1$. Thay vào phương trình ban đầu ta được $z+2=z$, vô nghiệm
- Với $xy=2$, khi đó ta có $x=1;y=2$. Thay vào phương trình ban đầu ta được $z=3$
- Với $xy=3$, khi đó ta có $x=1;y=3$. Thay vào phương trình ban đầu ta được $z=2$, trường hợp này loại vì $y\le z$

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3.

Cách 2. Chia hai vế của phương trình $x+y+z=x.y.z$ cho $xyz\ne 0$ ta được

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z\ge 1$. Khi đó

$$1=\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\le\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{3}{z^2}$$

Suy ra $1\le\frac{3}{z^2}$, do đó ta được $z^2\le 3$ nên $z=1$. Thay $z=1$ vào phương trình ban đầu ta được

$$x+y+1=xy\Leftrightarrow xy-x-y=1\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(y-1\right)=2$$

Từ $x \ge y$ nên ta có $x-1 \ge y-1 \ge 0$. Do đó từ $(x-1)(y-1)=2$ ta được

$$\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau $5(x+y+z+t)+10=2xyzt$.

Lời giải

Vì vai trò của x, y, z, t như nhau nên có thể giả sử $x \ge y \ge z \ge t$.

Khi đó ta được $2xyzt = 5(x+y+z+t)+10 \le 20x+10$

Suy ra ta được $yzt \le 15 \Rightarrow t^3 \le 15 \Rightarrow t \le 2$. Suy ra ta được $t \in \{1;2\}$

+ Với $t=1$, khi đó ta có $2xyz = 5(x+y+z)+15 \le 15x+15$

Suy ra $2yz \le 30 \Rightarrow 2z^2 \le 30 \Rightarrow z \le 3$. Do đó $z \in \{1;2;3\}$

- Nếu $z=1$, khi đó ra được

$$2xy = 5(x+y)+20 \Leftrightarrow 4xy = 10(x+y)+40 \Leftrightarrow (2x-5)(2y-5)=65$$

Giải phương trình trên ta được $x=35;\ y=3$ hoặc $x=9;\ y=5$.

Do đó trường hợp này ta được hai nghiệm là $(x;y;z;t)=(35;3;1;1),(9;5;1;1)$

- Nếu $z=2$, khi đó ta được $5(x+y)+25=4xy \Leftrightarrow 4xy-5x-5y=25$

Giải tương tự cho các trường còn lại và trường hợp t = 2. Cuối cùng ta tìm được nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là và các hoán vị của các bộ số này.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$

Lời giải

Do vai trò bình đẳng của x và y trong phương trình nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y$.

Khi đó hiển nhiên ta có $\frac{1}{y} < \frac{1}{3}$ nên $y > 3$

Mặt khác do $x \ge y \ge 1$ nên $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$. Do đó ta được $\frac{1}{3} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{1}{y}+\frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ nên $y \le 6$

Ta xác định được khoảng giá tri của y là $4 \le y \le 6$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $y = 4$, khi đó ta được $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, suy ra $x = 12$

+ Với $y = 5$, khi đó ta được $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, loại vì x không là số nguyên

+ Với $y = 6$, khi đó ta được $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, suy ra $x = 6$

Vậy các nghiệm của phương trình là $(4;12),(12;4),(6;6)$

Ví dụ 4. Tìm ba số nguyên dương đôi một khác nhau x, y, z thỏa mãn:

$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2$

Lời giải

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên có thể giả sử $x < y < z$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \ge \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3$ ta có $\frac{(x + y + z)^2}{3} \ge \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3$

Từ đó với mọi $x; y; z \ge 0$ ta suy ra $x + y + z \le 9$.

Dấu bằng không xảy ra vì x, y, z đôi một khác nhau. Do đó ta được $x + y + z \le 8$

Mặt khác x, y, z là các số nguyên dương khác nhau nên $x + y + z \ge 1 + 2 + 3 = 6$

Từ đó ta được $6 \le x + y + z \le 8$ nên ta suy ra $x + y + z \in \{6;7;8\}$

Từ đây kết hợp với phương trình ban đầu ta tìm được x, y, z

Vậy bộ ba số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y; z) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị của bộ ba số này.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $7(x^2 + xy + y^2) = 39(x + y)$.

Lời giải

Từ phương trình ta thấy $39(x + y) \vdots 7$, mà 7 và 39 nguyên tố cùng nhau nên $x + y \vdots 7$.

Đặt $x + y = 7m \ (m \in Z)$ thì ta được phương trình $x^2 + xy + y^2 = 39m$

Từ đó suy ra $(x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = (7m)^2 - 39m$ hay $xy = 49m^2 - 39m$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $xy \le \frac{1}{4}(x+y)^2$ nên ta được

$$49m^2 - 39m \le \frac{1}{4}(x+y)^2$$

Hay ta được $49m^2 \ge 4(49m^2 - 39m) \Leftrightarrow m(52-49m) \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{52}{49}$.

Do m là số nguyên nên ta suy ra được $m=0$ hoặc $m=1$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $m=0$ suy ra $x+y=0$, khi đó ta được phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - xy = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

+ Với $m=1$ suy ra $x+y=7$, khi đó ta được phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = 39 \Leftrightarrow (x+y)^2 - xy = 39 \Leftrightarrow xy = 10$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=5 \\ x=5; y=2 \end{array}\right.$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y) = (0;0), (2;5), (5;2)$

Ví dụ 6. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn $\frac{x}{y} + \frac{y}{z+1} + \frac{z}{x} = \frac{5}{2}$

Lời giải

Giả sử $(x;y;z)$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{z+1} + \frac{z+1}{x} \ge 3\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z+1} \cdot \frac{z+1}{x}} = 3$$

Suy ra $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{2}$ hay $x \le 2$. Do x nguyên dương nên ta được $x=1$ và $x=2$

- Với $x=2$, khi đó trong bất đẳng thức trên phải xảy ra dấu đẳng thức, tức là

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z+1} = \frac{z+1}{x}$$

Giải hệ điều kiện trên ta thu được $(x;y;z) = (2;2;1)$

- Với $x=1$, khi đó phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{y} + \frac{y}{z+1} + z = \frac{5}{2}$

Khi đó $z \le \frac{1}{y} + \frac{y}{z+1} + z = \frac{5}{2} \Rightarrow z \le 2$

+ Với $z=1$ thay vào phương trình trên ta được $y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow y=1; y=2$

+ Với $z=2$ thay vào phương trình trên ta được $2y^2-3y+6=0$

Phương trình này có biệt thức $\Delta=-39<0$ nên không có nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $\left(x;y;z\right)=\left(2;2;1\right),\left(1;1;1\right),\left(1;2;1\right)$.

Phương pháp 5. Sử dụng tính chất của phương trình bậc hai.

Ý tưởng của phương pháp là quy phương trình đã cho về dạng phương trình bậc hai một ẩn, các ẩn còn lại đóng vai trò tham số. Khi đó các tính chất của phương trình bậc hai thường được sử dụng dưới các dạng như sau:

- Sử dụng điều kiện có nghiệm $\Delta \ge 0$ của phương trình bậc hai.
- Sử dụng hệ thức Vi – et.
- Sử dụng điều kiện Δ là số chính phương.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x+y+xy=x^2+y^2$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đường với $x^2-\left(y+1\right)x+\left(y^2-y\right)=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x và y là tham số. Khi đó điều kiện cần để phương trình có nghiệm là $\Delta \ge 0$ hay

$\Delta=\left(y+1\right)^2-4\left(y^2-y\right)=-3y^2+6y+1\ge 0 \Leftrightarrow 3\left(y-1\right)^2 \le 4$

Do đó ta được $\left(y-1\right)^2 \le 1$. Để ý là để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương.

Do đó từ $\left(y-1\right)^2 \le 1$ ta suy ra được $\left(y-1\right)^2=0;1$ nên $y-1=-1;0;1$

Đến đây ta xét từng trường hợp cụ thể

+ Với $y=0$. Khi đó từ phương trình bậc hai ta được $x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

+ Với $y=1$. Khi đó từ phương trình bậc hai ta được $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

+ Với $y=1$. Khi đó từ phương trình bậc hai ta được $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta được các nghiệm của phương trình đã cho là

$(0;0),(1;0),(0;1),(2;1),(1;2),(2;2)$.

Ví dụ 2. Tìm các số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp

Lời giải

Cách 1. Giải sử $9x+5=n(n+1)$ với n nguyên thì:

$$36x+20=4n^2+4n \Rightarrow 36x+21=4n^2+4n+1 \Rightarrow 3(12x+7)=(2n+1)^2$$

Số chính phương $(2n+1)^2$ chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho 9. Mà ta lại có $12x+7$ không chia hết cho 3 nên $3(12x+7)$ không chia hết cho 9. Điều này mâu thuẫn nên không tồn tại số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Giải sử $9x+5=n(n+1)$ với n nguyên

Khi đó ta được $n^2+n-9x-5=0$

Để phương trình bậc hai đối với n có nghiệm nguyên, điều kiện cần là Δ là số chính phương.

Nhưng $\Delta=1+4(9x+5)=36x+21$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Vậy không tồn tại số nguyên n nào để $9x+5=n(n+1)$, tức là không tồn tại số nguyên x để $9x+5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+3xy-x-y+3=0$

Lời giải

Viết thành phương trình bậc hai đối với x: $x^2+(3y-1)x+(2y^2-y+3)=0$ (2)

Ta có $\Delta' = (3y-1)^2-4(2y^2-y+3)=y^2-2y-11$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (2) có nghiệm nguyên là Δ là số chính phương

Từ đó ta đặt $y^2-2y-11=k^2\ (k\in\mathbb{N})$ (3)

Giải (3) với nghiệm nguyên ta được $y=5$ hoặc $y=-3$

+ Với $y=5$, thay vào phương trình (2) được $x^2+14x+48=0 \Leftrightarrow x=-8;\ x=-6$

+ Với $y=-3$ thay vào phương trình (2) được $x^2-10x+24=0 \Leftrightarrow x=6; x=4$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(-8;5),(-6;5),(6;-3),(4;-3)$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+3xy-x-y+3=0$.

Lời giải

Phương trình đã cho được viết lại thành $x^2+(3y-1)x+(2y^2-y+3)=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x có y là tham số, khi đó ta có

$$\Delta=(3y-1)^2-4(2y^2-y+3)=y^2-2y-11$$

Để phương trình bậc hai có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương.

Đặt $y^2-2y-11=k^2\,(k\in N)$. Khi đó ta có

$$y^2-2y-11=k^2\Leftrightarrow(y-1)^2-k^2=12\Leftrightarrow(y-1-k)(y-1+k)=12$$

Do đó $y-1-k$ và $y-1+k$ là các ước của 12. Lại có $y-1-k$ và $y-1+k$ cùng tính chẵn.

Lại thấy $y-1+k>y-1-k$ nên có bảng giá trị của chứng minh sau:

$y-1+k$	6	–2
$y-1-k$	2	–6
$y-1$	4	–4
y	5	–3

+ Với $y=5$ thay vào phương trình đã cho ta được $x^2+14x+48=0\Leftrightarrow x=-6;x=-8$.

+ Với $y=-3$ thay vào phương trình đã cho ta được $x^2-10x+24=0\Leftrightarrow x=4;x=6$

Ví dụ 5. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+y^3=x^2+2xy+y^2$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=0\\x^2-xy+y^2-x-y=0\end{array}\right.$$

+ Nếu $x+y=0$, khi đó phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)=(t;-t),t\in Z$

+ Nếu $x^2-xy+y^2-x-y=0\Leftrightarrow x^2-(y+1)x+y^2-y=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x, khi đó ta có

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1$$

Để phương trình trên có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 1 \le 0 \Leftrightarrow 3(y-1)^2 \le 4$.

Do y là số nguyên nên $(y-1)^2$ là số chính phương nên ta được $(y-1)^2 \in \{0;1\}$

Từ đó ta suy ra được $y - 1 \in \{-1;0;1\}$, do đó $y \in \{0;1;2\}$.

- Với $y = 0$, thay vào phương trình $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$ ta được

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2$

- Với $y = 1$, thay vào phương trình $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$ ta được

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1; x = 2$

- Với $y = 2$, thay vào phương trình $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$ ta được

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 1$.

Vậy phương trình đã cho các nghiệm nguyên là

$(x;y) = (0;1),(1;2),(2;1),(2;2),(1;0),(t,-t)$ với t là một số nguyên bất kì.Vậy

phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y) = (-8;5),(-6;5),(6;-3),(4;-3)$

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$.

Lời giải

Từ phương trình $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$ ta có $7(x + 2y) \vdots 5 \Rightarrow (x + 2y) \vdots 5$

Đặt $x + 2y = 5t, t \in Z$, khi đó phương trình trên trở thành $x^2 + xy + y^2 = 7t$

Từ $x + 2y = 5t \Rightarrow x = 5t - 2y$ thay vào $x^2 + xy + y^2 = 7t$ ta được

$3y^2 - 15ty + 25t^2 - 7t = 0$

Coi đây là phương trình bậc hai đối với y, ta có $\Delta = 84t - 75t^2$

Để phương trình bậc hai có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 84t - 75t^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le \frac{28}{25}$

Vì $t \in Z \Rightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$. Thay vào $3y^2 - 15ty + 25t^2 - 7t = 0$

+ Với $t = 0$ ta được $y = 0$ do đó $x = 0$

+ Với $t=1$ ta được $y=3\Rightarrow x=-1$ hoặc $y=2\Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có ba nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;0),(-1;3),(1;2)$

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2(x+y)+xy=x^2+y^2$.

Lời giải

Phương trình đã cho trở thành $x^2-(y+2)x+y^2-2y=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x co y là tham số. Do đó để phương trình có nghiệm thì ta cần có

$$\Delta=(y+2)^2-4(y^2-2y)=-3y^2+12y+4\ge 0\Leftrightarrow \frac{6-4\sqrt{3}}{3}\le y\le \frac{6+4\sqrt{3}}{3}$$

Mà y nguyên nên ta có $y\in\{0;1;2;3;4\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

+ Với $y=0\Rightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0;x=2$.

