ĐÁP ÁN CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, CỰC TRỊ TRONG ĐỀ CHUYÊN MÔN TOÁN GIAI ĐOẠN 2009-2019

NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2019-2020]

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=17x^2+17y^2+16xy$

Lời giải

Ta có: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1 \Leftrightarrow 4(x+y)^2+9xy+5(x+y)\ge 1$

Đặt $t=x+y, t>0$, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{t^2}{4}$. Do đó: $4t^2+\dfrac{9}{4}t^2+5t\ge 1\Rightarrow t\ge\dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}$ hay $x+y\ge\dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}$.

Ta có: $P=17x^2+17y^2+16xy=17(x+y)^2-18xy$

$$\ge 17(x+y)^2-18\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{25}{4}(x+y)^2\ge\frac{25}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{5}\right)^2=6-4\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $6-4\sqrt{2}$

Câu 2: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2019-2020]

Cho các số thực x, y thay đổi, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=xy(x-2)(y+6)+13x^2+4y^2-26x+24y+46$

Lời giải

Ta có:

$$P=xy(x-2)(y+6)+13x^2+4y^2-26x+24y+46$$
$$=(x^2-2x)(y^2+6y)+13(x^2-2x)+4(y^2+6y)+46$$
$$=\left[(x-1)^2-1\right]\left[(y+3)^2-9\right]+13\left[(x-1)^2-1\right]+4\left[(y+3)^2-9\right]+46$$

Đặt $a=x-1, b=y+3$, khi đó:

$$P=(a^2-1)(b^2-9)+13(a^2-1)+4(b^2-9)+46$$
$$=a^2b^2-9a^2-b^2+9+13a^2-13+4b^2-36+46$$

$= 4a^2 + 3b^2 + a^2b^2 + 6$

≥ 6

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, y = -3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Câu 3: [TS10 Chuyên Tin Hà Nội, 2019-2020]

Cho a, b, c dương thỏa mãn: $ab + bc + ca + abc = 4$

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất: $P = \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 4} + \frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)} + 4} + \frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)} + 4}$.

Lời giải

1) Ta có:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$$
$$\Leftrightarrow (b+2)(c+2) + (a+2)(c+2) + (b+2)(a+2) = (a+2)(b+2)(c+2)$$
$$\Leftrightarrow ab + bc + ca + 4(a+b+c) + 12 = abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8$$
$$\Leftrightarrow 4 = ab + bc + ca.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng theo giả thiết, các phép biến đổi là tương đương, do đó đẳng thức đã cho được chứng minh.

2) Với x, y dương ta có bất đẳng thức:

$2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$ (*)

$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ (**)

Thật vậy:

$(*) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

$(**) \Leftrightarrow \frac{x+y}{4xy} \geq \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Các bất đẳng thức (*), (**) xảy ra dấu "=" khi x = y.

Lần lượt áp dụng (*) và (**) ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 4} \leq \frac{1}{a+b+4} = \frac{1}{(a+2)+(b+2)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)} + 4} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}\right); \quad \frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)} + 4} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+2} + \frac{1}{a+2}\right);$$

Cộng theo vế ta được:

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}.$$

Dâu "=" xảy ra khi a = b = c

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$

Câu 4: [TS10 Chuyên Toán Hà Nội, 2019-2020]

Cho $K=ab+4ac-4bc$ với $a,b,c \ge 0$ và $a+b+2c=1$.

1) Chứng minh rằng: $K \ge \frac{1}{2}$

2) Tìm giá trị lớn nhất của K.

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4bc \le 2\left(\frac{b+2c}{2}\right)^2 \le 2\left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2=\frac{1}{2} \Rightarrow -4bc \ge -\frac{1}{2}$$

Mặt khác: $a,b,c \ge 0 \Rightarrow K=ab+4ac-4bc \ge -4bc \ge -\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=0, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$.

Cách khác:

Ta có:

$$K=ab+4c(a-b)=ab+2(1-a-b)(a-b)$$
$$=ab+2(a-b)-2(a^2-b^2)$$
$$=2b^2+(a-2)b+2a-2a^2$$

Do đó: $2b^2+(a-2)b+2a-2a^2-K=0 \ (*)$

Để tồn tại K thì phương trình (*) Phải có 2 nghiệm:

$\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow (a-2)^2-4.2.(2a-2a^2-K) \ge 0$

$\Leftrightarrow 8K \ge 20a-17a^2-4.$

Vì $a,b,c \ge 0$ và $a+b+2c=1 \Rightarrow 0 \le a \le 1$. Do đó:

$2a-17a^2=a(20-17a) \ge a(20-17.1)=3a \ge 0$

Do đó $8K \ge -4 \Rightarrow K \ge -\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=0, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$.

2) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a(b+2c) \le \left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Mặt khác:

$$a,b,c\ge 0\Rightarrow K=ab+4ac-4bc\ge ab+4ac\le 2ab+4ac=2a\left(b+2c\right)\le \frac{\left(a+b+2c\right)^2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$a=b+2c,a+b+2c=1,bc=0,ab=0\Rightarrow a=\frac{1}{2},b=0,c=\frac{1}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của K là $\frac{1}{2}$

Câu 5: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2019-2020]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} 0<a,b,c<\frac{1}{2} \\ 2a+3b+4c=3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2}{a\left(3b+4c-2\right)}+\frac{9}{b\left(4a+8c-3\right)}+\frac{8}{c\left(2a+3b-1\right)}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}P&=\frac{2}{a\left(3b+4c-2\right)}+\frac{9}{b\left(4a+8c-3\right)}+\frac{8}{c\left(2a+3b-1\right)}\\&=\frac{2}{a\left(3-2a-2\right)}+\frac{9}{b\left(6-6b-3\right)}+\frac{8}{c\left(3-4c-1\right)}\\&=\frac{2}{a\left(1-2a\right)}+\frac{3}{b\left(1-2b\right)}+\frac{4}{c\left(1-2c\right)}\\&=\frac{2a}{a^2\left(1-2a\right)}+\frac{3b^2}{b^2\left(1-2b\right)}+\frac{4c}{c^2\left(1-2c\right)^2}\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2\left(1-2a\right)\le\left(\frac{a+a+1-2a}{3}\right)^2=\frac{1}{27}$$

Tương tự: $b^2\left(1-2b\right)\le\frac{1}{27}$; $c^2\left(1-2c\right)\le\frac{1}{27}$

Suy ra: $P\ge 27\left(2a+3b+4c\right)=81$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 81.

Câu 6: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2019-2020]

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: a + b = 4ab. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}\ge\frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có:

$$a+b=4ab\le (a+b)^2 \Leftrightarrow (a+b)\left[a+b-1\right]\ge 0 \Leftrightarrow a+b\ge 1 (a+b>0)$$

Lại có:

$$\frac{a}{4b^2+1}=a-\frac{4ab^2}{4b^2+1}\ge a-\frac{4ab^2}{4b}=a-ab$$

$$\frac{b}{4a^2+1}=b-\frac{4a^2b}{4a^2+1}\ge b-\frac{4a^2b}{4a}=a-ab$$

Do đó: $\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}\ge (a+b)-2ab=(a+b)-\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(a+b)\ge \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$

Câu 7: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2019-2020]

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2\le 3y$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\ge \frac{8}{(a+b)^2} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge \frac{8}{\left(x+\frac{y}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge \frac{64}{\left(x+\frac{y}{2}+z+5\right)^2}.$$

Mặt khác:

$$x+z\le \sqrt{2(x^2+z^2)}\le \sqrt{2(3y-y^2)}\le \frac{2+3y-y^2}{2}.$$

$$P\ge \frac{64}{\left(6+2y-\frac{1}{2}y^2\right)^2}=\frac{64}{\left[8-\frac{1}{2}(y-2)^2\right]^2}\ge 1$$

Dấu "=" xẩy ra khi $(x,y,z)=(1,2,1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 8: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2019-2020]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$

Lời giải

Ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{9}{x+y+z}\ \text{(với } x,y,z>0\text{)}\quad (*)$$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

Áp dụng AM – GM ta được:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\sqrt[3]{abc}.\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}=9$$

Vậy bất đẳng thức (*) được chứng minh, dấu “=” xảy ra khi x = y = z.

Sử dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$1\ge \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge \frac{9}{a+b+c+3}\Leftrightarrow a+b+c+3\ge 9\Leftrightarrow a+b+c\ge 6$$

Đặt $Q=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$

Ta có:

$$\begin{aligned}P-Q&=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c-a)(c^2+ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}\\&=(a-b)+(b-c)+(c-a)\\&=0\end{aligned}$$

Do đó: P = Q

Mặt khác: $x^2-xy+y^2\ge \frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)\ (**)$

Thật vậy:

$$x^2-xy+y^2\ge \frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)\Leftrightarrow 3x^2-3xy+3y^2\ge x^2+xy+y^2\Leftrightarrow 2(x-y)^2\ge 0$$

Sử dụng (**) ta được:

$$\begin{aligned}P+Q&=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)(c^2-ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}\end{aligned}$$

$$\ge \frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}(c+a)$$

$$=\frac{2}{3}(a+b+c)\ge \frac{2}{3}.6=4$$

Mà $P=Q\Rightarrow P\ge 2$

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c = 2

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

Câu 9: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c dương thỏa mãn $abc=a+b+c+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$

Lời giải.

Từ $abc=a+b+c+2$

$\Leftrightarrow(a+b)(b+1)(c+1)=(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$

Đặt $\frac{1}{a+1}=x,\frac{1}{b+1}=y,\frac{1}{c+1}=z\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=1.\end{cases}$

Khi đó: $a=\frac{1-x}{x}=\frac{y+z}{x};b=\frac{z+x}{y};c=\frac{x+y}{z}$

Nên $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}.\frac{z}{x+y}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}.\frac{x}{y+z}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{y}{y+z}.\frac{x}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}.\frac{y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x}{x+y}.\frac{z}{y+z}}\right)$

$\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{y}{y+z}+\frac{x}{z+x}\right)+\left(\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}\right)+\left(\frac{x}{x+y}+\frac{z}{y+z}\right)\right]$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\right)+\left(\frac{y}{y+z}+\frac{z}{y+z}\right)+\left(\frac{z}{z+x}+\frac{x}{z+x}\right)\right]=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ khi a = b = c = 2.

Câu 10: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5\left(x^2+y^2+z^2\right)-9x(y+z)-18yz=0.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\frac{2x-y-z}{y+z}$.

Lời giải

Ta có:

$5\left(x^2+y^2+z^2\right)-9x(y+z)-18yz\le0$

$\Leftrightarrow5x^2-9x(y+z)+5(y+z)^2-28yz\le0$

$$\Leftrightarrow 5x^2-9x(y+z)+5(y+z)^2\le 7.4yz\le 7(y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-9x(y+z)-2(y+z)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y+z}\right)^2-9.\frac{x}{y+z}-2\le 0$$

Đặt: $t=\dfrac{x}{y+z}\ (t>0)$ khi đó:

$$5t^2-9t-2\le 0\Leftrightarrow (5t+1)(t-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow t\le 2\quad (\text{do } 5t+1>0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}\le 2$$

Ta có: $Q=\dfrac{2x-y-z}{y+z}=2.\dfrac{x}{y+z}-1\le 2.2-1=3$

Dấu "=" xảy ra khi $y=z=\dfrac{x}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 3.

Câu 11: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2019-2020]

Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm GTLN. GTNN của biểu thức

$$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$$

Lời giải

Ta có:

$$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$$

$$=\sqrt{(3-x)^2+16}+\sqrt{(3-y)^2+16}+\sqrt{(3-z)^2+16}$$

Đặt $a=3-x,b=3-y,c=3-z,$ Khi đó: $\begin{cases}a+b+c=6\\0\le a,b,c\le 3\end{cases}$

$$M=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+16}+\sqrt{c^2+16}$$

Tìm GTNN:

Theo bất đẳng thức Minkowski ta có:

$$M=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+16}+\sqrt{c^2+16}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+(4+4+4)^2}=6\sqrt{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 2

Tìm GTLN

Sử dụng phương pháp UCT với điều kiện $0\le a\le 3$ ta được $\sqrt{a^2+16}\le\dfrac{a+12}{3}\ (*)$

Thật vậy:

$$(*)\Leftrightarrow 9\left(a^2+16\right)\le(a+12)^2\Leftrightarrow 8a^2-24a\le 0\Leftrightarrow a(a-3)\le 0\ (\text{đúng})$$

Hoàn toàn tương tự và suy ra: $M \le 14$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=(0,3,3)$ và các hóa vị.

Câu 12: [TS10 Chuyên KHTN, 2019-2020]

Cho x, y,z là các số dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3 \qquad (1)$$

Lời giải

Ta có: $1+x^2 = xy+yz+zx+x^2 = (x+y)(x+z)$

Tương tự: $1+y^2 = (x+y)(y+z); 1+z^2 = (x+z)(y+z)$

Do đó:

$$VT_{(1)} = \frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(x+y)(y+z)}+\frac{1}{(x+z)(z+y)} = \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 \le (x+y+z)\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)$$

$$=(x+y+z)\left[\frac{x}{(x+y)(y+z)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}+\frac{z}{(x+z)(z+y)}\right]$$

$$=\frac{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Suy ra:

$$VP_{(1)} \le \frac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Như thế để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)$$

Tương tự: $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right); \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức (2). Bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 13: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$.

a) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 < 6$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Lời giải

a) Ta có:

$$\left(2-x\right)\left(2-y\right)\left(2-z\right) \ge 0 \Rightarrow 8 - 4\left(x+y+z\right) + 2\left(xy+yz+zx\right) - xyz \ge 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le x^2 + y^2 + z^2 + 8 - 4\left(x+y+z\right) + 2\left(xy+yz+zx\right) - xyz$$

$$= \left(x+y+z\right)^2 - 4\left(x+y+z\right) + 8 - xyz$$

$$= 9 - 4.3 + 8 - xyz = 5 - xyz \le 5 < 6$$

b) Ta có:

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

$$= 3\left[\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+2xy+yz+zx\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x+y+z\right)^2\right]$$

$$\le \frac{3}{2}\left[3.5 - 9\right]$$

$$= 9$$

Dấu "=" xảy ra khi $\left(x,y,z\right) = \left(2,1,0\right)$ và các hoán vị.

Câu 14: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xy + yz + 4zx = 32$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + 16y^2 + 16z^2$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x^2}{2} + 8y^2 \ge 4xy$$

$$\frac{x^2}{2} + 8z^2 \ge 4xz$$

$$8y^2 + 8z^2 \ge 16yz$$

Cộng theo vế ta được: $P = x^2 + 16y^2 + 16z^2 \ge 4\left(xy + xz + 4yz\right) = 128$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 4y = 4z$, thay và điều kiện ta được: $x=\frac{8\sqrt{6}}{3}; y=z=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Câu 15: [TS10 Chuyên Quốc Học Huế, 2019-2020]

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16}\le\frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có:

+) $2x^2+y^2+5=x^2+y^2+x^2+1+4\ge 2xy+2x+4$

$$\Rightarrow \frac{x}{2x^2+y^2+5}\le\frac{x}{2xy+2x+4}=\frac{x}{2(xy+x+2)}$$

+) $6y^2+z^2+6=4y^2+z^2+2y^2+2+4\ge 4yz+4y+4$

$$\Rightarrow \frac{2y}{6y^2+z^2+6}\le\frac{2y}{4yz+4y+4}=\frac{y}{2(yz+y+1)}$$

Do đó:

$$VT\le\frac{x}{2(xy+x+2)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{z}{zx+2z+2}$$
$$=\frac{x}{2(xy+x+xyz)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{yz}{xyz+2yz+2y}$$
$$=\frac{1}{2(yz+y+1)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{yz}{2(yz+y+1)}$$
$$=\frac{yz+y+1}{2(yz+y+1)}$$
$$=\frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $x = y = 1$, $z = 2$.

Câu 16: [TS10 Chuyên Tin Hòa Bình, 2019-2020]

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x+y\le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$

Lời giải

Theo AM-GM ta có:

$$1\ge x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow\sqrt{xy}\le\frac{1}{2}\Rightarrow xy\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{xy}\ge 4$$

Do đó:

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{\frac{1}{xy}+xy}$$

Suy ra:

$$P\ge 2\sqrt{\frac{1}{xy}+xy}=2\sqrt{\frac{1}{16xy}+xy+\frac{15}{16xy}}\ge 2\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{16xy}.xy}+\frac{15}{16xy}}$$

$$\Rightarrow P\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{16}.4}=\sqrt{17}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{17}$

Câu 17: [TS10 Chuyên Tiền Giang, 2019-2020]

Cho hai số dương x, y thỏa mãn $2\left(x^3+y^3\right)+6xy\left(x+y-2\right)=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)$

Lời giải

Ta có:

$$2\left(x^3+y^3\right)+6xy\left(x+y-2\right)=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x+y\right)^3-12xy=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$$

Đặt $a=x+y,b=xy\left(a,b>0\right)$ khi đó:

$$2a^3-12b=a^2\left(b+4\right)\Leftrightarrow b\left(a^2+12\right)=2a^3-4a^2$$

Do $VT>0$ nên $2a^3-4a^2>0\Leftrightarrow 2a^2\left(a-2\right)>0\Leftrightarrow a>2$

Ta có:

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+xy}{xy}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-1\right)=\frac{a^2}{2b}-\frac{1}{2}=\frac{a^4+12a^2}{4a^3-8a^2}-\frac{1}{2}$$

Ta sẽ chứng minh: $T\ge\frac{5}{2}$

Thật vậy: $T\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{a^4+12a^2}{4a^3-8a^2}\ge 3\Leftrightarrow\frac{\left(a-6\right)^2a^2}{4a^2\left(a-2\right)}\ge 0$ (luôn đúng $\forall a>2$)

Dấu "=" xảy ra khi a = 6, b = 6

hay $x=3+\sqrt{3},y=3-\sqrt{3}$ hoặc $x=3-\sqrt{3},y=3+\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{5}{2}$

Câu 18: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2019-2020]

Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2}}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$\Rightarrow P=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+2\right)+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2=\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2$$

Đặt $t=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$.Theo AM – GM thì: $x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x+y}\le\frac{1}{2}\Rightarrow t\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{t}\ge 2$

Khi đó:

$$P=\frac{1}{t^2}+t-2=\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}+\frac{1}{16t^2}\right)+\frac{15}{16t^2}-2$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{t}{2}.\frac{t}{2}.\frac{1}{16t^2}}+\frac{15}{16}.2^2-2$$

$$=3.\frac{1}{4}+\frac{15}{4}-2$$

$$=\frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{2}$

Câu 19: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2019-2020]

Với x, y là các số thực thỏa mãn $1\le y\le 2$ và $xy+2\ge 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{x^2+4}{y^2+1}$

Lời giải.

Theo giải thiết ta có: $4xy+8\ge 8y.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $4x^2+y^2\ge 4xy.$

Suy ra: $4x^2+y^2+8\ge 4xy+8\ge 8y.$

Do đó: $4(x^2+4)\ge 8+8y-y^2=4(y^2+1)+(5y+2)(2-y)\ge 4(y^2+1).$

Suy ra: $x^2+4\ge y^2+1\Rightarrow M=\frac{x^2+4}{y^2+1}\ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x=2,\ y=1.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1.

Câu 20: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2019-2020]

Với x, y là cá số thực thỏa mãn $(2+x)(y-1)=\frac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$.

Lời giải

Ta có:

$$A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$$
$$=\sqrt{1+(x+1)^4}+\sqrt{1+(y-2)^4}$$

Đặt $a=x+1, b=y-2$, ta được $A=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$

Từ giả thiết ta được: $(a+1)(b+1)=\frac{9}{4}\Leftrightarrow a+b+ab=\frac{5}{4}$

Theo AM – GM ta có:

$$\begin{cases}4a^2+1\ge 4a\\4b^2+1\ge 4b\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2\ge a+b-\frac{1}{2}\quad (1)$$

$$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow \frac{1}{2}(a^2+b^2)\ge ab\qquad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được:

$$\frac{3}{2}(a^2+b^2)\ge a+b+ab-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minicopski ta được:

$$A=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}\ge\sqrt{(1+1)^2+(a^2+b^2)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)^2+4}$$
$$\ge\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}, y=\frac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Câu 21: [TS10 Chuyên Bình Thuận, 2019-2020]

Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)}\ge xy+yz+zx.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào:

Lời giải

Ta có:

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)}\ge xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow abc=2$

Khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VT=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}=VP\ \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

Câu 22: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2019-2020]

Cho $x;y;z$ là ba số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{x^2+z^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{x^3}{x^2+z^2}=x-\frac{xz^2}{x^2+z^2}\ge x-\frac{xz^2}{2xz}=x-\frac{z}{2}$.

Tương tự $\frac{y^3}{y^2+z^2}\ge y-\frac{z}{2}$. Suy ra $P\ge x+y-z+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Theo gt $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}\Rightarrow P\ge x+y+\frac{4}{x+y}\ge 4$.

Vậy $P_{min}=4\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 23: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}=\frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4}\ge\frac{2ab+2a+6}{ab+a+4}=\frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4}=2-\frac{2}{ab+a+4}$$

Tương tự: $\dfrac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}\ge 2-\dfrac{2}{bc+b+4}$; $\dfrac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}\ge 2-\dfrac{2}{ca+c+4}$

Do đó: $P\ge 6-2\left(\dfrac{1}{ab+a+4}+\dfrac{1}{bc+4+4}+\dfrac{1}{ca+c+4}\right)=6-2Q$

Với x, y dương ta có:

$(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Áp dụng (*) ta được: $\dfrac{1}{ab+a+4}=\dfrac{1}{(ab+a+1)+3}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{3}\right)$.

Tương tự: $\dfrac{1}{bc+b+4}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{3}\right)$; $\dfrac{1}{ca+c+4}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{ca+c+1}+\dfrac{1}{3}\right)$

Do đó:

$$Q\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)\Rightarrow 2Q=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$\Rightarrow P\ge 6-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{ac}{bc.ac+abc+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ca+c+1}+\frac{ac}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}.2$$

$$=5$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

Câu 24: [TS10 Chuyên Lai Châu, 2019-2020]

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$$

Lời giải

Với x, y dương ta có:

$(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Sử dụng (*) ta được: $\dfrac{ab}{a+b+2c}\le\dfrac{ab}{(a+c)+(b+c)}\le\dfrac{ab}{4}\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)$

Tương tự: $\frac{bc}{b+c+2a}\le\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{a+c}\right)$; $\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{b+a}\right)$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\\
&\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{b+a}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{ab+bc}{c+a}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{c(a+b)}{a+b}\right]\\
&=\frac{1}{4}(a+b+c)\quad(\text{dpcm})
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$

Câu 25: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $abc\ge1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải

Ta có:

$$b+\sqrt{ac}\le b+\frac{a+c}{2}=\frac{a+2b+c}{2}\Rightarrow\sqrt{b+\sqrt{ac}}\le\sqrt{\frac{a+2b+c}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{4(a+2b+c)}}\ge\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}$$

Mặt khác:

$$a+b+c\ge3\sqrt[3]{abc}\ge3\Rightarrow\frac{4}{3}(a+b+c)\ge4\Rightarrow\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}\ge\frac{12\sqrt{2}a}{7a+10b+7c}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
VT&\ge12\sqrt{2}\left(\frac{a}{7a+10b+7c}+\frac{b}{7b+10c+7a}+\frac{c}{10a+7b+7c}\right)\\
&\ge12\sqrt{2}\frac{(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)}
\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)\le8(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)}\ge\frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{8(a+b+c)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\ (\text{dpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 26: [TS10 Chuyên Tuyên Quang, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}$.

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}$$
$$=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ac}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ac}}$$
$$=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

Mặt khác theo AM-GM: $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c$

Do đó: $P\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{4}=1$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{4}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 27: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge 4$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VT=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+2+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}+2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta được:

$$VT \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}}+\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2=4\ (dpcm)$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 28: [TS10 Chuyên Phú Yên, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Minicopski ta được:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(ab)^2+a^2}+\sqrt{(bc)^2+b^2}+\sqrt{(ca)^2+c^2}$$

$$\ge\sqrt{(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2}\ge\sqrt{(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)}$$

$$=\sqrt{1+3}=2\ (dpcm)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 29: [TS10 Chuyên Cao Bằng, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a+ b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $R=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2}=c-\frac{ca}{2}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng trên ta được:

$$R=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\ge(a+b+c)-\frac{(a+b+c)^2}{6}=3-\frac{3^2}{6}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là $\frac{3}{2}$

Câu 30: [TS10 Chuyên Nam Định, 2019-2020]

Cho x, y, z là số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $x+2xy+4xyz\le 2$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$x+2xy+4xyz=x+x.4y\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\le x+x.\left(y+z+\frac{1}{2}\right)^2=x+x\left(\frac{3}{2}-x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=x+x(2-x)^2=x-2+x(2-x)^2+2$$

$$=(x-2)(1+x^2-2x)+2$$

$$=(x-2)(x-1)^2+2$$

Do $x+y+z=\frac{3}{2}\Rightarrow 0<x<2\Rightarrow x-2<0$. Vì thế:

$x+2xy+4xyz\le(x-2)(x-1)^2+2\le 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x=1, y=\frac{1}{2}, z=0$

Câu 31: [TS10 Chuyên Bình Định, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}$

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức phụ sau:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Thật vậy: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

Lại theo BĐT AM-GM ta có:

$$abc=\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}\le\frac{(a+b)}{2}.\frac{(b+c)}{2}.\frac{(c+a)}{2}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$$

Suy ra: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$$\ge(a+b+c)(ab+bc+ca)-\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$$

Suy ra đpcm: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{9}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng cộng mẫu số ta có:

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge\frac{9}{3(a+b+c)}=\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{ab+bc+ca}{3}$$

Lại có: $(ab+bc+ca)^2\ge 3(ab^2c+a^2bc+abc^2)=3abc(a+b+c)$

$$\Rightarrow\frac{9^2}{(a+b+c)^2}\ge 3abc(a+b+c)\Leftrightarrow\frac{1}{abc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{27}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Suy ra: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge\frac{a+b+c}{3}+\frac{3}{a+b+c}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}(a+b)(b+c)(c+a)=8\\ a=b=c\\ \frac{3}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi a = b = c = 1.

Câu 32: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$

Lời giải

Ta có:

$$a^2-ab+3b^2+1=(a^2-2ab+b^2)+ab+(b^2+1)+b^2$$

$$=(a-b)^2+ab+(b^2+1)+b^2\ge b^2+ab+2b=b(a+b+2)$$

$$\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\sqrt{b(a+b+1)}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{b(a+b+1)}}$$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{c(b+c+2)}}$; $\frac{1}{\sqrt{c^2-ac+3a^2+1}}\le\frac{1}{\sqrt{a(c+a+2)}}$

Với x, y dương ta có:

$$(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Cộng theo vế và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P \le \frac{1}{\sqrt{b(a+b+2)}}+\frac{1}{\sqrt{c(b+c+2)}}+\frac{1}{\sqrt{a(c+a+2)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4b(a+b+2)}}+\frac{2}{\sqrt{4c(b+c+2)}}+\frac{2}{\sqrt{4a(c+a+2)}}$$

$$\overset{AM-GM}{\le}\left(\frac{1}{4b}+\frac{1}{a+b+2}\right)+\left(\frac{1}{4c}+\frac{1}{b+c+2}\right)+\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{c+a+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\le \frac{3}{4}+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}+\left[\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

$$\le \frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ là P là $\frac{3}{2}$.

