MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG DÙNG

A. MỘT SỐ QUY TẮC CHUNG KHI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

- **Quy tắc song hành**: Đa số các bất đẳng thức đều có tính đối xứng nên chúng ta có thể sử dụng nhiều bất đẳng thức trong chứng minh một bài toán để định hướng cách giải nhanh hơn.
- **Quy tắc dấu bằng:** Dấu "=" trong bất đẳng thức có vai trò rất quan trọng. Nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh, định hướng cho ta cách giải. Chính vì vậy khi giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc các bài toán cực trị ta cần rèn luyện cho mình thói quen tìm điều kiện của dấu bằng mặc dù một số bài không yêu cầu trình bày phần này.
- **Quy tắc về tính đồng thời của dấu bằng:** Chúng ta thường mắc sai lầm về tính xảy ra đồng thời của dấu "=" khi áp dụng liên tiếp hoặc song hành nhiều bất đẳng thức. Khi áp dụng liên tiếp hoặc song hành nhiều bất đẳng thức thì các dấu "=" phải cùng được thỏa mãn với cùng một điều kiện của biến.
- **Quy tắc biên:** Đối với các bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc thì cực trị thường đạt được tại vị trí biên.
- **Quy tắc đối xứng:** Các bất đẳng thức có tính đối xứng thì vai trò của các biến trong các bất đẳng thức là như nhau do đó dấu "=" thường xảy ra tại vị trí các biến đó bằng nhau. Nếu bài toán có điều kiện đối xứng thì chúng ta có thể chỉ ra dấu "="xảy ra tại khi các biến đó bằng nhau và bằng một giá trụ cụ thể.

I. MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM- GM

1. Kỹ thuật tách ghép bộ số

1.1 Kỹ thuật tách ghép cơ bản

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

Bài 2: Cho 4 số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leq\sqrt{(a+b)(c+d)}$$

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $\begin{cases} a>c \\ b>c \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}$$

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$1+\sqrt[3]{abc}\leq\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $\begin{cases} a\geq 1 \\ b\geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$$

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2\leq(a+b)^4$

Bài 7: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)\geq 3\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$$

Bài 8: Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq a+b+1$

Bài 9: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=10$. Tìm GTLN của:

$A=a^2b^3c^5$

1.2 Kỹ thuật tách nghịch đảo

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\forall a,b>0$

Bài 2: Chứng minh rằng: $a+\dfrac{1}{a-1}\ge 3\ ,\forall a>1$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\ ,\forall a\in \boldsymbol{R}$

Bài 4: Chứng minh rằng: $\dfrac{3a^2}{1+9a^4}\le \dfrac{1}{2},\forall a\ne 0$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=(a+1)^2+\left(\dfrac{a^2}{a+1}+2\right)^2\ ,\forall a\ne -1$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A=a+\dfrac{2}{a^2},\forall a>0$

Bài 7: Chứng minh rằng: $a+\dfrac{1}{b(a-b)}\ge 3\ ,\forall a>b>0$

Bài 8: Chứng minh rằng: $a+\dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2}\ge 3\ ,\forall a>b>0$

1.3 Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong kỹ thuật ghép đối xứng ta cần nắm một số thao tác sau:

Phép cộng: $\begin{cases} a+b+c=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{c+a}{2} \\ 2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a) \end{cases}$

Phép nhân: $\begin{cases} abc=\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}, \qquad (a,b,c\ge 0) \\ a^2b^2c^2=(ab)(bc)(ca) \end{cases}$

Bài 1: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c$

Bài 2: Cho ba số thực $abc\ne 0$. CMR: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\ge \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$

Bài 3: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. CMR:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Bài 4: Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\dfrac{a+b+c}{2}$. CMR:

$$\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\le\frac{1}{8}abc$$

Bài 5: Cho $\Delta ABC, AB=c, BC=a, CA=b, p=\dfrac{a+b+c}{2}$. CMR:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

1.4 Kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo

Trong kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo ta ứng dụng bất đẳng thức sau

Với $n\in N^*$ và $x_1, x_2,..., x_n>0$ thì

$$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+..+\frac{1}{x_n}\right)\ge n^2$$

Chứng minh bất đẳng thức trên :

Ta có với $x_1, x_2,..., x_n>0$ thì

$$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+..+\frac{1}{x_n}\right)\ge n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}.n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2...x_n}}=n^2$$

Với $n=3$ và $x_1, x_2, x_3>0$ thì

$$\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)\ge 9$$

Bài 1: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\ge 6$

Bài 2: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

(Bất đẳng thức Nesbit)

Bài 3: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$

Bài 4: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c\le 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$$

2. Kỹ thuật đổi biến số

Có những bài toán về mặt biểu thức toán học tương đối cồng kềnh, khó nhận biết được phương hướng giải. Bằng cách đổi biến số, ta có thể đưa bài toán về dạng đơn giản và dễ nhận biết hơn.

Bài 1: Cho $\Delta ABC, AB = c, BC = a, CA = b$. CMR:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc \qquad \textbf{(1)}$$

Bài 2: Cho $\Delta ABC, AB = c, BC = a, CA = b$. CMR:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \ge 3 \qquad \textbf{(1)}$$

Bài 3: Cho $\Delta ABC, AB = c, BC = a, CA = b$. CMR:

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \ge a+b+c \ \textbf{(1)}$$

Bài 4: Cho $\Delta ABC, AB = c, BC = a, CA = b, p = \dfrac{a+b+c}{2}$. CMR:

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \ge \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \textbf{(1)}$$

Bài 5: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$ **(1)**

Bài 6: Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa $(a+c)(b+c) = 1$. CMR:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \ge 4$$

Bài 7: Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

3. Kỹ thuật chọn điểm rơi

Điểm rơi trong các bất đẳng thức là giá trị đạt được của biến khi dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra.

Trong các bất đẳng thức dấu "=" thường xảy ra ở các trường hợp sau:

• Các biến có giá trị bằng nhau. Khi đó ta gọi bài toán có ***cực trị đạt được tại tâm***

• Khi các biến có giá trị tại biên. Khi đó ta gọi bài toán có ***cực trị đạt được tại biên***

Căn cứ vào điều kiện xảy ra của dấu "=" trong bất đẳng thức ta xét các kỹ thuật chọn điểm rơi trong các trường hợp trên

3.1 Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị xảy ra ở biên

Xét các bài toán sau:

<u>**Bài toán 1:**</u> Cho số thực $a \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $A = a + \frac{1}{a}$

Sai lầm thường gặp là: $A = a + \frac{1}{a} \ge 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2$. Vậy GTNN của A là 2.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 2 $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \mathrm{a} = 1$ vô lý vì theo giả thuyết thì $a \ge 2$.

Lời giải đúng: $A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \ge 1 + \frac{3.2}{4} = \frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{a}$ hay $a = 2$

Vậy GTNN của A là $\frac{5}{2}$.

Vì sao chúng ta lại biết phân tích được như lời giải trên. Đây chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.

Quay lại bài toán trên, dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a = 2$. Khi đó ta nói A đạt GTNN tại "**Điểm rơi** $a = 2$". Ta không thể áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số a và $\frac{1}{a}$ vì không thỏa quy tắc dấu "=". Vì vậy ta phải tách a hoặc $\frac{1}{a}$ để khi áp dụng bất đẳng thức AM - GM thì thỏa quy tắc dấu "=". Giả sử ta sử dụng bất đẳng thức AM - GM cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha},\frac{1}{a}\right)$ sao cho tại "**Điểm rơi** $a=2$" thì $\frac{a}{\alpha}=\frac{1}{a}$, ta có sơ đồ sau:

$$a=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{1}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=4$$

Khi đó: $A=a+\frac{1}{a}=\frac{a}{4}+\frac{3a}{4}+\frac{1}{a}$ và ta có lời giải như trên.