+ Với $y=1\Rightarrow x^2-3x-1=0$, phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $y=2\Rightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x=0;x=4$.

+Với $y=3\Rightarrow x^2-5x+3=0$, phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $y=4\Rightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=2;x=4$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;0),(2;0),(0;2),(4;2),(2;4),(4;4)$.

Ví dụ 8. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2+y^2+x+y=kxy$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Giả sử k là một giá trị sao cho phương trình $x^2+y^2+x+y=kxy$ có nghiệm nguyên dương. Khi đó tồn tại nghiệm $(x_0;y_0)$ của phương trình với x_0+y_0 nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x_0\ge y_0$. Xét phương trình bậc hai

$x^2-(ky_0-1)x+y_0{}^2+y_0=0$

Theo giả sử ở trên thì x_0 là một nghiệm của $x^2-(ky_0-1)x+y_0{}^2+y_0=0$. Theo định lý Viet thì

$x_1=ky_0-1-x_0=\dfrac{y_0^2+y_0}{x_0}$ cũng là một nghiệm của $x^2-(ky_0-1)x+y_0{}^2+y_0=0$.

Dễ thấy x_1 là một số nguyên dương, vì thế $\left(x_1;y_0\right)$ cũng là một nghiệm nguyên dương của đã cho. Từ giả thiết x_0+y_0 nhỏ nhất ta suy ra $x_1+y_0\ge x_0+y_0$

Tức là $\frac{y_0^2+y_0}{x_0}\ge x_0$, suy ra $y_0^2+y_0\ge x_0^2$. Từ đây ta có bất đẳng thức kép

$$y_0^2\le x_0^2\le y_0^2+y_0\le\left(y_0+1\right)^2$$

Suy ra $x_0=y_0$. Thay vào phương trình $x^2+y^2+x+y=kxy$ ta được $2+\frac{2}{x_0}=k$. Suy ra x_0 chỉ có thể bằng 1 hoặc 2, tương ứng k bằng 4 hoặc 3.

Với $k=3$ thì phương trình có nghiệm $\left(2;2\right)$ và với $k=4$ thìa phương trình có nghiệm $\left(1;1\right)$.

Vậy $k=3$ và $k=4$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Nhận xét: Ta cũng có thể đánh giá k khác một chút, như sau:

Cách 1. Từ đẳng thức $x_0^2+y_0^2+x_0+y_0=kx_0y_0$, chia hai vế cho x_0y_0 ta được

$$\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{1}{x_0}=k$$

Mặt khác, cũng theo lý luận ở trên thì $ky_0-1-x_0\ge x_0$ nên suy ra $\frac{x_0}{y_0}\le\frac{k}{2}-\frac{1}{2y_0}$.

Từ đó ta có $k\le\frac{k}{2}-\frac{1}{2y_0}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{1}{x_0}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2y_0}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{x_0}\le\frac{k}{2}+\frac{5}{2}$

Từ đó suy ra $k\le 5$. Hơn nữa k chỉ có thể bằng 5 khi $x_0=y_0=1$,trường hợp này dẫn đến mâu thuẫn. Với $k=3$ thì phương trình có nghiệm $\left(2;2\right)$ và với $k=4$ thìa phương trình có nghiệm $\left(1;1\right)$.

Trường hợp $k\le 2$ rõ ràng là vô nghiệm.

Cách 2. Lý luận như trên thì $x_0\le x_1=\frac{y_0^2+y_0}{x_0}\le y_0+1$. Như vậy y_0+1 nằm ngoài hai nghiệm của tam thức $f\left(x\right)=x^2-\left(ky_0-1\right)x+y_0^2+y_0$, suy ra $f\left(y_0+1\right)\ge 0$.

Từ đó ta được $k\le\frac{2\left(y_0+1\right)}{y_0}=2+\frac{2}{y_0}\le 4$. Đến đây ta xét tương tự như trên

Phương pháp 6. Phương pháp lùi dần vô hạn.

Ý tưởng của phương pháp lùi dần vô hạn có thể hiểu như sau:

Giả sử $(x_0;y_0;z_0)$ là nghiệm của $f(x;y;z)=0$. Nhờ những biến đổi và suy luận số học ta tìm được một nghiệm khác $(x_1;y_1;z_1)$ sao cho các nghiệm quan hệ với bộ nghiệm đầu tiên bởi một tỉ số k nào đó, chẳng hạn $x_0=kx_1;y_0=ky_1;z_0=kz_1$. Lập luận tương tự ta lại được bộ số nguyên $(x_2;y_2;z_2)$ thỏa mãn $x_1=kx_2;y_1=ky_1;z_1=kz_2$. Quá trình cứ tiếp tục dẫn đến $x_0;y_0;z_0$ cùng chia hết cho k^n với n là một số tự nhiên tuỳ ý . Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$. Để rõ ràng hơn ta xét các ví dụ sau

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+2y^3=4z^3$

Lời giải

Từ phương trình $x^3+2y^3=4z^3$ (1) ta thấy

Hiển nhiên $x \vdots 2$. Đặt $x=2x_1$ với x_1 nguyên. Thay vào phương trình (1) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$4x_1^3+y^3=2z^3 \qquad (2)$$

Do đó $y \vdots 2$. Đặt $y=2y_1$ với y_1 nguyên. Thay vào phương trình (2) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$2x_1^3+4y_1^3=z^3 \qquad (3)$$

Do đó $z \vdots 2$. Đặt $z=2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào phương trình (3) rồi chia hai vế cho 2 được:

$$x_1^3+2y_1^3=4z_1^3 \qquad (4)$$

Như vậy nếu $(x;y;z)$ là nghiệm của phương trình (1) thì $(x_1;y_1;z_1)$ cũng là nghiệm của phương trình (1) trong đó $x=2x_1,y=2y_1,z=2z_1$.

Lập luận hoàn toán tương tự như trên ta được $(x_2;y_2;z_2)$ cũng là nghiệm của phương trình (1) trong đó $x_1=2x_2,y_1=2y_2,z_1=2z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến x, y, z cùng chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉa xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$.

Đó là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình đã cho.

Nhận xét: *Từ phương trình đã cho ta phát hiện ra các biến x, y, z cùng chia hết cho 2, khi đó thực hiện phép đặt* $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ *và thay vào phương trình ban đầu ta được* $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$*, từ phương trình này lại thấy các biến* $x_1; y_1; z_1$ *cũng chia hết cho 2. Từ đó ta được* $x; y; z$ *cùng chia hết cho* 2^2*. Quá trình được thực hiện như vậy liên tục thì ta được* $x; y; z$ *cùng chia hết cho* 2^k *với k là số nguyên dương bất kì. Từ đây ta suy ra được* $x = y = z = 0$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 = 7z^2$

Lời giải

Ta biết rằng một số chính phương khi chia cho 7 có số dư là 0; 1; 2; 4.

Do đó từ phương trình trên ta suy ra được $x^2 + y^2$ chia hết cho 7, do đó x^2 và y^2 cùng chia hết cho 7.

Do 7 là số nguyên tố nên suy ra x^2 và y^2 cùng chia hết cho 49.

Từ đó ta được $7z^2$ chia hết cho 49 nên z^2 chia hết cho 7, suy ra z chia hết cho 7.

Đặt $x = 7x_2; y = 7y_1; z = 7z_1$ và thay vào phương trình đã cho ta thu được $x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2$.

Lặp lại các chứng minh như trên ta suy ra được $x_1; y_1; z_1$ chia hết cho 7, do đó x; y; z chia hết cho 7^2.

Tiếp tục các suy luận ta suy ra được x; y; z chia hết cho $7^k, k \in N$.

Từ đó suy ra $x = y = z = 0$. Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 = az^2$, với $a = 4k - 1\left(k \in N^*\right)$

Lời giải

Ta viết lại phương trình là $x^2 + y^2 = (4k - 1)z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4kz^2$

Do đó suy ra $x^2 + y^2 + z^2$ là số chẵn, khi đó có hai trường hợp xẩy ra

- Trường hợp 1: Trong ba số x, y, z có hai số lẻ và một số chẵn. Nên trong ba số x^2, y^2, z^2 coa hai số lẻ và một số chẵn.

Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4 và số chính phương lẻ thì chia 4 dư 1.

Do đó $x^2+y^2+z^2$ chia 4 dư 2, mà $4kz^2$ chia hết cho 4.

Suy ra trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

- Trường hợp 2: Cả ba số x, y, z đều là số chẵn. Khi đó ta đặt $x=2x_1; y=2y_1; z=2z_1$ và thay vào phương trình đã cho ta được $x_1^2+y_1^2+z_1^2=4kz_1^2$

Lặp lại các chứng minh như trên ta suy ra được $x_1; y_1; z_1$ chia hết cho 2, do đó x; y; z chia hết cho 2^2.

Tiếp tục các suy luận ta suy ra được x; y; z chia hết cho $2^k, k \in N$.

Từ đó suy ra $x=y=z=0$. Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y;z)=(0;0;0)$.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$

Lời giải

Ta có nhận xét: Một số chính phương lẻ khi chia cho 4 có số dư là 1 và một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4.

Do x^2y^2 là số chính phương nên khi chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1.

- Nếu x^2y^2 là số lẻ thì x và y cùng là số lẻ, khi đó x^2 và y^2 chia cho 4 có số dư là 1.

Từ đó $x^2+y^2+z^2$ chia cho 4 có số dư là 2 hoặc 3, điều này vô lí.

- Nếu x^2y^2 là số chẵn, khi đó có hai trường hợp xẩy ra

+ Trường hợp 1: Trong hai số x và y có một số chẵn và một số lẻ. hông mất tính tổng quát ta giả sử x là số chẵn và y là số lẻ. Khi đó x^2+y^2 chia 4 dư 1 nên $x^2+y^2+z^2$ chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 1, điều này vô lí.

+ Trường hợp 2: Cả hai số x và y đều là số chẵn, khi đó x^2+y^2 và x^2y^2 cùng chia hết cho 4, do đó z^2 phải chia hết cho 4 hay z là số chẵn.

Đặt $x=2x_2; y=2y_1; z=2z_1$ với $x_1; y_1; z_1$ là số nguyên và thay vào phương trình ban đầu ta được

$$4x_1^2+4y_1^2+4z_1^2=16x_1^2y_1^2 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1^2y_1^2$$

Đến đây lập luận tương tự như trên ta được $x_1; y_1; z_1$ là các số chẵn. Do đó bằng phương pháp lùi dần vô hạn ta chứng minh được phương trình có nghiệm duy nhấ là $(x;y;z)=(0;0;0)$.

Ví dụ 5. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + 15y^3 = 18z^3$

Lời giải

Giả sử bộ ba số nguyên $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ là nghiệm của phương trình.

Dễ thấy nếu một trong ba số trên bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng 0 nên $(0;0;0)$ là một nghiệm của phương trình.

Xét cả ba số đều khác 0, đặt $d = (x_0; y_0; z_0)$, khi đó ta có $x_0 = dx_1; y_0 = dy_1; z_0 = dz_1$ với $x_1; y_1; z_1$ nguyên và $(x_1; y_1; z_1) = 1$.

Ta được $x_1^3 + 15y_1^3 = 18z_1^3$. Từ đó suy ra x_1 chia hết cho 3.

Đặt $x_1 = 3x_2$ và thay vào phương trình $x_1^3 + 15y_1^3 = 18z_1^3$ ta được $9x_2^3 + 5y_1^3 = 6z_1^3$, suy ra y_1 chia hết cho 3. Đặt $y_1 = 3y_2$, ta lại được $3x_2^3 + 45y_2^3 = 2z_1^3$. Suy ra z_1 chia hết cho 3.

Suy ra $x_1; y_1; z_1$ có ước chung là 3, mâu thuẫn $(x_1; y_1; z_1)$

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm nguyên duy nhất là $(0;0;0)$

III. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN.

Phương trình nghiệm nguyên rất đa dạng và phong phú, nó có thể là phương trình một ẩn hay nhiều ẩn. Nó có thể là phương trình bậc nhất hoặc bậc cao. Cũng có những phương trình dạng đa thức hoặc dạng lũy thừa. Ta có thể chia phương trình nghiệm nguyên thành một số dạng như sau.

1. Phương trình nghiệm nguyên dạng đa thức.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $6x + 15y + 10z = 3$

Lời giải

Dễ thấy 6x và 15y chia hết cho 3 nên từ phương trình ta được $10z \vdots 3$ nên $z \vdots 3$.

Đặt $z = 3k$ với k là một số nguyên. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$6x + 15y + 10.3k = 3 \Leftrightarrow 2x + 5y + 10k = 1$$

Đưa về phương trình hai ẩn x, y với các hệ số tương ứng 2 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau

$$2x + 5y = 1 - 10k \Leftrightarrow x = \frac{1 - 10k - 5y}{2} = -5k - 2y + \frac{1 - y}{2}$$

Do x, y, k là các số nguyên nên $\frac{1-y}{2}$ là số nguyên. Đặt $t=\frac{1-y}{2}$ với t nguyên.

Từ đó ta được $\begin{cases} y=1-2t \\ x=-5k-2(1-2t)+t=5t-5k-2 \\ z=3k \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y;z)=(5t-5k-2;1-2t;3k)$ với t, k là các số nguyên tùy ý.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+y^2-xy=2x-3y-2$.

Lời giải

Cách 1. Phương trình đã cho được viết lại thành $y^2+(3-x)y+(x^2-2x+2)=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x có y là tham số, khi đó ta có

$$\Delta=(3-x)^2-4(x^2-2x+2)=-3x^2+2x+1$$

Để phương trình $y^2+(3-x)y+(x^2-2x+2)=0$ có nghiệm thì $\Delta\ge 0$ hay ta có

$$-3x^2+2x+1\ge 0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+1)\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le x\le 1$$

Do x nhận các giá trị nguyên nên ta được $x=0$ hoặc $x=1$

+ Với $x=0$, thay vào phương đã cho ta được $y^2+3y+2=0 \Leftrightarrow y=-1; y=-2$

+ Với $x=1$, thay vào phương đã cho ta được $y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;-1),(0;-2),(1;-1)$.

Cách 2. Phương trình đã cho được viết lại thành $(x-y)^2+(x-2)^2+(y+3)^2=9$

Ta thấy 9 có hai cách viết thành tổng của ba số chính phương đó là $9=0+0+9$ hoặc $9=1+4+4$.

