KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

GIÁO VIÊN: TH.S PHẠM VĂN QUÝ – 0943.911.606

1. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ THƯỜNG SỬ DỤNG

1) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, $\forall a,b,c\in R$.	**10)** $\dfrac{a^n+b^n}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ **,với** $\forall a,b\ge 0$, $n\in N^*$.
2) $a.b\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, $\forall a,b\ge 0$	**11)** $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3},\forall a,b\in R$.
3) $a.b.c\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$, $\forall a,b\ge 0$	**12)** $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca),\forall a,b\in R$
4) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4$, $\forall a, b>0$	**13)** $a^3+b^3\ge ab(a+b),\forall a,b\ge 0$
5) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$, $\forall a, b>0$	**14)** $a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2),\forall a,b\ge 0$
6) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$, $\forall a, b, c>0$	**15)** $a^5+b^5\ge a^2b^2(a+b),\forall a,b\ge 0$
7) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$, $\forall a, b>0$	**16)** $a^2+ab+b^2\ge\dfrac{3(a+b)^2}{4},\forall a,b\in R$
8) $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2,\forall a,b\in R.$	**17)** $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\ge\dfrac{1}{3},\forall a,b\in R,a^2+b^2\ne 0$
9) $\dfrac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ **,với** $\forall a,b\ge 0$.	**18)** $(1+a)(1+b)\ge\left(1+\sqrt{ab}\right)^2,\forall a,b\ge 0$
	19) $(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3,\forall a,b,c\ge 0$
	20) $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\ge\dfrac{2}{1+ab}$, với $ab\ge 1$.

2. CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Cho $x, y, z>0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2}\ge\sqrt{3}(x+y+z)$

Giải

- Ta luôn có bất đẳng thức: $a^2+ab+b^2\ge\dfrac{3(a+b)^2}{4},\forall a,b$ (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 4a^2+4ab+4b^2 \ge 3\left(a^2+2ab+b^2\right) \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

◆ Áp dụng (*) ta có: $\sqrt{x^2+xy+y^2} \ge \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$

Tương tự ta có: $\sqrt{y^2+yz+z^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)$ và $\sqrt{z^2+zx+x^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(z+x)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(2x+2y+2z)=\sqrt{3}(x+y+z), \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \\ z=x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z.$

Bài 2. Cho $a, b, c>0$ thỏa $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2ab+4a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{4c^2+6bc+9b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{9a^2+3ac+c^2}}{ca} \ge \sqrt{3}$$

Giải

◆ Ta có $VT=\sqrt{\frac{b^2+2ab+4a^2}{a^2b^2}}+\sqrt{\frac{4c^2+6bc+9b^2}{b^2c^2}}+\sqrt{\frac{9a^2+3ac+c^2}{c^2a^2}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{4}{b^2}}+\sqrt{\frac{4}{b^2}+\frac{6}{bc}+\frac{9}{c^2}}+\sqrt{\frac{9}{c^2}+\frac{3}{ac}+\frac{1}{a^2}}$$

◆ Đặt $x=\frac{1}{a}; y=\frac{2}{b}; z=\frac{3}{c} \Rightarrow x, y, z>0$. Ta có: $VT=\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2}$

Theo bài 1 ta có: $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2} \ge \sqrt{3}(x+y+z)$

Mặt khác $\sqrt{3}(x+y+z)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right) \ge \sqrt{3}.1=\sqrt{3}$. Do đó $VT \ge \sqrt{3}=VP$, (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c} \\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6. \\ c=9 \end{cases}$

Bài 3. Cho $x,\ y,\ z>0$ và $xy+yz+zx=xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\sqrt{3}$

Giải

◆ Ta luôn có bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3},\forall a,b$ (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2\ge\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)$

$\Leftrightarrow\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)\ge 0\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

◆ Áp dụng (*) ta có: $\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}=\frac{\sqrt{y^2+x^2+x^2}}{xy}\ge\frac{\sqrt{\frac{(y+x+x)^2}{3}}}{xy}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y+2x}{xy}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{yz+2xz}{xyz}$

Tương tự ta có: $\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{zx+2yx}{xyz}$ và $\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{xy+2zy}{xyz}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{yz+2xz}{xyz}+\frac{zx+2yx}{xyz}+\frac{xy+2zy}{xyz}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{3(xy+yz+zx)}{xyz}=\frac{3xyz}{\sqrt{3}.xyz}=\sqrt{3}$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\y=z\\z=x\\xy+yz+zx=xyz\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=3.$

Bình luận: Nếu không có giả thiết $xy+yz+zx=xyz$ thì bất đẳng thức trở thành:

$\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\frac{\sqrt{3}(xy+yz+zx)}{xyz}$. Đến đây tùy theo sự sáng tạo của người ra đề ta có nhiều bài toán mới rất thú vị.

