MỘT SỐ BÀI TOÁN
VỀ ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH VÀ ĐIỂM CỐ ĐỊNH

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bài toán về đường cố định và điểm cố định là một bài toán khó, đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng phân tích bài toán và suy nghĩ, tìm tòi một cách sâu sắc để tìm ra được lời giải. Một vấn đề quan trọng khi giải bài toán về đường cố định và điểm cố định dự đoán được yếu tố cố định. Thông thường ta dự đoán các yếu tố cố định bằng các phương pháp sau:

• Giải bài toán trong trường hợp đặc biệt để thấy được yếu tố cố định cần tìm. Từ đó ta suy ra trường hợp tổng quát.

• Xét các đường đặc biệt để của một họ đường để thấy được yếu tố cố định cần tìm.

• Dựa vào tính đối xứng, tính độc lập, bình đẳng của các đối tượng để hạn chế phạm vi của hình tứ đó có thể tìm được yếu tố cố định.

Khi giải bài toán về đường cố định và điểm cố định ta thường thực hiện các bước như sau:

a) Tìm hiểu bài toán: Khi tìm hiểu bài toán ta xác định được

+ Yếu tố cố định(điểm, đường, …)

+ Yếu tố chuyển động(điểm, đường, …)

+ Yếu tố không đổi(độ dài đoạn, độ lớn góc, …)

+ Quan hệ không đổi(Song song, vuông góc, thẳng hàng, …)

b) Dự đoán điểm cố định: Dựa vào những vị trí đặc biệt của yếu tố chuyển động để dự đoán yếu tố cố định. Thông thường ta tìm một hoặc hai vị trí đặc biệt cộng thêm với các đặc điểm bất biến khác như tính chất đối xứng, song song, thẳng hàng … để dự đoán điểm cố định

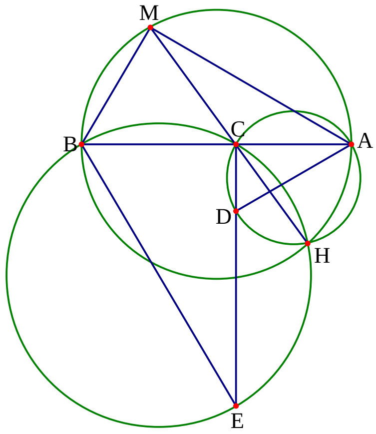
c) Tìm tòi hướng giải: Từ việc dự đoán yếu tố cố định tìm mối quan hệ giữa yếu tố đó với các yếu tố chuyển động, yếu tố cố định và yếu tố không đổi.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho ba điểm A, C, B thẳng hành theo thứ tự đó. Vẽ tia Cx vuông góc với AB. Trên tia Cx lấy hai điểm D, E sao cho $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC tại H khác C. Chứng minh rằng đường thẳng HC luôn đi qua một điểm cố định khi C di chuyển trên đoạn thẳng AB.

Phân tích tìm lời giải

Tìm hiểu đề bài:



+ Yếu tố cố định: đoạn thẳng AB

+ Yếu tố không đổi: $\widehat{BEC} = 30^0$, $\widehat{ADB} = 60^0$

Do đó số đo cung BC và cung CA không đổi.

Ba điểm B, D, H thẳng hàng và E, H, A thẳng hàng

Dự đoán điểm cố định: Khi C trùng B thì (d) tạo với BA một góc 60^0, suy ra điểm cố định thuộc tia By tạo với tia BA một góc 60^0. Khi C trùng A thì (d) tạo với AB một góc 30^0, suy ra điểm cố định thuộc tia Az tạo với tia AB một góc 30^0

Khi By và Az cắt nhau tại M thì M là điểm cố định? Nhận thấy M nhìn AB cố định dưới 90^0 nên M thuộc đường tròn đường kính AB.

Tìm hướng chứng minh: M thuộc đường tròn đường kính AB cố định do đó cần chứng minh số đo cung AM không đổi. Thật vậy $sd\overset{\frown}{AM} = 2\widehat{MCA} = 2\widehat{CHA} = 2\widehat{CDA} = 120^0$

Lời giải

Ta có $\tan D = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{D} = 60^0$. Ta lại có $\widehat{CHA} = \widehat{CDA} = 60^0$

Gọi giao điểm của đường tròn đường kính AB với CH là M. Ta có $\widehat{MHA} = 60^0$.

Ta có $sd\overset{\frown}{AM} = 2\widehat{MCA} = 2\widehat{CHA} = 2\widehat{CDA} = 120^0$. Do đó số đo cung MA không đổi. Lại có đường tròn đường kính AB cố định nên M cố định do đó CH luôn qua M cố định.

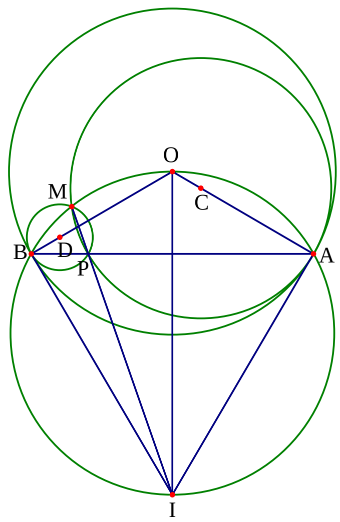
Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $AB = R\sqrt{3}$. Lấy điểm P khác A và B trên dây AB. Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A. Gọi $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại B. Các đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại M khác P. Chứng minh rằng khi P di động trên AB thì đường thẳng PM luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Tìm hiểu đề bài:

+ Yếu tố cố định: Đường tròn $(O;R)$ và dây AB

+ Yếu tố không đổi: DPCO là hình bình hành. Số đo cung BP của đường tròn $(D;R_2)$ và số đo cung AP của đường tròn $(C;R_1)$, số đo góc $\widehat{BMA}$ không đổi



Dự đoán điểm cố định: Khi P trùng với A thì PM là tiếp tuyến của $(O;R)$ nên điểm cố định nằm trên tiếp tuyến của $(O;R)$ tại A. Khi P trùng với B thì PM là tiếp tuyến của $(O;R)$ nên điểm cố định nằm trên tiếp tuyến của $(O;R)$ tại B.

Do tính chất đối xứng của hình nên điểm cố định nằm trên đường thẳng qua O và vuông góc với AB. Do đó điểm cố định nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

Lời giải

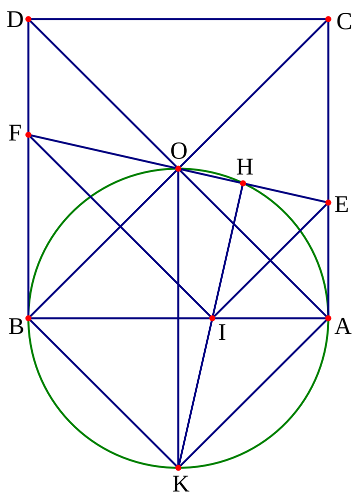
Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB cắt PM tại I. Vì $AB = R\sqrt{3}$ nên số đo cung AB của đường tròn $(O;R)$ bằng 120^0. Tam giác BDP cân ta D nên ta được $\widehat{OBA} = \widehat{DPB}$ và tam giác OAB cân tại O nên $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$. Do đó ta được $\widehat{BDP} = \widehat{BOA}$ nên số đo của cung BP của đường tròn $(D;R_2)$ và số đo cung BA của đường tròn $(O;R)$ đều bằng 120^0. Hoàn toàn tương tự ta được số đo cung PA của $\left(C;R_1\right)$ cũng bằng 120^0. Do đó ta có $\widehat{BMP}=60^0$ và $\widehat{AMP}=60^0$ nên $\widehat{BMA}=\widehat{BMP}+\widehat{AMP}=120^0=\widehat{BOA}$

Tứ giác BMOA có $\widehat{BMA}=\widehat{BOA}$ nên tứ giác BMOA nội tiếp hay M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BOA. Từ đó suy ra $\widehat{IMA}=\widehat{PMA}=120^0$. Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB và số đo cung IA bằng 120^0 nên I cố định. Vậy MP đi qua I cố định.

Ví dụ 3. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Vẽ đường thẳng d quay quanh O cắt AD, BC thứ tự tại E, F. Từ E, F lần lượt vẽ các đường thẳng song song với BD, CA chúng cắt nhau tại I. Qua I vẽ đường thẳng m vuông góc với EF. Chứng minh rằng m luôn đi qua một điểm cố định khi d quay quanh O.

Phân tích tìm lời giải

Khi điểm E trùng với điểm A thì HI qua A và vuông góc với AC. Khi điểm E trùng với điểm D thì HI qua B và vuông góc với BD. Do tính chất đối xứng của hình vẽ nên điểm cố định nằm trên đường trung trức của AB. Từ đó ta dự đoán được điểm cố định K nằm trên đường tròn đường kính AB



Lời giải

Dễ thấy điểm I thuộc AB. Ta có $\widehat{IHE}+\widehat{IAE}=180^0$ nên tứ giác IHEA nội tiếp. Từ đó suy ra $\widehat{IHA}=\widehat{IEA}=45^0$

Ta lại có $\widehat{IHF}+\widehat{IBF}=180^0$ nên tứ giác IHFB nọi tiếp.

Do đó $\widehat{BHI}=\widehat{BFI}=45^0$

Vẽ đường tròn đường kính AB khi đó ta có $\widehat{BHA}=\widehat{IHA}+\widehat{BHI}=90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính AB. Giả sử HI cắt đường tròn đường kính AB tại K. Khi đó ta có $sd\widehat{KH}=\widehat{KHA}=\widehat{IHA}=90^0$

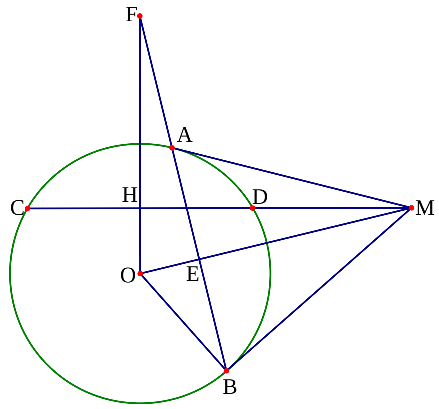
Do K thuộc đường tròn đường kính AB và số đo cung KH bằng 90^0 nên điểm K cố định.

Vậy HI luôn đi qua điểm K cố định khi d quay quanh O.

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) bán kính R và một đường thẳng d cắt (O) tại C, D. Một điểm M di động trên d sao cho $MC > MD$ và ở ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (với A, B là các tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Do đường thẳng OH cho trước, nên dự đoán AB cắt OH tại điểm cố định. Gọi H là trung điểm CD và giao điểm của AB với MO, OH lần lượt là E, F. Ta thấy tứ giác MEHF nội tiếp và tam giác OMH vuông nên ta có thể suy ra được OF không đổi. Từ đó suy ra F cố định.



Lời giải

Gọi H là trung điểm CD và giao điểm của AB với MO, OH lần lượt là E, F. Tam giác OBM vuông tại B có đường cao BE nên ta được

$OE.OM = OB^2 = R^2$

Ta lại có $\widehat{FHM} = \widehat{FEM} = 90^0$ nên tứ giác MEHF nội tiếp

Xét hai tam giác OHM và OEF có góc $\widehat{MOF}$ chung và $\widehat{OHM} = \widehat{OEF} = 90^0$ nên đồng dạng với nhau

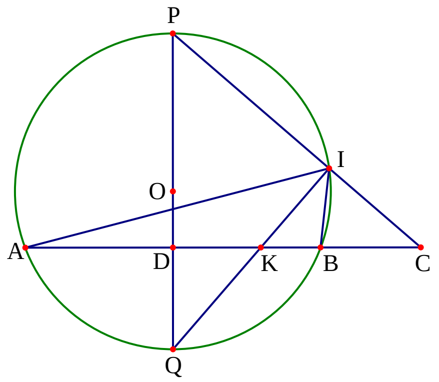
Do đó ta được $\dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OM}{OF} \Rightarrow OF = \dfrac{OE.OM}{OH}$.

Từ đó ta được $OF = \dfrac{R^2}{OH}$. Do đường tròn (O) và đường thẳng d cho trước nên OH không đổi. Từ đó suy ra OF không đổi. Mà điểm O cố định nên điểm F cố định. Vậy đường thẳng AB đi qua điểm F cố định.

Nhận xét: *Bài toán vẫn đúng trong trường hợp điểm M nằm trên tia đối của tia CD. Khi đó đường thẳng AB vẫn đi qua điểm F cố định.*

Ví dụ 5. Cho đoạn thẳng AC cố định, điểm B cố định nằm giữa A và C. Đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B. Gọi PQ là đường kính của đường tròn (O), PQ vuông góc AB, (P thuộc cung lớn AB). Gọi CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I. Chứng minh QI luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Phân tích tìm lời giải



Do điểm A, B, C cố định nên ta dự đoán đường thẳng IQ cắt AB tại điểm cố định. Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp. Dựa vào tứ giác nội tiếp và tam giác đồng dạng ta chứng minh đường thẳng đã cho đi qua K cố định.

Lời giải

Gọi IQ cắt AB tại K. Ta có tứ giác PDKI nội tiếp

Xét hai tam giác vuông CIK và CDP có $\widehat{DCP}$ chung nên tam giác CIK đồng dạng tam giác CDP, do đó suy ra

$$\frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP} \Rightarrow CI.CP = CD.CK$$

Lại thấy hai tam giác CIB và CAP đồng dạng nên suy ra $\frac{CI}{CB} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow CI.CP = CA.CB$

Từ đó ta được $CK.CD = CA.CB \Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{CD}$

Do A, B, C cố định nên CA, CB, CD không đổi. Khi đó độ dài CK không đổi nên ta suy ra được điểm K cố định. Suy ra IQ luôn đi qua điểm K cố định khi đường tròn (O) thay đổi..

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B cố định thuộc đường tròn đó (AB không phải là đường kính). Gọi M là trung điểm của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. Trên đoạn AB lấy hai điểm C, D phân biệt và không nằm trên đường tròn. Các đường thẳng MC, MD cắt đường tròn đã cho tương ứng tại E, F khác M

a) Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn.

b) Gọi O_1, O_2 tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE và BDF. Chứng minh rằng khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.

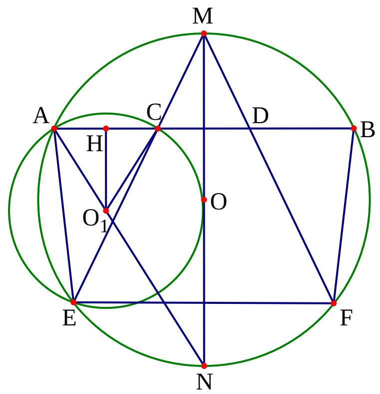
Phân tích tìm lời giải

+ Để chứng bốn điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn ta đi chứng minh tứ giác CDFE nội tiếp, muốn vậy ta chứng minh

+ Đường tròn (O) cho trước nên dự đoán AO_1 đi qua điểm chính giữa cung lớn AB. Vận dụng tứ giác nội tiếp, ta chứng minh hai đường thẳng cùng đi qua điểm cố định, là điểm chính giữa của một cung.

Lời giải

a) Ta xét các trường hợp sau



+ Xét trường hợp C nằm giữa A và D. Khi đó ta thấy được $\widehat{MCB} = \frac{1}{2}\left(sd\overparen{MB} + sd\overparen{AE}\right)$ và

$\widehat{MFE} = \frac{1}{2}\left(sd\overparen{MA} + sd\overparen{AE}\right)$

Mà ta thấy số đo hai cung MB và MA bằng nhau nên ta được $\widehat{MCB} = \widehat{MFE}$. Lại có

$\widehat{MCB} + \widehat{BCE} = 180^0$ nên suy ra $\widehat{BCE} + \widehat{MFE} = 180^0$.

Từ đó suy ra tứ giác CDFE nội tiếp đường tròn.

+ Xét trường hợp D nằm giữa A và C. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được bốn điểm C, D, F, E cùng nằm trên một đường tròn.

Vậy bốn điểm C, D, F, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Ta xét trường hợp C nằm giữa A và D, trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Hạ $O_1H \perp AC$ và có $O_1A = O_1C$ nên tam giác O_1AC cân tại O_1.

Do đó O_1H là tia phân giác của góc $\widehat{AO_1C}$ do đó ta được $\widehat{AO_1C} = 2\widehat{AO_1H}$.

Mà ta có $\widehat{AO_1C} = 2\widehat{AEC}$ nên suy ra $\widehat{AO_1H} = \widehat{AEC}$.

Lại có $\widehat{AEC} = \widehat{MAB}$ nên $\widehat{AO_1H} = \widehat{MAB}$.

Xét tam giác AO_1H vuông tại H nên $\widehat{AO_1H} + \widehat{HAO_1} = 90^0$

Do đó ta được $\widehat{MAB} + \widehat{HAO_1} = 90^0$ nên $\widehat{MAO_1} = 90^0$.

Suy ra MA là tiếp tuyến của đường tròn (O_1).

Kéo dài AO_1 cắt đường tròn (O) tại N, suy ra $\widehat{MON} = 2\widehat{MAN} = 180^0$ nên M, O, N thẳng hàng.

Lại có MN vuông góc với AB nên N là điểm chính giữa cung lớn $\overparen{AB}$.

Lập luận tương tự BO_2 đi qua N là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. Do đó $AO_1; BO_2$ đi qua N là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. Vậy $AO_1; BO_2$ luôn đi qua 1 điểm cố định .

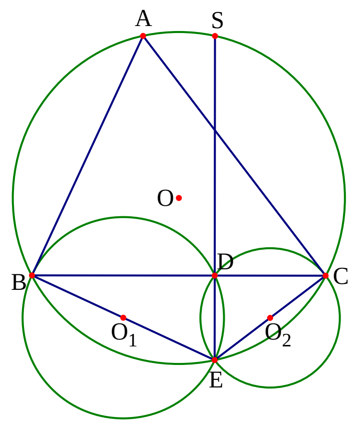
Ví dụ 7. Cho tam giác ABC và điểm D di chuyển trên cạnh BC (D khác B và C). Đường tròn (O_1) đi qua D và tiếp xúc AB tại B. Đường tròn (O_2) đi qua D và tiếp xúc AC tại C. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn (O_1) và đường tròn (O_2). Chứng minh rằng khi D di động trên đoạn BC thì đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định. Kết quả trên còn đúng không trong trường hợp D di động ở ngoài đoạn BC.

Phân tích tìm lời giải

Chứng minh được A, B, C, E cùng nằm trên đường tròn. Gọi DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai S. Ta dự đoán đường thẳng DE đi qua điểm cố định S. Tuy nhiên để chứng minh S cố định ta cần chỉ ra số đo của một trong các cung SA, SB, SC không đổi.

Lời giải

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn (O_1) đi qua D và tiếp xúc với AB tại B nên $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$. Đường tròn (O_2) đi qua D và tiếp xúc với AC tại C.



Nên $\widehat{ACB} = \widehat{CED}$

Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{BED} + \widehat{CED} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^0$.

Do đó tứ giác ABEC nội tiếp đường tròn.

Gọi DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai S. Từ $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$ ta suy ra được nên hai cung AC và SB bằng nhau. Mà số đo cung AC không đổi và B cố định nên điểm S cố định. Do đó S là điểm cố định. Vậy đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định

Trường hợp điểm D nằm ngoài đoạn BC. Chẳng hạn D nằm trên tia đối tia CB(trường hợp D thuộc tia đối tia BC chứng minh tương tự).

Ta chứng minh được bốn điểm A, B, C, E cùng nằm trên đường tròn (O).

Gọi DE cắt (O) tại điểm thứ hai S. Kẻ tia Cy là tia đối của tia CA. Khi đó trong đường tròn (O_2) ta có $\widehat{CED} = \widehat{DCy}; \widehat{DCy} = \widehat{ACB}$. Suy ra $\widehat{CED} = \widehat{ACB}$ nên ta được $\widehat{SEC} = 180^0 - \widehat{CED}$ không đổi.

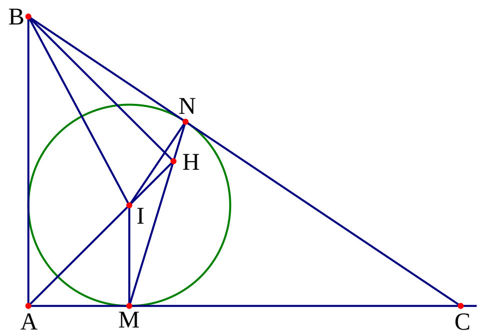
Vậy điểm S cố định. Vậy đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định

Ví dụ 8. Cho góc vuông xAy, điểm B cố định trên Ay, điểm C di chuyển trên Ax. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Chứng minh tứ giác BIHN nội tiếp, dựa vào tứ giác nội tiếp để chứng minh MN đi qua điểm cố định

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AI với MN. Từ $CM = CN$ nên tam giác CMN cân tại C.

Suy ra $\widehat{CNM} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{C}$ do đó

$\widehat{BNH} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{C}$

Do I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC nên $\widehat{BIA} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{C}$. Do đó ta được $\widehat{BIA} = \widehat{BNH}$ nên suy ra tứ giác BIHN nội tiếp.

Lại có $\widehat{BNI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BHI} = 90^0$. Do đó tam giác ABH vuông tại H.

Mà ta có $\widehat{BAH} = 45^0$ nên suy ra tam giác ABH vuông cân tại H. Do A, B cố định nên điểm H cố định.

Vậy MN luôn đi qua điểm H cố định.

Nhận xét: *Trường hợp tổng quát* $\widehat{xAy} = \alpha$ *thì tam giác ABH vuông tại H và* $\widehat{BAH} = \frac{\alpha}{2}$. *Suy ra điểm H cố định.*

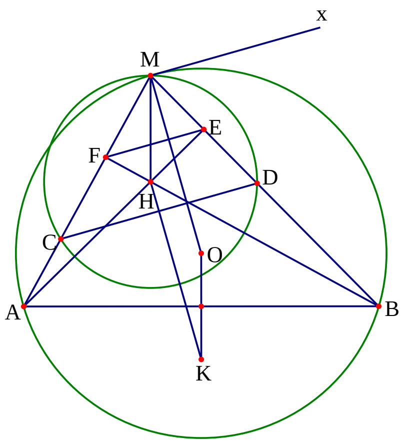
Ví dụ 9. Cho đường tròn tâm O, dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của tam giác ABM cắt nhau ở H. Đường tròn tâm H bán kính HM cắt MA, MB theo thứ tự ở C, D.

a) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

+ Trong phần a, dựa vào tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn ta dự đoán đường thẳng kẻ từ M vuông góc với CD luôn đi qua điểm O cố định. Để có được điều này ta cần chứng minh được OM vuông góc với CD.



+ Trong phần b, dựa vào tính chất trong tam giác khoảng cách từ trực tâm tam giác đến đỉnh bằng hai lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh tương ứng.

Lời giải

a) Kẻ tiếp tuyến Mx với đường tròn (O). Khi đó theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{BMx} = \widehat{MAB}$.

Do AE và BF là đường cao của tam giác MAB nên tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn đường kính AB.

Từ đó ta có $\widehat{MEF} = \widehat{MAB}$. Do đó $\widehat{MEF} = \widehat{BMx}$, suy ra Mx//EF. Suy ra OM vuông góc với EF

Ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD và HE vuông góc với MD nên E là trung điểm MD

Tương tự F là trung điểm MC. Suy ra EF là đường trung bình tam giác MCD

Do đó EF//CD và OM vuông góc với EF nên OM vuông góc với CD. Mà ta có điểm O cố định.

Điều này chứng tỏ rằng đường thẳng kẻ từ M vuông góc với CD luôn đi qua một điểm O cố định.

b) Gọi K là điểm đối xứng với O qua AB ta có OK vuông góc với AB. Mà ta lại có MH vuông góc với AB. Suy ra MH song song với OK. Lại có trong tam giác khoảng cách từ trực tâm tam giác đến đỉnh bằng hai lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh tương ứng. Do đó ta được $MH = OK$.

