MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢM BIẾN VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC NHIỀU BIẾN

- Chuyên đề dạy ôn thi học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 12-

Tác giả: Võ Thị Ngọc Ánh- THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành-Kon Tum (27/02/2021)

I. MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢM BIẾN VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC HAI BIẾN

1. Các bước giải bài toán

Bước 1: Sử dụng các kĩ thuật giảm biến đưa biểu thức $P=f(t)$ (t cũng có thể là x hoặc y) hoặc so sánh bất đẳng thức ($\le,\ge$)giữa P với hàm một biến $f(t)$.

+Kỹ thuật 1: Thế biến để chuyển P về một biến (là một trong các biến đã cho).

+Kỹ thuật 2: Đặt biến phụ để chuyển P về một biến (là biến phụ đã đặt).

+Kỹ thuật 3: Đánh giá bất đẳng thức ($\le,\ge$) và đặt biến phụ (nếu cần) để chuyển việc đánh giá P về khảo sát hàm một biến.

Bước 2: Sử dụng các điều kiện ràng buộc (*), các bất đẳng thức cơ bản (được chứng minh trước đó) để tìm điều kiện "chặt" của biến t, thực chất đây là miền giá trị của t khi x, y thay đổi thỏa điều kiện (*).

Bước 3: Xét sự biến thiên của hàm $f(t)$ và suy ra kết quả về giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của biểu thức P.

2. Các ví dụ minh họa

❖ **Kĩ thuật 1: Thế biến để đưa biểu thức *P* về một biến**

<u>Ví dụ 1</u>: *Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $y\le 0, x^2+x=y+12$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+x+2y+17$.*

✍ ***Lời giải:***

Ta có $x^2+x=y+12 \Leftrightarrow y=x^2+x-12$ nên

$P=x(x^2+x-12)+x+2(x^2+x-12)+17=x^3+3x^2-9x-7$.

Vì $y\le 0$ nên $x^2+x-12\le 0 \Leftrightarrow -4\le x\le 3$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$ xác định và liên tục trên $[-4;3]$.

Ta có $f'(x)=3x^2+6x-9, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$ và $f(-4)=-12, f(-3)=20,$ $f(1)=-12, f(3)=20$.

Nên $\min\limits_{x\in[-4;3]} f(x)=f(1)=-12$, $\max\limits_{x\in[-4;3]} f(x)=f(3)=20$. Hay ta được $-12\le P\le 20$.

Khi $\begin{cases} x=1 \\ y=x^2+x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-10 \end{cases}$ thì $P=-12$, khi $\begin{cases} x=3 \\ y=x^2+x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ thì $P=20$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là -12 đạt được khi $x=1; y=-10$, giá trị lớn nhất của P là 20 đạt được khi $x=3; y=0$.

❖ ***Kĩ thuật 2:*** **Đặt biến phụ để đưa biểu thức *P* về biểu thức theo một biến**

➢ ***Dạng 1:*** **Đặt biến phụ đối với biểu thức *P* có dạng đối xứng**

<u>Ví dụ 2</u>: (Đề thi đại học khối D, năm 2009)

Cho các số thực không âm x,y thay đổi và thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$.

✍ ***Lời giải:***

Ta có,

$$P=16x^2y^2+12(x^3+y^3)+34xy=16x^2y^2+12\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]+34xy=16x^2y^2-2xy+12$$

Đặt $t=xy$, ta được $P=16t^2-2t+12$.

Ta có $0\le xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$ nên $t\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=16t^2-2t+12$ xác định và liên tục trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

$f'(t)=32t^2-2; f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{16}$.

Mà $f(0)=12, f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{191}{16}, f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{2}$.

Suy ra $\min\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{191}{16}; \max\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{2}$. Hay $\dfrac{191}{16}\le P\le\dfrac{25}{2}$.

$P=\dfrac{191}{16}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ xy=\dfrac{1}{16}\end{cases}$ nên khi $x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}, y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$ thì $P=\dfrac{191}{16}$.

$P=\dfrac{25}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ xy=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ nên khi $x=y=\dfrac{1}{2}$ thì $P=\dfrac{25}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{191}{16}$ đạt được khi $x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}, y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$, giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{25}{2}$ đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

✍ *Nhận xét:* Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là "Tìm ràng buộc của t như thế nào là chặt?", kinh nghiệm là giá trị t được đánh giá đủ "chặt" để giải quyết bài toán khi tại các vị trí đạt cực trị đối với biến t ta tìm được các giá trị tương ứng của x, y thỏa điều kiện (*).