1) **Hướng 1:** Rút gọn mẫu ở 2 vế được bất đẳng thức đơn giản.
2) **Hướng 2:** Biến đổi $\frac{\sqrt{3}(xy+yz+zx)}{xyz}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.
3) **Hướng 3:** Sử dụng bất đẳng thức phụ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$
4) **Hướng 4:** Cho thêm các điều kiện như $x+y+z\ge 1; xyz\le 3;\ldots$

Bài 4. (Chuyên toán tỉnh Gia Lai 2020) Cho các số dương x,y,z thỏa $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq 2020$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}$.

Giải

- Ta luôn có bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3},\forall a,b$ (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2\geq\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)$

$\Leftrightarrow\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

- Áp dụng (*) ta có: $y^2+2x^2=y^2+x^2+x^2\geq\frac{(y+x+x)^2}{3}=\frac{(y+2x)^2}{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}\geq\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y+2x}{xy}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$ và $\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{x}\right)$

$\Rightarrow P\geq\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}+\frac{1}{z}+\frac{2}{x}\right)$

$\Rightarrow P\geq\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}\right)$

$\Rightarrow P\geq\sqrt{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ (1)

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$. Hay $\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ dấu "=" xảy ra khi $a=b$ ta được $2020\leq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow 2020\leq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 4040$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow P\geq 4040\sqrt{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{4040}{3}$

◆ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $4040\sqrt{3}$, khi $x=y=z=\dfrac{4040}{3}$.

Bài 5. Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng: $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\right)\ge\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}\right)$.

<u>Giải</u>

+) Ta luôn có bất đẳng thức: $a^3+b^3\ge ab(a+b),\forall a,b\ge 0$ (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

+) Áp dụng (*) ta có: ◆ $x^3+y^3\ge xy(x+y)$

◆ $y^3+z^3\ge yz(y+z)$

◆ $z^3+x^3\ge zx(z+x)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có: $2\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$, (**).

+) Áp dụng bất đăng thức Cauchy ta có: $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3y^3z^3}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\ge\dfrac{3}{xyz}$, (***).

+) Nhân vế theo vế (**) và (***) ta có: $2\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\right)\ge\dfrac{3}{xyz}\left[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\right]$

$\Leftrightarrow\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}\right)\ge\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}\right)$, (đpcm).

+) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{1}{xyz}$$

<u>Giải</u>

+) Ta luôn có bất đẳng thức: $a^3+b^3\ge ab(a+b),\forall a,b\ge 0$ (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

+) Áp dụng (*) ta có:

- $x^3+y^3+xyz \ge xy(x+y)+xyz = xy(x+y+z) \Rightarrow \dfrac{1}{x^3+y^3+xyz} \le \dfrac{1}{xy(x+y+z)} = \dfrac{z}{xyz(x+y+z)}$

- *Tương tự ta có:* $\dfrac{1}{y^3+z^3+xyz} \le \dfrac{x}{xyz(x+y+z)}$ *và* $\dfrac{1}{z^3+x^3+xyz} \le \dfrac{y}{xyz(x+y+z)}$

+) Khi đó $\dfrac{1}{x^3+y^3+xyz}+\dfrac{1}{y^3+z^3+xyz}+\dfrac{1}{z^3+x^3+xyz} \le \dfrac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} = \dfrac{1}{xyz}$, (đpcm).

+) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z.$

Bài 7. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{x^3+y^3+1}}{xy}+\frac{\sqrt{y^3+z^3+1}}{yz}+\frac{\sqrt{z^3+x^3+1}}{zx} \ge 3\sqrt{3}$$

Giải

+) Ta luôn có bất đẳng thức: $a^3+b^3 \ge ab(a+b), \forall a,b \ge 0$ (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b) \ge 0 \Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.$

+) Áp dụng (*) ta có:

- $\dfrac{\sqrt{x^3+y^3+1}}{xy} \ge \dfrac{\sqrt{xy(x+y)+1}}{xy} = \dfrac{\sqrt{xy(x+y)+xyz}}{xy} = \dfrac{\sqrt{xy(x+y+z)}}{xy} = \dfrac{\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{xy}}$

- Tương tự ta có: $\dfrac{\sqrt{y^3+z^3+1}}{yz} \ge \dfrac{\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{yz}}$ và $\dfrac{\sqrt{z^3+x^3+1}}{zx} \ge \dfrac{\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{zx}}$

+) Cộng vế theo vế các kết quả trên ta có:

$$\frac{\sqrt{x^3+y^3+1}}{xy}+\frac{\sqrt{y^3+z^3+1}}{yz}+\frac{\sqrt{z^3+x^3+1}}{zx} \ge \sqrt{x+y+z}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$

+) Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{x+y+z}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right) \ge \sqrt{3\sqrt[3]{xyz}}.\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right) = 3\sqrt{3}, \text{(đpcm)}.$$

+) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z.$

Bài 8. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$.