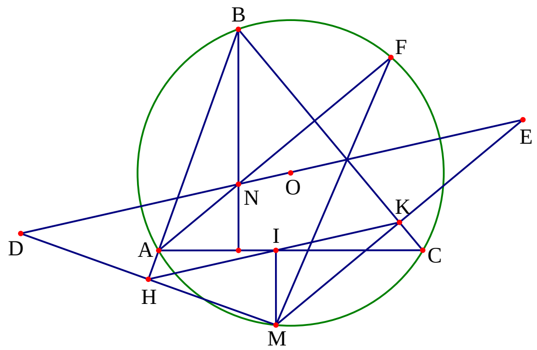
Vậy tứ giác MHKO là hình bình hành. Nên ta suy ra được HK song song với OM

Lại có OM vuông góc với CD nên HK vuông góc với CD. Vậy đường thẳng kẻ từ H vuông góc CD đi qua điểm K. Do điểm O và AB cho trước nên K là điểm cố định.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ấy. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Dựa vào các tứ giác nội tiếp, ta chứng minh được H, I, K thẳng hàng. Dự đoán đường thẳng DE đi qua trực tâm của tam giác ABC cố định. Để chứng minh đường thẳng DE đi qua trực tâm của tam giác ABC ta cần chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng.



Lời giải

Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC, BC.

Trước hết ta chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Thật vậy, dễ thấy các tứ giác AIMH, CKIM nên ta suy ra được $\widehat{AIH} = \widehat{AMH}$ và $\widehat{CMK} = \widehat{CIK}$.

Mà ta lại thấy $\widehat{HAM} = \widehat{MCK}$ nên ta được $\widehat{AMH} = \widehat{CMK}$. Từ đó ta suy ra được $\widehat{AIH} = \widehat{CIK}$.

Từ đó suy ra ba điểm H, I, K thẳng hàng(đường thẳng Simson). Gọi N là trực tâm của tam giác ABC. Gọi giao điểm của AN với đường tròn (O) là F. Ta có $\widehat{BCN} = \widehat{BCF}$ nên suy ra BC là trung trực NF. Mà BC là trung trực của ME. Từ đó suy ra $\widehat{MEN} = \widehat{NFM} = \widehat{FNE}$. Ta lại có $\widehat{NFM} = \widehat{ACM}$ và $\widehat{HKM} = \widehat{ACM}$

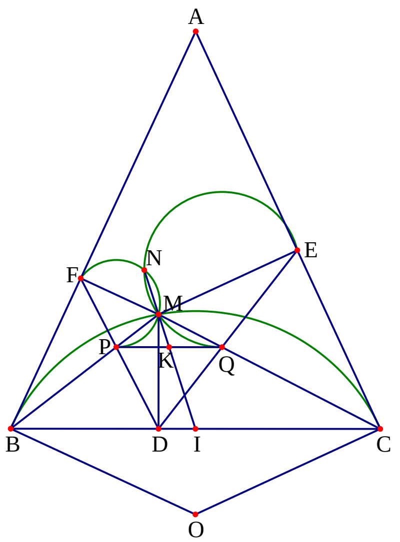
Suy ra $\widehat{HKM} = \widehat{MEN}$ do đó NE song song với HK. Chứng minh tương tự có ND song song với HK

Vậy D, N, E thẳng hàng. Vậy DE đi qua trực tâm N của tam giác ABC nên DE đi qua điểm cố định.

Ví dụ 11. Cho đường tròn tâm (O). Từ điểm A cố định ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C tiếp điểm). Lấyđiểm M trên cung nhỏ BC. Gọi D, E, F thứ tự là hình chiếu từ M đến BC, AC, AB. Gọi MB cắt DF tại P, MC cắt DE tại Q. Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Cạnh BC cố định cho trước nên ta dự đoán dự đoán đường thẳng MN đi qua điểm cố định thuộc cạnh BC. Chứng minh tứ giác MPDQ nội tiếp từ đó suy ra MN đi qua trung điểm PQ. Vận dụng định lí Talets để suy ra MN đi qua trung điểm BC.



Lời giải

Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE cắt nhau tại M, N. Đường thẳng MN cắt PQ, BC thứ tự tại K và I. Ta có các tứ giác MDCE, MDBF nội tiếp

Suy ra $\widehat{MCE} = \widehat{MDE} = \widehat{MBC}$ và $\widehat{MBF} = \widehat{MDF} = \widehat{MCB}$

.

Do đó ta được

$$\widehat{PMQ} + \widehat{PDQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{PDM} + \widehat{QDM}$$
$$= \widehat{PMQ} + \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = 180^0$$

Do đó MPDQ là tứ giác nội tiếp. Nên ta suy ra $\widehat{MQP} = \widehat{MDP} = \widehat{MCB}$. Từ đó suy ra PQ song song với BC

Lại có $\widehat{MQP} = \widehat{MCB} = \widehat{MEQ}$. Nên KQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MQE.

Chứng minh tương tự ta được KP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF.

Từ đó ta chứng minh được $KM.KN = KQ^2$ và $KM.KN = KP^2$ nên suy ra $KP = PQ$.

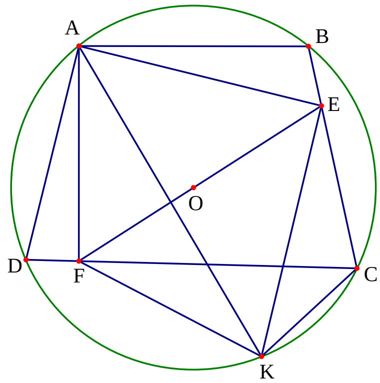
Xét tam giác MBC có PQ song song với BC và $KP = PQ$ nên theo định lí Talets suy ra I là trung điểm BC. Điều này chứng tỏ MN đi qua điểm cố định I là trung điểm BC.

Ví dụ 12. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn (O), có đỉnh A cố định và các đỉnh B, C, D di chuyển trên (O) sao cho $\widehat{BAD} > 90^0$. Kẻ tia Ax vuông góc với AD cắt BC tại E, kẻ tia Ay vuông góc với AB cắt CD tại F. Gọi K là điểm đối xứng của A qua EF. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Dự đoán đường thẳng EF đi qua điểm cố định là O. Chú ý rằng EF là đường trung trực của AK, do đó để chứng minh EF đi qua O ta cần chỉ ra được $OA = OK$. Muốn vậy ta cần phải chỉ ra tứ giác ADKC nội tiếp.

Lời giải



Tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$ và

$$\begin{aligned}\widehat{BAD} = \widehat{EAF} = \widehat{BAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAD} + \widehat{FAE}\\ = \widehat{FAB} + \widehat{DAE} = 180^0\end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{EAF}$, mặt khác do A và K đối xứng qua EF nên $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$. Do đó ta được $\widehat{EKF} = \widehat{ECF}$ nên tứ giác EFKC nội tiếp. Vì EFKC nội tiếp nên $\widehat{FCK} = \widehat{FEK}$ mà $\widehat{FEK} = \widehat{FEA}$, $\widehat{FEA} = \widehat{KAD}$ nên ta được $\widehat{KAD} = \widehat{FCK}$

Suy ra tứ giác ADKC nội tiếp, suy ra K thuộc đường tròn (O) nên $OA = OK$

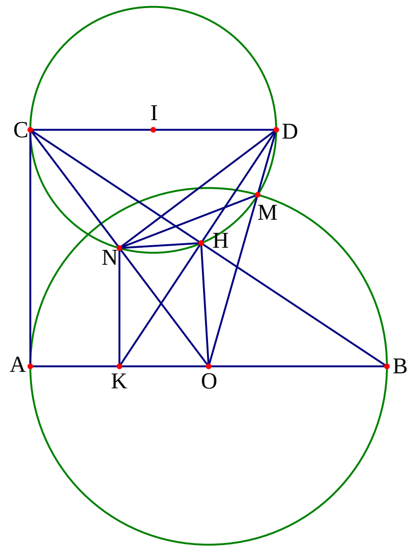
Do đó O thuộc đường trung trực của AK nên O thuộc EF hay EF luôn đi qua điểm O cố định.

Ví dụ 13. Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định. Điểm M di động trên đường tròn (O)(M khác A và B). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và M cắt nhau tại C. Đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C có đường kính CD. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua D vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O).

Phân tích tìm lời giải

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC. Kéo dài DH cắt AB tại K. Gọi N là giao điểm của CO với đường tròn (I). Ta dự đoán điểm K là điểm cố định. Muốn có được điều này ta cần chứng minh được K là trung điểm của AO. Nhận thấy N là trung điểm của CO. Như vậy để có K là trung điểm của AO ta cần chỉ ra được NK song song với AC.

Lời giải



Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MC \perp MO$. Trong đường tròn (I) có $\widehat{CMD} = 90^0$ nên $MC \perp MD$. Từ đó ta được MO//MD do đó ta được MO và MD trùng nhau nên ba điểm M, O, D thẳng hàng. Lại có CA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $CA \perp AB$. Lại có AC là tiếp tuyến với dường tròn (I) tại C nên $CA \perp CD$, từ đó CD//AB.

Suy ra $\widehat{DCO} = \widehat{COA}$

Mà ta lại có $\widehat{COA} = \widehat{COD}$ nên ta được $\widehat{DOC} = \widehat{DCO}$, suy ra tam giác COD cân tại D. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC. Ta có $\widehat{CHD} = 90^0$ nên H thuộc đường tròn (I). Kéo dài DH cắt AB tại K. Gọi N là giao điểm của CO với đường tròn (I), ta có $\widehat{CND} = 90^0$

Lại có tam giác COD cân tại D nên $CN = NO$. Từ đó ta được tứ giác NHOK nội tiếp đường tròn.

Ta có $\widehat{NHK} = \widehat{NOK} = \widehat{DCO}$ nên ta được $\widehat{NHO} + \widehat{NKO} = 180^0$

Lại có $\widehat{NDH} = \widehat{NCH}$ và $\widehat{CBO} = \widehat{HND} = \widehat{HCD}$ nên $\Delta DHN \backsim \Delta COB$

Từ đó suy ra $\dfrac{HN}{HD} = \dfrac{OB}{OC}$. Tương tự ta cũng được $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OA}{OC}; \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{ON}{OC} \Rightarrow \dfrac{HN}{HD} = \dfrac{ON}{CD}$

Mà ta có $\widehat{ONH} = \widehat{CDH}$ nên ta được $\Delta NHO \backsim \Delta DHC$, do đó $\widehat{NHO} = 90^0$

Từ đó ta được $\widehat{NKO} = 90^0$, suy ra NK//AC. Mà N là trung điểm của OC nên K là trung điểm của OA.

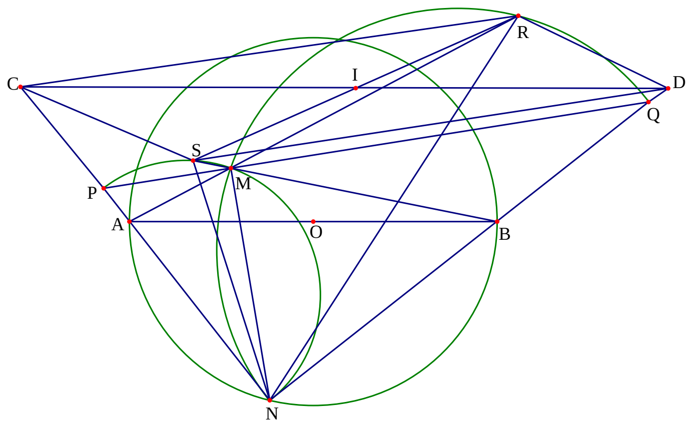
Do A, O cố định nên K cố định. Vậy đường thẳng đi qua D vuông góc với BC luôn đi qua điểm K cố định.

Ví dụ 14. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB và một điểm M bất kì nằm trong (O) nhưng không nằm trên đường kính AB. Gọ N là giao điểm của đường phân giác trong của góc $\widehat{AMB}$ với đường tròn (O). Đường phân giác ngoài của góc $\widehat{AMB}$ cắt đường thẳng NA, NB lần lượt tại P và Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M. Chứng minh rằng đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M di động phía trong đường tròn.

Phân tích tìm lời giải

Qua R kẻ đường thẳng song song với PQ cắt AN tại C, qua S kẻ đường thẳng song song với PQ cắt BN tại D. Gọi I là trung điểm của CD. Ta nhận thấy CD song song với AB. Gọi I là trung điểm của SR và ta dự đoán NI đi qua điểm cố định O. Muốn có điều đó ta cần chứng minh I cũng là trung điểm của CD. Điều này đồng nghĩa với việc chứng minh tứ giác CRDS là hình bình hành.

Lời giải



Qua R kẻ đường thẳng song song với PQ cắt AN tại C, qua S kẻ đường thẳng song song với PQ cắt BN tại D. Gọi I là trung điểm của CD. Ta sẽ chứng minh CD song song với AB. Thật vậy, do N nằm trên đường tròn đường kính AB nên ta có $\widehat{ANB} = 90^0$ suy ra $AN \perp BN$, do đó BN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính

PN. Từ đó ta có $\Delta BMN \backsim \Delta BNS$.

Vì PQ là đường phân giác ngoài của tam giác AMN nên ta có $\widehat{SMP} = \widehat{AMP} = \widehat{QMR} = \widehat{BMQ}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{SMP} = \widehat{SNP}$ và $\widehat{QMR} = \widehat{QNR}$.

Do đó ta được $\widehat{SNP} = \widehat{QNR}$ nên suy ra $\widehat{SNP} + \widehat{SNR} = \widehat{QNR} + \widehat{SNR} \Rightarrow \widehat{CNR} = \widehat{SNB}$

Xét hai tam giác BNS và RNC có $\widehat{CNR} = \widehat{SNB}$ và $\widehat{RCN} = \widehat{MPN} = \widehat{NSM} = \widehat{NSB}$

Do đó ta được $\Delta BNS \backsim \Delta RNC$ nên ta được $\Delta BNS \backsim \Delta RNC \backsim \Delta BMN$

Tương tự ta cũng có $\Delta DSN \backsim \Delta RAN \backsim \Delta NAM$

Ta thấy $\Delta BNS \backsim \Delta RNC \Rightarrow \dfrac{NB}{NR} = \dfrac{NS}{NC} \Rightarrow NB.NC = NR.NS$

$\Delta DSN \backsim \Delta RAN \Rightarrow \dfrac{NS}{NA} = \dfrac{ND}{NR} \Rightarrow NA.ND = NR.NS$

Từ đó ta được $NB.NC = NA.ND \Rightarrow \dfrac{NA}{NB} = \dfrac{NC}{ND}$, theo định lí Talet đao ta được AB//CD.

Do đó trung điểm của AB, trung điểm của CD và N thẳng hàng. Tức là N, O, I thẳng hàng.

Lại có $\Delta BMN \backsim \Delta RNC \Rightarrow \dfrac{MN}{NC} = \dfrac{BN}{RC} \Rightarrow RC = \dfrac{NB.NC}{MN}$

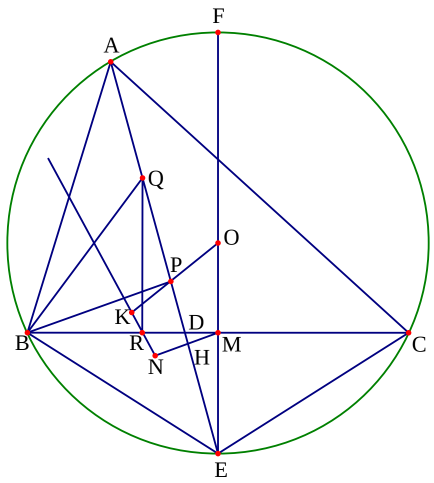
$\Delta DSN \backsim \Delta NAM \Rightarrow \dfrac{DN}{MN} = \dfrac{DS}{NA} \Rightarrow SD = \dfrac{NA.ND}{MN}$

Kết hợp các điều trên ta được $RC = SD$ mà ta có RC//SD nên tứ giác RCSD là hình bình hình.

Do đó hai đường chéo CD và SR cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra I là trung điểm của CD cũng là trung điểm của SR. Khi đó NI là đường trung tuyến của tam giác NSR. Do đó ta được đường trung tuyến NI luôn đi qua điểm O cố định. Vậy đường trung tuyến xuất phát từ N của tam giác NRS luôn đi qua điểm O cố định khi điểm M di động trong đường tròn (O).

Ví dụ 15. Cho tam giác nhọn ABC cố định và không cân nội tiếp đường tròn (O), đường phân giacsAD. Lấy điểm P di động trên đoạn thẳng AD và điểm Q trên đoạn thẳng AD sao cho $\widehat{PBC} = \widehat{QBA}$. Gọi R là hình chiếu của Q trên BC. Đường thẳng d đi qua R và vuông góc với OP. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải



Cách 1. Gọi giao điểm thứ của AD với đường tròn (O) là E nên E là điểm chính cung BC. Vẽ đường kính EF của (O). Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó ba điểm E, O, F thẳng hàng. Lấy điểm N đối xứng với M qua AD và H là trung điểm của MN. Khi đó H thuộc AD. Ta sẽ chứng minh đường thẳng d đi qua điểm N cố định. Dễ thấy $\widehat{RMN} = \widehat{OEP}$. Do QR//MN nên theo định lí Talet ta được $\frac{QD}{DR} = \frac{DE}{DM} = \frac{QD + DE}{DR + DM} = \frac{QE}{RM}$. Dễ thấy hai tam giác vuông $\Delta HDM \backsim \Delta MDE$ nên

$\frac{DE}{DM} = \frac{ME}{MH} = \frac{2ME}{MN}$

Do đó ta được $\frac{QE}{RM} = \frac{2ME}{MN} \Rightarrow \frac{MN}{MR} = \frac{2ME}{QE}$. Dễ thấy $\widehat{CBE} = \widehat{QAC} = \widehat{QAB}$ và theo giả thiết ta có $\widehat{PBE} = \widehat{PBC} + \widehat{CBE} = \widehat{QBA} + \widehat{QAB} = \widehat{BQE}$. Trong tam giác FBE vuông tại B có BM là đường cao nên $BE^2 = EM.EF$. Xét hai tam giác EBP và EQB có $\widehat{PBE} = \widehat{BQE}$ và $\widehat{BEQ}$ chung nên $\Delta EBP \backsim \Delta EQB$

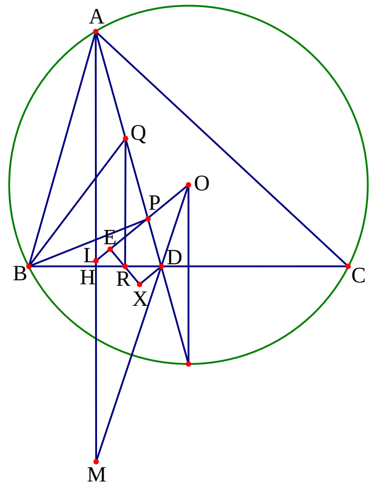
Suy ra $\frac{EP}{EB} = \frac{EB}{EQ} \Rightarrow EP.EQ = EB^2 = EM.EF = 2EM.EO$ nên ta được $\frac{2EM}{EQ} = \frac{EP}{EO}$

Từ đó ta được $\frac{MN}{MR} = \frac{EP}{EO}$. Xét hai tam giác OPE và MNR có $\widehat{RMN} = \widehat{OEP}$ và $\frac{MN}{MR} = \frac{EP}{EO}$ nên ta được $\Delta EPO \backsim \Delta MNR$. Suy ra $\widehat{MNR} = \widehat{EPO}$.

Gọi RN cắt OP tại K, dễ thấy tứ giác PHNK nội tiếp nên ta được $\widehat{PKN} = \widehat{PHN} = 90^0$. Do đó ta được RN vuông góc với OP, suy ra RN trùng vởi đường thẳng d. Do đó đường thẳng d đi qua điểm N cố định.

Cách 2. Dựng đường có AH của tam giác ABC. Qua H dựng đường thẳng vuông góc với OD cắt đường thẳng qua D vuông góc với OA tại X, từ đó ta được X cô định. Ta sẽ chứng minh đường thẳng d đi qua điểm X cố định.

Thật vậy, gọi giao điểm của OD với AH là M, giao điểm của OP với AH là L. Đường tròn (O) cắt đường thẳng AD tại điểm thứ hai là F.



Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ADM với ba điểmO, P, L thẳng hàng ta được $\frac{LA}{LM}.\frac{PD}{PA}.\frac{OM}{OD}=1$, từ đó suy ra $\frac{LM}{LA}=\frac{PD}{PA}.\frac{OM}{OD}$. Ta có $\frac{S_{AQB}}{S_{PBD}}=\frac{QA}{PQ}=\frac{AB.BQ}{BP.BD}$ và $\frac{S_{PAB}}{S_{QBD}}=\frac{PA}{QD}=\frac{BA.BP}{BQ.BD}$

.Chú ý là OF//AM, kết hợp các tỉ số trên ta được

$$\frac{QA}{QD}=\frac{BA^2.PD}{BD^2.PA}=\frac{FA}{FD}.\frac{PD}{PA}=\frac{OM}{OD}.\frac{PD}{PA}=\frac{LM}{LA}$$

Mà do QR//AM nên ta được $\frac{RH}{RD}=\frac{QA}{QD}=\frac{LM}{LA}$.

Dễ thấy $\Delta XDH \backsim \Delta OAM$ nên suy ra

$\Delta XDR \backsim \Delta OAL$ dẫn đến $\widehat{XRD}=\widehat{OLA}$.

Gọi giao điểm của XR và OP là E, khi đó tứ giác LERH nội tiếp được nên ta suy ra

$\widehat{LER}=90^0$

Do vậy đường thẳng qua R và vuông góc với OP đi qua điểm X cố định. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

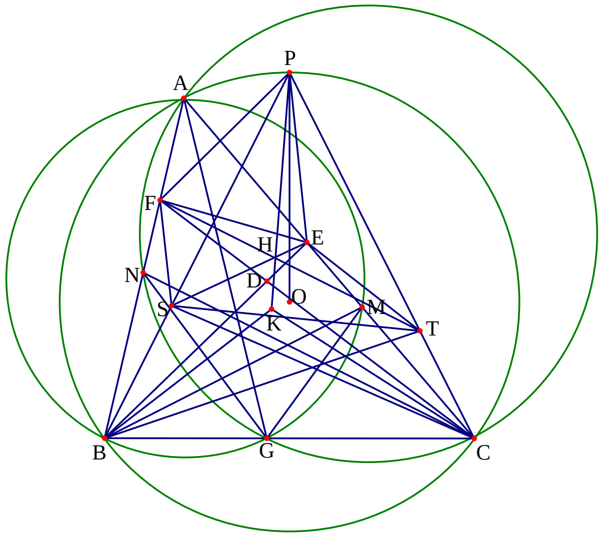
Ví dụ 16. Cho tam giác ABC cố định. Các điểm E và F di động trên các đoạn CA, AB sao cho $BF=CE$. Giao điểm của BE và CF là D. Gọi H, K là trực tâm các tam giác DEF và DBC. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua điểm cố định khi E và F di động.

Phân tích tìm lời giải

Gọi AG là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ với G thuộc BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AGB và AGC cắt lần lượt AC và AB tại M, N khác A. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác và P là điểm chính giữa cung BC có chứa A của đường tròn (O).

Ta sẽ chứng minh HK đi qua P cố định.

Muốn vậy cần chứng minh được HK, BS, CT đồng quy tại P.



Lời giải

Gọi AG là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ với G thuộc BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AGB và AGC cắt lần lượt AC và AB tại M, N khác A.

Dễ thấy tứ giác ANGC nội tiếp đường tròn nên có $BN.BA = BG.BD$. Tứ giác AMGB nội tếp nên đường tròn nên ta có $CM.CA = CG.CB$. Do AG là phân giác của tam giác ABC nên $\frac{AB}{AC} = \frac{GB}{GC}$.

Từ đó ta được $\frac{BN}{CM} = \frac{BN.BA}{CM.CA}.\frac{CA}{AB} = \frac{BG.BC}{CG.CB}.\frac{CA}{AB} = \frac{BG}{CG}.\frac{CA}{AB} = \frac{AB}{AC}.\frac{AC}{AB} = 1$

Từ đó ta được $BN = CM$, mà theo giả thiết ta có $BF = CE$ nên ta được $NF = ME$.