Câu 33: [TS10 Chuyên Tây Ninh, 2019-2020]

Chứng minh $(a+b+c)^3+9abc \ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$ với x, y, z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Theo bất đẳng thức Schur với a, b, c là số thực không âm thì:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

Biến đổi ta được hệ quả:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

Mặt khác ta có đẳng thức: $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Khi đó ta có: $(a+b+c)^3+9abc=a^3+b^3+c^3+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Do đó: $VT \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Ta là có 2 đẳng thức:

+) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

+) $abc+(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Do đó:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Câu 34: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho 3 số dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(2y+x)(2z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(2z+y)(2x+y)}}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta được:

$$(2x+z)(2y+z)=(x+x+z)(y+z+y)\ge\left(\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}\right)^2$$

Do đó:

$$\sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(2x+z)(2y+z)}}\le\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}$$

Tương tự: $\sqrt{\dfrac{yz}{(2y+x)(2z+x)}}\le\dfrac{\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}$; $\sqrt{\dfrac{zx}{(2z+y)(2x+y)}}\le\dfrac{\sqrt{zx}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được: $P\le\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}=1$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 35: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2019-2020]

1) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$$

2) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $(x+y)^3+4xy\le 12$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+2018xy$

Lời giải

1) Ta có:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)+\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{xy}-1-x}{(1+x)\left(1+\sqrt{xy}\right)}+\frac{1+\sqrt{xy}-1-y}{(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{xy}-x\right)(1+y)+\left(\sqrt{xy}-y\right)(1+x)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)(1+y)+\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)(1+x)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\sqrt{x}+y\sqrt{x}-\sqrt{y}-x\sqrt{y}\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\sqrt{xy}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{xy}-1\right)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0\ \text{(đúng } \forall xy\le 1\text{)}\qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$.

Bất đẳng thưc (1) đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứng minh.

2) Sử dụng AM-GM ta có:

$$12\ge(x+y)^3+4xy\ge\left(2\sqrt{xy}\right)^3+4xy=8xy\sqrt{xy}+4xy$$

Đặt $\sqrt{xy}=t\,(t>0)$, khi đó:

$$8t^3+4t^2-12\le 0\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow 2t^3-2t^2+3t^2-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2(t-1)+3(t-1)(t+1)\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left(2t^2+3t+3\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow t\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức ở ý 1 ta có:

$$P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}+2018xy=\frac{2}{1+t}+2018t^2$$

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{2}{1+t}+2018t^2\le 2019\ (*)$

Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{1+t}-1\right)+2018\left(t^2-1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{1+t}+2018(t-1)(t+1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\left(\frac{1}{1+t}+2018(t+1)\right) \le 0 \text{(đúng do } 0<t\le 1 \text{)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2019.

Câu 36: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2019-2020]

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a} \ge 2$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$+) \quad \frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}=\frac{a^4}{a^2+2ab}+\frac{b^4}{b^2+2bc}+\frac{c^4}{c^2+2ca}$$

$$\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{2}$$

$$+) \quad \frac{b^3}{a+2b}+\frac{c^3}{b+2c}+\frac{a^3}{c+2a}=\frac{b^4}{ab+2b^2}+\frac{c^4}{bc+2c^2}+\frac{a^4}{ca+2a^2}$$

$$\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ca+2\left(a^2+b^2+c^2\right)} \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{2}$$

Cộng theo vế ta được: $\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a} \ge 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 37: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \ge 3; y \ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=21\left(x+\frac{1}{y}\right)+3\left(y+\frac{1}{x}\right)$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$T = 21\left(x + \frac{1}{y}\right) + 3\left(y + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right) + \left(\frac{7y}{3} + \frac{21}{y}\right) + \frac{62}{3}x + \frac{2}{3}y$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{3}.\frac{3}{x}} + 2\sqrt{\frac{7y}{3}.\frac{21}{y}} + \frac{62}{3}.3 + \frac{2}{3}.3$$

$$= 2 + 2.7 + 62 + 2$$

$$= 80$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 80.

NĂM HỌC 2018-2019

Câu 38: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2018-2019]

Cho a, b, c là ba số thức dương thỏa mãn điều kiện : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{\left(5a^2 + 2ab + 2b^2\right)} + \frac{1}{27} \geq \frac{2}{\sqrt{27.\left(5a^2 + 2ab + 2b^2\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{\sqrt{27}}{2}.\left(\frac{1}{5a^2 + 2ab + 2b^2} + \frac{1}{27}\right)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{\sqrt{27}}{2}\left(\frac{1}{5b^2 + 2bc + 2c^2} + \frac{1}{27}\right) \quad ; \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{\sqrt{27}}{2}\left(\frac{1}{5c^2 + 2ca + 2c^2} + \frac{1}{27}\right)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{27}}{2}.\left(\frac{1}{\left(5a^2 + 2ab + 2b^2\right)} + \frac{1}{\left(5b^2 + 2bc + 2c^2\right)} + \frac{1}{\left(5c^2 + 2ca + 2a^2\right)} + \frac{1}{9}\right)$$

Sử dụng BĐT $\frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ ta có:

$$\frac{1}{\left(5a^2 + 2ab + 2b^2\right)} = \frac{1}{3a^2 + \left(2ab + a^2\right) + \left(a^2 + 2b^2\right)} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3a^2} + \frac{1}{2ab + a^2} + \frac{1}{a^2 + 2b^2}\right)$$

$$\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{9}.\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{9}.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{5}{9a^2}+\frac{2}{9ab}+\frac{2}{9b^2}\right)$$

Ta lại có : $\frac{2}{9ab}\overset{AM-GM}{\le}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{5a^2+2ab+2b^2}\le \frac{1}{9}.\left(\frac{5}{9a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{2}{9b^2}\right)=\frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}\right)$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{1}{5b^2+2bc+2c^2}\le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3b^2}+\frac{1}{3c^2}\right);\ \frac{1}{5c^2+2ca+2a^2}\le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3c^2}+\frac{1}{3a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5a^2+2ab+b^2}+\frac{1}{5b^2+2bc+2c^2}+\frac{1}{5c^2+2ca+2a^2}$$

$$\le \frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}\right)+\frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3b^2}+\frac{1}{3c^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3c^2}+\frac{1}{3a^2}\right)=\frac{1}{9}.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow P\le \frac{\sqrt{27}}{2}.\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1 \end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$

Vậy $P_{max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 39: [TS10 Chuyên Trà Vinh, 2018-2019]

Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh: $\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{z^2+x^2}\le \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$.

Lời giải

Vì $x,y,z>0;\ x^2+y^2+z^2=2$ nên:

$$\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{z^2+x^2}\le \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2+x^2}\le \frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}+3$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{z^2}{x^2+y^2}+1+\frac{x^2}{y^2+z^2}+1+\frac{y^2}{z^2+x^2}\le \frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2}\le \frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy} \qquad (2)$$

Lại có: $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{z^2}{x^2+y^2} \leq \frac{z^2}{2xy}$

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{z^2+x^2} \leq \frac{y^2}{2zx}$; $\frac{z^2}{x^2+y^2} \leq \frac{z^2}{2xy}$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng (đpcm)

Câu 40: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2018-2019]

a) Cho $x;y$ là hai số thực dương. CMR: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} \geq x+y$

b) Xét các số thực $a;b;c$ với $b \neq a+c$ sao cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm thực $m;n$ thỏa mãn $0 \leq m,n \leq 1$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}$

Lời giải

a) Với $x,y>0$ ta có:

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} \geq x+y \Leftrightarrow x^3+y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow xy(x+y)$

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2 \geq xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x,y$

Vậy BĐT được chứng minh, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x,y>0 \end{cases}$

b) Theo đề bài ta có phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm m,n $(0 \leq m,n \leq 1) \Rightarrow a \neq 0$

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} m+n=-\frac{b}{a} \\ mn=\frac{c}{a} \end{cases}$

$\Rightarrow M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a}=\frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{c}{a}\right)}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}$

Vì $2-mn \leq 2$; $\quad mn \geq 0 \Rightarrow M \leq \frac{(1+m+n).2}{1+m+n}=2$

Vậy $\operatorname{Max}M=2 \Leftrightarrow mn=0 \Leftrightarrow c=0$

Ta lại có: $0 \leq m,n \leq 1 \Rightarrow m(n-1)+n(m-1)+mn-1 \leq 0 \Leftrightarrow mn \leq \frac{1}{3}(m+n+1)$

$\Rightarrow M \geq \frac{m+n+1}{1+m+n+\frac{1}{3}(1+m+n)}=\frac{3}{4}$

Vậy $\mathrm{Min}M=\frac{3}{4}\Leftrightarrow m=n=1\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=0\\a=c\end{cases}$

Câu 41: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2018-2019]

Cho các số thực dương x,y,z sao cho phương trình $xy+yz+zx\ge x+y+z$.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge 1.$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^3+8}=\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}\le\frac{x+2+x^2-2x+4}{2}=\frac{x^2-x+6}{2}$

Tương tự: $\sqrt{y^3+8}\le\frac{y^2-y+6}{2}$; $\sqrt{z^3+8}\le\frac{z^2-z+6}{2}$.

Suy ra:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge 2.\left(\frac{x^2}{x^2-x+6}+\frac{y^2}{y^2-y+6}+\frac{z^2}{z^2-z+6}\right).\ (*)$$

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w}\ge\frac{(a+b+c)^2}{u+v+w}\quad\forall a,b,c,u,v,w>0\ (1)$

Áp dụng (1) và (*) ta thu được:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}\qquad(2)$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4(xy+yz+zx)\ge 18-(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-18\ge 0\ .\quad(3)$$

Lại do: $xy+yz+zx\ge x+y+z$ nên ta đi kiểm tra

$$(x+y+z)^2+3(x+y+z)-18\ge 0$$

$\Leftrightarrow (x+y+z-3)(x+y+z+6)\ge 0$. (4)

Thật vậy ta có quan hệ: $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)\ge 3(x+y+z)$ nên $x+y+z\ge 3$,

từ đó (4) đúng.

Từ (2), (3), (4) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 42: [TS10 Chuyên Lào Cai, 2018-2019]

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $3(a+b+c)\ge\sqrt{8a^2+1}+\sqrt{8b^2+1}+\sqrt{8c^2+1}$

Lời giải

Ta có:

$18(a+b+c)=8(a+b+c)+(a+b+c)+9(a+b+c)$

$=\left(8a+\frac{1}{a}+9a\right)+\left(8b+\frac{1}{b}+9b\right)+\left(8c+\frac{1}{c}+9c\right)$

$=\frac{8a^2+1}{a}+9a+\frac{8b^2+1}{b}+9b+\frac{8c^2+1}{c}+9c$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$\frac{8a^2+1}{a}+9a+\frac{8b^2+1}{b}+9b+\frac{8c^2+1}{c}+9c\ge6\sqrt{8a^2+1}+6\sqrt{8b^2+1}+6\sqrt{8c^2+1}$

$\Leftrightarrow18(a+b+c)\ge6\sqrt{8a^2+1}+6\sqrt{8b^2+1}+6\sqrt{8c^2+1}$

$\Leftrightarrow3(a+b+c)\ge\sqrt{8a^2+1}+\sqrt{8b^2+1}+\sqrt{8c^2+1}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 43: [TS10 Chuyên Bến Tre, 2018-2019]

Cho hai số thực dương a,b thỏa $a+b=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$.

Lời giải

Khi đó $T=\frac{4}{a}+\frac{1}{1-a}=\frac{4(1-a)}{a}+\frac{a}{1-a}+5$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương $\frac{4(1-a)}{a};\ \frac{a}{1-a}$ ta được:

$$T\ge2\sqrt{\frac{4(1-a)}{a}\cdot\frac{a}{1-a}}+5=9$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\frac{4(1-a)}{a}=\frac{a}{1-a}\Leftrightarrow4(1-a)^2=a^2\Leftrightarrow3a^2-8a+4=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\ (\text{loai})\\ a=\frac{2}{3}\ (\text{nhan})\end{array}\right.$

Vậy $\min T=9\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$ và $b=\frac{1}{3}$

Câu 44: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

Chứng minh rằng: $3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}\overset{AM-GM}{\le}\frac{a+3b+b+3a}{4}=a+b$

Từ giả thiết ta có:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}=1\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}=1-a-b\Leftrightarrow 4ab=(1-a-b)^2$

$3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}\Leftrightarrow 3(a+b)^2-(a+b)+(1-a-b)^2\ge a+b$

$\Leftrightarrow 3a^2+6ab+3b^2-2a-2b+a^2+b^2+1-2a-2b+2ab\ge 0$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+1+8ab-4a-4b\ge 0$

$\Leftrightarrow (1-2a-2b)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Câu 45: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2018-2019]

Cho các $a,b,c<3$ dương thỏa mãn $abc(a+b+c)=3$

a) Chứng minh rằng: $ab+ac+bc\ge 3$:

b) Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{a}{\sqrt{9-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{9-c^2}}+\frac{c}{\sqrt{9-c^2}}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$(ab+ac+bc)^2\ge 3(ab.ac+bc.ac+ab.bc)=3abc(a+b+c)=9$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 3$

Tiếp tục áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{9-b^2}}=\frac{a}{\sqrt{(3-b)(3+b)}}=\frac{2\sqrt{2}a}{2\sqrt{(6-2b)(3+b)}}\ge\frac{2\sqrt{2}a}{6-2b+3+b}=\frac{2\sqrt{2}a}{9-b}$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{2\sqrt{2}a}{9-b}+\frac{2\sqrt{2}b}{9-c}+\frac{2\sqrt{2}c}{9-a}=\frac{2\sqrt{2}a^2}{9a-ab}+\frac{2\sqrt{2}b^2}{9b-bc}+\frac{2\sqrt{2}c^2}{9c-ca}\ge\frac{2\sqrt{2}(a+b+c)^2}{9(a+b+c)-ab-ac-bc}$$

Đặt $t=a+b+c\ge\sqrt{3(ab+ac+bc)}=3$

$\Leftrightarrow (t-3)(8t-3) \ge 0$

$\Leftrightarrow 8t^2 \ge 27t-9$

$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2 \ge 27(a+b+c)-3(ab+ac+bc)$

$\Leftrightarrow \dfrac{8}{3}.\dfrac{(a+b+c)^2}{9.(a+b+c)-(ab+ac+bc)} \ge 1$

$\Leftrightarrow P \ge \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy GTNN của P là $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Đạt tại $a=b=c=1$

Câu 46: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2018-2019]

Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải

Với ba số thực dương a, b, c ta có $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+\dfrac{b^2+c^2}{b+c}+\dfrac{c^2+a^2}{c+a} \le \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$. (1)

$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+\dfrac{b^2+c^2}{b+c}+\dfrac{c^2+a^2}{c+a}\right) \le 3(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{c(a^2+b^2)}{a+b}+\dfrac{a(b^2+c^2)}{b+c}+\dfrac{b(c^2+a^2)}{c+a} \le a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow c^2-\dfrac{c(a^2+b^2)}{a+b}+a^2-\dfrac{a(b^2+c^2)}{b+c}+b^2-\dfrac{b(c^2+a^2)}{c+a} \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{ac(c-a)}{a+b}+\dfrac{bc(c-b)}{a+b}+\dfrac{ab(b-a)}{c+a}+\dfrac{bc(b-c)}{c+a}+\dfrac{ab(a-b)}{b+c}+\dfrac{ac(a-c)}{b+c} \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{ac(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{bc(c-b)^2}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{ab(b-a)^2}{(a+c)(b+c)} \ge 0.$ (2)

Với ba số thực dương a, b, c ta có (2) luôn đúng. Vậy (1) luôn đúng. (đpcm)

Câu 47: [TS10 Chuyên Bắc Giang, 2018-2019]

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$M=|x^3-y^3|+|y^3-z^3|+|z^3-x^3|$.

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a-b| \le |a|+|b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \le 0$.

Khi đó $M\le 2\left(|x|^3+|y|^3+|z|^3\right)$

Mặt khác $x^2+y^2+z^2=8\ \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 8\\ y^2\le 8\\ z^2\le 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 2\sqrt{2}\\ |y|\le 2\sqrt{2}\\ |z|\le 2\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^3\right|\le 2\sqrt{2}x^2\\ \left|y^3\right|\le 2\sqrt{2}y^2\\ \left|z^3\right|\le 2\sqrt{2}z^2\end{cases}$

Vậy $M\le 2\left(|x|^3+|y|^3+|z|^3\right)\le 4\sqrt{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=32\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z)=\left(2\sqrt{2};0;0\right)$ hoặc $(x;y;z)=\left(-2\sqrt{2};0;0\right)$ và các hoán vị của nó. Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $32\sqrt{2}$.

Câu 48: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2018-2019]

Chứng minh rằng $x^4-x+\dfrac{1}{2}>0$ với mọi số thực x

Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$

Lời giải

a) Ta có

$$x^4-x+\frac{1}{2}=x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ge 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{1}{2}=0\\ x-\dfrac{1}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ (vô lý), do đó dấu bằng không xảy ra

Vậy $x^4-x+\dfrac{1}{2}>0$ với mọi số thực x

Ta có: $x^2-xy+y^2=3\Rightarrow P-xy=3\Rightarrow xy=P-3$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số $x^2;y^2$ ta có:

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2}\ge |xy|$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2+y^2}{2}\le xy\le \frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow -\frac{P}{2}\le xy\le \frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{P}{2}\le P-3\le \frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{P}{2} \le P-3 \\ P-3 \le \dfrac{P}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le \dfrac{3P}{2} \\ \dfrac{P}{2} \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le P \le 6$$

Dấu bằng xảy ra $\Rightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x^2 + x^2 = 3 \\ x^2 - x^2 + x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = |y| = 1 \\ |x| = |y| = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy $P_{max} = 6 \Leftrightarrow |x| = |y| = \sqrt{3}; P_{min} = 2 \Leftrightarrow |x| = |y| = 1$

Câu 49: [TS10 Chuyên Vĩnh Long, 2018-2019]

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} \ge a - \dfrac{b}{2}$.

b) $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \dfrac{a+b+c}{3}$.

Lời giải

a) Ta có : $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} = \dfrac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \ge a - \dfrac{ab^2}{2ab} = a - \dfrac{b}{2}$

b) Tương tự theo câu a), ta có: $\dfrac{b^3}{b^2+c^2} \ge b - \dfrac{c}{2}$, $\dfrac{c^3}{c^2+a^2} \ge c - \dfrac{a}{2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Ta có: $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} \ge \dfrac{a^3}{a^2+\dfrac{a^2+b^2}{2}+b^2} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$

Và $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2} \ge \dfrac{b^3}{b^2+\dfrac{b^2+c^2}{2}+c^2} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{b^3}{b^2+c^2}$ $\dfrac{c^3}{c^2+ac+a^2} \ge \dfrac{c^3}{c^2+\dfrac{c^2+a^2}{2}+a^2} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{c^3}{c^2+a^2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2}\right) \ge \frac{a+b+c}{3}$$

Câu 50: [TS10 Chuyên Khánh Hòa, 2018-2019]

Với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = abc$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b} - \sqrt{1+c^2} < 1$.

Lời giải

Ta có $a+b+c=abc \Leftrightarrow \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=1$. Đặt $\frac{1}{a}=x$, $\frac{1}{b}=y$, $\frac{1}{c}=z$

Khi đó $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$. Vì vậy

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}-\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}<1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)-\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{z}>0 \ (4)$$

Ta có: $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\sqrt{(1-xy)^2+(x+y)^2}=(x+y)\sqrt{1+z^2}$.

$$(4) \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z(x+y)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(xz+yz)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(1-xy)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{xy\sqrt{1+z^2}}{z}>0, \forall x,y,z>0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 51: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2018-2019]

a) Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\ge\frac{49}{16}$.

b) Cho số tự nhiên z và các số nguyên x,y thỏa mãn $x+y+xy=1$. Tìm giá trị của x,y,z sao cho $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)$ là số chính phương lớn nhất.

Lời giải

a) Ta có

$$\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\ge\frac{49}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{16}{z}\ge 49.$$

Với hai số thực không âm a,b ta có $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{a}=\sqrt{b} \Leftrightarrow a=b$.

Áp dụng kết quả trên, ta có:

$$\frac{1}{x}+49x\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}.49x} \Rightarrow \frac{1}{x}+49x\ge 14. \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{x}=49x \Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$.

Tương tư, ta có: $\frac{4}{y}+49y \geq 28$. (2)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{4}{y}=49y \Leftrightarrow y=\frac{2}{7}$.

Và $\frac{16}{z}+49z \geq 56$. (3)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{16}{z}=49z \Leftrightarrow z=\frac{4}{7}$.

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta được: $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{16}{z}+49(x+y+z) \geq 98$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{16}{z} \geq 49$. Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{7}; y=\frac{2}{7}; z=\frac{4}{7}$.

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

b) Ta có:

$\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)=2\left(2^z+21\right)\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)$.

Với: $1+x^2=x+y+xy+x^2=(x+y)(1+x)$, $1+y^2=x+y+xy+y^2=(x+y)(1+y)$,

$2=1+1=1+x+y+xy=(1+x)(1+y)$.

Suy ra $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)=\left(2^z+21\right)(x+y)^2(1+x)^2(1+y)^2$.

Do đó, $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)$ là số chính phương khi và chỉ khi 2^z+21 là số chính phương.

Nghĩa là tồn tại số tự nhiên n sao cho $2^z+21=n^2$.

Ta có $2 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 2^z \equiv (-1)^z \pmod 3$.

Nếu z lẻ thì $2^z \equiv -1 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$. Khi đó $n^2 \equiv 2 \pmod 3$ vô lí (vì số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1).

Từ đó suy ra z là số chẵn.

Đặt $z=2k, \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$. Ta có $n^2=21+2^{2k} \Leftrightarrow n^2-\left(2^k\right)^2=21 \Leftrightarrow \left(n-2^k\right)\left(n+2^k\right)=21$.

Vì $21=1.21=3.7$ và $n-2^k<n+2^k$ nên ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} n-2^k=1 \\ n+2^k=21 \end{cases} \Rightarrow 2^k=10$, không có giá trị của k thỏa mãn trường hợp này.

Trường hợp 2: $\begin{cases} n-2^k=3 \\ n+2^k=7 \end{cases} \Rightarrow 2^k=2 \Rightarrow k=1.$

Từ giả thiết, ta có $2=(1+x)(1+y)$. Không mất tổng quát, giả sử $|x+1| \le |y+1|$, suy ra $\begin{cases} |x+1|=1 \\ |y+1|=2 \end{cases}$.

Giải hệ ta được $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$.

Nếu $x=0, y=1$ thì $(2^{z+1}+42)(x^2+y^2+1+x^2y^2)=100=10^2$.

Nếu $x=-2, y=-3$ thì $(2^{z+1}+42)(x^2+y^2+1+x^2y^2)=2500=50^2$.

Vậy $x=-2, y=-3, z=2$.

Câu 52: [TS10 Chuyên Kiên Giang, 2018-2019]

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y} \ge 1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakoski với bộ ba số có:

$$\left((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right).\left(\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{C}{\sqrt{c}}\right)^2\right) \ge \left(\sqrt{a}.\frac{A}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}.\frac{B}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}.\frac{C}{\sqrt{c}}\right)^2=(A+B+C)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{A^2}{a}+\frac{B^2}{b}+\frac{C^2}{c} \ge \frac{(A+B+C)^2}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{(x+y+z)^2}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi: $x=y=z=\dfrac{2}{3}$.

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 53: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2018-2019]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \le a, b, c \le 2, a+b+c=3$.

Tìm GTLN và GTNN của $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\begin{cases} a^2+b^2\ge 2ab \\ b^2+c^2\ge 2bc \\ c^2+a^2\ge 2ca \end{cases}$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{1}{2}\left(2ab+2ac+2bc\right)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$

$\Rightarrow P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $MinP=1$ khi $a=b=c=1$

Theo đề bài ta có:

$0\le a,b,c\le 2\Rightarrow (a-2)(b-2)(c-2)\le 0$

$\Leftrightarrow abc-2(ab+ac+bc)+4(a+b+c)-8\le 0$

$\Leftrightarrow abc-2(ab+ac+bc)+12-8\le 0$

$\Rightarrow 2(ab+ac+bc)\ge 4+abc\ge 4$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 2$

$\Rightarrow P=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{ab+ac+bc}-2$

$\Leftrightarrow P=\frac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc}-2\le\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} abc=0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b+c=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ a+c=3 \end{cases} \\ \begin{cases} c=0 \\ a+b=3 \end{cases} \\ 0\le a,b,c\le 2 \end{array}\right.$

Vậy $MaxP=\frac{5}{2}$ khi $abc=0,a+b+c=3,0\le a,b,c\le 2$

Câu 54: [TS10 Chuyên Thái Nguyên, 2018-2019]

Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14xz}}\le\frac{x+y+z}{5}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $x^2+y^2\ge 2xy$

$$\Rightarrow \sqrt{8x^2+3y^2+14xy}=\sqrt{8x^2+3y^2+12xy+2xy}\le \sqrt{8x^2+3y^2+12xy+x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8x^2+3y^2+14xy}\le \sqrt{9x^2+12xy+4y^2}=\sqrt{(3x+2y)^2}=3x+2y$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có: $\begin{cases}\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}\le 3y+2z\\ \sqrt{8z^2+3x^2+14xz}\le 3z+2x\end{cases}$

Áp dụng BĐT AM-GM Schawz: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ ta được:

$$\Rightarrow VT\ge \frac{x^2}{3x+2y}+\frac{y^2}{3y+2z}+\frac{z^2}{3z+2x}\ge \frac{(x+y+z)^2}{3x+2y+3y+2z+3z+2x}=\frac{x+y+z}{5}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Câu 55: [TS10 Chuyên Tuyên Quang, 2018-2019]

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\le 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\dfrac{a^2+4a+1}{a^2+a}+\dfrac{b^2+4b+1}{b^2+b}+\dfrac{c^2+4c+1}{c^2+c}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM và BĐT quen thuộc : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge \dfrac{9}{x+y+z}$

$$M=\frac{a^2+4a+1}{a^2+a}+\frac{b^2+4b+1}{b^2+b}+\frac{c^2+4c+1}{c^2+c}$$
$$=\frac{(a^2+1)+4a}{a(a+1)}+\frac{(b^2+1)+4b}{b(b+1)}+\frac{(c^2+1)+4c}{c(c+1)}$$
$$\overset{AM-GM}{\ge}\frac{2a+4a}{a(a+1)}+\frac{2b+4b}{b(b+1)}+\frac{2c+4c}{c(c+1)}=6\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\ge \frac{6.9}{a+b+c+3}\ge \frac{54}{6}=9$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 9, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 56: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2018-2019]

Cho a,b,c dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}-a^2-28b^2-28c^2$$

Lời giải

Theo đề bài ta có: $ab+bc+ca=1$

Áp dụng BĐT AM-GM vào biểu thức bài toán ta có:

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}=\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+ac+bc}}=\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}\le\frac{b}{4(b+c)}+\frac{b}{a+b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+ac+bc}}=\frac{c}{\sqrt{(a+c)(c+b)}}\le\frac{c}{4(b+c)}+\frac{c}{a+c}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{4(b+c)}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{4(b+c)}+\frac{c}{a+c}$$

$$=\frac{a+b}{a+b}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+c}{4(b+c)}=1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

Mặt khác:

$$\frac{a^2}{2}+\frac{49b^2}{2}\ge2\sqrt{\frac{a^2.49b^2}{4}}=7ab$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{49c^2}{2}\ge2\sqrt{\frac{a^2.49c^2}{4}}=7ac$$

$$\frac{7}{2}\left(b^2+c^2\right)\ge7bc$$

$$\Rightarrow a^2+28b^2+28c^2\ge7\left(ab+ac+bc\right)=7$$

$$\Rightarrow P\le\frac{9}{4}-7=\frac{-19}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=7b=7c\\ab+bc+ca=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7\sqrt{15}}{15}\\b=c=\dfrac{\sqrt{15}}{15}\end{cases}$

Vậy $MaxP=-\dfrac{19}{4}$ khi $\begin{cases}a=\dfrac{7\sqrt{15}}{15}\\b=c=\dfrac{\sqrt{15}}{15}\end{cases}$

Câu 57: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2018-2019]

Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{ab}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+\dfrac{ab}{a+b}$

Lời giải

Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{ab}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+\dfrac{ab}{a+b}$.

Ta có: $2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} \le \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \ge 4$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=\sqrt{b} \\ \sqrt{ab}=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=4$.

$$A=a+b+\frac{ab}{a+b}=\frac{3(a+b)}{4}+\frac{a+b}{4}+\frac{ab}{a+b} \ge \frac{3\sqrt{ab}}{2}+\sqrt{ab}=\frac{5\sqrt{ab}}{2} \ge 10.$$

Suy ra: $A \ge 10$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=b=4 \\ \dfrac{a+b}{4}=\dfrac{ab}{a+b} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của *A* bằng 10 khi $a=b=4$.