Giải

+) Ta luôn có bất đẳng thức: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$, $\forall$a, b > 0 (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}\ge\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0,$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

+) Áp dụng (*) ta có: $\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{(x+y)+(x+z)}=\frac{1}{4}.\frac{4}{(x+y)+(x+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)$.

Tiếp tục áp dụng (*) ta có: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+z}\right)\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Do đó: $\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. Tương tự ta có: $\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$ và $\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$

+) Cộng vế theo vế các bất đẳng thức ta có: $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, mà theo giả thiết: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Do đó ta có bất đẳng thức trở thành: $\Leftrightarrow\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1,$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 9. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{4}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z} \geq 4\left(\frac{3}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$.

Giải

+) Ta luôn có bất đẳng thức: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, $\forall$a, b > 0 (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

+) Áp dụng (*) ta có: ◆ $\frac{3}{x+y}=\frac{3}{4}.\frac{4}{x+y} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

◆ $\frac{2}{y+z}=\frac{2}{4}.\frac{4}{y+z} \leq \frac{2}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

◆ $\frac{1}{z+x}=\frac{1}{4}.\frac{4}{z+x} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$

Từ các kết quả trên ta có: $4\left(\frac{3}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \leq 4\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\right]$

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{3}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \leq \frac{4}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}$, (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 10. (Chuyên toán tỉnh Bình Phước 2020)

a) Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1} \geq \frac{1}{4}(a+5b+2)$.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Giải

a) Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1} \geq \frac{1}{4}(a+5b+2)$, (*).

Ta có (*) $\Leftrightarrow 16\left(a^2-ab+3b^2+1\right) \geq (a+5b+2)^2 \Leftrightarrow 15a^2+23b^2-26ab-4a-20b+12 \geq 0$.

$\Leftrightarrow 13(a-b)^2+10(b-1)^2+2(a-1)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

- Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có: $P\le\frac{4}{a+5b+2}+\frac{4}{b+5c+2}+\frac{4}{c+5a+2}$

- Ta luôn có bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, $\forall x, y>0$ (**).

Thật vậy (**) $\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0,$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{4}{a+5b+2}\le\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{4b}\qquad(1)$$

$$\frac{4}{b+5c+2}\le\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{4c}\qquad(2)$$

$$\frac{4}{c+5a+2}\le\frac{1}{c+a+2}+\frac{1}{4a}\qquad(3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có: $P\le\left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ $\quad(***)$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{1}{a+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\right]\qquad(4)$$

$$\frac{1}{b+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\right]\qquad(5)$$

$$\frac{1}{c+a+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\right]\qquad(6)$$

Từ $(***),(4),(5),(6)$ ta được: $P\le\frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{8}\le\frac{3}{8}.3+\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Bài 11. (Olympic 19-5 tỉnh Bình Phước năm 2016)

Cho các số dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$.

Giải

◆ Ta luôn có bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ∀x, y > 0 (*).

Thật vậy (**) $\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge4xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge0,$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

◆ Ta có: $P+11=\left(\frac{3b+3c}{2a}+2\right)+\left(\frac{4a+3c}{3b}+1\right)+\left(\frac{12b-12c}{2a+3c}+8\right)$

$=(4a+3b+3c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+4c}\right)$

◆ Áp dụng (*) ta có: $P+11\ge(4a+3b+3c)\left(\frac{4}{2a+3b}+\frac{4}{2a+3c}\right)\ge(4a+3b+3c)\frac{16}{4a+3b+3c}=16$

Vậy P nhỏ nhất bằng 5, dấu bằng xảy ra chẳng hạn $(a,b,c)=\left(\frac{3}{2},1,1\right)$.

Bài 12. (Olympic 19-5 tỉnh Bình Phước năm 2017)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

Giải

◆ Ta luôn có bất đẳng thức: $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{1}{3}, \forall x;y;z>0$ (*).