Từ đó ta có $\frac{S_{CNF}}{S_{BME}} = \frac{S_{CNF}}{S_{ABC}}.\frac{S_{ABC}}{S_{BME}} = \frac{NF}{AB}.\frac{AC}{ME} = \frac{AC}{AB}$

Lại có $\frac{BM}{CN} = \frac{BM}{AD}.\frac{AD}{CN} = \frac{BC}{AC}.\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AC}$. Từ đó ta được $\frac{S_{CNF}}{S_{BME}} = \frac{CN}{BM}$

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác và P là điểm chính giữa cung BC có chứa A của đường tròn (O).

Ta sẽ chứng minh HK đi qua P. Thật vậy, gọi EH, FH lần lượt cắt PB, PC tại S, T. Do $SE \perp FC$ nên

$$\widehat{ESB} = 360^0 - \widehat{SBC} - \widehat{FCB} - 90^0 = 270^0 - \left(90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) - \widehat{FCB}$$

$$= 180^0 - \widehat{FCB} - \widehat{NCB} = 180^0 - \widehat{NCF}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{FTC} = 180^0 - \widehat{MCE}$. Từ đó dễ thấy $\dfrac{S_{SBE}}{S_{CNF}} = \dfrac{SB.SE}{CN.CF}$ và $\dfrac{S_{TCF}}{S_{BME}} = \dfrac{TC.TF}{BM.BE}$

Mặt khác chú ý là $\widehat{SEB} = \widehat{TFC}$, từ đó ta được

$$\frac{ES.EB}{FT.FC} = \frac{S_{SBE}}{S_{TCF}} = \frac{S_{SBE}}{S_{CNF}}.\frac{S_{CNF}}{S_{BME}}.\frac{S_{BME}}{S_{TCF}} = \frac{SB.SE}{CN.CF}.\frac{CN}{BM}.\frac{BM.BE}{TC.TF} = \frac{SB}{TC}.\frac{ES}{FT}.\frac{EB}{FC}$$

Từ đó ta suy ra $\dfrac{ST}{CT} = 1 \Rightarrow SB = TC$ nên ta được ST//BC. Lại thấy do H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác DEF và DBC nên ta có $BK \perp CF; EH \perp CF$ suy ra SH//BK, tương tự ta cũng có CK//HT.

Từ đó suy ra hai tam giác HST và KBC có cạnh tương ứng song song nên HK, BS, CT đồng quy tại P.

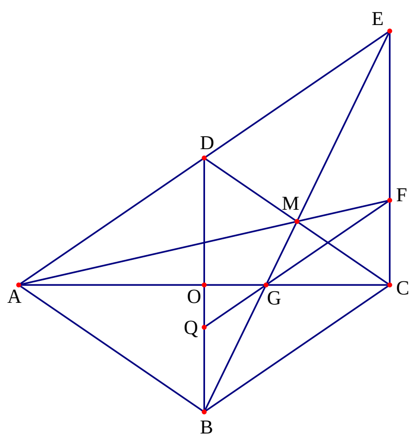
Vậy HK đi qua điểm cố định P. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 17. Cho hình thoi ABCD và một điểm M di động trên cạnh CD. Đường thẳng BM cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại G, C. Đường thẳng AM cắt CE tại F. Chứng minh rằng đường thẳng GF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cạnh CD.

Lời giải

Gọi Q là giao điểm của giao điểm của FG và BD. Ta sẽ chứng minh điểm Q cố định bằng cách xác định tỉ số mà Q chia đoạn thẳng BD có giá trị không đổi. Khi đó ta cần xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Nếu M là trung điểm của CD, khi đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Từ đó $\dfrac{BG}{GM} = \dfrac{GC}{GO} = 2$, suy ra ta được $\dfrac{GC}{GA} = \dfrac{1}{2}$. Mà ta lại có BC//AE nên ta được $\dfrac{GC}{GA} = \dfrac{GB}{GE} = \dfrac{BC}{AE} = \dfrac{1}{2}$.

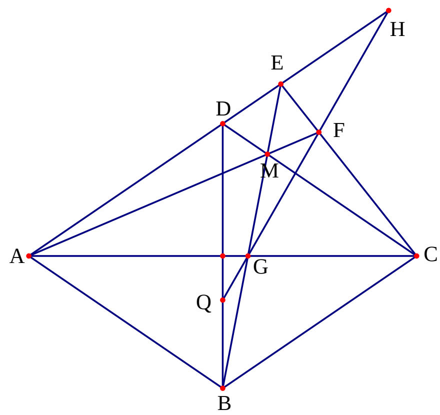


Từ đó $BC = DE$ nên tứ giác BDEC là hình bình hành. Do vậy M là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành. Từ đó $\dfrac{MF}{MA} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{GM}{ME}$

Do đó ta được GF song song với AD, nên ta thu được $\frac{BQ}{QD}=\frac{BG}{GE}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BQ}{QO}=2$.

Suy ra Q là trọng tâm tam giác ABC. Tam giác ABC cố định nên Q cố định. Do đó đường thẳng GF luôn đi qua một điểm cố định là Q.

+ Trường hợp 2: Nếu M không phải là trung điểm của CD. Ta cần bổ sung thêm điểm H là giao điểm của FG và AD. Khi đó đặt cạnh của hình thoi là a và $x=\frac{MD}{MC}$.



Do hai tam giác MDE và MCB đồng dạng với nhau nên ta có $\frac{DE}{BC}=\frac{MD}{MC}=x\Rightarrow DE=x.BC=xa$

Từ đó ta được $AE=a\left(x+1\right)$ và

$\frac{GA}{GC}=\frac{GE}{GB}=x+1$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác CDE với ba điểm A, M, F thẳng hàng ta được $\frac{FC}{FE}.\frac{AE}{AD}.\frac{MD}{MC}=1$.

Từ đó ta được $\frac{FC}{FE}.\left(x+1\right).x=1\Rightarrow\frac{FC}{FE}=\frac{1}{x\left(x+1\right)}$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ACE với ba điểm G, H, F thẳng hàng ta được $\frac{HE}{HA}.\frac{GA}{GC}.\frac{FC}{FE}=1$

Từ đó ta được $\frac{HE}{HA}.\left(x+1\right).\frac{1}{x\left(x+1\right)}=1\Rightarrow\frac{HE}{HA}=x\Rightarrow\frac{HE}{HA-HE}=\frac{x}{1-x}$ hay $\frac{HE}{AE}=\frac{x}{1-x}$

Do đó ta được $HE=\frac{x}{1-x}.AE=\frac{x}{1-x}.ax$

Suy ra $\frac{HE}{DE}=\frac{\frac{x}{1-x}.a\left(x+1\right)}{ax}=\frac{x+1}{1-x}$ nên ta được $\frac{HE}{HE+DE}=\frac{x+1}{x+1+1-x}=\frac{x+1}{2}\Rightarrow\frac{HE}{HD}=\frac{x+1}{2}$.

Áp dụng định lia Menelaus cho tam giác BDE với ba điểm Q, H, G thẳng hàng ta được $\frac{QD}{QB}.\frac{GB}{GE}.\frac{HE}{HD}=1$.

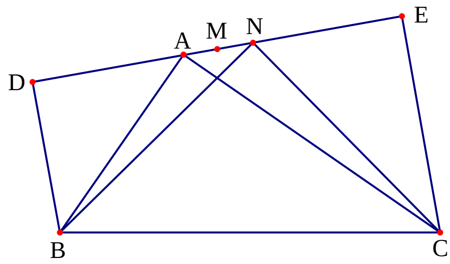
Do đó suy ra $\frac{QD}{QB}.\frac{1}{x+1}.\frac{x+1}{2}=1\Rightarrow\frac{QD}{QB}=2$. Từ đó ta được $\frac{QO}{OB}=\frac{1}{2}$, mà BO là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Do đó Q là trong tâm tam giác ABC nên Q cố định. Vậy đường thẳng GF luôn đi qua điểm Q cố định là trọng tâm tam giác ABC khi M di chuyển trên cạnh CD.

Ví dụ 18. Cho hai điểm cố định B và C. Một điểm A thay đổi trên một trong hai nửa mặt phẳng bờ BC sao cho A, B, C không thẳng hàng. Dựng các tam giác vuông cân ADB và AEC với $DA = DB;\ EA = EC$ sao cho điểm D nằm khác phía với điểm C so với AB và điểm E nằm khác phía so với điểm B so với AC. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng AM luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau



+ Trường hợp 1: Xét tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^0$

Khi đó các điểm D, A, E thẳng hàng nên. Lấy N đối xứng với A qua M khi đó N và M cũng thuộc đường thẳng ED. Ta có

$AD = BD;\ AE = CE;\ DM = EM;\ AM = MN$

Từ đó ta đươc

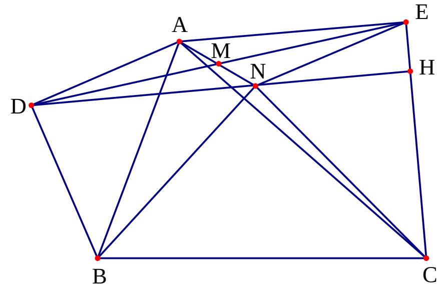
$EN = EM - MN = DM - AM = AD$ và

$DN = DM + NM = EM + MA = AE$

Do đó ta được $NE = DB;\ DN = EC$ nên hai tam giác vuông BDN và NEC bằng nhau

Từ đó ta được $NB = NC$ nên tam giác BNC cân tại N. Lại có

$\widehat{DNB} + \widehat{ENC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BNC} = 90^0$ nên tam giác BNC vuông cân. Từ đó ta được AM đi qua điểm N cố định



+ Trường hợp 2: Xét tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}$ nhọn.

Lấy N đối xứng với A qua M. Khi đó tứ giác AEND là hình bình hành. Ta có $BD = DA = NE$ và $DN = AE = EC$

Ta lại có $\widehat{NDB} = 90^0 - \widehat{NDA} = 90^0 - \widehat{AEN} = \widehat{CEN}$

Từ đó ta được $\Delta BDN = \Delta NEC$ suy ra $BN = CN$

và $\widehat{BND} = \widehat{ECN}$. Suy ra tam giác BCN cân tại N

Mặt khác ta có $AE \perp CE$ và DN//AE nên ta được $DN \perp CE$. Gọi giao điểm của DN và CE là H, ta có $\widehat{HNC} + \widehat{HCN} = 90^0$. Do đó ta được $\widehat{HNC} + \widehat{DNB} = 90^0$ nên ta được $\widehat{BNC} = 90^0$.

Do vậy tam giác BNC vuông cân tại N nên N là điểm có định.

Trường hợp 3: Xét tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}$ tù. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được AM đi qua điểm N cố định.

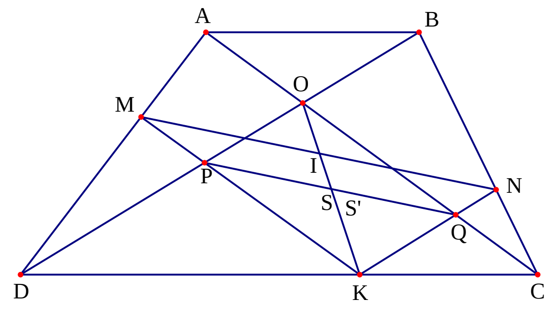
Vậy AM luôn đi qua điểm N cố định khi A di động.

Ví dụ 19. Cho hình thang ABCD có AB//CD. Trên các cạnh AD và BC lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{BC}$. Đường thẳng qua M song song với AC cắt BD tại P và cắt CD tại K. Gọi I là trung điểm của MN, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng đường thẳng IK luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Hình thang ABCD cố định nên O cố định. Ta dự đoán IK đi qua điểm cố định O. Như vậy ta cần chứng minh được ba điểm I, K, O thẳng hàng. Chú ý rằng I là trung điểm của MN và tứ giác POQK hình bình hành nên để chứng minh I, K, O thẳng hàng ta cần chỉ ra được PQ song song với MN.

Lời giải



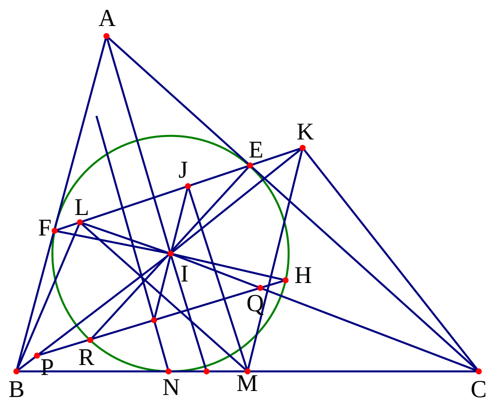
Gọi Q là giao điểm của KN và AC, S là giao điểm của OK và PQ. Trong tam giác ACD có MK//AC nên theo định lí Talets ta có $\frac{AM}{DM} = \frac{CK}{CD}$. Mà theo giả thiết ta có $\frac{AM}{DM} = \frac{CN}{BC}$ nên ta được $\frac{CK}{CD} = \frac{CN}{BC}$.

Trong tam giác BCD có $\frac{CK}{CD} = \frac{CN}{BC}$ nên theo định lí Talets đảo ta được KN//BD.

Do đó tứ giác POQK là hình bình hành, suy ra S là trung điểm của PQ. Trong tam giác DAO có MP//OA nên ta được $\frac{MP}{OA} = \frac{DP}{OD}$. Trong tam giác DOC có PK//OC nên ta được $\frac{PK}{OC} = \frac{DP}{OD}$. Do đó ta được $\frac{MP}{OA} = \frac{PK}{OC} \Rightarrow \frac{MP}{PK} = \frac{NQ}{QK}$, suy ra PQ//MN. Gọi S′ là giao điểm của KI và MN. Chứng minh tương tự ta được $\frac{PS'}{MI} = \frac{S'Q}{IN} = \frac{KS'}{KI}$. Mà ta có $IN = IM$ nên suy ra $PS' = QS'$. Điều này dẫn đến hai điểm S và S′ trùng nhau, do đó ba điểm K, I, S thẳng hàng. Mà ba điểm K, S, O thẳng hàng nên suy ra bốn điểm S, K, I, O thẳng hàng. Vậy ba điểm O, I, K thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC và đường trong tâm I nội tiếp tam giác. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của (I) với AC và AB. Gọi G và H lần lượt đối xứng với E và F qua I. Đường thẳng GH cắt IB, IC lần lượt tại P và Q. Giả sử B, C cố định và A thay đổi sao cho $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua điểm cố định.

Lời giải



Gọi giao điểm của BI và CI với EF lần lượt là K và L.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A. Do đó ta có

$$\widehat{KEC} = \widehat{AEF} = \frac{180^0 - \widehat{BAC}}{2}$$
$$= 180^0 - \left(90^0 + \frac{\widehat{BAC}}{2}\right) = 180^0 - \widehat{BIC} = \widehat{KIC}$$

Do đó tứ giác KEIC nội tiếp được đường tròn, suy ra $\widehat{IKC} = \widehat{IEC}$ mà $\widehat{IEC} = 90^0$ nên $\widehat{IKC} = 90^0$

Hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{ILB} = 90^0$.

Gọi M là trung điểm của BC và J là trung điểm của KL, khi đó dễ thấy các tam giác BLC và KBC vuông có chung cạnh huyền BC nên $ML = MK$ nên tam giác KLM cân tại M, đo đó ta được $MJ \perp EF$

Do G, H đối xứng qua lần lượt là điểm đối xứng với E và F qua I nên đường thẳng GH đối xưng với đường thẳng EF qua I.

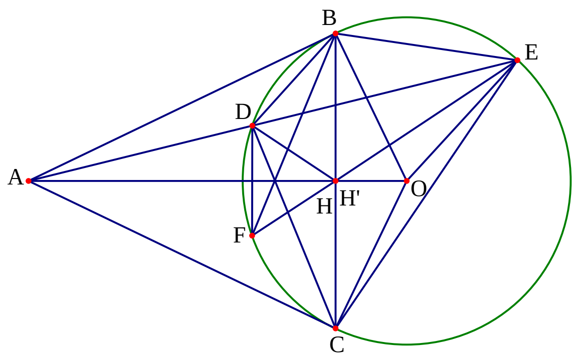
Gọi giao điểm của GH và FE với BI lần lượt là P và K, khi đó ta được $\Delta KEI = \Delta PGI$ nên $IP = IK$ hay I là trung điểm của PK, tương tự ta được I là trung điểm của LQ. Vậy KL và PQ đối xứng với nhau qua I.

Gọi R là trung điểm của PQ thì R và J đối xứng với nhau qua I hay I là trung điểm của RJ. Giả sử đường trung trực của PQ cắt BC tại N, khi đó ta được $RN \perp PQ$ và PQ//EF. Kết hợp với $MJ \perp EF$ ta được RN//MJ. Giả sử tia TI cắt BC tại D, khi đó ID vuông góc với EF nên ID cũng song song với RN và MJ. Hình thang RJMN có $IR = IJ$ và ID//RN//IM nên ta được $ND = MN$.

Do AD là đường phân giác của tam giác ABC nên ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CD} = k$ không đổi và BC cố định nên các điểm D và M cố định. Do điểm N và M đối xứng qua D nên N cố định hay đường trung trực của PQ luôn đi qua điểm cố định.

Ví dụ 21. Cho điểm A thay đổi nằm ngoài đường tròn tâm (O; R) cố định. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O)(B, C thuộc đường tròn (O)). Vẽ cát tuyến ADE với đường tròn (O)(D, E thuộc đường tròn (O)) và D nằm giữa A, E. Tia AD nằm giữa hai tia AO và AB. Gọi F là điểm đối xứng với D qua AO, H là giao điểm của EF với BC. Chứng minh rằng đường thẳng HA luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Gọi H' là giao điểm của AO và BC. Do D và F đối xứng với nhau qua AO nên $OF = OD = R$. Suy ra F thuộc đường tròn (O) và có $\widehat{AH'D} = \widehat{AH'F}$. Do AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ta được $AB = AC$ và AO là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Do đó tam giác ABC cân

tại A và $AO \perp BC$. Xét hai tam giác ABD

và AEB có $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ và $\widehat{BAD}$ chung.

Do đó ta được $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ nên $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$.

Tam giác ABO vuông tại B có BH′ là đường cao nên $AB^2 = AH'.AO$.

Từ đó ta được $AD.AE = AH'.AO \Rightarrow \frac{AD}{AO} = \frac{AH'}{AE}$

Xét hai tam giác ADH′ và AOE có $\frac{AD}{AO} = \frac{AH'}{AE}$ và $\widehat{DAH'}$ chung nên $\Delta ADH' \backsim \Delta AOE$

Từ đó ta được $\widehat{ADH'} = \widehat{AOE}$ nên tứ giác DH′OE nội tiếp đường tròn

Suy ra $\widehat{AH'D} = \widehat{OED}$ và $\widehat{OH'E} = \widehat{ODE}$. Mà ta có $OE = OD = R$ nên tam giác ODE cân tại O, suy ra $\widehat{OED} = \widehat{ODE}$. Do đó $\widehat{AH'D} = \widehat{OH'E}$, vì vậy ta được $\widehat{AH'F} = \widehat{OH'E}$.

Ta có $\widehat{EH'F} = \widehat{AH'F} + \widehat{AH'E} = \widehat{OH'E} + \widehat{AH'E} = 180^0$

Điều này dẫn đến ba điểm E, H′, F thẳng hàng, suy ra hai điểm H và H′ trùng nhau

Vậy ba điểm A, H, O thẳng hàng. Mà O cố định nên AH luôn đi qua điểm O cố định.

Bài toán 22. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có BC cố định. Gọi đường tròn (I) tiếp xúc với BC, AB, CA lần lượt tại D, E, F. Gọi giao điểm của EF và DI là K. Chứng minh rằng đường thẳng AK luôn đi qua một điểm cố định khi A di động trên đường tròn (O).

Phân tích tìm lời giải

Tam giác ABC có BC cố định nên trung điểm M cũng cố định. Ta dự đoán đường thẳng AK đi qua điểm M cố định. Muốn vậy ta cần chứng minh ba điểm A, K, M thẳng hàng.

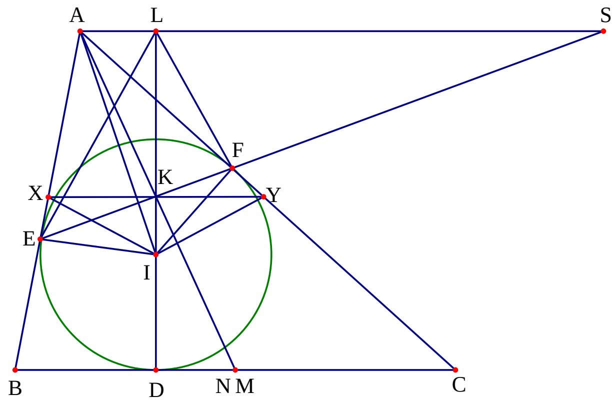
Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra M cố định. Gọi N là giao điểm của AK và BC.

Ta có AE và AF là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên ta được $\widehat{EAI} = \widehat{FAI}$.

Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt DI tại L và cắt EF tại S.

Qua K vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X và Y. Ta có $DI \perp BC$ và AS//BC nên $AL \perp LI$. Do đó ta được $\widehat{ALI} = \widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^0$



Từ đó suy ra các điểm A, E, I, F, L cùng nằm trên một đường tròn.

Do đó ta được $\widehat{ELI} = \widehat{EAI} = \widehat{IAF} = \widehat{ILF}$, suy ra LK là phân giác của tam giác LEF. Do đó LK và LS là đường phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác LEF. Nên ta được
$\frac{KE}{KF} = \frac{SE}{SF} \Rightarrow \frac{KE}{SE} = \frac{KF}{SF}$

Ta có XK//AS và KY//AS nên theo định lí Talets ta có $\frac{XK}{AS} = \frac{KE}{SE}$ và $\frac{KY}{AS} = \frac{KF}{SF}$

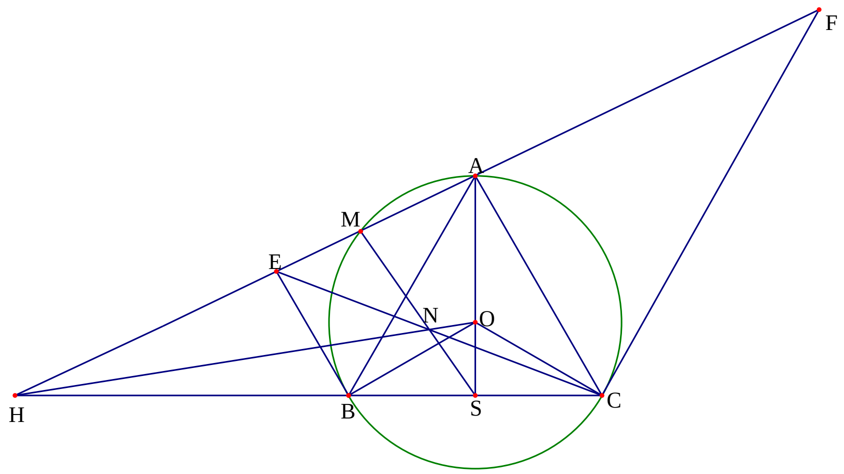
Từ đó suy ra $KX = KY$. Trong tam giác ABN có XK//BN nên theo định lí Talets ta có
$\frac{XK}{BN} = \frac{AK}{AN}$

Trong tam giác ACN có KY//CN nên theo định lí Talets ta có $\frac{KY}{CN} = \frac{AK}{AN}$

Kết hợp với $KX = KY$ ta suy ra được $BN = CN$ hay N là trung điểm của BC. Từ đó suy ra M và N trùng nhau nên ba điểm A, K, M thẳng hàng hay đường thẳng AK luôn đi qua điểm cố định M.

Ví dụ 23. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M thay đổi trên cung AB không chứa điểm C. Đường thẳng AM cắt tiếp tuyến tại B, tiếp tuyến tại C với đường tròn (O) và đường thẳng BC lần lượt tại E, F, H. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua giao điểm khác M của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAO, MBF, MCF và điểm H luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Gọi N là giao điểm của BF và CE. Kéo dài MN cắt BC tại S. Khi đó ta có $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$ nên ta được $\widehat{ABE} = \widehat{BAC}$. Từ đó ta được BE//AC.