Câu 58: [TS10 Chuyên Đồng Nai, 2018-2019]

Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)} \ge \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b} \Leftrightarrow \frac{2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{2ab\left(a^2+b^2\right)} \ge \frac{a+b}{2ab}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+ab+b^2\right)+b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$$

Điều này luôn đúng, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có: $\begin{cases} \dfrac{c^3+b^3}{cb\left(c^2+b^2\right)} \ge \dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{2b} \\ \dfrac{c^3+a^3}{ca\left(c^2+a^2\right)} \ge \dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{2a} \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có:

$$\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)} \ge \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 59: [TS10 Chuyên Lâm Đồng, 2018-2019]

Cho $a,b,c>0$ và $a+2b+3c \ge 20$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=a+b+c+\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{2b}+\dfrac{4}{c}$

Lời giải

Ta có:

$$S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4} + \left(\frac{3a}{4} + \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{9}{2b}\right) + \left(\frac{c}{4} + \frac{4}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(a + 2b + 3c) + \left(\frac{3a}{4} + \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{9}{2b}\right) + \left(\frac{c}{4} + \frac{4}{c}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

$$+)\ \frac{3a}{4} + \frac{3}{a} \ge 2\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}} = 3$$

$$+)\ \frac{b}{2} + \frac{9}{2b} \ge 2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}} = 3$$

$$+)\ \frac{c}{4} + \frac{4}{c} \ge 2\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{4}{c}} = 2$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}(a + 2b + 3c) + \left(\frac{3a}{4} + \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{9}{2b}\right) + \left(\frac{c}{4} + \frac{4}{c}\right) \ge \frac{1}{4}.20 + 3 + 3 + 2 = 13$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} a + 2b + 3c = 20 \\ \dfrac{3a}{4} = \dfrac{3}{a} \\ \dfrac{b}{2} = \dfrac{9}{2b} \\ \dfrac{c}{4} = \dfrac{4}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 (a, b, c > 0 \\ c = 4 \end{cases}$

Vậy $\text{MinS} = 13$ khi $a = 2; b = 3; c = 4$

Câu 60: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2018-2019]

Cho x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn: $12x + 10y + 15z \le 60$.

Tìm giá trị lớn nhất của $T = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - z$.

Lời giải

Do x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn : $12x + 10y + 15z \le 60$.

Ta có $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x \le 5 \\ y \le 6 \\ z \le 4 \end{cases}$ (*)

Từ điều kiện trên ta có $T = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - z$

$= x(x - 5) + y(y - 6) + z(z - 4) + x + 2y + 3z$

$\le x + 2y + 3z \le \dfrac{12x}{5} + 2y + 3z \le \dfrac{60}{5} = 12$

Vậy GTLN của T bằng 12 đạt được khi $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \\ z=0 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$

Câu 61: [TS10 Chuyên Đại Học Vinh, 2018-2019]

Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn: $(a-b)^2 = a+b+2$.

Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{a^3}{(b+1)^3}\right)\left(1+\dfrac{b^3}{(a+1)^3}\right) \le 9$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2 = a+b+2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 - 2ab + b^2 = a+b+2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 = a+b+2+2ab \\
\Leftrightarrow\ & (a^2+a)+(b^2+b) = 2(ab+a+b+1) \\
\Leftrightarrow\ & a(a+1)+b(b+1) = 2(a+1)(b+1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a(a+1)+b(b+1)}{(a+1)(b+1)} = 2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 2
\end{aligned}$$

Đặt $x = \dfrac{a}{b+1}; y = \dfrac{b}{a+1} \Rightarrow x+y=2$

Ta có:

$(1+x^3)(1+y^3) \le 9$

$\Leftrightarrow 1+(xy)^3 + x^3 + y^3 \le 9$

$\Leftrightarrow (xy)^3 + (x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] \le 8$

$\Leftrightarrow xy(x^2y^2 - 6) \le 0$

(do $0 \le xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = 1$)

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} xy = 0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0; b=2 \\ a=2; b=0 \end{array}\right.$

Câu 62: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2018-2019]

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+xz \ge x+y+z$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 1$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$(xy+yz+xz)^2 \ge (x+y+z)^2 \ge 3(xy+xz+yz) \Rightarrow xy+xz+yz \ge 3$$

Áp dụng BĐT AM-GM-Schwwarz ta có:

$$VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}+\sqrt{(y+2)(y^2-2y+4)}+\sqrt{(z+2)(z^2-2+4)}}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(+y+z+6)\left[x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+12\right]}}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{(2xy+2xz+2yz+3)\left[x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+12\right]}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+15+2(xy+yz+xz)}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-2(x+y+z)+15}$$

$\Rightarrow$ Ta cần chứng minh:

$$\frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-2(x+y+z)+15} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+2(x+y+z)-15 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z+5)(x+y+z-3) \ge 0$$

Điều này là luôn đúng do: $x+y+z \ge \sqrt{3(xy+yz+xz)} = 3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Vậy $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 1$

Câu 63: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2018-2019]

1) Cho các số thực x, y không âm, chứng minh rằng $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$.

2) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1.$$

Lời giải

1) Cho các số thực x, y không âm, chứng minh rằng $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$.

Bất đẳng thức: $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$

$\Leftrightarrow x^2(x-y)-y^2(x-y)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)\geq 0$, đúng $\forall x,y\geq 0$.

2) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1.$$

Chứng minh $a^5+b^5\geq a^2b^3+a^3b^2 \Leftrightarrow a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)\geq 0,\quad \forall a,b>0\quad (*)$

Áp dụng (*): $a^5+b^5\geq a^2b^2(a+b)\Rightarrow a^5+b^5+ab\geq ab.\dfrac{a+b+c}{c}$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}\leq \dfrac{c}{a+b+c}\quad (1)$

Tương tự $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\leq \dfrac{a}{a+b+c}\quad (2)$; $\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq \dfrac{b}{a+b+c}\quad (3)$

Cộng (1), (2), (3) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 64: [TS10 Chuyên Bến Tre, 2018-2019]

Cho hai số thực dương a,b thỏa $a+b=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$

Lời giải

Ta có: $T=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{4(a+b)}{a}+\dfrac{a+b}{b}=5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 5+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}.\dfrac{a}{b}}=5+4=9$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực dương ta có: $\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{4b}{a}.\dfrac{a}{b}}=4$

$\Rightarrow T=5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 5+4=9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4b}{a}=\dfrac{a}{b}\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a^2=4b^2\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\ a=2b\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{3}(tm)\\ b=\dfrac{1}{3}(tm)\end{cases}$

Vậy $MinT=9$ khi $a=\dfrac{2}{3};b=\dfrac{1}{3}$

Câu 65: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2018-2019]

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}\geq 1$$

Lời giải

Ta có : Áp dụng bất đẳng thức AM-GM – Schaw thì:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c\left(a+b+c\right)}\ge\frac{\left(a+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\frac{b^2}{b(a+b+c)}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{\left(b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\frac{a^2}{a(a+b+c)}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{a^2}{a\left(a+b+c\right)}+\frac{b^2}{b(a+b+c)}+\frac{c^2}{c(a+b+c)}$$

$$\ge\frac{\left(a+c\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(a+b\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{a+b+c}{a+b+c}\ge\frac{\left(a+c\right)^2+\left(b+c\right)^2+\left(a+b\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+1\ge\frac{2\left(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc\right)}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+1\ge 2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}\ge 1\quad\text{(đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 66: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2018-2019]

Cho các số dương x,y,z thỏa $xy+yz+zx=3xyz$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^3}{z+x^2}+\dfrac{y^3}{x+y^2}+\dfrac{z^3}{y+z^2}\ge\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

Lời giải

Theo đề bài ta có: $xy+yz+zx=3xyz$

$$\Leftrightarrow\frac{xy}{xyz}+\frac{yz}{xyz}+\frac{zx}{xyz}=3\Leftrightarrow\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$$

Lại có: $3xyz=xy+yz+xz\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^3}\Rightarrow xyz\ge1\Rightarrow x+y+z\ge3$

Ta có

$$\frac{x^3}{z+x^2}=x-\frac{xz}{z+x^2}\overset{AM-GM}{\ge}x-\frac{xz}{2\sqrt{zx^2}}=x-\frac{\sqrt{z}}{2}\ge x-\frac{z+1}{4}$$

(Do $\quad z+1\ge2\sqrt{z}\Rightarrow\sqrt{z}\le\dfrac{z+1}{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{z}}{2}\le\dfrac{z+1}{2}\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{z}}{2}\ge\dfrac{z+1}{2}$)

Tương tự ta có: $\frac{y^3}{x+y^3} \ge y - \frac{x+1}{4}$; $\frac{z^3}{y+z^2} \ge z - \frac{y+1}{4}$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{x^3}{z+x^2}+\frac{y^3}{x+y^2}+\frac{z^3}{y+z^2} \ge x+y+z-\frac{x+y+z+3}{4} \ge 3-\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(\text{đpcm})$$

Câu 67: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2018-2019]

Cho a, b là hai số thay đổi thỏa mãn các điều kiện $a>0$ và $a+b \ge 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{8a^2+b}{4a}+b^2$

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $a+b \ge 1 \Leftrightarrow b \ge 1-a$

$$\Rightarrow A \ge \frac{8a^2+1-a}{4a}+b^2=2a+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4}+b^2=a+\frac{1}{4a}+a+b^2-\frac{1}{4}$$

$$\ge a+\frac{1}{4a}+a+a^2-2a+1-\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4a}+a^2-a+\frac{3}{4}=a+\frac{1}{4a}+a^2-a+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{a.\frac{1}{4a}}+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \ge 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4a}; a-\frac{1}{2}=0 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$ (tm)

Vậy $\text{Min}A=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Câu 68: [TS10 Chuyên Bình Định, 2018-2019]

Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a+\frac{1}{b}=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}$$

Lời giải

Ta có: $a+\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{b}=1-a \Leftrightarrow ab+1=b$ v$(a>0, b>0)$

Lại có HĐT: $2(x^2+y^2)=(x+y)^2-(x-y)^2 \Rightarrow x^2+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$ (1) , dấu"=" xãy ra khi và chỉ khi x= y

và có HĐT: $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy \Rightarrow (x+y)^2 \ge 4xy$ (2), dấu"=" xãy ra khi và chỉ khi x= y

Áp dụng (1), ta có:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+b+\frac{1}{a}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+\frac{ab+1}{a}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}{2}\quad (1'),$$

dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi: $a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}$ và $a+\frac{1}{b}=1$

Áp dụng (2), ta có:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 \ge 4\frac{a}{b} \Leftrightarrow 1\ge 4\frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a}\ge 4\quad (2'),$$

dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi: $a=\frac{1}{b}$ và $a+\frac{1}{b}=1$

Từ (1') và (2') suy ra:

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{(1+4)^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a=\frac{1}{b}$ hay $b=\frac{1}{a}$

Vậy $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}$, dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi: $a=\frac{1}{2}$ và $b=2$.

Câu 69: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2018-2019]

Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}+\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}+\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}}=\sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}}=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}}\le\frac{1}{2}.\left(\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}\right);\sqrt{\frac{xz}{xz+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}\right)$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{x+y}+\frac{z}{x+z}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{x+z}+\frac{z}{x+z}\right)+\left(\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x+y}\right)+\left(\frac{z}{y+z}+\frac{y}{y+z}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{1}{2}.3=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$.

Câu 70: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $(x-y)(x-z)=1;\ y\neq z$. Chứng minh

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq 4.$$

Lời giải

Đặt $x-y=a;\ x-z=b$ ta được $ab=1;\ a\neq b$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\geq 4\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-2ab}\geq 4\quad\Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{1}{a^2+b^2-2}\geq 4$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2+\frac{1}{a^2+b^2-2}\geq 2.$$

Do $ab=1;\ a\neq b$ nên $a^2+b^2>2ab$ hay $a^2+b^2-2>0$.

Mặt khác $(a^2+b^2-2)+\frac{1}{a^2+b^2-2}\geq 2\sqrt{(a^2+b^2-2).\frac{1}{(a^2+b^2-2)}}$ tức là

$$a^2+b^2-2+\frac{1}{a^2+b^2-2}\geq 2.$$

Vậy $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq 4.$

Câu 71: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2018-2019]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\leq 2$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\leq\sqrt{2.\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)}.\sqrt{2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)}\leq\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{b}{b+c}\right)=2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 72: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$.

Chứng minh rằng $3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương $\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\le 2$.

Áp dụng BĐT AM-GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}=\sqrt{\frac{a}{a+b}}.\sqrt{\frac{a+b}{a+3b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+3b}\right)\ (1)$$

và $$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{2b}{a+3b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2b}{a+3b}\right).\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{a}{a+b}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{a}{a+b}\right).$ (3)

Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{b}{a+b}\right).$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\le 2.$ (điều phải chứng minh)

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=\frac{1}{4}$.

Câu 73: [TS10 Chuyên Khánh Hòa, 2018-2019]

Cho a, b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1$

Lời giải

Ta có: $a+b+c=abc\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1$

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c}$ thì bất đẳng thức đã cho trở thành : $xy+xz+yz=1$

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}-c\sqrt{\frac{1}{c^2}+1}<1$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}-\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}<1$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)-\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{z}>0$$

Ta lại có:

$$\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\sqrt{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

$$=\sqrt{(xz+yz)^2+(x+y)^2}=\sqrt{(z^2+1)(x+y)^2}=(x+y)\sqrt{1+z^2}$$

$$\Rightarrow \text{bdt}\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z(x+y)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(xz+yz)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(1-xy)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{xy\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 74: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2018-2019]

Cho a,b,c thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab-2}}+\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}+\frac{1}{\sqrt{c^4+c^3+ac+2}}\le\sqrt{3}$$

Lời giải

Ta có:

$$(a-1)^2\left(a^2+a+1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(a^2-2a+1\right)\left(a^2+a+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-a^3-a+1\ge 0\Leftrightarrow a^4-a^3+1\ge a$$

$$\Leftrightarrow a^4-a^3+ab+2\ge ab+a+1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab+2}}\le\frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}\le\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}};\frac{1}{\sqrt{c^4-c^3+ac+2}}\le\frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}$$

Như vậy

$$VT\le\frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}}+\frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}\le\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}$$

(Áp dụng BĐT Bunyakovski cho 3 số)

Lại có

$$\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{a^2bc+abc+ab}\right)}$$

$$=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{ab}{a+ab+1}\right)}=\sqrt{3}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 75: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2018-2019]

Cho a là số bất kì,chứng minh rằng: $\dfrac{a^{2010}+2010}{\sqrt{a^{2010}+2009}}>2$

Lời giải

Ta có:

$$a^{2010}+2010>2\sqrt{a^{2010}+2009}\Leftrightarrow a^{2010}+2009+1>2\sqrt{a^{2010}+2009}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^{2010}+2009}\right)^2-2\sqrt{a^{2010}+2009}+1>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^{2010}+2009}-1\right)^2>0 \text{ luôn đúng với mọi a}$$

Câu 76: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

Chứng minh rằng: $3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}\overset{AM-GM}{\le}\dfrac{a+3b+b+3a}{4}=a+b$

Từ giả thiết ta có:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1\Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}=1\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}=1-a-b\Leftrightarrow 4ab=(1-a-b)^2$$

$$3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}\Leftrightarrow 3(a+b)^2-(a+b)+(1-a-b)^2\ge a+b$$

$$\Leftrightarrow 3a^2+6ab+3b^2-2a-2b+a^2+b^2+1-2a-2b+2ab\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+1+8ab-4a-4b\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(1-2a-2b)^2\ge 0$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 77: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2017-2018]

Cho x, y là hai số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{xy}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM – GM cho ba số không âm ta có:

$$P=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{xy}-2=\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{xy}-2$$

$$\ge 3.\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{(x+y)^2}{xy}}-2=10$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{(x+y)^2}{xy}\Leftrightarrow x=y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10

Câu 78: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2017-2018]

Cho a, b, c là độ dài của ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}>1$$

Lời giải

Ta có: $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}>1$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a^2+b^2-c^2)+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-2abc}{2abc}>0$$

$$\Leftrightarrow c(a^2+b^2-c^2)+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-2abc>0$$

$$\Leftrightarrow c(a^2+b^2-c^2+2ab)+a(b^2+c^2-a^2-2bc)+b(a^2+c^2-b^2-2ca)>0$$

$$\Leftrightarrow c((a+b)^2-c^2)+a((b-c)^2-a^2)+b((c-a)^2-b^2)>0$$

$$\Leftrightarrow c(a+b+c)(a+b-c)+a(b-c-a)(b+a-c)+b(c-a-b)(c+b-a)>0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c\left(a+b+c\right)+a\left(b-c-a\right)+b\left(a-c-b\right)\right]>0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(c^2-a^2+2ab-b^2)>0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)[c^2-(a-b)^2]>0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0$$

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $\begin{cases}a+b-c>0\\c+b-a>0\\c+a-b>0\end{cases}$

Suy ra: $(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0\Leftrightarrow x=y$ (luôn đúng)

Vậy ta chứng minh được BĐT ban đầu.

Câu 79: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội vòng 1, 2017-2018]

Cho a, b là số các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=(a+b)(\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{a+b^3})-\frac{1}{ab}$$

Lời giải

Ta có: $(a^3+b)(\frac{1}{a}+b)\ge(a+b)^2;(b^3+a)(\frac{1}{b}+a)\ge(a+b)^2.$

Khi đó $\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{a+b^3}\le\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{(a+b)^2}\Leftrightarrow VT\le\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}-\frac{1}{ab}=1+\frac{1}{ab}-\frac{1}{ab}=1.$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a=b=1$.

Câu 80: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2, 2017-2018]

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab + bc + ca + abc = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2x+2}$.

Lời giải

Với x, y dương ta có bất đẳng thức thức: $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(*)$:

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow\frac{x+y}{4xy}\ge\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge4xy\Leftrightarrow(x-y)^2\ge0$ (luôn đúng)

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" khi $x=y$.

Quay trở lại bài toán ta có:

$$\begin{aligned}&abc+ab+bc+ca=2\\ \Leftrightarrow\ &abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=a+b+c+3\\ \Leftrightarrow\ &(a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)(b+1)(c+1)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(b+1)(c+1)}+\frac{1}{(c+1)(a+1)}=1\end{aligned}$$

Đặt $a+1=\frac{\sqrt{3}}{x},b+1=\frac{\sqrt{3}}{y},c+1=\frac{\sqrt{3}}{z}$

Khi đó giả thiết bài toán trở thành: $xy + yz + zx = 3$ và

$$M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2x+2}$$
$$=\frac{a+1}{(a+1)^2+1}+\frac{b+1}{(b+1)^2+1}+\frac{c+1}{(c+1)^2+1}$$
$$=\frac{1}{a+1+\frac{1}{a+1}}+\frac{1}{b+1+\frac{1}{b+1}}+\frac{1}{c+1+\frac{1}{c+1}}$$
$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{x}+\frac{x}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{y}+\frac{y}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{z}+\frac{z}{\sqrt{3}}}$$
$$=\sqrt{3}(\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1})$$
$$=\sqrt{3}(\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)})$$

$\leq\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. (Áp dụng bất đẳng thức (*))

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{3}-1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Câu 81: [TS10 Chuyên Bình Dương, 2017-2018]

Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $x\geq 2y$.

Tìm GTNN của biểu thức $M=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

Lời giải

Ta có : $M=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2+4y^2}{xy}-\frac{3y^2}{xy}\geq\frac{4xy}{xy}-\frac{3y}{x}\geq 4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x^2=4y^2\\ x=2y\end{cases}\Leftrightarrow x=2y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{5}{2}$ khi $x=2y$.

Câu 82: [TS10 Chuyên Nam Định, 2017-2018]

Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất cảu biểu thức $P=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+(a+b)(4+5c)$.

Lời giải

Áp dụng BĐT : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{1}{x+y}(\forall x,y\neq 0)$

Ta có :

$$P=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+(a+b)(5c+4)\ge\frac{4}{(a+b)(c+1)}+(a+b)(5c+4)$$

$$=\frac{4}{(1-c)(1+c)}+(1-c)(5c+4)\ge 4\sqrt{\frac{5c+4}{c+1}}=4\sqrt{\frac{c}{c+1}+4}\ge 8$$

Dấu « = » xảy ra khi $c=0, a=b=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỉ nhất của P là 8

Câu 83: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2017-2018]

Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{xy}{x^2+y^2}+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\sqrt{2(x^2+y^2)}.$$

Lời giải

Ta có : $x^2+y^2\ge 2xy$ nên : $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$. Do đó :

$$P=\frac{xy}{x^2+y^2}+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\sqrt{2(x^2+y^2)}\ge\frac{xy}{x^2+y^2}+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(x+y)\ge\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2$$

$$\ge\frac{4xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2-\frac{3xy}{x^2+y^2}\ge 2\sqrt{4}+2-\frac{3(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}$$

$$\ge 6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

Dấu « = » xảy ra khi $\begin{cases}x^2+y^2=2xy\\ \dfrac{4xy}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}\end{cases}\Leftrightarrow x=y.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

Câu 84: [TS10 Chuyên Bạc Lưu, 2017-2018]

Cho a, b, c thỏa mãn $a\ge 1; b\ge 4; c\ge 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M=\frac{bc\sqrt{a-1}+ac\sqrt{b-4}+ab\sqrt{c-9}}{abc}.$$

Lời giải

Ta có : $M=\frac{\sqrt{a-1}}{a}+\frac{\sqrt{b-4}}{b}+\frac{\sqrt{c-9}}{c}$.

Do $a\ge 1; b\ge 4; c\ge 9$. Áp dụng BĐT AM –GM cho các cặp số không âm, ta có :

$$\begin{cases} a=(a-1)+1\ge 2\sqrt{a-1} \\ b=(b-4)+4\ge 4\sqrt{b-4} \\ c=(c-9)+9\ge 6\sqrt{c-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a-1}}{a}\le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{b-4}}{b}\le \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\sqrt{c-9}}{c}\le \dfrac{1}{6} \end{cases}$$. Do đó : $M\le \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$.

Dấu « = » xảy ra khi $\begin{cases} a-1=1 \\ b-4=4 \\ c-9=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \\ c=18 \end{cases}$

Câu 85: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2017-2018]

1) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{4c}{a+b}>2$

2) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=11 \\ ab+bc+ca=7 \end{cases}$

Chứng minh: $\dfrac{1}{3}\le a,b,c\le 3$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x=a+b \\ y=b+c \\ z=c+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y+z-x}{2} \\ b=\dfrac{x-y+z}{2} \\ c=\dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+4\frac{x+y-z}{2z}$$

$$=\left(\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{2y}{z}+\frac{z}{2y}\right)+\left(\frac{2x}{z}+\frac{z}{2x}\right)-3$$

$$\overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{\frac{y}{2x}.\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{2y}{z}.\frac{z}{2y}}+2\sqrt{\frac{2x}{z}.\frac{z}{2x}}-3$$

$$=1+2+2-3$$

$$=2$$

Dấu "=" không xảy ra nên $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{4c}{a+b}>2$ (đpcm)

Cách khác:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwars ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{4c^2}{ac+bc}\ge\frac{(a+b+2c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Ta lại có: $\frac{(a+b+2c)^2}{2(ab+bc+ca)}>2\ (*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow(a+b+2c)^2-4(ab+bc+ca)>0\Leftrightarrow(a-b)^2+4c^2>0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

b) Ta có: $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=11\\ab+bc+ca=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=5-c\\ab=7-c(a+b)=7-c(5-c)\end{cases}$

Do: $(a-b)^2\ge0\Leftrightarrow(a+b)^2\ge4ab\Leftrightarrow(5-c)^2\ge4(7-5c+c)^2$

$\Leftrightarrow3c^2-10c+3\le0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le c\le3$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{1}{3}\le a\le3,\frac{1}{3}\le b\le3$

Vậy $\frac{1}{3}\le a,b,c\le3$

Câu 86: [TS10 Chuyên Bắc Giang, 2017-2018]

Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $2\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{x}{3}}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức: $P=\frac{x}{y}+\frac{4x}{3y}+15xy.$

Lời giải

Tách và áp dụng BĐT AM-GM ta được:

$$P=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{3y}+3xy+12xy+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}$$

$$\ge2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+2.\sqrt{\frac{x}{3y}.3xy}+2\sqrt{12xy.\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}$$

$$\ge2+2x+8\sqrt{xy}-\frac{4}{3}=2x+\frac{2}{3}+8\sqrt{xy}$$

$$\ge2\sqrt{2x.\frac{2}{3}}+8\sqrt{xy}=4\sqrt{\frac{x}{3}}+8\sqrt{xy}=4$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{3}$

Câu 87: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2017-2018]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}+\frac{2018}{2018+c}\le1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=abc.$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}+\frac{2018}{2018+c}\le 1\Rightarrow 1-\frac{2018}{2018+c}\ge \frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2018+c}\ge \frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}\overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{\frac{1}{1+a}.\frac{2017}{2017+b}}$$

Tương tự: $\frac{b}{2017+b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{1+a}.\frac{2018}{2018+c}}$; $\frac{a}{1+a}\ge 2\sqrt{\frac{2017}{2017+b}.\frac{2018}{2018+c}}$

Nhân theo vế ta được:

$$\frac{abc}{(a+1)(2017+b)(2018+c)}\ge 8\frac{2017.2018}{(a+1)(2017+b)(2018+c)}\Leftrightarrow abc\ge 8.2017.2018$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1,b=2017,c=2018$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 8.2017.2018

Câu 88: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2017-2018]

a) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $|a|\le 1,\ |b|\le 1,\ |c|\le 1$. Chứng minh rằng $a^4+b^6+c^8\le 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$ với x,y là các số thực lớn hơn 1.

Lời giải

a) Từ giả thiết $|a|\le 1,|b|\le 1,|c|\le 1$, ta có $a^4\le a^2,b^6\le b^2,c^8\le c^2$. Từ đó $a^4+b^6+c^8\le a^2+b^2+c^2$

Lại có $(a-1)(b-1)(c-1)\le 0$ và $(a+1)(b+1)(c+1)\ge 0$ nên

$(a+1)(b+1)(c+1)-(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2ab+2bc+2ca+2\ge 0\Leftrightarrow -2(ab+bc+ca)\le 2$.

Hơn nữa $a+b+c=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-(ab+bc+ca)\le 2$. Vậy $a^4+b^6+c^8\le 2$.

b) Ta có $T=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}=\frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)}=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$

Do $x>1,y>1$ nên $x-1>0,y-1>0$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương $\frac{x^2}{y-1},\frac{y^2}{x-1}$, ta có :

$$(x-1)+1\ge 2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-1}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$$

$$\left(y-1\right)+1\ge 2\sqrt{y-1}\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-1}-1\right)^2\ge 0\Leftrightarrow y-2\sqrt{y-1}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{y-1}}\ge 2$$

Do đó $T=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\ge \frac{2xy}{\sqrt{x-1}.\sqrt{y-1}}\ge 8$

Dấu "=" xẩy ra khi $\begin{cases}\frac{x^2}{y-1}=\frac{y^2}{x-1}\\ x-1=1\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=8$ khi $x=y=2$.

Câu 89: [TS10 Chuyên Quảng Ninh, 2017-2018]

Cho $a;b$ thoả mãn $|a|\ge 2;|b|\ge 2$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)\ge (a+b)(ab+1)+5.$$

Lời giải

Xét hiệu $M=(a^2+1)(b^2+1)-(a+b)(ab+1)-5$

$=(a^2b^2-a^2b-ab^2+ab)+(a^2+b^2-a-b-ab)-4$

$=ab(a-1)(b-1)+\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+a(a-2)+b(b-2)\right]-4$.

Chỉ ra với $|a|\ge 2$ thì $a(a-1)\ge 2$ và $a(a-2)\ge 0$

$|b|\ge 2$ thì $b(b-1)\ge 2$ và $b(b-2)\ge 0$

nên $ab(a-1)(b-1)\ge 4$; $\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+a(a-2)+b(b-2)\right]\ge 0$

$\Rightarrow M\ge 0$ hay $(a^2+1)(b^2+1)\ge (a+b)(ab+1)+5$.

Câu 90: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2017-2018]

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 9.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$4\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 27$

$\Leftrightarrow 4\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge \left(a+b+c\right)^3$

$\Leftrightarrow \left(a^3+b^3+c^3\right)+4\left(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right)\ge \left(a+b+c\right)^3$ (1)

Ta có đẳng thức $(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)+6abc$.