<u>Ví dụ 3</u>: (Đề thi đại học khối B, năm 2011)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2(x^2+y^2)+xy=(x+y)(xy+2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$.

✍ ***Lời giải:***

Đặt $t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ ta có $P=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18$.

Với $x, y>0$, ta có $2(x^2+y^2)+xy=(x+y)(xy+2)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+1=(x+y)+2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

Mà $(x+y)+2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\ge 2\sqrt{2(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)}=2\sqrt{2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\right)}$,

suy ra $2t+1\ge 2\sqrt{2(t+2)}\Rightarrow t\ge\dfrac{5}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18, t\in\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$, $f'(t)=6(2t^2-3t-2)>0, \forall t\in\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$

Suy ra $\min\limits_{t\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}$ hay $P\ge -\frac{23}{4}$.

$P=-\frac{23}{4}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}\\ 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1=(x+y)+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\end{cases}$ nên khi $x=2, y=1$ thì $P\ge -\frac{23}{4}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{23}{4}$, đạt được khi $(x;y)=(2;1)$.

➢ ***Dạng 2:*** **Đặt biến phụ đối với điều kiện (*) là tổng các hạng tử đồng bậc hoặc biểu thức P thể hiện tính "đồng bậc" (đối với các biến x và y)**

Ví dụ 4:* *(Đề thi đại học khối D năm 2013)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy\le y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6(x+y)}$.

Lời giải:

* Đặt $t=\frac{x}{y}$ ta có $P=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$.

Theo giả thiết ta có $0<t=\frac{x}{y}\le\frac{y-1}{y^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$.

* Xét hàm số $f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\frac{t-2}{6(t+1)}$ với $t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

$$f'(t)=\frac{7-3t}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}}-\frac{1}{2(t+1)^2}=\frac{7-3t}{2\sqrt{\left(t(t-1)+3\right)^3}}-\frac{1}{2(t+1)^2}>\frac{7-3.\frac{1}{4}}{2\sqrt{3^2}}-\frac{1}{2}>0\ ,\forall t\in\left(0;\frac{1}{4}\right].$$

Suy ra $f(t)\le f\left(\frac{1}{4}\right)$ hay $\max\limits_{t\in\left(0;\frac{1}{5}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$, suy ra $P\le\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$.

* Khi $x=\frac{1}{2}; y=2$ thì $P=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$ đạt được khi $x=\frac{1}{2}; y=2$.

Ví dụ 5*: *(Đề thi đại học khối B, năm 2008)

Cho hai số thực x, y thỏa mãn hệ thức $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.

Lời giải:

Thay $1=x^2+y^2$ vào P, ta được $P=\frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2}$.

\+ Nếu $y=0$ thì $x^2=1$, ta có $P=2$.

+ Nếu $y \neq 0$, đặt $x = ty$ hay $t = \dfrac{x}{y}$, ta có

$$P = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+2xy+3y^2} = \frac{2\left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 6\dfrac{x}{y}\right)}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2\dfrac{x}{y} + 3} = \frac{2\left(t^2+6t\right)}{t^2+2t+3}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+6t}{t^2+2t+3}, t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = \dfrac{-4t^2+6t+18}{\left(t^2+2t+3\right)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

Suy ra $\min\limits_{t \in \mathbb{R}} f(t) = f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -3$, $\max\limits_{t \in \mathbb{R}} f(t) = f(3) = \dfrac{3}{2}$. Hay $-6 \leq P \leq 3$.

Ta có $P = -6 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ nên khi $x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}, y = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ thì $P = -6$.

$P = 3 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ nên khi $x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ thì $P = 3$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng -6 đạt được khi $x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}, y = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, giá trị lớn nhất của P bằng 3 đạt được khi $x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

❖ **Kĩ thuật 3: Đánh giá bất đẳng thức ($\leq, \geq$) và đặt biến phụ (nếu cần) để chuyển việc đánh giá P về khảo sát hàm một biến**

<u>Ví dụ 6</u>: (Đề thi đại học khối D- năm 2012)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$.

✍ ***Lời giải:***

Ta có $P = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \geq (x+y)^3 - 3(x+y) - \dfrac{3}{2}(x+y)^2 + 6$.