Mặt khác ta có $\widehat{EBC} = \widehat{ABE} + \widehat{ABC} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 120^0$. Tương tự ta được CF//AB và $\widehat{BCF} = 120^0$

Hai tam giác ABE và FCA có $\Delta BAE \backsim \Delta CFA$ và $\widehat{BEA} = \widehat{CAF}$ nên $\Delta ABE \backsim \Delta FCA$

Do đó ta được $\frac{AB}{CF} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow AB.AC = BE.CF \Rightarrow BC^2 = BE.CF \Rightarrow \frac{BC}{CF} = \frac{BE}{BC}$

Hai tam giác EBC và BCF có $\widehat{EBC} = \widehat{BCF}$ và $\frac{BC}{CF} = \frac{BE}{BC}$ nên $\Delta EBC \backsim \Delta BCF$

Do đó ta được $\widehat{CEB} = \widehat{FBC}$ hay $\widehat{NBC} = \widehat{CEB}$. Hai tam giác CBN và CEB có $\widehat{NBC} = \widehat{CEB}$ và $\widehat{CBN}$ chung nên $\Delta CBN \backsim \Delta CEB$. Suy ra $\widehat{BNC} = \widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{BNC} = 120^0$ nên $\widehat{BNE} = 180^0 - \widehat{BNC} = 60^0$

Mặt khác ta lại có $\widehat{BME} = \widehat{ACB} = 60^0$ nên $\widehat{BNE} = \widehat{BME}$. Từ đó suy ra tứ giác BEMN nội tiếp đường tròn. Chứng minh tương tự ta được tứ giác CFMN nội tiếp đường tròn.

Từ đó ta có $\widehat{NEB} = \widehat{NMB}$ và $\widehat{NBS} = \widehat{NEB}$ nên $\widehat{NBS} = \widehat{NMB}$ hay $\widehat{SBN} = \widehat{SMB}$

Hai tam giác SBN và SMB có $\widehat{BSN} = \widehat{MSB}$ và $\widehat{SBN} = \widehat{SMB}$ nên $\Delta SBN \backsim \Delta SMB$

Từ đó ta được $\frac{SB}{SM} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow SB^2 = SM.SN$. Hoàn toàn tương tự ta cũng được $SC^2 = SM.SN$

Từ đó $SB = SC$ hay S là trung điểm của BC. Dễ dàng chứng minh được $AB = BC = CA = R\sqrt{3}$.

Tam giác OBC cân tại O có OS là đường OS cũng là đường cao và đường phân giác của tam giác BOC.

Từ đó ta suy ra $SO=\frac{R}{2}$ và $SA=\frac{3R}{2}$. Từ đó ta được $SB^2=SO.SA$, mà ta có $SB^2=SM.SN$ nên ta được $SO.SA=SM.SN$ hay $\frac{SN}{SA}=\frac{SO}{SM}$. Kết hợp với $\widehat{MSA}$ chung nên

$\Delta SON\backsim\Delta SMA$

Do đó ta được $\widehat{SON}=\widehat{SMA}$. Suy ra tứ giác AONM nội tiếp đường tròn. Mặt khác tứ giác BNOC cũng nội tiếp đường tròn.

Gọi N_1 là giao điểm của OH với đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, gọi N_2 là giao điểm của DH với đường tròn ngoại tiếp tam giác OAM. Khi đó ta có $HN_1.HO=BH.HC$ và

$HN_2.HO=HM.HA$

Mà ta có $HB.HC=HM.HA$ nên ta được $HN_1.HO=HN_2.HO\Rightarrow HN_1=HN_2\Rightarrow N_1\equiv N_2$

Khi đó giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác OBC và OAM là $N_1\equiv N_2$

Mà N là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác OBC và OAM nên

$N_1\equiv N_2\equiv N$.

Mà N_1 thuộc OH nên N cũng thuộc OH. Ta có N thuộc các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OAM, MCF nên N là giao điểm của ba đường tròn đó. Từ đó ta được giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAO, MBF, MCF và O, H là các điểm thẳng hàng. Do đó ta được đường thẳng đi qua giao điểm khác M của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAO, MBF, MCF và điểm H luôn đi qua một điểm O cố định.

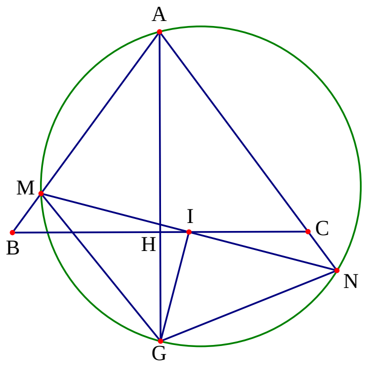
Ví dụ 24. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các đường thẳng AB, AC sao cho trung điểm I của MN nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng đường tròn qua 3 điểm A, M, N luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Phân tích tìm lời giải

Do đường cao AH của tam giác ABC cân cho trước, nên dự đoán đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt AH tại G và G là điểm cố định. Chứng minh tứ giác MBIG nội tiếp và vận dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh đường tròn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Xét trường hợp M thuộc cạnh AB khi đó N thuộc tia đối của tia CA(trường hợp N thuộc cạnh AC thì chứng minh tương tự). Gọi giao điểm đường cao AH của tam giác ABC với đường tròn đi qua 3 điểm A, M, N là G. Vì tam giác ABC cân tại A nên AH là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Do đó ta được $GM = GN$ hay tam giác GMN cân tại G. Từ đó suy ra GI vuông góc với MN. Lại có tam giác GIM đồng dạng với tam giác CHA nên



$\widehat{IGM} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$.

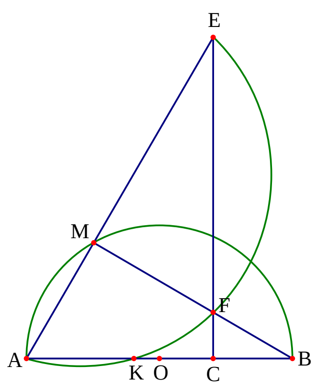
Mà B, G cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ MI. Suy ra tứ giác MBIG nội tiếp nên ta được $\widehat{GBM} = 90^0$ Suy ra GB vuông góc với AB tại B. Do đó G là giao điểm của AH và đường thẳng đi qua B vuông góc AB

Suy ra G cố định. Vậy đường tròn đi qua A, M, N đi qua 1 điểm cố định khác A.

Ví dụ 25. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C cố định trên đường kính ấy (C khác O). Điểm M chuyển động trên đường tròn. Đường vuông góc với AB tại C cắt MA, MB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua qua một điểm cố định khác A.

Phân tích tìm lời giải

Đường tròn (O) và đường kính AB cố định. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AB tại K. Khi đó ta dự đoán K là điểm cố định.



Lời giải

+ Xét trường hợp điểm C thuộc đoạn OB. Gọi K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tiếp tam giác AEF với cạnh AB. Ta có $\widehat{CFB} = \widehat{A}$ và $\widehat{KFC} = \widehat{A}$ từ đó suy ra $\widehat{CFB} = \widehat{KFC}$. do đó FC là trung trực BK hay ta được $BC = CK$. Do B và C cố định nên K là điểm cố định.

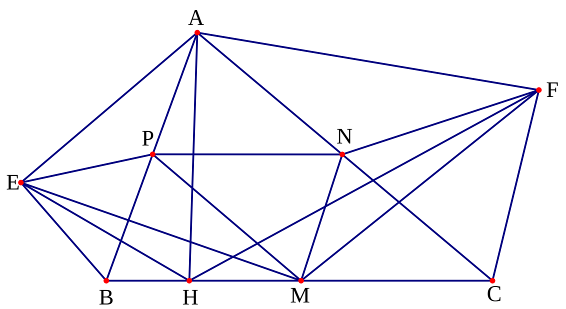
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua điểm K cố định.

+ Tương tự trường hợp điểm C thuộc đoạn OA. Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua điểm K cố định.

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC, đường cao AH, (H nằm giữa B và C). Dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác BAE và CAF sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{CAF} = \alpha < 90^0$ và $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF luôn đi qua một điểm cố định khác H khi góc α thay đổi.

Phân tích tìm lời giải

Dự đoán đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF đi qua trung điểm của BC. Gọi M là trung điểm của BC. Ta cần chứng minh bốn điểm E, H, M, F cùng nằm trên một đường tròn.



Lời giải

Gọi M, N, P thứ tự là trung điểm BC, AC, AB. Có tam giác AEB đồng dạng tam giác AFC

Từ các tứ giác AHBE, AHCF nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{ABE} = \widehat{ACF} = \widehat{AHF}$. Ta lại có $EP = MN = \frac{1}{2}.AB$ và $PM = FN = \frac{1}{2}.AC$

Mặt khác ta có $\widehat{EPM} = \widehat{EPB} + \widehat{BPM} = 2\alpha + \widehat{BAC} = 2\alpha + \widehat{MNC} = \widehat{MNF}$

Do đó $\Delta EPM = \Delta MNF$ nên suy ra $\widehat{EMP} = \widehat{MFN}$. Do đó ta được

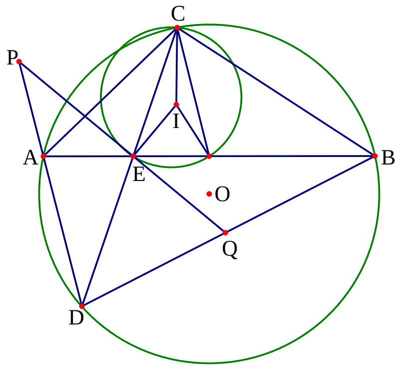
$$\widehat{EMF} = \widehat{EMP} + \widehat{PMN} + \widehat{NMF} = \widehat{MFN} + \widehat{MNC} + \widehat{NMF} = 180^0 - \widehat{FNC} = 2.\widehat{NCF} = 2.\widehat{ACF}$$

Mà lại có $\widehat{EHF} = 2.\widehat{ACF} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{EMF}$. Mà H, M cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ EF. Suy ra E, H, M, F cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF luôn đi qua một điểm cố định M là trung điểm BC (khác H)

Ví dụ 27. Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy điểm E trên dây cung AB (E khác A và B). Qua E vẽ dây cung CD của đường tròn (O). Trên hai tia DA, DB lấy hai điểm P, Q đối xứng qua E. Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với PQ tại E và đi qua C luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên dây cung AB.

Phân tích tìm lời giải

Đoạn thẳng AB cố định. Do đó dự đoán đường tròn (I) đi qua điểm cố định thuộc đoạn AB và điểm đó là trung điểm AB. Gọi giao điểm của đường tròn (I) với AB là M. Ta sẽ chứng minh M là trung điểm AB dựa vào hai tỉ số bằng nhau có cùng mẫu số.



Lời giải

Gọi M là giao điểm của AB và đường tròn (I). Do EP là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên

$\widehat{CMA} = \widehat{PEC} = \widehat{QED}$

Mặt khác ta lại có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Suy ra tam giác CMA đồng dạng với tam giác QED nên $\frac{AM}{CM} = \frac{DE}{QE}$

Chứng minh tương tự ta cũng được $\widehat{DEP} = \widehat{BMC}$ và $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ nên tam giác BMC đồng dạng tam giác DEP nên ta được $\frac{BM}{CM} = \frac{DE}{PE} = \frac{DE}{QE}$. Từ đó suy ra $\frac{AM}{CM} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow AM = BM$.

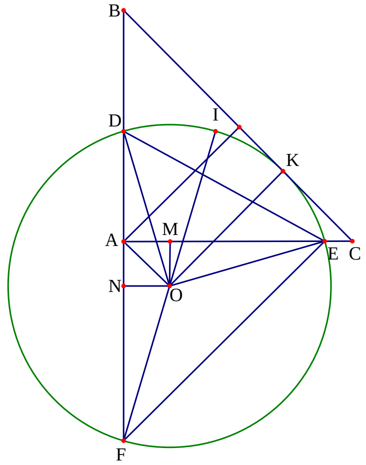
Do đó đường tròn (I) luôn đi qua trung điểm M của AB là điểm cố định.

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có đường cao AH. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm K rồi dựng hình chữ nhật AHKO. Vẽ đường tròn (O; OK), đường tròn này cắt cạnh AB tại D, cắt cạnh AC tại E. Gọi F là giao điểm thứ hai của (O) với đường thẳng AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DOE luôn đi qua một điểm cố định.

Phân tích tìm lời giải

Dự đoán đường tròn ngoại tiếp tam giác DOE luôn đi qua một điểm A cố định. Như vậy ta cần chứng minh tứ giác AOED nội tiếp. Nhận thấy ΔAEF vuông cân tại A, khi đó ta sẽ được $\widehat{DFE} = 45^0$. Do đó để chứng minh bốn điểm A, O, D, E thuộc một đường tròn ta phải chứng minh $\widehat{DOE} = 90^0$. Tức là ta cần phải chứng minh được $\widehat{DOE} = 2.\widehat{DFE}$

Lời giải



Kẻ $OM \perp AE; ON \perp AF$, khi đó $\widehat{OMA} = \widehat{ONA} = 90^0$

Tứ giác AMON có $\widehat{OMA} = \widehat{ONA} = \widehat{MAN} = 90^0$ nên AMON là hình chữ nhật. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác.

Do đó ta được $\widehat{HAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 45^0$ nên suy ra

$$\widehat{OAM} = \widehat{HAO} - \widehat{HAC} = 90^0 - 45^0 = 45^0 = \frac{1}{2}\widehat{MAN}$$

Suy ra AO là tia phân giác của góc $\widehat{MAN}$. Từ đó AMON là hình vuông nên $AM = AN; OM = ON$

Xét hai tam giác vuông OME và ONF có $OE = OF$ và $OM = ON$ nên

$\Delta OME = \Delta ONF \Rightarrow ME = NF$

Từ đó suy ra $AM + ME = AN + NF \Rightarrow AE = AF \Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân tại A.

Do đó suy ra $\widehat{DFE} = 45^0$. Kẻ đường kính FI của đường tròn (O) khi đó ta được

$\widehat{OFD} = \widehat{ODF}$

Vì $\widehat{DOI}$ là góc ngoài của tam giác ODF nên $\widehat{DOI} = \widehat{OFD} + \widehat{ODF}$

Do đó ta được $\widehat{DOI} = \widehat{OFD} + \widehat{OFD} = 2.\widehat{OFD}$. Chứng minh tương tự $\widehat{EOI} = 2.\widehat{OFE}$

Từ đó ta được $\widehat{DOI} + \widehat{EOI} = 2.\left(\widehat{OFD} + \widehat{OFE}\right)$.

Suy ra $\widehat{DOE} = 2.\widehat{DFE} = 2.45^0 = 90^0$ nên $\widehat{DOE} = \widehat{DAE} = 90^0$.

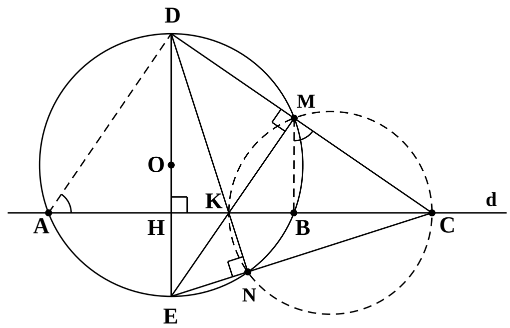
Từ đó O và A thuộc đường tròn đường kính DE nên bốn điểm O, A, D, E cùng thuộc một đường tròn

Ví dụ 29. Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B, gọi DE là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với d. CD và CE cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Khi đường tròn (O) thay đổi thì hai điểm M và N di động trên đường cố định nào.

Phân tích tìm lời giải

Do $\widehat{KMC} = \widehat{KNC} = 90^0$ nên M, N thuộc đường tròn đường kính KC. Mà ta có điểm C cố định nên ta tự đoán M, N chạy trên đường tròn đường kính KC cố định. Muốn vậy ta cần chứng minh điểm K cố định, điều này có nghĩa là ta cần chỉ ra được một trong các đoạn thẳng AK, BK, CK không đổi.

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là giao điểm của CA với DE và EM. Do A, B, C cố định nên H cố định.

Xét hai tam giác CMK và CHD có

$\widehat{M} = \widehat{H} = 90^0$; $\widehat{DCH}$ là góc chung. Suy ra

$\Delta CMK \backsim \Delta CHD$

$\Rightarrow \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{CM}{CH} \Rightarrow CK.CH = CM.CD$ (1)

Xét hai tam giác CMB và CAD có

$\widehat{CMB} = \widehat{CAD}$; $\widehat{ACD}$

là góc chung. Suy ra $\Delta CMB \backsim \Delta CAD \Rightarrow \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CB}{CD} \Rightarrow CM.CD = CA.CB$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $CK.CH = CA.CB \Rightarrow CK = \dfrac{CA.CB}{CH}$ không đổi nên K là điểm cố định

Tam giác CDE có K là trực tâm nên DN cũng đi qua điểm K cố định. Mà

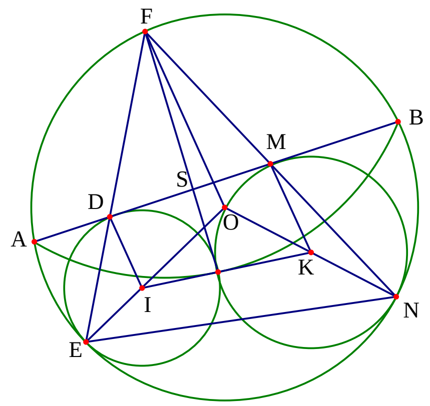
$\widehat{DME} = \widehat{DNE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\widehat{KMC} = \widehat{KNC} = 90^0$. Vậy khi đường tròn (O) thay đổi thì hai điểm M và N di động trên đường tròn cố định đường kính CK, với $CK = \dfrac{CA.CB}{CH}$.

Ví dụ 30. Cho đường tròn (O; R) và một dây cung AB cố định cách tâm O một khoảng d $(0 < d < R)$. Hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc với nhau tại C, cùng tiếp xúc với AB và tiếp xúc trong với đường tròn (O)(I và K nằm cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi thì điểm C chạy trên đường cố định nào.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Ba điểm I, K, O nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB. Gọi tiếp điểm của (I) với AB là D, ta có $ID \perp AB$. Gọi tiếp điểm của (I) và (O) là E. Khi đó ta có ba điểm O, I, E thẳng hàng.



Gọi F là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa E, ta có $OF \perp AB$. Lại có $\frac{EI}{EO} = \frac{DI}{FO}$ nên ba điểm E, D, F thẳng hàng. Tương tự (K) tiếp xúc với AB và (O) lần lượt tại M, N thì ta được ba điểm M, N, F thẳng hàng.

Ta có $\widehat{FDB} = \frac{1}{2}\widehat{DIE} = \frac{1}{2}\widehat{FOE} = \widehat{FNE};\ \widehat{FMA} = \frac{1}{2}\widehat{MKN} = \frac{1}{2}\widehat{FON} = \widehat{FEN}$. Do đó ta được $\Delta FDM \backsim \Delta FNE$ nên ta suy ra $FD.FE = FM.FN$ (1)

Giả sử FC cắt đường trong (I) và (K) tại giao điểm thứ hai theo thứ tự là C_1, C_2. Khi đó dễ dàng chứng minh được $FD.FE = FC.FC_1;\ FM.FN = FC.FC_2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $FC_1 = FC_2$ nên suy ra $C \equiv C_1 \equiv C_2$ hay FC là tiếp tuyến chung của (I) và (K)

Hơn nữa ta lại có $FD.FE = FM.FN = FC^2$ (3)

Mặt khác do F là điểm chính giữa cung AB nên ta có $\widehat{FAD} = \widehat{FEA}$

Từ đó ta được $\Delta FAD \backsim \Delta FEA$ suy ra $FD.FE = FA^2$ (4)

Từ (3) và (4) ta được $FA = FC$, mà ta lại thấy $FA = \sqrt{2R(R-d)}$

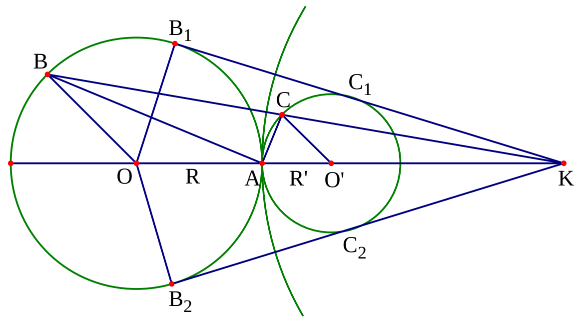
Vậy C thuộc cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R-d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.

+ Trường hợp 2: Ba điểm I, K nằm khác phía với O so với AB. Khi đó ta được quỹ tích điểm C khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi là cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R+d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.

Ví dụ 31. Hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O′ bán kính R′ $(R > R')$ tiếp xúc nhau tại A. Tia Ax của góc vuông $\widehat{xAy}$ cắt đường tròn (O) tại B khác A và tia Ay cắt đường tròn (O′) tại C khác A. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng khi góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A thì H chạy trên một đường tròn.

Lời giải

Gọi K là giao điểm của BC và OO′, ta xét hai trường hợp sau:



+ Trường hợp 1: Hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc trong tại A.

Do $R > R'$ nên K thuộc tia đối của tia O′O.

Từ giả thiết cả bài ra ta có

$\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = 90^0$ và $\widehat{BAO} + \widehat{CAO'} = 90^0$.

Do đó ta được

$$\widehat{OBC} + \widehat{BCO'} = \left(\widehat{OBA} + \widehat{CBA}\right) + \left(\widehat{BCA} + \widehat{ACO'}\right) = \left(\widehat{OAB} + \widehat{CAO'}\right) + \left(\widehat{CBA} + \widehat{BCA}\right) = 180^0$$

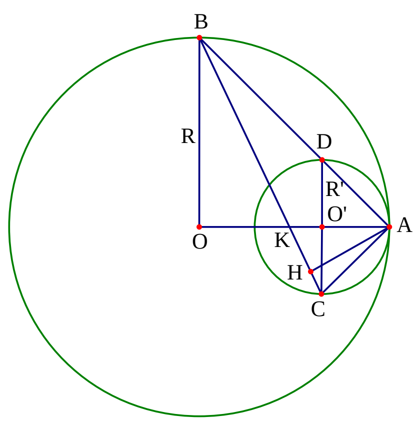
Suy ra OB và O′C song song vớ nhau, nên theo định lí Talets ta có $\frac{KO'}{KO} = \frac{CO'}{BO}$.

Từ đó suy ra $\frac{KO'}{KO' + R + R'} = \frac{R'}{R} \Rightarrow KO' = \frac{R'(R + R')}{R - R'}$. Do đó ta được $AK = KO' + R' = \frac{2RR'}{R - R'}$.

Do đó điểm A và K cố định và $\widehat{AHK} = 90^0$ nên điểm H chạt trên đường tròn đường kính AK.

Để ý là do góc $\widehat{xAy}$ chỉ quay đến vị trí các góc $\widehat{B_1AC_1}$ và $\widehat{B_2AC_2}$, lúc đó B_1C_1 và B_2C_2 là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O′). Khi đó hai tiếp tuyến này cắt đường tròn đường kính AK tại D và E nên điểm H chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{ADE}$ của đường tròn đường kính AK.

+ Trường hợp 2: Hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc trong tại A. Khi đó K nằm trên đoạn OO′.



Tương tự như trên ta chứng minh được BO và CO′ song song với nhau. Từ đó suy ra

$$\frac{KO'}{KO} = \frac{CO'}{BO} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{KO'}{(R - R') - KO'}$$

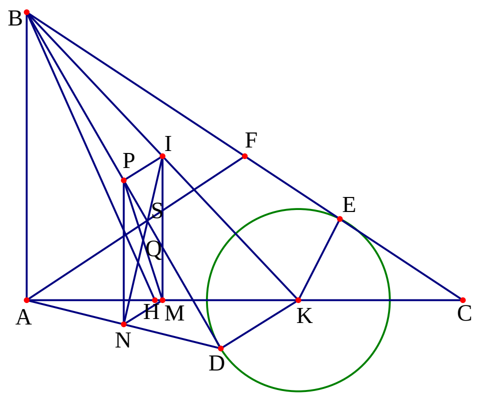
$$\Rightarrow KO' = \frac{(R - R')R'}{R + R'} \Rightarrow AK = \frac{2RR'}{R + R'}$$

Mà điểm A cố định nên điểm K cố định. Mặt khác ta lại có $\widehat{AHK} = 90^0$ nên điểm H chạy trên đường tròn đường kính AK cố định.