Do đó (1) tương đương với $a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b\ge 6abc$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

$$\ge 2a^2\sqrt{bc}+2b^2\sqrt{ca}+2c^2\sqrt{ab}=2\left(a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}\right)\ge 6abc.$$

Vậy BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 91: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2017-2018]

Các số thực không âm $x_1,x_2,x_3,....,x_9$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+...+x_9=10 \\ x_1+2x_2+3x_3+...+9x_9=18 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+...+9.11x_9\ge 270$

Lời giải.

Ta có : $9(x_1+x_2+x_3+...+x_9)=90$, suy ra :

$$\begin{cases} 9(x_1+x_2+x_3+...+x_9)=90 \\ 10(x_1+2x_2+3x_3+...+9x_9)=180 \end{cases} \Rightarrow 19x_1+29x_2+39x_3+...+99x_9=270$$

Mặt khác:

$$1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+...+9.11x_9$$

$$=(19x_1+29x_2+39x_3+...+99x_9)+(7x_2+12x_3+15x_4+...+7x_8)\ge 270\ (\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x_1=9 \\ x_9=1 \\ x_2=x_3=...=x_8=0 \end{cases}$

Câu 92: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2017-2018]

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=6$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$

Lời giải

Ta có:

$$6=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}$$

$$\le\sqrt{3(x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2)}=\sqrt{6(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 6$$

Do đó:

$$M=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x^2}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}+\frac{y^2}{\sqrt{2\left(z^2+x^2\right)}}+\frac{z^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}$$

$$\ge\frac{6-\left(y^2+z^2\right)}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}+\frac{6-\left(z^2+x^2\right)}{\sqrt{2\left(z^2+x^2\right)}}+\frac{6-\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}$$

$$\ge\frac{6}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}\right)$$

$$\ge\frac{6}{\sqrt{2}}.\frac{9}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}}-\frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{2}}.\frac{9}{6}-\frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 93: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội vòng 2, 2017-2018]

Cho các số dương a,b,c,d . Chứng minh rằng trong 4 số

$a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ Có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Lời giải

Giả sử cả bốn số đều nhỏ hơn 3 thì

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<3$$

Mặt khác :

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a^2+b^2+c^2+d^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Do $4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\left(a+b+c+d\right)^2;\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{4}{a+b+c+d}$

$$\Rightarrow P\ge\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{4}+\frac{16}{a+b+c+d}+\frac{16}{a+b+c+d}\ge3\sqrt[3]{\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{4}.\frac{16}{a+b+c+d}.\frac{16}{a+b+c+d}}=12$$

Trái điều giả sử suy ra có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu 94: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2017-2018]

Cho 3 số a, b, c dương và $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=3a^4b^4c^4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{3}{4}.$$

Lời giải

Ta có:

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=3a^4b^4c^4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=4 \quad (1)$$

Sử dụng AM-GM ta có:

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{a^{12}}.\frac{1}{b^4}}=\frac{4}{a^3b}$$

Là tương tự và cộng theo vế ta được: $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}$ (2)

Mặt khác: $\frac{1}{a^4}+1\overset{AM-GM}{\ge}\frac{2}{a^2}$

Làm tương tự và cộng lại ta được: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+\frac{3}{2}$ (3)

Với x, y, z, t dương ta có: $\frac{1}{x+y+z+t}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$ (*)

Thật vậy, sử dụng AM-GM ta có:

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\ge 4\sqrt[4]{xyzt}.\frac{4}{\sqrt[4]{xyzt}}=16$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z+t}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = t.

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{a^3b+2c^2+1}=\frac{1}{a^3b+c^2+c^2+1}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}+1\right)$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^3c+2a^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^3c}+\frac{2}{a^2}+1\right);\ \frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^3c}+\frac{2}{a^2}+1\right)$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{16}$$

Theo (1), (2) và (3) ta có thể suy ra:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}&\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{16}\\&\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+3\right)+\frac{3}{16}\\&=\frac{3}{16}+\frac{6}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 95: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2017-2018]

Cho a, b, c là các số thực dương.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Lời giải

Với a, b, c dương ta có: $\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ (1)

Thật vậy:

$$VT=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+ab^2+ac^2+b^2+ba^2+bc^2+c^3+ca^2+cb^2$$

$$=\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(a^3+ab^2\right)+\left(b^3+bc^2\right)+\left(c^3+ca^2\right)$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+2a^2b+2b^2c+2c^2a$$

$$=3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)=VP$$

Do đó: $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^2+b^2+c^2}\le\dfrac{a+b+c}{3}$

$$P=\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\frac{a+b+c}{3}-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\le\frac{a+b+c}{3}-\frac{1}{9}\left(a+b+c\right)^2=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)-\frac{1}{2}\right]^2\le\frac{1}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{4}$

Câu 96: [TS10 Chuyên Tây Ninh, 2017-2018]

Cho x, y là số thực dương nhỏ hơn 1.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{xy\left(1-x-y\right)}{\left(x+y\right)\left(1-x\right)\left(1-y\right)}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{Q}=\frac{\left(x+y\right)\left(1-x\right)\left(1-y\right)}{xy\left(1-x-y\right)}=\frac{\left(x+y\right)\left(1-x-y+xy\right)}{xy\left(1-x-y\right)}=\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{1-x-y}=\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{1-\left(x+y\right)}$$

Đặt t = x + y, ta được:

$$\frac{1}{Q}=\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{1-\left(x+y\right)}\ge\frac{4\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)^2}+\frac{x+y}{1-\left(x+y\right)}=\frac{4}{x+y}+\frac{x+y}{1-\left(x+y\right)}=\frac{4}{t}+\frac{t}{1-t}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$\frac{1}{Q}=\frac{4}{t}+\frac{t}{1-t}=\frac{2^2}{t}+\frac{1}{1-t}-1\ge\frac{(2+1)^2}{t+1-t}-1=\frac{9}{1}-1=8\Rightarrow Q\le\frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\frac{1}{8}$

Câu 97: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2017-2018]

Cho a, b, c dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2018$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{a+\sqrt{2018a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2018b+ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{2018c+ab}}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{a+\sqrt{2018a+bc}}=\frac{a}{a+\sqrt{(a+b+c)a+bc}}=\frac{a}{a+\sqrt{ab+\left(a^2+bc\right)+ac}}$$

$$\le\frac{a}{a+\sqrt{ab+2a\sqrt{bc}+ac}}=\frac{a}{a+\sqrt{\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\right)^2}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Tương tự: $\frac{b}{b+\sqrt{2018b+ca}}\le\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\frac{c}{c+\sqrt{2018c+ab}}\le\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Cộng theo vế ta được: $P\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{2018}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 98: [TS10 Chuyên Đồng Tháp, 2018-2019]

Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\ge 2$

Lời giải

Sử dụng BĐT AM-GM ta được:

$$\sqrt{x^2\left(1-x^2\right)}\le\frac{x^2+1-x^2}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^3}{\sqrt{x^2\left(1-x^2\right)}}\ge 2x^3$$

Tương tự: $\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\ge 2y^3$; $\frac{x^2}{\sqrt{1-z^2}}\ge 2z^3$

Cộng theo vế ta được: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\ge 2\left(x^3+y^3+z^3\right)=2$ (đpcm)

Câu 99: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2018-2019]

Cho a, b, c là số dương thay đổi thỏa mãn điều kiên: $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Tìm giá trị biểu thức: $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 1.

Câu 100: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2018-2019]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}+\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}+\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}=\frac{(3a^2+3)+6a-2a^2}{a^2+a}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{6a+6a-2a^2}{a^2+a}=\frac{12a-2a^2}{a^2+a}=\frac{14}{a+1}-2$$

Tương tự: $\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}\ge\frac{14}{b+1}-2$; $\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}\ge\frac{14}{c+1}-2$

Cộng theo vế và sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng cộng mẫu số ta được:

$$M=\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}+\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}+\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}\ge 14\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)-6$$

$$\ge 14.\frac{9}{a+b+c+3}-6\ge 14.\frac{9}{3+3}-6=15$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 101: [TS10 Chuyên Vĩnh Long, 2018-2019]

Cho x, y, z dương thỏa mãn $x+y+z=4$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\ge 1$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{1}{x}.\frac{4}{y+z}=\frac{4}{x(y+z)}\ge\frac{16}{(x+y+z)^2}=1\,(\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi x = 2, y = z = 1.

NĂM HỌC 2016-2017

Câu 102: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a+b+c=2016$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2016b+ac}}+\frac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}$.

Lời giải

Ta có $a+\sqrt{2016a+bc}=a+\sqrt{(a+b+c)a+bc}=a+\sqrt{(a+b)(a+c)}$

Áp dụng bđt Bunyakoskicopski ta có:

$(a+b)(a+c)=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right].\left[\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}\right)^2\right]\ge\left(\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right)^2$

Suy ra $a+\sqrt{(a+b)(a+c)}\ge a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

Suy ra $\frac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}\le\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Tương tự $\frac{b}{b+\sqrt{2016b+ac}}\le\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\frac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}\le\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Suy ra $P\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$, Dấu = xảy ra khi $a=b=c=672$

Câu 103: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2016-2017]

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn ab + bc + ca = 3abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ điều kiện đề bài ta có $\frac{ab+bc+ca}{abc}=3\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$a^2+bc\ge2\sqrt{a^2.bc}=2a\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\le\frac{2}{2a\sqrt{bc}}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}$

$\frac{1}{\sqrt{b}}.\frac{1}{\sqrt{c}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b^2+ca}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$; $\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Suy ra $\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$.

Câu 104: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2016-2017]

Cho hai số thực *a, b* đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}+\sqrt{3ab+4}\ge\frac{11}{2}.$$

Lời giải

Ta có: $a\sqrt{b-1}\le a.\frac{b-1+1}{2}=\frac{ab}{2}$.

Tương tự: $b\sqrt{a-1}\le b.\frac{a-1+1}{2}=\frac{ab}{2}\Rightarrow\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}\ge\frac{6}{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=2$.

$$Q=\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}+\sqrt{3ab+4}\ge\frac{6}{ab}+\sqrt{3ab+4}=\frac{18}{3ab}+\sqrt{3ab+4}.$$

Đặt $y=\sqrt{3ab+4}\Rightarrow 3ab=y^2-4$. Khi đó:

$$Q\ge\frac{18}{y^2-4}+y=\frac{18}{(y+2)(y-2)}+\frac{3}{4}(y-2)+\frac{1}{4}(y+2)+1\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{18.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}}+1=\frac{11}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $y=2$ hay $a=b=2$.

Câu 105: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2016-2017]

Cho *x, y, z* là 3 số dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh :

$$\frac{x^2}{y+2}+\frac{y^2}{z+2}+\frac{z^2}{x+2}\ge1.$$

Lời giải

Ta có $\frac{x^2}{y+2}+\frac{y+2}{9}\ge2\sqrt{\frac{x^2}{y+2}.\frac{y+2}{9}}=\frac{2}{3}x\Rightarrow\frac{x^2}{y+2}\ge\frac{6x-y-2}{9}$

Tương tự $\frac{y^2}{z+2}\ge\frac{6y-z-2}{9}$, $\frac{z^2}{x+2}\ge\frac{6z-x-2}{9}$.

Đặt vế trái của (*) là *P*. Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$P\ge\frac{5(x+y+z)-6}{9}$$

Lại có $\dfrac{(x+y+z)^3}{9} \ge 3xyz,\ x^2+y^2+z^2 \ge \dfrac{1}{3}(x+y+z)^2$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{(x+y+z)^3}{9} \ge \dfrac{1}{3}(x+y+z)^2 \Leftrightarrow x+y+z \ge 3$.

Do đó $P \ge 1$.

Câu 106: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2016-2017]

Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \ge 7$$

Lời giải

Vì a, b, c không âm và có tổng bằng 1 nên $0 \le a,b,c \le 1 \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \ge 0 \\ b(1-b) \ge 0 \\ c(1-c) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge a^2 \\ b \ge b^2 \\ c \ge c^2 \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{5a+4} \ge \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = a+2$

Tương tự $\sqrt{5b+4} \ge b+2; \sqrt{5c+4} \ge c+2$

Do đó $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \ge (a+b+c)+6 = 7$ (đpcm)

Câu 107: [TS10 Chuyên Sơn La, 2016-2017]

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a+b \le 2\sqrt{2}$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

Lời giải

Với mọi a, b ta luôn có: $(a - b)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \ge 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$ (*)

Vì a, b đều dương nên ab và a+ b cũng dương bất đẳng thức (*) trở thành:

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab} \ge \dfrac{4}{a+b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b} \Rightarrow P \ge \dfrac{4}{a+b}$ mà $a+b \le 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{4}{a+b} \ge \dfrac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow P \ge \sqrt{2}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ a+b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$

Vậy min P= $\sqrt{2}$

Câu 108: [TS10 Chuyên Bình Thuận, 2016-2017]

Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}+\frac{yz}{y^2+zx+xy}+\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta có:

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}\le\frac{xy\left(y^2+yz+zx\right)}{\left(x^2+yz+zx\right)\left(y^2+yz+zx\right)}\le\frac{xy\left(y^2+yz+zx\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}$$

Tương tự: $\frac{yz}{y^2+zx+xy}\le\frac{yz\left(z^2+zx+xy\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}$; $\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{zx\left(x^2+xy+yz\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}$

Suy ra

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}+\frac{yz}{y^2+zx+xy}+\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Câu 109: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2016-2017]

Cho x, y > 0 và $x+y\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$M=6x^2+4y^2+10xy+\frac{4x}{y}+\frac{3y}{x}+2016$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$xy+\frac{4x}{y}\ge 4x\ ;\quad 3xy+\frac{3y}{x}\ge 6y$$

Do đó:

$$A\ge 6x^2+6xy+4y^2+4x+6y=6x\left(x+y\right)+4y^2+6y+4x\ge 6x.3+4y^2+6y+4x$$

$$=2x+4y^2+6y\ge 22x+4\left(4y-4\right)+6y=22\left(x+y\right)-16\ge 50$$

Suy ra: $M\ge 50+2016=2066$

Dấu "=" xảy ra khi x = 1; y = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2066.

Câu 110: [TS10 Chuyên Thái Nguyên, 2016-2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 9$

Ta có: $P=\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=\sqrt{x-9+6\sqrt{x-9}+9}+\sqrt{x-9-6\sqrt{x-9}+9}$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-9}+3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-9}-3\right)^2}=\sqrt{x-9}+3+\left|3-\sqrt{x-9}\right|\ge\sqrt{x-9}+3+3-\sqrt{x-9}$$

$$=6$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x \geq 9 \\ 3-\sqrt{x-9} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 \leq x \leq 18.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Câu 111: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2016-2017]

Cho x, y, z ≥ 1 và thỏa mãn $3x^2+4y^2+5z^2=52$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=x+y+z$

Dự đoán: Ta đoán dấu bằng xảy ra khi x = y = 1, z = 3.

Lời giải

Do x, y, z ≥ 1 nên: $(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x+y-1$

Làm tương tự và cộng theo vế ta được: $xy+yz+zx \geq 2(x+y+z)-3$

Do đó:

$$5(x+y+z)^2=5(x^2+y^2+z^2)+10(xy+yz+zx) \geq 52+2x^2+y^2+10[2(x+y+z)-3]$$

$$\geq 52+2+1+20(x+y+z)-30$$

Suy ra: $x+y+z \geq 5$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 1, z = 3.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là 5.

Câu 112: [TS10 Chuyên Quảng Bình, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a^3.b}}}=\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt[4]{a^3.b}} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{\sqrt{b^3+c}} \leq \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\quad \dfrac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 113: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2016-2017]

Cho các số x, y dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1}+\frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3+1}-1}+\frac{(2x+y)(x+2y)}{4}-\frac{8}{3(x+y)}$$

Lời giải

Đặt $2x+y=a,\ x+2y=b$ và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P=\frac{2}{\sqrt{a^3+1}-1}+\frac{2}{\sqrt{b^3+1}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{8}{a+b}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}-1}+\frac{2}{\sqrt{(b+1)(b^2-a+1)}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{8}{a+b}$$

$$\geq\frac{2}{\frac{a+1+a^2-a+1}{2}-1}+\frac{2}{\frac{b+1+b^2-a+1}{2}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}$$

$$\geq\frac{8}{ab}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}$$

Đặt $t=\sqrt{ab}$. Ta sẽ chứng minh: $\frac{8}{t^2}+\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t}\geq 1$ (*)

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow(t-2)^2(t^2+4t+8)\geq 0$

Vậy $P\geq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 114: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2016-2017]

Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng: $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y}-\frac{x+y}{2}\leq\frac{1}{4}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x+\frac{1}{4}\geq\sqrt{x}\qquad(1);$$

$$y+\frac{1}{4}\geq\sqrt{y}\qquad(2);$$

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}\qquad(3).$$

Cộng theo vế (1) và (2): $x+y+\frac{1}{2}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}\qquad(4)$

Nhân theo vế (3) và (4):

$$(x+y)^2+\frac{1}{2}(x+y)\geq 2\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\qquad(5)$$

Chia của 2 vế của (5) cho $2(x+y)$ được:

$$\frac{x+y}{2}+\frac{1}{4}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\Rightarrow\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y}-\frac{x+y}{2}\leq\frac{1}{4}\ \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{4}$.

Câu 115: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2016-2017]

Cho a, b, c là số thực dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$$

Lời giải

Với x, y dương ta có bất đẳng thức thức: $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(*)$:

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow\frac{x+y}{4xy}\ge\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" khi x = y.

Áp dụng BĐT (*) ta được: $\frac{1}{ab+a+2}=\frac{c}{1+ac+2c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{1}{bc+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right);\quad \frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{4}\text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 116: [TS10 Chuyên Nam Định, 2016-2017]

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x-y)(x-z)=1$ và $y\ne z$. Chứng minh: $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge 4$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}=\frac{(y-z)^2+2(x-y)(x-z)}{(x-y)^2(x-z)^2}$

$$=\frac{(y-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}+2.\frac{1}{(x-y)(x-z)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{(y-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}+2.\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(z-x)^2}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}\frac{4}{(x-y)(x-z)}=4$$

Câu 117: [TS10 Chuyên Ninh Thuận, 2016-2017]

Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^2+b^2+c^2-6(a+b+c)+2017$

Lời giải

Ta có:

$$P=a^2+b^2+c^2-6(a+b+c)+2017=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-6-6(a+b+c)+2017$$
$$=(a+b+c)^2-6(a+b+c)+2011=(a+b+c)^2-6(a+b+c)+9+2002$$
$$=(a+b+c-3)^2+2002$$
$$\geq 2002$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2002.

Câu 118: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2016-2017]

Cho a, b, c > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=\dfrac{3a^4+3b^4+c^3+2}{(a+b+c)^3}$

Lời giải

Sử dụng AM-GM ta được:

$$3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\geq 4\sqrt[4]{a^{12}}=4a^3;\quad 3b^4+1=b^4+b^4+b^4+1\geq 4\sqrt[4]{b^{12}}=4b^3$$

Do đó:

$$M=\frac{3a^4+3b^4+c^3+2}{(a+b+c)^3}\geq\frac{4a^3+4b^3+c^3}{(a+b+c)^3}$$

Ta dễ dàng chứng minh được BĐT với a, b dương thì: $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3\quad(*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\geq 0$ (đúng)

Vậy (*) được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng (*) ta được:

$$M\geq\frac{4a^3+4b^3+c^3}{(a+b+c)^3}\geq\frac{(a+b)^3+c^3}{(a+b+c)^3}\geq\frac{(a+b+c)^3}{4(a+b+c)^3}=\frac{1}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1,\ c=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{1}{4}$

Câu 119: [TS10 Chuyên Ninh Thuận, 2016-2017]

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=12$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2x+3y+3z}+\dfrac{1}{3x+2y+3z}+\dfrac{1}{3x+3y+2z}\leq 3.$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Với a, b, c dương ta có: $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (*)

Thậy vậy: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}}=4\Rightarrow\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Vậy (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Sử dụng (*) ta được:

$$\frac{1}{2x+3y+3z}=\frac{1}{(x+y)+(x+z)+2(y+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{2(y+z)}\right)$$

$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{1}{2(y+z)}\right]=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{2}{y+z}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{3x+2y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right);\quad\frac{1}{3x+3y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{x+y}\right).$$

Cộng 3 BĐT trên theo vế được:

$$\frac{1}{2x+3y+3z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{3x+3y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)=3\ \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

Câu 120: [TS10 Chuyên Đồng Tháp, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$$

Do a dương và $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow 0<a<1\Rightarrow 0<a^2<1$

Áp dụng AM-GM ta được:

$$a^2\left(1-a^2\right)^2=\frac{1}{2}.2x^2.\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)\le\frac{1}{2}\left[\frac{2x^2+\left(1-x^2\right)+\left(2-x^2\right)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a\left(1-a^2\right)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{1}{a\left(1-a^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{a}{1-a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{b}{1-b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$; $\quad\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$P=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 121: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2016-2017]

Biết $x\ge y\ge z, x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6$.

1) Tính $S=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$
2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$

Lời giải

1) Ta có:

$$S=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=6-\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=6-\frac{0^2-6}{2}=9$$

2) Đặt $a=x-y, b=y-z$. Khi đó ta có $a\ge 0, b\ge 0$ và $a^2+ab+b^2=9$

$$\Rightarrow (a+b)^2-9=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow a+b\le 2\sqrt{3}$$

Đặt $t=a+b$. Khi đó: $P=t(t^2-9)$

Ta sẽ chứng minh: $t(t^2-9)\le 6\sqrt{3}$ $(*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow (t-2\sqrt{3})(t+\sqrt{3})\le 0$ (đúng)

Do đó: $P\le 6\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=\sqrt{3}, y=0, z=-\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $6\sqrt{3}$

Câu 122: [TS10 Chuyên KHTN, 2016-2017]

Với x, y là số thực thỏa mãn điều kiện $0<x\le x\le y\le 2, 2x+y\ge 2xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)$

Lời giải

$P=x^4+y^4+x^2+y^2$

Ta có bất đẳng thức: $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$ $(*)$

Ta có: $2x+y\ge 2xy\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\ge 2$ (vì x, y dương)

Áp dụng (*) suy ra: $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)^2\ge 2\Rightarrow\frac{1}{x^2}\ge 2-\frac{4}{y^2}$ (1)

Áp dụng tiếp (*) ta có: $\frac{1}{x^4}+\frac{16}{y^4}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\right)^2\ge 2\Rightarrow\frac{1}{x^4}\ge 2-\frac{16}{y^4}$ (2)

Có $x \le y \le 2 \Rightarrow \left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(y^2-4\right) \le 0 \Leftrightarrow y^2 \le 4+x^2-\frac{4x^2}{y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \le 4+2x^2-\frac{4x^2}{y} = 4+x^2\left(2-\frac{4}{y^2}\right) \le 4+x^2.\frac{1}{x^2} = 5$ (do (1))

Tương tự: $\left(1-\frac{x^4}{y^4}\right)\left(y^4-4\right) \le 0 \Leftrightarrow y^4 \le 16+x^4-\frac{16x^4}{y^4}$

$\Leftrightarrow y^4+x^4 \le 16+\left(2-\frac{16}{y^4}\right).x^4 \le 16+\frac{1}{x^4}.x^4 = 17$ (do (2))

$P \le 17+5 = 22$

Dấu "=" xảy ra khi x = 1, y = 2.

Vậy gí trị lớn nhất của P là 22.

Câu 123: [TS10 Chuyên Nam Định, 2016-2017]

Cho hai số a, b không âm thỏa mãn $a+b \le 3$. Chứng minh rằng:

$\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b} \ge \frac{8}{15}$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$P = \frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b} = \frac{1}{1+2a}+1+\frac{1-4b}{1+4b} = \frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b} = \frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b} = \frac{1}{1+2a}+\frac{1}{\frac{1}{2}+2b} \ge 2\frac{1}{\sqrt{(1+2a)(\frac{1}{2}+2b)}} \quad (1)$$

$$\sqrt{(1+2a)(\frac{1}{2}+2b)} \le \frac{1+2a+\frac{1}{2}+2b}{2} \le \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow 2\frac{1}{\sqrt{(1+2a)(\frac{1}{2}+2b)}} \ge \frac{8}{15} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b} \ge \frac{8}{15}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra chỉ khi : 1 + 2a = $\frac{1}{2}$ + 2b và a + b = 3 $\Leftrightarrow a = \frac{11}{8}; b = \frac{13}{8}$

Cách khác:

Ta có:

$$P=\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+1+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b}=2\left(\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{1+4b}\right)$$

Với a, b, c dương ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (*)

Thậy vậy: $\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}}=4\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$

Vậy (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng (*) ta được:

$$P=2\left(\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{1+4b}\right)\ge 2.\frac{4}{2+4a+1+4b}=\frac{8}{3+4\left(a+b\right)}\ge\frac{8}{3+4.3}=\frac{8}{15}\text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a+b=3\\2+4a=1+4b\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{11}{8};b=\frac{13}{8}$

Câu 124: [TS10 Chuyên Nam Định, 2016-2017]

Cho a, b, c dương và thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\frac{1}{4x^2-yz+2}+\frac{1}{4y^2-zx+2}+\frac{1}{4z^2-xy+2}$

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{4x^2-yz+2}=\frac{1}{4x^2-yz+2(xy+yz+zx)}=\frac{1}{4x^2+2xy+yz+2zx}=\frac{1}{\left(2x+y\right)\left(2x+z\right)}.$$

Tương tự, ta có $S=\frac{1}{\left(2x+y\right)\left(2x+z\right)}+\frac{1}{\left(2y+z\right)\left(2y+x\right)}+\frac{1}{\left(2z+x\right)\left(2z+y\right)}$

$$\Leftrightarrow S=\frac{yz}{\left(2xz+yz\right)\left(2xy+yz\right)}+\frac{xz}{\left(2xy+xz\right)\left(2yz+xz\right)}+\frac{xy}{\left(2yz+xy\right)\left(2xz+xy\right)}$$

Với mọi a,b ta có $\left(a-b\right)^2\ge 0\Rightarrow\left(a+b\right)^2\ge 4ab\Rightarrow ab\le\frac{\left(a+b\right)^2}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$S\ge\frac{yz}{\frac{\left(2xy+2yz+2zx\right)^2}{4}}+\frac{xz}{\frac{\left(2xy+2yz+2zx\right)^2}{4}}+\frac{xy}{\frac{\left(2xy+2yz+2zx\right)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow S\ge\frac{xy+yz+zx}{\frac{\left(2xy+2yz+2zx\right)^2}{4}}=\frac{1}{xy+yz+zx}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 1.

Cách khác:

Đặt $a=xy, b=yz, c=zx$ khi đó $a+b+c=1$ và $x^2=\frac{ac}{b}; y^2=\frac{ab}{c}, z^2=\frac{bc}{a}$

Ta có:

$$\frac{1}{4x^2-yz+2}=\frac{1}{\frac{4ac}{b}-b+2(a+b+c)}=\frac{1}{\frac{4ac}{b}+2a+b+2c}$$

$$=\frac{b}{4ac+2ab+b^2+2bc}=\frac{b}{(2a+b)(2c+b)}\ge\frac{4b}{(2a+2b+2c)^2}=\frac{a}{(a+b+c)^2}$$

Tương tự: $\frac{1}{4y^2-zx+2}\ge\frac{c}{(a+b+c)^2}; \frac{1}{4z^2-xy+2}\ge\frac{a}{(a+b+c)^2}$

Cộng 3 bất đẳng trên theo vế ta được:

$$P\ge\frac{a+b+c}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{a+b+c}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 125: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2016-2017]

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z\le\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)}+\frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}+\frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)}+\frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}+\frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}=\frac{\left(\frac{yz+1}{z}\right)^2}{\left(\frac{zx+1}{x}\right)}+\frac{\left(\frac{zx+1}{x}\right)^2}{\left(\frac{xy+1}{y}\right)}+\frac{\left(\frac{xy+1}{y}\right)^2}{\left(\frac{yz+1}{z}\right)}$$

$$\Rightarrow P=\frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{z+\frac{1}{x}}+\frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{y}}+\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{y+\frac{1}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta có:

$$P=\frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{z+\frac{1}{x}}+\frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{y}}+\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{y+\frac{1}{z}}\ge\frac{\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

$$=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge x+y+z+\frac{9}{x+y+z}=(x+y+z)+\frac{9}{4(x+y+z)}+\frac{27}{4(x+y+z)}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}2\sqrt{(x+y+z).\frac{9}{4(x+y+z)}}+\frac{9}{4.\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$

Câu 126: [TS10 Chuyên Lam Sơn vòng 2, 2016-2017]

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{2016\sqrt{2015}}>\frac{1931}{1975}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{2016\sqrt{2015}}>\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2015.2016}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}$$

$$=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}>\frac{1931}{1975}\quad\text{(đpcm)}$$

Câu 127: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2016-2017]

Cho $a,b,c>0;\ a+b+c\ge 9$, tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A=2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}+3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta được:

$$\left(a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}\right)(1+3+5)\ge(a+b+c)^2\Rightarrow 2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}\ge\frac{(1+3+5)^2}{a+b+c}=\frac{81}{a+b+c}\Rightarrow 3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}\ge\frac{27}{\sqrt{a+b+c}}$$

Do đó:

$$A=2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}+3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}+\frac{27}{\sqrt{a+b+c}}$$

=

$$=\frac{a+b+c}{6}+\frac{a+b+c}{2}+\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}+\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}\ge\frac{9}{6}+3\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}\cdot\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}}$$

$$=\frac{9}{6}+3.\frac{9}{2}=\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=15$$

Dấu "=" xảy ra khi a = 1, b = 3, c = 5.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 15.

