ĐỀ THI THỬ LẦN 1 CHUYÊN VINH – NGHỆ AN

Câu 40. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g\left(x\right)=f'\left(x^3+2\right)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-2023;2023\right]$ để hàm số $y=f\left(x-m\right)$ đồng biến trên $\left(-\infty;0\right)$?

A. 2020 **B.** 2017. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Đầu tiên ta có bảng xét dấu cho $f'\left(t\right)$ với $t=x^3+2$ theo x như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		3		$+\infty$
$t=x^3+2$	$-\infty$		-6		2		10		29		$+\infty$
$y=f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó ta thực hiện ghép bảng biến thiên cho $f'\left(t\right)$ với $t=x-m$ như sau:

t	$-\infty$		$m-6$		$m-2$		$m-10$		$m-29$		$+\infty$
$y=f'(t-m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên, ta suy ra để thỏa yêu cầu đề bài, thì $\left(-\infty;0\right)\subset\left(-\infty;m-6\right)\Leftrightarrow m-6\ge 0\Leftrightarrow m\ge 6$

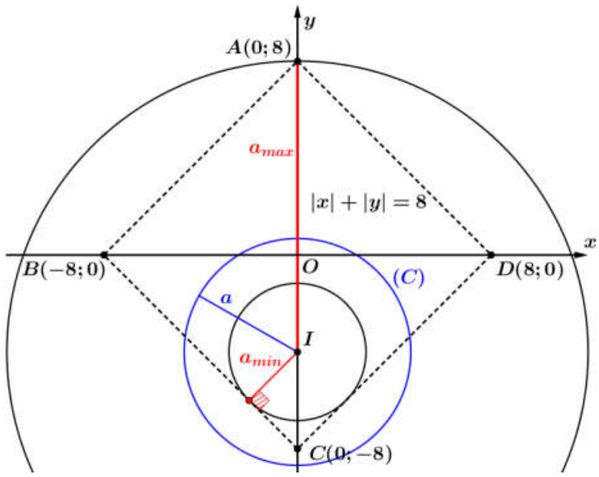
Với $m\in\left[-2023;2023\right]$, suy ra $m\in\left\{6;7;...;2023\right\}$ tức có 2018 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên a để tồn tại số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=16$ và $\left|iz-4\right|=a$?

A. 5 **B.** 9. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, khi đó ta có: $\begin{cases}\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=16\\ \left|iz-4\right|=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x\right|+\left|y\right|=8\ (1)\\ x^2+\left(y+4\right)^2=a^2\ (2)\end{cases}$. Ta biểu diễn hệ phương trình vừa phân tích lên trên hệ trục Oxy, khi đó ta có hình vẽ như sau:



Để tồn tại số phức z thỏa mãn như trên thì đường tròn (2) phải tồn tại giao điểm với đường khép kín (1), khi đó dựa vào hình vẽ trên, đoạn giá trị a để tồn tại là: $d\left(I;BC\right)\le a\le IA\Leftrightarrow\sqrt{2}\le a\le 12\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a\in\left\{3;4;...;12\right\}$

Vậy có tất cả 10 giá trị nguyên a thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án C.**

Câu 44. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2\frac{x}{4}+\log_2 y=\frac{4-xy^2}{y^2}$. Khi $x+4y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đầu tiên ta biến đổi phương trình sau: $\frac{1}{2}\log_2\frac{x}{4}+\log_2 y=\frac{4-xy^2}{y^2} \Leftrightarrow \log_2\frac{x}{4}+2\log_2 y=\frac{8-2xy^2}{y^2}$

$\Leftrightarrow (\log_2 x-2)+\log_2 y^2=\frac{8}{y^2}-2x \Leftrightarrow \log_2 x+2x=\frac{8}{y^2}+2-\log_2 y^2 \Leftrightarrow \log_2 x+2x=\log_2\left(\frac{4}{y^2}\right)+2\left(\frac{4}{y^2}\right)$

Xét hàm số $y=f(t)=\log_2 t+2t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+2>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$.

Khi đó ta suy ra hàm $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ tức $2x=\frac{4}{y^2}$

Suy ra: $T=x+4y=4y+\frac{2}{y^2}=2y+2y+\frac{2}{y^2}\ge 3\sqrt[3]{2y.2y.\frac{2}{y^2}}=6$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2y=\frac{2}{y^2} \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \frac{x}{y}=2$. **Chọn đáp án D.**

Câu 46.1 Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;4;4), B(1;2;3), C(5;0;-1)$. Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\widehat{ABM}=\widehat{AMC}=90^\circ$. Mặt phẳng (α) đi qua B và vuông góc với AC cắt AM tại N. Khoảng cách từ N đến (ABC) có giá trị lớn nhất bằng

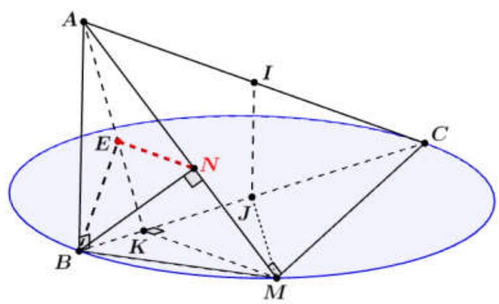
A. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ **B.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Cách 1:

Đầu tiên ta nhận thấy ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại B nên suy ra M, B đều thuộc mặt cầu đường kính AC. Mà $\widehat{ABM}=90^\circ$ nên suy ra M thuộc giao giữa mặt cầu đường kính AC và mặt phẳng qua B vuông góc với AB tức đường tròn (C) bán kính $r=\sqrt{R_{(AC)}{}^2-d^2(I;AC)}=3$.

Từ đó ta có được hình vẽ như sau:



Gọi E là hình chiếu của N lên (ABC), khi đó suy ra $d(N;(ABC))=NE$

Đặt $a=JK \Rightarrow KM=\sqrt{9-a^2}; BK=3-a \Rightarrow BM^2=(3-a)^2+9-a^2=18-6a$;

Mặt khác ta có: $AN.AM = AB^2 = 9$ (hệ thức lượng ΔABM vuông có BN là đường cao) nên từ đó suy ra:

$$\frac{EN}{MK} = \frac{AN}{AM} = \frac{9}{AM^2}$$

$\Rightarrow EN = \dfrac{9MK}{AM^2} = \dfrac{9\sqrt{9-a^2}}{BM^2+9} = \dfrac{9\sqrt{9-a^2}}{27-6a} = f(a)$. Xét hàm $f(a)$ trên $[-3;3]$ thấy $\max\limits_{[-3;3]} f(a) = f\left(\sqrt{6}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án D.

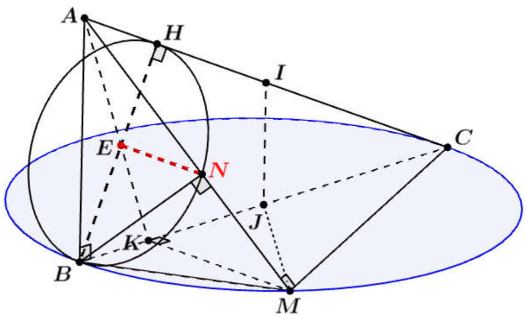
Câu 46.2 Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;4;4), B(1;2;3), C(5;0;-1)$. Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\widehat{ABM} = \widehat{AMC} = 90^\circ$. Mặt phẳng (α) đi qua B và vuông góc với AC cắt AM tại N. Khoảng cách từ N đến (ABC) có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ **B.** $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Cách 2: Đầu tiên ta nhận thấy ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại B nên suy ra M, B đều thuộc mặt cầu đường kính AC. Mà $\widehat{ABM} = 90^\circ$ nên suy ra M thuộc giao giữa mặt cầu đường kính AC và mặt phẳng qua B vuông góc với AB tức đường tròn (C) bán kính $r = \sqrt{{R_{(AC)}}^2 - d^2(I;AC)} = 3$.

Từ đó ta có được hình vẽ như sau:



Đầu tiên gọi E là hình chiếu của N lên (ABC), khi đó suy ra $d(N;(ABC)) = NE$ (1)

Tiếp đến ta có: $CM \perp (ABM)$ nên $BN \perp CM$, mà $BN \perp AM$ nên $BN \perp (AMC)$ tức $BN \perp NC$.

Gọi $H = BE \cap AC$ thì nhận thấy $\widehat{BHC} = \widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^\circ$ nên suy ra ba điểm H, N, M sẽ luôn thuộc một mặt cầu đường kính BC với tâm J là trung điểm BC.

Mặt khác lại có: $\begin{cases} BN \perp (AMC) \\ H \in (AMC) \end{cases} \Rightarrow BN \perp NH$ tức $\widehat{BNH} = 90^\circ$ (B, H cố định) nên suy ra N luôn thuộc một đường tròn đường kính BH, kí hiệu là (D) (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $d(N;(ABC))_{\max} = NE_{\max} = R_{(D)} = \dfrac{BH}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 49.1 Xét các số phức z, w, u sao cho thỏa mãn $|z| = 1, |w| = 2, |u| = 3$ và $|z + w - u| = |u + z - w|$. Khi đó giá trị lớn nhất của $|z - u|$ bằng

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{14}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta có: $|z + w - u| = |u + z - w| \Leftrightarrow \left|1 + \dfrac{w}{z} - \dfrac{u}{z}\right| = \left|1 - \dfrac{w}{z} + \dfrac{u}{z}\right|$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Đặt $(a;b)=\left(\frac{w}{z};\frac{u}{z}\right)$ thì khi đó phương trình trở thành: $|1+a-b|=|1-a+b|$ (1) với $|a|=2,|b|=3$.

Khi đó $P=|z-u|=|z||1-b|=|b-1|$.

Tiếp đến ta đặt $a-b=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$, thế vào (1) ta thu được: $(x-1)^2+y^2=(x+1)^2+y^2\Leftrightarrow x=0$

Suy ra: $a-b=yi\ \ (y\in\mathbb{R})$, ta đặt tiếp: $\begin{cases}a=x+mi\\b=x+ni\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|^2=x^2+m^2=4\\|b|^2=x^2+n^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\le 4\\x^2\le 9\end{cases}\Rightarrow x\in[-2;2]$

Khi đó ta có: $P^2=|b-1|^2=(x-1)^2+n^2=x^2+n^2-2x+1=10-2x\le 10+2.2=14,\ \ \forall x\in[-2;2]$

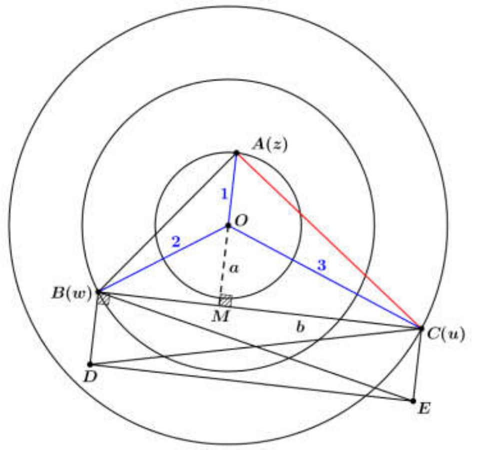
Vậy suy ra giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{14}$.**Chọn đáp án B.**

Cách 2: Đầu tiên ta có: $|z+w-u|=|u+z-w|\Leftrightarrow|z+(w-u)|=|z-(w-u)|$. Tiếp đến ta gọi $X(z),Y(w-u)$ và I là trung điểm XY thì khi đó ta có: $\left|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}\right|=\left|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OY}\right|\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{OI}\right|=\left|\overrightarrow{XY}\right|\Leftrightarrow OI=\frac{XY}{2}$.

Suy ra ΔOAB vuông tại O $(OA\perp OB)$ và I là trung điểm AB. (*)

Trở lại dữ kiện ban đầu, xét hệ quy chiếu khác, gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w,u, khi đó ta có: $|z-w+u|=|z+w-u|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BC}\right|$

Mà theo (*) ta có được $OA\perp BC$ nên từ đó ta có được hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ trên, ta đặt $(MO;MC)=(a;b)$ với $OA\perp BC$ tại M.

Ta nhận thấy do $OA\perp BC$ nên khi AM tăng thì M dần về B tức $a=OM\le OB=2$.

Khi đó ta có: $a^2+b^2=9\Rightarrow|z-u|=AC=\sqrt{(a+1)^2+c^2}=\sqrt{10+2a}\le\sqrt{14}$ khi $a=2$. **Chọn đáp án B.**

Cách 3: Ta sẽ đánh giá trực tiếp biểu thức $|z-u|$ thông qua đại số.

Sử dụng đẳng thức sau: $|mz_1+nz_2|^2=m^2|z_1|^2+n^2|z_2|^2+mn\left(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\right)$. Trở lại bài toán, đặt $a=w-u$ thì dữ kiện ban đầu thành: $|z+a|=|z-a|\Leftrightarrow|z+a|^2=|z-a|^2\Leftrightarrow\overline{z}a+z\overline{a}=0\Leftrightarrow-\left(\overline{z}w+z\overline{w}\right)=-\left(\overline{z}u+z\overline{u}\right)$

Từ đó suy ra: $|z|^2+|u|^2-\left(\overline{z}u+z\overline{u}\right)=10-\left(\overline{z}w+z\overline{w}\right)\Leftrightarrow|z-u|^2=5+|z|^2+|w|^2-\left(\overline{z}w+z\overline{w}\right)$

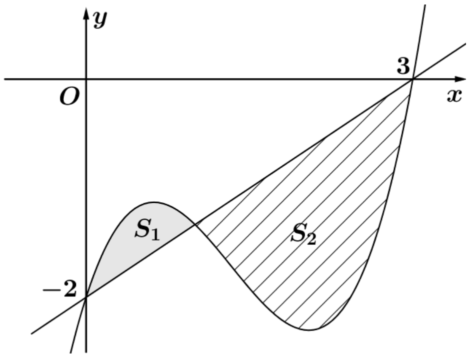
$\Leftrightarrow|z-u|^2=5+|z-w|^2\le 5+\left(|z|+|-w|\right)^2=5+9=14$ (Bất đẳng thức modun $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$)

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $|z-u|$ bằng $\sqrt{14}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(z,w,u)=\left(1;-2;-2+\sqrt{5}i\right)$.