Vậy khi góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A thì điểm H luôn chạy trên đường tròn đường kính AK cố định.

Ví dụ 32. Cho tam giác ABC vuông tại A. Với mỗi điểm K trên cạnh AC dựng uờng tròn tâm K tiếp xúc với BC tại E. Dựng BD tiếp xúc với đường tròn tâm K tại D khác E. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AK, AD, BD, MP. Gọi S là giao điểm của đường thẳng QN và BD. Hỏi khi K di động trên cạnh AC thì điểm S di động trên đường nào.

Lời giải



+ Khi điểm K trùng với điểm A thì không tồn tại điểm S.

+ Khi điểm K trùng với điểm C thì điểm S trùng với điểm C.

+ Khi điểm K trùng với giao điểm H của AC với đường phân giác của góc B thì các điểm D, N, S trùng với điểm A.

+ Ta xét điểm K không trùng với các điểm trên và nằm trên đoạn CH, trường hợp càn lai chứng minh hoàn toàn tương tự.

Gọi I là trung điểm của BK, ta có MI và PN lần lượt là đường trung bình của tam giác ABK và ABD.

Do đó ta được $MI = PN = \frac{1}{2}AB$ và MI//PN//AB, suy ra tứ giác MIPN là hình bình hành nên trung điểm Q của đườngchéo PM cũng là trung điểm của NI. Từ đó suy ra bốn điểm Q, S, I, N thẳng hàng.

Trong tam giác vuông ABK và DBK có $IA = ID = \frac{1}{2}BK$ nên tam giác IAD cân tại I, từ đó IN là đường trung trực của đoạn thẳng AD. Vì điểm S thuộc IN nên ta giác SAD cân tại S nên ta có $\widehat{SAD} = \widehat{SDA}$.

Dễ thấy tứ giác ABKD nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{ADB} = \widehat{AKB}$. Từ đó suy ra $\widehat{SAD} = \widehat{AKB}$ nên ta được $\widehat{FAC} + \widehat{KAD} = \widehat{C} + \widehat{KBE}$. Ta lại có $\widehat{KBE} = \widehat{KBD}$ và $\widehat{KAD} = \widehat{KBD}$ nên ta được $\widehat{FAC} = \widehat{C}$, suy ra tam giác FAC cân tại F nên $FA = FC$.

Dễ thấy $\widehat{FBA} = 90^0 - \widehat{C} = \widehat{FAB}$ nên tam giác FAB cân tại F, từ đó suy ra $FA = FB$ hay F là trung điểm của BC. Vậy điểm F thuộc đường trung tuyến AF của tam giác ABC.

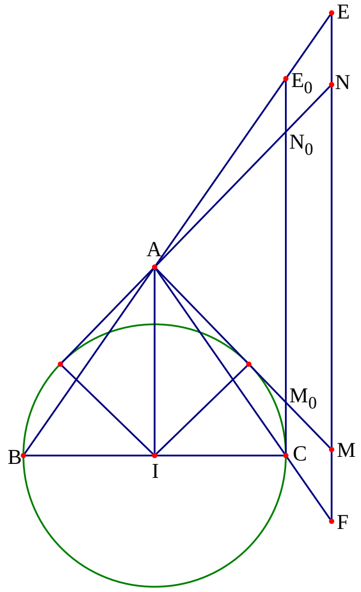
Để ý là tia BD và tia BA luôn nằm cùng phía đối với BC nên khi K nằm trên đoạn AH thì S nằm cùng phía với A trong nửa mặt phẳng bờ AC.

Vậy khi K di động trên AC(K khác A) thì điểm S nằm trên tia AF có chứa đường trung tuyến AF của tam giác ABC.

Ví dụ 33. Cho đoạn thẳng BC với trung điểm I và đường thẳng d không cắt đoạn thẳng BC và vuông góc với đường thẳng BC. Điểm A thay đổi trên đường trung trực của đoạn thẳng BC. Sao cho AI lớn hơn khoảng cách từ A đến d. Gọi giao điểm của AB, AC với d lần lượt là E, F. Gọi M là một điểm trên đường thẳng d sao cho $AM = \frac{EF}{2}$. Chứng minh rằng AM luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Phân tích tìm lời giải

Do BC cố định và I cố định nên đường tròn đường kính BC cố định. Ta dự đoán đường thẳng AM tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.



Lời giải

Lấy điểm M, N thuộc đường thẳng d sao cho $AM = AN = \frac{EF}{2}$. Các đoạn thẳng AM, AN, AE cắt đường thẳng qua C song song với d lần lượt tại $M_0; N_0; E_0$.

Ta có $AM = AN = \frac{EF}{2}$ nên suy ra $AM_0 = AN_0 = \frac{CE_0}{2}$.

Từ đó $AM_0 = AN_0 = AI$ nên ta được $\widehat{AM_0} = \widehat{AIM_0} = \widehat{IM_0C}$.

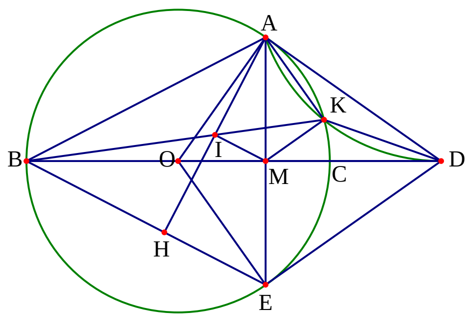
Do vậy M_0I là tia phân giác ngoài tại đỉnh M_0 của tam giác AM_0N_0.

Mà tam giác AM_0N_0 cân tại A và AI song song với M_0N_0 nên AI là phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác AM_0N_0. Do đó I là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{AN_0M_0}$ của tam giác AM_0N_0.

Mặt khác do IC vuông góc với M_0N_0 nên đường tròn đường kính BC tiếp xúc với các cạnh của tam giác AM_0N_0. Điều này chứng tỏ AM tiếp xúc với đường tròn đường kính BC, mà BC cố định nên đường tròn đường kính BC cố định. Vậy AM luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Ví dụ 34. Cho đường tròn tâm O đường kính BC cố định và một điểm A khác B, C di động trên đường tròn. Tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) cắt BC tại D. Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên BE. Gọi I là trung điểm của AH. Đường thẳng BI cắt đường tròn(O) tại K. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Lời giải



Gọi M là giao điểm của AE với BC. Vì điểm E đối xứng với A qua BC nên DE là tiếp tuyến của đường tròn (O). Từ đó suy ra AE vuông góc với BC và $MA = ME$. Mà theo giả thiết ta có $IA = IH$ nên suy ra IM song song với BE. Do đó ta được $\widehat{KIM} = \widehat{KBE} = \widehat{KAE}$ nên bốn điểm A, I, M, K cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra $\widehat{IAM} = \widehat{IKM}$.

Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{BAE} - \widehat{HAE} = \widehat{BKE} - \widehat{IKM} = \widehat{MKE}$

Mặt khác ta cũng có $\widehat{ABD} = \widehat{EAD}$ và $\widehat{BAH} = 90^0 - \widehat{ABH} = 90^0 - \widehat{EDM}$

Do đó ta được $\widehat{KDM} = \widehat{KEM} = \widehat{KEA} = \widehat{KAD}$ nên BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK luôn tiếp xúc với đường thẳng BC cố định.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn (O) và đường thẳng (d) nằm ngoài đường tròn. I là điểm di động trên (d). Đường tròn đường kính OI cắt (O) tại M, N. Chứng minh đường tròn đường kính OI luôn đi qua một điểm cố định khác O và đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho đoạn AB cố định, M di động trên AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai hình vuông MADE và MBHG. Hai đường tròn ngoại tiếp hai hình vuông cắt nhau tại N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên AB.

Bài 3. Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua B và C. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O). Đường thẳng MN cắt hai đoạn AO, AC lần lượt tại H và K. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK luôn đi qua hai điểm cố định.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

a) $MI.BE = BI.AE$

b) Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi H là chân đường cao hạ từ C. Hạ HE và HF tương ứng vuông góc với AC và BC. Các đương thẳng EF và AB cắt nhau tại K. Hạ EP và FQ vuông góc với AB.

a) Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ tiếp xúc với đường thẳng EF.

b) Gọi D là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính CH, $D \neq C$. Chứng minh $KA.KB = KH^2$ và giao điểm M của các đường thẳng CD và EF luôn thuộc đường thẳng cố định

Bài 6. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung BC cố định có độ dài $BC = \sqrt{3}R$, A là một điểm trên cung lớn BC. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và ACF cắt nhau tại $K\left(K \neq A\right)$.

a) Chứng minh K luôn thuộc một đường tròn cố định.

b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác KBC có diện tích lớn nhất và tìm giá trị đó theo R.

c) Gọi H là giao điểm của BE và CF. Chứng minh $\Delta ABH \backsim \Delta AKC$ và đường thẳng AK luôn đi qua một điểm có định.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên đường thẳng vuông góc với AB tại B ta lấy điểm D di động cùng phía với C đối với đường thẳng AB.

a) Chứng minh rằng nếu $AC + BD < CD$ thì trên cạnh AB luôn tồn tại hai điểm M và N sao cho $\widehat{CMD} = \widehat{CND} = 90^0$

b) Giả sử điều kiện trên được thỏa mãn. Đường thẳng qua A song song với MD và đường thẳng qua B song song với MC cắt nhau tại E. Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 8. Cho hai điểm phân biệt A và B cố định. Một điểm C di động sao cho $\widehat{ABC} = \alpha$ không đổi với $0^0 < \alpha < 180^0$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt đường thẳng EF lần lượt tại M và N

a) Chứng minh rằng đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm có định.

Trích đề thi học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2009

Bài 9. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) có B, C là tiếp điểm. Gọi P là điểm thuộc tia đối của tia BA, Q là điểm thuộc tia đối của tia AC sao cho PQ là tiếp xúc với đường tròn (O). Qua P kẻ đường thẳng song song với AC và cắt đường thẳng BC tại E. Qua Q kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại F.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng QE và PF luôn đi qua điểm cố định lầm lượt là M, N.

b) Chứng minh rằng tích $PM.QN$ có giá trị không đổi.

Trích đề thi chọn đội tuyển dự thi IMO 2011

Bài 10. Cho đường tròn (C) tâm O cố định và một điểm M khác O. Đường kính AB quay quanh O nhưng đường thẳng AB không đi qua M. MA, MB cắt (O) tại các điểm thứ hai A′, B′.

a) Chứng minh rằng đường thẳng A′B′ đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MA′B′ đi qua một điểm cố định.

Bài 11. Hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên tia đối Ax của tia AB ta lấy điểm M. Từ M kẻ tới đường tròn (O′) hai tiếp tuyến MC và MD (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong (O)). Đường thẳng AC cắt (O) lần thứ hai tại P và AD cắt (O) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên tia Ax.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d thay đổi cắt các cạnh AB và AC tại M và N sao cho

$$x.\frac{MB}{MA}+y.\frac{NC}{NA}=1 \quad (x, y \text{ là các số thực dương cho trước})$$

Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 13. Cho đường tròn (O; R) cố định và một điểm A di động trên đường tròn. Gọi H là điểm chuyển động bên trong đường tròn (O) sao cho $AH=R\sqrt{2}$. Đường thẳng vuông góc với AH tại H cắt đường trong (O) tại B, C. Đường trong đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại D, E(khác A). Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua điểm một cố định.

Bài 14. Cho tam giác ABC nhọn có M là điểm nằm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{MBA}=\widehat{MCA}$. Vẽ MD, ME tương ứng vuông góc với AB, AC. Gọi I là trực tâm tam giác ADE. Chứng minh rằng MI luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trong tam giác ABC.

Bài 15. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Một điểm C thay đổi trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O). Vẽ cát tuyến CDE với đường tròn (O)(tia CD nằm giữa hai tia CA và CO. Hai điểm D và E thuộc đường tròn (O) và D nằm giữa C, E). Gọi M là giao điểm của CO và BD, Gọi F là giao điểm của AM với đường tròn (O)(F khác A). Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 16. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC(B, C là hai tiếp điểm) và cát tuyến ADE thay đổi với đường tròn (O) sao cho tia AD nằm giữa hai tia AO và AB. Đường thẳng qua D và song song với BE cắt BC, AB lần lượt tại và Q.

Gọi K đối xứng với B qua E. Chứng minh rằng đường thẳng PK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 17. Cho tam giác ABC có vuông cân tại A. Lấy điểm M bất kì trên cạnh BC (M khác B và C). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Gọi I là giao điểm của CH và BK. Chứng minh rằng đường thẳng MI luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên BC.

Bài 18. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định. Lấy C là một điểm di động trên đường tròn (O) sao cho $BC > AC$. Vẽ CH vuông góc với AB tại H, HM vuông góc với AC tại M. Đường thẳng qua O song song với BC cắt tia tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) ở E. Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt BC tại D. BE cắt AC tại I. Các tiếp tuyến tại O, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD cắt nhau tại G. Đường thẳng qua B vuông góc với IH cắt CH tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt CH tại điểm K khác N. Chứng minh rằng đường thẳng GK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 19. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Gọi (O) thay đổi luôn qua B và C, qua A kẻ các đường thẳng tiếp xúc với (O) tại E và F(E không trùng F). Gọi I là trung điểm của BC và N là giao của AO và EF. Đường thẳng FI cắt (O) tại H. Chứng minh rằng:

a) EH song song với BC

b) Tích AN.AO không đổi.

c) Tâm đường tròn qua ba điểm O, I, N luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 20. Cho góc $\widehat{xOy}$ và hai điểm M, N lần lượt trên hai tia Ox và Oy. Gọi d là đường phân giác ngoài của góc $\widehat{xOy}$ và I là giao điểm của đường trung trực của MN với đường thẳng d. Gọi P và Q là hai điểm phân biệt trên đường thẳng d sao cho $IM = IN = IP = IQ$. Gọi K là giao điểm của MQ và NP. Chứng minh rằng K nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 21. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H và BC cố định . Đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại K. Chứng minh rằng đường thẳng KH luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 22. Cho tam giác ABC vuông tai A. Xét tam giác MNP vuông tại M đồng dạng với tam giác ABC có M nằm trên cạnh BC và N, P nằm trên các cạnh còn lại. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên BC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 23. Cho ΔABC nhọn có $\widehat{C} < \widehat{A}$. Đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E. Gọi K là giao điểm của BI và NE.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = 90^0 + \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

b) Chứng minh 5 điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn.

c) Gọi T là giao điểm của BI với AC, chứng minh rằng $KT.BN = KB.ET$.

d) Gọi Bt là tia của đường thẳng BC và chứa điểm C. Khi 2 điểm A, B và tia Bt cố định; điểm C chuyển động trên tia Bt và thoả mãn giả thiết, chứng minh rằng các đường thẳng NE tương ứng luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 24. Cho đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên đường thẳng AB ta lấy một điểm M bất kỳ sao cho điểm A nằm trong đoạn BM $(M \neq A)$. Từ điểm M kẻ tới đường tròn (O’) các tiếp tuyến MC và MD (C và D là các tiếp điểm, C nằm ngoài (O)). Đường thẳng AC cắt lần thứ hai đường tròn (O) tại điểm P và đường thẳng AD cắt lần thứ hai đường tròn (O) tại Q. Đường thẳng CD cắt PQ tại K.

a) Chứng minh rằng hai tam giác BCD và BPQ đồng dạng

b) Chứng minh rằng khi M thay đổi thì đường tròn ngoại tiếp tam giác KCP luôn đi qua điểm cố định.

Bài 25. Cho góc $\widehat{xAy} = 90^0$ và một điểm M nằm trong góc đó. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên tia Ax, Ay. Trên đường thẳng qua M vuông góc với HK lấy điểm P sao cho $PM = HK$. Khi M thay đổi trong góc $\widehat{xAy}$ thì điểm P chạy trên đường cố định nào.

Bài 26. Cho đường tròn tròn (O; R) và dây cung BC cố định. Điểm A di động trên đoạn thẳng BC. Gọi D là tâm đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại B, E là tâm đường tròn đi qua A, C à tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại C. Gọi M là giao điểm thứ hai của hai đường tròn tâm D và tâm E. Tìm quỹ tích điểm M khi A di động trên đoạn thẳng BC.

Bài 27. Cho đường tròn (O) và hai điểm M, N cố định(M nằm ngoài đường tròn và N nằm trong đường tròn). Một dây cung AB thay đổi và đi qua N. Hai cát tuyến MA, MB cắt đường tròn tại điểm thứ hai theo thứ tự là C, D. Chứng minh rằng:

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định.

Bài 28. Cho điểm A cố định trên cạnh Ox của góc xOy. Một đường tròn (I) tiếp xúc với Ox, Oy lần lượt tại D, C. Tiếp tuyến thứ hai kể từ A đến đường tròn (I) tiếp xúc với (I) tại E. CHứng minh rằng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 29. Cho hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho O_2 và O_2 nằm cùng một phía so với đường thẳng AB. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ sao cho $\widehat{MBN} = \alpha$ không đổi và M, N nằm về hai phía so với AB. Giả sử MO_1 và NO_2 cắt nhau tại P. Chứng minh rằng đường trong ngoại tiếp tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 30. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Trên cung nhỏ AB của đường tròn (O) lấy điểm E sao cho E khác A và B. Đường thẳng AE cắt các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Gọi F là giao điểm của MC và BN. Chứng minh:

a) Hai tam giác CAN, tam giác MBA đồng dạng với nhau và $BM.CN = BC^2$.

b) BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF.

c) EF luôn đi qua một điểm cố định khi E thay đổi trên cung nhỏ AB của (O) (E khác A và B)

Bài 31. Cho ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Gọi (O) là đường tròn tâm O bất kỳ đi qua B và C (BC không là đường kính của (O)). Kẻ từ A các tiếp tuyến AE, AF đến (O) (E, F là các tiếp điểm). Gọi I và K lần lượt là trung điểm của BC và EF; đường thẳng FI cắt lại (O) tại D. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm A, E, O, I cùng nằm trên một đường tròn, chỉ rõ đường kính của đường tròn đó.

b) ED song song với AC.

c) Nếu (O) thay đổi nhưng luôn đi qua B và C thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 32. Cho đường tròn (O), đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D. Từ điểm M tuỳ ý trên d kẻ các tiếp tuyếnMA và MB với (O) (A và B là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của CD.

a) Chứng minh tứ giác MAIB nội tiếp.

b) Các đường thẳng MO và AB cắt nhau tại H. Chứng minh H thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCOD.

c) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên đường thẳng d.

d) Chứng minh $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$

Bài 33. Cho đường tròn $(O; R)$ có BC là dây cố định $(BC < 2R)$; E là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC và AB < AC (A khác B). Trên đoạn AC lấy điểm D khác C sao cho ED = EC. Tia BD cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là F.

a) Chứng minh D là trực tâm của tam giác AEF.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác DEC; DH cắt BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là M. Chứng minh đường thẳng DM luôn đi qua một điểm cố định.

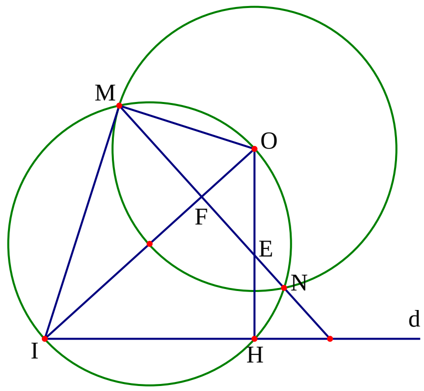
Bài 34. Cho tam giác ABC(AB < AC) có các góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, E là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, F là điểm đối xứng của E qua M .

a) Chứng minh rằng $EB^2 = EF.EO$

b) Gọi D là giao điểm của AE và BC. Chứng minh rằng CMR các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn

c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là điểm thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC sao cho P, O, F không thẳng hàng. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua 1 điểm cố định .

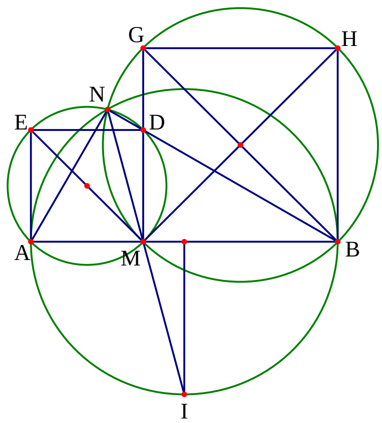
HƯỚNG DẪN GIẢI



Bài 1. Kẻ OH vuông góc với (d) cắt MN tại E. ta có H cố định và H thuộc đường tròn đường kính OI vậy đường tròn đường kính OI luôn đi qua K cố định. Xét tam giác OEF và tam giác OIH có góc O chung và $\widehat{OFE} = \widehat{OHI} = 90^0$

Nên tam giác OEF đồng dạng với tam giác OIH do đó ta được $\dfrac{OF}{OE} = \dfrac{OH}{OI} \Rightarrow OE.OH = OF.OI$. Lại có $\widehat{IMO} = 90^0$ nên xét tam giác vuông OMI có đường cao ứng với cạnh huyền MF nên $OF.OI = OM^2$

Do đó $OE = \dfrac{OM^2}{OH}$ hằng số. Mà O là điểm cố định nên E cố định. Do đó MN đi qua điểm E cố định.



Bài 2. Giả sử MN cắt đường tròn đường kính AB tại I

Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ADM} = 45^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM của đường tròn ngoại tiếp hình vuông AMDE)

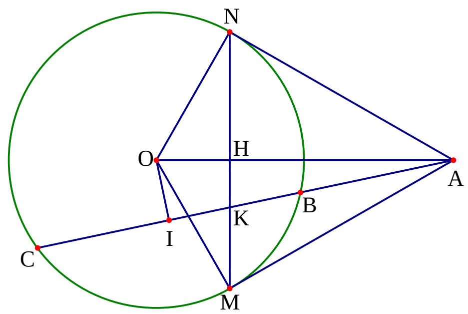
Ta có $\widehat{BNM} = \widehat{BGM} = 45^0$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM của đường tròn ngoại tiếp hình vuông MBGH)

Do đó ta được $\widehat{ANB} = \widehat{ANM} + \widehat{BNM} = 90^0$ nên N thuộc đường tròn đường đường kính AB

Do đó ta được vậy sđ$\overset{\frown}{AI} = 2\widehat{ANI} = 2\widehat{ANM} = 90^0$. Vậy I thuộc đường tròn đường kính AB và số đo cung AI bằng 90^0.

Suy ra I cố định hay đường thẳng MN đi qua điểm I cố định.

Bài 3. Qua O Kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại I ta có I là trung điểm của BC nên I cố định. Tứ giác OHKI có $\widehat{OHK}=\widehat{OIK}=90^0$ nên nội tiếp được. Suy ra $\widehat{IOH}=\widehat{HKA}$ hay tam giác AOI đồng dạng với tam giác AKH.



Do đó ta được $\frac{AK}{AH}=\frac{AO}{AI}\Rightarrow AK.AI=AO.AH$

Trong tam giác ONA vuông có đường cao NH nên $AO.AH=AN^2$

Lại có $AN^2=AB.AC$. Do đó ta được $AK.AI=AB.AC\Rightarrow AK=\frac{AB.AC}{AI}$ là hằng số. Từ đó suy ra K cố định. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK đi qua hai điểm cố định I, K.

Bài 4. bạn đọc tự vẽ hình

a) Ta có $\widehat{BDE}=\widehat{BAE}$ (cùng chắn cung BE của đường tròn tâm O) và $\widehat{BAE}=\widehat{BMN}$ (cùng chắn cung BN của đường tròn tâm O') nên ta được $\widehat{BDE}=\widehat{BMN}$ hay $\widehat{BDI}=\widehat{BMN}$ suy ra tứ giác BDMI nội tiếp.