Khi đó ta xét các giá trị của $|x-y|;|x-2|;|y+3|$ bằng bảng sau:

$\lvert x-y\rvert$	$\lvert x-2\rvert$	$\lvert y+3\rvert$	Nhận xét
3	0	0	$x=2; y=-3$ và $\lvert x-y\rvert=3$
0	3	0	$x=y=-3$ và $\lvert x-2\rvert=3$
0	0	3	$x=y=2$ và $\lvert 3+3\rvert=3$
1	2	2	$x\in\{0;4\}, y\in\{-1;-5\}$ và $\lvert x-y\rvert=1$

			Khi đó chỉ có $x=0; y=-1$ thỏa mãn
2	1	2	$x\in\{1;34\}, y\in\{-1;-5\}$ và $\lvert x-y\rvert=2$ Khi đó chỉ có $x=1; y=-1$ thỏa mãn
2	2	1	$x\in\{0;4\}, y\in\{-2;-4\}$ và $\lvert x-y\rvert=2$ Khi đó chỉ có $x=0; y=-2$ thỏa mãn

Từ bảng trên ta được các nghiêm của phương trình là $(x;y)=(0;-1),(0;-2),(1;-1)$.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $(2x-y-2)^2=7(x-2y-y^2-1)$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$(2x-y-2)^2=7(x-2y-y^2-1) \Leftrightarrow 2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0$$

Đặt $t=2x-y-2$ với t nguyên, khi dó phương trình trên trở thành

$2t^2-7t+7(2y^2+3y)=0$.

Đến đây ta có thể giải quyết phương trình theo hai cách sau:

Cách 1. Tiếp biến đổi tương đương phương trình ta được

$$2t^2-7t+7(2y^2+3y)=0 \Leftrightarrow 16t^2-56t+49+7(16y^2+24y+9)=112$$

Hay ta được $(4t-7)^2+7(4y+3)^2=112$. Do t nguyên nên $(4t-7)^2>0$.

Suy ra ta được $7(4y+3)^2<112$ nên $-4<4y+3<4 \Leftrightarrow -7<4y<1$

Do y nhận giá trị nguyên nên ta được $y\in\{-1;0\}$.

- Với $y=-1$, thay vào phương trình $2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0$ ta được phương trình $(2x-1)^2=7x$, suy ra $x\geq 0$ và $(2x-1)^2 \vdots x$.

Dễ thấy $(x,2x-1)=1$ nên từ $(2x-1)^2 \vdots x$ ta được $x=1$.

Thay $(x;y)=(1;-1)$ vào phương trình ban đầu ta thấy không thỏa mãn.

- Với $y=0$, thay vào phương trình $2(2x-y-2)^2-7(2x-y-2)+7(2y^2+3y)=0$ ta được phương trình $4(x-1)^2-7(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x-11)=0$. Từ đây ta được $x=1$

Thay $(x;y)=(1;0)$ vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $(x;y)=(1;0)$.

Cách 2. Ta xét các trường hợp sau:

• Với $y=-1$, thay vào phương trình $2\left(2x-y-2\right)^2-7\left(2x-y-2\right)+7\left(2y^2+3y\right)=0$ ta được phương trình $\left(2x-1\right)^2=7x$, suy ra $x\ge 0$ và $\left(2x-1\right)^2 \vdots x$.

Dễ thấy $\left(x,2x-1\right)=1$ nên từ $\left(2x-1\right)^2 \vdots x$ ta được $x=1$.

Thay $\left(x;y\right)=\left(1;-1\right)$ vào phương trình ban đầu ta thấy không thỏa mãn.

• Với $y\le -2$ hoặc $y\ge 0$, khi đó ta được $2y^2+3y=y\left(2y+3\right)\ge 0$

Do đó từ phương trình $2t^2-7t+7\left(2y^2+3y\right)=0$ ta suy ra được $2t^2-7t\le 0$ hay $t\left(2t-7\right)\le 0$.

Từ đó ta được $0\le t\le 3$.

Mặt khác cũng từ phương trình $2t^2-7t+7\left(2y^2+3y\right)=0$ ta suy ra được $t^2 \vdots 7$ nên $t \vdots 7$.

Do đó ta suy ra được $t=0$, suy ra $7\left(2y^2+3y\right)=0 \Rightarrow y\left(2y+3\right)=0 \Rightarrow y=0$.

Từ đó ta tìm được $x=1$. Thay $\left(x;y\right)=\left(1;0\right)$ vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(1;0\right)$.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2xyz=x+y+z+16$

Lời giải

Do vai trò của x, y, z trong phương trình như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $1\le x\le y\le z$.

Khi đó ta được $2xyz\le 3z+16$.

Do z nhận giá trị nguyên dương nên ta có $2xyz\le 3z+16 \Leftrightarrow 2xy\le 3+\frac{16}{z}\le 19$

Từ đó ta được $xy\le 9$. Lại do $1\le x\le y$ nên suy ra $xy\ge x^2$

Từ đó ta được $x^2\le 9$. Do x nguyên dương nên ta được $x\in\left\{1;2;3\right\}$.

+ Với $x=1$ thay vào phương trình ban đầu ta được $2yz=y+z+17$ hay ta được

$$2yz-y-z=17 \Leftrightarrow \left(2y-1\right)\left(2z-1\right)=35$$

Chú ý là $1\le y\le z$ nên ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases}2y-1=1\\2z-1=35\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1\\z=18\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}2y-1=5\\2z-1=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=3\\z=4\end{cases}$$

+ Với $x=2$ thay vào phương trình ban đầu ta được $4yz=y+z+18$ hay ta được

$$4yz-y-z=18 \Leftrightarrow (4y-1)(4z-1)=73$$

Chú ý là $1\le y\le z$ nên ta có $\begin{cases}4y-1=1\\4z-1=73\end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên dương.

+ Với $x=3$ thay vào phương trình ban đầu ta được $6yz=y+z+19$ hay ta được

$$6yz-y-z=19 \Leftrightarrow (6y-1)(6z-1)=115$$

Chú ý là $1\le y\le z$ nên ta có các trường hợp sau $\begin{cases}6y-1=1\\6z-1=115\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}6y-1=5\\6z-1=23\end{cases}$

Ta thấy $\begin{cases}6y-1=1\\6z-1=115\end{cases}$ không có nghiệm nguyên dương và $\begin{cases}6y-1=5\\6z-1=23\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1\\z=4\end{cases}$ loại do $x\le y$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $(x;y;z)=(1;1;18),(1;3;4)$ và các hoán vị của chúng.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình: $7y^2-6x^2=x-y$, với $x>y>0$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$7y^2-6x^2=x-y \Leftrightarrow y^2=6x^2-6y^2+x-y \Leftrightarrow y^2=(x-y)(6x+6y+1)$$

Gọi $d=(x,y)$, khi đó ta được $x=dm; y=dn$ với $m,n\in N^*$ và $(m,n)=1$.

Từ đó suy ra $x-y=d(m-n)$. Đặt $m-n=k$, do $x>y>0$ nên $k=m-n>0$.

Thay $x-y=dk$ vào phương trình $y^2=(x-y)(6x+6y+1)$ ta được

$$(dn)^2=dk.(6dm+6dn+1) \text{ hay } dn^2=k(6dm+6dn+1)\Leftrightarrow dn^2=6dmk+6dnk+k$$

Ta có $(m,n)=1$ nên $(n,m-n)=1$ hay $(n,k)=1$. Lại có $dn^2 \vdots k$ nên suy ra $d \vdots k$.

Mặt khác từ $dn^2=6dmk+6dnk+k$ suy ra $6dmk+6dnk+k$ chia hết cho d nên ta được k chia hết cho d. Như vậy ta suy ra được $k=d$ hay $d=m-n$.

Do đó ta suy ra được $x-y=d^2 \Rightarrow x=d^2+y=d^2+dn$. Suy ra $dm=dn+d^2$

Do $d=k$ nên từ $dn^2=6dmk+6dnk+k$ ta có $n^2=6dm+6dn+1$.

Từ đó ta được $n^2=6(dn+d^2)+6nd+1=6d^2+12nd+1$ hay $n^2-12nd-(6d^2+1)=0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n thì giải ra ta được

$n = 6d + \sqrt{42d^2 + 1}$.

Từ nghiệm trên ta suy ra được d nhỏ nhất thì n nhỏ nhất, từ đó dẫn đến x và y nhỏ nhất.

+ Khi $d = 1$ ta được $n = 6 + \sqrt{43}$, loại.

+ Khi $d = 2$ ta được $n = 6.2 + \sqrt{42.4 + 1} = 12 + 13 = 25$

Từ đó ta được $x = dn + d^2 = 2.25 + 2^2 = 54$ và $y = dn = 2.25 = 50$.

Vậy nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình là $(x; y) = (54; 50)$.

Ví dụ 6. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $4xyz = x + 2y + 4z + 3$.

Lời giải

Do x, y, z là các giá trị nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau

- Với $x = 1$ thì từ phương trình đã cho ta có phương trình $4yz = 2y + 4z + 4$

Hay ta được $2yz - y - 2z = 2 \Leftrightarrow (y-1)(2z-1) = 3$.

Từ đó suy ra $y - 1$ và $2z - 1$ là các ước của 3. Chú ý là y, z nguyên dương nên ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases} y-1=1 \\ 2z-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y-1=3 \\ 2z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=1 \end{cases}$$

- Với $x \ge 2$ thì phương trình đã cho ta được

$2y + 4z + 3 = x(4yz - 1) \ge 2(4yz - 1) = 8yz - 2$

Hay ta được $8yz - 2y - 4z \le 5 \Leftrightarrow (2y-1)(4z-1) \le 6$.

Do y và z nguyên dương nên $4z - 1 \ge 3$ nên $2y - 1 \le 2 \Rightarrow 2y \le 3 \Rightarrow y = 1$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được

$4xz = x + 4z + 5 \Leftrightarrow 4xz - x - 4z = 5 \Leftrightarrow (x-1)(4z-1) = 6$

Do đó $x - 1$ và $4z - 1$ là các ước của 6. Chú ý là $4z - 1$ là số lẻ và $4z - 1 \ge 3$ nên ta được

$$\begin{cases} 4z-1=3 \\ x-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương là $(x; y; z) = (1; 2; 2), (1; 4; 1), (3; 1; 1)$.

Ví dụ 7. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $xyz = 2(x+y+z)$.

Lời giải

Cách 1. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \le y \le z$.

Khi đó từ phương trình $xyz = 2(x+y+z)$ ta được $xyz \le 3.2z \Rightarrow xy \le 6$.

Do x, y nguyên dương nên ta suy ra được $xy \in \{1;2;3;4;5;6\}$. Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $xy = 1$, ta có $x = y = 1$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $z = -4$, loại.

+ Với $xy = 2$, ta có $x = 1; y = 2$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $2z = 2z + 6$, loại.

+ Với $xy = 3$, ta có $x = 1; y = 3$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $z = 8$, nhận.

+ Với $xy = 4$, ta có $x = 1; y = 4$ hoặc $x = y = 2$. Thay vao phương trình ban đầu ta được

Khi $x = 1; y = 4$ thì $z = 5$ và khi $x = y = 2$ thì $z = 4$.

+ Với $xy = 5$, ta có $x = 1; y = 5$. Thay vao phương trình ban đầu ta được $z = 4$, loại do không thỏa mãn điều kiện $y \le z$.

+ Với $xy = 6$, ta có $x = 1; y = 6$ hoặc $x = 2; y = 3$. Thay vao phương trình ban đầu ta được

Khi $x = 1; y = 6$ thì $2z = 7$ (loại) và khi $x = 2; y = 3$ thì $2z = 7$ (loại).

Vậy bộ ba số cần tìm là $(1;3;8),(1;4;5),(2;2;4)$.

Cách 2. Do x, y, z nguyên dương nên ta biến đổi tương đương phương trình thành $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{2}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \le x \le y \le z$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$ suy ra $x^2 \le 6$ nên $x^2 \in \{1;4\} \Rightarrow x \in \{1;2\}$

Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $x = 1$, thay vào phương trình $xyz = 2(x+y+z)$ ta được

$$2(1+y+z) = yz \Leftrightarrow (y-2)(z-2) = 6$$

Chú ý là $y - 2 \le z - 2$ nên ta được $\begin{cases} y-2=1 \\ z-2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y-2=2 \\ z-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=5 \end{cases}$

+ Với $x = 2$, thay vào phương trình $xyz = 2(x + y + z)$ ta được

$$2(2 + y + z) = 2yz \Leftrightarrow (y - 1)(z - 1) = 3$$

Chú ý là $y - 1 \le z - 1$ nên ta được $\begin{cases} y - 1 = 1 \\ z - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$

Vậy bộ ba số cần tìm là $(1;3;8),(1;4;5),(2;2;4)$.

Ví dụ 8. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $6x^3 - xy(11x + 3y) + 2y^3 = 6$.

Lời giải

Biến đổi tương đường phương trình như sau:

$$6x^3 - xy(11x + 3y) + 2y^3 = 6 \Leftrightarrow 6x^3 - 12x^2y + x^2y - 2xy^2 + 2y^3 = 6$$
$$\Leftrightarrow (x - 2y)(6x^2 + xy - y^2) = 6 = (x - 2y)(2x + y)(3x - y) = 6$$

Từ đó ta được $x - 2y; 2x + y; 3x - y$ là các ước số của 6.

Mặt khác ta lại thấy $x - 2y + 2x + y = 3x - y$ nên chỉ xẩy ra các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x - 2y = -3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 4: $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x - 2y = 2 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 5: $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x - 2y = -3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 6: $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x - 2y = 2 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $(x; y) = (1;1),(-1;-1)$

Ví dụ 9. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$

Lời giải

Cách 1. Biến đổi tương đương ta được $x^3 - y^3 = xy + 8 \Leftrightarrow \left(x - y\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 8 + xy$

Từ đó ta được $\left|x - y\right|.\left|x^2 + xy + y^2\right| = \left|xy + 8\right|$

Dễ thấy $x \ne y$, vì nếu $x = y$ thì phương trình đã cho trở thành $0 = x^2 + 8$, loại.