Chọn đáp án B.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$. Đường thẳng $y=ax+b$ tạo với đường cong $y=f\left(x\right)$ thành hai miền phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (hình vẽ bên). Biết rằng $S_1=\frac{5}{12}$ và $\int\limits_0^1\left(1-2x\right)f'\left(3x\right)dx=-\frac{1}{2}$, khi đó giá trị của S_2 bằng



A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{19}{4}$. **C.** $\frac{13}{6}$. **D.** $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi phương trình đường thẳng cần tìm là: $\left(d\right):y=ax+b\ \left(a\neq 0\right)$

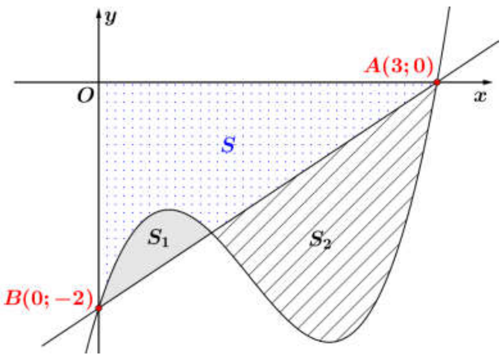
Dễ dàng giải ra được $\left(d\right):y=\frac{2}{3}x-2$ với $\left(a;b\right)=\left(\frac{2}{3};-2\right)$ hoặc dùng tính chất đường đoạn chắn.

Tiếp đến ta có: $-\frac{1}{2}=\int\limits_0^1\left(1-2x\right)f'\left(3x\right)dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(1-\frac{2}{3}\left(3x\right)\right)f'\left(3x\right)d\left(3x\right)=\frac{1}{9}\int\limits_0^3\left(3-2x\right)f'\left(x\right)dx$

Suy ra: $\int\limits_0^3\left(3-2x\right)f'\left(x\right)dx=-\frac{9}{2}$. Đặt $\begin{cases}u=3-2x\\dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=f\left(x\right)\end{cases}$ khi đó ta có được:

$-\frac{9}{2}=\int\limits_0^3\left(3-2x\right)f'\left(x\right)dx=\left(\left(3-2x\right)f\left(x\right)\right)\Big|_0^3+2\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx\Rightarrow\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx=-\frac{21}{4}$.

Ta có hình vẽ như sau:



Gọi các điểm $A\left(-3;0\right),B\left(0;-2\right)$ và S là phần diện tích giới hạn bởi đường cong $y=f\left(x\right)$ và Ox với $x\in\left[0;3\right]$

Khi đó ta có: $S=-\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx=\frac{21}{4}$ và $S=S_{\Delta OAB}-S_1+S_2=\frac{1}{2}\left|\overline{OA}\right|.\left|\overline{OB}\right|-\frac{5}{12}+S_2=S_2+\frac{31}{12}$

Vậy ta suy ra: $S_2=S-\frac{31}{12}=\frac{21}{4}-\frac{31}{12}=\frac{8}{3}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ LẦN 1 THPT NGUYỄN KHUYẾN – LÊ THÁNH TÔNG TPHCM

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, gọi d' là hình chiếu vuông góc của $(d):\begin{cases} x=-1+2at \\ y=3-2t \\ z=\left(a^2-2\right)t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$ lên mặt phẳng $(\alpha): 2x-3z-6=0$. Lấy các điểm $M(0;-3;-2)$ và $N(3;-1;0)$ thuộc (α). Tính tổng tất cả giá trị của tham số a để MN vuông góc với d'

A. -4 **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ lần lượt là các vector chỉ phương của (d) và (d'), khi đó ta suy ra:

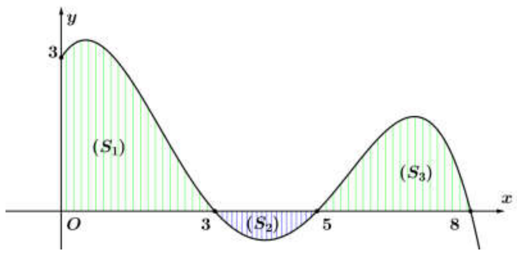
$\vec{u'}=\left[\left[\vec{u};\vec{n}\right];\vec{n}\right]$ với $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α), suy ra: $\vec{u'}=\left(8-12a-4a^2;24;12-18a-6a^2\right)$ và cùng với $\overrightarrow{MN}=(3;2;2)$ ta suy ra:

$\overrightarrow{MN}.\vec{u'}=0\Leftrightarrow 3\left(8-12a-4a^2\right)+48+2\left(12-18a-6a^2\right)=0\Leftrightarrow -24a^2-72a+...=0\Rightarrow \sum(a)=a_1+a_2=-3$

Chọn đáp án B.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;8]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết $S_1=23, S_2=3, S_3=15$ lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành.

Khi đó giá trị của $I=\int\limits_3^6\left(-2x^3+9x^2-9x\right)f'\left(x^2-3x-10\right)dx$ bằng



A. $I=-15$ **B.** $I=65$. **C.** $I=5$. **D.** $I=35$.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_3^6\left(-2x^3+9x^2-9x\right)f'\left(x^2-3x-10\right)dx=\int\limits_3^6(2x-3)\left(-x^2+3x+10-10\right)f'\left(x^2-3x-10\right)dx$

Đặt $\begin{cases} t=x^2-3x-10 \\ dt=(2x-3)dx \end{cases}$ thì khi đó $I=\int\limits_0^8(-t-10)f'(t)dt=\left(-(t+10)f(t)\right)\Big|_0^8+\int\limits_0^8 f(t)dt=30+23-3+15=65$

Chọn đáp án B.

Câu 45. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-23;0)$ sao cho hàm số $f(x)=\left(x^4-8\right)e^x-mx^2-\left(m^2-9m\right)x+2023$ luôn đồng biến trên khoảng $(2;5)$

A. 21 **B.** 19. **C.** 14. **D.** 8.

Lời giải

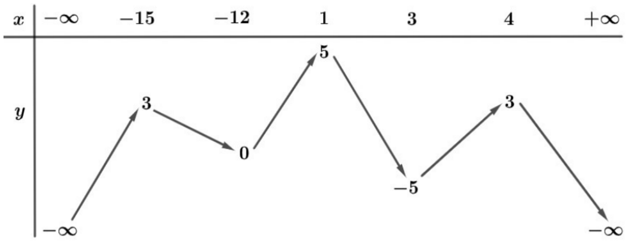
Ta có: $f'(x)=\left(x^4+4x^3-8\right)e^x-2mx-\left(m^2-9m\right)\geq 0,\ \forall x\in(2;5)$

$\Leftrightarrow\left(x^4+4x^3-8\right)e^x\geq 2mx+\left(m^2-9m\right),\ \forall x\in(2;5)$. Gọi $\left(g(x);h(x)\right)=\left(\left(x^4+4x^3-8\right)e^x;2mx+\left(m^2-9m\right)\right)$ thì khi đó ycbt thành: $g(2)\geq h(2)\Leftrightarrow m^2-7m\leq 40e^2\Leftrightarrow m\in[-14;21]\xrightarrow{m\in(-23;0)}m\in\{-14;-13;...;-1\}$. Vậy có tất cả 14 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Số các điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left|f\left(\left|2x^2-6x-8\right|+x^2-13\right)\right|$ là

A. 8 **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

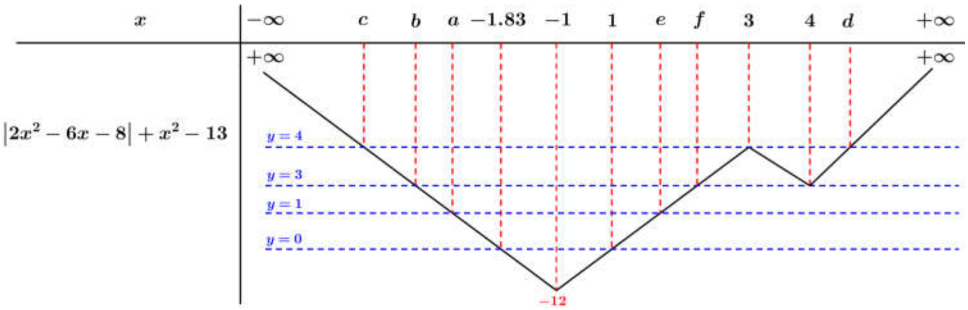
Lời giải

Đầu tiên ta đặt $h(x) = f\left(\left|2x^2-6x-8\right|+x^2-13\right) = \begin{cases} f\left(3x^2-6x-21\right), & \forall x \in (-\infty;-1] \cup [4;+\infty) \\ f\left(-x^2+6x-5\right), & \forall x \in (-1;4) \end{cases}$

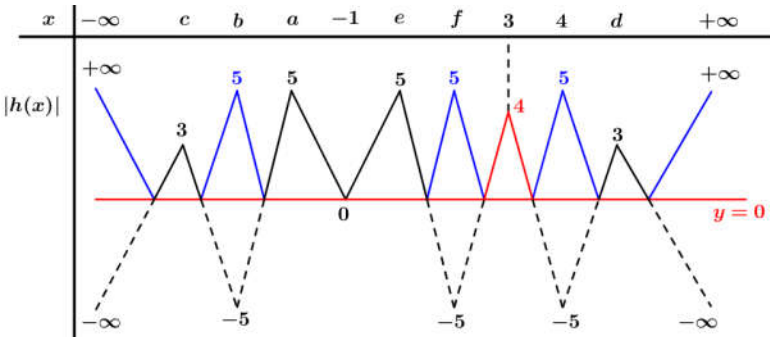
Suy ra: $h'(x) = \begin{cases} 6(x-1)f'\left(3x^2-6x-21\right), & \forall x \in (-\infty;-1] \cup [4;+\infty) \\ -2(x-3)f'\left(-x^2+6x-5\right), & \forall x \in (-1;4) \end{cases}$, khi đó ta có nghiệm của phương trình

$h'(x) = 0$ trên hai tập $D_1 = (-\infty;-1] \cup [4;+\infty)$ và $D_2 = (-1;4)$ là: $x \in \{-1;3;4\}$

Khi đó ta có được bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^2-6x-21$ và $y = -x^2+6x-5$ như sau:



Từ đó ta cũng có được bảng biến thiên hàm số $|h(x)|$ như sau:



Từ bảng biến thiên trên, ta suy ra $|h(x)|$ có 8 điểm cực đại. **Chọn đáp án A.**

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, khối đa diện $OAMEN$ có thể tích bằng 296 với các đỉnh $A\left(0;0;8\sqrt{2}\right)$, $M(5;0;0)$, $N(0;7;0)$, $E(a;b;0)$ trong đó $ab \neq 0, a > 0, b > 0$. Khi a, b thay đổi thì đường thẳng AE luôn tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2 = c^2$. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{24\sqrt{666}}{333}$ **B.** $\dfrac{81\sqrt{37}}{74}$. **C.** $\dfrac{27\sqrt{222}}{37}$. **D.** $\dfrac{24\sqrt{74}}{\sqrt{461}}$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Ta kẻ $OH \perp AE$ khi đó mặt cầu (S) chính là mặt cầu nhận OH là bán kính

Đầu tiên ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OE^2} \Rightarrow \dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{128}$,

Lại có: $S_{OMEN}=S_{OME}+S_{ONE}=\dfrac{OM.d(E;OM)+ON.d(E;ON)}{2}=\dfrac{5a+7b}{2}$

Khi đó suy ra: $V_{O.AMEN}=\dfrac{1}{3}d(A;OMEN).S_{OMEN}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{5a+7b}{2}\right)=296 \Rightarrow 5a+7b=111\sqrt{2}$.

$\begin{cases} c_{\min} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{c^2}\right)_{\max} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{128}\right)_{\max} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)_{\min} \\ \left(111\sqrt{2}\right)^2=(5a+7b)^2 \le \left(5^2+7^2\right)\left(a^2+b^2\right) \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2 \ge 333 \Rightarrow c \ge \dfrac{24\sqrt{74}}{\sqrt{461}}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 49. Xét các số thực x, y sao cho $27y^2+\log_{216}\left(a^{18x-\log_6 a^3}\right)^3 \le 783$ luôn đúng với mọi $a>0$. Có tối đa bao nhiêu giá trị nguyên dương của $K=x^2+y^2-2x+5y$?

A. 64 **B.** 53. **C.** 58. **D.** 59.

Lời giải

Ta có: $27y^2+\log_{216}\left(a^{18x-\log_6 a^3}\right)^3 \le 783 \Leftrightarrow 27y^2+\dfrac{1}{3}\log_6\left(a^{54x-3\log_6 a^3}\right) \le 783$

$\Leftrightarrow 9y^2+(6x-\log_6 a)\log_6 a \le 261 \Leftrightarrow (\log_6 a)^2-6x\log_6 a+261-9y^2 \ge 0$. Do $a>0$ nên xét bất phương trình trên theo ẩn $\log_6 a$ ta có điều kiện để bất phương trình luôn đúng là: $\Delta=36x^2-4\left(261-9y^2\right) \le 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 29$

Khi đó ta suy ra điểm $M(x;y)$ luôn thuộc hình tròn $(C): x^2+y^2 \le 29$

Lại có: $K=x^2+y^2-2x+5y=(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{29}{4}=MA^2-\dfrac{29}{4}$ với $A\left(1;-\dfrac{5}{2}\right)$ nên khi đó ta suy ra giá trị lớn nhất của K bằng $K_{\max}=\left(\sqrt{29}+\dfrac{\sqrt{29}}{2}\right)^2-\dfrac{29}{4}=\dfrac{9}{4}.29-\dfrac{29}{4}=8.\dfrac{29}{4}=58$ tức $0<K\le 58$. **Chọn đáp án C.**

Câu 50. Hàm số $f(x)$ thỏa $\begin{cases} f(x)>0 \\ e^{1-x^2}\left[6f(x)+f'(x)\right]=\left(8x^2+12x+4\right)\sqrt{f(x)} \end{cases}, \forall x>0$ và $f(1)=4$. Hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{f(x)}, x=1, x=3$ và trục hoành có diện tích bằng $m.e^n+p$, trong đó $m,n,p\in\mathbb{Z}$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A. $2m+n+p=6$ **B.** $5m-n-3p=0$. **C.** $3m+n-p=15$. **D.** $3m+2n-p=19$.

Lời giải

Ta có: $e^{1-x^2}\left[6f(x)+f'(x)\right]=\left(8x^2+12x+4\right)\sqrt{f(x)},\ \forall x>0$.

$\Leftrightarrow e^{3x}.3\sqrt{f(x)}+\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}e^{3x}=\left(4x^2+6x+2\right)e^{x^2+3x-1},\ \forall x>0$.

$\Leftrightarrow \left(e^{3x}\sqrt{f(x)}\right)'=2\left[x(2x+3)e^{x^2+3x-1}+e^{x^2+3x-1}\right],\ \forall x>0 \Leftrightarrow \left(e^{3x}\sqrt{f(x)}\right)'=2\left(xe^{x^2+3x-1}\right)',\ \forall x>0$.

$\Leftrightarrow e^{3x}\sqrt{f(x)}=2xe^{x^2+3x-1}+C,\ \forall x>0$. Thế $f(1)=4$ vào suy ra $C=0$ tức $\sqrt{f(x)}=\dfrac{2xe^{x^2+3x-1}}{e^{3x}},\ \forall x>0$.