Do đó ta được $\widehat{MDI}=\widehat{MBI}$ (cùng chắn cung MI), mà $\widehat{MDI}=\widehat{ABE}$ (cùng chắn cung AE của đường tròn tâm O) nên suy ra $\widehat{ABE}=\widehat{MBI}$ .Mặt khác ta có $\widehat{BMI}=\widehat{BAE}$ nên suy ra tam giác MBI đồng dạng với tam giác ABE. Từ đó ta được $\frac{MI}{AE}=\frac{BI}{BE}\Rightarrow MI.BE=BI.AE$

b) Gọi Q là giao điểm của CO và DE. Khi đó OC vuông góc với DE tại Q.

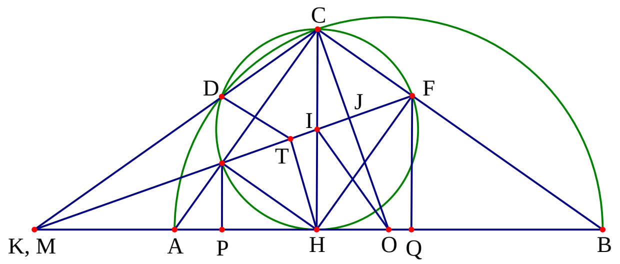
Từ đó ta được tam giác OCD vuông tại D có DQ là đường cao nên $OQ.OC=OD^2=R^2$

Gọi K giao điểm của hai đường thẳng OO' và DE, gọi H là giao điểm của AB và OO'. Khi đó ta có OO' vuông góc với AB tại H. Xét hai tam giác KQO và CHO có $\widehat{Q}=\widehat{H}=90^0$ và $\widehat{O}$ là góc chung

Do đó tam giác KQO đồng dạng với tam giác CHO, suy ra $\frac{KO}{CO}=\frac{OQ}{OH}\Rightarrow OC.OQ=KO.OH$

Từ đó ta được $KO.OH = R^2 \Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$. Vì OH cố định và R không đổi nên OK không đổi do đó điểm K cố định. Vậy khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua điểm K cố định.

Bài 5. a) Xét trường hợp $AC < BC$, gọi I là giao điểm của EF và CH. Vì AEHF là hình chữ nhật nên I là trung điểm của EF. Ta có IH // EF và I là trung điểm của EF nên H là trung điểm của PQ. Khi đó đường tròn đường kính PQ là đường tròn tâm H bán kính HP. Gọi T là hình chiếu của H trên EF, ta có $\widehat{PEH} = \widehat{EAH}$ và



$\widehat{TEH} = \widehat{IHE}, \widehat{IHE} = \widehat{EAH}$

Nên $\widehat{PEH} = \widehat{TEH}$, do đó ta được $\Delta PEH = \Delta TEH \Rightarrow HT = HP$

Suy ra ta có $HT \perp FE, HT = HP$ nên EF tiếp xúc với đường tròn đường kính PQ.

Trường hợp $AC > BC$, ta chứng minh tương tự.

b) Xét trường hợp $AC < BC$, ta có $\widehat{KEA} = \widehat{FEC} = \widehat{CHF} = \widehat{CBK}$ nên ta được $\Delta KAE \backsim \Delta KFB$

Do đó ta được $\dfrac{KA}{KF} = \dfrac{KE}{KB} \Rightarrow KA.KB = KE.KF$.

Mặt khác ta có $\widehat{KHE} = \widehat{HCE} = \widehat{HFK}$ nên $\Delta KHE \backsim \Delta KFH$

Do đó ta được $\dfrac{KH}{KF} = \dfrac{KE}{KH} \Rightarrow KH^2 = KE.KF$. Từ đó suy ra $KH^2 = KA.KB$

Gọi J là giao điểm của OC và EF, ta có $\widehat{OCF} = \widehat{OBC}$ và $\widehat{JFE} = \widehat{ICF}$.

Do đó $\widehat{OCF} + \widehat{JFE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CJF} = 90^0 \Rightarrow OC \perp FE$

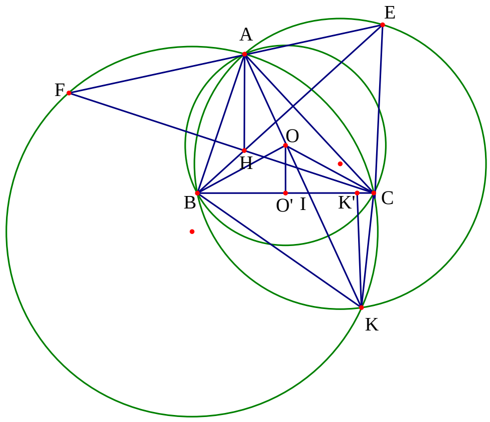
Tam giác OKC có CH và KJ là hai đường cao cắt nhau tại I nên ta được $OI \perp CK$

Mặt khác đường tròn (O) và đường tròn tâm I đường kính CH cắt nhau tại C và D nên OI là đường trong trực của CD, suy ra $OI \perp CD$. Do đó ta được C, K, D thẳng hàng.

Vậy K cũng là giao điểmcủa CD và EF, nên M trùng với K hay K thuộc đường thẳng AB cố định.

Trường hợp $AC > BC$, ta chứng minh tương tự.

Bài 6. a) Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF có $\widehat{AKC} = \widehat{CFA}$. Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE có $\widehat{AKB} = \widehat{AEB}$ và xét đường tròn tâm O có $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. Vì C và F đối xứng qua AB nên ta có



$$\widehat{ACF} = \widehat{CFA},\ \widehat{CAB} = \widehat{FAB}$$

Vì hai điểm E và B đối xứng qua AC nên

$\widehat{ABE} = \widehat{AEB}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{EAC}$

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{FAC}$ do đó $\widehat{BKC} + \widehat{BOC} = 180^0$ suy ra tứ giác BOCK nội tiếp. Vậy K thuộc đường trong ngoại tiếp tam giác BOC, mà tam giác BOC cố định do đó K thuộc đường tròn cố định.

b) Vẽ $OO' \perp BC$ tại O', $KK' \perp BC$ tại K'. Gọi I là giao điểm của BC và AK.

Ta có $BO' = O'C = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Do đó $OO' = \sqrt{OB^2 - O'B^2} = \frac{R}{2}$

Nên ta được $\cos\widehat{BOO'} = \frac{O'O}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOO'} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$

Do đó bán kình đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC là R. Ta có
$KK' \le 2R,\ O'O \le OI,\ OK \le 2R$ nên

$$S_{KBC} = \frac{1}{2}KK'.BC \le \frac{1}{2}KI.BC = \frac{1}{2}(OK - OI)BC \le \frac{1}{2}\left(2R - \frac{R}{2}\right).R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Do đó $S_{KBC} \le \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi OK là đường kính cả đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC và các điểm K', I, O' trùng nhau $\Leftrightarrow BK = CK \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow$ K nằm chính giữa cung lớn BC.

c) Ta có $\widehat{ACH} = \widehat{ABH},\ \widehat{ABH} = \widehat{AEH} \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{AEH}$ do đó tứ giác AHCE nội tiếp

Do đó ta được $\widehat{AHE} = \widehat{ACE}$.

Lại có $\widehat{AKC} = \widehat{CFA}, \widehat{CFA} = \widehat{ACF}, \widehat{ACF} = \widehat{ABE}, \widehat{ABE} = \widehat{AKE} \Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{AKE}$ nên ba điểm K, C, E thẳng hàng, do đó $\widehat{AHB} = \widehat{AKC}$. Mặt khác

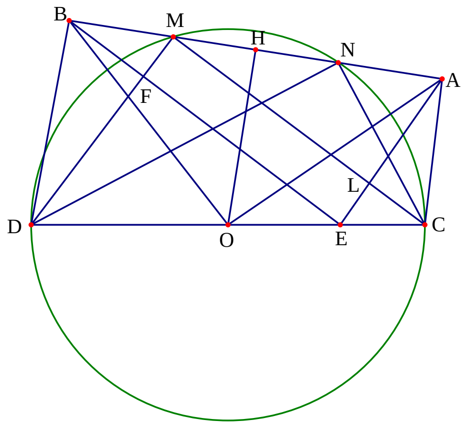
$\widehat{ABH} = \widehat{ACH},\ \widehat{ACH} = \widehat{AFC},\ \widehat{CFA} = \widehat{AKC} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{AKC}$

Hai tam giác ABH và AKC đồng dạng vì $\widehat{AHB} = \widehat{ACK},\ \widehat{ABH} = \widehat{AKC}$

Mà $\widehat{ABH} = 90^0 - \widehat{BAC}, \widehat{OKC} = \widehat{OBC} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{BOC}\right)$

Nên ta được $\widehat{AKC} = \widehat{OKC}$ nên hai tia KO và KA trùng nhau hay KA luôn đi qua điểm O cố định.

Bài 7. a) Vẽ OH vuông góc với AB tại H.



Ta có $BD \perp AB, CA \perp AB, OH \perp AB$. Do đó ta được BD//AC//OH. Ta có O là trung điểm của BC nên OH là đường trung bình của hình thang ABDC

$\Rightarrow OH = \frac{AC + BD}{2}$. Mà $AC + BD < CA$ nên $OH < \frac{CD}{2}$.

Ta có $d < R$ nên đường thẳng AB cắt đường tròn đường kính CD tai hai điểm phân biệt là M và N.

Ta có OH là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên $OA = OB$ mà AC//BD nên $\widehat{ACD} + \widehat{BDC} = 180^0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác ACO có $\widehat{ACO} \geq 90^0$ do đó A nằm ngoài đường tròn (O).

Mà $OB = OA > OC$ nên B cũng nằm ngoài đường tròn (O).

Suy ra M và M nằm trên đoạn thẳng AB và ta có $\widehat{CMD} = \widehat{CND} = 90^0$.

b) Gọi L là giao điểm của AE và CM, F là giao điểm của MD và BE.

Ta có AE//MD, MC vuông góc với MD. Suy ra ta được $AE \perp MC \Rightarrow \widehat{ALM} = \widehat{MLE} = 90^0$.

Tương tự ta có $\widehat{BFD} = \widehat{MFE} = 90^0$. Xét tam giác BMD và tam giác ACM có

$\widehat{MBD} = \widehat{CAM}, \widehat{BMD} = \widehat{ACM}$

Do đó $\Delta BMD \backsim \Delta ACM \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{BD}{MA}$. Tương tự ta được $\Delta BDF \backsim \Delta AML \Rightarrow \frac{BD}{MA} = \frac{ED}{ML}$

Tứ giác MLEF có $\widehat{LMF} = \widehat{FME} = \widehat{MLE} = 90^0$ nên là ình chữ nhật, do đó $FE = ML$

Do vậy $\frac{FD}{EF} = \frac{FD}{ML} = \frac{BD}{MA} = \frac{MD}{MC}$.

Xét tam giác FDE và tam giác MDC có $\widehat{DFE} = \widehat{CMD} = 90^0$ và $\dfrac{FD}{MD} = \dfrac{FE}{MC}$

Nên $\Delta FDE \backsim \Delta MDC$ suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{MDC}$ nên hai tia DE và DC trùng nhau, suy ra C, E, D thẳng hàng. Vậy DE luôn đi qua điểm có định C.

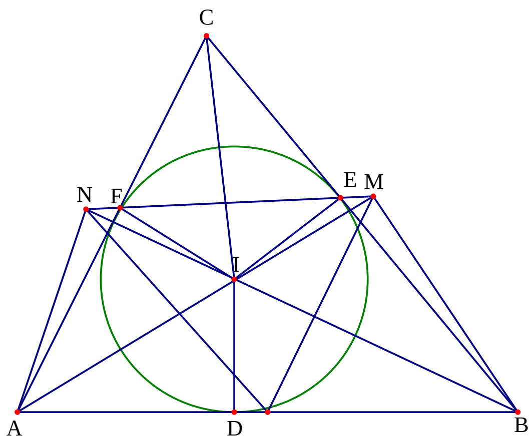
Bài 8. a) Chứng minh đoạn thẳng MN có độ dài không đổi. Trước hết ta chứng minh $\widehat{AIN} = \dfrac{180^0 - \alpha}{2}$.

Thật vậy, do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta được

$$\widehat{AIB} = 180^0 - \left(\widehat{IAB} + \widehat{IBA}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{CAB} + \widehat{CBA}\right)$$
$$= 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{ACB}\right) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$$

Do đó ta được $\widehat{AIN} = 180^0 - \widehat{AIB} = 180^0 - \left(90^0 + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{180^0 - \alpha}{2}$

Lại có $\widehat{NFA} = \widehat{CFE} = \dfrac{180^0 - \widehat{ACB}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = \widehat{AIN}$



Từ đó suy ra tứ giác ANIF nội tiếp đường tròn. Do đó ta được $\widehat{INF} = \widehat{IAF} = \widehat{IAD}$ và $\widehat{ANI} = \widehat{AFI} = 90^0$

Mặt khác tại có $\Delta NIM \backsim \Delta AIB$ nên ta được $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NI}{AI} = \cos\widehat{AIN} = \cos\dfrac{180^0 - \alpha}{2}$

Từ đó suy ra $MN = AB.\cos\dfrac{180^0 - \alpha}{2}$ không đổi.

b) Gọi K là trung điểm của AB và ta đã có $\widehat{ANB} = 90^0$ nên ta được $KA = KB = KN$

Từ đó suy ra $\widehat{AKN} = \widehat{KNB} + \widehat{KBN} = 2\widehat{KBN} = \widehat{ABC}$ (1)

Mặt khác từ $\Delta NIM \backsim \Delta AIB$ nên ta được $\widehat{NMI} = \widehat{IBA} = \widehat{IBE}$ (2)

Từ đó suy ra tứ giác IMEB nội tiếp đường tròn, nên ta được $\widehat{IMB} = \widehat{IEB} = 90^0$

Do đó suy ra $\widehat{MAN} = \widehat{NBM} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$. Suy ra tứ giác IMBD nội tiếp đường tròn do $\widehat{IMB} + \widehat{IDB} = 180^0$

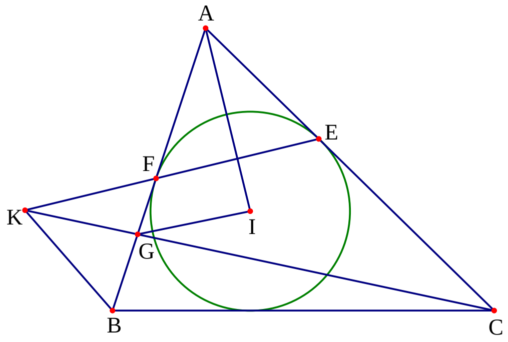
Do đó $\widehat{IMD} = \widehat{IBD}$ (3) . Từ (2) và (3) nên ta được $\widehat{NMD} = \widehat{NMI} + \widehat{IMD} = \widehat{IBE} + \widehat{IBD} = \widehat{ABC}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\widehat{NKA} = \widehat{NMD}$, do đó tứ giác NKDM mội tiếp đường tròn

Hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua điểm K cố định. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 9.

Cách 1. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F. Đường thẳng qua B song song với AC cắt EF tại K. Giao điểm của CK và AB là G. Khi đó tam giác AIG vuông tại I.



Thật vậy, đặt $AB = c, BC = a, CA = b$ và $2p = a + b + c$. Do BK//AC nên tam giác BKF cân tại B nên ta được $AE = AF = p - a$

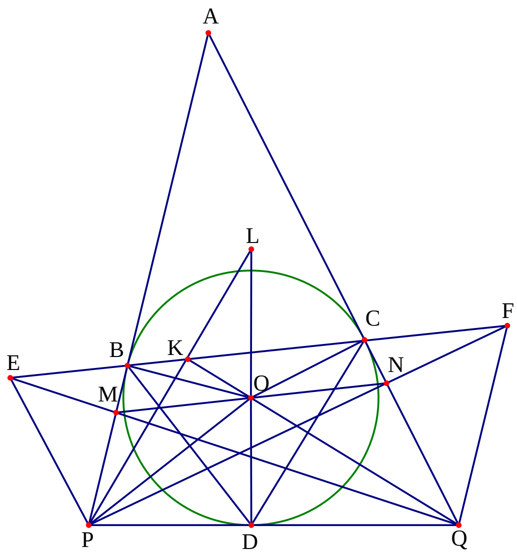
Theo định lí Talets ta có $\dfrac{BG}{AG} = \dfrac{BK}{AC} = \dfrac{p-b}{b} \Rightarrow \dfrac{AB}{AG} = \dfrac{p}{b} \Rightarrow AG = \dfrac{bc}{p}$

Mà ta lại có $AF = p - a$ nên ta được $\dfrac{AF}{AG} = \dfrac{p\left(p-a\right)}{bc}$

Ta cũng có $AI = \dfrac{AF}{\sin\dfrac{\widehat{A}}{2}}$; $AH = AF.\sin\dfrac{\widehat{A}}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{AI} = \sin^2\dfrac{\widehat{A}}{2} = \dfrac{1-\cos A}{2} = \dfrac{p\left(p-a\right)}{p}$

Từ đó suy ra $\dfrac{AF}{AG} = \dfrac{AH}{AI} = \dfrac{p\left(p-a\right)}{bc}$. Do đó GI song song với EF. Điều này dẫn đến tam giác AIG vuông tại I. Vậy bổ đề được chứng minh.
Trở lại bài toán

a) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của QE với AB và PF với AC. Do PE song song với AQ và QF song song với AP. Áp dụng bổ đề trên ta được các tam giác OMA và ONA vuông tại O. Từ đó suy ra M, N là các điểm cố định.



b) Đặt $AB = AC = a;\ BP = x;\ CQ = y$. Khi đó chu vi của tam giác APQ là

$p = 2\left(a + x + y\right)$

Theo bổ đề trên ta tính được

$$AM = AP - \frac{2AP.PQ}{AP + PQ + AQ} = \frac{AP\left(AP + PQ - QA\right)}{AP + PQ + AQ} = \frac{\left(a + x\right)x}{a + x + y}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $QN = \frac{\left(a + y\right)y}{a + x + y}$. Khi đó ta có $PM.QN = \frac{\left(a + x\right)x}{a + x + y}.\frac{\left(a + y\right)y}{a + x + y}$.

Ta cần chứng minh $PM.QN = \frac{\left(a + x\right)x}{a + x + y}.\frac{\left(a + y\right)y}{a + x + y}$ có giá trị không đổi.

Thật vậy, gọi R là bán kính đườn tròn (O) khi đó ta có

$$S_{APQ} = \frac{pR}{2} = \frac{AP.AQ.\sin\widehat{BAC}}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(x + a\right)\left(y + a\right)}{a + x + y} = \frac{R}{\sin\widehat{BAC}}$$

Từ đó suy ra $\frac{\left(x + a\right)\left(y + a\right)}{a + x + y}$ có giá trị không đổi. Đặt $\frac{\left(x + a\right)\left(y + a\right)}{a + x + y} = k$ không đổi. Từ đó ta có

$$\left(a + x\right)\left(a + y\right) = k\left(a + x + y\right) \Leftrightarrow a\left(a + x + y\right) + xy = k\left(a + x + y\right)$$

Suy ra $a + \frac{xy}{a + x + y} = k$ có giá trị không đổi, do đó $\frac{xy}{a + x + y}$ có giá trị không đổi

Vậy $PM.QN = \frac{\left(a + x\right)x}{a + x + y}.\frac{\left(a + y\right)y}{a + x + y}$ có giá trị không đổi.

Cách 2. a) Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với BC tại D. Gọi K, L lần lượt là giao điểm của QO với BC và PK với OD. Do O tâm đường tròn nội tiếp và B là tiếp điểm nên ta có OB vuông góc với AP.

Dễ thấy được $\widehat{PKO} = 90^0$ nên ta được $\Delta LOP \backsim \Delta QOA$ và $\Delta LKO \backsim \Delta LPD$

Do đó ta được $\frac{OK}{PD}=\frac{LO}{LP}=\frac{OQ}{QA}\Rightarrow\frac{OK}{OQ}=\frac{PB}{QA}$. Lại có $PE=PB$ nên ta được

$\frac{OK}{OQ}=\frac{PE}{QA}=\frac{EM}{MQ}$

Theo định lí Talets đảo suy ra MO song song với BC mà O cố định và M thuộc AB nên suy ra M cố định.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được N là điểm cố định

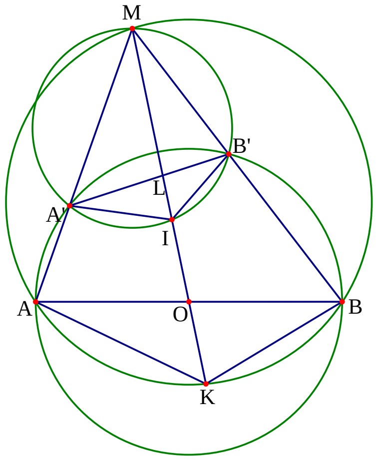
b) Theo trên ta được ba điểm O, M, N thẳng hàng.

Từ đó dễ chứng minh được $\Delta POM\backsim\Delta ONQ$ nên ta được

$\frac{PM}{OM}=\frac{ON}{QN}\Rightarrow PM.QN=OM.ON=OM^2$

Mà MO không đổi nên tích $PM.QN$ có giá trị không đổi.

Bài 10. Gọi L, K, I lần lượt là giao điểm của đường thẳng OA với A′B′, đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác MA′B′.



a) Ta chứng minh L là điểm cố định

Tứ giác MAKB nội tiếp đường tròn và có giao điểm hai đường chéo là O , nên OM.OK=OA.OB . Suy ra $OK=\frac{OA.OB}{OM}$ không đổi, nên K là điểm cố định.

Ta có $\widehat{MA'L}=\widehat{MBA}=\widehat{MKA}$ nên $\Delta MA'L\backsim\Delta MKA$

suy ra ta được $ML.MK=MA'.MA$

Vì K cố định và ML.MK không đổi nên hiển nhiên L là một điểm cố định .

Vậy đường thẳng A′B′ luôn đi qua điểm cố định là L là giao điểm của OM với A′B′

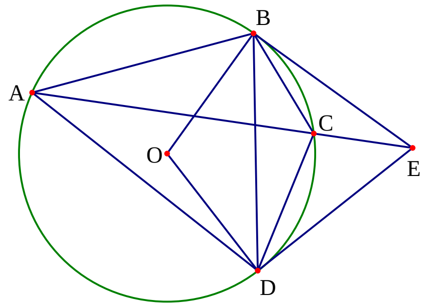
b) Ta chứng minh I là điểm cố định

Do $\widehat{MIA'}=\widehat{MB'A'}=\widehat{MA'O}$ nên $\Delta MA'I\backsim\Delta MOA$ $\Rightarrow\frac{MA'}{MI}=\frac{MO}{MA}$ nên $MI=\frac{MA'.MA}{MO}$

Với chú ý $MA.MA'$ không đổi (lí luận tương tự câu a) ta suy ra I là điểm cố định.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MA′B′ luôn đi qua một điểm cố định khác M là I .

Bài 11. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Khi đó $AB.CD = AD.BC$ khi và chỉ khi đường chéo AC đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến của (O) tại B và D.



Chứng minh: Giả sử AC đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến của (O) tại B và D. Gọi giao điểm đó là E. Khi đó dễ dàng chứng minh được

$$\Delta BCE \backsim \Delta ABE \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{CE}{BE} \text{ và } \Delta DCE \backsim \Delta ADE \Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{CE}{DE}.$$

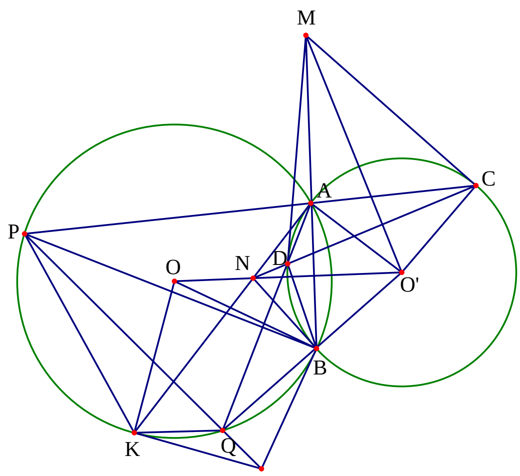
Mà $CE = DE$ nên $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AB.CD = AD.BC$.