<u>Lưu ý:</u> *Để giải bài toán trên, ngoài cách chọn cặp số* $\left(\frac{a}{\alpha},\frac{1}{a}\right)$ *ta có thể chọn các các cặp số sau:* $\left(\alpha a,\frac{1}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a,\frac{\alpha}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a,\frac{1}{\alpha a}\right)$.

<u>Bài toán 2:</u> Cho số thực $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a+\frac{1}{a^2}$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{4}\Rightarrow\alpha=8$$

Sai lầm thường gặp là:

$A=\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}+\frac{7a}{8}\ge 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{7a}{8}=\sqrt{\frac{1}{2a}}+\frac{7a}{8}\ge\sqrt{\frac{1}{2.2}}+\frac{7.2}{8}=\frac{9}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2$.

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Nguyên nhân sai lầm: Mặc dù GTNN của A là $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên mắc sai lầm trong đánh giá mẫu số: " $a\ge 2\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{2a}}\ge\sqrt{\frac{1}{2.2}}$ là sai".

Lời giải đúng: $A=\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}+\frac{6a}{8}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{6a}{8}\ge\frac{3}{4}+\frac{6.2}{8}=\frac{9}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2$

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Bài 1: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của $A=ab+\frac{1}{ab}$

Bài 2: Cho số thực $a\ge 6$. Tìm GTNN của $A=a^2+\frac{18}{a}$

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+2b+3c\ge 20$. Tìm GTNN của

$$A=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

Bài 4: Cho3 số thực dương a, b, c thỏa $\begin{cases} ab\ge 12 \\ bc\ge 8 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{121}{12}$$

Phân tích:

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $\begin{cases} ab=12 \\ bc=8 \end{cases}$,tại điểm rơi $a=3,b=4,c=2$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a}{18}+\frac{b}{24}+\frac{2}{ab}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{18}.\frac{b}{24}.\frac{2}{ab}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{2}{ca}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{2}{ca}}=1$$

$$\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{2}{bc}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{16}.\frac{c}{8}.\frac{2}{bc}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{b}{12}+\frac{8}{abc}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{b}{12}.\frac{8}{abc}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\ge 2\sqrt{\frac{13a}{18}.\frac{13b}{24}}\ge 2\sqrt{\frac{13}{18}.\frac{13}{24}.12}=\frac{13}{3}$$

$$\frac{13b}{48}+\frac{13c}{24}\ge 2\sqrt{\frac{13b}{48}.\frac{13c}{24}}\ge 2\sqrt{\frac{13}{48}.\frac{13}{24}.8}=\frac{13}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(a+b+c)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{121}{12}\qquad \text{(đpcm)}$$

3.2 Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị đạt được tại tâm

Xét bài toán sau:

Bài toán: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$.. Tìm GTNN của

$$A=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm GTNN của

$$A=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 2: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c\le\frac{3}{2}$. Tìm GTNN của

$$A=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 3: Cho 2 số thực dương a, b. Tìm GTNN của $A=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của :

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$$

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của

$$A=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$$

Bài 7: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$$

Bài 8: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$. Tìm GTNN của

$$A=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

Bài 9: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Tìm GTLN của

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2005

4. Kỹ thuật nhân thêm hệ số

Bài 1: Tìm GTLN của : $A=a^2(1\text{-}a)$, $a\in(0,1)$

Giải:

Do $a, 1\text{-}a>0$ nên áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$A=\frac{1}{2}a^2(2\text{-}2a)=\frac{1}{2}a.a(2\text{-}2a)\le\frac{1}{2}\left(\frac{a+a+2\text{-}2a}{3}\right)^3=\frac{1}{2}.\frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow A\le\frac{4}{27}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2-2a=\frac{2}{3}$

Vậy GTLN của A là $\frac{4}{27}$

Bài 2: Tìm GTLN của : $A=a^3(2\text{-}a)$, $a\in(0,2)$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$A=\frac{1}{3}a.a.a.(6-3a)\le\frac{1}{3}\left(\frac{a+a+a+6-3a}{4}\right)^4=\frac{27}{16}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=6-3a=\frac{3}{2}$

Vậy GTLN của A là $\frac{27}{16}$

Bài 3: Cho các số thực dương a, b thỏa $\begin{cases}a\le 3\\ b\le 4\end{cases}$. Tìm GTLN của

$$A=(3-a)(4-b)(2a+3b)$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$A=\frac{1}{6}(6-2a)(12-3b)(2a+3b)\le\frac{1}{6}\left(\frac{6-2a+12-3b+2a+3b}{3}\right)^3=36$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 6-2a=12-3b=2a+3b=6\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=2\end{cases}$

Vậy GTLN của A là 36

Bài 4: Cho các số thực a, b, c thỏa $\begin{cases}a\ge 2\\b\ge 6\\c\ge 12\end{cases}$. Tìm GTLN của:

$$A=\frac{bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt[3]{b-6}+ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$bc\sqrt{a-2}=\frac{bc}{\sqrt{2}}\sqrt{(a-2).2}\le\frac{bc}{\sqrt{2}}.\frac{(a-2)+2}{2}=\frac{abc}{2\sqrt{2}}$$

$$ca\sqrt[3]{b-6}=\frac{ca}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{(b-6).3.3}\le\frac{ca}{\sqrt[3]{9}}.\frac{(b-6)+3+3}{3}=\frac{abc}{3\sqrt[3]{9}}$$

$$ab\sqrt[4]{c-12}=\frac{ab}{\sqrt[4]{64}}\sqrt[4]{(c-12).4.4.4}\le\frac{ab}{\sqrt[4]{64}}.\frac{(c-12)+4+4+4}{4}=\frac{abc}{4\sqrt[4]{64}}=\frac{abc}{8\sqrt{2}}$$

Khi đó ta có:

$$A=\frac{bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt[3]{b-6}+ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{8\sqrt{2}}=\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a-2=2\\b-6=3\\c-12=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=9\\c=16\end{cases}$

Vậy GTLN của A là $\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$

Bài 5: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Tìm GTLN của:

$$A=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a+b=\frac{2}{3}\\ b+c=\frac{2}{3}\\ c+a=\frac{2}{3}\end{cases}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(a+b).\frac{2}{3}}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{(a+b)+\frac{2}{3}}{2}\quad \textbf{(1)}$$

$$\sqrt{b+c}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{(b+c)+\frac{2}{3}}{2}\quad \textbf{(2)}$$

$$\sqrt{c+a}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{(c+a)+\frac{2}{3}}{2}\quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$A=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{2(a+b+c)+3.\frac{2}{3}}{2}=\sqrt{6}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\frac{2}{3}\\ b+c=\frac{2}{3}\\ c+a=\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{6}$

Lưu ý: *Trong bài toán sử dụng kỹ thuật nhân thêm hệ số, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi để tìm hệ số cho phù hợp.*

Bài 6: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le 3\sqrt[3]{3}$$

Phân tích:

Do biểu thức đã cho là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi:

$$a=b=c=1 \Rightarrow \begin{cases} a+2b=3 \\ b+2c=3 \\ c+2a=3 \end{cases}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sqrt[3]{a+2b}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{(a+2b).3.3}\le\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\frac{(a+2b)+3+3}{3}=\frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}} \quad \textbf{(1)}$$

$$\sqrt[3]{b+2c}\le\frac{6+b+2c}{3\sqrt[3]{9}} \quad \textbf{(2)}$$

$$\sqrt[3]{c+2a}\le\frac{6+c+2a}{3\sqrt[3]{9}} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le\frac{18+3(a+b+c)}{3\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[3]{3} \text{ (đpcm)}$$

Bài 7: Cho $a, b, c \in [-2;2]$ thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\le 3\sqrt{3}$$

Phân tích:

Do biểu thức đã cho là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi:

$$a=b=c=1 \Rightarrow \begin{cases} 4-a^2=3 \\ 4-b^2=3 \\ 4-c^2=3 \end{cases}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\sqrt{4-a^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(4-a^2)3}\le\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{(4-a^2)+3}{2}=\frac{7-a^2}{2\sqrt{3}}\quad \textbf{(1)}$$

$$\sqrt{4-b^2}\le\frac{7-b^2}{2\sqrt{3}}\quad \textbf{(2)}$$

$$\sqrt{4-c^2}\le\frac{7-c^2}{2\sqrt{3}}\quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\le\frac{21-(a^2+b^2+c^2)}{2\sqrt{3}}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunyakovski ta có

$$(a+b+c)^2\le(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}$$

nên $\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\le\dfrac{21-\dfrac{(a+b+c)^2}{3}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ (đpcm)

5. Kỹ thuật hạ bậc

5.1 Bài toán 1

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$ (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a^2+b^2+c^2$

Phân tích: Sự chênh lệch về số mũ của các biểu thức $a^2+b^2+c^2$ và $a+b+c$ gợi cho ta sử dụng bất đẳng thức AM - GM để hạ bậc $a^2+b^2+c^2$. Nhưng ta cần áp dụng cho bao nhiêu số và là những số nào? Căn cứ vào bậc của các biến số *a, b, c* trong các biểu thức trên (số bậc giảm 2 lần) thì ta cần áp dụng bất đẳng thức AM - GM lần lượt cho a^2, b^2 và c^2 cùng với 1 hằng số dương tương ứng khác để làm xuất hiện a, b và c. Do *a, b, c* dương và có vai trò như nhau nên ta dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=b=c$, từ **(*)** ta có $a=b=c=\frac{1}{3}$. Mặt khác thì dấu "=" của bất đẳng thức AM - GM xảy ra khi chỉ khi các số tham gia bằng nhau. Khi đó ta có lời giải như sau:

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 2 số: a^2 và $\frac{1}{9}$ ta có:

$a^2+\frac{1}{9}\ge 2\sqrt{a^2.\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}a$ **(1)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$

Tương tự:

$b^2+\frac{1}{9}\ge\frac{2}{3}b$ **(2)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$

$c^2+\frac{1}{9}\ge\frac{2}{3}c$ **(3)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1), (2)** và **(3)** ta được:

$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{3}\ge\frac{2}{3}(a+b+c)=\frac{2}{3}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy GTNN của A là $\frac{1}{3}$

Bài 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=1$ **(*).** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Phân tích: Căn cứ vào bậc của các biến số a, b trong các biểu thức trên (số bậc giảm 6 lần) thì ta cần áp dụng bất đẳng thức AM - GM lần lượt cho a^3 và b^3 cùng với 5 hằng số dương tương ứng khác để làm xuất hiện $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$. Do a, b dương và có vai trò như nhau nên ta dự đoán A đạt giá trị lớn nhất khi $a=b$, từ **(*)** ta có $a^3=b^3=\frac{1}{2}$. Mặt khác thì dấu "=" của bất đẳng thức AM - GM xảy ra khi chỉ khi các số tham gia bằng nhau. Khi đó ta có lời giải như sau:

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 6 số: a^3 và 5 số $\frac{1}{2}$ ta có:

$a^3+5.\frac{1}{2}\ge 6.\sqrt[6]{a^3.\left(\frac{1}{2}\right)^5}=6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}.\sqrt{a}$ **(1)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a^3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Tương tự:

$b^3+5.\frac{1}{2}\ge 6.\sqrt[6]{b^3.\left(\frac{1}{2}\right)^5}=6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}.\sqrt{b}$ **(2)** Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)** và **(2)** ta được:

$a^3+b^3+5\ge 6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow 1+5\ge 6.\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt[6]{2^5}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\sqrt[6]{2^5}$

Bài 2: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=3$. CMR: $a^3+b^3+c^3\ge 3$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$a^3+b^3+1\ge 3\sqrt[3]{a^3b^3}=3ab$ **(1)** ; $b^3+c^3+1\ge 3bc$ **(2)** ; $c^3+a^3+1\ge 3ca$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\ge 3(ab+bc+ca)$
$\Leftrightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\ge 3.3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge 3$ (đpcm)

Bài3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a^3+b^3+c^3=3$. CMR: $a^5+b^5+c^5\ge 3$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 5 số: 3 số a^5 và 2 số 1, ta có:

$3a^5+2\ge 5\sqrt[5]{a^{15}1.1}=5a^3$ **(1)**

Tương tự:

$3b^5+2\ge 5b^3$ **(2)** ; $3c^5+2\ge 5c^3$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$3\left(a^5+b^5+c^5\right)+6\ge 5\left(a^3+b^3+c^3\right)$
$\Leftrightarrow 3\left(a^5+b^5+c^5\right)+6\ge 5.3$

$\Leftrightarrow a^5+b^5+c^5\ge 3$ (đpcm)

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3$. CMR:

$$a^7+b^7+c^7 \ge 3$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 7 số: 3 số a^7 , 3 số b^7 và số 1, ta có:

$3a^7+3b^7+1 \ge 7\sqrt[7]{a^{21}.b^{21}1}=7a^3b^3$ **(1)**

Tương tự:

$3b^7+3c^7+1 \ge 7b^3c^3$ **(2)** ; $3c^7+3a^7+1 \ge 7c^3a^3$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$6(a^7+b^7+c^7)+3 \ge 7(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$
$\Leftrightarrow 6(a^7+b^7+c^7)+3 \ge 7.3$

$\Leftrightarrow a^7+b^7+c^7 \ge 3$ (đpcm)

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b. CMR: $a^2+b^2+4 \ge 2a+2b+ab$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$a^2+4 \ge 2\sqrt{a^2.4}=4a$ **(1);** $b^2+4 \ge 4b$ **(2)** ; $a^2+b^2 \ge 2ab$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$2a^2+2b^2+8 \ge 4a+4b+2ab$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+4 \ge 2a+2b+ab$ (đpcm)

Bài 6: Cho 3 số thực dương a, b, c. CMR: $a^3+b^3+c^3 \ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 6 số: 4 số a^3,1 số b^3 và 1 số c^3 ta có:

$4a^3+b^3+c^3 \ge 6\sqrt[6]{a^{12}.b^3.c^3}=6a^2\sqrt{bc}$ **(1)**

Tương tự:

$4b^3+c^3+a^3 \ge 6b^2\sqrt{ca}$ **(2)** ; $4c^3+a^3+b^3 \ge 6c^2\sqrt{ab}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$6(a^3+b^3+c^3) \ge 6(a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab})$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$ (đpcm)