Do x, y là các số nguyên nên $\left|x - y\right| \ge 1$. Từ đó suy ra $\left|x^2 + xy + y^2\right| \le \left|xy + 8\right|$

Hay ta được $x^2 + xy + y^2 \le \left|xy + 8\right|$. Xét hai trường hợp:

+ Nếu $xy + 8 < 0$. Khi đó $x^2 + xy + y^2 \le \left|xy + 8\right|$ trở thành

$$x^2 + xy + y^2 \le -xy - 8 \Leftrightarrow \left(x + y\right)^2 \le -8$$

Trường hợp này loại

+ Nếu $xy + 8 \ge 0$. Khi đó $x^2 + xy + y^2 \le \left|xy + 8\right|$ trở thành

$$x^2 + xy + y^2 \le xy + 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 8$$

Từ đó ta suy ra $x^2;\ y^2 \in \left\{0; 1; 4\right\}$

- Nếu $x = 0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $y^3 = -8 \Rightarrow y = -2$
- Nếu $y = 0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
- Nếu x và y khác 0, khi đó thì $x^2;\ y^2 \in \left\{1; 4\right\}$.

Do $x \ne y$ nên chỉ có các khả năng là $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Từ đó ta thấy trong hai số x và y có một số chẵn và một số lẻ. Khi đó vế trái của phương trình đã cho lẻ còn vế phải của phương trình đã cho chẵn, do đó các khả năng trênkhông xảy ra.

Vậy các nghiệm của phương trình là $\left(x; y\right) = \left(0; -2\right), \left(2; 0\right)$.

Cách 2. Biến đổi tương đương phưng trình ta được

$$x^3 - y^3 - xy = 8 \Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 27xy = 216 \Leftrightarrow 27x^3 - 27y^3 - 1 - 27xy = 215$$

Hay ta được $\left(3x\right)^3 + \left(-3y\right)^3 + \left(-1\right)^3 - 3.3x.\left(-3y\right)\left(-1\right) = 215$. Áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}\left(a + b + c\right).\left[\left(a - b\right)^2 + \left(b - c\right)^2 + \left(c - a\right)^2\right]$$

Với $a = 3x; b = -3y, c = -1$, ta biến đổi phương trình trên thành

$$\left(3x-3y-1\right).\left[\frac{\left(3x+3y\right)^2+\left(1-3y\right)^2+\left(3x+1\right)^2}{2}\right]=215$$

Đặt $A=\frac{\left(3x+3y\right)^2+\left(1-3y\right)^2+\left(3x+1\right)^2}{2}$ nên ta được $\left(3x-3y-1\right).A=215$

Dễ thấy $A>0$ nên A và $3x-3y-1$ là ước tự nhiên của 215. Phân tích ra thừa số nguyên tố thì 215 có bốn ước tự nhiên là 1; 5; 43; 215.

Do $3x-3y-1$ chi cho 3 dư 2 nên $3x-3y-1\in\left\{5;215\right\}$. Từ đó ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Với $\begin{cases}3x-3y-1=5\\A=43\end{cases}$.

Khi đó từ $3x-3y-1=5\ \ x-y=2$. Thay $y=x-2$ vào $A=43$ ta được

$$\left[3x+3\left(x-2\right)\right]^2+\left[1-3\left(x-2\right)\right]^2+\left(3x+1\right)^2=86$$

Rút gọn ta được $x\left(x-2\right)=0\Leftrightarrow x=0;\ x=2$. Từ đó tìm được các nghiệm là

$\left(0;-2\right),\left(2;0\right)$

- Trường hợp 2: Với $\begin{cases}3x-3y-1=215\\A=1\end{cases}$

Khi đó ta được $\left(3x+3y\right)^2+\left(1-3y\right)^2+\left(3x+1\right)^2=2$

Nhận thấy tổng của ba số chính phương bằng 2 nên có một số bằng 0, hai số bằng số 1. Số bằng 0 không thể là $1-3y$ hoặc $1+3x$, do đó ta có $3x+3y=0$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases}3x+3y=0\\\left(1-3y\right)^2=1\\\left(3x+1\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, nghiệm bên không thỏa mãn $3x-3y-1=215$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right)=\left(0;-2\right),\left(2;0\right)$.

Cách 3. Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^3-y^3=xy+8\Leftrightarrow\left(x-y\right)^3+3xy\left(x-y\right)=xy+8$$

Đặt $a=x-y;b=xy$, khi đó từ phương trình trên ta được

$$a^3+3ab=b+8\Leftrightarrow a^3-8=-b\left(3a-1\right)$$

Từ đó suy ra $\left(a^3-8\right)\vdots\left(3a-1\right)$ nên $27\left(a^3-8\right)\vdots\left(3a-1\right)$ hay $\left(27a^3-1-215\right)\vdots\left(3a-1\right)$

Do $\left(27a^3-1\right)\vdots\left(3a-1\right)$ nên ta được $215\vdots\left(3a-1\right)$ hay $3a-1$ là ước của 215

Do đó ta được $3a-1\in\{\pm1;\pm5;\pm43;\pm215\}$

Do $3a-1$ chia cho 3 dư 2 nên $3a-1\in\{-1;5;-43;215\}$. Từ đó ta có bảng sau

$3a-1$	-1	5	-43	215
a	0	2	-14	72
$b=\dfrac{a^3-8}{1-3a}$	-8	0	-64	-1736

Chú ý rằng $(x-y)^2+4xy\ge 0$ nên $a^2+4b\ge 0$, do đó trong bốn trường hợp trên chỉ có $a=2;b=0$ thỏa mãn. Do đó ta được $x-y=2;\ xy=0$

Từ đó ta có các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;-2),(2;0)$.

Ví dụ 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3(x^2-xy+y^2)=7(x+y)$

Lời giải

Cách 1. Từ phương trình ta được $7(x+y)\vdots 3$, mà $(3,7)=1$ nên suy ra $x+y\vdots 3$.

Đặt $x+y=3m, m\in Z$, khi đó phương trình trở thành $x^2+y^2-xy=7m$.

Từ đó suy ra $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=(3m)^2-7m$ hay $3xy=9m^2-7m$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $xy\le\frac{1}{4}(x+y)^2$ nên ta được

$9m^2-7m\le\frac{3}{4}(x+y)^2$

Hay ta được $3.9m^2\ge 4(9m^2-7m)\Leftrightarrow m(28-9m)\ge 0\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{28}{9}$.

Do m là số nguyên nên ta suy ra được $m=\{0;1;2;3\}$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $m=0$ suy ra $x+y=0$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=0\Leftrightarrow(x+y)^2-3xy=0\Leftrightarrow 3xy=0\Leftrightarrow x=y=0$$

+ Với $m=1$ suy ra $x+y=3$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=7\Leftrightarrow(x+y)^2-3xy=7\Leftrightarrow 3xy=2$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=2$ suy ra $x+y=6$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=14\Leftrightarrow(x+y)^2-3xy=7\Leftrightarrow 3xy=22$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=3$ suy ra $x+y=9$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=21 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=21 \Leftrightarrow 3xy=60 \Leftrightarrow xy=20$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; y=5 \\ x=5; y=4 \end{array}\right.$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(0;0),(4;5),(5;4)$

Cách 2. Từ phương trình ta được $7(x+y)\vdots 3$, mà $(3,7)=1$ nên suy ra $x+y\vdots 3$.

Đặt $x+y=3m, m\in Z$, khi đó phương trình trở thành $x^2+y^2-xy=7m$.

Từ đó ta có $\begin{cases} x+y=3m \\ xy=\dfrac{9m^2-7m}{3} \end{cases}$·

Theo định lí Viet thì x và y là nghiệm của phương trình $3X^2-9mX+(9m^2-7m)=0$

Ta có $\Delta=-27m^2+84m$. Để phương tình có nghiệm thì

$\Delta=-27m^2+84m\ge 0 \Leftrightarrow 0\le m\le \dfrac{28}{9}$

Do m là số nguyên nên ta suy ra được $m=\{0;1;2;3\}$. Ta xét các trường hợp sau

+ Với $m=0$ suy ra $x+y=0$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=0 \Leftrightarrow 3xy=0 \Leftrightarrow x=y=0$$

+ Với $m=1$ suy ra $x+y=3$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=7 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=7 \Leftrightarrow 3xy=2$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=2$ suy ra $x+y=6$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=14 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=7 \Leftrightarrow 3xy=22$$

Trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên

+ Với $m=3$ suy ra $x+y=9$, khi đó ta được phương trình

$$x^2-xy+y^2=21 \Leftrightarrow (x+y)^2-3xy=21 \Leftrightarrow 3xy=60 \Leftrightarrow xy=20$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; y=5 \\ x=5; y=4 \end{array}\right.$

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(0;0),(4;5),(5;4)$

Ví dụ 11. Tìm các số nguyên dương m để phương trình $x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$ có nghiệm nguyên dương.

Lời giải

Trong tất cả các nghiệm nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn phương trình, giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm thỏa mãn $x_0 + y_0$ nhỏ nhất.

Do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_0 \le y_0$.

Xét phương trình bậc hai có ẩn y là $y^2 - mx_0y + x_0^2 + 1 = 0$ (*).

La có y_0 là một nghiệm của phương trình (*). Ta gọi nghiệm còn lại là y_1.

Khi đó theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} y_0 + y_1 = mx_0 \\ y_0.y_1 = x_0^2 + 1 \end{cases}$.

Dễ dàng nhận thấy y_1 có giá trị nguyên và từ cách chọn $(x_0;y_0)$ ta suy ra được $y_0 \le y_1$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $x_0 = y_0$ thì từ phương trình ban đầu ta được $m = 2 + \frac{1}{x_0^2}$. Nên để m và x_0 có giá trị nguyên thì $x_0 = 1$ và $m = 3$.

Với $m = 3$ ta thấy $(x;y) = (1;1)$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

- Trường hợp 2: Nếu $y_0 = y_1$ thì từ $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ hay ta được $(y_0 - x_0)(y_0 + x_0) = 1$.

Từ đó ta suy ra được $\begin{cases} y_0 - x_0 = 1 \\ y_0 + x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$. Trường hợp này loại vì $(x_0;y_0)$ nguyên dương.

- Trường hợp 3: Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ khi đó ta được $y_0 \ge x_0 + 1;\ y_1 \ge x_0 + 2$.

Kết hợp với $y_0.y_1 = x_0^2 + 1$ ta được $x_0^2 + 1 \ge x_0^2 + 3x_0 + 2 \Rightarrow 3x_0 + 1 \le 0$, điều này vô lí vì $x_0 > 0$.

Như vậy để phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương thì $m = 3$ và khi đó phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x;y) = (1;1)$.

Ví dụ 12. Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $2xy - 1 = z(x-1)(y-1)$.

Lời giải

Cách 1. Với các số nguyên dương x, y, z thì ta có $2xy-1$ là số lẻ, do đó $z\left(x-1\right)\left(y-1\right)$ cũng là số lẻ. Từ đó ta được x, y là số chẵn và z là số lẻ. Do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x\ge y$.

Đặt $a=x-1;b=y-1$ nên a, b là các số nguyên lẻ và $a\ge b$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$2\left(a+1\right)\left(b+1\right)-1=zab\Leftrightarrow 2\left(ab+a+b+1\right)-1=zab\Leftrightarrow \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}=z$$

Do đó $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}$ là số tự nhiên khác 0. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a=b$, khi đó $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{4a+1}{a^2}$ là số tự nhiên khác 0 hay

$\frac{a\left(4a+1\right)}{a^2}\in N^*\Rightarrow 4+\frac{1}{a}\in N^*$

Từ đó ta được $a=b=1$. Suy ra $y=z=2$. Thay vào phương trình đã cho ta được $z=7$.

Thử vào phương trình ta được $\left(x;y;z\right)=\left(2;2;7\right)$ thỏa mãn.

- Nếu $a>b\ge 1$, khi đó ta xét các khả năng sau

+ Với $b\ge 4$ thì $a\ge 5$ khi đó $0<\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}\le \frac{2}{5}+\frac{2}{4}+\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$ nên $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}$ không là số tự nhiên khác. Do đó khả nằng này loại. Từ đó suy ra $b<4$, mà b là số lẻ nên $b=3$ hoặc $b=1$.

+ Với $b=1$, khi đó từ $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}$ là số tự nhiên khác 0 ta được $\frac{3}{a}\in N^*$ và $a>1$ ta được $a=3$.

Từ đó suy ra $x=4;y=2$, thay vào phương trình đã cho ta được $z=5$

Thử vào phương trình ta được $\left(x;y;z\right)=\left(4;2;5\right)$ thỏa mãn.

+ Với $b=3$, khi đó từ $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{ab}$ là số tự nhiên ta được $\frac{2}{3}+\frac{7}{3a}\in N^*$ và $a>3$ ta được $a=7$.

Từ đó suy ra $x=8;y=4$, thay vào phương trình đã cho ta được $z=3$

Thử vào phương trình ta được $\left(x;y;z\right)=\left(8;4;3\right)$ thỏa mãn.

Xét đến vai trò của x và y ta được các nghiệm của phương trình là

$$(x;y;z)=(2;2;7),(2;4;5),(4;2;5),(4;8;3),(8;4;3)$$

Cách 2. Với các số nguyên dương x, y, z thì ta có $2xy-1$ là số lẻ, do đó $z(x-1)(y-1)$ cũng là số lẻ. Từ đó ta được x, y là số chẵn và z là số lẻ. Do vai trò của x và y như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y \ge 2$.

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$2xy-1=z(x-1)(y-1) \Leftrightarrow \left[(z-2)x-z\right]\left[(z-2)y-z\right]=z+2$$

Nếu $z=1$, khi đó từ phương trình trên ta được $(x+1)(y+1)=3$. Điều này mâu thuẫn với $x \ge y \ge 2$. Do đó ta được $z \ge 3$. Khi đó ta lại có

$(z-2)x-z \ge (z-2)y-z \ge 2(z-2)-z=z-4>0$

Kết hợp với phương trình trên ta được $z+2 \ge (z-4)^2 \Leftrightarrow (z-2)(z-7) \le 0 \Leftrightarrow 2 \le z \le 7$.