Lại giả sử $AB.CD = AD.BC$ và gọi E, E′ lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến của (O) tại B và D với đường thẳng AC. Tương tự trên, ta chứng minh được $CE = DE'$ nên có được E trùng E′.

Từ đây ta thấy rằng bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Gọi N là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (O′), AN cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Ta sẽ chứng minh rằng PQ đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến của (O) tại B và K.



Thật vậy, tứ giác ACBD nội tiếp (O′) có đường chéo AB đi qua tiếp tuyến của (O′) tại C và D nên theo bổ đề trên thì $AC.BD = AD.BC$, suy ra

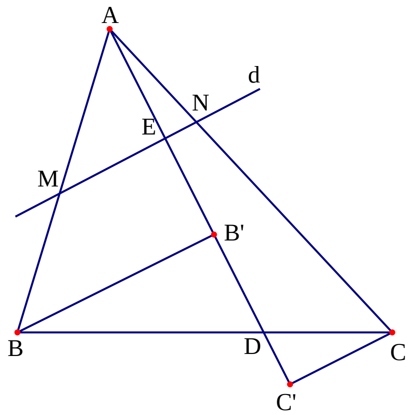
$$\sin\widehat{ADC}.\sin\widehat{DAB} = \sin\widehat{DCA}.\sin\widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{KAP}.\sin\widehat{BAQ} = \sin\widehat{KAQ}.\sin\widehat{BAP}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{KAP}} = \frac{\sin\widehat{BAQ}}{\sin\widehat{KAQ}} \Rightarrow \frac{PB}{PK} = \frac{QB}{QK} \Rightarrow PB.QK = PK.QB$$

Do đó, theo bổ đề trên thì PQ đi qua giao điểm của tiếp tuyến tại K và B của (O), rõ ràng giao điểm đó là điểm cố định nên ta có điều cần chứng minh.

Bài 12. Trên BC lấy điểm D sao cho $\frac{DB}{DC}=\frac{y}{x}$, từ đó suy ra D là điểm cố định. Đường thẳng d lần lượt cắt AB, AC, AD tại M, N, E. Qua B, C kẻ các đường thẳng song song với d, lần lượt cắt AD tại B′ và C′



Theo định lí Talets ta có $\frac{MB}{MA}=\frac{EB'}{EA};\frac{NC}{NA}=\frac{EC'}{EA}$

Và $\frac{B'D}{C'D}=\frac{BD}{CD}=\frac{y}{x}\Rightarrow x.B'D-y.C'D=0$

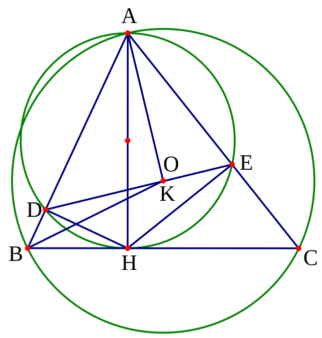
Kết hợp với giải thiết ta được

$$x.\frac{EB'}{EA}+y\frac{EC'}{EA}=1\Leftrightarrow x.EB'+y.EC'=1\Leftrightarrow x\left(ED-B'D\right)+y\left(ED+DC'\right)=EA$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y\right)ED+\left(yC'D-xB'D\right)=EA\Leftrightarrow\left(x+y\right).ED=EA\Leftrightarrow\frac{EA}{ED}=x+y$$

Do $\frac{EA}{ED}=x+y$ không đổi nên E là điểm cố định (do A, D là điểm cố định). Vậy đường thẳng d luôn đi qua điểm E cố định.

Bài 13. Vẽ đường tròn đường kính AH. Khi đó ta có $\widehat{AEH}=90^0$ và $\widehat{ADE}=\widehat{AHE}$. Mà ta có $\widehat{AHE}=\widehat{ACB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{EHC}$). Do đó ta được $\widehat{ADE}=\widehat{BAC}$. Mặt khác $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ và $OA=OB=R$. Do đó tam giác OAB cân tại O nên ta được $\widehat{DAO}+\frac{1}{2}\widehat{AOB}=90^0$.

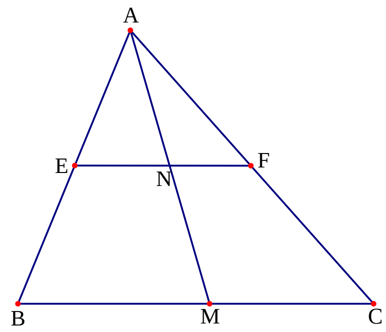


Vẽ AK vuông góc với DE tại K. Xét hai tam giác AED và ABC có $\widehat{EAD}$ là góc chung và $\widehat{ADE}=\widehat{ACB}$

Suy ra $\Delta AED\backsim\Delta ABC$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là R, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AED là $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Nên ta được $\frac{AK}{AH}=\frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{R}$, mà ta có $AH=R\sqrt{2}$ suy ra $AK=R$.

Từ đó suy ta hai điểm K và O trùng nhau hay DE luôn đi qua điểm O cố định.

Bài 14. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC và hai điểm E, F lần lượt thuộc cạnh AB, AC sao cho EF//BC. Hai điểm M, N lần lượt thuộc BC, EF sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{NE}{NF}$. Khi đó ba điểm A, M, N thẳng hàng.



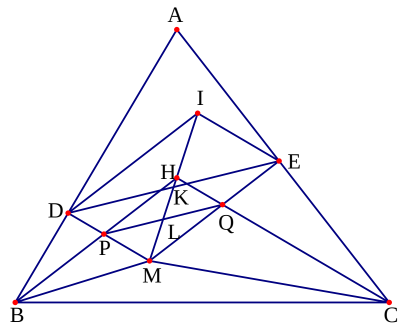
Thật vậy, giả sử AE cắt BC tại điểm M’. Khi đó do EF song song với BC nên ta được

$$\frac{EN}{BM'} = \frac{AN}{AM'} = \frac{FN}{CM'}$$

Suy ra ta được $\frac{M'B}{M'C} = \frac{NE}{NF}$ nên ta được $\frac{M'B}{M'C} = \frac{MB}{MC}$. Suy ra hai điểm M và M’ trùng nhau.

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Gọi H là trực tam tam giác ABC. Gọi P, Q theo thứ tự là BH, CH với MD, ME. Gọi K, L theo thứ tự là trung điểm của DE, PQ. Vì I, H theo thứ tự là trực tâm các tam giác ADE, ABC và MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB, AC. Do đó ta được DI//PH//ME và EI//QH//MD. Từ đó ta được các tứ giác MDIE và MPHQ là các hình bình hành. Như vậy ta có được các bộ ba điểm thẳng hàng là M, I, K và M, L, H.



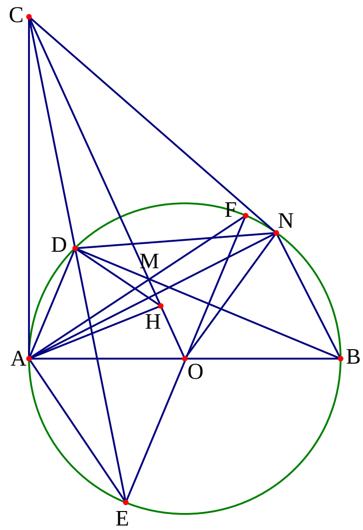
Ta lại có $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$ nên các tam giác vuông MBD và MCE đồng dạng với nhau.

Từ đó suy ra $\frac{MD}{ME} = \frac{BD}{CE}$. Vì H là trực tam của tam giác ABC nên ta có $\widehat{HBA} = 90^0 - \widehat{BAC} = \widehat{HCA}$.

Do đó các tam giác vuông PBD và QCE đồng dạng với nhau, nên ta được $\frac{MP}{MQ} = \frac{BD}{CE}$

Kết hợp với $\frac{MD}{ME} = \frac{BD}{CE}$ ta suy ra $\frac{MD}{ME} = \frac{MP}{MQ}$ nên theo định lí Talets thì DE//PQ.

Từ đó chú ý là K, L theo thứ tự là trung điểm của DE, PQ nên theo bổ đề trên thì ba điểm M, L, K thẳng hàng. Từ đó ta suy ra được ba điểm M, I, H thẳng hàng. Điều này có nghĩa là MI luôn đi qua điểm H hay MI luôn đi qua một điểm có định.



Bài 15. Vẽ AH vuông góc với OC tại H. Xét các tam giác CAD và CEA có $\widehat{CAD} = \widehat{CEA}$ và $\widehat{ACD}$ chung.

Suy ra $\Delta CAD \backsim \Delta CEA$ nên

$\frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow CA^2 = CD.CE$.

Tam giác ACO vuông có AH là đường cao nên

$CA^2 = CH.CO$

Từ đó ta được $CH.CO = CD.CE \Rightarrow \frac{CD}{CO} = \frac{CH}{CE}$

Xét hai tam giác CDH và COE có $\frac{CD}{CO} = \frac{CH}{CE}$ và

$\widehat{DCH}$ chung, nên ta được $\Delta CDH \backsim \Delta COE$. Từ đó

suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{CEO}$

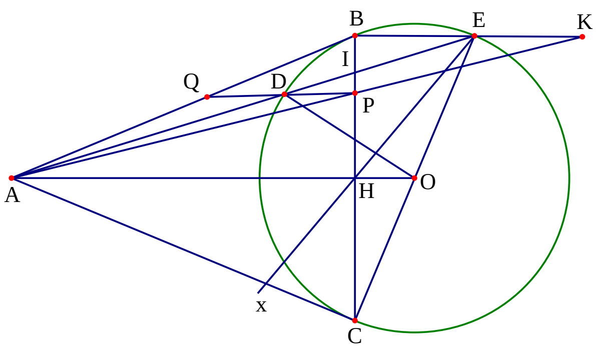
Mặt khác ta có $\widehat{ADB} = 90^0$ nên ta có

$\widehat{ADM} + \widehat{AHM} = 180^0$ nên tứ giác ADMH nội tiếp

đường tròn. Từ đó suy ra $\widehat{DAM} = \widehat{CHD}$.

Mà ta lạ có $\widehat{CEF} = \widehat{DAM}$, từ đó ta được $\widehat{CEF} = \widehat{CEO}$.

Điều này dẫn đến hai tia EF và EO trùng nhau. Vậy ba điểm E, O, F thẳng hàng.



Bài 16. Gọi H, I lần lượt là giao điểm của BC với OA, DE. Ta có AB, AC là hai tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $AB = AC$ và AO là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Do đó AO là đường cao của tam giác ABC.

Xét hai tam giác ABD và AEB có $\widehat{BAD}$ chung và $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ nên suy ra

$\Delta AEB \backsim \Delta ABD$

Từ đó ta được $AB^2 = AD.AE$

Trong tam giác ABO vuông có BH là đường cao nên $AB^2 = AH.AO$

Từ đó ta được $AD.AE = AH.AO \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$. Từ đó suy ra $\Delta AHD \backsim \Delta AEO$ nên $\widehat{AHD} = \widehat{AEO}$

Do đó tứ giác OEDH nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{OHE} = \widehat{ODE}$

Tam giác ODE có $OD = OE$ nên cân tại O, suy ra $\widehat{ODE} = \widehat{OED}$

Từ đó ta được $\widehat{OHE} = \widehat{AHD}$. Ta có $\widehat{OHE} + \widehat{EHI} = \widehat{AHD} + \widehat{IHD} = 90^0$ nên ta được $\widehat{EHI} = \widehat{IHD}$, do đó HI là tia phân giác của góc $\widehat{HED}$. Gọi Hx là tia đối của tia HE, khi đó ta có $\widehat{xHA} = \widehat{AHD} = \widehat{OHE}$

Do đó HA là đường phân giác của $\widehat{HED}$. Từ đó ta được $\frac{ID}{ED} = \frac{AD}{AE}$

Trong tam giác ABE có DQ//BE nên theo định lí Talets ta có $\frac{DQ}{BE} = \frac{AD}{AE}$. Trong tam giác IBE có BE//PD nên theo định lí Talets ta có $\frac{DP}{BE} = \frac{ID}{IE}$. Từ đó ta được $\frac{DQ}{BE} = \frac{DP}{BE}$ nên $DQ = DP$.

Trong tam giác ABE có DQ//BE nên theo định lí Talets ta có $\frac{AQ}{AB} = \frac{QD}{BE}$.

Do đó ta được $\frac{AQ}{AB} = \frac{2DQ}{2BE} = \frac{PQ}{BK}$. Hai tam giác APQ và AKB có $\frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{BK}$ và $\widehat{AQP} = \widehat{ABK}$ nên $\Delta APQ \backsim \Delta AKB$. Từ đó ta được $\widehat{QAP} = \widehat{BAK}$ nên hai tia AP và AK trùng nhau. Điều này có nghĩa là đường thẳng PK luôn đi qua điểm cố định A.

Bài 17. Bạn đọc tự vẽ hình

Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Đường thẳng DI cắt HK tại N. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng HM và DC.

Xét tam giác BHD và tam giác AKB có $BD = BA, BH = HM = AK$ nên $\Delta BHD = \Delta AKB$

Từ đó suy ra BK vuông góc với HD tại E. Hoàn toàn tương tự ta được CH vuông góc với KD tại F.

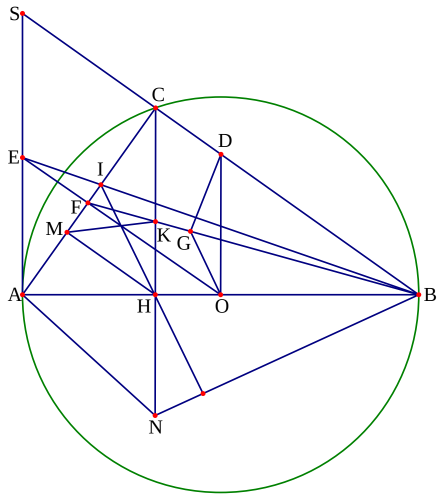
Trong tam giác DHK có hai đường cao KE và HF cắt nhau tại I nên DN vuông góc với KH.

Mặt khác ta dễ thấy $\Delta PDM = \Delta MHK$ nên ta được $\widehat{PMD} = \widehat{MKH}$. Từ đó suy ra MD vuông góc với HK.

Như vậy MD và DI cùng vuông góc với HK nên ba điểm M, I, D thẳng hàng.

Điều này có nghĩa là MI luôn đi qua điểm D cố định.

Bài 18. Gọi F là giao điểm của O và AC, S là giao điểm của AE và BC. Khi đó dễ dàng thấy được E, F lần lượt là trung điểm của AS và AC. Hai tam giác AHI và CNB có $\widehat{HAI} = \widehat{NCB}$ và $\widehat{AHI} = \widehat{CNB}$ nên $\Delta AHI \backsim \Delta CNB$. Do đó ta được $\frac{IA}{CB} = \frac{AH}{CN}$.



Tứ giác AMKN nội tiếp nên $CK.CN = CM.CA$

Lại có $CH^2 = CM.CA$ và $CH^2 AH.BH$

Do đó ta được $CK.CN = AH.BH \Rightarrow \frac{AH}{CN} = \frac{CK}{BH}$

Từ đó ta được $\frac{AI}{CB} = \frac{CK}{BH} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{CK}{AI}$

Lại có $CB^2 = BH.AB$ nên $\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB}$ do đó ta được $\frac{CK}{AI} = \frac{BC}{AB}$

Mà ta lại có $\widehat{KCB} = \widehat{IAB}$ nên ta được $\Delta CBK \backsim \Delta ABI$

Từ đó suy ra $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$ nên ta được $\widehat{CBK} = \widehat{ABE}$

Ta có $\Delta BCA \backsim \Delta BAS$ mà E, F lần lượt là trung điểm của AS, AC nên suy ra $\Delta BCF \backsim \Delta BAE$

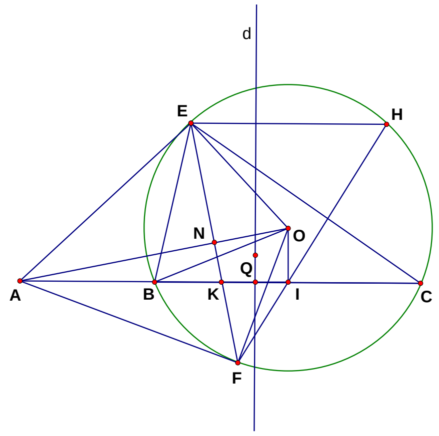
Suy ra $\widehat{CBF} = \widehat{ABE}$, kết hợp với $\widehat{CBK} = \widehat{ABE}$ ta được $\widehat{CBK} = \widehat{CBF}$, suy ra hai tia BK, BF trùng nhau. Do đó ba điểm B, K, F thẳng hàng.

Ta có $\Delta ODG \backsim \Delta HCF$ nên ta được $\frac{DG}{CF} = \frac{OD}{HC}$ và $\Delta BOD \backsim \Delta BHC$ nên ta được $\frac{OD}{HC} = \frac{BD}{BC}$

Do đó ta được $\frac{DG}{DF} = \frac{BD}{BC}$, mà ta lại có $\widehat{GDB} = \widehat{FCB}$ nên $\Delta DGB \backsim \Delta CFB$

Từ đó ta suy ra $\widehat{DBG} = \widehat{CBF} \Rightarrow \widehat{CBG} = \widehat{CBF}$, do đó hai tia BG và BF trùng nhau, suy ra ba điểm B, G, F thẳng hàng. Do đó ta được B, G, K, F thẳng hàng nên ba điểm B, G, K thẳng hàng. Mà B cố định nên đường thẳng GK luôn đi qua điểm B cố định.

Bài 19. a) Ta có năm điểm A, E, O, I, F cùng thuộc một đường tròn đường kính AO



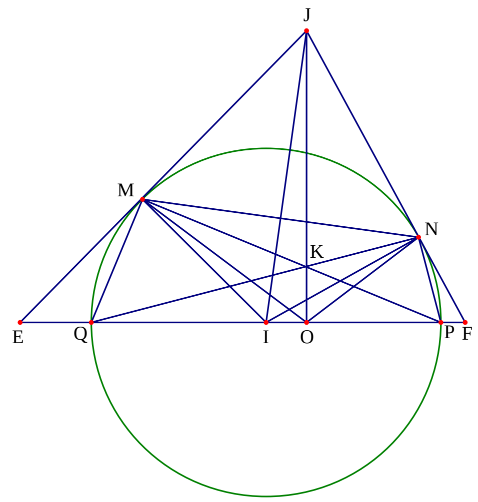
Nên $\widehat{AEF} = \widehat{AIF}$ mà $\widehat{AEF} = \widehat{EHF}$ và $\widehat{AIF} = \widehat{HIC}$, do vậy $\widehat{HIC} = \widehat{EHF}$ suy ra EH song song với BC.

b) Tam giác ABF đồng dạng với tam giác AFC nên ta có $AF^2 = AB.AC$. Trong tam giác vuông AFO vuông tại F và đường cao FN ta có $AF^2 = AN.AO$ nên $AN.AO = AB.AC$

(không đổi do A, B, C là ba điểm cố định)

c) Gọi EF cắt AB tại K, dễ thấy bốn điểm K, N, O, I cùng thuộc một đường tròn nên đường tròn qua I, N, O cũng đi qua K. Ta chứng minh được Tam giác AOI đồng dạng với tam giác AKN nên có $AN.AO = AK.AI$, do AI và $AN.AO$ không đổi nên K cố định nên đường tròn qua I, N, O có tâm nằm trên trung trực của IK cố định. Từ đó suy ra tâm đường tròn qua ba điểm O, I, N luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 20. + Nếu K thuộc các đoạn thẳng MP và NQ. Khi đó gọi I' là là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp tam giác MON. Do đường thẳng d là phân giác ngoài của góc $\widehat{xOy}$ nên I' chính là điểm chính giữa cung $\widehat{MON}$, suy ra $I'M = I'N$ hay I' chính là giao điểm của d với đường trung trực của MN. Từ đó suy ra hai điểmI và I' trùng nhau. Do đó tứ giác MION nộ tiếp được, suy ra ta có $\widehat{NIO} = \widehat{NMO}$. Theo giả thiết $IM = IN = IP = IQ$ ta được tứ giác MNPQ nội tiếpđường tròn tâm I, đường kính PQ nên ta có $\widehat{PIN} = 2\widehat{PMN}$.



Từ các điều trên ta được $\widehat{NMO} = 2\widehat{PMN}$ nên MP là phân giác của góc $\widehat{OMN}$

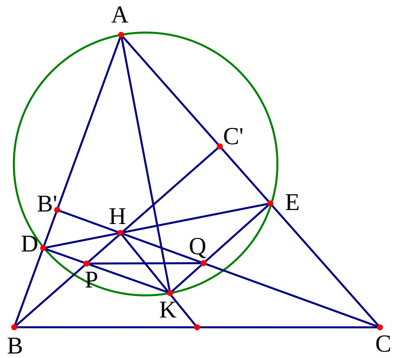
Tương tự ta cũng được NQ là phân giác của góc $\widehat{ONM}$

Do K là giao điểm của MP và NQ nên K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MON, suy ra K thuộc đường phân giác của góc $\widehat{xOy}$, tức là K thuộc một đường thẳng cố định.

+ Nếu giao điểm K nằm ngoài các đoạn thẳng MP và NQ, lập luận tương tự ta được K là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác OMN, tức là K thuộc đường phân giác ngoài của góc $\widehat{xOy}$ nên K cũng thuộc một đường thẳng cố định.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có K cũng thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 21. Trước hết ta chứng minh tam giác ADE cân tại A.



Thật vậy, vì HD là phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ nên ta có

$$\widehat{DHB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{HBC} + \widehat{HCB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(90^0 - \widehat{ABC}\right) + \left(90^0 - \widehat{ACB}\right)\right] = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Do đó ta được

$$\widehat{ADE} = \widehat{DBH} + \widehat{DHB} = 90^0 - \widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Tương tự ta cũng có $\widehat{AED} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, từ đó suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$ hay tam giác ADE cân tại E.

Mặt khác ta có AK là phân giác của góc $\widehat{DAE}$ nên cũng là đường trung trực của đoạn DE, từ đó suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Từ đó ta có $KD \perp AB$, tương tự $KE \perp AC$.

Gọi P là giao điểm của KD và HB, Q là giao điểm của KE và HC. Ta có $KP \perp AB$ và $HQ \perp AB$, từ đó suy ra KP//HQ. Tương tự ta cũng được KQ//HP, do đo tứ giác KPKQ là hình bình hành.

Gọi BB′ và CC′ là các đường cao của tam giác ABC, ta có DP//HC′ và QE//HB′ nên theo định lí Talet ta có $\frac{PB}{PH} = \frac{DB}{DC'}; \frac{QC}{QH} = \frac{EC}{EB'}$ và theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{DB}{DC'} = \frac{HB}{HC'}; \frac{EC}{EB'} = \frac{DB}{HB'}$

Vì B, C, B′, C′ cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên ta được $\Delta BHC' \backsim \Delta CHB'$

Từ đó ta được $\frac{HB}{HC'} = \frac{HC}{HB'}$. Kết hợp với các kết quả trên ta được $\frac{PB}{PH} = \frac{QC}{QH}$, nên theo định Talet ta được PQ song song với BC. Do HK đi qua trung điểm của PQ nên HK cũng đi qua trung điểm của BC. Do BC cô định nên trung điểm của BC cô định. Vậy đường thẳng KH luôn đi qua một điểm cô định.