Suy ra: $\sqrt{f(x)} = 2xe^{x^2-1},\ \forall x > 0$, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm bằng:

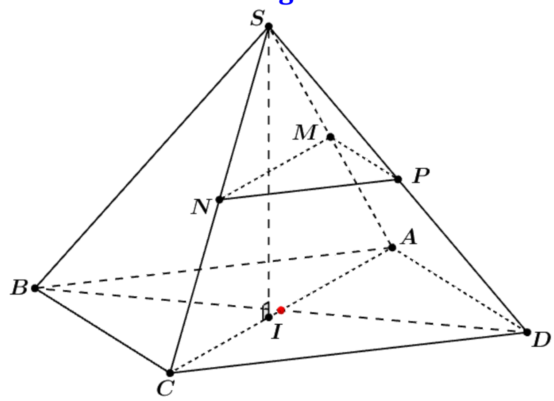
$S = \int_1^3 \sqrt{f(x)}dx = \int_1^3 2xe^{x^2-1}dx = \int_1^3 e^{x^2-1}d\left(x^2-1\right) = \left(e^{x^2-1}\right)\Big|_1^3 = e^8 - 1$. **Chọn đáp án B.**

ĐỀ THI THỬ LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN LẦN 1

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2cm$, $AC = 3cm$, $SB = SC = SD = 2cm$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SC, SD. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SMNP$?

A. $\dfrac{29\pi}{4}cm^2$ **B.** $\dfrac{9\pi}{4}cm^2$. **C.** $\dfrac{16\pi}{7}cm^2$. **D.** $\dfrac{64\pi}{7}cm^2$.

Lời giải



Đầu tiên dễ thấy $SA \perp SC$ nên suy ra $R_{(SMN)} = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{3}{4}$ (kết hợp tính chất đường trung bình).

Tiếp đến ta có: $MP = PN = \dfrac{BC}{2} = 1; MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{3}{2}$, suy ra $d = d\left(P;MN\right) = \sqrt{PN^2 - \dfrac{MN^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Khi đó $R_{(MNP)} = \dfrac{PN^2}{2d} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$, cùng với $\begin{cases}(MNP) \parallel (ACD) \\ (ACD) \perp (SAC)\end{cases}$ nên $R_{SMNP} = \sqrt{R_{(SMN)}{}^2 + R_{(PMN)}{}^2 - \dfrac{MN^2}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

Vậy diện tích mặt cầu cần tìm là: $S = 4\pi R_{SMNP}{}^2 = \dfrac{16\pi}{7}cm^2$. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1), B(1;0;2), C(-2;2;4)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O sao cho A, B, C cùng phía với (P). Khi (P) có phương trình $-7x + my + nz = 0$ thì biểu thức $T = d\left(A;(P)\right) + 2d\left(B;(P)\right) + 4d\left(C;(P)\right)$ lớn nhất. Tính $S = m + n$

A. $S = 31$ **B.** $S = 24$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 0$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, khi đó suy ra tọa độ $I\left(-1;\dfrac{10}{7};3\right)$.

Khi đó ta suy ra $T = d\left(A;(P)\right) + 2d\left(B;(P)\right) + 4d\left(C;(P)\right) \le 7d\left(I;(P)\right) = 7OI = \sqrt{590}$. (do A, B, C cùng phía)

Dấu bằng xảy ra khi $(P) \parallel \overrightarrow{OI}$ tức mặt phẳng (P) nhận vector $\overrightarrow{OI}$ là vector pháp tuyến.

Suy ra: $(P): -7x + 10y + 21z = 0$ tức $(m;n) = (10;21)$. Vậy $S = m + n = 31$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x) \ne -1,\ \forall x \in [0;1]$, $f'(0) = 0$, $f(0) = \ln 2$ và $(1-x)\left[f''(x) + 1\right] = f'(x)\left[xf'(x) + 2x - 1\right]$. Giá trị $f(1)$ gần với số nào nhất sau đây?

A. -2.5 **B.** -2.25. **C.** 0.25. **D.** 0.5.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình sau: $(1-x)\left[f''(x)+1\right]=f'(x)\left[xf'(x)+2x-1\right]$.

$\Leftrightarrow (1-x)\left[f''(x)+1\right]=x\left(f'(x)+1\right)^2-x-f'(x)\Leftrightarrow f'(x)+1-(x-1)f''(x)=x\left(f'(x)+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)'f'(x)+1-(x-1)f''(x)}{\left(f'(x)+1\right)^2}=x\Leftrightarrow\left(\dfrac{x-1}{f'(x)+1}\right)'=x\Rightarrow\dfrac{x-1}{f'(x)+1}=\dfrac{x^2}{2}+C_1$

Mà $f'(0)=0$ nên suy ra $C_1=-1$ tức $\dfrac{x-1}{f'(x)+1}=\dfrac{x^2}{2}-1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x-1}{\dfrac{x^2}{2}-1}-1=\dfrac{2x-2}{x^2-2}-1$.

Mà mặt khác $f'(1)=-1$, trong khi giả thiết cho $f'(x)\neq-1,\ \forall x\in[0;1]$ nên suy ra đề sai.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (với a,b,c là các tham số và $c\le 0$). Biết rằng hệ phương trình $\begin{cases}f(x)=0\\f'(x)=0\end{cases}$ có nghiệm và hàm số $g(x)=\left|x^3+ax^2+bx+c\right|$ có 3 điểm cực trị. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b+c-b^2$ bằng

A. 2 **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Đầu tiên hệ phương trình $\begin{cases}f(x)=0\\f'(x)=0\end{cases}$ có nghiệm $x=m\neq0$ tức đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x=m\neq0\Rightarrow f(x)=(x-m)^3$ hoặc $f(x)=(x-m)^2(x-n)$ với $m\neq n$.

Nếu $f(x)=(x-m)^3$ thì suy ra $g(x)=\left|f(x)\right|$ có đúng 1 điểm cực trị (loại).

Nếu $f(x)=(x-m)^2(x-n)$ với $m\neq n$ thì thì suy ra $g(x)=\left|f(x)\right|$ có đúng 3 điểm cực trị (thỏa mãn).

Theo Vi-ét cho phương trình $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ ta có: $(a;b;c)=\left(-2m-n;m^2+2mn;-nm^2\right)$

Vì $c\le0$ nên $-nm^2=c\le0$, nên $n\ge0$ ($m\neq0$).

Khi đó $P=a+b+c-b^2=-2m-n+m^2+2mn-m^2n-\left(m^2+2mn\right)^2$

Dự đoán P_{max} khi $n=0$ với duy nhất điều kiện $n\ge0$, suy ra $P=-2m+m^2-m^4\le2$ đạt tại $m=-1$.

Từ đó ta biến đổi biểu thức P theo dấu bằng trên như sau:

$P=-2m-n+m^2+2mn-m^2n-\left(m^2+2mn\right)^2=-n(m+1)^2+2\left(m^2+2mn\right)-m^2-2m-\left(m^2+2mn\right)^2$

$=-n(m+1)^2-\left(m^2+2mn-1\right)^2-(m+1)^2+2\le2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(m;n)=(-1;0)$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên $x\in[1;2023]$ sao cho ứng với mỗi x thì mọi giá trị thực của y đều thỏa mãn $\log_5\left(y^2+2xy+2x+2y+2x^2\right)\le1+\log_3\left(y^2+4y+7\right)\log_5\left(y^2+2y+5\right)$?

A. 2 **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình sau: $\log_5\left(y^2+2xy+2x+2y+2x^2\right)\le1+\log_3\left(y^2+4y+7\right)\log_5\left(y^2+2y+5\right)$ (1)

Trước hết phải có: $y^2+2xy+2x+2y+2x^2=y^2+(2x+2)y+2x+2x^2>0\ \forall y$ (*),

Khi đó từ (*) ta có: $\Delta_y'=(x+1)^2-\left(2x+2x^2\right)=1-x^2<0\Leftrightarrow x^2>1$. (**)

Vì bất phương trình đúng với mọi giá trị thực của y nên sẽ đúng tại $y=0$ khi đó (1) thành:

$\Rightarrow \log_5\left(2x+2x^2\right)\le 1+\log_3 7 \Leftrightarrow 2x+2x^2 \le 5^{\log_3 21} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{\pm2;\pm3;\pm4;\pm5;\pm6\}$ thỏa (**) (2)

Trước hết, từ (1) ta có

$VP(1)=1+\log_3\left((y+2)^2+3\right)\log_5\left((y+1)^2+4\right)\ge 1+\log_3 3\log_5\left((y+1)^2+4\right)=\log_5\left(5(y+1)^2+20\right)$

Khi đó $\left(5(y+1)^2+20\right)-\left(y^2+2xy+2x+2y+2x^2\right)=-2x^2-2xy-2x+4y^2+8y+25$

$=-\frac{1}{2}(2x+y+1)^2+\frac{3}{2}\left(3y^2+6y+17\right)=-\frac{1}{2}(2x+y+1)^2+\frac{3}{2}\left(3(y+1)^2+14\right)\ge 21-\frac{1}{2}(2x+y+1)^2\ge 0$

(Dấu bằng xảy ra khi $y=-1$), suy ra $21-\frac{1}{2}(2x-1+1)^2=21-2x^2\ge 0 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{-3;-2;...;3\}$ (3)

Đối chiếu các giá trị của (2) với các giá trị cho phép ở (3), suy ra $x\in\{\pm2;\pm3\}$.

Vậy với $x\in[1;2023]$, suy ra $x\in\{2;3\}$ tức có 2 giá trị nguyên x thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HẠ LONG LẦN 1

Câu 50. Trong không gian cho hệ trục $Oxyz$, lấy các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ và $D\left(a+a\sqrt{b^2+c^2};b\sqrt{a^2+c^2};c\sqrt{a^2+b^2}\right)$ với a,b,c là các số dương. Biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3}{2}$ và thể tích tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABD) là $mx+ny+pz+1=0$. Tính giá trị của biểu thức $S=m+n+p$?

A. -2 **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow (ABC): bcx+acy+abz-abc=0$

Khi đó ta suy ra: $d(D;(ABC))=\dfrac{abc\left(1+\sum\limits_{cyc}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)-1\right)}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\dfrac{\sum\limits_{cyc}\left(abc\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\dfrac{\sum\limits_{cyc}\left(ab\sqrt{a^2c^2+b^2c^2}\right)}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$

$=\dfrac{ab\sqrt{a^2c^2+b^2c^2}+bc\sqrt{b^2a^2+c^2a^2}+ca\sqrt{c^2b^2+a^2b^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\le\dfrac{\sqrt{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$ (B.C.S)

Mà ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=3$ nên suy ra

$d(D;(ABC))\le\sqrt{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}=3\sqrt{2}$ và $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d(D;(ABC))S_{ABC}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt[4]{3}\Leftrightarrow A\left(\sqrt[4]{3};0;0\right),B\left(0;\sqrt[4]{3};0\right),C\left(0;0;\sqrt[4]{3}\right),D\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt{6};\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$, suy ra

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3};0\right)\\ \overrightarrow{AD}=\left(\sqrt{6};\sqrt{6};\sqrt{6}\right)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_{(ABD)}}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\,||\,(1;1;-2)\Rightarrow(ABD):x+y-2z-\sqrt[4]{3}=0\Leftrightarrow(ABD):\frac{-x}{\sqrt[4]{3}}+\frac{-y}{\sqrt[4]{3}}+\frac{2z}{\sqrt[4]{3}}+1=0$

Vậy $S=m+n+p=\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{2}{\sqrt[4]{3}}=0$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ SỞ BẮC NINH LẦN 1

Câu 39. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\dfrac{1+x^2+y^2}{x-2y}\le 4^{x-2y}-2.2^{x^2+y^2}+1$

A. 6 **B.** 21. **C.** 13. **D.** 9.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $\log_2\dfrac{1+x^2+y^2}{x-2y}\le 4^{x-2y}-2.2^{x^2+y^2}+1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(1+x^2+y^2\right)-\log_2\left(x-2y\right)\le 4^{x-2y}-2^{1+x^2+y^2}+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(1+x^2+y^2\right)+2^{1+x^2+y^2}\le \log_2\left(4x-2y\right)+4^{x-2y}$

Xét hàm số $y=f(t)=\log_2 t+2t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2>0$ trên $(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ tức $1+x^2+y^2\le x-2y\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\le 4$. (*)

Vẽ đường tròn tâm $I(1;-2)$ bán kính bằng 2 trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta dễ dàng đếm được 13 bộ $(x;y)$ nguyên sao cho thỏa bất phương trình (*). **Chọn đáp án C.**

Câu 42. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-100;100]$ sao cho bất phương trình sau có nghiệm thực:

$$3^{x^2-2x+1}-\log_5\left(x^2-2x+6\right)^8+10-\sqrt{-x^2+2x+m}<0$$

Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 5014 **B.** 5022. **C.** 4914. **D.** 5044.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $t=x^2-2x+6=(x-1)^2+5\ge 5$, khi đó bất phương trình ban đầu trở thành:

$\Rightarrow 3^{t-5}-8\log_5 t+10-\sqrt{6+m-t}<0$ (*) với điều kiện $x\in[5;m+6]$

Xét hàm số $y=f(t)=3^{t-5}-8\log_5 t+10-\sqrt{6+m-t}$

Có $f'(t)=3^{t-5}\ln 3-\dfrac{8}{t\ln 5}+\dfrac{1}{2\sqrt{6+m-t}}>3^0\ln 3-\dfrac{8}{5\ln 5}>0,\forall t\ge 5$

Từ đó suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $[5;m+6]$.

Như vậy để bất phương trình (*) có nghiệm thì phương trình $f(t)=0$ phải có ít nhất một nghiệm trên $[5;m+6]$.

Mà $f(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $[5;m+6]$ nên phương trình $f(t)=0$ cần có nghiệm duy nhất, tức ta suy ra

$f(5)<0\Leftrightarrow 1-8+10-\sqrt{m+1}<0\Leftrightarrow m+1>9\Leftrightarrow m>8$

Với $m\in[-100;100]$ ta suy ra $m\in\{9;10;...;99;100\}$. Tập S có $100-9+1=92$ số hạng nên tổng cần tìm là:

$\sum_S=\dfrac{(100+9)92}{2}=5014$. **Chọn đáp án A.**

Câu 44. Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=|w|=1$, $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|w-\dfrac{4}{z}+2\left(1+\dfrac{w}{z}\right)i\right|$ thuộc khoảng nào ?