Bài 7: Cho các số thực dương a, b, c, m, n. CMR:

$$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\geq a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho $m+n$ số: m số a^{m+n} và n số b^{m+n} ta có:

$$ma^{m+n}+nb^{m+n}\geq (m+n).\sqrt[m+n]{\left(a^{m+n}\right)^m\left(b^{m+n}\right)^n}=(m+n).a^m b^n \ \textbf{(1)}$$

Tương tự:

$$mb^{m+n}+nc^{m+n}\geq (m+n).b^m c^n \quad \textbf{(2)}$$

$$mc^{m+n}+na^{m+n}\geq (m+n).c^m a^n \ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$(m+n)\left(a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\right)\geq (m+n)\left(a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n\right)$$

$$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\geq a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n \text{ (đpcm)}$$

Lưu ý: *Bất đẳng thức chúng ta vừa chứng minh sẽ được sử dụng trong chứng minh các bài toán sau này.*

Bài 8: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\leq 1$$

Giải:

Từ kết quả **bài 7** ta có $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\geq a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$

Chọn $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \\ c=a \end{cases}$ ta được:

$$a^3+b^3+a^3\geq a^2b+b^2a+a^2a=a^2b+b^2a+a^3$$

$$\Rightarrow a^3+b^3\geq a^2b+b^2a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+1}\leq \frac{1}{a^2b+b^2a+1}=\frac{abc}{a^2b+b^2a+abc}=\frac{c}{a+b+c} \ (\text{do } abc=1) \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^3+c^3+1}\le\frac{a}{a+b+c} \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{b}{a+b+c} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{a+b+c}{a+b+c}=1(\text{đpcm})$$

5.2 Bài toán 2

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $10a^2+10b^2+c^2\ge 4$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$8a^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{8a^2.\frac{c^2}{2}}=4ac$$

$$8b^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{8b^2.\frac{c^2}{2}}=4bc$$

$$2a^2+2b^2\ge 2\sqrt{2a^2.2b^2}=4ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$10a^2+10b^2+c^2\ge 4(ab+bc+ca)=4.1=4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 8a^2=\dfrac{c^2}{2} \\ 8b^2=\dfrac{c^2}{2} \\ 2a^2=2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{1}{3} \\ c=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Đây là một lời giải ngắn gọn nhưng có vẻ hơi thiếu tự nhiên. Chúng ta sẽ thắc mắc tại sao lại tách được $10=8+2$. Nếu tách cách khác, chẳng hạn $10=6+4$ liệu có giải được không? Tất nhiên mọi cách tách khác đều không dẫn đến kết quả, và tách $10=8+2$ cũng không phải là sự may mắn. Bây giờ ta sẽ tìm lí do việc tách $10=8+2$ ở bài toán trên.

Với $0<\alpha<10$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\alpha a^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{\alpha a^2.\frac{c^2}{2}}=\sqrt{2\alpha}ac$$

$$\alpha b^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{\alpha b^2.\frac{c^2}{2}}=\sqrt{2\alpha}bc$$

$$(10-\alpha)a^2+(10-\alpha)b^2\ge 2\sqrt{(10-\alpha)a^2(10-\alpha)b^2}=(20-2\alpha)ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$10a^2+10b^2+c^2\ge\sqrt{2\alpha}(ac+bc)+(20-2\alpha)ab$$

Lúc này ta cân bằng điều kiện giả thuyết, tức là:

$$\sqrt{2\alpha}=20-2\alpha\Leftrightarrow 2\alpha=400-80\alpha+4\alpha^2\Leftrightarrow 2\alpha^2-41\alpha+200=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=8\\ \alpha=\frac{25}{2}>10\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\alpha=8$$

Khi đó ta có lời giải bài toán như trên.

Bài 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=5$.

CMR: :

$$3a^2+3b^2+c^2\ge 10$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$2a^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{2a^2.\frac{c^2}{2}}=2ac$$

$$2b^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{2b^2.\frac{c^2}{2}}=2bc$$

$$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2.b^2}=2ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$3a^2+3b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)=2.5=10$$

5.3 Bài toán 3

Cho các số thực dương *a, b* thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=a+4b$

Phân tích:

Dự đoán A đạt GTLN khi $a^3+b^3=1$

Giả sử A đạt GTLN khi $\begin{cases} a=\alpha \\ b=\beta \end{cases}$. Ta có $\alpha^3+\beta^3=1$ **(1)**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 3 số: a^3 và 2 số α^3 ta có:

$a^3+2\alpha^3 \ge 3.\sqrt[3]{a^3.(\alpha^3)^2}=3\alpha^2 a$

Tương tự:

$b^3+2\beta^3 \ge 3\sqrt[3]{b^3.(\beta^3)^2}=3\beta^2 b$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$(a^3+b^3)+2(\alpha^3+\beta^3) \ge 3\alpha^2 a+3\beta^2 b$

Đẻ xuất hiện ở vế phải $a+4b$ ta chọn α,β sao cho

$3\alpha^2 a:3\beta^2 b=a:4b$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{2} \quad (2)$

Từ **(1)** và **(2)** ta có hệ: $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{2} \\ \alpha^3+\beta^3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ \beta=\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases}$

Khi đó ta có lời giải sau:

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$a^3+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9} \ge 3.\sqrt[3]{a^3.\dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}a$

$b^3+\dfrac{8}{9}+\dfrac{8}{9} \ge \dfrac{4}{\sqrt[3]{3}}b$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$(a^3+b^3)+2 \ge \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}(a+4b)$

$\Rightarrow a+4b \le \sqrt[3]{3}\left[(a^3+b^3)+2\right] \le 3\sqrt[3]{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a^3 = \dfrac{1}{9} \\ b^3 = \dfrac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3} \\ b = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3} \end{cases}$

Vậy GTLN của A là $3\sqrt[3]{3}$

Bài 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm GTNN của

$$A = 4a^2 + 6b^2 + 3c^2$$

Phân tích:

Với $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$4a^2 + \alpha \geq 2\sqrt{4a^2.\alpha} = 2\sqrt{4\alpha}a$

$6b^2 + \beta \geq 2\sqrt{6b^2.\beta} = 2\sqrt{6\beta}b$

$3c^2 + \gamma \geq 2\sqrt{3c^2.\gamma} = 2\sqrt{3\gamma}c$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$4a^2 + 6b^2 + 3c^2 + \alpha + +\beta + \gamma \geq 2\sqrt{4\alpha}a + 2\sqrt{6\beta}b + 2\sqrt{3\gamma}c$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a^2 = \alpha \\ 6b^2 = \beta \\ 3c^2 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ a = \sqrt{\dfrac{\alpha}{4}} \\ b = \sqrt{\dfrac{\beta}{6}} \\ c = \sqrt{\dfrac{\gamma}{3}} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{4}} + \sqrt{\dfrac{\beta}{6}} + \sqrt{\dfrac{\gamma}{3}} = 3$

Chọn α, β, γ sao cho $4\alpha = 6\beta = 3\gamma$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\alpha}{4}} + \sqrt{\dfrac{\beta}{6}} + \sqrt{\dfrac{\gamma}{3}} = 3 \\ 4\alpha = 6\beta = 3\gamma \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\alpha}{4}}+\sqrt{\dfrac{\beta}{6}}+\sqrt{\dfrac{\gamma}{3}}=3 \\ \beta=\dfrac{4\alpha}{6} \\ \gamma=\dfrac{4\alpha}{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{4}}+\sqrt{\dfrac{4\alpha}{6.6}}+\sqrt{\dfrac{4\alpha}{3.3}}=3 \Rightarrow \sqrt{\alpha}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)=3$$

$$\Rightarrow \alpha=4 \Rightarrow \begin{cases} \beta=\dfrac{8}{3} \\ \gamma=\dfrac{16}{3} \end{cases}$$