Đặt $t = x + y$, ta có

$(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t = x + y \leq 8$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ với $t \in [0;8]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$ và $\begin{cases} f'(t) = 0 \\ t \in [0;8] \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$f(0)=6; f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{17-5\sqrt{5}}{4}; f(8)=398$ nên $\min\limits_{t\in[0;8]} f(t)=f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$.

Suy ra $P\geq\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ mà $P=\frac{17-5\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ đạt được khi $x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Ví dụ 7: (Đề thi đại học khối B, năm 2006)

Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|.$$

Lời giải:

Xét $\vec{u}=(x-1;y), \vec{v}=(-x-1;y)$, ta có

$|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\geq\sqrt{4+4y^2}$ (1*)

Dấu "=" ở (1*) xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng hay $x-1=-x-1\Leftrightarrow x=0$.

Ta có $P=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|\geq\sqrt{4+4y^2}+|y-2|$.

Xét hàm số $f(y)=\sqrt{4+4y^2}+|y-2|, y\in\mathbb{R}$. Ta có hai trường hợp:

+ Khi $y<2$, ta có $f(y)=\sqrt{4+4y^2}+2-y$, $f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$,

$f'(y)=0\Leftrightarrow\sqrt{y^2+1}=2y\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

y	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		2
$f'(y)$		$-$	0	$+$	
$f(y)$		$\searrow$	$2+\sqrt{3}$	$\nearrow$	

+ Khi $y\geq 2$, ta có $f(y)=\sqrt{4+4y^2}+|y-2|\geq 2\sqrt{1+y^2}\geq 2\sqrt{5}>2+\sqrt{3}$.

Do đó $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} f(y)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2+\sqrt{3}$, suy ra $P\geq 2+\sqrt{3}$.

Ta có $P=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $2+\sqrt{3}$ đạt được khi $x=0, y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Bài tập rèn luyện

*** Kỹ thuật thế biến:**

Bài 1. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x+2y=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{1+2x}+2\sqrt{2y-1}.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Ta có $x+2y=3 \Rightarrow 2y=3-x$ nên $P=\sqrt{1+2x}+2\sqrt{2-x}$.

Từ P ta có điều kiện $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 2y \ge 1 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} \le x \le 2$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{1+2x}+2\sqrt{2-x}, x \in \left[-\dfrac{1}{2};2\right]$, ta thu được $\min\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(2)=\sqrt{5}$, $\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\sqrt{15}$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{5}$ đạt được khi $x=2, y=\dfrac{1}{2}$, giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{15}$ đạt được khi $x=\dfrac{1}{3}, y=\dfrac{4}{3}$.

*** Kỹ thuật đặt biến phụ:**

Bài 2. Cho x, y thỏa mãn $x^2+y^2=x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^3+y^3+x^2y+xy^2.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $t=x+y$, ta có $P=(x+y)^3-2xy(x+y)=t^2$.

Ta có $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)=2(x+y)$ hay $t^2 \le 2t \Leftrightarrow t\in[0;2]$.

Xét hàm số $f(t)=t^2, t\in[0;2]$, ta tìm được $\min\limits_{t\in[0;2]} f(t)=f(0)=0$, $\max\limits_{t\in[0;2]} f(t)=f(2)=4$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng 0 đạt được khi $x=y=0$, giá trị lớn nhất của P bằng 4 đạt được khi $x=y=1$.

Bài 3. Cho $x^2+y^2 \ne 0$ thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{y^2+1}+\frac{y^2}{x^2+1}.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $t=x^2+y^2$, ta có $xy=\dfrac{1-t}{2}$ nên $P=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^2y^2+x^2+y^2+1}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{2t^2+8t-2}{t^2+2t+5}$.

Ta có $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow t \ge \dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{2t^2+8t-2}{t^2+2t+5}, t\ge\dfrac{1}{2}$, ta tìm được $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f(1)=2$, $\max\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f(5)=\dfrac{12}{5}$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt được khi $x=1, y=0$, giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{12}{5}$ đạt được khi $x=2, y=-1$.

Bài 4. *(Đề thi đại học khối A, năm 2006)* Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2-xy+y^2=xy(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}.$$

🙇 ***Hướng dẫn giải:***

Từ biểu thức P ta có $x,y\neq 0$.

Ta có $x^2-xy+y^2=xy(x+y)\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{xy}$, nên đặt $\frac{1}{x}=a,\frac{1}{y}=b(a,b\in\mathbb{R}^*)$.

Ta có $a+b=a^2+b^2-ab$ và $P=a^3+b^3$.