Câu 128: [TS10 Chuyên Tiền Giang, 2016-2017]

Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2018}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\ (*)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ta có $$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}\le 3$$

Suy ra $$\frac{2016}{ab+bc+ca}\ge\frac{2016}{3}=672$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) , ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Suy ra $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1$$

Do đó ta được $P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2018}{ab+bc+ca}\ge 673$.

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 673.

Câu 129: [TS10 Chuyên Lào Cai, 2016-2017]

Cho a, b, c là số dương thỏa mãn: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1}\ge 1$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2\Rightarrow 3-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)=1\Rightarrow \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1}\ge 1\Leftrightarrow 3-\left(\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1}\right)\le 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{8a^2}{8a^2+1}+\frac{8b^2}{8b^2+1}+\frac{8c^2}{8c^2+1}\le 2\Leftrightarrow \frac{4a^2}{8a^2+1}+\frac{4b^2}{8b^2+1}+\frac{4c^2}{8c^2+1}\le 1$$

Ta chứng minh: $\frac{4a^2}{8a^2+1}\le \frac{a}{a+1}$ (*)

Thật vậy: $\frac{4a^2}{8a^2+1}\le \frac{a}{a+1}\Leftrightarrow 4a^3+4a^2\le 8a^3+a\Leftrightarrow 4a^3-4a^2+a\ge 0$

$$\Leftrightarrow 4a^2-4a+1\ge 0\Leftrightarrow (2a-1)^2\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Tương tự: $\frac{4b^2}{8b^2+1}\le \frac{b}{b+1}$; $\quad \frac{4c^2}{8c^2+1}\le \frac{c}{c+1}$

Cộng 2 bất đẳng thức theo vế ta được:

$$\frac{4a^2}{8a^2+1}+\frac{4b^2}{8b^2+1}+\frac{4c^2}{8c^2+1}\le \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Câu 130: [TS10 Chuyên Cần Thơ, 2016-2017]

Cho a, b, c lần lượt là độ dài 3 cạnh của tam giác và $2ab+3bc+4ca=5abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{7}{a+b-c}+\frac{6}{b+c-a}+\frac{5}{c+a-b}$

Lời giải

Ta có: $2ab+3bc+4ca=5abc\Leftrightarrow \frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=5$ (do $a,b,c>0$)

Sử dụng BĐT AM-GM-Schwar ta được:

$$5=\frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=\frac{2^2}{2c}+\frac{3^2}{3a}+\frac{4^2}{4b}\ge \frac{(2+3+4)^2}{3a+4b+2c}\Rightarrow 3a+4b+2c\ge \frac{81}{5}$$

$$P=\frac{7}{a+b-c}+\frac{6}{b+c-a}+\frac{5}{c+a-b}=\frac{7^2}{7(a+b-c)}+\frac{6^2}{6(b+c-a)}+\frac{5^2}{5(c+a-b)}$$

$$\ge \frac{(7+6+5)^2}{7(a+b-c)+6(b+c-a)+5(c+a-b)} = \frac{18^2}{2(3a+4b+2c)} = 10$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{9}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10.

Câu 131: [TS10 Chuyên Đồng Nai, 2016-2017]

Cho a, b, c là số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

1) Chứng minh rằng: $ab+bc+ca \le 3$
2) Chứng minh rằng: $a^2b+b^2c+c^2a \le 4$

Lời giải

1) Ta có:

$$ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3\,(\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c =1.

2) Giả sử b nằm giữa a và c ta có:

$(b-a)(b-c) \le 0 \Leftrightarrow b^2+ac \le ab+bc \Leftrightarrow b^2c+ac^2 \le b^2c+ac^2$

Áp dụng AM-GM ta có:

$$a^2b+b^2c+c^2a \le a^2b+b^2c+2abc = b(a+c)^2 = b(a+c)(a+c) \le \frac{4(a+b+c)^3}{27} = 4$$

Câu 132: [TS10 Chuyên Bình Định, 2016-2017]

Cho x, y, z thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1.$ Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = xy+yz+xz+\frac{1}{2}\left[x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2\right]$$

Lời giải

Ta chứng minh:

$$P = xy+yz+xz+\frac{1}{2}\left[x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2\right] \le 1$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-xyz(x+y+z) \le (x^2+y^2+z^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x^2+y^2)(x-y)^2+(y^2+z^2)(y-z)^2+(z^2+x^2)(x-z)^2\right] \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 133: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng"

$4(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3) \ge 9$

Lời giải

Ta có:

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^3+b^3+c^3\right)+27\le 12\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 6abc\le a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$$

$$\Leftrightarrow 8abc\le (a+b)(b+c)(c+a)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo AM-GM, vậy bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 134: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2016-2017]

Cho các số thực x, y, z ≥ 1 và thỏa mãn $3x^2+4y^2+5z^2=52$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=x+y+z$

Lời giải

***) Bài này muốn giải được trước tiên ta phải dự đoán giá trị lớn nhất của F đạt được khi x = y = 1, z = 3**

Ta có: $5\left(x^2+y^2+z^2\right)=52+2x^2+y^2\ge 52+2+1=55\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 11\quad (1)$

Lại có: $(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy+1\ge x+y$

Tương tự: $yz+1\ge y+z;\quad zx+1\ge z+x$

Cộng theo vế: $xy+yz+zx+3\ge 2(x+y+z)\Rightarrow 2(xy+yz+zx)+6\ge 4(x+y+z)$ (2)

Lấy (1) cộng (2) theo vế ta được: $(x+y+z)^2\ge 5+4(x+y+z)\Leftrightarrow x+y+z\ge 5$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 1$, $z = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của F là 5.

Câu 135: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2016-2017]

Cho $x,y>0$ và $x+y\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M=6x^2+4y^2+10xy+\frac{4x}{y}+\frac{3y}{x}+2016$$

Lời giải

Ta có:

$$M=6x^2+4y^2+10xy+\frac{4x}{y}+\frac{3y}{x}+2016=(x+y)(6x+4y)+\frac{4(x+y)}{y}+\frac{3(y+x)}{x}+2009$$

$$=(x+y)\left(6x+4y+\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)+2009\ge 3\left(6x+4y+\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)+2009$$

$$= 3\left[\left(3x+\frac{3}{x}\right)+\left(y+\frac{4}{y}\right)+3\left(x+y\right)\right]+2009$$

$$\geq 3\left[2\sqrt{3x.\frac{3}{x}}+2\sqrt{y.\frac{4}{y}}+3.3\right]+2009=2066$$

Dấu "=" xảy ra khi x = 1, y = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2066.

Câu 136: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c}{4a}$$

Lời giải

Với x, y dương ta có các bất đẳng thức cơ bản sau (bạn đọc tự chứng minh):

$$(x+y)^2 \geq 4xy \quad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \qquad (2)$$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \qquad (3)$$

Áp dụng các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c}{4a}=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2}{4ac}\geq\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2}{(a+c)^2}$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}\right)^2\geq\frac{1}{3}.\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra kho a = b = c.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{4}$

Câu 137: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2016-2017]

Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $0<x\leq 1, 0<y\leq 1$ và x + y = 3xy.

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $P=x^2+y^2-4xy$

Lời giải

Ta có:

$$P=x^2+y^2-4xy=(x+y)^2-6xy=9x^2y^2-6xy=(3xy-1)^2-1$$

Do $x,y\in(0;1]\Rightarrow(1-x)(1-y)\geq 0\Leftrightarrow 1+xy\geq x+y=3xy\Leftrightarrow xy\leq\frac{1}{2}$

Mặt khác $x,y\in(0;1]\Rightarrow 3xy=x+y\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\geq\frac{4}{9}$

Vậy $\frac{4}{9} \le xy \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \le 3xy - 1 \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{9} \le (3xy-1)^2 \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow -\frac{8}{9} \le (3xy-1)^2 - 1 \le -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{8}{9} \le P \le -\frac{3}{4}$

Vậy: GTLN của P là $-\frac{3}{4}$ khi $(x,y) = \left(1;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};1\right)$

GTNN của P là $-\frac{8}{9}$ khi $x = y = \frac{2}{3}$

Câu 138: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2016-2017]

Cho 3 số thực a, b, c sao cho $0 < a \le 1, 0 < b \le 1, 0 < c \le 1$. Chứng minh:

$a + b + c + 3abc \ge 2(ab + bc + ca)$

Lời giải

Ta có:

$0 < a, b \le 1 \Rightarrow (1-a)(1-b) \ge 0 \Leftrightarrow 1 + ab \ge a + b \Rightarrow c + abc \ge ac + bc \quad (\text{do} \quad 0 < c \le 1)$

Chứng minh tương tự được: $b + abc \ge ab + bc$; $a + abc \ge ab + ac$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế được: $a + b + c + 3abc \ge 2(ab + bc + ca)$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi (a, b, c) = (1, 1, 0) và các hoán vị.

Câu 139: [TS10 Chuyên Hà Nội, 2016-2017]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh:

$$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \ge a + b + c$$

Lời giải

Áp dụng AM-GM ta được:

$$\frac{2a^2}{a+b^2} = \frac{2a(a+b^2) - 2ab^2}{a+b^2} = 2a - \frac{2ab^2}{a+b^2} = 2a - \sqrt{b.ab} \ge 2a - \frac{b+ab}{2}$$

Làm tương tự và cộng theo vế của bất đẳng thức ta được:

$$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \ge \frac{3}{2}(a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác ta có: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(ab+bc+ca)^2 \Rightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca$

Do đó: $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \ge \frac{3}{2}(a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} \ge a+b+c$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 140: [TS10 Chuyên Long An, 2016-2017]

Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

Lời giải

Do a, b, c là 3 cạnh của tam giác nên $(b+c-a)>0,(c+a-b)>0,(a+b-c)>0$

Sử dụng AM-GM ta được:

$$(b+c-a)(c+a-b)\le\left(\frac{b+c-a+c+a-b}{2}\right)^2=c^2$$

Tương tự: $(c+a-b)(a+b-c)\le a^2$; $(b+c-a)(a+b-c)\le b^2$

Nhân 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2\le a^2b^2c^2\Rightarrow(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc$$

$$\Rightarrow Q=\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\ge 1$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 1.

Câu 141: [TS10 Chuyên Phan Bộ Châu, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$

Lời giải

Với a, b, c dương ta có: $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ (1)

Thật vậy:

$$VT=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+ab^2+ac^2+b^2+ba^2+bc^2+c^3+ca^2+cb^2$$

$$=\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(a^3+ab^2\right)+\left(b^3+bc^2\right)+\left(c^3+ca^2\right)$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+2a^2b+2b^2c+2c^2a$$

$$=3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)=VP$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Sử dụng (1) ta được:

$$Q\ge 14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3\left(1-a^2-b^2-c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}-\frac{3}{2}$$

Ta có: $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$

Sử dụng AM-GM ta được:

$$Q \ge 14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}-\frac{3}{2}$$

$$=\left[\frac{27}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\right]+\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{3}{2}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{27}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$$

$$=2.\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{23}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{23}{3}$

NĂM HỌC 2015-2016

Câu 142: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2015-2016]

Cho $\begin{cases} x>0, y>0, z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$.Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x=a^3 \\ y=b^3 \\ z=c^3 \end{cases}$, vì $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$ => $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$

Ta có

$$x+y+1=a^3+b^3+1=(a+b)(a^2-ab+b^2)+1\ge (a+b)ab+1=ab(a+b+c)=\frac{a+b+c}{c}$$

Do đó

$$\frac{1}{x+y+1}\le\frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{y+z+1}\le\frac{a}{a+b+c};\qquad \frac{1}{z+x+1}\le\frac{b}{a+b+c}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le\frac{a+b+c}{a+b+c}=1\,(\text{dpcm})$$

Dấu “=” xảy ra khi x = y = z.

Câu 143: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2015-2016]

Cho a,b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

Lời giải

Ta có $12\ge (a+b)^3+4ab\ge \left(2\sqrt{ab}\right)^3+4ab$. Đặt $t=\sqrt{ab},t>0$ thì

$12\ge 8t^3+4t^2 \Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+3t+3)\le 0$

Do $2t^2+3t+3>0,\forall t$ nên $t-1\le 0\Leftrightarrow t\le 1$. Vậy $0<ab\le 1$

Chứng minh được $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\le \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}},\forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$

Thật vậy, BĐT $\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{1}{1+\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{1+b}-\dfrac{1}{1+\sqrt{ab}}\le 0$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})}+\frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})}\le 0\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)}\le 0.$ Do $0<ab\le 1$ nên BĐT này đúng

Tiếp theo ta sẽ CM: $\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}+2015ab\le 2016,\forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$

Đặt $t=\sqrt{ab},0<t\le t$ ta được $\dfrac{2}{1+t}+2015t^2\le 2016$

$2015t^3+2015t^2-2016t-2014\le 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2+4030t+2014)\le 0.$ BĐT này đúng $\forall t:0<t\le 1$

Đẳng thức xảy ra a = b = 1

Vậy $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+2015ab\le 2016.$

Câu 144: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2015-2016]

Cho ba số thực x; y; z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z – (xy + yz + zx)$

Lời giải

Ta có $xy+yz+xz=\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$

Do đó $P=x+y+z-\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$

$$P=\frac{1}{2}\left[2(x+y+z)-(x+y+z)^2+(x^2+y^2+z^2)\right]=-\frac{1}{2}(x+y+z-1)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+1)$$

Suy ra $P\le\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+1)\le\dfrac{1}{2}(9+1)=5$

Vậy $P_{max}=5$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y+z-1=0\\x^2+y^2+z^2=9\end{cases}$ (chẳng hạn $x=2;y=-2;z=1$)

Câu 145: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2015-2016]

Cho 3 số thực dương *x, y, z* thỏa mãn: $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)}+\dfrac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)}+\dfrac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}$

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{1}{x(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2})}+\dfrac{1}{y(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2})}+\dfrac{1}{z(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})}$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a;\dfrac{1}{y}=b;\dfrac{1}{z}=c$ thì a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:

$$a^2(1-a^2)^2=\frac{1}{2}.2a^2(1-a^2)(1-a^2)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)=\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a(1-a^2)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a(1-a^2)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2(1)$$

Tương tự: $\dfrac{b^2}{b(1-b^2)}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}b^2(2);\dfrac{c^2}{c(1-c^2)}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}c^2(3)$

Từ (1); (2); (3) ta có $P\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x=y=z=\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 146: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge 3$$

Lời giải

Ta chứng minh BĐT

$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 9(*)$

$(*)\Leftrightarrow 3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\ge 9$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2;\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2$

=> (*) đúng

$=> \frac{9}{a+b+c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3 => a+b+c\ge 3$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có $1+b^2\ge 2b$

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}(1)$

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$ (2); $\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$

$=> \frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge a+b+c\ge 3$

=>đpcm

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 147: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2015-2016]

Cho hai số dương a , b thỏa mãn điều kiện: $a+b\le 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2-\frac{3}{4a}-\frac{a}{b}\le\frac{-9}{4}$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với: $4a^2+9\le\frac{3}{a}+\frac{4a}{b}$

Ta có: $a+b\le 1\Rightarrow a\le 1-b$ mà a, b dương nên $0<a<1$

Do đó: $4a^2+9\le\frac{3}{a}+\frac{4a}{b}\Leftrightarrow\frac{3}{a}+\frac{4a}{1-a}\le\frac{3}{a}+\frac{4a}{b}$

Vì thế chỉ cần chứng minh: $4a^2+9\le\frac{3}{a}+\frac{4a}{1-a}$ **(*)**

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow\frac{(a^2+3)(2a-1)^2}{a(1-a)}\ge 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 148: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2015-2016]

1) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}$

2) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2a}+\frac{1}{b^2+2b}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

Lời giải

a) Ta có

$\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}\Leftrightarrow(1+a)(1+b)\ge 1+ab+2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow 1+a+b+ab\ge 1+ab+2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$ (luôn đúng)

b) Sử dụng BĐT ở ý a) $\sqrt{(1+x)(1+y)}\ge 1+\sqrt{xy}$ và BĐT $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta được:

$$P\ge\frac{4}{a^2+2a+b^2+2b}+1+ab=\frac{4}{(a+b)^2-2ab+2(a+b)}+1+ab=\frac{4}{a^2b^2}+ab+1$$

$$=\left(\frac{4}{a^2b^2}+\frac{ab}{16}+\frac{ab}{16}\right)+\frac{7ab}{8}+1\ge 3.\sqrt[3]{4.\frac{1}{16}.\frac{1}{16}}+\frac{7ab}{8}+1=\frac{7}{4}+\frac{7ab}{8}$$

Mặt khác: từ giả thiết, ta có: $ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\ge 4$

Do đó $P\ge\frac{7}{4}+\frac{7.4}{8}=\frac{21}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{21}{4}$ khi $a=b=2$

Câu 149: [TS10 Chuyên Quảng Bình, 2015-2016]

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}=1$. Chứng minh $ab^2\le\frac{1}{8}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}=1$. Đặt $x=\frac{a}{1+a}$; $y=\frac{b}{1+b}$ Suy ra $a=\frac{x}{1-x}$; $b=\frac{y}{1-y}$.

Khi đó ta được $x+2y=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{xy^2}{\left(1-x\right)\left(1-y\right)^2}\le\frac{1}{8}$$

Từ giả thiết ta suy ra $1-x=2y;\ 1-y=x+y$ nên lại viết bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{xy^2}{2y\left(x+y\right)^2}\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow 4xy\le\left(x+y\right)^2$$

Đánh giá cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 150: [TS10 Chuyên Bắc Giang, 2015-2016]

Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{1}{3}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM cho 4 số không âm, ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{a+2}{27}+\frac{b+2}{27}+\frac{1}{9}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}.\frac{a+2}{27}.\frac{b+2}{27}.\frac{1}{9}}=4\sqrt[4]{\frac{a^4}{9^4}}=\frac{4a}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}\ge\frac{11a}{27}-\frac{b}{27}-\frac{7}{27}(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}\ge\frac{11b}{27}-\frac{c}{27}-\frac{7}{27}(2)$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{11c}{27}-\frac{a}{27}-\frac{7}{27}(3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\geq\frac{11(a+b+c)}{27}-\frac{a+b+c}{27}-\frac{21}{27}$$

Thay điều kiện a + b + c = 3 ta được:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\geq\frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 151: [TS10 Chuyên Bạc Lưu, 2015-2016]

Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM: $a^5+\frac{1}{a}\geq 2a^2$; $b^5+\frac{1}{b}\geq 2b^2$; $c^5+\frac{1}{c}\geq 2c^2$

Suy ra $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2(a^2+b^2+c^2)$

Mặt khác $a^2+1\geq 2a$; $b^2+1\geq 2b$; $c^2+1\geq 2c$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\geq 2\left(a+b+c\right)-3=3$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 152: [TS10 Chuyên Đại học Vinh, 2015-2016]

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}$ (1)

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số không âm, ta có $1+b^2\geq 2b$

Thay vào (1) ta được: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$ (2)

Tương tự, ta có: $\frac{b}{1+c^2}\geq b-\frac{bc}{2}$ (3); $\frac{c}{1+a^2}\geq c-\frac{ca}{2}$ (4)

Cộng từng vế ba BĐT (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\left(\frac{ab+bc+ca}{2}\right) \quad (5)$$

Mặt khác: $\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ca\right)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3 \qquad (6)$$

Thay điều kiện a + b + c = 3 và BĐT (6) vào (5) ta có: $P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi a = b = c = 1.

Câu 153: [TS10 Chuyên Hà Giang, 2015-2016]

Tìm giá trị lớn nhất của $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$, biết x + y = 4

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakoskicopxki cho 2 bộ số (1;1) và $\left(\sqrt{x-1};\sqrt{y-2}\right)$ ta có

$$A^2 = \left(1.\sqrt{x-1} + 1.\sqrt{y-2}\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(x-1+y-2\right) = 2\left(x+y-3\right) = 2 \Rightarrow A \le \sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}} \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=y-2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{2}$

Câu 154: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2015-2016]

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: x + y + z = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{x}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2} \ge x - \frac{xy^2}{2y} = x - \frac{xy}{2}$$

Tương tự : $\frac{y}{1+z^2} \ge y - \frac{yz}{2}$; $\quad \frac{z}{1+x^2} \ge z - \frac{zx}{2}$

Cộng theo vế ta được:

$$S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \ge \left(x+y+z\right) - \frac{xy+yz+zx}{2}$$

$$\ge \left(x+y+z\right) - \frac{\left(x+y+z\right)^2}{6} = 3 - \frac{3^2}{6} = \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là : $\frac{3}{2}$

Câu 155: [TS10 Chuyên Nam Định, 2015-2016]

Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\ge 3.$$

Lời giải

Ta có: $\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{2(2a^2+b^2+c^2)-(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=2-\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$

Làm tương tự và cộng lại ta được bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3.$$

Áp dụng BĐT AM-GM – Schwarz cho 4 số dương $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}\ge\frac{(x+y)^2}{m+n}$, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\le\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Ta có hai BĐT tương tự, cộng từng vế ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}$$
$$\le\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)+\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)$$
$$=\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

$= 3$

$\Rightarrow$ BĐT đã cho được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 156: [TS10 Chuyên Nam Định, 2015-2016]

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}$$

Lời giải

Ta có: $a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2)\forall a;b\in R$

Thật vậy:

$a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)$

$<=> a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$

$<=> (a-b)(a^3-b^3) \ge 0$

$<=> (a-b)^2(a^2+ab+b^2) \ge 0$ (luôn đúng $\forall a;b \in R$)

$=> a^4+b^4+c \ge ab(a^2+b^2)+c <=> a^4+b^4+c \ge ab(a^2+b^2)+abc^2$ (vì a;b;c > 0 và abc = 1)

$<=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c}{ab(a^2+b^2)+abc^2}$ (Vì c>0) $<=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c}{ab(a^2+b^2+c^2)}$

$<=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c^2}{abc(a^2+b^2+c^2)} <=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$ (1)

Tương tự:

$\dfrac{b}{a^4+c^4+b} \le \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$ (2)

$\dfrac{a}{b^4+c^4+a} \le \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$ (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1),(2) và (3) ta có:

$\dfrac{a}{b^4+c^4+a}+\dfrac{b}{a^4+c^4+b}+\dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$

Vậy $T \le 1$ $\forall a;b;c>0$ thỏa mãn abc = 1

Với a = b = c = 1 thì T = 1

Vậy GTLN của T là 1

Câu 157: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge 3$$

Lời giải

Ta chứng minh BĐT

$(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}) \ge 9$ (*)

(*) $<=> 3+(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a})+(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b})+(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}) \ge 9$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có:

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \ge 2;$ $\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b} \ge 2;$ $\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c} \ge 2$

=>(*) đúng

$=> \dfrac{9}{a+b+c} \le \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \le 3 => a+b+c \ge 3$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có $1+b^2 \ge 2b$

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}(1)$

Tương tự ta có:

$\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$ (2); $\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$

$=> \frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge a+b+c\ge 3$

=>đpcm

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 158: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2015-2016]

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}>2015$$

Lời giải

Với mọi a, b > 0 và x, y, z thỏa điều kiện đề bài, áp dụng bất đẳng thứcAM-GM cho 2 số dương:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=4\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}(*)$$

$$(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\ge 2xy+2yz+2zx\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\ge 3(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Áp dụng 2 bất đẳng thức trên ta có:

$$P=\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}=386\left(\frac{1}{2xy+2yz+2zx}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$\ge 386.\frac{4}{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$=\frac{1544}{(x+y+z)^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}=1544+\frac{157}{xy+yz+zx}\ge 1544+\frac{157}{\frac{1}{3}}=2015$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=1 \\ 2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{(không xảy ra)}$$

Vậy $P > 2015$ (đpcm)

Câu 159: [TS10 Chuyên Quảng Bình, 2015-2016]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 11. Tìm GTNN

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)}+\sqrt{12(b^2+11)}+\sqrt{c^2+11}}$$

Lời giải

Thay 11 = ab + bc + ca vào P, ta có:

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)}+\sqrt{12(b^2+11)}+\sqrt{c^2+11}}$$

$$=\frac{5a+5b+5c}{\sqrt{12(a^2+ab+bc+ca)}+\sqrt{12(b^2+ab+bc+ca)}+\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$$

$$=\frac{5a+5b+5c}{2\sqrt{3(a+b)(a+c)}+2\sqrt{3(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \qquad (*)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} \le 3(a+b)+(a+c)=4a+3b+c \qquad (1)$$

Tương tự:

$$2\sqrt{3(b+a)(b+c)} \le 4b+3a+c \qquad (2)$$

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \le \frac{1}{2}(a+b+2c) \qquad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)}+2\sqrt{3(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)} \le \frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có

$$P \ge \frac{5a+5b+2c}{\frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c}=\frac{2}{3}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b)=a+c \\ 3(b+a)=b+c \\ c+a=c+b \\ ab+bc+ca=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{c}{5} \\ ab+bc+ca=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=5 \end{cases}$

Vậy GTNN của P là $\dfrac{2}{3}$,đạt được khi a = b = 1, c = 5.

Câu 160: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2015-2016]

Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$(a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4})=(2a+\frac{1}{2})(2b+\frac{1}{2})$$

Lời giải

Với mọi x, y không âm, ta có:

$(x-\dfrac{1}{2})^2 \ge 0 <=> x^2+\dfrac{1}{4} \ge x$ (*) Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Mặt khác:

$(x-y)^2 \ge 0 <=> x^2-2xy+y^2 \ge 0$

$<=> x^2+2xy+y^2 \ge 4xy$

$<=> (x+y)^2 \ge 4xy$ (**)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y.

Áp dụng BĐT (*) với x = a và x = b ta được

$$\begin{cases} a^2+b+\dfrac{3}{4}=(a^2+\dfrac{1}{4})+b+\dfrac{1}{2} \ge a+b+\dfrac{1}{2} > 0 \\ b^2+a+\dfrac{3}{4}=(b^2+\dfrac{1}{4})+a+\dfrac{1}{2} \ge b+a+\dfrac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$$=> (a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4}) \ge (a+b+\frac{1}{2})^2 (1)$$

Áp dụng BĐT (**) ta được:

$$(a+b+\frac{1}{2})^2=\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\left(b+\frac{1}{4}\right)^2\right] \ge 4(a+\frac{1}{4})(b+\frac{1}{4})$$

$$=(2a+\frac{1}{2})(2b+\frac{1}{2}) (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(a^2+b+\dfrac{3}{4})(b^2+a+\dfrac{3}{4})=(2a+\dfrac{1}{2})(2b+\dfrac{1}{2})$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ a+\dfrac{1}{4}=b+\dfrac{1}{4} \end{cases} <=> a=b=\dfrac{1}{2}$

Vậy $a=b=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 161: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2015-2016]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\geq\frac{3}{2}$$

Lời giải

Giả sử $a\geq b\geq c$, từ giả thiết suy ra ab ≥1. Ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq\frac{2}{1+ab} <=> \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}\geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy ta cần chứng minh: $\frac{2}{1+ab}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{3}{2}$

$<=> c^2+3-ab\geq 3abc^2 <=> c^2+ca+bc\geq 3abc^2 <=> a+b+c\geq 3abc$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì $\begin{cases}(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=9\\ ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}\end{cases}$

Hay a + b + c ≥ 3≥3abc

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c =1

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a+ b +c = 3.Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\leq\frac{3}{2}$$

Ta có: $\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq ab+bc+ca => ab+bc+ca\leq 3$

Ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\leq\frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\leq\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

$$VT\leq\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{bc}{b+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b}\right)=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1

Câu 162: [TS10 Chuyên KHTN, 2015-2016]

Giả sử x, y, z là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}$$

Lời giải

Ta có $P=\frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$4\sqrt{y+z-4}=2\sqrt{4(y+z-4)}\leq y+z-4+4=y+z$$

Áp dụng tương tự thì ta được

$$P=\frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$

Do đó ta được $P\ge 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=4$.