Từ đó ta được $3 \le z \le 7$, mà z là số lẻ nên ta xét các trường hợp sau

- Nếu $z=3$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $(x-3)(y-3)=5$. Kết hợp với $x \ge y \ge 2$ ta suy ra được $\begin{cases} x-3=5 \\ y-3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$
- Nếu $z=5$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $(3x-5)(3y-5)=7$. Kết hợp với $x \ge y \ge 2$ ta suy ra được $\begin{cases} 3x-5=7 \\ 3y-5=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$
- Nếu $z=7$, khi đó từ phương trình đã cho ta được $(5x-7)(5y-7)=9$. Kết hợp với $x \ge y \ge 2$ ta suy ra được $\begin{cases} 5x-7=9 \\ 3y-7=1 \end{cases}$(vô nghiệm) hoặc $\begin{cases} 5x-7=3 \\ 3y-7=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Xét đến vai trò của x và y ta được các nghiệm của phương trình là

$$(x;y;z)=(2;2;7),(2;4;5),(4;2;5),(4;8;3),(8;4;3)$$

Ví dụ 13. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\left(x^2-y^2\right)^2=10y+9$.

Lời giải

Ta thấy $10y+9 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge -\frac{9}{10}$, do y nguyên nên ta được $y \ge 0$.

Chú ý là khi thay x bằng $-x$ thìa phương trình dã cho không đổi, do đó ta có thể giả sử $x \geq 0$

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $y=0$ thì phương trình đã cho trở thành $x^4=9$, trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

+ Nếu $x=0$ thì phương trình đã cho trở thành $y^4=10y+9 \Leftrightarrow y\left(y^3-10\right)=9$. Suy ra 9 chia hết cho y, kết hợp với $y>0$ ta được $y \in \left\{1;3;9\right\}$. Thay lần lượt các giá trị đó vào $y\left(y^3-10\right)=9$ ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

+ Nếu $x \geq 1$ và $y \geq 1$, khi đó ta được $x+y \geq 2$.

Phương trình đã cho được viết lại thành $\left(x+y\right)\left(x-y\right)^2=\dfrac{10y+9}{x+y}$

Do $x+y \geq 2$ nên ta được $\left(x+y\right)\left(x-y\right)^2 \geq 2\left(x-y\right)^2$.

Do $x \geq 1$ nên ta được $10x \geq 10 > 9$, do đó suy ra $\dfrac{10y+9}{x+y} < \dfrac{10y+10x}{x+y}=10$.

Từ các kết quả trên ta suy ra được $2\left(x-y\right)^2 < 10 \Rightarrow \left(x-y\right)^2 < 5$

Ta lại có $\left(x-y\right)^2$ là ước của $10y+9$ nên $\left(x-y\right)^2$ là số lẻ.

Từ đó ta được $\left(x-y\right)^2=1$, thay vào phương trình đã cho ta được $\left(x+y\right)^2=10y+9$.

Cũng từ $\left(x-y\right)^2=1$ ta được $x-y=1$ hoặc $x-y=-1$

- Với $x-y=1$ ta được $x=y+1$ thay vào phương trình $\left(x+y\right)^2=10y+9$ ta được

$$\left(2y+1\right)^2=10y+9 \Leftrightarrow 2y^2-3y-4=0$$

Phương trình trên không có nghiệm nguyên.

- Với $x-y=-1$ ta được $x=y-1$ thay vào phương trình $\left(x+y\right)^2=10y+9$ ta được

$$\left(2y-1\right)^2=10y+9 \Leftrightarrow 2y^2-7y-4=0$$

Giải phương trình trên ta được nghiệm nguyên là $y=4$, từ đó ta được $x=3$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $\left(x;y\right)=\left(3;4\right),\left(-3;4\right)$.

Ví dụ 14. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^4+x^3+x^2+x=y^2+y$

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^4+x^3+x^2+x=y^2+y \Leftrightarrow 4x^4+4x^3+4x^2+4x+1=4y^2+4y+1$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1=\left(2y+1\right)^2$$

- Với $x=-1$, thay vào phương trình ta được $y=-1$.
- Xét $x\ne -1$, ta sẽ chứng minh $\left(2x^2+x\right)^2<\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1<\left(2x^2+x+2\right)^2$

Thật vậy, dễ thấy $3x^2+4x+1=\left(3x+1\right)\left(x+1\right)$ do đó

+ Khi $x>-\frac{1}{3}$ thì ta được $\left(3x+1\right)\left(x+1\right)>0$

+ Khi $x<-1$ thì $\left(3x+1\right)\left(x+1\right)>0$

Từ đó ta được $\left(2x^2+x\right)^2<\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1$

Mặt khác ta có

$$\left(2x^2+x+2\right)^2-\left[\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1\right]$$
$$=\left(2x^2+x\right)^2+4\left(2x^2+x\right)+4-\left(2x^2+x\right)-3x^2-4x-1=5x^2+3>0$$

Như vậy ta có $\left(2x^2+x\right)^2<\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1<\left(2x^2+x+2\right)^2$

Do $\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1$ là số chính phương nên ta suy ra được

$$\left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1=\left(2x^2+x+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^2+x\right)^2+3x^2+4x+1=\left(2x^2+x\right)^2+2\left(2x^2+x\right)+1$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+4x+1=2\left(2x^2+x\right)+1 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

+ Với $x=0$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y^2+y=0 \Rightarrow y=0; y=-1$

+ Với $x=2$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y^2+y=30 \Rightarrow y=5; y=-6$

Thử lại ta được các nghiệm nguyên của phương trình là

$$\left(x;y\right)=\left(0;0\right),\left(0;-1\right),\left(2;5\right),\left(2;-6\right),\left(-1;0\right),\left(-1;-1\right)$$

Ví dụ 15. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện $\left(x^2-9y^2\right)^2=33y+16$.

Lời giải

Do y là số nguyên dương nên $33y+16>0$. Khi đó ta được

$$\left(x^2-9y^2\right)^2=33y+16 \Leftrightarrow x^2-\left(3y\right)^2=\pm\sqrt{33y+16} \Leftrightarrow x^2=\left(3y\right)^2\pm\sqrt{33y+16}$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Xét $y=1$, khi đó ta được $\left[\begin{array}{l} x^2=16 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 4 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$. Do x là số nguyên dương nên suy ra $x=4$.
- Xét $y \ge 2$. Khi đó dễ thấy $6y+1>6y-1>\sqrt{33y+16}$

Thật vậy, ta có $6y-1>0$ khi đó

$$\left(6y-1\right)^2>33y+16 \Leftrightarrow 36y^2-12y+1>33y+16 \Leftrightarrow 9y\left(4y-5\right)-15>0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $y \ge 2$.

Từ đó ta có $\left(3y\right)^2-\sqrt{33y+16}>\left(3y\right)^2-\left(6y-1\right)=\left(3y-1\right)^2$

Do đó $\left(3y-1\right)^2<\left(3y\right)^2-\sqrt{33y+16}<\left(3y\right)^2$ và

$\left(3y\right)^2+\sqrt{33y+16}<\left(3y\right)^2+6y+1=\left(3y+1\right)^2$.

Suy ra ta được $\left(3y\right)^2<\left(3y\right)^2+\sqrt{33y+16}<\left(3y+1\right)^2$.

Như vậy $\left(3y\right)^2\pm\sqrt{33y+16}$ bị kép giữa hai số chính phương liên tiếp nên $\left(3y\right)^2\pm\sqrt{33y+16}$ không thể là số chính phương. Do đó phương trình $x^2=\left(3y\right)^2\pm\sqrt{33y+16}$ không có nghiệm nguyên.

Do đó khi $y \ge 2$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Vậy phương trình có một cặp số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $\left(x;y\right)=\left(4;1\right)$.

Nhận xét: *Ngoài cách giải như trên ta có thể giải bài toán theo các cách sau:*

Cách 1*. Xác định giới hạn giá trị của x rồi xét từng giá trị để tìm y*

Dễ thấy $x-3y\ne 0$ *do đó* $\left(x-3y\right)^2\ge 1$

Từ đó suy ra $\left(x^2-9y^2\right)^2=\left(x-3y\right)^2\left(x+3y\right)^2\ge\left(x+3y\right)^2$

Lại thấy với $x\ge 6$ *thì* $\left(x+3y\right)^2\ge\left(6+3y\right)^2=9y^2+36y+36>33y+16$

Do đó với $x\ge 6$ *thì* $\left(x^2-9y^2\right)^2>33y+16$. *Đến đây ta suy ra được* $x<6$ *nên* $x=1;2;3;4;5$.

Xét từng giá trị của x để tìm y tương ứng.

Cách 2. *Xác định giới hạn giá trị của y rồi xét từng giá trị để tìm x.*

Cũng từ $\left(x^2-9y^2\right)^2=\left(x-3y\right)^2\left(x+3y\right)^2\ge\left(x+3y\right)^2\ge\left(1+3y\right)^2>9y^2+6y$

Suy ra ta được $33y+16>9y^2+6y\Leftrightarrow 9y^2-27y-16<0\Leftrightarrow\left(y+1\right)\left(y-4\right)<0\Rightarrow y<4$

Từ đó ta được $y=1;2;3$. *Đến đây xét các giá trị của y để kiểm tra* $33y+16$ *có phải là số chính phương không.*

Ví dụ 16. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình:

$x^4+y^3=xy^3+1$.

Lời giải

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^4+y^3=xy^3+1 \Leftrightarrow x^4-1+\left(y^3-xy^3\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right)+y^3(1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+x^2+x+1-y^3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^3+x^2+x+1-y^3=0 \end{array}\right.$$

- Với $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, khi đó thay vào phương trình ban đầu ta được $1+y^3=y^3+1$, phương trình này có nghiệm với mọi y nguyên. Do đó phương trình có các nghiệm $(x;y)=(1;t)$ với $t \in Z$.

- Với $x^3+x^2+x+1-y^3=0 \Leftrightarrow x^3+x^2+x+1=y^3$.

Ta có $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên từ phương trình trên ta suy ra được $x^3<y^3$.

Lại có với mọi x nguyên ta luôn có $x(x+1)\geq 0$. Do đó ta được

$$x^3+x^2+x+1 \leq x^3+x^2+x+1+2x(x+1)=(x+1)^3$$

Từ đó suy ra $y^3 \leq (x+1)^3$. Kết hợp lại ta được $x^3<y^3\leq (x+1)^3$ nên ta suy ra $y^3=(x+1)^3$.

Do đó ta được $x(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

+ Khi $x=0$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y=1$.

+ Khi $x=-1$, thay vào phương trình ban đầu ta được $y=0$.

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn phương trình là $(x;y)=(0;1), (-1;0), (1;t)$ với $t \in Z$.

Ví dụ 17. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^4+y^2+13y+1 \leq (y-2)x^2+8xy$

Lời giải

Cách 1. Biết đổi tương đương bất phương trình trên ta được

$$x^4+y^2+13y+1 \leq (y-2)x^2+8xy \Leftrightarrow \left(x^4+2x^2+1\right)-x^2y+y^2+13y-8xy \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4+2x^2+1\right)-2y\left(x^2+1\right)+y^2+x^2y-8xy+13y \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-y+1\right)^2+y\left(x^2-8x+13\right) \leq 0$$

Dễ thấy $\left(x^2-y+1\right)^2 \geq 0$ nên từ bất phương trình trên ta được $y\left(x^2-8x+13\right) \leq 0$.

Mà ta có y là số nguyên dương nên từ $y\left(x^2-8x+13\right)\le 0$ ta được $x^2-8x+13\le 0$.

Ta có $x^2-8x+13\le 0\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x-5\right)\le 0\Leftrightarrow 3\le x\le 5$.

Mà ta lại có x là số nguyên dương nên $x\in\left\{3;4;5\right\}$, đến đây ta xét các trường hợp cụ thể

- Với $x=3$, thay vào $\left(x^2-y+1\right)^2+y\left(x^2-8x+13\right)\le 0$ ta được $\left(10-y\right)^2\le 0\Rightarrow y=10$.

- Với $x=4$, thay vào $\left(x^2-y+1\right)^2+y\left(x^2-8x+13\right)\le 0$ ta được

$$\left(17-y\right)^2-y\le 0\Leftrightarrow y^2-35y+289\le 0\Leftrightarrow \left(y-\frac{35}{2}\right)^2\le\frac{69}{4}\Leftrightarrow \frac{35-\sqrt{69}}{2}\le y\le\frac{35+\sqrt{69}}{2}$$

Do y là số nguyên dương nên suy ra $y\in\left\{14;15;16;17;17;18;19;20;21\right\}$.

- Với $x=5$, thay vào $\left(x^2-y+1\right)^2+y\left(x^2-8x+13\right)\le 0$ ta được $\left(26-y\right)^2\le 0\Rightarrow y=26$.

Vậy các cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn bất phương trình là

$$\left(3;10\right),\left(4;14\right),\left(4;15\right),\left(4;16\right),\left(4;17\right),\left(4;18\right),\left(4;19\right),\left(4;20\right),\left(4;21\right),\left(5;26\right)$$

Cách 2. Biến đổi tương đương bất phương trình trên ta được

$$x^4+y^2+13y+1\le\left(y-2\right)x^2+8xy\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2+y^2+13y\le x^2y+8xy$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta được

$\left(x^2+1\right)^2+y^2\ge 2y\left(x^2+1\right)$

Kết hợp với $\left(x^2+1\right)^2+y^2+13y\ge x^2y+8xy$ ta được $2y\left(x^2+1\right)+13y\le x^2y+8xy$

Hay ta được $yx^2+15y-8xy\le 0\Leftrightarrow y\left(x^2-8x+13\right)\le 0$

Do y là số nguyên dương nên ta có $x^2-8x+13\le 0\Leftrightarrow\left(x-3\right)\left(x-5\right)\le 0\Leftrightarrow 3\le x\le 5$.

Mà ta lại có x là số nguyên dương nên $x\in\left\{3;4;5\right\}$, đến đây ta xét các trường hợp cụ thể như trên ta được các giá trị y tương ứng.

Ví dụ 18. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^5-y^5-xy=32$.