Đặt $t=a+b$ ta có $ab=\frac{t^2-t}{3}$ nên $P=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=t^2$.

Vì $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}$ nên $\frac{t^2-t}{3}\leq\frac{t^2}{4}\Leftrightarrow 0\leq t\leq 4$, suy ra $P=t^2\leq 16$.

Đáp số: giá trị lớn nhất của P bằng 16 đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

🙇 ***Nhận xét:*** Đối với bài toán này ta cũng có thể thế biến $x+y=t$ để biểu diễn $P=f(t)$ nhưng ta thu được hàm số $f(t)$ phức tạp hơn.

Bài 5. Cho $xy<0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10.$$

🙇 ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Rightarrow t^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2\geq 4\Rightarrow t\leq -2$ (vì $xy<0$).

Khi đó $3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10=3t^2-8t+4$.

Xét $f(t)=3t^2-8t+4$, ta có $f'(t)=6t-8<0;\forall t\leq -2$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2]$.

Suy ra $\min\limits_{t\in(-\infty;-2]} f(t)=f(-2)=32$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng 32 đạt được khi $x=1,y=-1$.

Bài 6. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $xy=y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{y^2}+9\frac{x^3}{y^3}.$$

🙇 ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $t=\frac{x}{y}$, ta có $P=t^2+\frac{9}{t^3}$.

Từ giả thiết $x,y>0$ suy ra $\begin{cases}t>0\\xy=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t>0\\ty^2=y-1\end{cases}$ mà $1=ty+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{t}$ nên $0<t\leq\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{9}{t^3},t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$, ta có $f'(t)=\frac{2t^5-27}{t^4}<0,\forall t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

Suy ra $\min\limits_{t\in\left(0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{64}$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{15}{64}$ đạt được khi $x=\frac{1}{2},y=2$.

Bài 7. Cho $x, y \ge 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4x^2 + 6xy - 5}{2xy - 2y^2 - 1}.$$

Hướng dẫn giải:

+ Nếu $x = 0$ thì vì $x, y \ge 0$ và $x^2 + y^2 = 1$ nên $y = 1$, suy ra $P = \frac{5}{3}$.

+ Xét khi $x \ne 0$, đặt $y = tx \Leftrightarrow t = \frac{y}{x}$ ta có $x^2 = \frac{1}{t^2 + 1}$ nên $P = \frac{4x^2 + 6xy - 5}{2xy - 2y^2 - 1} = \frac{5t^2 - 6t + 1}{3t^2 - 2t + 1}$.

Vì $x, y \ge 0$ nên $t \ge 0$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{5t^2 - 6t + 1}{3t^2 - 2t + 1}, t \ge 0$, ta tìm được $\min\limits_{t \in [0; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, $f(t) < \frac{5}{3}, \forall t \ge 0$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng -1 đạt được khi $x = \frac{2}{\sqrt{5}}, y = \frac{1}{\sqrt{5}}$, giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{5}{3}$ đạt được khi $x = 0, y = 1$.

Bài 8. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = y(x + y)$.

Hướng dẫn giải:

Đặt $t = \frac{y}{x}$, vì $x, y > 0$ nên $t > 0$, từ giả thiết $x^2 + y^2 = 1$ suy ra $x^2 = \frac{1}{t^2 + 1}$.

Khi đó $P = y(x + y) = x^2\left(\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \frac{t^2 + t}{t^2 + 1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t}{t^2 + 1}, t > 0$, ta có $f'(t) = \frac{-t^2 + 2t + 1}{\left(t^2 + 1\right)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 + \sqrt{2} \\ t = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên của $f(t)$ ta được $\max\limits_{t \in (0; +\infty)} f(t) = f\left(1 + \sqrt{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ hay $P \le \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Ta có $P = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (1 + \sqrt{2})x \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$ nên khi $x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, y = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ thì $P = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Đáp số: Giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, y = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Bài 9. Cho hai số x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 - xy + y^2$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $P = x^2 - xy + y^2 = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

+ Nếu $y = 0$ thì $x = \pm 1$ và $P = 1$.

+ Xét khi $y \neq 0$, đặt $x = ty \Leftrightarrow t = \dfrac{x}{y}$ ta có $P = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} + 1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} + 1} = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}, t \in \mathbb{R}$, ta được $\min\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f(1) = \dfrac{1}{3}$, $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f(-1) = 3$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{3}$ đạt được khi $x = y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, giá trị lớn nhất của P bằng 3 đạt được khi $x = 1, y = -1$.