A. $(3;4)$ **B.** $(2;3)$. **C.** $(7;8)$. **D.** $(4;5)$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Đầu tiên ta có: $P=|z|\left|w-\frac{4}{z}+2\left(1+\frac{w}{z}\right)i\right|=\left|zw-4+2(z+w)i\right|=\left|zw+2(z+w)i+4i^2\right|$

$=\left|z(w+2i)+2i(w+2i)\right|=\left|(z+2i)(w+2i)\right|=|z+2i|.|w+2i|$

Tiếp theo, gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w, cùng với điểm $M(0;-2)$

Khi đó hai điểm A,B cùng thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

Do $|z+w|=\sqrt{2}$ nên ta suy ra $|z+w|=|z-w|=AB=\sqrt{2}$ và $P=MA.MB$

Ta có: $\begin{cases} x_A=\sin\alpha \\ y_A=\cos\alpha \end{cases}$, do $OA\perp OB$ nên ta suy ra $\begin{cases} x_B=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha \\ y_B=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha \end{cases}$. Suy ra ta có tọa độ hai điểm A,B mới lần lượt là $A(\sin\alpha;\cos\alpha),B(\cos\alpha;-\sin\alpha)$

Suy ra: $P=MA.MB=\sqrt{(5+4\cos\alpha)(5-4\sin\alpha)}=\sqrt{25-20(\sin\alpha-\cos\alpha)-16\sin\alpha\cos\alpha}$

Đặt $t=\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\frac{1-t^2}{2}$

Khi đó ta có: $P=\sqrt{25-20t+8\left(t^2-1\right)}=\sqrt{8t^2-20t+17}=f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ ta thấy $\min P=\min\limits_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\in(2;3)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 46. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để hàm số $f(x)=\left|x^4+x^3-5x^2-x+m\right|$ có bốn điểm cực tiểu x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)\geq 68$. Khi đó tập S có bao nhiêu tập con ?

A. 4 **B.** 8. **C.** 16. **D.** 32.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta xét hàm số $g(x)=x^4+x^3-5x^2-x+m$ có $g'(x)=5x^3+3x^2-10x-1$.

Giải phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1,96;-0,1;1,31\}$. Khi đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1.96		-0.1		1.31		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$				$m-0.05$				$+\infty$
									$y=0$
			$-m+10$				$-4.7+m$		

Như vậy, từ bảng biến thiên trên để hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực tiểu thì hàm số $g(x)$ phải có 4 nghiệm phân biệt tức ta có: $m-4.7<0;m-0.05>0\Leftrightarrow 0.05<m<4.7\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{1;2;3;4\}$.

Thế lại từng giá trị m vào $f(x)$, từng giá trị m thỏa sẽ có 4 nghiệm phân biệt của phương trình $h(x)=0$ lần lượt là x_1,x_2,x_3,x_4 sao cho thỏa mãn $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)\geq 68$

Sau khi thử, ta kết luận $m\in\{2;3;4\}$, tức S có tất cả $2^3=8$ (tập con). **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Cách 2: Ta xử lí trực tiếp dữ kiện $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)\geq 68$. (1)

Ta sử dụng biến đổi sau: (dùng số phức) $x_1^2+1=x_1^2-i^2=\left(x_1-i\right)\left(x_1+i\right)$, khi đó (1) thành:

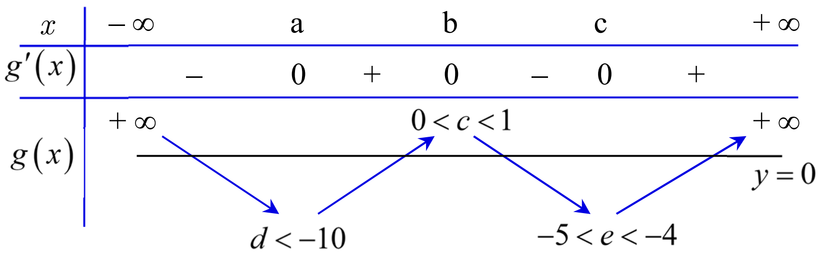
$$\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)=\prod_{k=1}^{4}\left(x_k-i\right)\left(x_k+i\right)\geq 68.$$

$\begin{cases} g\left(x\right)=f\left(x\right)+m=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right) \\ g\left(x\right)=x^4+x^3-5x^2-x+m \end{cases}$. Suy ra: $g\left(i\right)g\left(-i\right)\geq 68\Leftrightarrow\left(m+6+2i\right)\left(m+6-2i\right)\geq 68$

$\Leftrightarrow\left|m+6-2i\right|^2\geq 68\Leftrightarrow\left(m+6\right)^2+4\geq 68\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\geq 2 \\ m\leq -14 \end{array}\right.$. Kết hợp với dữ kiện $f\left(x\right)$ có 4 điểm cực tiểu (cách 1) là $m\in\left\{1;2;3;4\right\}$, suy ra $m\in\left\{2;3;4\right\}$ tức S có tất cả $2^3=8$ (tập con). **Chọn đáp án B.**

Cách 3: Ta đặt $g\left(x\right)=x^4+x^3-5x^2-x$, suy ra $g'\left(x\right)=4x^3+3x^2-10x-1$.

Khi đó phương trình $g'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm a,b,c biểu diễn trên bảng biến thiên sau:



Nhận thấy khi hàm số $\left|g\left(x\right)+m\right|$ có cực tiểu thì:

- Trường hợp 1: Điểm cực tiểu là điểm cực đại nằm dưới Ox đối xứng qua Ox. (loại vì chỉ có 3 cực tiểu)
- Trường hợp 2: Điểm cực tiểu là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)+m=0$ (nhận).

Suy ra x_1,x_2,x_3,x_4 chính là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)+m=0$ trong đó:

- Điều kiện cần: $-c<m<0$ $\left(c<1\right)$ hoặc $0<m<-e$ $\left(-5<e<-4\right)$ (2)
- Điều kiện đủ: $\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)\left(x_3^2+1\right)\left(x_4^2+1\right)\geq 68$ (3)

Khi đó bất phương trình (3) tương đương với: $\Leftrightarrow\left(x_1x_2x_3x_4\right)^2+\sum_{i\neq j\neq k}\left(x_ix_jx_k\right)^2+\sum_{i\neq j}\left(x_ix_j\right)^2+\sum_{i=1}^{4}x_i^2\geq 68$

$$\Leftrightarrow\left(x_1x_2x_3x_4\right)^2+\left(\sum_{i\neq j\neq k}\left(x_ix_jx_k\right)\right)^2-2x_1x_2x_3x_4\sum_{i\neq j}\left(x_ix_j\right)+\sum_{i\neq j}\left(x_ix_j\right)^2+2x_1x_2x_3x_4$$

$$-2\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)\sum_{i\neq j\neq k}\left(x_ix_jx_k\right)+\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)^2-2\sum_{i\neq j}\left(x_ix_j\right)+1\geq 68$$

Theo Viét bậc 4, ta có: $\begin{cases} x_1x_2x_3x_4=m;\sum_{i\neq j\neq k}\left(x_i\right)=-1 \\ \sum_{i\neq j\neq k}\left(x_ix_jx_k\right)=1;\sum_{i\neq j}\left(x_ix_j\right)=-5 \end{cases}$. Thế vào bất phương trình vừa biến đổi ta có:

$\Rightarrow m^2-1.2.m\left(-5\right)+2m+5^2-2.\left(-1\right).1+1^2-2.\left(-5\right)+1\geq 68\Leftrightarrow m^2+12m-28\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\geq 2 \\ m\leq -14 \end{array}\right.$ (4).

Từ (2) và (4) cùng với $m\in\mathbb{Z}$ ta suy ra: $m\in\left\{2;3;4\right\}$ tức S có tất cả $2^3=8$ (tập con). **Chọn đáp án B.**

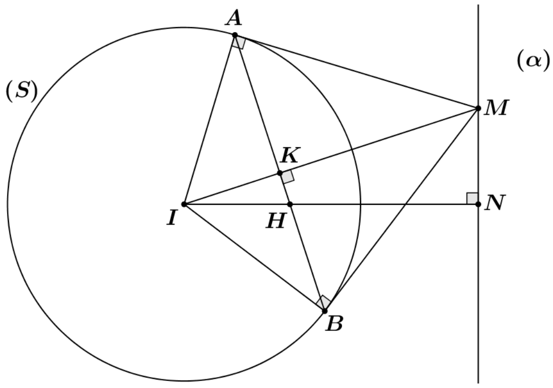
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y+2z+11=0$. Lấy điểm M tùy ý trên (α). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA,MB,MC đến mặt cầu (S), với A,B,C là các tiếp điểm đôi một phân biệt. Khi M thay đổi thì mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $H(a;b;c)$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. $-\dfrac{3}{4}$ **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Cách 1:



Đầu tiên ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$

Gọi N là hình chiếu của I lên trên (α) và IN cắt mặt phẳng (ABC) tại H, suy ra $N(1+t;1-2t;1+2t)$.

Thế tọa độ N vào (α) ta có: $(1+t)-2(1-2t)+2(1+2t)+11=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{4}{3}$ tức $N\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$.

Gọi $K=IM\cap(ABC)$, theo hệ thức lượng tam giác vuông ta có: $IA^2=IK.IM$

Mặt khác do $H=IN\cap(ABC)$ nên suy ra $HKMN$ là tứ giác nội tiếp tức $IH.IN=IK.IM$ nên khi đó ta suy ra $IA^2=IH.IN$. Từ đó ta có được: $IN=d(I;(\alpha))=3; IH=\dfrac{IA^2}{IN}=\dfrac{R^2}{IN}=\dfrac{12}{3}=4$.

Suy ra: $IH=\dfrac{3}{4}IN \Rightarrow \overrightarrow{IH}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{IN}$, kéo theo ta có được: $H(0;3;-1)$ tức $a+b+c=2$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2:

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Gọi $\begin{cases} A(x_0;y_0;z_0) \\ M(m;n;p) \end{cases}$ với $\begin{cases} m-2n+2p+11=0 \\ (x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2=12 \end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}=0$, khi đó phương trình tương đương với: $(x_0-m)(x_0-1)+(y_0-n)(y_0-1)+(z_0-p)(z_0-1)=0$

$\Leftrightarrow (x_0-1+1-m)(x_0-1)+(y_0-1+1-n)(y_0-1)+(z_0-1+1-p)(z_0-1)=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-1)^2}_{=12}+(1-m)(x_0-1)+(1-n)(y_0-1)+(1-p)(z_0-1)=0$

$\Leftrightarrow (1-m)x_0+(1-n)y_0+(1-p)z_0+9+m+n+p=0$

$\Leftrightarrow (1-m)x_0+(1-n)y_0+(1-p)z_0+9+(-11+2n-2p)+n+p=0$

$\Rightarrow (ABC):(1-m)x_0+(1-n)y_0+(1-p)z_0+3n-p-2=0$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Để tìm điểm cố định qua mặt phẳng (ABC) vừa khai triển, ta cần chọn bộ $(m;n;p)$ sao cho phương trình mặt phẳng (ABC) không phụ thuộc vào $(m;n;p)$.

Với $(m;n;p)=(0;3;-1)$ thì thỏa mãn, suy ra điểm cố định cần tìm là $H(0;3;-1)$ tức $a+b+c=2$. **Chọn đáp án C.**

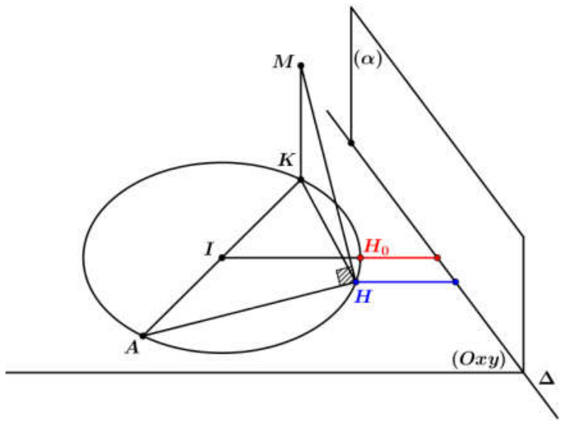
ĐỀ THI THỬ SỞ HÀ NỘI LẦN 1

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;6;0)$ và mặt phẳng $(\alpha):3x+4y+89=0$. Đường thẳng (d) thay đổi nằm trên mặt phẳng (Oxy) và luôn đi qua điểm A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $M(4;-2;3)$ trên đường thẳng (d). Khoảng cách nhỏ nhất từ H đến mặt phẳng (α) bằng

A. 15 **B.** 20. **C.** $\frac{68}{5}$. **D.** $\frac{93}{5}$.

Lời giải

Cách 1:



Đầu tiên ta gọi K là hình chiếu của M lên (Oxy), khi đó suy ra tọa độ $K(4;-2;0)$.

Khi đó $MK\perp(d)$, mà giả thiết cho $MH\perp(d)$ nên suy ra $(d)\perp(MHK)$ kéo theo $KH\perp(d)$ tức $\widehat{AHK}=90^\circ$.

Suy ra H luôn thuộc đường tròn (C) có tâm là trung điểm AK gọi là $I(1;2;0)$, bán kính $R=\frac{AK}{2}=5$.

Mặt khác, nhận thấy $\begin{cases}\overrightarrow{n_{(\alpha)}}.\vec{k}=0\\ \vec{k}=(0;0;1)\end{cases}$ tức $(\alpha)\perp(Oxy)$ nên suy ra $d(I;\Delta)=d(I;(\alpha))=20$ với $\Delta=(\alpha)\cap(Oxy)$.

Vậy suy ra $d(H;(\alpha))_{\min}=d(H;\Delta)_{\min}=d(I;\Delta)-R=20-5=15$. **Chọn đáp án A.**

Cách 2:

Đầu tiên ta giả sử $H(a;b;0)\in(Oxy)$, khi đó ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AH}=(x+2;y-6;0)\\ \overrightarrow{MH}=(x-4;y+2;-3)\end{cases}$.

Do giả thiết cho $MH\perp(d), A\subset(d)$ nên ta có phương trình sau: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{MH}=0$

$\Leftrightarrow(x+2)(x-4)+(y-6)(y+2)=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

Tiếp đến ta có: $d(H;(\alpha))=\frac{|3x+4y+89|}{5}$. Xét biểu thức $P=3x+4y+89=3(x-1)+4(y-2)+100$

Khi đó ta có: $(P-100)^2=(3(x-1)+4(y-2))^2\le(3^2+4^2)((x-1)^2+(y-2)^2)=25^2\Leftrightarrow-25\le P-100\le25$

Suy ra: $75\le P\le125$ tức suy ra $\frac{75}{5}\le d(H;(\alpha))\le\frac{125}{5}\Rightarrow15\le d(H;(\alpha))\le25$. **Chọn đáp án A.**

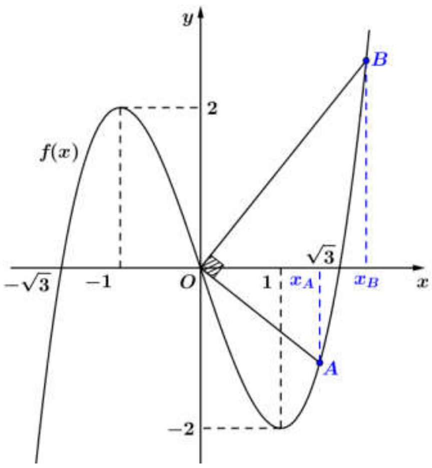
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Số hình vuông có 4 đỉnh nằm trên đồ thị hàm số $y=f(x)$ là

A. 2 **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta gọi đồ thị hàm số $f(x)=x^3-3x$ là đường cong (C). Do đường cong (C) có tâm đối xứng qua O nên ta có nhận xét như sau:



Phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0; x=\pm\sqrt{3}$. Nếu A,B là các điểm thuộc (C) sao cho thỏa $x_B>x_A\geq\sqrt{3}$ thì khi đó $OA<OB$, lúc này không thể tồn tại hình vuông thỏa mãn đề bài từ hai điểm A,B trên.