Câu 163: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2015-2016]

Cho a,b,c là các số thực bất kỳ . Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{3\left(a+b+c\right)^2}{4}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(2a^2+2\right)\left(2b^2+2\right)\left(2c^2+2\right)\ge 3\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}c\right)^2$$

Đặt $x=a\sqrt{2};\ y=b\sqrt{2};\ z=c\sqrt{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge 3\left(x+y+z\right)^2$$

Ta có $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)=x^2y^2+1+2x^2+2y^2+3$

Suy ra $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\ge 2xy+x^2+y^2+\frac{\left(x+y\right)^2}{2}+3=\frac{3}{2}\left[\left(x+y\right)^2+2\right]$

$$\Rightarrow\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge\frac{3}{2}\left[\left(x+y\right)^2z^2+4+2\left(x+y\right)^2+2z^2\right]$$

$$\ge\frac{3}{2}\left[4\left(x+y\right)z+2\left(x+y\right)^2+2z^2\right]=3\left(x+y+z\right)^2$$

Do đó ta được $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{3\left(a+b+c\right)^2}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 164: [TS10 Chuyên Vũng Tàu, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh rằng:

a) $a+b+c\ge 3abc$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{1+3bc}}+\sqrt{\frac{b^3}{1+3ca}}+\sqrt{\frac{c^3}{1+3ab}}\ge \frac{3}{2}$

Lời giải

a) Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$abc(a+b+c)=ab+bc+ca$$

Mà ta lại có $$ab+bc+ca\le \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Do đó ta được $$abc(a+b+c)\le \frac{(a+b+c)^2}{3}\Leftrightarrow 3abc\le a+b+c$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a^4}{a+3abc}}+\sqrt{\frac{b^4}{b+3abc}}+\sqrt{\frac{c^4}{c+3abc}}\ge \frac{3}{2}$$

Áp dụng kết quả câu a ta được

$$\sqrt{\frac{a^4}{a+3abc}}+\sqrt{\frac{b^4}{b+3abc}}+\sqrt{\frac{c^4}{c+3abc}}\ge \frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}$$

Ta cần chỉ ra được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}\le \sqrt{12(a+b+c)}$$

Suy ra

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}}\ge \frac{(a+b+c)^2}{2\sqrt{3(a+b+c)}}=\frac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}}$$

Cũng từ giả thiết $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ta suy ra được

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge 3$$

Do đó $\frac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}}\le \frac{3}{2}$.

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 165: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\ge 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2+a^2b=1+1+a^2b\ge 3\sqrt[3]{a^2b}$

Do đó ta được $$\frac{a^2b}{2+a^2b}\le \frac{a^2b}{3\sqrt[3]{a^2b}}=\frac{a\sqrt[3]{ab^2}}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le \frac{a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{bc^2}+c\sqrt[3]{ca}}{3}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt[3]{ab^2}\le \frac{a+b+b}{3}=\frac{a+2b}{3}$

Suy ra $$a\sqrt[3]{ab^2}\le \frac{a\left(a+2b\right)}{3}=\frac{a^2+2ab}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{bc^2}+c\sqrt[3]{ca}\le \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$

Từ đó ta được $$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 166: [TS10 Chuyên Cần Thơ, 2015-2016]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{z\left(z+x\right)}+\frac{y}{x\left(x+y\right)}+\frac{z}{x\left(x+z\right)}$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Đặt $a=\frac{1}{x};\ b=\frac{1}{y};\ c=\frac{1}{z}$, khi đó giả thiết trở thành $a+b+c=2$.

Ta viết lại biểu thức P là $P=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b^2+2c}+\frac{c^2}{c+2a}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P=\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{b^2+2c}+\frac{c^2}{c+2a}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{3}=\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$

Câu 167: [TS10 Chuyên Tiền Giang, 2015-2016]

Cho ba số thực $x;y;z>1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4}{\left(y-1\right)^2}+\frac{y^4}{\left(z-1\right)^2}+\frac{z^4}{\left(x-1\right)}\ge 48$$

Lời giải

Ta đi chứng minh bất đẳng thức: Với $a>1$ thì $a^4\ge 16\left(a-1\right)^2$

Thật vậy

$$a^4\ge 16\left(a-1\right)^2\Leftrightarrow a^4-16a^2+32a-16\ge 0\Leftrightarrow\left(a-2\right)^2\left(a^2+4a-4\right)\ge 0$$

Vì $a>1$ nên $a^2+4a-4>0$, do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được $y^4\ge 16\left(y-1\right)^2$ do đó $\frac{x^4}{\left(y-1\right)^2}\ge\frac{16x^4}{y^4}$.

Hoàn ta tương tự ta được

$$\frac{x^4}{\left(y-1\right)^2}+\frac{y^4}{\left(z-1\right)^2}+\frac{z^4}{\left(x-1\right)}\ge 16\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{z^4}+\frac{z^4}{x^4}\right)\ge 48$$

Vì theo bất đẳng thức Cauchy thì $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{z^4}+\frac{z^4}{x^4}\ge 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 168: [TS10 Chuyên Đại học Vinh, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=2$ ta được $ab+bc+ca=\frac{4-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$

Do đó biểu thức P được viết lại thành

$$P=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\frac{4-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\le t\le 2$. Khi đó ta được

$$P=t+\frac{1}{t^2}-\frac{t^2}{4}+1=\frac{t}{8}+\frac{t}{8}+\frac{1}{2t^2}+\frac{3t}{4}-\frac{t^2}{4}+1\ge\frac{3}{4}+\frac{(t-1)(2-1)}{4}+\frac{3}{2}\ge\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=0;\ c=2$ và các hoán vị.

Câu 169: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2015-2016]

Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ac+abc\le 4$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ac)$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy 4 số ta có :

$4\ge abc+ab+bc+ac\ge 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3}\Rightarrow 1\ge abc\Rightarrow a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 2(ab+bc+ac)$

Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x,\sqrt[3]{b^2}=y,\sqrt[3]{c^2}=z\ (x,y,z>0)$, bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Khi đó ta được

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 170: [TS10 Chuyên KHTN Bình Thuận, 2015-2016]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2\sqrt{8x(3y+5z)}\le 8x+3y+5z$$

Suy ra
$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{8x(3y+5z)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x};\ \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}$$
$$\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}\ge\frac{9.4\sqrt{2}}{16(x+y+z)}=\frac{36\sqrt{2}}{16.3\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

Suy ra
$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$

.

NĂM HỌC 2014-2015

Câu 171: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2014-2015]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2014$.

Lời giải

Giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi a =b = 1

$4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b) + 4.2014 - 12$

$= (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 + 8044 \geq 8044$

Suy ra: $P \geq 2011$

Dâu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = b \\ a + b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi và chỉ khi a = b = 1.

Câu 172: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2014-2015]

Cho các số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2(b^2+c^2)}} \geq \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} \geq \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}; \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq 2$

Vì đẳng thức không xẩy ra nên ta có bất đẳng thức

$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 2$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 173: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2014-2015]

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c + b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{c+a-b} + \frac{5}{a+b-c}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a+b-c>0;\ b+c-a>0;\ c+a-b>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta được

$$S=\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)$$
$$\geq \frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$$

Mà $2c+b=abc \Leftrightarrow \frac{2}{b}+\frac{1}{c}=a$ nên kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$S\geq 2a+\frac{6}{a}\geq 4\sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 174: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2014-2015]

Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3(b+c-a)}{2}$$
$$\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{2b}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3(c+a-b)}{2}$$
$$\frac{(a+b-c)^3}{2c}+\frac{2c}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3(a+b-c)}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}+\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}\geq a+b+c-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 175: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2014-2015]

Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm.

Chứng minh rằng $a^2+b^2\geq\frac{4}{5}$

Lời giải

Dễ dàng nhận thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình

Giả sử $x_0 \neq 0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Chia 2 vế của phương trình cho $x_0^2 \neq 0$ được

$$(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}) + a(x_0 + \frac{1}{x_0}) + b = 0$$

Đặt $t = x_0 + \frac{1}{x_0} \Rightarrow |t| \geq 2; x_o^2 + \frac{1}{x_0^2} = t^2 - 2$

Do đó ta có phương trình:

$t^2 - 2 = -at - b$

Áp dụng BĐT Bunyakoski được

$(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (t^2 - 2)^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} = \frac{t^3 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5t^4 - 24t^2 + 16}{5(t^2 + 1)} + \frac{4}{5} = \frac{(5t^2 - 4)(t^2 - 4)}{5(t^2 + 1)} + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$$

Vậy $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |t| = 2 \\ \frac{a}{t} = \frac{b}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_0| = 1 \\ a = bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{5} \\ a = -\frac{4}{5} \end{cases}$

Câu 176: [TS10 Chuyên Nam Định, 2014-2015]

Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Vì *x, y, z* dương, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$+)2x^2\sqrt{yz} \leq x^4 + yz \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \geq \frac{1}{x^4 + yz} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}} \quad (1)$$

$$+)\frac{2}{\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) => $\frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{y} + \frac{1}{z})$

Tương tự:

$$\frac{y^2}{y^4 + xz} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}); \qquad \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}) = \frac{1}{2}.\frac{xy + yz + zx}{xyz} (3)$$

Mà lại có : $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 (4)$

Từ (3) và (4) có : $A \leq \frac{1}{2}.\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{1}{2}.\frac{3xyz}{xyz} = \frac{3}{2}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

Câu 177: [TS10 Chuyên Bình Định, 2014-2015]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}$ với $0<x<1$

Lời giải

Ta có: $y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{1-x}-2+\frac{1}{x}-1+3=\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x}+3$

Vì $0<x<1 \Rightarrow \frac{2x}{1-x}>0;\ \frac{1-x}{x}>0$

Ta có: $\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x}\ge 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}}=2\sqrt{2}$ (Bất đẳng thức AM-GM)

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{2x}{1-x}=\frac{1-x}{x} \Leftrightarrow 2x^2=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{2}(TM) \\ x=-1-\sqrt{2}(L)\end{array}\right.$$

$\Rightarrow y\ge 2\sqrt{2}+3$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1+\sqrt{2}$

Vậy $y_{min}=2\sqrt{2}+3$ khi $x=-1+\sqrt{2}$

Câu 178: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2014-2015]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh: $P=\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le 2b-a$

Thật vậy: $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}-(2b-a)=\frac{5b^3-a^3-(ab+3b^2)(2b-a)}{ab+3b^2}$

$=\frac{5b^3-a^3-(2ab^2-a^2b+6b^3-3b^2a)}{ab+3b^2}=\frac{-b^5-a^3+a^2b+b^2a}{ab+3b^2}$

$=\frac{-(a+b)(a-b)^2}{ab+3b^2}\le 0$

$\Rightarrow \frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le 2b-a$

Ta có 2 BĐT tương tự:

$\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}\le 2c-b;\qquad \frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le 2a-c$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được

$P\le 2(a+b+c)-(a+b+c)=a+b+c=3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 ⇔ a = b = c = 1.

Câu 179: [TS10 Chuyên Ngoại ngữ Hà Nội, 2014-2015]

Chứng minh rằng: $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$

Lời giải

Đặt S= $\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}$

Ta có:

$2S=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+....+\frac{2014}{2^{2012}}+\frac{2015}{2^{2013}}$

$=> 2S-S=\frac{3}{2}+\frac{4-3}{2^2}+\frac{5-4}{2^3}+....+\frac{2015-2014}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}$

$=> S=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^{2013}})-\frac{2015}{2^{2014}}$

Ta có: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^{2013}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{2014}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{2013}}$

Do đó: $S=2-\frac{1}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}<2 => 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$

Câu 180: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2014-2015]

Cho x; y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$$

Lời giải

Ta có: $S=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}=1+\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2$

$=3+(\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy})+\frac{x^2+y^2}{2xy}$

Do x, y là các số dương nên ta có:

$\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{\frac{2x}{x^2+y^2}.\frac{x^2+y^2}{2xy}}=2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{2xy} <=> (x^2+y^2)^2=4x^2y^2 <=> (x^2-y^2)^2=0$

$<=> x^2=y^2 <=> x=y \quad (x;y>0)$

+) $x^2+y^2\geq 2xy => \frac{x^2+y^2}{2xy}\geq 1$

Cộng các bất đẳng thức ta được $S\geq 6$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Vậy Min S = 6 khi và chỉ khi x = y

Câu 181: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2014-2015]

Cho các số *a, b, c* không âm. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2}\ge 2(ab+bc+ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x;\sqrt[3]{b^2}=y;\sqrt[3]{c^2}=z.$

$$=> a^2=x^3;b^2=y^3;c^2=z^3,a=\sqrt{x^3};b=\sqrt{y^3};c=\sqrt{z^3};x,y,z\ge 0$$

Bất đẳng thức đã cho trở thành: $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})(1)$

Vì vai trò của x; y ; z bình đẳng nên có thể giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$

Khi đó: $x(x-y)^2+z(y-x)^2+(z+x-y)(x-y)(y-z)\ge 0$

$=> x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(z+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$ (2)

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $xy(x+y)\ge 2xy\sqrt{xy}=2\sqrt{x^3y^3}(3)$

Tương tự ta có: $yz(y+z)\ge 2\sqrt{y^3z^3}$ (4); $zx(z+x)\ge 2\sqrt{z^3x^3}$ (5)

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (3), (4), (5) ta được

$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})$ (6)

Từ (2) và (6) ta có: $x^3+y^3+z^2+3xyz\ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z hay a = b = c.

Câu 182: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2014-2015]

Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: $x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)\le 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}$

Lời giải

Với mọi a, b, c > 0, ta có:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\ge 2ab+2bc+2ca$$
$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge a^2+b^2+c^2 2ab+2bc+2ca$$
$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge (a+b+c)^2(*)$$

Với mọi a, b, c > 0, áp dụng BĐT Cô–si cho ba số dương, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}} > 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} (**)$$

Áp dụng BĐT (*) với a = x, b = y, c = z và từ điều kiện của x, y, z ta có:

$$18 \geq x^2+y^2+z^2+x+y+z \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}+x+y+z$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2+3(x+y+z)-54 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+y+z+9)(x+y+z-6) \leq 0$$

$$\Rightarrow x+y+z \leq 6 \text{ (do } x+y+z+9>0) \; (***)$$

Áp dụng BĐT (**) với a = x + y + 1, b = y + z + 1, c = z + x + 1, ta có:

$$B = \frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1} \geq \frac{9}{x+y+1+y+z+1+z+x+1} = \frac{9}{2(x+y+z)+3}$$

Áp dụng (***) ta có: $B \geq \dfrac{9}{2.6+3} = \dfrac{3}{5}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+y+1=y+z+1=z+x+1 \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\dfrac{3}{5}$, xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 2.

Câu 183: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2014-2015]

Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1.

Chứng minh: $\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab} \leq \dfrac{3}{2}$

Lời giải

Thay 1 = a + b + c ta có:

A+bc = a(a+b+c)+bc = (a+b)(a+c)

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc} = \frac{a+bc-2bc}{a+bc} = 1-\frac{2bc}{a+bc} = 1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

Ta có 2 đẳng thức tương tự:

$$\frac{b-ca}{b+ca} = 1-\frac{2ca}{(b+c)(b+a)}; \quad \frac{c-ab}{c+ab} = 1-\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

Cộng từng vế của 3 đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}=3-2\left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]$$

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2} <=> \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]\ge\frac{3}{4}$$

$$<=> \frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{3}{4}$$

$$<=> 4(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)\ge 3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)$$

$$<=> b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2\ge 6abc(*)$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho ba số dương ta có:

$$\begin{cases} b^2c+c^2a+a^2b\ge 3abc \\ bc^2+ca^2+ab^2\ge 3abc \end{cases} => (*) \text{ đúng}$$

Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Câu 184: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2014-2015]

a) Cho x, y là 2 số thực khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x^4+y^4-x^3y-xy^3}{x^2y^2}\ge 0$$

$$=\frac{(x-y)(x^3-y^3)}{x^2y^2}=\frac{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)}{x^2y^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]}{x^2y^2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vậy bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

b) Ta có:

$$P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab+\frac{3}{4}(a+b)^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}(a+b)}{\sqrt{ab}}\ge\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2.ab}}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Dấu bằng xảy ra <=> $\begin{cases}\frac{1}{4}(a+b)^2=ab\\ a=b\end{cases}$ <=> $a=b$

Câu 185: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2014-2015]

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Lời giải

Đặt $a=\sqrt{x^2+y^2};b=\sqrt{y^2+z^2};c=\sqrt{z^2+x^2}$ (*) $\Rightarrow a+b+c=2014(1)$

Từ (*) $\Rightarrow x^2=\frac{a^2-b^2+c^2}{2};y^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2};z^2=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$

Áp dụng BĐT Cau chy ta có:

$y+z\le\sqrt{2(y^2+z^2)}=b\sqrt{2}$

$z+x\le\sqrt{2(z^2+x^2)}=c\sqrt{2}$

$x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=a\sqrt{2}$

Từ đó ta có:

$$T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c}+\frac{-a^2+b^2+c^2}{a}\right)$$

$$T\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}-a-b-c\right)\qquad(2)$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta lại có:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a;\frac{c^2}{b}+b\ge 2c;\frac{a^2}{c}+c\ge 2a;\frac{b^2}{c}+c\ge 2b;\frac{b^2}{a}+a\ge 2b;\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}\ge 4(a+b+c)-2(a+b+c)=2(a+b+c)\qquad(3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow T\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}(a+b+c)$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow T\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}.2014.$

Vậy $T_{MIN}=\dfrac{2014}{2\sqrt{2}}$ khi $x=y=z=\dfrac{2014}{3\sqrt{2}}$

Câu 186: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2014-2015]

Cho ba số thực x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức: $S=\dfrac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$

Lời giải

Theo Bunyakoski: $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x+y+z\le\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Rightarrow S\le\frac{xyz(\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}=\frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xy+yz+zx)}$$

$$\Rightarrow S\le\frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}\sqrt[6]{x^2y^2z^2}\,\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow S_{max}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$ khi $x=y=z$

Câu 187: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2014-2015]

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\ne 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$

Lời giải

Gọi $x_1;\ x_2\ (x_1\le x_2)$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Khi đó $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}=\dfrac{8-6\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{4-2\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\dfrac{8+6(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$

Do $0\le x_1\le x_2\le 2\Rightarrow x_1^2\le x_1x_2;\ x_2^2\le 4\Rightarrow x_1^2+x_2^2\le x_1x_2+4$

$\Rightarrow (x_1+x_2)^2\le 3x_1x_2+4$

Do đó ta được $\qquad P\le\dfrac{8+6(x_1+x_2)+3x_1x_2+4}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=2$ hoặc $x_1=0;\ x_2=2$ hay $\left[\begin{array}{l}c=-b=4a\\ b=-2a;\ c=0\end{array}\right.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Câu 188: [TS10 Chuyên Hà Nội Amsterdam, 2014-2015]

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn (a + b)(b + c)(c + a) = 1.

Chứng minh $ab + ac + bc \le \dfrac{3}{4}$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô–si cho ba số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) \ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3 \Rightarrow a+b+c \ge \frac{3}{2}(2)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases} a+b \ge 2\sqrt{ab} \\ b+c \ge 2\sqrt{ac} \\ c+a \ge 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow 1 = (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc \Rightarrow abc \le \frac{1}{8}(3)$$

Biến đổi (1), chú ý 2 BĐT (2) và (3), ta được:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+c^2+ca) = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+ca) + ac^2 + bc^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) - abc = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 1$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c} \le \frac{1+\frac{1}{8}}{3} = \frac{3}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

Câu 189: [TS10 Chuyên Hà Nội Amsterdam, 2014-2015]

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$

Lời giải

Xét nửa khoảng A = (0;1]. Chia nửa khoảng này thành 1000 nửa khoảng

$$A_1 = \left(0;\frac{1}{1000}\right], A_2 = \left(\frac{1}{1000};\frac{2}{1000}\right], ..., A_n = \left(\frac{n-1}{1000};\frac{n}{1000}\right], ..., A_{1000} = \left(\frac{999}{1000};1\right]$$

Xét bộ số $x_1; x_2; ...; x_{1001}$ với $x_k = \left[1 - k\sqrt{2}\right] + k\sqrt{2} (k \in \mathbb{N}^*, k \le 1001)$

Với mọi k ta có $-k\sqrt{2} < \left[1-k\sqrt{2}\right] \le 1-k\sqrt{2}$ (tính chất phần nguyên) nên $0 < \left[1-k\sqrt{2}\right] + k\sqrt{2} \le 1 \Rightarrow x_k \in A$

$\Rightarrow x_k$ thuộc một trong các 1000 khoảng $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$

Có 1001 số x_k mà có 1000 nửa khoảng, do đó tồn tại 2 số x_i, x_j thuộc cùng một nửa khoảng A_m nào đó $0 \le |x_i - x_j| < \frac{1}{1000}$.

Đặt $a = \left[1-i\sqrt{2}\right] - \left[1-j\sqrt{2}\right], b = i - j \Rightarrow x_i - x_j = a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}$

Mà a là số nguyên, $b\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $a + b\sqrt{2} \ne 0 \Rightarrow |x_i - x_j| > 0$

Do đó $0 < |x_i - x_j| < \frac{1}{1000} \Rightarrow 0 < \left|a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}\right| < \frac{1}{1000}$

Vậy tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn đề bài.

Câu 190: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2014-2015]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a + 3b + 2c = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} + \frac{3}{\sqrt{c^2+9}}$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{6}{bc} + \frac{3}{ca} + \frac{2}{ab} = 1$. Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{2}{y}; c = \frac{3}{z}$, khi đó ta được $xy + yz + zx = 1$

Biểu thức B được viết lại thành $B = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Để ý đến giả thiết $xy + yz + zx = 1$ ta có $x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(z+x)$

Khi đó ta được $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $B = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$

$$\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$B=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}} \le \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{3};\ b=2\sqrt{3};\ c=3\sqrt{3}$

Câu 191: [TS10 Chuyên Hà Nội 2014-2015]

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-x^2}{x+yz}+\frac{1-y^2}{y+zx}+\frac{1-z^2}{z+xy} \ge 6$$

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được

$$\frac{1-x^2}{x+yz}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x+y)(z+x)}=\frac{(x+y)(y+z)+(z+x)(y+z)}{(x+y)(z+x)}$$

Hoàn toàn tương tưh ta được

$$\frac{1-y^2}{y+zx}=\frac{(x+z)(x+y)+(x+z)(y+z)}{(x+y)(y+z)}$$

$$\frac{1-z^2}{z+xy}=\frac{(x+y)(y+z)+(x+y)(x+z)}{(y+z)(z+x)}$$

Đặt $a=(x+y)(y+z);\ b=(y+z)(z+x);\ c=(x+y)(z+x)$, khi đó ta viết lại được bất đẳng thức thành

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \ge 2;\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a} \ge 2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Câu 192: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2014-2015]

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=\sqrt{\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$

Do đó ta được $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right);\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$$
$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 193: [TS10 Chuyên Tiền Giang 2014-2015]

1) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le\frac{3}{4}(a+b+c)$$

2) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\le 1$$

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{ab}=2.\sqrt{\frac{a}{4}.b}\le\frac{a}{4}+b;\ \sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{\frac{a}{4}.b.4c}\le\frac{\frac{a}{4}+b+4c}{3}$$

Từ đó ta có $a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le a+\frac{a}{4}+b+\frac{\frac{a}{4}+b+4c}{3}=\frac{4\left(a+b+c\right)}{3}$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=16c$

2) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=1$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 194: [TS10 Chuyên Bắc Giang 2014-2015]

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}}=\frac{4a^2}{4\sqrt{b+3}}+\frac{4b^2}{4\sqrt{c+3}}+\frac{4c^2}{4\sqrt{a+3}}\ge\frac{4a^2}{b+7}+\frac{4b^2}{c+7}+\frac{4c^2}{a+7}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{b+7}+\frac{4b^2}{c+7}+\frac{4c^2}{a+7}\ge\frac{4\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+21}=\frac{4.9}{3+21}=\frac{3}{2}$$

Suy ra ta được $$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}}\ge\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 195: [TS10 Chuyên Đại học Vinh 2014-2015]

Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=xy+yz+zx$$

Lời giải

Giả sử x là số lớn nhất trong các số x, y, z.

Khi đó ta được $x+y+z\le 3x;\ xyz\le x^3$

Suy ra $x^3+3x\ge 4$ hay $\left(x-1\right)\left(x^2+x+4\right)\ge 0\Rightarrow x\ge 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}P=xy+yz+zx&=x\left(x+y+z\right)+yz-x^2=x\left(4-xyz\right)+yz-x^2\\&=-\left(x-2\right)^2+4+yz\left(1-x^2\right)\le 4\end{aligned}$$

Suy ra $P\le 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=0;\ y=z=2$ và các hoán vị.

Câu 196: [TS10 Chuyên Yên Bái 2014-2015]

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x>-1;\ y>-2;\ z>-3$ và $x+y+z=-5$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{y+2}+\dfrac{9}{z+3}\ge 36$

Lời giải

Do $x>-1;\ y>-2;\ z>-3$ nên $x+1>0;\ y+2>0;\ z+3>0$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{x+1}+\frac{4}{y+2}+\frac{9}{z+3}\ge\frac{\left(1+2+3\right)^2}{x+y+z+6}=36$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x+y+z=-5\\ \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{3}{z+3}\end{cases}$$

Câu 197: [TS10 Chuyên Quảng Trị 2014-2015]

Cho các số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2\left(b^2+c^2\right)}}\ge\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge\frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}$; $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge 2$

Vì đẳng thức không xẩy ra nên ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$$

Bài toán được chứng minh xong.

NĂM HỌC 2013-2014

Câu 198: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2013-2014]

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}$$

Lời giải

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2 nên $a+b+c=2$.

Đặt $b+c-a=x;\ c+a-b=y;\ a+b-c=z$, do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $x;y;z>0$. Khi đó ta được $x+y+z=2$ và $a=\frac{y+z}{2};\ b=\frac{x+z}{2};\ c=\frac{x+y}{2}$.

Khi đó

$$S=\frac{y+z}{2x}+\frac{4(x+z)}{2y}+\frac{9(x+y)}{2z}=\frac{1}{2}\left[\frac{y+z}{x}+\frac{4(x+z)}{y}+\frac{9(x+y)}{z}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)\right]$$

Ta có

$$\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}=\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2\ge 2$$

$$\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}=\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-3\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+6\ge 6$$

$$\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}=\left(2\sqrt{\frac{z}{y}}-3\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2+12\ge 12$$

Do đó $S\ge\frac{1}{2}(4+6+12)=11$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y=2x \\ z=3x \\ 2z=3y \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{5}{6};\ b=\frac{2}{3};\ c=\frac{1}{2}$$

Khi đó $a^2=b^2+c^2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 11 khi ΔABC vuông .

Câu 199: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2013-2014]

Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}+\frac{\sqrt{y^2-yz+z^2}}{y+z+2x}+\frac{\sqrt{z^2-zx+x^2}}{z+x+2y}$$

Lời giải

Ta có $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy\ge(x+y)^2-\frac{3(x+y)^2}{4}=\frac{(x+y)^2}{4}$

Suy ra $$\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}\ge\frac{x+y}{2(x+z+y+z)}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$S\ge\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{y+z+z+x}+\frac{y+z}{z+x+x+y}+\frac{z+x}{x+y+y+z}\right)$$

Đặt $a=x+y;\ b=y+z;\ c=z+x$, khi đó ta được

$$S\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

Vì theo bất đẳng thức Neibizt thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

Vậy ta được giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3}{4}$ đạt được tại $x=y=z$.