*** Kỹ thuật đánh giá bất đẳng thức:**

Bài 10. ***(Đề thi đại học khối B, năm 2009)*** Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:*** Đặt $t = x^2 + y^2$, ta có

$$P = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4+y^4) - 2(x^2+y^2) + 1 \geq \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1 = \frac{9}{4}t^2 - 2t +$$

$(x+y)^3 + 4xy \geq 2 \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \Rightarrow x + y \geq 1$.

ta có $t = x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} \geq \dfrac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{9}{4}t^2 - 2t + 1, t \geq \dfrac{1}{2}$, ta tìm được $\min\limits_{t \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{16}$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{9}{16}$ đạt được khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Bài 11. ***(Đề thi đại học khối A, năm 2013)*** Cho các số thực dương a, b, c và thỏa mãn $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:*** Đặt $x = \dfrac{a}{c}; y = \dfrac{b}{c}$, ta được $x > 0, y > 0$, điều kiện của bài toán trở thành $xy + x + y = 3$ và $P = \dfrac{32x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dùng bất đẳng thức $u^3 + v^3 \geq \dfrac{(u+v)^3}{4}$ ta đánh giá được

$$P \geq 8\left(\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3}\right)^3 - \sqrt{x^2+y^2} = (x+y-1)^3 - \sqrt{(x+y)^2 + 2(x+y) - 6}.$$

Đặt $t = x + y$ ($t > 0$), ta thấy $3 = x + y + xy \leq x + y + \dfrac{(x+y)^2}{4} = t + \dfrac{t^2}{4} \Rightarrow t \geq 2$

Đưa về khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t) = (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6}$ với $t \geq 2$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P bằng $1 - \sqrt{2}$ đạt được khi $a = b = c$.

Bài 12. Cho x, y dương thỏa mãn $x^3 + y^3 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Ta có $x, y > 0$ và $x^3 + y^3 \le 2$ nên $y \le \sqrt[3]{2 - x^3}$ suy ra $P = x^2 + y^2 \le x^2 + \sqrt[3]{(2 - x^3)^2}$.

Vì $x, y > 0$ nên $0 < x < \sqrt[3]{2}$.

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{(2 - x^3)^2}, x \in \left(0; \sqrt[3]{2}\right)$ ta suy ra được $\max\limits_{x \in \left(0;\sqrt[3]{2}\right)} f(x) = f\left(1\right) = 2$.

Đáp số: giá trị lớn nhất của P bằng 2 đạt được khi $x = y = 1$.

II. MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢM BIẾN VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC BA BIẾN

1. Các bước giải bài toán

Bước 1: Sử dụng các kĩ thuật giảm biến đưa biểu thức $P = f(t)$ (t cũng có thể là x, y hoặc z) hoặc so sánh bất đẳng thức ($\le, \ge$)giữa P với hàm một biến $f(t)$.

+Kỹ thuật 1: Thế biến để chuyển P về một biến (là một trong các biến đã cho).

+Kỹ thuật 2: Đặt biến phụ để chuyển P về một biến (là biến phụ đã đặt).

+Kỹ thuật 3: Đánh giá bất đẳng thức ($\le, \ge$) và đặt biến phụ (nếu cần) để chuyển việc đánh giá P về khảo sát hàm một biến.

Bước 2: Sử dụng các điều kiện ràng buộc (*), các bất đẳng thức cơ bản (được chứng minh trước đó) để tìm điều kiện "chặt" của biến t, thực chất đây là miền giá trị của t khi x, y, z thay đổi thỏa điều kiện (*).

Bước 3: Xét sự biến thiên của hàm $f(t)$ và suy ra kết quả về giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) đối với P.

2. Các ví dụ minh họa

❖ **Kỹ thuật 1: Thế biến để đưa biểu thức về một biến**

<u>Ví dụ 1</u>: *(Đề thi đại học khối B, năm 2012)*

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$.

✍ ***Lời giải:***

Từ giả thiết $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ suy ra

$$y + z = -x, y^2 + z^2 = 1 - x^2, yz = \frac{(y+z)^2 - (y^2 + z^2)}{2} = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P &= x^5 + (y^2 + z^2)(y^3 + z^3) - y^2 z^2 (y + z) \\ &= x^5 + (y^2 + z^2)\left[(y^2 + z^2)(y + z) - yz(y + z)\right] - y^2 z^2 (y + z) \\ &= x^5 + (1 - x^2)\left[-x(1 - x^2) + x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\right] + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 x \\ &= \frac{5}{4}(2x^3 - x). \end{aligned}$$

Mặt khác $yz \le \dfrac{y^2 + z^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \le 1 - x^2 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \le x \le \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - x$ với $x \in \left[-\dfrac{\sqrt{6}}{3}; \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$, $f'(x) = 6x^2 - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ x = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$.

Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ và

$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{9}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Nên $\max\limits_{x\in\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]} f(x)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}$. Suy ra $P\le\frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Ta có $P=\frac{5\sqrt{6}}{36}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\\x=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$ nên với $x=\frac{\sqrt{6}}{3};y=z=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ thì $P=\frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Vậy, giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{6}}{36}$ đạt được khi $x=\frac{\sqrt{6}}{3};y=z=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

✍ ***Nhận xét:*** Bài toán này có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

❖ **Kỹ thuật 2: Đặt biến phụ để đưa biểu thức về một biến**

<u>Ví dụ 2</u>: *Cho* $x^2+y^2+z^2=1$*. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=x+y+z+xy+yz+zx$.

✍ ***Lời giải:***

* Ta có bất đẳng thức $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)$ (1).

Vì $(1)\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)-2xy-2yz-2zx\ge 0\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu bằng của (1) xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

* Đặt $t=x+y+z$, ta có $xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\frac{t^2-1}{2}$ nên $P=\frac{1}{2}(t^2+2t-1)$.

Áp dụng (1) ta được $t^2\le 3\Leftrightarrow t\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}(t^2+2t-1)$ với $t\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$, $f'(t)=t+1$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$.

Ta có $f(t)$ xác định và liên tục trên $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ và

$f\left(-\sqrt{3}\right)=1-\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)=1+\sqrt{3}, f(-1)=-1$.

Nên $\min\limits_{t\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} f(t)=f(-1)=-1$, $\max\limits_{t\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} f(t)=f\left(\sqrt{3}\right)=1+\sqrt{3}$.

Suy ra $P\ge -1$ $-1\le P\le 1+\sqrt{3}$.

Ta có với $x=-1, y=0, z=0$ thì $P=-1$; với $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ thì $P=1+\sqrt{3}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là -1 đạt được khi $x=-1, y=0, z=0$.

giá trị lớn nhất của P là $1+\sqrt{3}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

❖ **Kỹ thuật 3: Đánh giá bất đẳng thức ($\le,\ge$) để so sánh biểu thức P với biểu thức chứa một biến**

Ví dụ 3: *(Đề thi đại học khối B, năm 2010)*

Cho các số thực không âm x,y,z *thỏa mãn* $x+y+z=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+3(xy+yz+zx)+2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Lời giải:

Đặt $t=xy+yz+zx$, ta có

$P\ge(xy+yz+zx)^2+3(xy+yz+zx)+2\sqrt{1-2(xy+yz+zx)}=t^2+3t)+2\sqrt{1-2t}$.

Vì $x,y,z\ge 0$ và $xy+yz+zx\le\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ nên $0\le t\le\dfrac{1}{3}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+3t)+2\sqrt{1-2t}, t\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Ta có $f'(t)=2t+3-\dfrac{2}{\sqrt{1-2t}}$, $f''(t)=2-\dfrac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}}\le 0,\forall t\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$, $f''(t)=0\Leftrightarrow t=0$

nên $f'(t)$ nghịch biến trên $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$, suy ra $f'(t)\ge f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Do đó $\min\limits_{\left[0;\frac{1}{3}\right]} f(t)=f(0)=2$, suy ra $P\ge 2$.

Ta có $P=2\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\xy+yz+zx=0\\xy=yz=xz\end{cases}$ nên với $(x,y,z)=(1,0,0)$ ta có $P=2$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là 2 đạt được khi $(x,y,z)=(1,0,0)$.

Ví dụ 4: *(Đề thi đại học khối A, năm 2011)*

Cho x, y, z là ba số thực thuộc [1;4] và $x\ge y, x\ge z$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\dfrac{x}{2x+3y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}$.

Lời giải:

Trước hết, ta chứng minh $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (1) với $a,b>0$ và $ab\ge 1$.

Thật vậy, $(*)\Leftrightarrow(a+b+2)(1+\sqrt{ab})\ge 2(1+a)(1+b)\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1)\ge 0$ (luôn đúng với $a,b>0$ và $ab\ge 1$). Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $ab=1$.