Thật vậy (*) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow3\left(x^2-xy+y^2\right)\ge x^2+xy+y^2\Leftrightarrow2(x-y)^2\ge0,$ (luôn đúng).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

◆ Áp dụng (*) ta có: $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}=(a+b)\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geq\dfrac{1}{3}(a+b)$.

Tương tự ta có: $\dfrac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}\geq\dfrac{1}{3}(b+c)$ và $\dfrac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geq\dfrac{1}{3}(c+a)$.

Từ các kết quả trên ta có: $P=\dfrac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geq\dfrac{2}{3}(a+b+c)$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{2}{3}(a+b+c)\geq\dfrac{2}{3}.3\sqrt[3]{abc}=\dfrac{2}{3}.3\sqrt[3]{1}=2\Rightarrow P\geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\abc=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Vậy $\min P=2$ khi $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Bài 13. (Chuyên toán Hưng Yên 2020) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab\leq 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+2020ab\leq 2021$.

<u>Giải</u>

◆ Ta luôn có bất đẳng thức: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\leq\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$, (*).

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow\dfrac{2+a+b}{(1+a)(1+b)}\leq\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}\Leftrightarrow(2+a+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)\leq 2(1+a)(1+b)$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{ab}+a+a\sqrt{ab}+b+b\sqrt{ab}\leq 2+2a+2b+2ab$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{ab}-2ab\right)+\left(a\sqrt{ab}-a\right)+\left(b\sqrt{ab}-b\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{ab}-1\right)\leq 0$ (luôn đúng vì a, $b>0$; $ab\leq 1$).

◆ Áp dụng (*) ta có: $\Rightarrow\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+2020ab\leq\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}+2020ab$

Đặt $\sqrt{ab}=t$ $(0<t\leq 1)$. Ta cần chứng minh $\dfrac{2}{1+t}+2020t^2\leq 2021$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(2020t^2+4040t+2019\right)\le 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra khi $t=1$ hay $a=b=1$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 14. Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$

Bài 15. Cho a ,b,c > 0 thỏa $abc\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ac}{b^2a+b^2c}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}$.

Bài 16. (Chuyên toán Ninh Bình 2020) Cho 3 số dương a,b,c thỏa mãn:

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=2021$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$.

Bài 17. (Chuyên toán Hải Phòng 2020) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn: $xy+yz+zx=5$.

Chứng minh $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+5}}+\frac{3z}{\sqrt{6\left(z^2+5\right)}}\le \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 18. (Chuyên toán Phú Thọ 2020)

Cho $x,y,z>0$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}}\ge 2$.

Bài 19. (Chuyên toán Bà Rịa Vũng Tàu) Với các số thực dương a và b thay đổi, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S=(a+b)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}}\right)$.

Bài 20. (Chuyên toán Đồng Nai)

Cho $-\frac{1}{3}<a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh $\frac{1+a^2}{1+3b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+3c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+3a+b^2}\ge \frac{6}{5}$.

Bài 21. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$

Bài 22. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $abc\ge1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 23. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Bài 24. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Bài 25. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14xz}}\le\frac{x+y+z}{5}$$

Bài 26. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\le3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a^2+4a+1}{a^2+a}+\frac{b^2+4b+1}{b^2+b}+\frac{c^2+4c+1}{c^2+c}$$

Bài 27. Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Bài 28. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le1.$

Bài 29. Cho $x,y,z>0$ thỏa $xy+yz+zx=3xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{x^3}{z+x^2}+\frac{y^3}{x+y^2}+\frac{z^3}{y+z^2}\ge\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$

Bài 30. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: ab + bc + ca + abc = 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2x+2}$.

Bài 31. Cho *x*, *y*, *z* là 3 số dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh: $\frac{x^2}{y+2}+\frac{y^2}{z+2}+\frac{z^2}{x+2} \geq 1$.

Bài 32. Cho a, b, c dương và thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{4x^2-yz+2} + \frac{1}{4y^2-zx+2} + \frac{1}{4z^2-xy+2}$$