Suy ra: $x_B\leq\sqrt{3}$ hoặc $x_A\leq\sqrt{3}$. Tiếp đến ta gọi $A(a;a^3-3a)\in(C)$ với $a\in\left(0;\sqrt{3}\right]$.

Ta có B là ảnh của A qua phép quay tâm O và góc quay 90° cả chiều âm và chiều dương. Nên suy ra có 2 điểm B có thể thỏa là $B(3a-a^3;a)$ và $B(a^3-3a;-a)$.

Mà $B\in(C)$ nên ta có phương trình sau: $(3a-a^3)^3-3(3a-a^3)=a \Leftrightarrow 1=(3-a^2)\left(a^2(3-a^2)^2-3\right)$ (1)

Đặt $t=3-a^2\in[0;3]$ thì (1) thành $t^4-3t^3+3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 2,4 \\ t\approx -0,4;-0,6 \end{array}\right. \Rightarrow t\approx 2,4$.

Với 1 giá trị t cho ra 2 giá trị a tức ta kết luận tồn tại 2 hình vuông thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Cách 2: (Mr. Triển)

Đầu tiên ta gọi A,B,C,D lần lượt là các đỉnh thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ sao cho $ABCD$ là hình vuông. Do đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tâm đối xứng qua O nên ta suy ra: $\begin{cases} (AC): y=kx \\ (BD): y=-\dfrac{x}{k} \end{cases}$ với AC,BD là các đường chéo của hình vuông $ABCD$ và đều qua O.

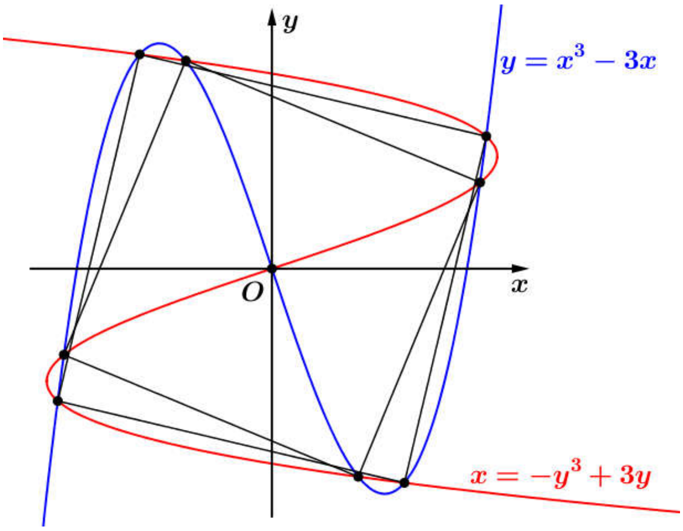
Khi đó ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-(k+3)x=0 & (1) \\ x^3-\left(3-\dfrac{1}{k}\right)x=0 & (2) \end{cases}$ với (1) là nghiệm của x_A,x_C và (2) là nghiệm của x_B,x_D. Khi đó ta suy ra: $\begin{cases} x_{A,C}=\pm\sqrt{k+3} \\ x_{B,D}=\pm\sqrt{3-\dfrac{1}{k}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC=2\sqrt{(k+3)(k^2+1)} \\ BD=2\sqrt{\left(3-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)} \end{cases}$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC = BD \Leftrightarrow (k+3)(k^2+1) = \left(3-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \Leftrightarrow \frac{3k-1}{k^3} = k+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1\pm\sqrt{2} \\ k=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Với 4 giá trị k ứng với 4 điểm của hình vuông cùng với tính đối xứng của k và $-\frac{1}{k}$, ta kết luận có tất cả 2 hình vuông thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án A.**

Cách 3: Đầu tiên ta gọi đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ là đường cong (C). Do đường cong (C) có tâm đối xứng qua O nên ta thực hiện phép quay tâm O, góc quay 90 độ theo chiều dương, gọi x', y' là các hoành độ tung độ mới của đồ thị sau khi thực hiện phép quay, khi ấy ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x' = -y = -(y^3-3y) = -y^3+3y \\ y' = x \end{cases}$

Khi ấy ta thu được hàm số $x = -y^3 + 3y$. Lúc này ta có hình vẽ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận tồn tại 2 hình vuông thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 48. Số các giá trị nguyên âm m để phương trình: $e^x + m = \frac{4}{5^x-1} + \frac{2}{5^x-2}$ có 2 nghiệm phân biệt là

A. 4 **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

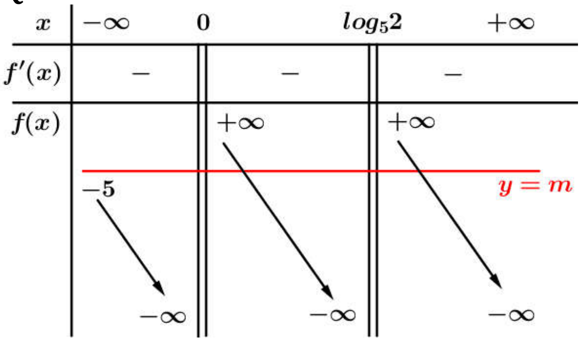
Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình tương đương với: $m = \frac{4}{5^x-1} + \frac{2}{5^x-2} - e^x$, điều kiện ban đầu: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \log_5 2 \end{cases}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{5^x-1} + \frac{2}{5^x-2} - e^x$ trên $R \setminus \{0; \log_5 2\}$

Ta có $f'(x) = \frac{-4.5^x \ln 5}{(5^x-1)^2} + \frac{-2.5^x \ln 5}{(5^x-2)^2} - e^x < 0$, với mọi $x \in R \setminus \{0; \log_5 2\}$ khi đó ta suy ra hàm số $f(x)$ luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; \log_5 2), (\log_5 2; +\infty)$.

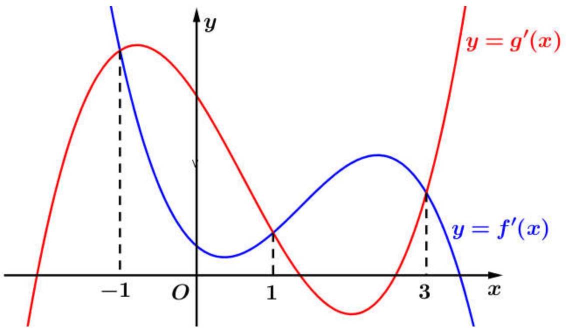
Với $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{5^x-1} + \frac{2}{5^x-2} - e^x\right) = \frac{4}{-1} + \frac{2}{-2} - 0 = -5$, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



Để phương trình có hai nghiệm phân biệt tức (*) có 2 nghiệm phân biệt, thì ta suy ra $m \geq -5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}^-$ nên suy ra $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1\}$ tức có 5 giá trị m nguyên thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Câu 49. Cho hai hàm số bậc bốn $f(x), g(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ như hình vẽ.



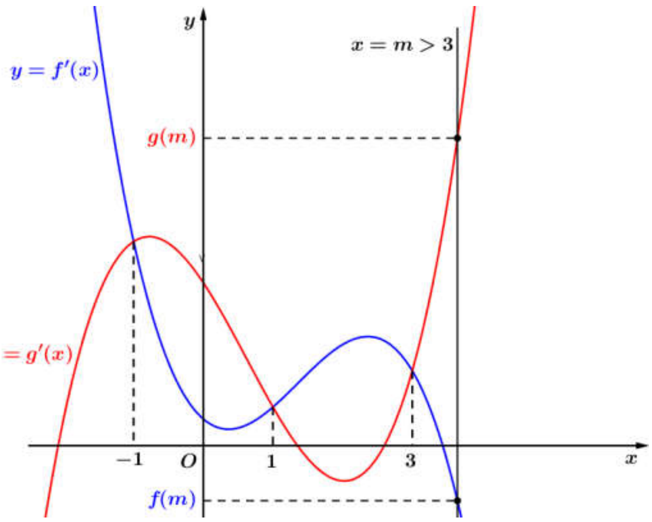
Số giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - g(x) = m$ có một nghiệm duy nhất trên $[-1;3]$ là

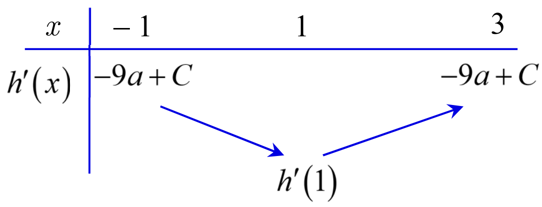
A. Vô số **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, suy ra $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-3)$

Kéo theo ta có được $h(x) = m\left(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x\right) + C$





Giả sử vẽ một đường thẳng $x = m > 3$ cắt hai đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$, khi đó ta nhận thấy $|g'(m)| > |f'(m)|$ nên suy ra $h'(x) < 0$ trên $\mathbb{R}$, khi đó ta có bảng biến thiên $h'(x)$ trên $[-1;3]$ như hình bên.

Như vậy ta kết luận chỉ có 1 giá trị m thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x \le 2023$ và $3\left(9^y + 2y\right) \le x + \log_3 (x+1)^3 - 2$?

A. 3870 **B.** 4046. **C.** 2023. **D.** 3780.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $3\left(9^y + 2y\right) \le x + \log_3 (x+1)^3 - 2$

$\Leftrightarrow 3^{2y+1} + 3(2y+1) \le x + 1 + 3\log_3 (x+1) \Leftrightarrow \left(3^{2y+1}\right) + 3\log_3\left(3^{2y+1}\right) \le (x+1) + 3\log_3(x+1)$

Xét hàm số $y = f(t) = 3\log_3 t + t$ có $f'(t) = \dfrac{3}{t\ln 3} + 1 > 0$ trên $(0;+\infty)$ tức $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Từ đó ta suy ra được $x \ge 3^{2y+1} - 1$.

Vì $x \le 2023$ nên suy ra $x \ge 3^{2y+1} - 1 \Leftrightarrow y \le \dfrac{\log_3(x+1)+1}{2} \le \dfrac{\log_3(2024)+1}{2} \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}^+} y \in \{1;2\}$

Với $y = 2$ ta có: $2023 \ge x \ge 242$ tức có $2023 - 242 + 1 = 1782$ giá trị x nguyên.

Với $y = 1$ ta có: $2023 \ge x \ge 26$ tức có $2023 - 26 + 1 = 1998$ giá trị x nguyên.

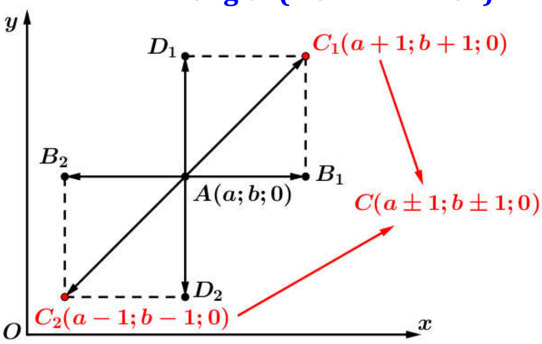
Suy ra có tất cả $1998 + 1782 = 3780$ giá trị x nguyên tức có 3780 bộ $(x;y)$ thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ CHUYÊN KHTN LẦN 1

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;1;1)$ và $N(-1;0;0)$. Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1, có các cạnh song song với các trục tọa độ và các mặt phẳng $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ lần lượt có phương trình là $z = 0; z = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + C'N$ bằng

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải (from Mr. Triển)



Đầu tiên ta có $A \in (ABCD): z = 0$ tức $A \in (Oxy)$ nên gọi tọa độ $A(a;b;0)$.

Khi đó sẽ tồn tại hai điểm C có tọa độ là $C(a\pm1;b\pm1;0)$. Mà C là hình chiếu của C' lên mặt phẳng $(ABCD)$ với $C' \in (A'B'C'D'): z = 1$ ($ABCD$ là hình vuông) nên suy ra tọa độ $C'(a\pm1;b\pm1;1)$.

Từ đó ta suy ra: $AM + C'N = \sqrt{(2-a)^2 + (1-b)^2 + 1} + \sqrt{(1+a\pm1)^2 + (b\pm1)^2 + 1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Mincopski, suy ra: $AM + C'N \ge \sqrt{(2-a+1+a\pm1)^2 + (1-b+b\pm1)^2 + (1+1)^2}$

$$= \sqrt{(3\pm1)^2 + (1\pm1)^2 + 4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (AM + C'N)_{\min} = \sqrt{(3+1)^2 + (1+1)^2 + 4} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4} \ \ (L) \\ (AM + C'N)_{\min} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2 + 4} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4} = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm bằng $2\sqrt{2}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 45. Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình $z^2+az+b=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+i|=\sqrt{5}$ và $|z_2-5-2i|=2\sqrt{5}$

A. 5 **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2. Từ giả thiết ta suy ra M thuộc đường tròn tâm $A(0;-1)$, bán kính $R_1=\sqrt{5}$ và N thuộc đường tròn tâm $B(2;5)$, bán kính $R_2=2\sqrt{5}$.

Do z_1,z_2 là hai nghiệm phức liên hợp của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có 2 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: M,N đối xứng qua trục Ox tức z_1,z_2 không là hai nghiệm thực.

Suy ra N thuộc đường tròn tâm $A'(0;1)$, bán kính $R_1=\sqrt{5}$ đối xứng với quỹ tích điểm M.

Do $A'B=2\sqrt{6}<3\sqrt{5}=R_1+R_2$ nên suy ra đường tròn tâm B và đường tròn tâm A' giao nhau tức có 2 điểm N thỏa mãn. Suy ra có 2 cặp giá trị $(a;b)$ (1).

Trường hợp 2: M,N nằm trên Ox tức z_1,z_2 là hai nghiệm thực.

Suy ra đường tròn quỹ tích điểm M và đường tròn quỹ tích điểm N cắt Ox tổng cộng 4 điểm tương ứng với 4 cặp nghiệm thực $(z_1;z_2)$. Suy ra có 4 cặp giá trị $(a;b)$ (2).