Lời giải

Từ phương trình $x^5-y^5-xy=32$ ta suy ra được x và y đều là số chẵn.

Biến đổi tương đương phương trình ta được

$$x^5-y^5-xy=32\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\right)=32+xy$$

Lại có

$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=(x+y)(x^3+y^3)+x^2y^2=(x+y)^2(x^2-xy+y^2)+x^2y^2\ge 0$

Do đó từ $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=32+xy$ ta suy ra được

$$|x-y|(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=|32+xy|$$

Dễ thấy nếu $x=y$ thì từ phương trình trên ta được $32+x^2=0$ vô nghiệm. Do đó suy ra $x\ne y$.

Từ đó suy ra $|x-y|\ge 1$, nên từ phương trình trên ta được

$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\le|32+xy|$.

Nếu $32+xy<0$ thì từ bất đẳng thức trên ta được $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\le -32-xy$

Hay ta được $(x^2-xy+y^2)(x+y)^2+(x^2y^2+xy+32)\le 0$, tuy nhiên bất đẳng thức này không đúng.

Do vậy ta suy ra được $32+xy\ge 0$. Từ bất đẳng thức trên ta suy ra được

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4\le 32+xy$$

Hay ta được $(x^2-xy+y^2)(x+y)^2+(x^2y^2-xy)\le 32$.

Do $(x^2-xy+y^2)(x+y)^2\ge 0$ nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra được $xy(xy-1)\le 32$.

Từ đây ta suy ra được $-6<xy<7$. Mà x và y là các số chẵn khác nhau nên ta được $xy=0$ hoặc $xy=-4$.

+ Với $xy=0$, khi đó ta suy ra được $x=0$ hoặc $y=0$. Đến đây ta tìm được các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(0;-2)$ hoặc $(x;y)=(2;0)$

+ Với $xy=-2$, khi đó ta suy ra được $x=2; y=-2$ hoặc $x=-2; y=2$. Thay vào phương trình đã cho ta thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(0;-2),(2;0)$.

Ví dụ 19. Tìm sáu số nguyên dương sao cho tổng của sáu số đó bằng tích của chúng.

Lời giải

Gọi các số nguyên dương cần tìm là a,b,c,d,e,g.

Theo bài ra ta có $a+b+c+d+e+g=abcdeg$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c \le d \le e \le g$.

Khi đó từ $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $abcdeg = a+b+c+d+e+g = 6g$

Suy ra $abcde \le 6$. Do a, b, c, d, e, g nguyên dương nên $abcde \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ta xét các trường hợp sau:

• Với $abcde = 1$, ta có $a = b = c = d = e = 1$, thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $5 + g = g$, phương trình không có g thỏa mãn.

• Với $abcde = 2$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 2$, thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $6 + g = 2g \Rightarrow g = 6$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

• Với $abcde = 3$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 3$, thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $7 + g = 3g \Rightarrow 2g = 7$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

• Với $abcde = 4$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 4$ hoặc $a = b = c = 1; d = e = 2$.

+ Khi $a = b = c = d = 1; e = 4$ thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $8 + g = 4g \Rightarrow 3g = 8$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

+ Khi $a = b = c = 1; d = e = 2$ thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $7 + g = 4g \Rightarrow 3g = 7$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

• Với $abcde = 5$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 5$, thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $9 + g = 5g \Rightarrow 4g = 9$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

• Với $abcde = 6$, ta có $a = b = c = d = 1; e = 6$ hoặc $a = b = c = 1; d = 2; e = 3$.

+ Khi $a = b = c = d = 1; e = 6$ thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $10 + g = 6g \Rightarrow g = 2$, loại do không thỏa mãn $g \ge e$.

+ Khi $a = b = c = 1; d = 2; e = 3$ thay vào $a+b+c+d+e+g = abcdeg$ ta được $5g = 8$, phương trình không có g nguyên dương thỏa mãn.

Vậy các số nguyên dương cần tìm là 1; 1; 1; 1; 2; 6.

2. Phương trình nghiệm nguyên dạng phân thức.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{xy}{x+y} = \frac{2003}{2004}$.

Lời giải

Cách 1. Từ phương trình $\frac{xy}{x+y} = \frac{2003}{2004}$ ta suy ra được x và y khác 0.

Do đó ta được $\frac{x+y}{xy}=\frac{2004}{2003}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{2003}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\le y$, khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $x=1$, khi đó phương trình trở thành

$1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{2003}\Rightarrow y=2003$

- Trường hợp 2: Nếu $x\ge 2$, khi đó ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Do đó $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1+\frac{1}{2003}$

Suy ra trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

- Trường hợp 3: Nếu $x\le -1$, khi đó ta có $\frac{1}{x}<0$ nên từ phương trình ta suy ra được

$\frac{1}{y}>0$.

Do đó $y>0$ nên lại suy ra được $\frac{1}{y}\le 1$. Từ đó ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1$

Do đó $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1+\frac{1}{2003}$

Suy ra trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(1;2003),(2003;1)$.

Cách 2. Dễ thấy $x+y\ne 0$, khi đó

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{2003}{2004}\Leftrightarrow 2004x=2003(x+y)\Leftrightarrow 2004x-2003x-2003y=0$$
$$\Leftrightarrow 2004^2xy-2004.2003x-2004.2003y+2003^2=2003^2$$
$$\Leftrightarrow(2004x-2003)(2004y-2003)=2003^2$$

- Nếu $x=y$, khi đó từ phương trình ban đầu ta được $x=y=\frac{2003}{1002}$, loại.
- Nếu $x>y$, khi đó $2004x-2003>2004y-2003$ nên ta được $2004x-2003=2003^2$

hoặc $2004x-2003=-1$

Với $2004x-2003=-1$ suy ra x không nhận giá trị nguyên.

Với $2004x-2003=2003^2$ ta được $x=2003$, suy ra $y=1$

- Nếu $x<y$, hoàn toàn tương tự ta được $x=1;y=2003$.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y)=(1;2003),(2003;1)$.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{7}$

Lời giải

Từ phương trình ta được $x \neq 0; y \neq 0$, khi đó ta được $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{7} \Leftrightarrow 7\left(x^2+y^2\right)=x^2y^2$

Do đó từ phương trình trên ta suy ra được x^2y^2 chia hết cho 7, do đó ta suy ra được x và y cùng chia hết cho 7. Chú ý là x và y là các số nguyên khác 0 nên ta được $x^2 \geq 49; y^2 \geq 49$

Suy ra $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{49}+\frac{1}{49}=\frac{2}{49}<\frac{1}{7}$. Do đó phương trình không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 3. Tìm các số nguyên dương x, y, z khác nhau từng đôi một để biểu thức sau là một số nguyên dương:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$$

Lời giải

Giả sử $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=m$ với m là một số nguyên dương.

Từ đó ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=m \Leftrightarrow x+y+z+xy+yz+zx=mxyz$

- Xét x là số chẵn, khi đó từ phương trình trên ta suy ra $y+z+yz$ là số chẵn.

Do đó $yz+y+z+1$ là số lẻ hay $\left(y+1\right)\left(z+1\right)$ là số lẻ. Suy ra $y+1$ và $z+1$ cùng là số lẻ nên y và z cùng là số chẵn.

Hoàn toàn tương tự ta được nếu y là số chẵn thì x và z cùng là số chẵn, nếu z là số chẵn thì x và y cùng là số chẵn.

- Xét x là số lẻ, khi đó theo như trên thì y không thể là số chẵn và do đó z không thể là số chẵn.

Hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại.

Vậy x, y, z có cùng tính chẵn lẻ.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x<y<z$, khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Với $x \geq 3$, khi đó do cùng tính chẵn lẻ nên ta được $y \geq 5; z \geq 7$.

Khi đó ta có $m \le \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{21}<1$, trái với yêu cầu $m \ge 1$

+ Với $x=2$, khi đó ta có $y \ge 4; z \ge 6$, Do đó ta được $m \le \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{7}{6}$

Do m là số nguyên dương nên ta được $m=1$. Khi đó ta được

$$2+y+z+2y+2z+yz=2yz \Leftrightarrow \left(y-3\right)\left(x-3\right)=11$$

Chú ý rằng $y<z$ nên từ phương trình trên ta được $y=4; z=14$.

+ Với $x=1$, khi đó ta có $y \ge 3; z \ge 5$, Do đó ta được $m \le 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{32}{15}$

Do m là số nguyên dương và $m>1$ nên ta được $m=2$. Khi đó ta được

$$1+y+z+y+z+yz=2yz \Leftrightarrow \left(y-2\right)\left(x-2\right)=5$$

Chú ý rằng $y<z$ nên từ phương trình trên ta được $y=3; z=7$.

Vậy các bộ số nguyên dương thỏa mãn bài toán là $\left(x;y;z\right)=\left(1;3;7\right),\left(2;4;14\right)$ và các hoán vị.

Ví dụ 4. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$.

Lời giải

Giả sử các số nguyên x,y thỏa mãn $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$. Khi đó do $x^2+y^2>0$ nên ta được $x+2y>0$.

Ta có $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20} \Leftrightarrow 20\left(x+2y\right)=7\left(x^2+y^2\right)$.

Mà ta lại có $\left(7,20\right)=1$ nên từ $\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$ ta được $\begin{cases} x+2y=7k \\ x^2+y^2=20k \end{cases}, k \in N^*$.

Ta có $5\left(x^2+y^2\right)=x^2+4xy+y^2+4x^2-4xy+y^2=\left(x+2y\right)^2+\left(2x-y\right)^2$

Suy ra $5.20k=\left(7k\right)^2+\left(2x-y\right)^2 \Leftrightarrow \left(2x-y\right)^2=k\left(100-49k\right)$.

Lại từ $5\left(x^2+y^2\right)=\left(x+2y\right)^2+\left(2x-y\right)^2$ ta được $\left(x+2y\right) \le 5\left(x^2+y^2\right)=\frac{5.20.\left(x+2y\right)}{7}$

Do đó ta được $0<x+2y<15$. Mà ta lại có $x+2y=7k$ nên suy ra $k=1$ hoặc $k=2$.

• Với $k=1$, khi đó từ $(2x-y)^2=k(100-49k)$ ta được $(2x-y)^2=51$, phương trình không có nghiệm nguyên.

• Với $k=2$, khi đó từ $(2x-y)^2=k(100-49k)$ ta được $(2x-y)^2=4$

Từ đó ta được $2x-y=2$ hoặc $2x-y=-2$.

Kết hợp với $x+2y=14$ ta được $x=2; y=6$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)=(2;6)$.

Cách khác. Ta có thể dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki để đánh giá

$$(x+2y)^2 \le (1+2^2)(x^2+y^2)=5(x^2+y^2)$$

Từ đó suy ra được $0<x+2y<15$.

Từ đó ta đi giải các hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=7 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+2y=14 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$

3. Phương trình nghiệm nguyên có chứa căn.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge 1$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}} \\ &= \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right| \end{aligned}$$

Xét hai trương hợp

+ Với $x=1$ thì ta thu được $y=2$.

+ Với $x \ge 2$ thì ta thu được $y=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$

Do đó $y^2=4(x-1)$. Do $x \ge 2$ nên có thể đặt $x-1=t^2$ với t nguyên dương.

Ta có $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=2t \end{cases} (t \in Z^+)$ là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy các nghiệm của phương trình là $(x;y)=(1;\ 2),(t^2+1;2t)$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Ví dụ 2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=y$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 0, y \geq 0$

Bình phương hai vế của phương trình rồi chuyển vế ta được $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = y^2 - x$

Đặt $y^2 - x = k\left(k \in N\right)$ thì ta được phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = k$

Bình phương hai vế của phương trình rồi chuyển vế ta được $\sqrt{x+\sqrt{x}} = k^2 - x$

Đặt $k^2 - x = m\left(m \in N\right)$ thì ta được phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x}} = m$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $x+\sqrt{x} = m^2$

Ta biết rằng với x nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do $x+\sqrt{x} = m^2\left(m \in N\right)$ nên $\sqrt{x}$ không là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{x}$ là số tự nhiên.

Ta có $x+\sqrt{x} = m^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) = m^2$

Hai số tự nhiên liên tiếp $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x}+1$ có tích là số chính phương nên mỗi số phải là một số chính phương. Do đó số nhỏ bằng 0 hay ta được $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$. Từ đó suy ra $x = 0; y = 0$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right) = \left(0;0\right)$.

Ví dụ 3. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{1980}$ (1)

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $0 \leq x; y \leq 1980$. Khi đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{x} = \sqrt{1980} - \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1980 + y - 2\sqrt{1980y} \Leftrightarrow x = 1980 + y - 12\sqrt{55y}$$

Do x, y là các số nguyên nên $12\sqrt{55y}$ cũng phải là số nguyên. Ta biết rằng với y nguyên thì $\sqrt{55y}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ. Do đó $\sqrt{55y}$ là số nguyên, tức là $55y$ là số chính phương

Từ đó ta đặt $55y = k^2 \Leftrightarrow 5.11.y = k^2\left(k \in N\right)$. Do 5 và 11 là các số nguyên tố nên từ $5.11.y = k^2$ ta suy ra được $y = 11.5.a^2 = 55a^2\left(a \in N\right)$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng được $x = 55b^2\left(b \in N\right)$

Thay vào phương trình ba đầu ta được $a\sqrt{55}+b\sqrt{55}=6\sqrt{55}\Leftrightarrow a+b=6$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $y\le x$ thì $a\le b$. Ta có các trường hợp sau

a	b	$x=55a^2$	$y=55b^2$
0	6	0	1980
1	5	55	1375
2	4	220	880
3	3	495	495

Vậy phương trình đã cho các các nghiệm là

$$(x;y)=(0;1980),(1980;0),(55;1375),(1375;55),(220;880),(880;220),(495;495)$$

Ví dụ 5. Giải phương trình nghiệm nguyên: $\left(x+y\sqrt{5}\right)^z=\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

Lời giải

- Nhận thấy với $z=0$ phương trình trên không có nghiệm.
- Nếu z là một số nguyên dương thì tồn tại các số nguyên dương a, b để

$\left(x+y\sqrt{5}\right)^z=a+b\sqrt{5}$

Khi đó ta được $a+b\sqrt{5}=\sqrt{1+\sqrt{5}}\Leftrightarrow a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$.