Hết

KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

GIÁO VIÊN: TH.S PHẠM VĂN QUÝ – 0943.911.606

1. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ THƯỜNG SỬ DỤNG

1) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, $\forall a,b,c\in R$.	***10)*** $\dfrac{a^n+b^n}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ *,với* $\forall a,b\ge 0$, $n\in N^*$.
2) $a.b\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, $\forall a,b\ge 0$	***11)*** $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3},\forall a,b\in R$.
3) $a.b.c\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$, $\forall a,b\ge 0$	***12)*** $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca),\forall a,b\in R$
4) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 4$, $\forall a, b>0$	***13)*** $a^3+b^3\ge ab(a+b),\forall a,b\ge 0$
5) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$, $\forall a, b>0$	***14)*** $a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2),\forall a,b\ge 0$
6) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$, $\forall a, b, c>0$	***15)*** $a^5+b^5\ge a^2b^2(a+b),\forall a,b\ge 0$
7) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$, $\forall a, b>0$	***16)*** $a^2+ab+b^2\ge\dfrac{3(a+b)^2}{4},\forall a,b\in R$
8) $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2,\forall a,b\in R..$	***17)*** $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\ge\dfrac{1}{3},\forall a,b\in R,a^2+b^2\ne 0$
9) $\dfrac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ *,với* $\forall a,b\ge 0$.	***18)*** $(1+a)(1+b)\ge\left(1+\sqrt{ab}\right)^2,\forall a,b\ge 0$
	19) $(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3,\forall a,b,c\ge 0$
	20) $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\ge\dfrac{2}{1+ab}$, với $ab\ge 1$.

2. CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Cho $x,\ y,\ z>0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+xz+x^2}\ge\sqrt{3}\left(x+y+z\right)$

Bài 2. Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2ab+4a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{4c^2+6bc+9b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{9a^2+3ac+c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$$

Bài 3. Cho $x,\ y,\ z>0$ và $xy+yz+zx=xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\sqrt{3}$

Bài 4. (Chuyên toán tỉnh Gia Lai 2020) Cho các số dương x,y,z thỏa $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\ge2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}$.

Bài 5. Cho $x,y,z>0.$ Chứng minh rằng: $\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)\ge\frac{3}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$.

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{1}{xyz}$$

Bài 7. Cho x,y,znlà các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{x^3+y^3+1}}{xy}+\frac{\sqrt{y^3+z^3+1}}{yz}+\frac{\sqrt{z^3+x^3+1}}{zx}\ge3\sqrt{3}$$

Bài 8. Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le1$.

Bài 9. Cho $x,y,z>0.$ Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{4}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}\ge4\left(\frac{3}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$.

Bài 10. (Chuyên toán tỉnh Bình Phước 2020)

a) Cho $a,b>0.$ Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\frac{1}{4}\left(a+5b+2\right)$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Bài 11. (Olympic 19-5 tỉnh Bình Phước năm 2016) Cho các số dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}$.

Bài 12. (Olympic 19-5 tỉnh Bình Phước năm 2017) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}$.

Bài 13. (Chuyên toán Hưng Yên 2020) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab\le 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2020ab\le 2021$.

Bài 14. Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$

Bài 15. Cho a ,b,c > 0 thỏa $abc\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ac}{b^2a+b^2c}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}$.

Bài 16. (Chuyên toán Ninh Bình 2020) Cho 3 số dương a,b,c thỏa mãn:

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=2021$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$.

Bài 17. (Chuyên toán Hải Phòng 2020) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn: $xy+yz+zx=5$.

Chứng minh $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+5}}+\frac{3z}{\sqrt{6\left(z^2+5\right)}}\le\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 18. (Chuyên toán Phú Thọ 2020) Cho $x,y,z>0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}}\ge 2.$$

Bài 19. (Chuyên toán Bà Rịa Vũng Tàu) Với các số thực dương a và b thay đổi, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}}\right)$.

Bài 20. (Chuyên toán Đồng Nai) Cho $-\frac{1}{3}<a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh: $\frac{1+a^2}{1+3b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+3c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+3a+b^2}\ge\frac{6}{5}$

Bài 21. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}\left(a+b+c\right)$

Bài 22. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $abc \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 23. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Bài 24. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Bài 25. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14xz}} \le \frac{x+y+z}{5}$$

Bài 26. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c \le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a^2+4a+1}{a^2+a}+\frac{b^2+4b+1}{b^2+b}+\frac{c^2+4c+1}{c^2+c}$$

Bài 27. Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Bài 28. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1$.

Bài 29. Cho $x,y,z>0$ thỏa $xy+yz+zx=3xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{x^3}{z+x^2}+\frac{y^3}{x+y^2}+\frac{z^3}{y+z^2} \ge \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Bài 30. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: ab + bc + ca + abc = 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2x+2}$.

Bài 31. Cho x, y, z là 3 số dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh: $\frac{x^2}{y+2}+\frac{y^2}{z+2}+\frac{z^2}{x+2} \ge 1$.

Bài 32. Cho a, b, c dương và thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{4x^2-yz+2}+\frac{1}{4y^2-zx+2}+\frac{1}{4z^2-xy+2}$$

Hết