Vậy từ (1) và (2) ta kết luận có 6 cặp giá trị $(a;b)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án B.**

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x tồn tại đúng 2 số thực y thỏa mãn bất phương trình sau: $\left(\log_2^2 y-3\log_2 y+2\right)\sqrt{3^y-x}=0$

A. 78 **B.** 72. **C.** 79. **D.** 73.

Lời giải

Đầu tiên ta có điều kiện ban đầu là: $y>0; y\ge \log_3 x$ và S là tập giá trị của các số thực y.

Phương trình tương đương với: $\left(\log_2^2 y-3\log_2 y+2\right)\sqrt{3^y-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2^2 y-3\log_2 y+2=0\\ 3^y-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=4\\ y=2\\ y=\log_3 x\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9\\ x=81\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}S=\{2;4\} & (N)\\ S=\{4\} & (L)\end{array}\right.$. Suy ra $x=9$ thỏa mãn. (1)

Trường hợp 2: $\begin{cases}y=\log_3 x<2\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow x<9$, suy ra $\left[\begin{array}{l}y=4\\ y=2\\ y=y_o\in(0;2)\end{array}\right.$ tức $S=\{2;4;y_0\}$ (loại)

Trường hợp 3: $\begin{cases}2<\log_3 x<4\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow 9<x<81$, khi đó suy ra $S=\{4;\log_3 x\}$ (thỏa mãn). (2)

Trường hợp 4: $\begin{cases}\log_3 x>4\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow x>81$, khi đó suy ra $S=\{\log_3 x\}$ (loại).

Trường hợp 5: phương trình $\log_2^2 y-3\log_2 y+2=0$ có sẵn 2 nghiệm $y\in\mathbb{R}$ nên để thỏa đề bài thì phương trình $3^y-x=0$ có nghiệm $(x;y)$ với y nằm ngoài tập xác định điều kiện ban đầu ($y\le 0 \Rightarrow \log_3 x\le 0 \Leftrightarrow x\le 1$), , mà $x\in\mathbb{Z}^+$ nên $x\ge 1$, khi ấy ta thu được $x=1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: $S_y=\{1;9;10;....;80\}$ tức có 73 giá trị nguyên dương y thỏa mãn. **Chọn đáp án D**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x tồn tại $y \in [2;8]$ thỏa mãn phương trình sau:

$$(y-x)\log_2(x+y) = y + x^2 \text{ ?}$$

A. 5 **B.** 8. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Đầu tiên ta có điều kiện $x+y>0$. Khi ấy ta có nhận xét sau:

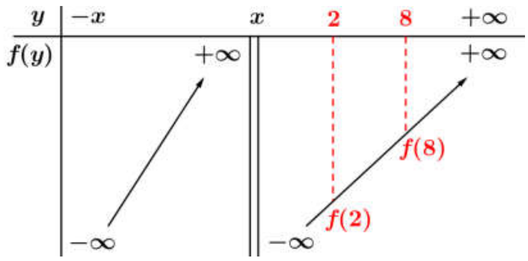
Giả sử $x=y$ thì khi ấy phương trình trở thành: $x^2+x=0 \Leftrightarrow x=\{0;-1\}$ (không có nghiệm nguyên). Khi đó để tồn tại nghiệm thỏa yêu cầu đề bài thì $x \neq y$, phương trình ban đầu trở thành: $\log_2(x+y) - \dfrac{y+x^2}{y-x} = 0$.

Xét hàm số $f(y) = \log_2(x+y) - \dfrac{y+x^2}{y-x}$ trên tập $D_y = (-x;+\infty)\setminus\{x\}$ ta có:

$f'(y) = \dfrac{1}{(x+y)\ln 2} + \dfrac{x^2+x}{(y-x)^2}$; Do $x \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $x^2 \geq -x \Leftrightarrow x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x}{(y-x)^2} > 0$ (*).

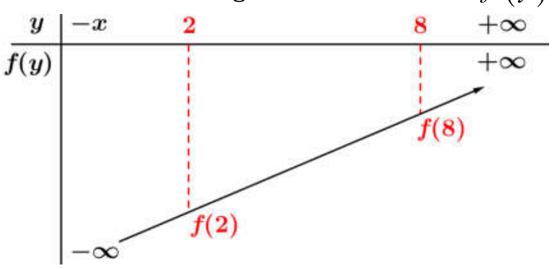
Khi đó ta suy ra $f'(y) > 0,\ \forall y \in D$ tức hàm số $f(y)$ luôn đồng biến trên D_y. Lại có 2 trường hợp sau:

<u>Trường hợp 1:</u> $x \geq 0$ thì khi đó ta có bảng biến thiên hàm số $f(y)$ như sau:



- Nếu $x \leq 2$ thì (*) có nghiệm trên $[2;8] \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+2) - \dfrac{2+x^2}{2-x} \leq 0 \\ \log_2(x+8) - \dfrac{8+x^2}{8-x} \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x \in \{0;1;2\}$
- Nếu $x > 8$ thì bất phương trình (2) có tập nghiệm $S = \varnothing$.
- Nếu $2 < x \leq 8$ thì bất phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 3$ (dò CASIO) (3).

<u>Trường hợp 2:</u> $x < 0$ (tức $-x > x$) thì khi đó ta có bảng biến thiên hàm số $f(y)$ như sau:



- Nếu $-x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -2$ thì bất phương trình (2) có tập nghiệm $S = \{-2;-1\}$ (4).
- Nếu $2 < -x \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x < -2$ thì ta suy ra $f(8) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{-4;-3\}$ (5).
- Nếu $-x > 8 \Leftrightarrow x < -8$ (loại).

Qua 2 trường hợp, từ (3), (4) và (5) suy ra $x \in \{-4;-3;...;2;3\}$ tức có tất cả 8 giá trị nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án B.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=0; f'(0)=1$ và $f''(x)=f(x)+(3x+4)e^{2x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. e^2 **B.** $2e^4$. **C.** $2e^2$. **D.** e^4.

Lời giải

Đầu tiên ta có $f''(x)=f(x)+(3x+4)e^{2x}\Leftrightarrow e^x f''(x)=e^x f(x)+(3x+4)e^{3x}$

$\Leftrightarrow e^x f''(x)-e^x f'(x)+e^x f'(x)-e^x f(x)=(3x+4)e^{3x}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{e^x f''(x)-e^x f'(x)}{e^{2x}}\right)+\left(\frac{e^x f'(x)-e^x f(x)}{e^{2x}}\right)=(3x+4)e^x\Leftrightarrow\left(\frac{f'(x)}{e^x}\right)'+\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=(3x+4)e^x$$

Suy ra: $\dfrac{f'(x)}{e^x}+\dfrac{f(x)}{e^x}=\int\left((3x+4)e^x\right)dx=3(x-1)e^x+4e^x+C\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)+f(x)}{e^x}=(3x+1)e^x+C$

Mà $f(0)=0; f'(0)=1$ nên suy ra $C=0$ tức $\dfrac{f'(x)+f(x)}{e^x}=(3x+1)e^x\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=(3x+1)e^{3x}$

Suy ra: $\left(e^x f(x)\right)'=(3x+7)e^{3x}\Leftrightarrow e^x f(x)=\int\left((3x+1)e^{3x}\right)dx=xe^{3x}+C'\Leftrightarrow e^x f(x)=xe^{3x}+C'$

Mà $f(0)=0$ nên suy ra $C=0$ tức $e^x f(x)=xe^{3x}\Leftrightarrow f(x)=xe^{2x}$. Vậy $f(1)=e^2$. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ SỞ HÒA BÌNH

Câu 41. Cho $x>0; y>1$ thỏa mãn $\dfrac{1}{2}y^2.\log_2\left(\dfrac{xy-x}{2y}\right)=-2(y-1)^2+\dfrac{8y^2}{x^2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}$ có dạng $e^{\frac{m}{n}}$ (trong đó m,n là các số nguyên dương, $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị $m+n$ bằng

A. 12 **B.** 21. **C.** 22. **D.** 13.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình tương đương với: $\dfrac{1}{2}y^2.\log_2\left(\dfrac{xy-x}{2y}\right)=-2(y-1)^2+\dfrac{8y^2}{x^2}$, với $\dfrac{xy-x}{2y}>0$.

$$\Leftrightarrow y^2\left[\log_2\frac{x(y-1)}{y}-1\right]=-4(y-1)^2+\frac{16y^2}{x^2}\Leftrightarrow x^2\log_2\frac{x(y-1)}{y}-x^2=-4\frac{(y-1)^2x^2}{y^2}+16$$

$$\Leftrightarrow x^2\log_2\frac{x(y-1)}{y}+\left(\frac{2x(y-1)}{y}\right)^2=x^2+16\Leftrightarrow x^2\log_2\left(\frac{x(y-1)}{y}\right)+\left(\frac{2x(y-1)}{y}\right)^2=x^2\log_2(2)+(2.2)^2$$

Khi đó phương trình ban đầu trở thành: $x^2\log_2 t+(2t)^2=x^2\log_2(2)+(2.2)^2$ với $t=\dfrac{x(y-1)}{y}$. (1)

Nếu $t\ge 2$ thì $VT(1)>VP(1)$, và nếu $t<2$ thì $VT(1)<VP(1)$, khi đó dấu bằng xảy ra khi $t=2$ tức $x(y-1)=2y$.

Đặt $(a;b)=\left(\dfrac{x}{2};y\right)$ thì khi đó $a+b=ab$. (đặt ẩn phụ nhằm xuất hiện bổ đề quen thuộc)

Suy ra: $P=\sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}=e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{1+2y}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}=e^{\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{1+2y}+\frac{y^2}{1+x}}\Leftrightarrow\ln P=\dfrac{a^2}{1+2b}+\dfrac{b^2}{1+2a}$.

Theo bất đẳng thức cộng mẫu, ta có: $\dfrac{a^2}{1+2b}+\dfrac{b^2}{1+2a}\ge\dfrac{(a+b)^2}{1+2b+1+2a}=\dfrac{(a+b)^2}{2(a+b)+2}$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Đặt $t = a + b \geq 4$ thì khi đó $\ln P \geq \dfrac{t^2}{2t+2}$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{2t+2}$ trên $[4;+\infty)$

Do $f(t)$ đồng biến trên $[4;+\infty)$ nên ta suy ra $(\ln P)_{\min} = \min\limits_{[4;+\infty)} f(t) = f(4) = \dfrac{8}{5}$ tức $P_{\min} = e^{\frac{8}{5}}$.

Vậy $m + n = 13$. **Chọn đáp án D.**

Câu 47. Cho phương trình $z^2 + az + b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm z_1, z_2 không là nghiệm thực, thỏa mãn hệ thức $i.|z_1| = z_2 + i - 3$. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. 10 **B.** 37. **C.** 13. **D.** 19.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình $z^2 + az + b = 0$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm z_1, z_2 nên suy ra $|z_1| = |z_2|$. Khi đó:

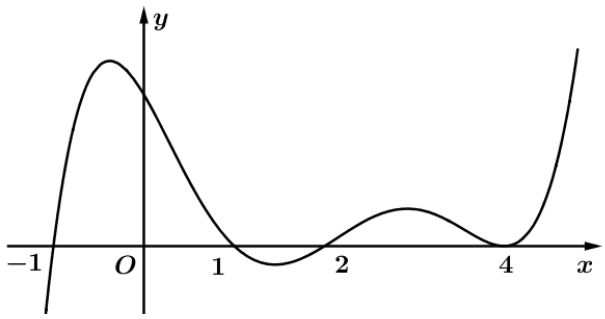
$i.|z_1| = z_2 + i - 3 \Leftrightarrow z_2 = 3 + (|z_2| - 1)i \Leftrightarrow |z_2| = |3 + (|z_2| - 1)i| \Leftrightarrow |z_2|^2 = 9 + (|z_2| - 1)^2 \Leftrightarrow |z_2| = 5$.

Thế $|z_1| = |z_2| = 5$ lại vào phương trình ban đầu, khi đó: $5i = z_2 + i - 3 \Leftrightarrow z_2 = 3 + 4i$ và $z_1 = 3 - 4i$.

Theo hệ thức Vi-ét đảo, $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = 6 \\ P = z_1 z_2 = 25 \end{cases}$ tức z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 6z + 25 = 0$.

Vậy suy ra $(a;b) = (-6;25)$ tức ta có được $2a + b = 13$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f\left(|x|^3 - 3|x| + m + 2023\right) + 2023m$ có đúng 11 điểm cực trị ?

A. 5 **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Đầu tiên ta có hàm số $y = f\left(|x|^3 - 3|x| + m + 2023\right) + 2023m$ có đúng 11 điểm cực trị.

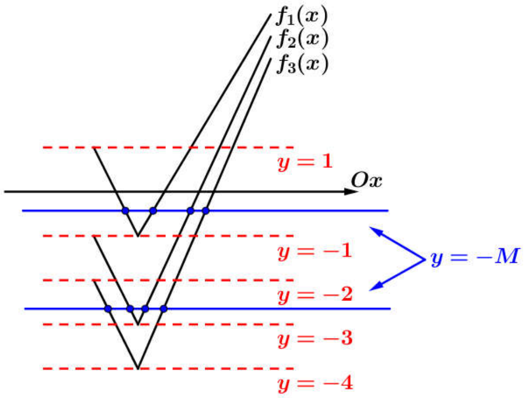
Do số điểm cực trị của hàm $f(|x|)$ = 2 lần số điểm cực trị dương của hàm $f(x)$ cộng 1, nên ta suy ra được để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì hàm số $y = h(x) = f\left(x^3 - 3x + m + 2023\right) + 2023m$ phải có 5 điểm cực trị dương.

Suy ra phương trình $h'(x) = 0$ phải có 5 nghiệm bội lẻ dương.