Bài 22. Vì hai tam giác vuông ABC và MNP đồng dạng với nhau nên các góc nhọn tương ứng bằng nhau. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Điểm N nằm trên cạnh AC. Khi đó tứ giác ANMP nội tiếp đường trong nên điểm A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Mặt khác ta có $\widehat{MAB} = \widehat{MNP} = \widehat{ABC}$ nên tam giác MBA cân tại M. Từ dó ta được tam giác MAC cân tại M. Suy ra M là trung điểm của BC

+ Trường hợp 2: Điểm N nằm trên cạnh AB. Khi đó tứdgiacs ANMP nội tiếp nên

$\widehat{MAP} = \widehat{MNP} = \widehat{ABC}$

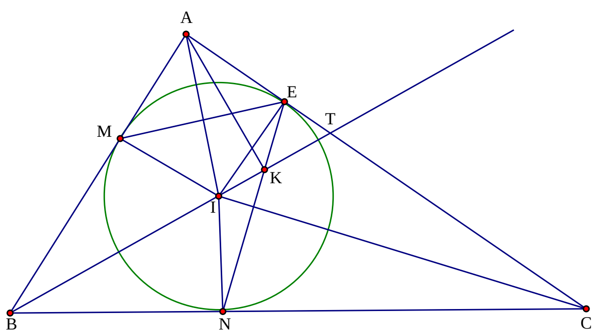
Mặt khác ta lại có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$ nên ta được $\widehat{MAC} + \widehat{ACB} = 90^0$. Từ đó AM vuông góc với BC.

Như vậy trong cả hai trương hợp thì M luôn là điểm cố định nên đường trong ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 23.

a) Xét tam giác AIB ta có

$$\widehat{AIB} = 180^0 - \left(\widehat{IAB} + \widehat{IBA}\right) = 180^0 - \left(\frac{\widehat{BAC} + \widehat{CBA}}{2}\right) = 180^0 - \frac{180^0 - \widehat{C}}{2} = 90^0 + \frac{\widehat{C}}{2}.$$



b) Dễ dàng chứng minh được tứ giác AMIE nội tiếp. Chứng minh được tứ giác AMIK nội tiếp.

Do đó 5 điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh được $\Delta AKT \backsim \Delta IET \Rightarrow \frac{KT}{ET} = \frac{AK}{IE}$ và $\Delta AKB \backsim \Delta INB \Rightarrow \frac{KB}{BN} = \frac{AK}{IN}$

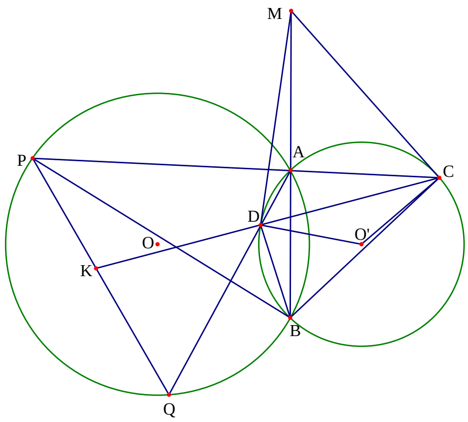
Do $IE = IN$ nên ta được $\frac{KT}{ET} = \frac{KB}{BN} \Rightarrow KT.BN = KB.ET$.

d) Do A, B và tia Bt cố định nên ta có tia Bx cố định và $\widehat{ABI} = \alpha$ không đổi (tia Bx là tia phân giác của $\widehat{ABt}$). Xét $\Delta\, ABK$ vuông tại K ta có $KB = AB.\cos\widehat{ABI} = AB.\cos\alpha$ không đổi

Như vậy điểm K thuộc tia Bx cố định và cách gốc B một khoảng không đổi do đó K cố định. Vậy các đường thẳng NE tương ứng luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 24. a) Ta có $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$ mà $\widehat{BAD} = \widehat{BPQ}$ suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{BPQ}$.

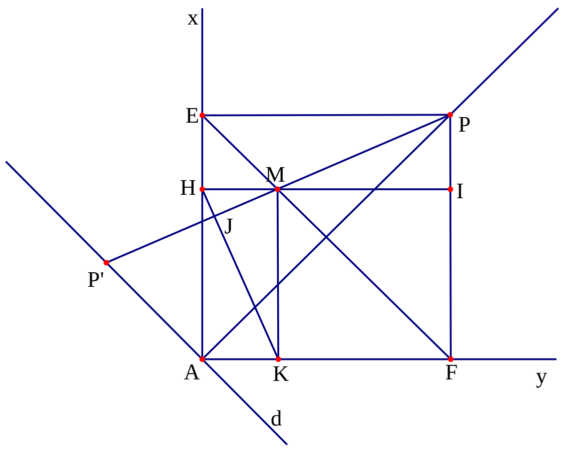
Mặt khác ta lại có $\widehat{BQP} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{ADC}$, suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{BQP}$. Do đó $\Delta ACD \backsim \Delta BPQ$.



b) Từ chứng minh trên ta được $\widehat{BPK} = \widehat{BCK}$ nên tứ giác BKPC nội tiếp. Từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác CKP đi qua điểm B có định

Bài 25. Ta xét hai trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1: Hai điểm M và P nằm cùng phía so với HK. Khi đó điểm P nằm trong góc $\widehat{xAy}$.



Từ điểm P hạ PE vuông góc với Ay với E thuộc tia Ax và hạ PF vuông góc với Ax với F thuộc Ay.

Kéo dài HM cắt PF tại I.

Hai tam giác vuông MP và KMH có

$KH = PM$ và $\widehat{HKM} = \widehat{PMI}$ nên ta được

$\Delta MIP = \Delta KMH$

Từ đó ta được $MI = KM = PM$ và

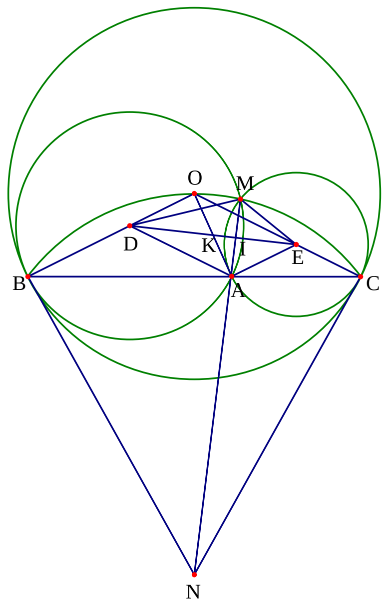
$PI = MH = KA$ nên suy ra $PF = AF$ hay

$PF = PE$

Từ đó suy ra P thuộc tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$.

+ Trường hợp 2: Hai điểm M và P nằm khác phía so với HK. Khi đó lấy điểm P_1 đối xứng với P qua M thì ta được $MP = MP_1 = MA$ nên tam giác APP_1 vuông tại A. Từ đó suy ra P thuộc đường thẳng d vuông góc với tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$

Bài 26. Do đường tròn (O) và đường tròn tâm D tiếp xúc với nhau tại D nên ba điểm O, B, D thẳng hàng. Đường tròn (O) và đường tròn tâm E tiếp xúc nhau tại C nên ba điểm O, E, C thẳng hàng.



Khi đó ta có $\widehat{DBA} = \widehat{DAB}$, $\widehat{DBA} = \widehat{ECA}$ và $\widehat{EAC} = \widehat{ECA}$ nên ta được $\widehat{DBA} = \widehat{EAC}, \widehat{DAB} = \widehat{ECA}$

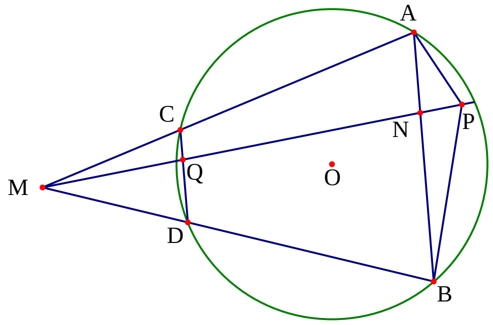
Từ đó dẫn đến OB//AE và DA//OE. Suy ra tứ giác ADOE là hình bình hành. Gọi K là tâm của hình bình hành ADOE nên K là trung điểm của AO và DE. Hai đường tròn tâm E và tâm D cắt nhau tại M và A nên MA là đường trung trực của đoạn thẳng DE. Gọi I là giao điểm của DE và AM, khi đó IK là đường trung bình của tam giác AMO, do đó K//MO. Từ đó ta được tứ giác DOME là hình thang. Mà ta có $DM = OE$ nên hình thang DOME cân. Do đó tứ giác DOME nội tiếp đường tròn.

Xét hai tam giác MBC và ADE có $\widehat{MBC} = \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{ADM}$ và $\widehat{MCB} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{AEM}$

Do đó ta được $\Delta MBC \backsim \Delta ADE$ nên suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{DAE} = \widehat{BOC}$ không đổi

Do BC cố định nên M thuộc cung chứa góc $\widehat{BOC}$ không đổi

Bài 27. a) Gọi P là giao điểm khác M của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB với MN. Ta sẽ chứng minh điểm P cố định.



Thật vậy, ta có $NP.MN = NA.NB$ nên ta được $NP = \dfrac{NA.NB}{MN} = \dfrac{R^2 - OM^2}{MN}$ là hằng số với R là bán kính của đường tròn (O). Mà đường thẳng MN cố định nên P cố định.

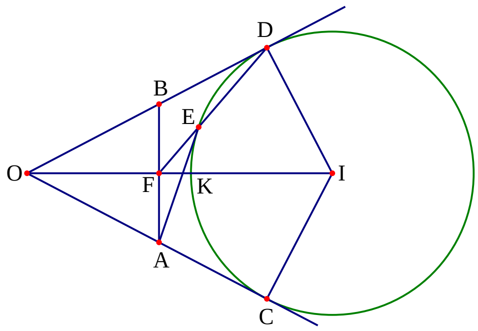
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB luôn đi qua điểm cố định.

b) Do tứ giác ABCD nội tiếp nên ta có $\widehat{MCD} = \widehat{MBA}$ và do tứ giác MAPM nội tiếp nên $\widehat{MBA} = \widehat{MPA}$, do đó ta được $\widehat{MCD} = \widehat{MPA}$. Gọi Q là giao điểm của CD với MN. Ta có tứ giác CAPQ nội tiếp nên $MQ.MP = MA.MC$.

Từ đó suy ra $MQ = \dfrac{MC.MA}{MP} = \dfrac{OM^2 - R^2}{MP}$ là hằng số.

Mà MN cố định nên Q là điểm cố định. Do vậy đường thẳng CD luôn di qua điểm Q cố định.

Bài 28. Lấy điểm B thuộc tia Oy sao cho $OB = OA$. Gọi F là giao điểm của DE với AB, gọi K là giao điểm của OI và CD. Để cứng minh F cố định ta sữ chứng minh điểm F thuộc OI.



Gọi C là tiếp điểm của Ox với đường tròn (O).

Ta xét các trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1: Nếu điểm A thuộc đoạn OC và E nằm trên cung DK. Khi đó ta có

$$\widehat{FAC} = 180^0 - \widehat{OAB} = 90^0 + \frac{\widehat{xOy}}{2} \text{ và } \widehat{FEC} = \frac{1}{2}\widehat{DIC} = 90^0 - \frac{\widehat{xOy}}{2}$$

Do đó ta được $\widehat{FAC} + \widehat{FEC} = 180^0$ nên tứ giác ACEF nội tiếp đường tròn, suy ra đa giác ACIEF nội tiếp đường tròn. Do đó ta được $\widehat{AFI} = 90^0$ suy ra F thuộc OI.

+ Trường hợp 2: Nếu điểm A thuộc đoạn OC và E nằm trên cung CK. Khi đó chứng minh tương tự ta cũng được điểm F thuộc OI.

+ Trường hợp 3: Nếu điểm A không thuộc đoạn OC. Khi đó chứng minh tương tự như trên ta cũng được điểm F thuộc OI.

Bài 29. Trước hết ta chứng minh $\widehat{O_1PO_2}$ không đổi.

Thật vậy, góc $\widehat{O_1PO_2}$ không đổi khi cà chỉ khi $\widehat{O_1MN}+\widehat{O_2NM}$ không đổi.

Hay $\widehat{O_1MB}+\widehat{O_2NB}+\widehat{BMN}+\widehat{BNM}$ không đổi. Điều này tương đương với

$\widehat{O_1BM}+\widehat{O_2BN}+180^0-\alpha$ không đổi hay $\widehat{O_1BO_2}+180^0-2\alpha$ không đổi. Do đó ta được

$\widehat{O_1PO_2}$ không đổi.

Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PO_1O_2 cố định.

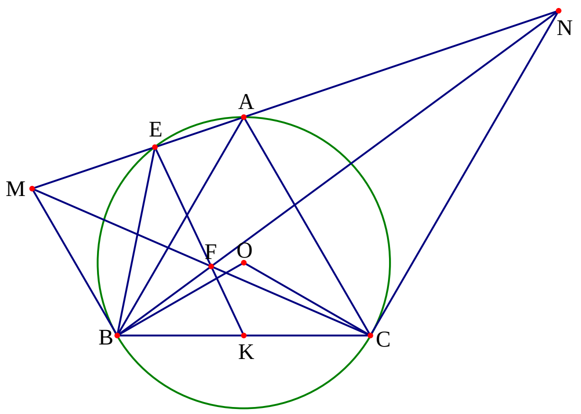
Gọi Q là giao diểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN và tam giác PO_1O_2.

Khi đó ta được $\widehat{MO_1Q}=\widehat{NO_2Q}$ và $\widehat{PMQ}=\widehat{PNQ}$ nên ta được $\widehat{QMO_2}=\widehat{QNO_2}$.

Do đó hai tam giác MO_1Q và NO_2Q đồng dạng nên $\dfrac{QO_1}{QO_2}=\dfrac{MO_1}{NO_2}$.

Kết hợp với đường tròn ngoại tiếp tam giác PO_1O_2 cố định ta suy ra điểm Q cố định.

Bài 30.



a Ta có $\widehat{MBA}=\widehat{ACN}$, lại có $\widehat{ACN}=\widehat{BAC}=60^0$ nên AB//CN

Suy ra $\widehat{MAB}=\widehat{ANC}$ nên ta có tam giác ACN và tam giác MBA đồng dạng với nhau.

Suy ra $\dfrac{AC}{MB}=\dfrac{CN}{AB}$, vì $AB=AC=BC$ nên có $BM.CN=BC^2$.

b) Dễ chứng minh được $\widehat{MBC}=\widehat{BCN}=120^0$

Lại từ $\dfrac{AC}{MB}=\dfrac{CN}{AB}$ ta có $\dfrac{BC}{MB}=\dfrac{CN}{BC}$ nên tam giác MBC đồng dạng với tam giác BCN, do đó $\widehat{BMC}=\widehat{CBF}$. Suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF.

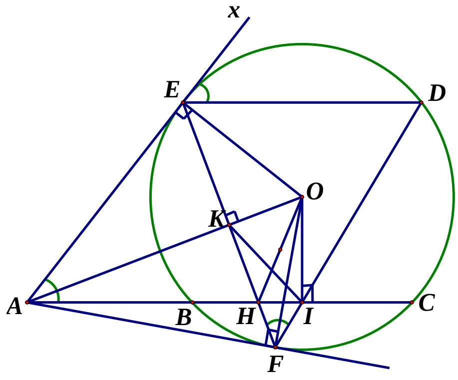
c) Ta có $\widehat{BMC}=\widehat{CBF}$. Trong tam giác MBC có góc $\widehat{MBC}=120^0$ nên $\widehat{FBC}+\widehat{FCB}=60^0$

Lại có $\widehat{MFB}=\widehat{FBC}+\widehat{FCB}$ (góc ngoài tam giác BFC) nên $\widehat{MFB}=\ 60^0$

Mặt khác tứ giác AEBC nội tiếp nên $\widehat{MEB}=\widehat{ACB}=60^0$ .Suy ra $\widehat{MEB}=\widehat{MFB}\left(=60^0\right)$ nên tứ giác MBFE nội tiếp. Vậy có $\widehat{BEK}=\widehat{BMF}$. Gọi EF cắt BC tại K. Ta có tam giác EBK đồng dạng với tam giác BFK vì có $\widehat{BEK}=\widehat{BMF}=\widehat{FBK}$ và $\widehat{EKB}$ chung. Từ đó suy ra $KB^2=KE.KF$. Chứng minh tương tự ta có $KC^2=KE.KF$ nên $KB=KC$ do đó K là trung điểm của BC(cố định). Vậy có điều phải chứng minh.

Bài 31. a) Có $OE\perp AE$ và $OI\perp BC$ hay $OI\perp AI$

Suy ra bốn điểm A, E, O, I cùng thuộc một đường tròn. Đường kính của đường tròn này là AO.



b) Gọi Ex là tia đối của tia EA. Ta có $\widehat{xED}=\widehat{EFD}$

Do 5 điểm A, E, O, I, F cùng thuộc đường tròn đường kính AO nên ta được $\widehat{EAI}=\widehat{EFI}$. Từ đó ta được $\widehat{xED}=\widehat{EAI}$ suy ra ED//AC.

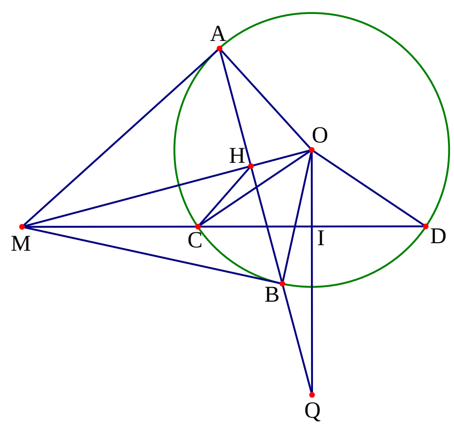
c) Gọi giao điểm của EF và BC là H.

Ta có $\Delta AIO\backsim\Delta AKH$, $\Delta AKF\backsim\Delta AFO$ và $\Delta ABF\backsim\Delta AFC$

Khi đó ta có $AH.AI=AK.AO=AF^2=AB.AC\Rightarrow AH=\dfrac{AB.AC}{AI}$ không đổi (A,B,C,I cố định) $\Rightarrow H$ cố định. Tứ giác OKHI nội tiếp, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác OKI đi qua H và I cố định.

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OKI nằm trên đường trung trực của HI là một đường thẳng cố định.

Bài 32. a) Ta có MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên ta được $\widehat{MAO}=\widehat{MBO}=90^0$



Do I là trung điểm của CD

$\Rightarrow OI\perp CD\Rightarrow\widehat{MIO}=90^0$

nên A, I, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO. Suy ra tứ giác MAIB nội tiếp đường tròn đường kính MO.

b) Ta có MA = MB và OA = OB nên MO là đường trung trực của AB nên MO ⊥ AB. Do đó

$MH.MO=MB^2$

Lại có $\widehat{MBC} = \widehat{MBD} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC}$, do đó ta được

$\Delta MBC \backsim \Delta MDB$

$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MC.MD = MB^2$

Từ đó ta được $MH.MO = MC.MD$. Suy ra $\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD} \Rightarrow \Delta MCH \backsim \Delta MOD \Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

Suy ra tứ giác CHOD nội tiếp, do đó H thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCOD.

c) Gọi Q là giao điểm của AB và OI. Hai tam giác vuông MIO và QHO có $\widehat{IOH}$ chung

Do đó $\Delta MIO \backsim \Delta QHO \Rightarrow \frac{MO}{OI} = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OQ = \frac{MO.OH}{OI} = \frac{OA^2}{OI} = \frac{R^2}{OI}$ (R là bán kính (O) không đổi). Do O, I cố định nên độ dài OI không đổi, lại có Q thuộc tia OI cố định nên Q là điểm cố định.

d) Ta có $\widehat{AHC} = 90^0 + \widehat{MHC} = 90^0 + \widehat{ODC} = 90^0 + \frac{180^0 - \widehat{COD}}{2}$ (ΔCOD cân tại O)

$$= 180^0 - \frac{1}{2}\widehat{COD} = \frac{1}{2}\left(360^0 - sd\overset{\frown}{CB}\right) = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{CAD} = \widehat{CBD}$$

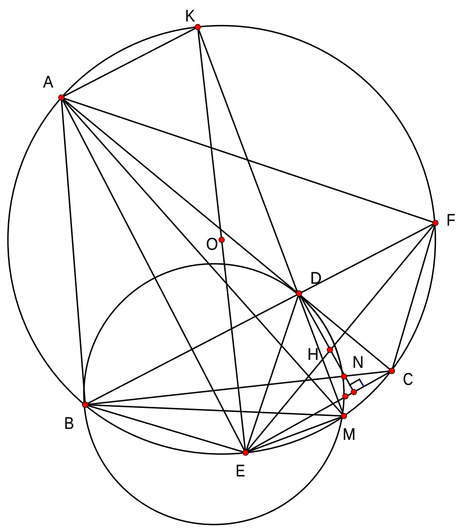
Lại có $\widehat{CAH} = \widehat{CDB}$. Từ đó ta được $\Delta AHC \backsim \Delta DBC \Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{BD}{BC}$

Ta có $\Delta MBC \backsim \Delta MDB \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \frac{MD}{MB}.\frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MC}$

Do đó suy ra ta được $\frac{MD}{MB} = \frac{HA^2}{HC^2}$.

Bài 33. a) Tứ giác ABEC nội tiếp nên suy ra được $\widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 180^0$. Mà $\widehat{EDC} = \widehat{ACE}$ và $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 180^0$ nên $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$. Kết hợp với $\widehat{BAE} = \widehat{DAE}$ suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$. Mặt khác $EB = EC = ED$ nên AE là trung trực của đoạn BD. Do đó ta được $AE \perp BF$ (1) và

$AB = AD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB}$.



Kết hợp với $\widehat{ABD} = \widehat{DCF}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{FDC}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\widehat{FDC} = \widehat{FCD} \Rightarrow$ tam giác FDC cân tại F.

Do đó FD = FC. Kết hợp với ED = EC nên ta được EF là trung trực của DC suy ra $DC \perp EF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra D là trực tâm của tam giác

AEF.

b) Kẻ đường kính EK của (O; R). Khi đó điểm K cố định.

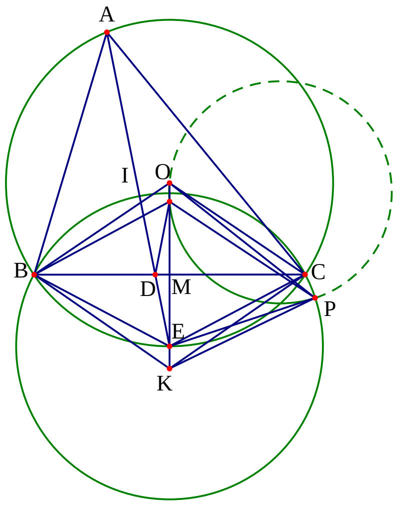
Tứ giác BDNM nội tiếp nên $\widehat{BMD} = \widehat{BND} \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^o - \widehat{BCE} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (3)

Tứ giác ABMK nội tiếp nên $\widehat{BMK} = 180^0 - \widehat{BAK}$.

Mà $\widehat{BAK} = \widehat{BAE} + \widehat{EAK} = 90^o + \frac{1}{2}\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BMK} = 90^o - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (4)

Từ đó suy ra $\widehat{BMD} = \widehat{BMK}$. Suy ra ba điểm M, D, K thẳng hàng. Do đó MD luôn đi qua điểm K cố định.

Bài 34. a) Xét tam giác BEF và OBE có $\widehat{OEB}$ chung nên



$\Delta BEF \backsim \Delta OBE$, từ đó suy ra $EB^2 = EF.OE$

b) Do $\Delta BDE \backsim \Delta ABE$ nên ta được

$EB^2 = EA.ED = EF.OE$

c) Ta có

$\widehat{BIE} = \widehat{BAI} + \widehat{BIA} = \widehat{IAC} + \widehat{IBC} = \widehat{EBC} + \widehat{IBC} = \widehat{IBE}$ do đó tam giác EBI cân tại E nên ta được $EI = EB = EC$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI

Do $EP^2 = EB^2 = FE.EO$ nên

$\Delta EFP \backsim \Delta POE \Rightarrow \widehat{FPE} = \widehat{POE}$

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PFO

Vẽ tiếp tuyến Px tiếp xúc với đường tròn K tại P, ta được $\widehat{FPx} = \widehat{FOP} = \widehat{EOP} = \widehat{FPE}$ do đó Px trùng với PE nên Px đi qua điểm E cố định.