Câu 200: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2013-2014]

Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abc+bcd+cda+dab=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(a^3+b^3+c^3\right)+9c^3$

Lời giải

Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=kd$, với k là số dương.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2}\left(a^3+b^3+c^2\right)\geq\frac{3abc}{k^2}\\
&\frac{a^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3\geq\frac{3abd}{k^2}\\
&\frac{b^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3\geq\frac{3bcd}{k^2}\\
&\frac{c^3}{k^3}+\frac{a^3}{k^3}+d^3\geq\frac{3cad}{k^2}
\end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+3d^3\geq\frac{3\left(abc+abd+bcd+cad\right)}{k^2}=\frac{3}{k^2}$$

Hay $$\left(\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+9d^3\geq\frac{9}{k^2}$$

Ta cần tìm k để $\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3}=4\Leftrightarrow 4k^3-3k-6=0$ và ta chọn k là số dương.

Đặt $k=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ thay vào phương trình trên và biến đổi ta thu được $x^6-12x^3+1=0$

Giải phương trình này ta được $x=\sqrt[3]{6\pm\sqrt{35}}$, để ý là $\left(6+\sqrt{35}\right)\left(6-\sqrt{35}\right)=1$ nên ta tính được $k=\frac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}$

Do đó ta tính được giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^2}$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}$.d

Câu 201: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2013-2014]

Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1\le x_2\le x_3\le ...\le x_{192}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+...+x_n=0 \\ |x_1|+|x_2|+|x_3|+...+|x_{192}|=2013 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $$x_{192}-x_1\ge\frac{2013}{96}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bài toán phụ sau: Với $a_1\le a_2\le a_3\le ...\le a_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_n=0 \\ |a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|=1 \end{cases}$$

Khi đó ta được $a_n-a_1\ge\dfrac{2}{n}$.

Thật vậy, từ điều kiện của bài toán ta nhận thấy tồn tại số tự nhiên k để

$$a_1\le a_2\le a_3\le ...\le a_k\le 0\le a_{k+1}\le ...\le a_n$$

Khi đó từ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_n=0 \\ |a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|=1 \end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases} (a_1+a_2+a_3+...+a_k)+(a_{k+1}+...+a_n)=0 \\ -(a_1+a_2+a_3+...+a_k)+(a_{k+1}+...+a_n)=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_{k+1}+...+a_n=\dfrac{1}{2} \\ a_1+a_2+a_3+...+a_k=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cũng từ $a_1\le a_2\le a_3\le ...\le a_k\le 0\le a_{k+1}\le ...\le a_n$ ta được

$$a_1\le a_2\le a_3\le ...\le a_k\Rightarrow a_1\le-\frac{1}{2k}$$

$$a_{k+1}\le ...\le a_n\Rightarrow a_n\ge\frac{1}{2(n-k)}$$

Do đó $a_n-a_1\ge\dfrac{1}{2(n-k)}+\dfrac{1}{2k}=\dfrac{n}{2(n-k)n}\ge\dfrac{2n}{(n-k+n)^2}=\dfrac{2}{n}$

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Từ giả thiết của bài toán trên ta viết lại như sau

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{2013}+\dfrac{x_2}{2013}+\dfrac{x_3}{2013}+...+\dfrac{x_n}{2013}=0 \\ \left|\dfrac{x_1}{2013}\right|+\left|\dfrac{x_2}{2013}\right|+\left|\dfrac{x_3}{2013}\right|+...+\left|\dfrac{x_{192}}{2013}\right|=1 \end{cases}$$

Áp dụng kết quả của bài toán phụ ta được

$$\frac{x_{192}}{2013}-\frac{x_1}{2013}\ge\frac{2}{192}\Rightarrow x_{192}-x_1\ge\frac{2013}{96}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Câu 202: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2013-2014]

. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}}\ge 2+ab+ba+ca$$

Lời giải

Do $a^2+b^2+c^2=1$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+ab}}=\frac{ab+2c^2}{\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}\le\frac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2}\le\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}=a^2+b^2+c^2$$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\dfrac{ab+2c^2}{\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}}\ge\dfrac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2}=ab+2c^2$

Tương tự ta được $\sqrt{\dfrac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}\ge bc+2a^2$; $\sqrt{\dfrac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}}\ge ca+2b^2$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên kết hợp $a^2+b^2+c^2=1$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 203: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1)\ge 3(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)\ge 3abc+3(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+3$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số dương ta được

$$ab+bc+ca\ge 3.\sqrt[3]{(abc)^2}=3;\ a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 204: [TS10 Chuyên TP. Hà Nội, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab};\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{2}{bc};\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{2}{ca}$$
$$\frac{1}{a^2}+1\ge\frac{2}{a};\frac{1}{b^2}+1\ge\frac{2}{b};\frac{1}{c^2}+1\ge\frac{2}{c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+3\ge 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2.6=12$$

Hay $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$

Câu 205: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2013-2014]

Cho x, y là các số thực thoả mãn $x^2(x^2+2y^2-3)+(y^2-2)^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=x^2+y^2$.

Lời giải

Ta có:

$$x^2\left(x^2+2y^2-3\right)\left(y^2-2\right)^2=1 \Leftrightarrow x^4+2x^2y^2-3x^2+y^4-4y^2+4=1$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^2y^2+y^4-4\left(x^2+y^2\right)+x^2+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+3=-x^2\le 0\ \forall x$$

Với $x^2+y^2=C$ thì ta có $C^2-4C+3\le 0 \Leftrightarrow C^2-4C+4\le 1 \Leftrightarrow (C-2)^2\le 1$

$$\Leftrightarrow |C-2|\le 1 \Leftrightarrow -1\le C-2\le 1 \Leftrightarrow 1\le C\le 3$$

$$C=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases};\ C=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $\min C=1$ khi $x=0$ và $y=\pm 1$; $\max C=3$ khi $x=0$ và $y=\pm\sqrt{3}$.

Câu 206: [TS10 Chuyên TP. Hà Nội, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$$

Lời giải

Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$. Gọi P là vế trái, khi đó ta được

$$\begin{aligned} P&=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2} \\ &=\frac{yz}{xy+xz+2yz}+\frac{zx}{xy+yz+2xz}+\frac{xy}{xz+yz+2xy} \end{aligned}$$

Biến đổi tương đương ta được

$$3-P=1-\frac{yz}{xy+xz+2yz}+1-\frac{zx}{xy+yz+2xz}+1-\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3-P=(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz}+\frac{1}{xy+yz+2xz}+\frac{1}{xz+yz+2xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\ge\frac{1}{A+B+C}$

Ta có $3-P=(xy+yz+xz)\frac{9}{4xy+4yz+4xz}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow P\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 207: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2013-2014]

a) Chứng minh rằng: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, với a, b là hai số dương.

b) Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\left(a^3+b^3\right)^2+\left(a^2+b^2\right)+\frac{3}{2}ab$$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab\left(a+b\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

b) Ta có $F=\left(a^3+b^3\right)^2+\left(a+b\right)^2-\frac{1}{2}ab$

Mà ta luôn có bất đẳng thức $a^3+b^3\ge \frac{\left(a+b\right)^3}{4}$, với mọi a, $b>0$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\left(a^3+b^3\right)^2\ge \left[\frac{\left(a+b\right)^3}{4}\right]^2\ge \frac{1}{16}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$F\ge \frac{1}{16}+\left(a+b\right)^2-\frac{\left(a+b\right)^2}{8}=\frac{1}{16}+\frac{7\left(a+b\right)^2}{8}\ge \frac{1}{16}+\frac{7}{8}=\frac{15}{16}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Câu 208: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2013-2014]

a. Chứng minh rằng: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, với a, b là hai số dương.

b. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b\ge 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\left(a^3+b^3\right)^2+\left(a^2+b^2\right)+\frac{3}{2}ab$.

Lời giải

a) Ta có bất đẳng thức

$(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\ge 0\Leftrightarrow (a+b)(a^2-2ab+b^2)\ge 0\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

b) Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh ở câu (a) ta có:

$\left(a^3+b^3\right)^2 \geq \left[ab(a+b)\right]^2$ mà theo giả thiết $a+b \geq 1$

Do đó $\left(a^3+b^3\right)^2 \geq \left[ab(a+b)\right]^2 \geq (ab)^2$

+) Mặt khác ta có: $F = a^2+b^2 = \left(a+b\right)^2 - 2ab \geq 1 - 1ab$

+) Do đó

$$F \geq \left(ab\right)^2 + 1 - 2ab + \frac{3}{2}ab = \left(ab\right)^2 - \frac{ab}{2} + 1 = \left(ab\right)^2 - 2.ab.\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = \left(ab - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} \geq \frac{15}{16}$$

+) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\dfrac{15}{16}$, đạt được khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Câu 209: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2013-2014]

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $12\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right) \leq 3 + \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{4a+b+c}+\dfrac{1}{a+4b+c}+\dfrac{1}{a+b+4c} \leq \dfrac{1}{6}$

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \leq 12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \leq 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Suy ra $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-1\right)\left[4\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+3\right] \leq 0$

Do đó ta được $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leq 1$ và $a+b+c \geq 9$

Đặt $P = \dfrac{1}{4a+b+c}+\dfrac{1}{a+4b+c}+\dfrac{1}{a+b+4c}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\dfrac{4}{x+y} \leq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ ta được

$$P=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}$$
$$\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Câu 210: [TS10 Chuyên Nam Định, 2013-2014]

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$2x^2\sqrt{yz}\le x^4+yz\Leftrightarrow\frac{1}{2x^2\sqrt{yz}}\ge\frac{1}{x^4+yz}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{2\sqrt{yz}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{yz}}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{yz}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{y^2}{y^4+xz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$; $\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

Mặt khác ta lại có $\quad xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$

Do đó ta được $\quad \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{3xyz}{xyz}=3$

Suy ra $\quad \frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Câu 211: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2013-2014]

Cho hai số x và y thỏa mãn: $xy(2013-\frac{xy}{2})=\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}-2014$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tích xy.

Lời giải

Ta có: $xy(2013-\frac{xy}{2})=\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}-2014 \geq 2.\sqrt{\frac{x^4}{4}.\frac{y^4}{4}}-2014$ (theo BĐT Cô–Si) (*)

(*) $\Leftrightarrow (xy)^2-2013xy-2014\leq 0$

Đặt t = xy thì (*) $\Leftrightarrow t^2-2013t-2014\leq 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2014)\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq t\leq 2014$

GTLN của xy là 2014 khi $x=y=\pm\sqrt{2014}$

GTNN của xy là –1 Khi ($x=1$; $y=-1$) hoặc ($x=-1$; $y=1$)

Câu 212: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$2abc\left(a+b+c\right)\leq\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức dạng $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ ta được

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\geq abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Bài toán quy về chứng minh $2abc\left(a+b+c\right)\leq\frac{5}{9}+abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Hay $$2\left(a+b+c\right)\leq\frac{5}{9abc}+\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^2b+\frac{1}{9b}\geq\frac{2a}{3}$; $b^2c+\frac{1}{9c}\geq\frac{2b}{3}$; $c^2a+\frac{1}{9a}\geq\frac{2c}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a^2b+b^2c+c^2a+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9b}+\frac{1}{9c}\geq\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{2c}{3}$$

Hay $$a^2b+b^2c+c^2a+\frac{ab+bc+ca}{9abc}\geq\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $2\left(a+b+c\right)\leq\frac{4}{9abc}+\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)$

Hay $$\frac{4abc(a+b+c)}{3}\le\frac{4}{9}\Leftrightarrow 3abc(a+b+c)\le 1$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $1=(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

NĂM HỌC 2012-2013

Câu 213: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2012-2013]

Cho ba số dương x,y,z thoả mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$,

với $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, $a+b+c=1$.

Ta có: $\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}$

$=\sqrt{a^2+a(b+c)+bc}\ge\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}=a+\sqrt{bc}$.

Tương tự: $\sqrt{b+ca}\ge b+\sqrt{ca}$; $\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}$.

Từ đó ta có đpcm. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3$.

Câu 214: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2012-2013]

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Lời giải

Dễ dàng tính được $ab+bc+ca=\frac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$. Lại có

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3+b^2a\ge 2a^2b;\ b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$$

Do đó suy ra

$$a^2+b^2+c^2=a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Từ đó ta được $\dfrac{1}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge\dfrac{3}{a^2+b^2+c^2}$

Hay $\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge\dfrac{3\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{3-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2\Rightarrow t\ge\dfrac{1}{3}$. Khi này biểu thức được viết lại thành

$$A=14t+\frac{3-3t}{2t}=\frac{28t}{2}+\frac{3}{2t}-\frac{3t}{2t}=\frac{27t}{2}+\frac{3}{2t}+\frac{t}{2}-\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\dfrac{27t}{2}+\dfrac{3}{2t}\ge 2\sqrt{\dfrac{27t}{2}.\dfrac{3}{2t}}=9$

Mặt khác $\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{2}\ge\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{4}{3}$. Suy ra $A\ge 9-\dfrac{4}{3}=\dfrac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{23}{3}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Câu 215: [TS10 Chuyên KHTN, 2012-2013]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a\le b\le 3\le c;\ c\ge b+1;\ a+b\ge c$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=\dfrac{2ab+a+b+c\left(ab-1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}$

Lời giải

Ta có

$$Q=\frac{2ab+a+b+c\left(ab-1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}=\frac{\left(a+1\right)\left(b+1\right)+\left(ab-1\right)\left(c+1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}$$
$$=\frac{1}{c+1}+\frac{ab-1}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)}=\frac{1}{a+b+1}+\frac{ab-1}{ab+a+b+1}$$

Từ giả thiết

$$a+b\ge c\ge b+1\Rightarrow b\ge a\ge 1\Rightarrow\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1\ge c-1\ge 2$$

Suy ra $Q\ge\dfrac{1}{ab+2}+\dfrac{ab-1}{2\left(ab+1\right)}$

Đặt $x=ab\Rightarrow x\ge 2$, khi đó ta được $Q\ge \frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2\left(x+1\right)}$

Suy ra $$Q-\frac{5}{12}\ge \frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2\left(x+1\right)}-\frac{5}{12}=\frac{\left(x-2\right)\left(x+5\right)}{12\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\ge 0$$

Do đó ta có $Q\ge \frac{5}{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=1;b=2;c=3$

Câu 216: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2012-2013]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}=\frac{ab+bc+ca}{2abc}=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 217: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2012-2013]

Cho n số thực $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ với $n\ge 3$. Kí hiệu $Max\left\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right\}$ là số lớn nhất trong các số $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$.Chứng minh rằng:

$$Max\left\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right\}\ge \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{\left|x_1-x_2\right|+\left|x_2-x_3\right|+...+\left|x_n-x_1\right|}{2n}$$

Lời giải

Để ý là trong hai số thực x, y bất kì ta luôn có

$$Min\{x,y\}\le x,y\le Max\{x,y\} \text{ và } Max\{x,y\}=\frac{x+y+\left|x-y\right|}{2}$$

Sử dụng đẳng thức $Max\{x,y\}=\frac{x+y+\left|x-y\right|}{2}$, ta có:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{\left|x_1-x_2\right|+\left|x_2-x_3\right|+...+\left|x_n-x_1\right|}{2n}$$
$$=\frac{x_1+x_2+\left|x_1-x_2\right|}{2n}+\frac{x_2+x_2+\left|x_2-x_3\right|}{2n}+...+\frac{x_n+x_1+\left|x_n-x_1\right|}{2n}$$
$$\le \frac{Max\{x_1,\ x_2\}+Max\{x_2,x\}+Max\{x_n,x_1\}}{n}\le Max\{x_1;\ x_2;...;\ x_n\}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$

Câu 218: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2012-2013]

Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x+y+z=\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất: $S=x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakoskicopxki ta có

$$\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right)\left(\left(x\sqrt{x}\right)^2+\left(y\sqrt{y}\right)^2+\left(z\sqrt{z}\right)^2\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

Hay $\frac{3}{2}\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\ge\frac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ (*)

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$xyz\ge(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)=\left(\frac{3}{2}-2z\right)\left(\frac{3}{2}-2x\right)\left(\frac{3}{2}-2y\right)$$

$$=\frac{27}{8}-\frac{9}{2}(x+y+z)+6(xy+yz+xz)-8xyz$$

$$\Leftrightarrow 9xyz\ge\frac{27}{8}-3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow x^2y^2z^2\ge\left(\frac{3}{8}-\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2$$

Đặt $t=x^2+y^2+z^2\ge\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{3}{4}$. Khi đó ta được

$S\ge\frac{2}{3}t^2+\left(\frac{3}{8}-\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2t^2}{3}+\frac{t^2}{9}-\frac{t}{4}+\frac{9}{64}=\frac{7t^2}{9}-\frac{t}{4}+\frac{9}{64}=\frac{1}{6}\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{8}t^2+\frac{3}{64}\ge\frac{25}{64}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{25}{64}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Câu 219: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2012-2013]

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}\ge 6$$

Lời giải

Ta viết lại vế trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}=\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}$$

Khi đó áp dụng ta đẳng thức Cauchy ta được : $\frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1}\ge 1-\frac{b^2}{2b}=1-\frac{b}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2};\ \frac{1}{a^2+1}\ge 1-\frac{a}{2}$

Khi đó ta có bất đẳng thức: $\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}$

Mặt khác ta lại có $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=a+b+c-\frac{3}{2}$

Do đó ta được : $\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}\ge 3+\frac{5\left(a+b+c\right)}{2}-\frac{9}{2}\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 220: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2012-2013]

Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2ba^2}.$$

Lời giải

Với $a>0;b>0$ ta có: $(a^2-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^4-2a^2b+b^2\ge 0\Rightarrow a^4+b^2\ge 2a^2b$

$\Leftrightarrow a^4+b^2+2ab^2\ge 2a^2b+2ab^2\quad \Leftrightarrow \frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}\le \frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (1)

Tương tự có $\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b}\le \frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow Q\le \frac{1}{ab\left(a+b\right)}$

Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Leftrightarrow a+b=2ab$ mà $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab\ge 1\Rightarrow Q\le \frac{1}{2(ab)^2}\le \frac{1}{2}$.

Khi a = b = 1 thì $\Rightarrow Q=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{1}{2}$

Câu 221: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2012-2013]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $$P=\frac{1}{abc}+\frac{1}{1-2\left(ab+bc+ca\right)}$$

Lời giải

Do $a+b+c=1\Rightarrow 1-2\left(ab+bc+ca\right)=a^2+b^2+c^2$

Suy ra $$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Dễ chứng minh: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

Áp dụng tiếp đánh giá trên ta được

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Hay $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\ge 9$$

Mặt khác ta lại có $$\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Câu 222: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2012-2013]

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $\sqrt{xy}\left(x-y\right)=x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra: $x>y>0$, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(x+y\right)^2=xy\left(x-y\right)^2=\frac{1}{4}.4xy\left(\left(x+y\right)^2-4xy\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{4xy+\left(x+y\right)^2-4xy}{2}\right)^2=\frac{1}{16}\left(x+y\right)^4.$$

Do đó $x+y\ge 4$. Vậy $\min A=4$ khi $x=2+2\sqrt{2};y=2-\sqrt{2}.$

Câu 223: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2012-2013]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc\le 1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge a+b+c$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}\Rightarrow xyz\ge 1$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopcxki ta được

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{xx+yz+zx}\ge x^2+y^2+z^2$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $x^2+y^2+z^2\ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Thật vậy theo một đánh giá quen thuộc và giả thiết $xyz\ge 1$ ta có

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\ge \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 224: [TS10 Chuyên KHTN, 2012-2013]

Giả sử a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4\Leftrightarrow 4\le \sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\le \frac{x+y}{2}+\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}+1\Leftrightarrow x+y\ge 2$ Mặt khác: $\frac{x^2}{y}+y\ge 2y,\quad \frac{y^2}{x}+x\ge 2x$

Do đó $P\ge x+y\ge 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $x=y=1$.

Câu 225: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2012-2013]

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge 8\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)$$

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương và $a+b+c=1$ nên ta có $a,b,c<1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$1+a=1-b+1-c\ge 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$$

Tương tự ta có $1+b\ge 2\sqrt{(1-c)(1-a)}$; $1+c\ge 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Câu 226: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2012-2013]

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=(a+b+c+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Lời giải

Đặt $x=1+c,\ y=1+b,\ z=1+a$. Từ $0\le a\le b\le c\le 1$ ta được $1\le x\le y\le z\le 2$

Ta viết lại biểu thức A là $A=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{x.y}{y.z}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}\le \frac{x}{z}+1$$

$$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z.y}{y.x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{z}{x}+1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le \frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$$

Đặt $t=\frac{x}{z}\Rightarrow \frac{1}{2}\le t\le 1$. Do đó ta được

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=t+\frac{1}{t}=\frac{t^2+1}{t}=\frac{2t^2-5t+2}{2t}+\frac{5}{2}=\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}+\frac{5}{2}$$

Do $\frac{1}{2}\le t\le 1$ nên ta có $\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}$ suy ra $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le \frac{5}{2}$

Từ đó ta được $A\le 3+2.\frac{5}{2}+2=10$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 10. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi.

Câu 227: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2012-2013]

Cho ba số dương a,b,c .Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4$

Lời giải

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4 \Leftrightarrow (a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{4}{a+c}+\frac{9}{a+b})>18$$

Thật vậy:

$$[(b+c)+(a+c)+a+b)](\frac{1}{b+c}+\frac{4}{a+c}+\frac{9}{a+b})>(\sqrt{\frac{b+c}{b+c}}+\sqrt{\frac{4(a+c)}{(a+c)}}+\sqrt{\frac{9(a+b)}{(a+b)}})^2=36$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{4}{a+c}+\frac{9}{a+b})>18 \text{ (đpcm)}$$

Câu 228: [TS10 Chuyên Nam Định, 2012-2013]

Cho a, b, c ,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2;$$
$$\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\ge\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

Hay $16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\ge 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\left(a+b+c+d\right)^2=9$$

Do vậy $\quad 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Suy ra ta được $\quad 16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\ge 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Hay $\quad 4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\ge 3\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$

Do đó ta được $\quad P=\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}\ge\frac{3}{4}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $a = b = c = d = \frac{3}{4}$

NĂM HỌC 2011-2012

Câu 229: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2011-2012]

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+ab} = 1 - \frac{ab}{1+ab} \ge 1 - \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = 1 - \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{1+bc} \ge 1 - \frac{\sqrt{bc}}{2}; \frac{1}{1+ca} \ge 1 - \frac{\sqrt{ca}}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \ge 3 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right)$$
$$\ge 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}\right) = 3 - \frac{a+b+c}{2} \ge 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 230: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2011-2012]

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + ... + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$$

Lời giải

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}; ... \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Suy ra

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Hay $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{81}-\sqrt{80}$

Nên ta được $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 231: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}\ge abc+\sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}\Rightarrow x;\ y;\ z>0;\ xyz=1$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{\left(xy+yz+zx\right)\left(x+y+z\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+xyz}\ge 1+\sqrt[3]{\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+1}\ge 1+\sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$ suy ra $t\ge 2$. Khi đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{t^3+1}\ge 1+t\Leftrightarrow t^3+1\ge 1+2t+t^2\Leftrightarrow t\left(t-2\right)\left(t+1\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge 2$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 232: [TS10 Chuyên Thanh Hóa, 2011-2012]

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P=\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}$$

Lời giải

Để ý đến giả thiết $a+b+c=2$ ta có $ab+2c=ab+c(a+b+c)=(b+c)(c+a)$

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}=\frac{ab}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}\le\frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}\le\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{c+a}$; $\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}\le\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được
$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}\le\frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}+\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{c+a}+\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}$$
$$=2(a+b+c)=4$$

Hay $P\le 4$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Câu 233: [TS10 Chuyên Kiên Giang, 2011-2012]

Chứng minh rằng: $21.\left(a+\frac{1}{b}\right)+3.\left(b+\frac{1}{a}\right)>31$, với a, b > 0

Lời giải

*Ta có: $21.\left(a+\frac{1}{b}\right)+3.\left(b+\frac{1}{a}\right)=21a+\frac{21}{b}+3b+\frac{3}{a}$

Với $a,\ b>0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$21a+\frac{3}{a}\ge 2\sqrt{21a\cdot\frac{3}{a}}=6\sqrt{7}\quad(1)$$

$$3b+\frac{21}{b}\ge 2\sqrt{3b\cdot\frac{21}{b}}=6\sqrt{7}\quad(2)$$

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được: $21\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)+3\cdot\left(b+\frac{1}{b}\right)\ \ge\ 12\sqrt{7}$

Mà: $12\sqrt{7}=\sqrt{144.7}=\sqrt{1008}$; $31=\sqrt{31^2}=\sqrt{961}\Rightarrow 12\sqrt{7}>31$

$\Rightarrow 21\cdot\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+3\cdot\left(b+\dfrac{1}{b}\right)>31$ (đpcm)

Câu 234: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=\dfrac{9}{4}$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\frac{ab(a+b)}{2}>\frac{ab(a+b)}{\frac{9}{4}}=\frac{ab(a+b)}{abc}=\frac{a+b}{c}$$

Từ đó ta có $$c^3+\frac{a^3+b^3}{2}>c^3+\frac{a+b}{c}\ge 2c\sqrt{a+b}$$

Tương tự ta có

$$b^3+\frac{a^3+c^3}{2}>b^3+\frac{a+c}{b}\ge 2b\sqrt{a+c}$$
$$a^3+\frac{b^3+c^3}{2}>a^3+\frac{b+c}{a}\ge 2a\sqrt{b+c}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 235: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2011-2012]

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2+a^2(b^2+c^2)^2+b^2(c^2+a^2)^2}\ge\frac{54(abc)^3}{(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}}$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2} \ge \sqrt{c^2\left(2ab\right)^2+a^2\left(2bc\right)^2+b^2\left(2ca\right)^2}$$

$$=\sqrt{12a^2b^2c^2}=2\sqrt{3}abc$$

$$\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4} \ge \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2\sqrt{3\sqrt[3]{a^8b^8c^8}}=9\sqrt{3.\sqrt[3]{a^4b^4c^3}.\sqrt[3]{a^8b^8c^8}}$$

$$=9\sqrt{3}a^2b^2c^2$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4}$$

$$=2\sqrt{3}abc.9\sqrt{3}a^2b^2c^2=54\left(abc\right)^3$$

Hay $\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2} \ge \dfrac{54\left(abc\right)^3}{\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4}}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 236: [TS10 Chuyên Vũng Tàu, 2011-2012]

Cho các số dương a,b,c thay đổi và thoã mãn $3a+4b+5c=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S=\dfrac{ab}{ab+a+b}+\dfrac{2ac}{ac+a+c}+\dfrac{3bc}{bc+b+c}$

Lời giải

Ta viết lại biểu thức S thành

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x+y+z}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ ta có

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}\le\frac{a+b+1}{9}+\frac{2\left(c+a+1\right)}{9}+\frac{3\left(b+c+1\right)}{9}$$

$$=\frac{6+3a+4b+5c}{9}=\frac{18}{9}=2$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là 2. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 237: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2011-2012]

Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8b^3}}+\sqrt{\frac{4b^3}{b^3+\left(a+b\right)^3}}$$

Lời giải

Biểu thức P được viết lại là $P=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{8b^3}{a^3}}}+\sqrt{\dfrac{\dfrac{4b^3}{a^3}}{\dfrac{b^3}{a^3}+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^3}}$

Đặt $t=\dfrac{b}{a}>0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là

$$P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1+8t^3=\left(1+2t\right)\left(1-2t+4t^2\right)\le\frac{\left(2+4t^2\right)^2}{2}=\left(1+2t^2\right)^2$$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{1}{1+8t^3}}\ge\sqrt{\dfrac{1}{\left(1+2t^2\right)^2}}=\dfrac{1}{1+2t^2}$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{\dfrac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}}\ge\dfrac{2t^2}{1+2t^2}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}\ge\left(\frac{2t^2}{1+2t^2}\right)^2\Leftrightarrow\left(1+2t^2\right)^2\ge t^4+t\left(1+t\right)^3\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2\left(2t^2+t+1\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t.