Khi đó ta có lời giải bài toán như sau

<u>Giải:</u>

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$4a^2+4\ge 2\sqrt{4a^2.4}=8a$$

$$6b^2+\frac{8}{3}\ge 2\sqrt{8b^2.\frac{6}{3}}=8b$$

$$3c^2+\frac{16}{3}\ge 2\sqrt{3c^2.\frac{16}{3}}=8c$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta được:

$$4a^2+6b^2+3c^2+4+\frac{8}{3}+\frac{16}{3}\ge 8(a+b+c)=24$$

$$\Rightarrow 4a^2+6b^2+3c^2\ge 12$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a^2=4 \\ 6b^2=\dfrac{8}{3} \\ 3c^2=\dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{2}{3} \\ c=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Vậy GTNN của A là 12

6. Kỹ thuật cộng thêm

<u>Bài 1:</u> Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

<u>Giải:</u>

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{1}{a}}=\frac{2}{b}$ **(1)** ; $\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{c}$ **(2)**; $\frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ \text{(đpcm)}$$

Bài 2: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{2b+c}+\frac{b^2}{2c+a}+\frac{c^2}{2a+b}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2}{2b+c}+\frac{2b+c}{9}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{2b+c}.\frac{2b+c}{9}}=\frac{2a}{3}$ **(1)** ;

$\frac{b^2}{2c+a}+\frac{2c+a}{9}\ge\frac{2b}{3}$ **(2)** ; $\frac{c^2}{2a+b}+\frac{2a+b}{9}\ge\frac{2c}{3}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{2b+c}+\frac{b^2}{2c+a}+\frac{c^2}{2a+b}+\frac{3(a+b+c)}{9}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{2b+c}+\frac{b^2}{2c+a}+\frac{c^2}{2a+b}\ge\frac{a+b+c}{3}\ \text{(đpcm)}$$

Lưu ý: *Trong bài toán sử dụng kỹ thuật cộng thêm hệ số, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi và kỹ thuật hạ bậc để tìm hạng tử cho phù hợp.*

Ví dụ:

- Đối với **bài 1** bất đẳng thức đã cho có tính đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$. Khi đó $\frac{a}{b^2}=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}$, ta chọn $\frac{1}{a}$.
- Đối với **bài 2** bất đẳng thức đã cho có tính đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$. Khi đó $\frac{a^2}{2b+c}=\frac{a^2}{2a+a}=\frac{a}{3}$, muốn sử dụng

bất đẳng thức AM - GM để làm mất mẫu thì ta cộng thêm $\frac{2b+c}{9}$. Chọn mẫu là số 9 vì $\frac{2b+c}{9}=\frac{2a+a}{9}=\frac{a}{3}$.

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3+b^3}{ab}+\frac{b^3+c^3}{bc}+\frac{c^3+a^3}{ca}\ge 2(a+b+c)$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^3+b^3}{ab}+\frac{b^3+c^3}{bc}+\frac{c^3+a^3}{ca}=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.b}=2a$ **(1)**; $\frac{b^2}{a}+a\ge 2b$ **(2)** ; $\frac{b^2}{c}+c\ge 2b$ **(3)** ;

$\frac{c^2}{b}+b\ge 2c$ **(4)** ; $\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$ **(5)** ; $\frac{a^2}{c}+c\ge 2a$ **(6)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1)** đến **(6)** ta được:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}+2(a+b+c)\ge 4(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}\ge 2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{ab}+\frac{b^3+c^3}{bc}+\frac{c^3+a^3}{ca}\ge 2(a+b+c)\ \text{(đpcm)}$$

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}.\frac{1}{a}.\frac{1}{a}}=\frac{3}{b}$ **(1)** ; $\frac{b^2}{c^3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge\frac{3}{c}$ **(2)**; $\frac{c^2}{a^3}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{a}$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ (đpcm)}$$

Bài 5: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq a^2+b^2+c^2$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{b}+b^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}.\frac{a^3}{b}.b^2}=3a^2 \ \textbf{(1)} \ ;$$

$$\frac{b^3}{c}+\frac{b^3}{c}+c^2\geq 3b^2 \ \textbf{(2)} \ ; \qquad \frac{c^3}{a}+\frac{c^3}{a}+a^2\geq 3c^2 \ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq a^2+b^2+c^2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 6: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq \frac{3}{4}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}.\frac{1+b}{8}.\frac{1+c}{8}}=\frac{3}{4}a \ \textbf{(1)} \ ;$$

$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\geq \frac{3}{4}b \ \textbf{(2)} \ ;$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\geq\frac{3}{4}c\ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{abc}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

(đpcm)

Bài 7: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^4}{bc^2}+\frac{b^4}{ca^2}+\frac{c^4}{ab^2}\geq a+b+c$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^4}{bc^2}+b+c+c\geq 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{bc^2}.b.c.c}=4a\ \textbf{(1)}$$

$$\frac{b^4}{ca^2}+c+a+a\geq 4b\ \textbf{(2)}$$

$$\frac{c^4}{ab^2}+a+b+b\geq 4c\ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^4}{bc^2}+\frac{b^4}{ca^2}+\frac{c^4}{ab^2}+3(a+b+c)\geq 4(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\frac{a^4}{bc^2}+\frac{b^4}{ca^2}+\frac{c^4}{ab^2}\geq a+b+c\ \text{(đpcm)}$$

Bài 8: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{a+b}{4ab}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c^2(a+b)}.\frac{a+b}{4ab}}=\frac{1}{c}\quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}\geq\frac{1}{a}\quad \textbf{(2)};\quad \frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{c+a}{4ca}\geq\frac{1}{b}\quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{a+b}{4ab}+\frac{b+c}{4bc}+\frac{c+a}{4ca}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4c}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{ab}{c^2(a+b)}+\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ \text{(đpcm)}$$

Bài 9: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{a(b+c)}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b+c}.\frac{a(b+c)}{4}}=a^2\quad \textbf{(1)};$$

$$\frac{b^3}{c+a}+\frac{b(c+a)}{4}\geq b^2\quad \textbf{(2)};\quad \frac{c^3}{a+b}+\frac{c(a+b)}{4}\geq c^2\quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{2}\geq a^2+b^2+c^2\quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có: $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\geq a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$

Chọn $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ ta được:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\geq\frac{ab+bc+ca}{2}\quad \textbf{(2')}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1′)**và **(2′)** ta được:

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{3}{2}\ \text{(đpcm)}$$

Bài 10: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}\ge a^3+b^3+c^3$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^5}{b^2}+ab^2\ge 2\sqrt{\frac{a^5}{b^2}.ab^2}=2a^3\quad \textbf{(1)};$$

$$\frac{b^5}{c^2}+bc^2\ge 2b^3\quad \textbf{(2)};\quad \frac{c^5}{a^2}+ca^2\ge 2c^3\ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}+ab^2+bc^2+ca^2\ge 2(a^3+b^3+c^3)\textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có: $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\ge a^mb^n+b^mc^n+c^ma^n$