Áp dụng (1), ta có $P=\dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}\ge\dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{x}{y}}}$.

Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi $z^2=xy$ hoặc $x=y$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ với $t\in[1;2]$ (vì $x,y\in[1;4]$ và $x\ge y$). Khi đó $P\ge\dfrac{t^2}{2t^2+3}+\dfrac{2}{1+t}$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^2}{2t^2+3}+\dfrac{2}{1+t}, t\in[1;2]$, ta có

$$f'(t)=\frac{-2\left[t^3(4t-3)+3t(2t-1)+9\right]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2}<0$$ nên $P\ge f(t)\ge f(2)=\frac{34}{33}$.

Ta có $P=\frac{34}{33}$ khi $x=4, y=1, z=2$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{34}{33}$, đạt được khi $x=4, y=1, z=2$.

3. Bài tập rèn luyện

*** Kỹ thuật thế biến:**

Bài 1. Cho các số thực a,b,c không đồng thời bằng 0 thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $x=\frac{4a}{a+b+c}$, $y=\frac{4b}{a+b+c}$, $z=\frac{4c}{a+b+c}$.

Ta có $x+y+z=4$ và $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)\Leftrightarrow xy+yz+zx=4$.

Suy ra $P=\frac{x^3+y^3+z^3}{32}=\frac{3x^3-12x^2+12x+16}{32}$.

Áp dụng bất đẳng thức $yz\le\frac{(y+z)^2}{4}$ suy ra $0\le x\le\frac{8}{3}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^3-12x^2+12x+16}{32}$, $0\le x\le\frac{8}{3}$, suy ra

$$\min_{x\in\left[0;\frac{8}{3}\right]} f(x)=f(0)=\frac{1}{2},\ \max_{x\in\left[0;\frac{8}{3}\right]} f(x)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{11}{18}.$$

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$ đạt được khi $a=0, b=c\ne0$, giá trị lớn nhất của P là $\frac{11}{18}$ đạt được khi $a=4b, b=c\ne0$.

*** Kỹ thuật đặt biến phụ:**

Bài 2. Cho các số thực $x,y,z\ge0$; x,y,z không đồng thời bằng 0, thoả mãn $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2(xy+yz+zx)+\frac{3}{x+y+z}$.

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $t=x+y+z\Rightarrow 2(xy+yz+zx)=t^2-\frac{4}{3}$. Suy ra $P=t^2+\frac{3}{t}-\frac{4}{3}$.

Ta có $x^2+y^2+z^2\le(x+y+z)^2\le3(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow\frac{4}{3}\le t^2\le4\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}\le t\le2.$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{3}{t}-\frac{4}{3}$ trên $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3};2\right]$, suy ra $\max_{t\in\left[\frac{2\sqrt{3}}{3};2\right]} f(t)=f(2)=\frac{25}{6}$.

Đáp số: giá trị lớn nhất của P là $\frac{25}{6}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{2}{3}$.

Bài 3. Cho các số thực không âm x,y,z thoả mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{16}{x+y+z}.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = t^2 - 6$. Khi đó $P = t^2 - 6 + \frac{16}{t}.$

Ta có $(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$ nên $t^2 \le 3(t^2-6) \Rightarrow t \ge 3$ vì $t > 0.$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 6 + \frac{5}{t}, t \ge 3$ ta được $\min\limits_{t\in[3;+\infty)} f(t) = f(3) = \frac{25}{3}$

Đáp số: giá trị nhỏ lớn nhất của *P* là $\frac{25}{3}$ đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 4. Cho các số thực x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Đặt $t = x + y + z$, ta có $P = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = -\frac{t^3}{2} + 3t$.

Ta có $\left(x+y+z\right)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow t^2 \le 6 \Leftrightarrow -\sqrt{6} \le t \le \sqrt{6}.$

Xét hàm số $f(t) = -\frac{t^3}{2} + 3t, t \in \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$, ta tính được $\min\limits_{t\in\left[-\sqrt{6},\sqrt{6}\right]} f(t) = f\left(-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$, $\max\limits_{t\in\left[-\sqrt{6},\sqrt{6}\right]} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$.

Đáp số: giá trị nhỏ nhất của *P* là - $2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -\sqrt{2}, y = z = 0$, giá trị lớn nhất của *P* là $2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{2}, y = z = 0$.

*** Kỹ thuật đánh giá bất đẳng thức:**

Bài 5. **(*Đề đại học khối B, năm 2013*)** Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(\mathrm{b}+2\mathrm{c})}}$.