Do a, b là các số nguyên dương và $\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Nên ta được $a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}=1+\sqrt{5}\Rightarrow\begin{cases}a^2+5b^2=1\\2ab\sqrt{5}=\sqrt{5}\end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

- Nếu z là một số nguyên âm thì tồn tại các số nguyên dương a, b để

$$\left(x+y\sqrt{5}\right)^z=\frac{1}{\left(x+y\sqrt{5}\right)^{-z}}=\frac{1}{a+b\sqrt{5}}$$

Khi đó ta được

$$\frac{1}{a+b\sqrt{5}}=\sqrt{1+\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left(a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=1\Leftrightarrow 4\left(a^2+4b^2+2ab\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-1.$$

Do a, b là các số nguyên dương và $\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Nên ta được $4\left(a^2+4b^2+2ab\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-1 \Rightarrow \begin{cases} 4a^2+20b^2=-1 \\ 8ab\sqrt{5}=\sqrt{5} \end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các cặp số nguyên p, q thỏa mãn điều kiện

$\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$

Lời giải

Điều kiện xác định của đẳng thức là $p-2 \ge 0; q-3 \ge 0; pq-2p-q+1 \ge 0$. (p, q là các số nguyên)

Bình phương hai vế của $\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$ và thu gọn ta được

$2\sqrt{p-2}\cdot\sqrt{q-3}=pq-3p-2q+6 \Leftrightarrow 2\sqrt{(p-2)(q-3)}=(p-2)(q-3)$

Tiếp tục bình phương hai vế thì ta được $4(p-2)(q-3)=(p-2)^2(q-3)^2$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $p=2$, khi đó $\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$ trở thành $\sqrt{q-3}=\sqrt{q-3}$, đúng với mọi số nguyên tố $q \ge 3$ tùy ý.

- Nếu $q=3$ thì $\sqrt{p-2}+\sqrt{q-3}=\sqrt{pq-2p-q+1}$ trở thành $\sqrt{p-2}=\sqrt{p-2}$, đúng với mọi số nguyên tố $p \ge 2$ tùy ý.

- Xét $p>2$ và $q>3$. Khi đó từ $4(p-2)(q-3)=(p-2)^2(q-3)^2$ ta có $4=(p-2)(q-3)$ với p, q là các số nguyên. Chỉ xảy ra các trường hợp :

+ Với $p-2=1;\ q-3=4$ ta được $p=3; q=7$

+ Với $p-2=2;\ q-3=2$ ta được $p=4; q=5$

+ Với $p-2=4;\ q-3=1$ ta được $p=6; q=4$

Vậy tất cả các cặp số nguyên p, q thỏa mãn $(2;q),(p;3)(3;7),(4;5),(6;4)$ với các số nguyên tố $p \ge 2$ và $q \ge 3$.

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}\Leftrightarrow x+2\sqrt{3}=y+z+2\sqrt{yz}$

Hay ta được $\left(x-y-z\right)+2\sqrt{3}=2\sqrt{yz}\Rightarrow\left(x-y-z\right)^2+4\sqrt{3}\left(x-y-z\right)+12=4yz$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $x-y-z\neq 0$, khi đó từ $\left(x-y-z\right)^2+4\sqrt{3}\left(x-y-z\right)+12=4yz$

Ta có $\sqrt{3}=\dfrac{4yz-\left(x-y-z\right)^2-12}{4\left(x-y-z\right)}$, điều này vô lý do x, y, z là các số nguyên dương.

- Trường hợp 1: Nếu $x-y-z=0$, khi đó từ $\left(x-y-z\right)^2+4\sqrt{3}\left(x-y-z\right)+12=4yz$

Ta được $\begin{cases} x-y-z=0 \\ yz=3 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=4;y=1;z=3 \\ x=4;y=3;z=1 \end{array}\right.$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là $\left(x;y;z\right)=\left(4;3;1\right),\left(4;1;3\right)$

4. Phương trình nghiệm nguyên dạng lũy thừa.

Ví dụ 1. Giải phương trình với nghiệm tự nhiên: $2^x+2^y+2^z=1024$

Lời giải

Do vai trò của x, y, z trong phương trình như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $0<x\le y\le z$

Chia hai vế của phương trình $2^x+2^y+2^z=1024$ cho $2^x>0$ ta được

$1+2^{y-x}+2^{z-x}=2^{10-x}$

Do $2^{10-x}>1$ nên 2^{10-x} là bội của 2.

Ta lại thấy nếu $x=z$ thì $x=y=z$ khi đó phương trình trên trở thành

$1+2^0+2^0=2^{10-x}\Leftrightarrow 3=2^{10-x}$, phương trình này không có nghiệm. Từ đó suy ra $x<z$ nên 2^{z-x} là bội của 2.

Suy ra $1+2^{y-x}$ là bội của 2. Do đó $2^{y-x}=1$ nên $x=y$.

Thay vào phương trình $1+2^{y-x}+2^{z-x}=2^{10-x}$ ta đươc

$$1+1+2^{z-x}=2^{10-x}\Leftrightarrow 2+2^{z-x}=2^{10-x}\Leftrightarrow 2\left(1+2^{z-x-1}\right)=2^{10-x}\Leftrightarrow 1+2^{z-x-1}=2^{9-x}$$

Do $2^{9-x}>1$ nên 2^{9-x} là bội của 2. Từ đó ta được Do đó

$\begin{cases} 2^{z-x-1}=1 \\ 2^{9-x}=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=8 \\ z=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=y=8 \\ z=9 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình trên là $(x;y;z)=(8;8;9)$ và các hoán vị.

Ví dụ 2. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $2^x+57=y^2$

Lời giải

Do x, y là các số tự nhiên nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét x là số lẻ, khi đó ta đặt $x=2n+1\left(n\in N\right)$

Từ phương trình đã cho ta được $2^{2n+1}+57=y^2$.

Ta có 57 chia hết cho 3. Lại có $2^{2n+1}=2.2^{2n}=2.4^n=2\left(3+1\right)^n=2\left(3k+1\right)=6k+2\left(k\in N\right)$

Từ đó ta được $2^{2n+1}+57$ chia 3 dư 2. Mà y^2 là số chính phương nên chia 3 dư 0 hoặc dư 1.

Do đó trong trương hợp x lẻ thì phương trình không có nghiệm tự nhiên.

- Trường hợp 1: Xét x là số chẵn, khi đó ta đặt $x=2n\left(n\in N\right)$

Từ phương trình đã cho ta được $2^{2n}+57=y^2$ hay ta được

$y^2-2^{2n}=57\Leftrightarrow\left(y-2^n\right)\left(y+2^n\right)=57$.

Do y, n là các số tự nhiên nên ta thấy $y+2^n>0$ nên $y-2^n>0$ và $y+2^n>y-2^n>0$.

Từ đó ta có bảng giá trị như sau:

$y+2^n$	51	19
$y-2^n$	1	3
2^n	28(loại)	8
n		3
y		11
$x=2n$		6

Thử lại ta thấy $2^6+57=11^2$ đúng.

Do đó cặp số tự nhiên cần tìm là $(x;y)=(6;11)$.

Ví dụ 3. Tìm các số nguyên dương x và số nguyên y thỏa mãn $7^x+24^x=y^2$.

Lời giải

Nhận thấy nếu $(x;y)$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $(x;-y)$ cũng là nghiệm của phương trình, do đó ta chỉ xét với y là một số tự nhiên.

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $x \le -1$, khi đó ta có $0 < 7^x \le \frac{1}{7} < \frac{1}{2}; 0 < 24^x \le \frac{1}{24} < \frac{1}{2}$.

Từ đó ta được $7^x + 24^x = y^2 < 1$, điều này vô lí vì y là số tự nhiên.

- Trường hợp 2: Với $x = 0$, khi đó ta được $y^2 = 2$, trường hợp này loại vì y^2 là số chính phương.

- Trường hợp 2: Với $x \in N^*$, khi đó từ phương trình $7^x + 24^x = y^2$ ta suy ra được y^2 là số chính phương lẻ. Mà ta biết một số chính phương lẻ khi chia 8 thì có số dư là 1 nên y^2 chia 8 dư 1.

Mà ta lại có 24^x chia hết cho 8 nên từ phương trình đã cho ta suy ra được 7^x chia 8 dư 1. Từ đó ta suy ra được x là một số tự nhiên chẵn hay $x = 2k\left(k \in N^*\right)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $7^{2k} + 24^{2k} = y^2 \Leftrightarrow \left(y - 24^k\right)\left(y + 24^k\right) = 7^{2k}$.

Do 7 là số nguyên tố nên từ phương trình trên ta suy ra được $\begin{cases} y - 24^k = 7^m \\ y + 24^k = 7^{2k-m} \end{cases}$, với $m \in N, m \le k$.

Từ đó ta được $7^{2k-m} - 7^m = 2.24^k \Leftrightarrow 7^m\left(7^{2k-2m} - 1\right) = 2.24^k$.

Do 2.24^k không chia hết cho 7 nên từ phương trình trên ta suy ra được $7^m = 1 \Rightarrow m = 0$.

Từ đó ta được $y = 24^k + 1$, thay vào phương trình ban đầu ta được

$$7^{2k} + 24^{2k} = \left(24k + 1\right)^2 \Leftrightarrow 2.24^k + 1 = 7^{2k} = 49^k > 48^k$$

Nếu $k \ge 2$ thì $48^k - 2.24^k = 24^k\left(2^k - 1\right) > 1$ nên phương trình trên không thỏa mãn.

Từ đó ta suy ra được $k = 1$. Nên ta được $x = 2$ và $y = 24 + 1 = 25$.

Như vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(2;25),(2;-25)$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$x^y + y^z + z^x = 2\left(x + y + z\right)$

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Xét $x \ge 2; y \ge 2; z \ge 2$, khi đó ta có

$x^y + y^z + z^x = x^2 + y^2 + z^2 \ge 2\left(x + y + z\right)$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

- Trường hợp 2: Xét trường hợp trong ba số x, y, z có ít nhất một số nhỏ hơn 2, chẳng hạn $z < 2$, khi đó $z = 1$ (Nếu $x = 1$ hoặc $y = 1$ ta có các nghiệm khác).

Khi đó từ $x^y + y^z + z^x = 2\left(x + y + z\right)$ ta được $x^y = 2x + y + 1$.

+ Nếu $y < 4$, khi đó ta được $y = 2$ hoặc $y = 3$

Với $y = 2$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $x^2 = 2x + 2 + 1 \Rightarrow x = 3$

Với $y = 3$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $x^3 = 2x + 3 + 1 \Rightarrow x = 2$

+ Nếu $x < 4$, khi đó ta được $x = 2$ hoặc $x = 3$

Với $x = 2$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $2^y = 2.2 + y + 1 \Rightarrow 2^y = y + 5 \Rightarrow y = 3$

Với $x = 3$, khi đó từ $x^y = 2x + y + 1$ ta được $3^y = 2.3 + y + 1 \Rightarrow 3^y = y + 7 \Rightarrow y = 2$

+ Nếu $x \ge 4; y \ge 4$, khi đó bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh $x^y > xy$.

Thật vậy, với $y = 4$ ta được $x^4 = x.x^3 > 4x$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $k \ge 4$, thì ta được $x^k > kx$

Khi đó ta được $x.x^k > kxx \ge 4kx \Rightarrow x^{k+1} > x\left(k + 3k\right) > \left(k + 1\right)x$, điều này có nghĩ là bất đẳng thức đún với $y = k + 1$.

Như vậy theo nguyên lí quy nạp thì với $y \ge 4$ thì $x^y > xy$.

Ta lại có $x \ge 4; y \ge 4$ nên $\left(x - 4\right)\left(y - 4\right) \ge 0$, từ đó ta được

$$xy \ge 2x + 2y + 2\left(x + y - 8\right) \ge 2x + 2y > 2x + y + 1$$

Từ đó suy ra $x^y > 2x + y + 1$.

Điều này có nghĩa là với $x \ge 4; y \ge 4$ thì $x^y = 2x + y + 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dương là

$$\left(x; y; z\right) = \left(2; 2; 2\right), \left(1; 2; 3\right), \left(1; 3; 2\right), \left(2; 1; 3\right), \left(2; 3; 1\right), \left(3; 1; 2\right), \left(3; 2; 1\right)$$

Chú ý: *Trong phương trình trên ba ẩn x, y, z có vai trò không bình đẳng mà là hoán vị vòng quanh, do đó không thể sắp thứ tự các ẩn kiểu* $x \ge y \ge z$.

Ví dụ 5. Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\left|x-2005y\right|+\left|y-2007z\right|+\left|z-2009x\right|=2011^x+2013^y+2015^z$$

Lời giải

Đặt $A=\left|x-2005y\right|+\left|y-2007z\right|+\left|z-2009x\right|; B=2011^x+2013^y+2015^z$.

Ta có nhận xét $a+\left|a\right|\in\left\{0;2a\right\}$ với mọi số nguyên a. Do đó $a+\left|a\right|$ luôn là số chẵn.

Do đó $\left|x-2005y\right|+\left|y-2007z\right|+\left|z-2009x\right|+\left(x-2005y\right)+\left(y-2007z\right)+\left(z-2009x\right)$ là một số chẵn.

Từ đó ta được $A-\left(2008x+2004y+2006z\right)$ là số chẵn nên A là số chẵn.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu cả ba số x, y, z đều là số nguyên âm.

Khi đó ta được $B=2011^x+2013^y+2015^z=\frac{1}{2011^{-x}}+\frac{1}{2013^{-y}}+\frac{1}{2015^{-z}}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Do đó $0<B<1$ nên B không thể là số nguyên. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

- Nếu trong ba số x, y, z có đúng hai số nguyên âm, chẳng hạn hai số đó là x, y.

Khi đó ta được

$$B=2011^x+2013^y+2015^z=\frac{1}{2011^{-x}}+\frac{1}{2013^{-y}}+2015^z<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2015^z=1+2015^z.$$

Do đó ta được $2015^z<B<1+2015^z$ nên B không thể là số nguyên. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

- Nếu trong ba số x, y, z có đúng một số nguyên âm, chẳng hạn hai số đó là x.