Khi đó ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2 - 1) f'(x^3 - 3x + M) = 0 \\ M = m + 2023 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1; \\ x^3 - 3x + M = -1; \\ x^3 - 3x + M = 1; \\ x^3 - 3x + M = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x^3 - 3x + 1 = -M = f_1(x); \\ x^3 - 3x - 1 = -M = f_2(x); \\ x^3 - 3x - 2 = -M = f_3(x); \end{array}\right.$$

Khi đó ta có hình vẽ kết hợp giữa ba hàm liệt kê trên như sau trên khoảng $(0;+\infty)$:



Từ bảng biến thiên trên ta suy ra đường thẳng $y=-M$ phải cắt 3 đồ thị $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ tổng cộng 4 nghiệm nguyên dương phân biệt, tức ta có: $-M\in(-3;-2)\cup[0;1)\Leftrightarrow M\in(-1;0]\cup(2;3)\xrightarrow{M\in\mathbb{Z}}M=0$

Vậy suy ra $m=-2023$ tức có duy nhất 1 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

ĐỀ THI THỬ SỞ HÀ TĨNH

Câu 41. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $4+3^{2x^2-y+2}=\left(4+9^{2x^2-y}\right).7^{y-2x^2+2}$. Khi biểu thức $P=\dfrac{x+y+10}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $x+y$ bằng

A. $1+8\sqrt{2}$ **B.** 9. **C.** 8. **D.** $1+9\sqrt{2}$.

Lời giải

Đầu tiên phương trình tương đương với: $4+3^{2x^2-y+2}=\left(4+9^{2x^2-y}\right).7^{y-2x^2+2}\Leftrightarrow 4+9.3^{2x^2-y}=\left(4+9^{2x^2-y}\right).7^{y-2x^2+2}$

Đặt $t=2x^2-y$ thì phương trình trở thành: $4\left(\dfrac{1}{7}\right)^{t+2}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{t+2}=4\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{2t}$.

Xét hàm số $y=f(u)=4\left(\dfrac{1}{7}\right)^{u}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{u}$ có $f'(u)=4\left(\dfrac{1}{7}\right)^{u}\ln\dfrac{1}{7}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{u}\ln\dfrac{3}{7}>0,\ \forall u\in\mathbb{R}$

Khi đó suy ra hàm số $f(u)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ tức ta có được $t+2=2t\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow 2x^2-y=2$

Khi đó suy ra $y=2\left(x^2-1\right)$, với $y>0$ thì ta có $x^2-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Từ đó ta có được: $P=\dfrac{x+y+10}{x}=\dfrac{x+2x^2-2+10}{x}=1+2x+\dfrac{8}{x}\ge 1+2\sqrt{2x.\dfrac{8}{x}}=9$

Dấu bằng xảy ra khi $2x=\dfrac{8}{x}\Leftrightarrow x=2$ và $y=6$ tức $x+y=2+6=8$. **Chọn đáp án D.**

Câu 42. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^4+2(m+2)z^2+3m+2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho phương trình đã cho có bốn nghiệm và 4 điểm A,B,C,D biểu diễn 4 nghiệm đó trên mặt phẳng phức tạo thành một tứ giác có diện tích bằng 4 ?

A. 2 **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình sau: $\left(z^2\right)^2+2(m+2)z^2+3m+2=0$ (1).

Đặt $t=z^2$ thì phương trình trở thành: $t^2+2(m+2)t+3m+2=0$ (2)

Xét $\Delta'_{(1)} = (m+2)^2 - (3m+2) = m^2 + m + 2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ (luôn đúng) nên suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm $t_1, t_2 \neq 0$, theo Viét ta có được: $\begin{cases} S = t_1 + t_2 = -2(m+2) \\ P = t_1 t_2 = 3m + 2 \end{cases}$.

Khi đó ta có các trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $0 < t_1 < t_2$ thì (1) có 4 nghiệm thực phân biệt tức 4 điểm $A, B, C, D \in Ox$ (loại)

Trường hợp 2: $t_1 < t_2 < 0$ thì (1) có 4 nghiệm phức phân biệt tức 4 điểm $A, B, C, D \in Oy$ (loại)

Trường hợp 3: $t_1 < 0 < t_2$, giả sử với $t_1 = -b; t_2 = a \Rightarrow -b < 0 < a \ (a, b > 0)$ thì ta suy ra (1) có 2 nghiệm thực và 2 nghiệm phức, tức ta có hai điểm thuộc trục hoành và hai điểm còn lại thuộc trục tung tạo thành hình thoi.

Suy ra tọa độ của bốn điểm lần lượt là $A\left(\sqrt{t_1};0\right), B\left(-\sqrt{t_1};0\right), C\left(0;\sqrt{-t_2}\right), D\left(0;-\sqrt{-t_2}\right)$

Với A, B đối xứng qua Ox ứng với $t_1 > 0$ thì thu được đường chéo thứ nhất có độ dài $AB = 2\sqrt{t_1}$.

Với C, D đối xứng qua Oy ứng với $t_2 < 0$ thì thu được đường chéo thứ hai có độ dài $CD = 2\sqrt{-t_2}$.

Mà diện tích hình thoi bằng 4 nên suy ra được phương trình sau: $S = \frac{1}{2} AB.CD = 4 \Leftrightarrow AB.CD = 8$

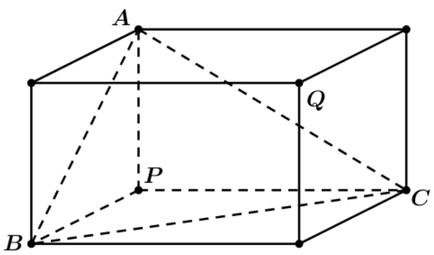
Suy ra: $4\sqrt{t_1(-t_2)} = 8 \Leftrightarrow t_1(-t_2) = 4 \Leftrightarrow 3m + 2 = -4 \Leftrightarrow m = -2$ tức có 1 giá trị m thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 5$ và điểm $P(2;4;5)$ nằm bên trong mặt cầu. Qua P dựng ba dây cung AA', BB', CC' của mặt cầu (S) đôi một vuông góc với nhau. Dựng hình hộp chữ nhật có cạnh là PA, PB, PC. Gọi PQ là đường chéo của hình hộp chữ nhật đó. Biết rằng Q luôn chạy trên một mặt cầu cố định. Bán kính của mặt cầu đó bằng

A. $\sqrt{61}$ **B.** $\frac{\sqrt{219}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{219}}{2}$. **D.** $\sqrt{57}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có hình vẽ như sau:



Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 5$. Khi đó ta suy ra $IP = 3$ và $IA = IB = IC = R = 5$.

Ta cần xác định quỹ tích điểm Q theo giả thiết đề cho, từ tính chất hình hộp ta có:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IQ} - \overrightarrow{IP} = \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IP}\right) + \left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IP}\right) + \left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IP}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{IQ} + 2\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ (1)

Bình phương hai vế cho đẳng thức (1), suy ra $\left(\overrightarrow{IQ} + 2\overrightarrow{IP}\right)^2 = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$\Leftrightarrow IQ^2 + 4IP^2 + 4\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \left(IA^2 + IB^2 + IC^2\right) + 2\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}\right)$

Với $IA = IB = IC = 5$ và tính chất $\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OY} = \frac{OX^2 + OY^2 - XY^2}{2}$, ta suy ra:

$$IQ^2 + 4IP^2 + 4\left(\frac{IP^2 + IQ^2 - PQ^2}{2}\right) = 3R^2 + 2\left(\frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2} + \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2} + \frac{IC^2 + IA^2 - CA^2}{2}\right)$$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

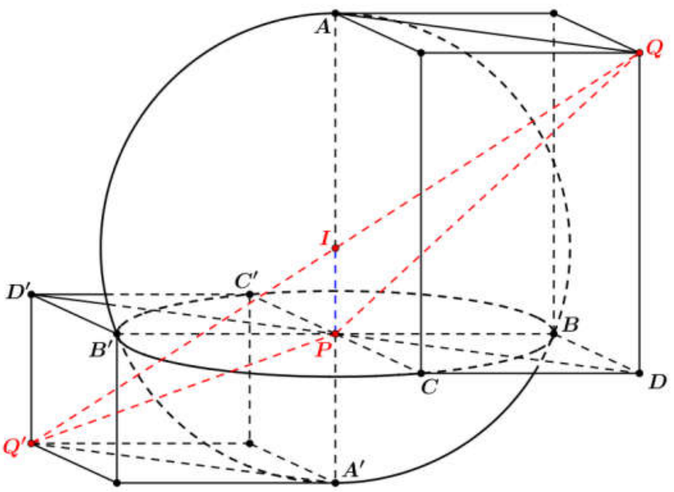
$\Leftrightarrow 3IQ^2+6IP^2-2PQ^2=9R^2-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)\Leftrightarrow IQ^2+2IP^2=3R^2+\dfrac{2PQ^2-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)}{3}$

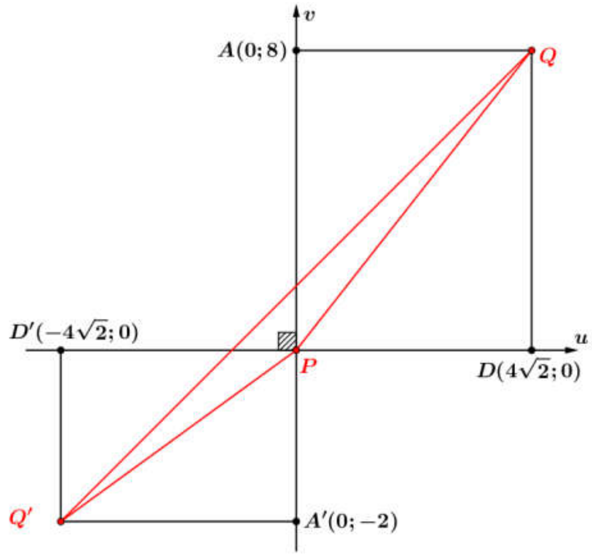
Mà theo tính chất hình hộp chữ nhật thì $\begin{cases}AB^2+BC^2+CA^2=2\left(PA^2+PB^2+PC^2\right)\\PQ^2=PA^2+PB^2+PC^2\end{cases}\Rightarrow AB^2+BC^2+CA^2=2PQ^2$

nên khi đó ta suy ra: $IQ^2+2IP^2=3R^2+\dfrac{2PQ^2-2PQ^2}{3}\Leftrightarrow IQ^2+2IP^2=3R^2\Rightarrow IQ=\sqrt{3R^2-2IP^2}=\sqrt{57}$

Vậy Q luôn chạy trên một mặt cầu cố định có bán kính bằng $\sqrt{57}$. **Chọn đáp án D.**

Cách 2: (Để ý giả thiết cho ba dây cung AA',BB',CC' của mặt cầu (S) đôi một vuông góc với nhau, tức ta có thể xét hình hộp chữ nhật tạo bởi ba cạnh PA',PB',PC' nhận PQ' làm đường chéo), khi đó ta có hình vẽ như sau:





Đầu tiên ta để ý không mất tính tổng quát (*), ta giả sử dây cung AA' qua I tức AA' là đường kính mặt cầu (S), khi đó ta suy ra $AA'=10$ tức $\overrightarrow{PA}=\dfrac{8}{3}\overrightarrow{PI}$, từ đó giải ra tọa độ $A\left(\dfrac{-2}{3};\dfrac{-4}{3};\dfrac{-1}{3}\right)$. Khi ấy P là tâm đường tròn (C) thiết diện của (S) có bán kính bằng $r=\sqrt{{R_{(S)}}^2-IP^2}=4$, kéo theo đó ta có được $PB=PC=PB'=PC'=4$.

Suy ra $PQ=\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=4\sqrt{6};PQ'=\sqrt{PA'^2+PB'^2+PC'^2}=6$.

Áp mặt phẳng chứa các đường PQ,PQ',AA' vào hệ trục Ouv với P là gốc tọa độ, khi đó ta có được:

$\begin{cases}(PQ):v=a_1u\\(PQ'):v=a_2u\end{cases}$, với $\begin{cases}Q\left(4\sqrt{2};8\right)\in(PQ)\\Q'\left(-4\sqrt{2};-2\right)\in(PQ')\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(PQ):v=u\sqrt{2}\\(PQ'):v=\dfrac{u}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(PQ):u\sqrt{2}-v=0\\(PQ'):u-2\sqrt{2}v=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}=\left(\sqrt{2};-1\right)\\\vec{b}=\left(1;-2\sqrt{2}\right)\end{cases}$

Suy ra $\cos\left(\widehat{(PQ);(PQ')}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, mà do $\widehat{Q'PQ}$ tù nên suy ra $\cos\widehat{Q'PQ}=-\cos\left(\widehat{(PQ);(PQ')}\right)=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Kéo theo ta có được: $QQ'=\sqrt{PQ^2+PQ'^2-2PQ.PQ'\cos\widehat{Q'PQ}}=\sqrt{96+36-2.4\sqrt{6}.6.\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)}=2\sqrt{57}$

Mà I là trung điểm QQ' (từ (*)) nên suy ra cả hai điểm Q,Q' luôn di động trên mặt cầu có tâm chính là tâm I, bán kính bằng $r=\dfrac{QQ'}{2}=\sqrt{57}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN 1

Câu 48. Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 và thỏa mãn

$$\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\left(\frac{2y-x+3}{x}\right)$$

A. 3 **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình tương đương với: $\left(xy^2+x-2y-1\right)\log y=\log\left(\frac{2y-x+3}{x}\right)$ (1)

Điều kiện ban đầu: $y>1,x>0,2y-x+3>0$, khi đó ta có:

$(1)\Leftrightarrow\left(xy^2+x-2y-3\right)\log y=\log\left(\frac{2y-x+3}{x}\right)-2\log y\Leftrightarrow\left(xy^2+x-2y-3\right)\log y=\log\left(\frac{2y-x+3}{xy^2}\right)$

Tiếp đến ta đặt $\begin{cases}u=xy^2\\ v=2y-x+3\end{cases}$ với $u>0,v>0$, khi đó phương trình trở thành: $(u-v)\log y=\log\frac{v}{u}$ (2)

- Nếu $u>v$ thì $\begin{cases}VP_{(2)}>0\\ VT_{(2)}<0\end{cases}$ (vô nghiệm) - Nếu $u<v$ thì $\begin{cases}VP_{(2)}<0\\ VT_{(2)}>0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Như vậy để phương trình (2) có nghiệm thì $u=v\Leftrightarrow xy^2=2y-x+3\Leftrightarrow x=\frac{2y+3}{y^2+1}$.

Đến đây ta xét hàm số $f(y)=\frac{2y+3}{y^2+1}$ trên $(1;+\infty)$ thì $f'(y)<0$ trên $(1;+\infty)$ tức $f(y)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$

Khi đó với $y:1\to+\infty$ thì $f(y):\frac{5}{2}\to 0$ tức ta suy ra $0<f(y)<\frac{5}{2}\Leftrightarrow 0<x<\frac{5}{2}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}^+}x\in\{1;2\}$

Vậy ta kết luận có tất cả 2 số nguyên dương x thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN LẦN 2

Câu 39. Cho $x\ge 0,y\ge 0,x+y>0$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2}+2023^{x-y}.\log_2\frac{x^2+y^2}{x+y}\le 4^{x+y}+2023^{x-y}$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-6x-2y+5$

A. 2 **B.** 12. **C.** $6+2\sqrt{2}$. **D.** $6-4\sqrt{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $2^{x^2+y^2}+2023^{x-y}.\log_2\frac{x^2+y^2}{x+y}-4^{x+y}-2023^{x-y}\le 0$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2}-2^{2x+2y}+2023^{x-y}\left(\log_2\frac{x^2+y^2}{x+y}-1\right)\le 0$ (1). Khi đó ta có đánh giá như sau:

Khi $x^2+y^2>2x+2y$ thì $VT(1)>0$, nên suy ra để thỏa (1) thì $x^2+y^2\le 2x+2y\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ (2).