Chọn $\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$ ta được:

$$a^3+b^3+c^3\ge ab^2+bc^2+ca^2\quad \textbf{(2')}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1')**và **(2')** ta được:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}+ab^2+bc^2+ca^2+a^3+b^3+c^3\ge 2(a^3+b^3+c^3)+ab^2+bc^2+ca^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}\ge a^3+b^3+c^3\ \text{(đpcm)}$$

Bài 11: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}\ge\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{a(a+2b)}{9}\geq 2\sqrt{\frac{a^3}{a+2b}.\frac{a(a+2b)}{9}}=\frac{2}{3}a^2 \quad \textbf{(1)} ;$$

$$\frac{b^3}{b+2c}+\frac{b(b+2c)}{9}\geq \frac{2}{3}b^2 \quad \textbf{(2)} ; \quad \frac{c^3}{c+2b}+\frac{c(c+2b)}{9}\geq \frac{2}{3}c^2 \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}+\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{2}{9}(ab+bc+ca)\geq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}+\frac{2}{9}(ab+bc+ca)\geq \frac{5}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có: $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\geq a^m b^n+b^m c^n+c^m a^n$

Chọn $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ ta được:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq \frac{2}{9}(ab+bc+ca) \textbf{(2')}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1′)**và **(2′)** ta được:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}+\frac{2}{9}(ab+bc+ca)+\frac{2}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq \frac{5}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{2}{9}(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}\geq \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right) \text{ (đpcm)}$$

Bài 12: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{4}{b+c}\geq 2\sqrt{\frac{b+c}{a^2}.\frac{4}{b+c}}=\frac{4}{a} \quad \textbf{(1)} ;$$

$$\frac{c+a}{b^2}+\frac{4}{c+a}\geq \frac{4}{b} \quad \textbf{(2)} ; \quad \frac{a+b}{c^2}+\frac{4}{a+b}\geq \frac{4}{c} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1)**, **(2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\geq \frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c} \quad \textbf{(1')}$$

Mà ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=\frac{4}{2\sqrt{ab}}\ge\frac{4}{a+b}\quad \mathbf{(2')}\ ;$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{b+c}\quad \mathbf{(3')};\qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{a}\ge\frac{4}{c+a}\quad \mathbf{(4')}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức **(1′), (2′), (3′)** và **(4′)** ta được:

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\ge\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}+\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}$$

$$\Rightarrow\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\ \text{(đpcm)}$$

Bài 13: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{4c^2}{a}\ge a+3b$$

Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=2c$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.b}=2a\ \mathbf{(1)};\qquad \frac{b^2}{c}+4c\ge 4b\ \mathbf{(2)}\ ;\qquad \frac{4c^2}{a}+a\ge 4c\quad \mathbf{(3)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1), (2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{4c^2}{a}+a+b+4c\ge 2a+4b+4c$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{4c^2}{a}\ge a+3b\ \text{(đpcm)}$$

Bài 14: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\ge\frac{1}{9}(64c-a-b)$$

Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=2c$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{4(b+c)}{9}\ge\dfrac{4a}{3}$ **(1)**; $\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{4(c+a)}{9}\ge\dfrac{4b}{3}$ **(2)**; $\dfrac{16c^2}{a+b}+(a+b)\ge 8c$ **(3)**

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ **(1), (2)** và **(3)** ta được:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}+\frac{13}{9}(a+b)+\frac{8}{9}c\ge\frac{4}{3}(a+b)+8c$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{16c^2}{a+b}\ge\frac{1}{9}(64c-a-b)\ \text{(đpcm)}$$

7. Kỹ thuật AM - GM ngược dấu

Xét bài toán sau:

Bài toán: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Phân tích và giải:

Ta không thể dùng trực tiếp bất đẳng thức AM - GM với mẫu vì bất đẳng thức sau đó sẽ đổi chiều:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\ge\frac{3}{2}$$

$$\left(\text{Do}\quad\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{2a}.\frac{1}{2b}.\frac{1}{2c}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{3}{2}\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}=\frac{3}{2}\right)$$

Đến đây chúng ta sẽ bị lúng túng trong cách giải. Ở đây ta sẽ sử dụng lại bất đẳng thức AM - GM theo cách khác:

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}\quad\textbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{b^2+1}\ge 1-\dfrac{b}{2}$ **(2)**; $\dfrac{1}{c^2+1}\ge 1-\dfrac{c}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}\quad\text{(đpcm)}$$

Nhận xét: Kỹ thuật AM - GM ngược dấu có thể hiểu là ta lấy ***nghịch đảo hai vế*** của bất đẳng thức AM - GM sau đó ***nhân hai vế với -1***. Khi đó dấu của bất đẳng thức ban đầu sẽ không đổi chiều.

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge 1-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=1-\frac{\sqrt{ab}}{2}\quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+bc}\ge 1-\frac{\sqrt{bc}}{2}$ **(2)**; $\frac{1}{1+ca}\ge 1-\frac{\sqrt{ca}}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge 3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

$$\ge 3-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=3-\frac{a+b+c}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(đpcm)

Bài 2: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}\quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{c^2+1}\ge b-\frac{bc}{2}$ **(2)**; $\frac{c}{a^2+1}\ge c-\frac{ca}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{d}{d^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2} \qquad \mathbf{(1')}$$

Mặt khác ta có:

$$ab+bc+ca\le\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3 \qquad \mathbf{(2')}$$

Từ **(1′)** và **(2′)** ta có:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

Lưu ý: *Ta sẽ sử dụng kết quả* $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$ *trong chứng minh các bài toán khác.*

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\ge a+1-\frac{(a+1)b^2}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2} \qquad \mathbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\frac{b+1}{c^2+1}\ge b+1-\frac{bc+c}{2}$ **(2)** ; $\frac{c+1}{a^2+1}\ge c+1-\frac{ca+a}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge a+b+c+3-\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2}$$

$$\ge\frac{a+b+c}{2}+3-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\ge\frac{3}{2}+3-\frac{\frac{(a+b+c)^2}{3}}{2}=\frac{3}{2}+3-\frac{3}{2}=3$$

Vậy

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$$

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}\quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2}$ **(2)**; $\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge a+b+c-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b+c}{2}$$

(đpcm)

Bài 5: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện : $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge 2$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a}{b^2c+1}=a-\frac{ab^2c}{b^2c+1}\ge a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}=a-\frac{b\sqrt{a(ac)}}{2}\ge a-\frac{b(a+ac)}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b^2c+1}\ge a-\frac{1}{4}(ab+abc)\qquad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{c^2a+1}\ge b-\frac{1}{4}(bc+abc)\ \textbf{(2)};\qquad \frac{c}{a^2b+1}\ge c-\frac{1}{4}(ca+abc)\ \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{4}-\frac{abc}{4}=3-\frac{ab+bc+ca}{4}-\frac{abc}{4}\quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có:

$$3=\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}\ge\frac{ab+bc+ca}{4}\ \ \textbf{(2')}$$

$$3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ge\frac{abc}{4}\ \ \textbf{(3')}$$

Cộng theo vế **(1'), (2'), (3')** ta được:

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ge 3$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge 2 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 6: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge 1$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a}{2b^3+1}=a-\frac{2ab^3}{b^3+b^3+1}\ge a-\frac{ab^3}{3b^2}=a-\frac{2ab}{3}\ \ \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{2c^3+1}\ge b-\frac{2bc}{3}$ **(2)**; $\frac{c}{2a^3+1}\ge c-\frac{2ca}{3}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge a+b+c-\frac{2(ab+bc+ca)}{3}=a+b+c-2 \quad \textbf{(1')}$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow a+b+c\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}=3\ \ \textbf{(2')}$$

Cộng theo vế **(1')** và **(2')** ta được:

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}+a+b+c\ge a+b+c+1$$

$$\Rightarrow\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 7: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=a-\frac{a^2b+ab^2}{a^2+ab+b^2}\geq a-\frac{ab(a+b)}{3ab}=a-\frac{a+b}{3}=\frac{2a-b}{3} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geq\frac{2b-c}{3} \quad \textbf{(2)}; \qquad \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{2c-a}{3} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3} \qquad \text{(đpcm)}$$

Bài 8: Cho 3 số thực dương a, b, c có tổng thỏa điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geq 1$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+b^2+b^2}\geq a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(ab)^2} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^2}{b+2c^2}\geq b-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(bc)^2} \quad \textbf{(2)}; \quad \frac{c^2}{c+2a^2}\geq c-\frac{2}{3}\sqrt[3]{(ca)^2} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geq a+b+c-\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right]$$

$$\geq 3-\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{(ab)^2}+\sqrt[3]{(bc)^2}+\sqrt[3]{(ca)^2}\right] \quad \textbf{(*)}$$

Mặt khác ta có:

$$\sqrt[3]{(ab)^2} = \sqrt[3]{a.ab.b} \le \frac{a+ab+b}{3} \quad \textbf{(1')}$$

Tương tự:

$$\sqrt[3]{(bc)^2} \le \frac{b+bc+c}{3} \quad \textbf{(2')}\ ; \qquad \sqrt[3]{(ca)^2} \le \frac{c+ca+a}{3} \quad \textbf{(3')}$$

Cộng theo vế **(1'), (2')** và **(3')** ta có

$$\sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2} \le \frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\le \frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}.\frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{2}{3}.3 + \frac{1}{3}.\frac{3^2}{3} = 3$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2}\right] \ge -\frac{2}{3}.3 = -2 \quad \textbf{(**)}$$

Từ **(*)** và **(**)** ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \ge 3-2=1 \qquad \text{(đpcm)}$$

Bài 9: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \ge 1$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} = a - \frac{2ab^3}{a+b^3+b^3} \ge a - \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}} = a - \frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2} \quad \textbf{(1)}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^2}{b+2c^3} \ge b - \frac{2}{3}c\sqrt[3]{b^2} \quad \textbf{(2)}\ ; \qquad \frac{c^2}{c+2a^3} \ge c - \frac{2}{3}a\sqrt[3]{c^2} \quad \textbf{(3)}$$

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \ge a+b+c - \frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2}\right)$$

$$\ge 3 - \frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2}\right) \quad \textbf{(*)}$$

Mặt khác ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2}=b\sqrt[3]{a.a.1}\le b\left(\frac{a+a+1}{3}\right)=b\left(\frac{2a+1}{3}\right)=\frac{2ab+b}{3}\qquad \textbf{(1')}$$

Tương tự ta có:

$$c\sqrt[3]{b^2}\le\frac{2bc+c}{3}\qquad \textbf{(2')};\qquad a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ca+a}{3}\qquad \textbf{(3')}$$

Cộng theo vế **(1'), (2'), (3')** ta được:

$$\left(b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\right)\le\frac{a+b+c}{3}+\frac{2}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\le\frac{a+b+c}{3}+\frac{2}{3}.\frac{(a+b+c)^2}{3}=3\qquad \textbf{(**)}$$

Từ **(*)** và **(**)** ta có: $\dfrac{a^2}{a+2b^3}+\dfrac{b^2}{b+2c^3}+\dfrac{c^2}{c+2a^3}\ge 1$ (đpcm)

B. MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

I. BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

1. Cho $2n$ số thực bất kì $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ $n \in Z, n \geq 1$, ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ (quy ước $b_i = 0$ thì $a_i = 0$)

2.

II. MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOVSKI

1. Kỹ thuật tách ghép bộ số

Bài 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 1$. CMR $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \left(\sqrt{a}.\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}.\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}.\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = 9$$

Vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Bài 2: Cho các số thực dương a, b, c. CMR :

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \leq \sqrt{6}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}}\right)^2$$
$$\le \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}\right)=6$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}}\le\sqrt{6}$$

Bài 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=4$. CMR:

$$a^4+b^4+c^4\ge\frac{16}{3}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có :

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\left(1.a^2+1.b^2+1.c^2\right)^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+a^2\right)$$
$$\ge(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)=16$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge\frac{16}{3}$$ (đpcm)

Bài 4: Cho các số thực dương a, b. CMR $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}.\sqrt[4]{b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}.\sqrt[4]{a}\right)^2\le\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right).\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\le\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$$

(đpcm)

Bài 5: Cho các số thực dương a, b. CMR $a+b+c\le2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$

Giải:

Ta có:

$$a+b+c=\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$(a+b+c)^2 \le \left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right]$$

$$\le \left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)[2(a+b+c)]$$

$$\Rightarrow a+b+c \le 2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right) \text{(đpcm)}$$

Bài 6: Cho các số thực dương a, b thỏa $a^2+b^2=1$. Tìm GTLN của

$$A = a\sqrt{1+a}+b\sqrt{1+b}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$A = a\sqrt{1+a}+b\sqrt{1+b} \le \sqrt{\left(a^2+b^2\right)(1+a+1+b)} = \sqrt{a+b+2}$$

$$\le \sqrt{\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right)}+2} = \sqrt{\sqrt{2}+2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \dfrac{a}{\sqrt{a+1}}=\dfrac{b}{\sqrt{b+1}} \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{\sqrt{2}+2}$

Bài 7: Cho số thực a, b thỏa $36a^2+16b^2=9$. Tìm GTLN và GTNN của

$$A = -2a+b+5$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$\left(36a^2+16b^2\right)\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] \ge \left[6a\left(-\frac{1}{3}\right)+4b.\frac{1}{4}\right]^2 = (-2a+b)^2$$

$$\Rightarrow (-2a+b)^2 \le \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4} \le -2a+b \le \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{4} \le -2a+b+5 \le \frac{25}{4}$$

Ta có:

GTNN của A là $-\dfrac{25}{4}$ khi $\Leftrightarrow \begin{cases} 36a^2+9b^2=9 \\ \dfrac{6a}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{4b}{\frac{1}{4}} \\ -2a+b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{5} \\ b=-\dfrac{9}{20} \end{cases}$

GTLN của A là $\dfrac{25}{4}$ khi $\Leftrightarrow \begin{cases} 36a^2+9b^2=9 \\ \dfrac{6a}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{4b}{\frac{1}{4}} \\ -2a+b=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{5} \\ b=\dfrac{9}{20} \end{cases}$

Bài 8: Cho các số thực dương a, b, c. CMR:

$$a^4+b^4+c^4 \ge \left(\frac{a+3b}{4}\right)^4+\left(\frac{b+3c}{4}\right)^4+\left(\frac{c+3a}{4}\right)^4$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski, ta có :

$$\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4=\left[\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{b}{4}+\frac{b}{4}\right)^2\right]^2 \le \left[\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)\left(a^2+b^2+b^2+b^2\right)\right]^2$$

$$\le \frac{1}{16}\left(a^2+b^2+b^2+b^2\right)^2$$

$$\le \frac{1}{16}(1+1+1+1)\left(a^4+b^4+b^4+b^4\right)$$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a+3b}{4}\right)^4 \le \dfrac{a^4+3b^4}{4}$ **(1)**