Khi đó hoàn toàn tương tự ta suy ra được B không phải là số nguyên. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

- Nếu cả ba số x, y, z đều là số tự nhiên, khi đó $B=2011^x+2013^y+2015^z$ là số lẻ. Mà A lại là số chẵn. Như vậy không có số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đẳng thức.

Vậy không tồn tại các số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x-32=y^2$

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu x là số lẻ, khi đó $x = 2k + 1, k \in N$.

Phương trình đã cho trở thành $3^{2k+1} - 32 = y^2$ hay $3.9^k - 32 = y^2$.

Ta thấy 9 chia 8 dư 1 nên 3.9^k chia 8 dư 3. Từ đó suy ra $3.9^k - 32$ chia 8 dư 3.

Mà một số chính phương khi chia cho 8 không có số dư là 3.

Như vậy với x là số nguyên lẻ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

- Trường hợp 2: Nếu x là số chẵn, khi đó $x = 2k, k \in N$.

Phương trình đã cho trở thành $3^{2k} - 32 = y^2$ hay ta được $\left(3^k - y\right)\left(3^k + y\right) = 32$.

Dễ thấy $3^k + y > 3^k - y > 0$ và $3^k + y; 3^k - y$ cùng là số chẵn. Do đó từ phương trình trên ta được các khả năng sau:

+ Với $\begin{cases} 3^k - y = 2 \\ 3^k + y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^k = 9 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} 3^k - y = 4 \\ 3^k + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^k = 6 \\ y = 2 \end{cases}$, hệ không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương là $\left(x; y\right) = \left(4; 7\right)$.

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x + 171 = y^2$.

Lời giải

Nhận thấy với $x = 1$ không thỏa mãn phương trình. Do đó $x \geq 2$

Viết phương trình đã cho về dạng $9.\left(3^{x-2} + 19\right) = y^2$. Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là

$x^{x-2} + 19 = z^2$ là số chính phương với z là số nguyên dương.

Nếu $x - 2 = 2k + 1\left(k \in N^*\right)$ là số lẻ thì $3^{2k+1} + 19 = \left(3^{2k+1} + 1\right) + 18 = 4.B + 18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

Do đó $x - 2 = 2k\left(k \in N^*\right)$ là số chẵn. Ta có $3^{x-2} + 19 = z^2 \Leftrightarrow \left(z - 3^k\right)\left(z + 3^k\right) = 19$.

Vì 19 là số nguyên tố và $z - 3^k < z + 3^k$ nên $\begin{cases} z - 3^k = 1 \\ z + 3^k = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ 3^k = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 10 \\ k = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $\left(x; y\right) = \left(6; 30\right)$.

Ví dụ 8. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $3^x + 111 = \left(y - 3\right)\left(y - 5\right)$.

Lời giải

Đặt $y-4=a$ với a là số nguyên và $a\ge -3$, Khi đó từ phương trình đã cho ta được.

$$3^x+111=\left(a+1\right)\left(a-1\right)\Leftrightarrow 3^x+112=a^2$$

Nếu x là số lẻ, ta đặt $x=2k+1$, với k là số nguyên không âm. Từ đó ta có

$$3^x+112=3^{2k+1}+112=3\left(9^k-1\right)+3+112=3.\left(9-1\right)\left(9^{k-1}+9^{k-2}+...+1\right)+3+112$$
$$=24q+3+112=4\left(8q+28\right)+3$$

Do đó 3^x+112 chia cho 4 dư 3 nên a^2 chia cho 4 dư 3, điều này vô lý vì số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1. Vậy x phải chẵn hay $x=2k$ với k nguyên dương

Như vậy ta có $3^{2k}+112=a^2\Leftrightarrow\left(a+3^k\right)\left(a-3^k\right)=112$. Do đó ta được $112\,\vdots\, a+3^k$

Vì $a\ge -3\Rightarrow a+3^k\ge 0$ và $a+3^k>a-3^k\Rightarrow\left(a+3^k\right)^2>112\Rightarrow a+3^k>10$

Do đó suy ra $a+3^k\in\left\{14;28;56;112\right\}$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a+3^k=14\Rightarrow a-3^k=8\Rightarrow 2a=22\Rightarrow a=11\Rightarrow x=2;y=15$
- Nếu $a+3^k=28\Rightarrow a-3^k=4\Rightarrow 2a=32\Rightarrow a=16\Rightarrow 3^x=144$ (loại)
- Nếu $a+3^k=56\Rightarrow a-3^k=2\Rightarrow 2a=58\Rightarrow a=29\Rightarrow x=6;y=33$
- Nếu $a+3^k=112\Rightarrow a-3^k=1\Rightarrow 2a=113\Rightarrow a=\dfrac{112}{2}$ (loại)

Vậy cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(x;y\right)=\left(2;15\right),\left(6;33\right)$.

Ví dụ 9. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn điều kiện $x^2-5x+7=3^y$.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $y=0$, khi đó phương trình đã cho trở thành $x^2-5x+6=0$.

Giải phương trình trên ta được $x=2;x=3$ nên phương trình đã cho có nghiệm $\left(2;0\right),\left(3;0\right)$.

- Trường hợp 2: Nếu $y=1$, khi đó phương trình đã cho trở thành $x^2-5x+4=0$.

Giải phương trình trên ta được $x=1;x=4$ nên phương trình đã cho có nghiệm $\left(1;1\right),\left(4;1\right)$.

- Trường hợp 2: Nếu $y \ge 2$, khi đó 3^y chia hết cho 9. Ta xét các trường hợp số dư của x khi chia cho 3.

+ Nếu $x = 3k, k \in N$, khi đó $x^2 - 5x + 7$ không chia hết cho 3, do đó không chia hết cho 9. Suy ra phương trình đã cho không có nghiệm.

+ Nếu $x = 3k+1, k \in N$, khi đó $x^2 - 5x + 7 = 9k^2 - 9k + 3$ không chia hết cho 9. Suy ra phương trình đã cho không có nghiệm.

+ Nếu $x = 3k, k \in N$, khi đó $x^2 - 5x + 7 = 9k^2 - 3k + 1$ không chia hết cho 3, do đó không chia hết cho 9. Suy ra phương trình đã cho không có nghiệm.

Do đó khi $y \ge 2$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Vậy các cặp số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y) = (2;0),(3;0),(1;1),(4;1)$.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn $(a^5+b)(a+b^5) = 2^c$.

Lời giải

Do vai trò của hai số nguyên dương a và b như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge 1$.

Khi đó ta có $a^5 + b \ge a + b^5 \ge 2$.

Từ điều kiện của bài toán ta suy ra được a và b là các số chẵn hoặc cùng lẻ. Khi đó tồn tại các số nguyên dương m và n thỏa mãn $\begin{cases} a^5 + b = 2^m \\ a + b^5 = 2^n \end{cases}$, $(m \ge n)$.

Cộng theo vế hai đẳng thức trên ta được $a^5 + b^5 + a + b = 2^m + 2^n$

Hay ta được $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1) = 2^n(2^{m-n}+1)$.

Nếu a và b cùng là số chẵn, khi đó $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1$ là số lẻ.

Khi đó từ $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1) = 2^n(2^{m-n}+1)$ suy ra $(a+b) \vdots 2^n$.

Mà ta có $2 + 2 \le a + b \le a + b^5 = 2^n$ nên suy ra $a + b = 2^n$ và $b = b^5$ nên $b = 1$, điều này mâu thuẫn với b là số chẵn.

Từ đó suy ra a và b phải là số lẻ, khi đó $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1$ chia 4 dư 2.

Do đó từ $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 1) = 2^n(2^{m-n}+1)$ suy ra $(a+b) \vdots 2^{n-1}$.

Mà $1+1 \le a+b \le a+b^5 = 2^n$ nên suy ra $a+b=2^n$ hoặc $a+b=2^{n-1}$. Ta xét các trường hợp sau

- Xét $a+b=2^{n-1}$, khi đó kết hợp với $a+b^5=2^n$ ta suy ra được $b^5-b=2^n-2^{n-1}$.

Do đó ta được $b\left(b^4-1\right)=2^{n-1}$ nên $2^{n-1} \vdots b$, mà b là số lẻ nên $b=1$. Do đó suy ra

$2^{n-1}=0$, điều này vô lí.

- Xét $a+b=2^n$, khi đó kết hợp với $a+b^5=2^n$ ta suy ra được $b^5-b=2^n-2^n=0$.

Do đó ta được $b^5=b \Rightarrow b=1$.

Thay vào hệ $\begin{cases} a^5+b=2^m \\ a+b^5=2^n \end{cases}$ ta được $\begin{cases} a^5+1=2^m \\ a+1=2^n \end{cases}$

Từ đó ta được $a^4-a^3+a^2-a+1=2^{m-n}$.

Do a là số lẻ nên $a^4-a^3+a^2-a+1$ là số lẻ nên 2^{m-n} là số lẻ. Suy ra $2^{m-n}=1 \Rightarrow m=n$.

Từ đó ta được $a^5+1=a+1 \Rightarrow a^5=a \Rightarrow a=1$.

Ta thay $a=b=1$ vào $\left(a^5+b\right)\left(a+b^5\right)=2^c$ thì tìm được $c=2$.

Vậy bộ số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(1;1;2)$.

5. Hệ phương trình nghiệm nguyên.

Ví dụ 1. Tìm các nghiệm nguyên của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$

Lời giải

Ta có hằng đẳng thức $(x+y+z)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3(x+y)(y+z)(z+x)$

Do đó từ hệ phương trình trên ta được

$$27-3=3(x+y)(y+z)(z+x) \Leftrightarrow 8=(x+y)(y+z)(z+x)$$

Đặt $x+y=c; y+z=a; z+x=b$. Khi đó ta được $abc=8$.

Do a, b, c nguyên nên a, b, c là các ước của 8. Suy ra ta được $a;b;c \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Do vai trò của x, y, z như nhau nên ta có thể giả sử $x \le y \le z$, khi đó $a \ge b \ge c$.

Ta có $a+b+c=2(x+y+z)=6 \Rightarrow a \ge 2$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Với $a=2$ ta có $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ x=2 \end{cases}$

Từ đó ta được $x=y=z=1$

+ Với $a=4$ ta có $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=2 \end{cases}$, hệ này không có nghiệm nguyên.

+ Với $a=8$ ta có $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$

Từ đó ta tính được $x=y=4; z=-5$

Vậy hệ trên có các nghiệm là $(x;y;z)=(1;1;1),(4;4;5),(4;5;4),(5;4;4)$.

Ví dụ 2. Chứng minh không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} x^2-3xy+3y^2-z^2=31 \\ x^2+xy+8z^2=100 \end{cases}$$

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-3xy+3y^2-z^2=31 \\ x^2+xy+8z^2=100 \end{cases}$$

Khi đó từ hệ phương trình trên ta được

$$9x^2-23xy+24y^2=348 \Leftrightarrow 5\left(2x^2-5xy+5y^2\right)=\left(x-y\right)^2+348$$

Dễ thấy $5\left(2x^2-5xy+5y^2\right)$ chia hết cho 5. Mà $\left(x-y\right)^2$ chia 5 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 4 và 348 chia 5 dư 3, do đó $\left(x-y\right)^2+348$ chia 4 dư 3 hoặc sư 4 hoặc dư 2.

Như vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn hệ phương trình trên.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình nghiệm nguyên: $\begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases}$

Lời giải

Nếu $z=0$ thì hệ phương trình có nghiệm $(x;-x;\ 0)$ với $x\in Z$.

Nếu $z\neq 0$ thì từ hệ phương trình ta có $x^2-xy+y^2=x+y \Leftrightarrow x^2-\left(y+1\right)x+y^2-y=0$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn x nên ta được

$$\Delta_y=\left(y+1\right)^2-4\left(y^2-y\right)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{12}}{3}\le y\le \frac{3+\sqrt{12}}{3}$$

Do $y\in Z$ nên ta được $y\in\{0;\ 1;\ 2\}$.

- Nếu $y=0$, khi đó ta có hệ phương trinh $\begin{cases} x=z \\ x^3=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=z=1$

- Nếu $y=1$, khi đó ta được $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;\ z=1 \\ x=2;\ z=3 \end{array}\right.$

- Nếu $y=2$, khi đó ta được $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ z=3 \\ x=2;\ z=4 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên là

$$(x;-x;0),\ (1;0;1),\ (0;1;1),\ (2;1;3),\ (1;2;3),\ (2;2;4)$$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình: $\begin{cases} xy+yz+zx=8 \\ x+y+z=5 \end{cases}$.

Phân tích và lời giải

Đây là hệ phương trìnhcó cấu trúc đặc biệt. Do số ẩn nhiều hơn số phương trình nên thông thường ta nghĩ đến phương pháp đánh giá. Do vai trò bình đẳng của các ẩn nên ta có thể đánh giá một ẩn nào đó, chẳng hạn là ẩn z.

Chú ý rằng nếu xem z là tham số và x, y là ẩn số thì hệ phương trình trên là hệ đối xứng hai ẩn dạng 1. Ta viết lại hệ:

$$\begin{cases} xy+(y+x)z=8 \\ x+y=5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+(5-z)z=8 \\ x+y=5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=8-(5-z)z \\ x+y=5-z \end{cases}$$

Như vậy theo định lí Vi – et thì x và y là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2-(5-z)t+8-(5-z)z=0$$

Trong phương trình bậc hai trên thì z đóng vài trò tham số, khi đó nếu xác định được giá trị của z thì xem như bài toán được giải quyết.

Ta biết rằng để phương trình có nghiệm thì $\Delta \ge 0$ hay ta được

$3z^2-10z+7\le 0 \Leftrightarrow 1\le z\le \frac{7}{3}$. Do z nhận giá trị nguyên nên $z=1$ hoặc $z=2$.

- Với $z=1$, khi đó phương trình trở thành $t^2-4t+4=0$, đến đây ta tìm được $x=y=2$ thỏa mãn.

- Với $z=2$ khi đó phương trình trở thành $t^2-3t+2=0$, đến đây ta tìm được $x=2; y=1$ hoặc $x=1; y=2$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên là $(x;y;z)=(2;2;1),(1;2;2),(2;1;2)$.