Do đó ta được

$$P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}}\ge\frac{1}{1+2t^2}+\frac{2t^2}{1+2t^2}=1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 1. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b$

Câu 238: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2011-2012]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $$P=\frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a^2+5)}+\sqrt{6(b^2+5)}+\sqrt{c^2+5}}$$

Lời giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=5$ ta có

$$a^2+5=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(c+a)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{6(a^2+5)}=\sqrt{6(a+b)(c+a)}\le\frac{3(a+b)+2(c+a)}{2}=\frac{5a+3b+2c}{4}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{6(b^2+5)}\le\frac{3a+5b+2c}{2};\ \sqrt{c^2+5}\le\frac{a+b+2c}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{6(a^2+5)}+\sqrt{6(b^2+5)}+\sqrt{c^2+5}\le\frac{9a+9b+6c}{2}$$

Suy ra $$P=\frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a^2+5)}+\sqrt{6(b^2+5)}+\sqrt{c^2+5}}\ge\frac{2(3a+3b+2c)}{9a+9b+6c}=\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{2}{3}$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=1;\ c=2$.

Câu 239: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2011-2012]

Cho hai số x,y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+y+1$.

Lời giải

Viết lại biểu thức đã cho thành $(x+y+1)^2+5(x+y+1)+4=-y^2$ (*).

Như vậy với mọi x và mọi y ta luôn có $S^2+5S+4\le 0$ (với $S=x+y+1$)

Suy ra: $(S+4)(S+1)\le 0\Leftrightarrow -4\le S\le -1$.

Từ đó có: $S_{min}=-4$, khi $\begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}$

$S_{max}=-1$, khi $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$.

Câu 240: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$

Lời giải

Ta có $a^2+abc=a^2(a+b+c)+abc=a(a+b)(a+c)$

Do đó ta được $\sqrt{a^2+abc}=\sqrt{a(a+b)(a+c)}\le\dfrac{\sqrt{a}(a+b+a+c)}{2}=\dfrac{\sqrt{a}(a+1)}{2}$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2+abc}\le\frac{\sqrt{b}(b+1)}{2};\ \sqrt{c^2+abc}\le\frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}\le\frac{\sqrt{a}(a+1)}{2}+\frac{\sqrt{b}(b+1)}{2}+\frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{a}(a+1)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{a}\left(\frac{a+1}{2}+\frac{b+c}{2}\right)=\sqrt{a}\left(\frac{a+b+c+1}{2}\right)=\sqrt{a}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{b}(b+1)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{b};\ \frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{c}$$

Như vậy ta có

$$P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+6\sqrt{abc}$$

Mà ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3(a+b+c)}=\sqrt{3};\ 6\sqrt{abc}\le6\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Nên ta suy ra $P\le\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Câu 241: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2011-2012]

Cho a, b, c là số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{81}\cdot\frac{(6+2+1)^2}{2(x+y+z)+2y+x}\le\frac{xy}{81}\left(\frac{18}{x+y+z}+\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{2xy}{9(x+y+z)}+\frac{2x+y}{81}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9(x+y+z)};\ \frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Đến đây chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Câu 242: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2011-2012]

Giả sử a, b, c là các số dương thoả mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a}{b^2+c^2+a}+\frac{b}{c^2+a^2+b}+\frac{c}{a^2+b^2+c}$$

Lời giải

Ta chứng minh $M\le 1$

Đặt $\sqrt[3]{a}=x;\ \sqrt[3]{b}=y;\ \sqrt[3]{c}=z$, khi đó $x;\ y;\ z>0$ và $xyz=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}+\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}+\frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le 1$$

Dễ thấy $\quad (y-z)(y^5-z^5)\ge 0\Rightarrow y^6+z^6\ge y^5z+yz^5$

Suy ra $\quad y^6+z^6+x^4yz\ge yz(x^4+y^4+z^4)$

Từ đó ta được $\quad \dfrac{1}{y^6+z^6+x^3}\le\dfrac{1}{yz(x^4+y^4+z^4)}$

Hay $$\frac{x^4yz}{y^6+z^6+x^3}\le\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$$

Do đó ta được $$\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}\le\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$$

Tương tự ta có $\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}\le\frac{y^4}{x^4+y^4+z^4}$; $\frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le\frac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{y^6+z^6+x^3}+\frac{y^3}{z^6+x^6+y^3}+\frac{z^3}{x^6+y^6+z^3}\le 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 243: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2011-2012]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\frac{1-4\sqrt{x}}{2x+1}-\frac{2x}{x^2+1}$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 0$

$$F=\frac{1-4\sqrt{x}}{2x+1}+1-\frac{2x}{x^2+1}+1-2=\frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{2x+1}+\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-2\ge -2.$$

Vậy MinF = - 2 khi và chỉ khi x = 1.

Câu 244: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}a;\ \frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}b;\ \frac{c^3}{a(b+c)}+\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4}\ge\frac{3}{2}c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}+a+b+c\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$

Nên ta được $$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

NĂM HỌC 2010-2011

Câu 245: [TS10 Chuyên KHTN, 2010-2011]

Giả sử x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $$\frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge 1$$

Lời giải

Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức cùng bậc là

$$\frac{\sqrt{xy+z(x+y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{x+y+z+\sqrt{xy}}\ge 1$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(x+z)(y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y+z+\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{(z+x)(z+y)}\ge z+\sqrt{xy}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$z^2+xy+z(x+y)\ge z^2+xy+2z\sqrt{xy}\Leftrightarrow z\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2};\ z=0$.

Câu 246: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2010-2011]

Cho a , b là các số dương thỏa $a^2+2b^2\le 3c^2$ .Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge\frac{3}{c}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge\frac{9}{a+2b}\quad(1)\Leftrightarrow(a+2b)(b+2a)\ge 9ab$

$\Leftrightarrow 2a^2-4ab+2b^2\ge 0\Leftrightarrow 2(a-b)\ge 0$ (đúng)

$a+2b\le\sqrt{3(a^2+2b^2)}\quad(2)\Leftrightarrow(a+2b)^2\le 3(a^2+2b^2)$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2(a-b)^2 \ge 0$ (đúng)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \ge \frac{9}{a+2b} \ge \frac{9}{\sqrt{3(a^2+2b^2)}} \ge \frac{3}{c}$ (do $a^2 + 2b^2 \le 3c^2$) (đpcm)

Câu 247: [TS10 Chuyên KHTN, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge a^2 + b^2 + c^2 \ge 3$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge a^2 + b^2 + c^2$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ac}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

Do đó ta được $(a^2+b^2+c^2)^2 \ge (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)$

Nên ta có $$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ac} \ge a^2 + b^2 + c^2$$

Do đó ta suy ra $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge a^2 + b^2 + c^2$

+ Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2 + b^2 \ge 2ab;\ b^2 + c^2 \ge 2bc;\ c^2 + a^2 \ge 2ca;\ a^2 + 1 \ge 2a; b^2 + 1 \ge 2b; c^2 + 1 \ge 2c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3(a^2+b^2+c^2) + 3 \ge 2(ab+bc+ca+a+b+c) = 12$$

Hay $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \ge a^2 + b^2 + c^2 \ge 3$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 248: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2010-2011]

Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}}+\frac{b}{\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}}+\frac{c}{\sqrt{ab\left(1+c^2\right)}}$$

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}=\sqrt{bc+a^2bc}=\sqrt{bc+a\left(a+b+c\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)};\ \sqrt{ba\left(1+c^2\right)}=\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)};$$

Nên

$$\begin{aligned}S&=\frac{a}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}+\frac{b}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}}\frac{c}{\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}}\\&=\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}.\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+b}.\frac{c}{a+c}}\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}\le\frac{1}{2}\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$S\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 249: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2010-2011]

Cho các số dương a, b c .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{c\left(ab+1\right)^2}{b^2\left(bc+1\right)}+\frac{a\left(bc+1\right)^2}{c^2\left(ca+1\right)}+\frac{b\left(ca+1\right)^2}{a^2\left(ab+1\right)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}$ ta được

$$S \ge 3\sqrt[3]{\frac{c(ab+1)^2.a(bc+1)^2.b(ca+1)^2}{b^2(bc+1).c^2(ac+1).a^2(ab+1)}} = 3\sqrt[3]{\frac{(ab+1)(bc+1)(ac+1)}{abc}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}}{abc}} = 6$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 250: [TS10 Chuyên Đại Học Vinh, 2010-2011]

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=18\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(x+y)}} \ge \frac{1}{4}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}} \ge \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2\sqrt{2x(y+z)} \le 2x+y+z$, do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}} \ge \frac{2}{2x+y+z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}} \ge 2\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \ge \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \ge \frac{9}{4(x+y+z)} = \frac{9}{4.18\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=6\sqrt{2}$

Câu 251: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)+3(ab+bc+ca)\ge 6(a+b+c)$$

Để ý rằng $\quad (ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3(a+b+c)$

Nên bài toán quy về chứng minh $\sqrt{3(a+b+c)^3}+3\sqrt{3(a+b+c)}\ge 6(a+b+c)$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\sqrt{3(a+b+c)}\left(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{3}\right)^2\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 252: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2010-2011]

Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1.$ Chứng minh rằng: $b+c\ge 16abc.$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Ta có: $(a+b+c)^2=(a+(b+c))^2\ge 4a(b+c).$

Do $a+b+c=1$ nên từ bất đẳng thức trên suy ra: $1\ge 4a(b+c)\Leftrightarrow b+c\ge 4a(b+c)^2.$

Lại có: $(b+c)^2\ge 4bc\Rightarrow b+c\ge 16abc.$

Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{2};b=c=\frac{1}{4}.$

Câu 253: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{\sqrt{97}}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{81}{16}\right)} \ge \sqrt{\left(a+\frac{9}{4b}\right)^2} = a+\frac{9}{4b}$$

Hay $$\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}} \ge a+\frac{9}{4b}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}} \ge b+\frac{9}{4c};\ \frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}} \ge c+\frac{9}{4a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4}\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\right) \ge a+b+c+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mà ta lại có $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}} \ge \frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right]$$

Ta cần chứng minh $$\frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right] \ge \frac{\sqrt{97}}{2}$$

Hay $$a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)} \ge \frac{97}{8}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)} = a+b+c+\frac{4}{a+b+c}+\frac{65}{4(a+b+c)}$$
$$\ge 2\sqrt{(a+b+c)\frac{4}{a+b+c}}+\frac{65}{4.2} = 4+\frac{65}{8} = \frac{97}{8}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Câu 254: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2010-2011]

Cho các số $a,\ b,\ c \in [1;2]$. Chứng minhrằng:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{c^2+a^2}{ca} \le 7$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}&a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\le 7abc\\ \Leftrightarrow\ & c\left(ab-ca-b^2+bc\right)+a\left(ab-ca-b^2+bc\right)+5abc-2bc^2-2a^2b\ge 0\\ \Leftrightarrow\ &\left(ab-ca-b^2+bc\right)\left(c+a\right)+b\left(4ca-2c^2-2a^2+ca\right)\ge 0\\ \Leftrightarrow\ &\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c+a\right)+b\left(2a-c\right)\left(2c-a\right)\ge 0\end{aligned}$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$ khi đó ta được $2a\ge 2\ge c;\ 2c\ge 2\ge a$. Do đó ta được

$$\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c+a\right)\ge 0;\ b\left(2a-c\right)\left(2c-a\right)\ge 0$$

Nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=2;\ c=1$ và các hoán vị.

Câu 255: [TS10 Chuyên Bình Định, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9.$$

Lời giải.

Với x, y, z là các số thực dương ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$ (*)

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 3\sqrt[3]{xyz}.3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=9\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}.$$

Vậy (*) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge\frac{9}{1}=9$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 256: [TS10 Chuyên Đại học Vinh, 2010-2011]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x^2+x-2x\sqrt{y}+y^2+y-2y\sqrt{x}+2010.$$

Lời giải.

Ta có: $P=(x-\sqrt{y})^2+(y-\sqrt{x})^2+2010\ge 2010\ (\forall x\ge 0; y\ge 0)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = 1 hoặc x = y = 0.

Câu 257: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}-\sqrt{abc}$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a}$; $y=\sqrt{b}$; $z=\sqrt{c}$. Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2=3$.

Khi này biểu thức P trở thành $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz$

Dễ thấy $P\ge 0$ theo bất đẳng thức Cauchy

Không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x, z. Khi đó ta có

$$z(y-z)(y-x)\le 0\Leftrightarrow y^2z+z^2x-xyz\le z^2y$$

Do đó ta có $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz\le x^2y+z^2y=y\left(x^2+z^2\right)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2y^2\left(x^2+z^2\right)\left(x^2+z^2\right)\le\left(\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{3}\right)^3=8$$

Suy ra $y\left(x^2+z^2\right)\le 2$ nên ta được $P\le 2$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} x=y=z \\ \begin{cases} z=0 \\ x^2=2y^2 \end{cases} \end{array}\right. \text{ và các hoán vị } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c=1 \\ a=2;\ b=1;\ c=0 \end{array}\right. \text{ và các hoán vị}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=2;\ b=1;\ c=0$ và các hoán vị.

Câu 258: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2010-2011]

Cho x, y là hai số không âm. Chứng minh rằng

$$x^3+8y^3\ge 2x^2y+4xy^2$$

Lời giải

Ta các

$x^3+8y^3\ge 2x^2y+4xy^2$
$\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-2xy+4y^2)\ge 2xy(x+2y)$
$\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-4xy+4y^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x+2y)(x-2y)^2\ge 0\ \ \forall x\ge 0, y\ge 0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 259: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2010-2011]

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải

Để ý là $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(c+a)$, do đó ta được

$$\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(a+b)(c+a)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}=\frac{\sqrt{(a+b)(c+a)}-a}{bc}\le\frac{\frac{2a+b+c}{2}-a}{bc}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 260: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2010-2011]

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\ge\dfrac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ $(\forall a,b,c>0)$

Lời giải.

Dễ thấy: $(a+b)(b+c)(c+a)=c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+2abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta được:

$$\left(c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+2abc\right).\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\right)$$

$$\geq\left(c\sqrt{a+b}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}+a\sqrt{b+c}.\frac{1}{\sqrt{b+c}}+b\sqrt{c+a}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}+\sqrt{2abc}.\sqrt{\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}}\right)^2=\left(c+a+b+\sqrt[3]{abc}\right)^2.$$

Suy ra điều phải chứng minh, đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 261: [TS10 Chuyên Kiên Giang, 2010-2011]

Tìm a, b để biểu thức: $X = 2a^2 + 9b^2 + 2a - 18b - 6ab + 2010$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có:

$X = (3b)^2 - 2.3b.(3 + a) + 9 + 6a + a^2 + a^2 - 4a + 4 + 1997$

$= (3b)^2 - 2.3b.(3 + a) + (3 + a)^2 + (a^2 - 4a + 4) + 1997$

$= (3b - 3 - a)^2 + (a - 2)^2 + 1997 \geq 1997$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}3b-3-a=0\\ a-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3b-3-2=0\\ a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{5}{3}\\ a=2\end{cases}$

Vậy với a = 2 và $b = \dfrac{5}{3}$ thì $X_{max} = 1997$

Câu 262: [TS10 Chuyên Phú Yên, 2010-2011]

a) Cho 2 số dương a và b. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a+b}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2010$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

Lời giải

a) Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow 4ab\leq(a+b)^2\Leftrightarrow 0\leq(a-b)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

b) Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right);\ \frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2010}{4}=\frac{1005}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1005}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=670$

NĂM HỌC 2009-2010

Câu 263: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2009-2010]

Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4x-3}}+\frac{1}{\sqrt{5x-6}}\right)$.

Lời giải

Ta chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a+2b}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a}}\right)$ (*)

với $a>0; b>0; c>0$

+ Với $a>0; b>0$ ta có: $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\le\sqrt{3(a+2b)}$ (1)

+ Do $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)\ge 9$ nên $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{b}}\ge\frac{9}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{b}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+2b}}$ (3) (Với $a>0; b>0; c>0$)

+ Áp dụng (3) ta có:

$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a+2b}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a}}\right)$ với $a>0; b>0; c>0$

Phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4x-3}}+\frac{1}{\sqrt{5x-6}}\right)$ có ĐK: $x>\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) với $a=x; b=x; c=2x-3$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{1}{\sqrt{5x-6}}+\frac{1}{\sqrt{4x-3}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\ge \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{5x-6}}+\frac{1}{\sqrt{4x-3}}\right)\text{với } x>\frac{3}{2}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=2x-3\Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 264: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2009-2010]

a) Cho các số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng: $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

b) Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c\le 3$. Chứng ming rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $a+b+c\ge \sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Ta có $$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\Rightarrow ab+bc+ca\le \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\le 3$$

Suy ra $$\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge 669$$

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Suy ra $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge \frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}\ge 1$$

Do đó ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 265: [TS10 Chuyên Phú Yên, 2009-2010]

a) Cho x, y, z, a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}\le \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}.$$

b) Từ đó suy ra : $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\le 2\sqrt[3]{3}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz} \le \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}$ (1)

Lập phương 2 vế của (1) ta được :

$$abc+xyz+3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le (a+x)(b+y)(c+z)$$

$\Leftrightarrow abc+xyz+3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le abc+xyz+abz+ayc+ayz+xbc+xyc+xbz$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le (abz+ayc+xbc)+(ayz+xbz+xyc)$ (2)

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$(abz+ayc+xbc)\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}$ (3)

$(ayz+xbz+xyc)\ge 3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}$ (4)

Cộng hai bất đẳng thức (3) và (4) ta được bất đẳng thức (2), do đó (1) được chứng minh.

b) Áp dụng BĐT (1) với $a=3+\sqrt[3]{3}$, $b=1$, $c=1$, $x=3-\sqrt[3]{3}$, $y=1$, $z=1$

Ta có : $abc=3+\sqrt[3]{3}$, $xyz=3-\sqrt[3]{3}$, $a+x=6$, $b+y=2$, $c+z=2$

Từ đó : $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\le\sqrt[3]{6.2.2}=2\sqrt[3]{3}$ (đpcm).

Câu 266: [TS10 Chuyên Đà Nẵng, 2009-2010]

Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\ge 4(ab+bc+ca)-1$.

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2\ge 2ab$; $b^2+c^2\ge 2bc$; $c^2+a^2\ge 2ca$

$\Rightarrow$ $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (1)

Lại có: $a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2-1$

Hay $a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)-1$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ $a^2+b^2+c^2\ge 4(ab+bc+ca)-1$ đpcm

Câu 267: [TS10 Chuyên Bình Định, 2009-2010]

Với số tự nhiên $n\ge 3$. Chứng minh rằng $S_n<\frac{1}{2}$.

Với $S_n = \frac{1}{3\left(1+\sqrt{2}\right)} + \frac{1}{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} + ... + \frac{1}{\left(2n+1\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$

Lời giải

Với $n \geq 3$, ta có

$$\frac{1}{\left(2n+1\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}}$$

$$< \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}.\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Do đó ta được

$$S_n < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 268: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2009-2010]

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \left|\sqrt{x^2-4x+5} - \sqrt{x^2+6x+13}\right|$

Lời giải

Ta có: $P = \left|\sqrt{\left(x-2\right)^2+1^2} - \sqrt{\left(x+3\right)^2+2^2}\right|$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy các điểm A(x-2; 1), B(x+3; 2)

Ta chứng minh được: $AB = \sqrt{\left(x-2-x-3\right)^2+\left(1-2\right)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$$OA = \sqrt{\left(x-2\right)^2+1^2},\ OB = \sqrt{\left(x+3\right)^2+2^2}$$

Mặt khác ta có: $\left|OA - OB\right| \leq AB \Rightarrow \left|\sqrt{\left(x-2\right)^2+1^2} - \sqrt{\left(x+3\right)^2+2^2}\right| \leq \sqrt{26}$

Dấu "=" xảy ra khi A thuộc đoạn OB hoặc B thuộc đoạn OA

$\Rightarrow \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 7$. Thử lại $x = 7$ thì A(5; 1); B(10; 2).

Câu 269: [TS10 Chuyên Bình Định, 2009-2010]

Chứng minh rằng $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$, với mọi số nguyên m, n.

Lời giải

Vì m, n là các số nguyên nên $\frac{m}{n}$ là số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $\frac{m}{n}-\sqrt{2}\neq 0$.

Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Với $\frac{m}{n}>\sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2>2n^2\Rightarrow m^2\geq 2n^2+1 \text{ hay } m\geq\sqrt{2n^2+1}$$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\geq\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n}-\sqrt{2}=\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{n^2}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}}=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}\right)}\geq\frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

+ Trường hợp 2: Với $\frac{m}{n}<\sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2<2n^2\Rightarrow m^2\leq 2n^2-1 \text{ hay } m\leq\sqrt{2n^2-1}$$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-\frac{m}{n}\geq\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n}=\sqrt{2}-\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{2-2+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}\right)}\geq\frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 270: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2009-2010]

Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 \ge 2+2\left(\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}\right)$$

Mà ta lại có

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}$$
$$=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$$

Do đó bất đẳng thức trên trở thành $\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2 \ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 271: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2009-2010]

Cho biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd$, trong đó $ad-bc=1$.

Chứng minh rằng: $P \ge \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$
$$=a^2\left(c^2+d^2\right)+b^2\left(d^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

Vì $ad-bc=1$ nên $1+(ac+bd)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd \ge 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}+ac+bd$$

Suy ta $P \ge 2\sqrt{1+(ac+bd)^2}+ac+bd$. Rõ ràng $P>0$ vì $2\sqrt{1+(ac+bd)^2}>|ac+bd|^2$

Đặt $x=ac+bd$, khi đó ta được

$$P \ge 2\sqrt{1+x^2}+x \Leftrightarrow P^2 \ge 4\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+x^2=\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+4x^2+3$$

Hay $P^2 \ge \left(\sqrt{1+x^2}+2x\right)^2+3 \ge 3$. Do đó ta được $P \ge \sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ad-bc=1 \\ 2a=\sqrt{3}d-c \\ 2b=-\sqrt{3}c-d \end{cases}$

Câu 272: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2009-2010]

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$ và giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge 4$$

Thật vậy, kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 3\left(a^2+b^2+c^2\right) &= \left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \\ &= a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đăngr thức Cauchy ta có

$$a^3+ab^2 \ge 2a^2b; b^3+bc^2 \ge 2b^2c;\ c^3+ca^2 \ge 2c^2a$$

Suy ra $\qquad 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)>0$

Do đó ta được $a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge 4$$

Hay $$a^2+b^2+c^2+\frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)} \ge 4$$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$.

Từ giả thiết $a+b+c=3 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 3$, do đó ta được $t \ge 3$

Bất đẳng thức trên trở thành

$$t+\frac{9-t}{2t}\ge 4\Leftrightarrow 2t^2+9-t\ge 8t\Leftrightarrow (t-3)(2t-3)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Câu 273: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2009-2010]

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2z^2}{a^2+b^2+c^2}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2(b^2+c^2-a^2)}{a^2(a^2+b^2+c^2)}+\frac{y^2(a^2+c^2-b^2)}{b^2(a^2+b^2+c^2)}+\frac{z^2(a^2+b^2-c^2)}{c^2(a^2+b^2+c^2)}>0$$

Do a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nhọn nên

$$a^2+b^2>c^2;\ b^2+c^2>a^2;\ c^2+a^2>b^2$$

Nên ta được $\quad b^2+c^2-a^2>0;\ a^2+c^2-b^2>0;\ a^2+b^2-c^2>0$

Do vậy bất đẳng thức trên luôn đúng. Bài toán được chứng minh xong.

Câu 274: [TS10 Chuyên KHTN, 2009-2010]

Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3a^2+8b^2+14ab=3a^2+8b^2+12ab+2ab\le 4a^2+9b^2+12ab=(2a+3b)^2$$

Suy ra $\quad \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\dfrac{a^2}{\sqrt{(2a+3b)^2}}=\dfrac{a^2}{2a+3b}$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}$$
$$\geq\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{5}$$

Do đó ta được: $\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\geq\frac{a+b+c}{5}$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 275: [TS10 Chuyên KHTN, 2009-2010]

Giả sử x, y, z là những số thực thoả mãn điều kiện $0\leq x,\ y,\ z\leq 2$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức:

$$M=x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$$

Lời giải

Đặt $a=x-1;\ b=y-1;\ c=z-1$, ta được $-1\leq a;\ b;\ c\leq 1$ và $a+b+c=0$. Biểu thức M được viết lại thành

$$M=a^4+b^4+c^4+4(a^3+b^3+c^3)+6(a^2+b^2+c^2)+4(a+b+c)+3-12abc$$

Để ý là khi $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ nên biểu thức trên thử thành

$$M=a^4+b^4+c^4+6(a^2+b^2+c^2)+3$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)=0$$
$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2=0$$

Do đó suy ra $M\geq 3$ hay giá trị nhỏ nhất của M là 3.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$ hay $x=y=z=1$.

Mặt khác do $-1\leq a;\ b;\ c\leq 1$ nên ta có $|a|;\ |b|;\ |c|\leq 1$. Từ đó ta có

$$a^4\leq a^2\leq|a|;\ b^4\leq b^2\leq|b|;\ c^4\leq c^2\leq|c|$$

Suy ra $M=a^4+b^4+c^4+6(a^2+b^2+c^2)+3\leq 7(|a|+|b|+|c|)+3$

Mà ta lại có $a+b+c=0$ nên trong ba số a, b, c có một hoặc hai số âm, tức là luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c. Khi đó ta được

$$|b|+|c|=|b+c|=|a|$$

Đến đây ta có $M\le 14|a|+3\le 17$ hay giá trị lớn nhất của M là 17. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=1;\ b=-1; c=0$ và các hoán vị hay $x=2;\ y=0;\ z=1$ và các hoán vị

Câu 276: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2009-2010]

a) Cho k là số nguyên dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2010\sqrt{2009}}<\frac{88}{45}$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}}\Leftrightarrow 2k+1-2\sqrt{k(k+1)}>0\Leftrightarrow\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2>0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi k nguyên dương.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Áp dụng kết quả câu a ta có

$$\begin{aligned}VT&=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2010\sqrt{2009}}\\&<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{\sqrt{2009}}-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right)<2\left(1-\frac{1}{45}\right)=\frac{88}{45}=VP\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Câu 277: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2009-2010]

a) Cho 3 số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}$$

b) Cho $a>0;\ b<0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a}\ge\frac{2}{b}+\frac{8}{2a-b}$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(b-c)^2}{2}+\frac{(c-a)^2}{2}\ge\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}$$

Hay
$$\frac{12(a-b)^2}{13}+\frac{(b-c)^2}{3}+\frac{2007(c-a)^2}{2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{-b}\ge\frac{8}{2a-b}$$

Đặt $c=-b$, do $b<0$ nên ta được $c>0$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{c}\ge\frac{8}{2a+c}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{c}=\frac{2}{2a}+\frac{2}{c}\ge\frac{2.4}{2a+c}=\frac{8}{2a+c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $2a=-b$.

Câu 278: [TS10 Chuyên Phú Thọ 2009-2010]

Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x+1};\ b=\frac{1}{y+1};\ c=\frac{1}{z+1}$. Khi đó ta được $a+b+c=1$. Từ đó suy ra

$$x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a};\ y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b};\ z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{a}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$
$$\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}\right)$$
$$\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

Câu 279: [TS10 Chuyên Phú Thọ 2009-2010]

Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\le 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 280: [TS10 Chuyên Đại học Vinh 2009-2010]

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge\frac{51}{7}$$

Lời giải

Đặt $a = x;\ b = 2y;\ c = 3x$, khi đó giả thiết trở thành $a + b + c = 18$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+5}{1+b} + \frac{a+b+5}{1+c} \ge \frac{51}{7}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b+c+5}{1+a} + 1 + \frac{c+a+5}{1+b} + 1 + \frac{a+b+5}{1+c} + 1 \ge \frac{51}{7} + 3$$

Hay $$\left(a+b+c+6\right)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \ge \frac{72}{7}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \ge \frac{3}{7}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \ge \frac{9}{3+a+b+c} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 6$ hay $x = 6;\ y = 3;\ z = 2$.

Câu 281: [TS10 Chuyên Đại học Vinh 2009-2010]

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x > 8y > 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x + \frac{1}{y(x-8y)}.$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có:

$$P = (x-8y) + 8y + \frac{1}{y(x-8y)} \ge 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-8y = 8y \\ 8y = \dfrac{1}{y(x-8y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16y \\ y^3 = \dfrac{1}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$

Vậy minP = 6. khi và chỉ khi x = 4 và y = $\frac{1}{4}$.