Tương tự:

$\left(\dfrac{b+3c}{4}\right)^4 \le \dfrac{b^4+3c^4}{4}$ **(2)**

$\left(\dfrac{c+3a}{4}\right)^4 \le \dfrac{c^4+3a^4}{4}$ **(3)**

Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được:

$$\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4+\left(\frac{b+3c}{4}\right)^4+\left(\frac{c+3a}{4}\right)^4\le a^4+b^4+c^4 \qquad \text{(đpcm)}$$

Bài 9: Cho $a,b,c\in(0,1)$. CMR $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski :

$$\left(\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\right)^2\le[a+(1-a)][bc+(1-b)(1-c)]=bc+(1-b)(1-c)$$
$$\Rightarrow\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\sqrt{bc+(1-b)(1-c)}<\sqrt{bc}+\sqrt{(1-b)(1-c)}$$

Mà

$$\left(\sqrt{bc}+\sqrt{(1-b)(1-c)}\right)^2\le[b+(1-b)][c+(1-c)]=1$$
$$\Rightarrow\sqrt{bc}+\sqrt{(1-b)(1-c)}\le 1$$

Vậy ta có:

$$\left(\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\right)^2<1$$

hay

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$

Lưu ý: *Trong cách chứng minh trên ta đã sử dụng bất đẳng thức*

$$\sqrt{x+y}<\sqrt{x}+\sqrt{y}\quad(x,y>0)$$

Dễ dàng chứng minh tính chất này, ta có:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}>x+y\qquad(x,y>0)$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$$

Bài 10: Cho các số thực dương a, b, c. CMR

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$$

Giải:

Ta có:

$$(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]$$
$$=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{b}}{c+a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c}}{a+c}\right)^2\right]$$
$$\geq\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2$$

Mà ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

(bất đẳng thức Nesbit, đã chứng minh trong phần trước)

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}\quad(\text{đpcm})$$

2. Kỹ thật chọn điểm rơi

Bài 1: Cho các số thực dương a, b,c thỏa $a+b+c\geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của

$$A=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$$

. **Phân tích:**

Chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn. Giả sử với các số α,β ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left(a^2+\dfrac{1}{b^2}\right).\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha a+\dfrac{\beta}{b}\right)\\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left(b^2+\dfrac{1}{c^2}\right).\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha b+\dfrac{\beta}{c}\right)\\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left(c^2+\dfrac{1}{a^2}\right).\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha c+\dfrac{\beta}{a}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow A\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\alpha(a+b+c)+\beta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c=2$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c=2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta b}\\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta c}\\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta a}\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=ab=bc=ca=\frac{4}{1}\text{, chọn }\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=1\end{cases}$$

Kết hợp với " kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM" ta có lời giải:

Giải:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(a^2+\dfrac{1}{b^2}\right)(4^2+1^2)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4a+\dfrac{1}{b}\right)\\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(b^2+\dfrac{1}{c^2}\right)(4^2+1^2)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4b+\dfrac{1}{c}\right)\\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(c^2+\dfrac{1}{a^2}\right)(4^2+1^2)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}\left(4c+\dfrac{1}{a}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow A\ge\frac{1}{\sqrt{17}}\left[4(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{15}{4}(a+b+c)+\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$ Dấu

$$\ge\frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{15}{4}.6+6.\sqrt[6]{\frac{a}{4}.\frac{b}{4}.\frac{c}{4}.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}\right)=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

"=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{b}\\ \dfrac{b}{4}=\dfrac{1}{c}\\ \dfrac{c}{4}=\dfrac{1}{a}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=2$

Vậy GTNN của A là $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 2: Cho các số thực dương a, b,c thỏa $a+b+c\ge 6$.. Tìm GTNN của

$$A=\sqrt{a^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c+a}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a+b}}$$

. **Phân tích:**

Chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn. Giả sử với các số α,β ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b+c}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\sqrt{\left[a^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2\right](\alpha^2+\beta^2)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha a+\dfrac{\beta}{\sqrt{b+c}}\right)\\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c+a}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha b+\dfrac{\beta}{\sqrt{c+a}}\right)\\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a+b}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha c+\dfrac{\beta}{\sqrt{a+b}}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow A\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\alpha(a+b+c)+\beta\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)\right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c=2$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta b} \\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta c} \\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=ab=bc=ca=\dfrac{4}{1}, \text{ chọn } \begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=1 \end{cases}$$

Kết hợp với " kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM" ta có lời giải:

<u>Giải</u>

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+\dfrac{1}{b+c}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{\left(a^2+\dfrac{1}{b+c}\right).\left(4^2+1^2\right)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4a+\dfrac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c+a}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(4b+\dfrac{1}{\sqrt{c+a}}\right) \\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a+b}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}\left(4c+\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left[4(a+b+c)+\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+3.\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a+b}}.\frac{1}{\sqrt{a+b}}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a+b}+\sqrt{c+a}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{6(a+b+c)}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{31}{8}(a+b+c)+\frac{1}{8}(a+b+c)+\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}+\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}\right]$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{31}{8}.6+3\sqrt[3]{\frac{1}{8}(a+b+c).\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}.\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}}\right]=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a=b=c=2$ thì GTNN của A là $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 3: Cho các số thực dương a, b,c thỏa $a+b+c+\sqrt{2abc}\ge 10$. Tìm GTNN của

$$A=\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$$a=b=c=2$$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c=2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta b}\\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta c}\\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta a}\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=ab=bc=ca=\frac{4}{1}\text{, chọn }\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=1\end{cases}$$

Kết hợp với " kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM - GM" ta có lời giải:

Giải

$$\begin{cases}\sqrt{2+18+4}\sqrt{\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{9b^2}{2}+\dfrac{c^2a^2}{4}}\le\dfrac{4}{a}+9b+ca\\ \sqrt{2+18+4}\sqrt{\dfrac{8}{b^2}+\dfrac{9c^2}{2}+\dfrac{a^2b^2}{4}}\le\dfrac{4}{b}+9b+ca\\ \sqrt{2+18+4}\sqrt{\dfrac{8}{c^2}+\dfrac{9a^2}{2}+\dfrac{b^2c^2}{4}}\le\dfrac{4}{a}+9b+ca\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{24}.A\ge\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)+9(a+b+c)+(ab+bc+ca)$$

$$\ge\left(\frac{4}{a}+a\right)+\left(\frac{4}{b}+b\right)+\left(\frac{4}{c}+c\right)+(2a+bc)+(2b+ac)+(2c+ab)+6(a+b+c)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}.a}+2\sqrt{\frac{4}{b}.b}+2\sqrt{\frac{4}{c}.c}+2\sqrt{2abc}++2\sqrt{2abc}++2\sqrt{2abc}+6(a+b+c)$$

$$\ge 12+6\left(a+b+c+\sqrt{2abc}\right)\ge 72$$

$$\Rightarrow A\ge\frac{72}{\sqrt{24}}=6\sqrt{6}$$

Với $a=b=c=2$ thì GTNN của A là $6\sqrt{6}$