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Dùng bất đẳng thức Cosi ta có

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \le (a+b)\frac{a+b+4c}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2} \le 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Đặt $t = \sqrt{a^2+b^2+c^2+4}$ thì $t > 2$ và $P \le \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2-4)}$.

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2-4)}$ với $t > 2$ ta được $\max\limits_{t>2} f(t) = f(4) = \frac{5}{8}$.

Đáp số : giá trị lớn nhất của *P* là $\frac{5}{8}$ đạt được khi $a = b = c = 2$.

Bài 6. **(*Đề đại học khối A, năm 2003*)**

Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

✍ ***Hướng dẫn giải:***

Áp dụng bất đẳng thức $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\overrightarrow{w}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|+\left|\overrightarrow{w}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}+\overrightarrow{w}\right|$ cho ba vectơ $\vec{u}=\left(x;\frac{1}{x}\right),\vec{v}=\left(y;\frac{1}{y}\right),\overrightarrow{w}=\left(z;\frac{1}{z}\right)$ ($x,y,z>0$) . Đẳng thức xảy ra khi $\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{w}$ đôi một cùng hướng.

Ta được

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{(3\sqrt[3]{xyz})^2+\left(\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2}=\sqrt{9t+\frac{9}{t}} \text{ với } t=\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2.$$

Ta có $0<t\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\leq\frac{1}{9}$.

Xét hàm số $f(t)=9t+\frac{9}{t},t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$, ta tính được $\min\limits_{t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]}f(t)=f\left(\frac{1}{9}\right)=82$.

Đáp số: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng $\sqrt{82}$, đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 7. Cho $x,y,z\in[0;2]$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2+z^2.$$

Hướng dẫn giải:

Giả sử: $x\leq y\leq z\Rightarrow 3=x+y+z\leq 3z\Rightarrow z\geq 1\Rightarrow z\in[1;2]$.

Lại có: $x^2+y^2\leq(x+y)^2\Rightarrow P\leq(3-z)^2+z^2=2z^2-6z+9$.

Xét hàm số $f(z)=2z^2-6z+9,z\in[1;2]$, ta được $\max\limits_{z\in[1;2]}f(z)=f(2)=5$.

Đáp số: Giá trị lớn nhất của P là 5, đạt được khi $x=0,y=1,z=2$.

Bài 8. Cho x,y,z là ba số dương và $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x+xy+2xyz$$

Hướng dẫn giải:

$P=x+xy+2xyz=x[1+y(1+2z)]$ mà $\frac{1}{2}.2y(1+2z)\leq\frac{1}{2}.\left(\frac{2y+1+2z}{2}\right)^2=\frac{(7-2x)^2}{8}$ nên $P\leq x\left(1+\frac{(7-2x)^2}{8}\right)$.

Vì x,y,z là ba số dương và $x+y+z=3$ nên $x\in(0;3)$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(1+\frac{(7-2x)^2}{8}\right),x\in(0;3)$, ta được $\max\limits_{x\in(0;3)}f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$.

Đáp số: Giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{9}{2}$, đạt được khi $x=\frac{3}{2},y=1,z=\frac{1}{2}$.

Bài 9. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}.$$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t=x+y$, ta có $z=1-t$, $t\in(0;1)$ và $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{t^2}{4}$.

$$P=\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=\frac{t}{xy(1-t)}\geq\frac{4}{-t^2+t}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4}{-t^2+t}, t\in(0;1)$, ta được $\min\limits_{t\in(0;1)} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=16$.

Đáp số: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 16, đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{4}, z=\dfrac{1}{2}$.

Bài 10. Cho $x,y,z\ge 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

Hướng dẫn giải:

Đặt $t=x+y+z$, ta có $t\ge 0$.

Áp dụng các bất đẳng thức $xy+yz+zx\le\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ và $xyz\le\dfrac{(x+y+z)^3}{27}$, ta có

$$P=\frac{1}{(x+y+z)+1}-\frac{1}{xyz+(xy+yz+zx)+(x+y+z)+1}\le\frac{1}{t+1}-\frac{27}{(t+3)^3}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{27}{(t+3)^3}, t\in[0;+\infty)$, ta được $\min\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t)=f(0)=0$,

$\max\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t)=f(3)=\dfrac{1}{8}$.

Đáp số: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 0, đạt được khi $x=y=z=0$; giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{1}{8}$, đạt được khi $x=y=z=1$;