Gọi $M(x,y)$ là điểm thỏa (2), khi đó M thuộc hình tròn (C_1) tâm $I(1;1)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Khi đó: $P=x^2+y^2-6x-2y+5\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2=P+5$, gọi đây là đường tròn (C_2) tâm $J(3;1)$, bán kính $R_2=\sqrt{P+5}$, gọi A,B lần lượt là giao điểm của đường thẳng IJ với (C_1), ta có đánh giá sau:

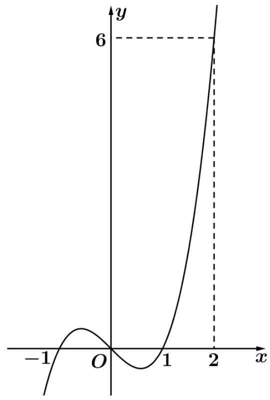
$JA\le R_2\le JB\Leftrightarrow 2-\sqrt{2}\le\sqrt{P+5}\le\sqrt{10}\Leftrightarrow 1-4\sqrt{2}\le P\le 5$

Khi đó tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cần tìm bằng $5+\left(1-4\sqrt{2}\right)=6-4\sqrt{2}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 44. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f\left(0\right)=0$ và hàm số $g\left(x\right)=\frac{1}{16}\left[xf''\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f\left(x\right),y=\frac{f''\left(x\right)-40}{12}$ khi quay quanh trục Ox có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây ?

A. $\left(116;117\right)$ **B.** $\left(117;118\right)$. **C.** $\left(118;119\right)$. **D.** $\left(115;116\right)$.

Lời giải

Do đồ thị $g\left(x\right)$ đối xứng qua gốc tọa độ và có 2 điểm cực trị nên ta có được dạng $g\left(x\right)=mx^3-nx,\left(m,n>0\right)$

Từ đấy ta nhận xét được $f''\left(x\right)$ là hàm số bậc 2 và $f'\left(x\right)$ là hàm số bậc ba đều xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

Khi đó ta gọi $f'\left(x\right)=ax^3-bx\Rightarrow f''\left(x\right)=3ax^2-b$, suy ra $g\left(x\right)=\frac{x\left(3ax^2-b\right)+\left(ax^3-bx\right)}{16}=\frac{2ax^3-bx}{8}$

Tiếp đến ta có: $g\left(2\right)=6;g\left(1\right)=0$ nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}2a-b=0\\16a-2b=48\end{cases}\Leftrightarrow a=4;b=8$

Suy ra: $f'\left(x\right)=4x^3-8x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x\right)=x^4-4x^2+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $f\left(0\right)=0$ nên suy ra $C=0$ tức ta có được $f\left(x\right)=x^4-4x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=x^4-4x^2,y=\frac{f''\left(x\right)-40}{12}=x^2-4$, khi đó ta có phương trình sau: $x^4-4x^2=x^2-4\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow x=\pm1;x=\pm2$. Khi đó ta suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm bằng $V=\int_{-2}^{2}\left[\left(x^4-4x^2\right)^2-\left(x^2-4\right)^2\right]dx\in\left(117;118\right)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 45. Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2+az+b=0$ (với a,b là số thực). Biết rằng hai số phức $w+1+i$ và $2w-1+5i$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tính tổng $a+b$?

A. 9 **B.** 4. **C.** 16. **D.** 1.

Lời giải

Đầu tiên ta nhận xét $w+1+i$ và $2w-1+5i$ phải là hai nghiệm liên hợp nhau, khi đó $w+1+i=\overline{2w-1+5i}$ (1).

Đặt $w=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thì (2) trở thành:

$$\left(x+yi\right)+1+i=2\left(x-yi\right)-1-5i\Leftrightarrow\left(x+1\right)+\left(y+1\right)i=\left(2x-1\right)+\left(-2y-5\right)i\Rightarrow\begin{cases}x+1=2x-1\\y+1=-2y-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$$

Suy ra $w_1=3-i;w_2=3+i$ là các nghiệm của phương trình, suy ra $a=-\left(w_1+w_2\right)=-6;b=w_1w_2=10$

Vậy $a+b=-6+10=4$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(1;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z-18=0$. Khi điểm M thay đổi trên mặt phẳng (P) lấy điểm N thuộc tia ON sao cho $OM.ON=36$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức NA^2+NB^2 ?

A. $20-8\sqrt{3}$ **B.** $8-4\sqrt{3}$. **C.** $16-8\sqrt{3}$. **D.** $24-8\sqrt{3}$.

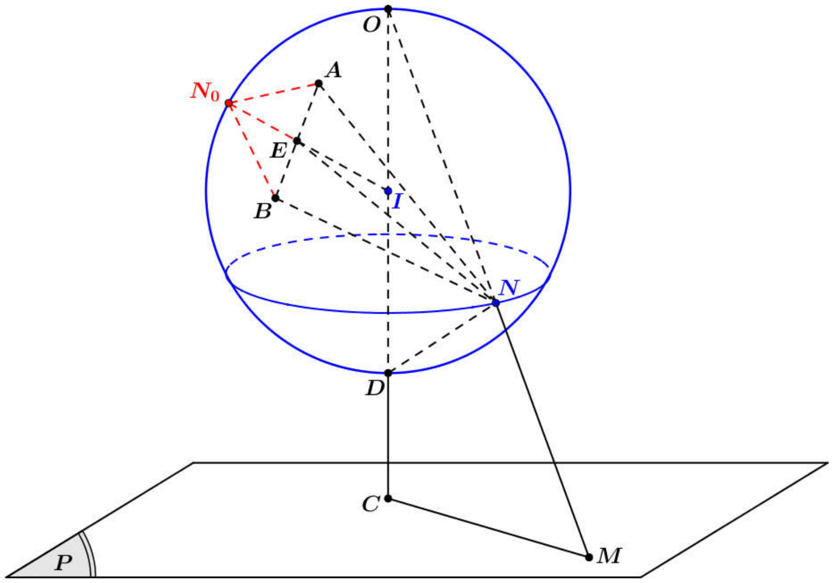
Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta gọi C là hình chiếu của O lên (P), khi đó ta suy ra $OC=d\left(O;(P)\right)=3\sqrt{6}$.

Với N thuộc đoạn thẳng OM, gọi D là điểm thuộc đoạn OC sao cho $\widehat{DNO}=90^\circ$

Khi đó ta suy ra $\Delta OND \backsim \Delta OCM\,(g-g) \Leftrightarrow \dfrac{ON}{OC}=\dfrac{OD}{OM} \Leftrightarrow OM.ON=OC.OD=36 \Rightarrow OD=2\sqrt{6}$.

Từ đó suy ra khi M di động trên (P) thì N chạy trên mặt cầu (S) đường kính OD, với $\widehat{DNO}=90^\circ$.



Tiếp đến nhận thấy A,B nằm trong (S), nên ta gọi E là trung điểm AB có tọa độ $E(2;0;2)$.

Theo công thức đường trung tuyến, ta có: $NE^2=\dfrac{2\left(NA^2+NB^2\right)-AB^2}{4} \Leftrightarrow NA^2+NB^2=2NE^2+\dfrac{AB^2}{2}=2NE^2+4$

Suy ra NA^2+NB^2 min khi NE^2 min

Với tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(1;1;2)$, ta suy ra $\min\left(NE^2\right)=N_0E^2=(IN-IE)^2=\left(IN-R_{(S)}\right)^2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

Vậy ta kết luận $\left(NA^2+NB^2\right)_{\min}=2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+4=20-8\sqrt{3}$. **Chọn đáp án A.**

Cách 2: Giả sử gọi $N(x;y;z)$ sao cho O,M,N thẳng hàng, khi đó $\exists k>0$ sao cho $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{ON} \Rightarrow M(kx;ky;kz)$.

Do $M\in(P)$ nên ta có: $kx+ky+2kz-18=0 \Leftrightarrow x+y+2z=\dfrac{18}{k}$. (1)

Lại có $OM.ON=36$ nên suy ra $k\left(x^2+y^2+z^2\right)=36 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\dfrac{36}{k}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $x^2+y^2+z^2=2(x+y+2z) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6$ tức $N\in(S)$ tâm $I(1;1;2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$. Gọi E là trung điểm AB có tọa độ $E(2;0;2)$. Bước tiếp làm như cách 1

Vậy ta kết luận $\left(NA^2+NB^2\right)_{\min}=2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2+4=20-8\sqrt{3}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $\left|(1+i)z+(1-i)\overline{z}\right|+\left|(1+i)z-(1-i)\overline{z}\right|=4$ và số phức u thỏa mãn $(u-1+3i)\left(i\overline{u}-3+5i\right)$ là số thực. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z-u|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 40 **B.** 65. **C.** 56. **D.** 50.

Lời giải

Đầu tiên ta có $\left|(1+i)z+(1-i)\overline{z}\right|+\left|(1+i)z-(1-i)\overline{z}\right|=4$.

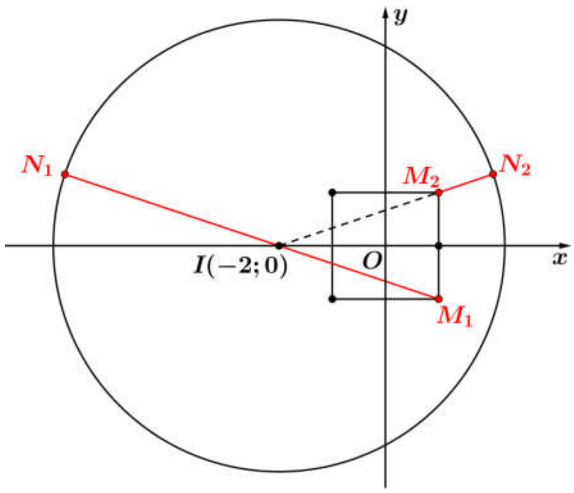
Đặt $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ thì phương trình thành: $|a-b|+|a+b|=2$.

Tiếp đến đặt $u=c+di\ \ (c,d\in\mathbb{R})$ thì do $A=(u-1+3i)\left(i\overline{u}-3+5i\right)$ là số thực nên phần ảo bằng không

Tức ta có: $(u-1+3i)\left(i\overline{u}-3+5i\right)=i|u|^2-(3-5i)u-(3+i)\overline{u}-12-14i$

$=i\left(c^2+d^2\right)-(3-5i)(c+di)-(3+i)(c-di)-12-14i\Rightarrow \operatorname{Im}(A)=c^2+d^2+4c-14=0$

Gọi $M(a;b),N(c;d)$ thì $N\in(C):(x+2)^2+y^2=18$ và M thuộc hình vuông khép kín như hình vẽ sau:



Từ hình vẽ trên, ta suy ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là M_1N_1 và M_2N_2

Vậy ta suy ra $M^2+m^2=M_1N_1^2+M_2N_2^2+\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)^2+\left(3\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2=56$. **Chọn đáp án C.**

Câu 50.1 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-a)(x-b)$ với a,b là hai hằng số và $a<b$, biết rằng $f(b)=0$ và hàm số $g(x)=\left|4x^3+\left(2-3f(a)\right)x^2-2f(a)x+m\right|$ (với m là tham số). Khi đó hàm số $g\left[f(x)\right]$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

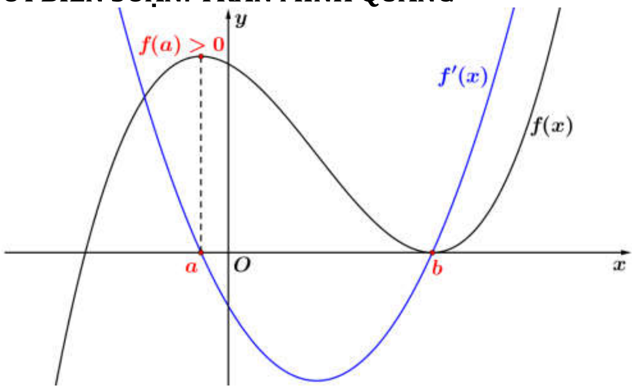
A. 15 **B.** 17. **C.** 11. **D.** 13.

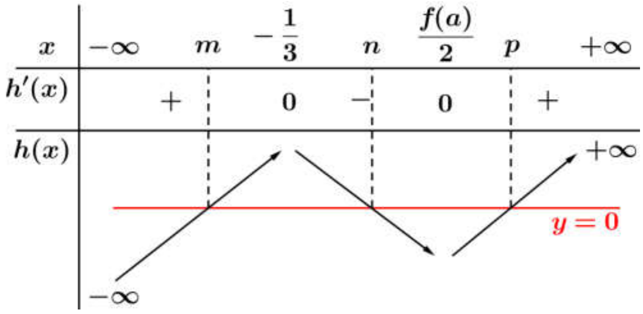
Lời giải

Đầu tiên ta xét ham số $h(x)=4x^3+\left(2-3f(a)\right)x^2-2f(a)x+m$

Ta có $h'(x)=12x^2+2\left(2-3f(a)\right)x-2f(a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1=\dfrac{-1}{3}\\ x=x_2=\dfrac{f(a)}{2}\end{array}\right.$.

Đến đây để xác định dấu của $f(a)$, ta phác thảo hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ từ giả thiết đề cho như sau (hình trái):

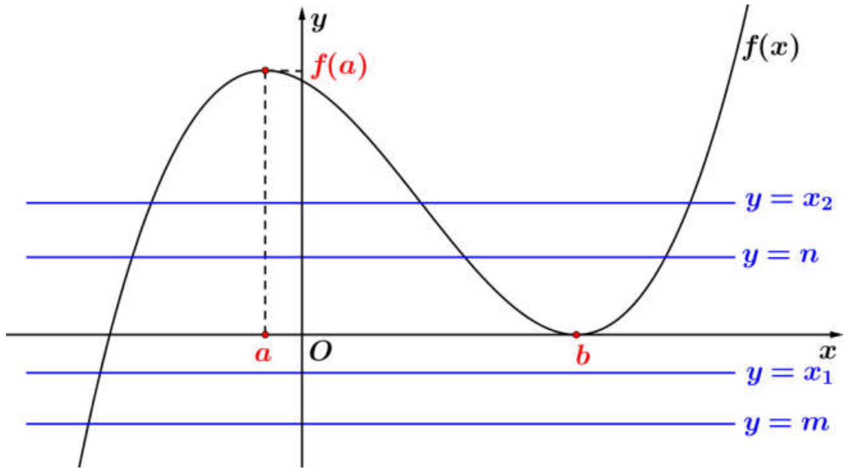




Khi đó suy ra $f(a) > 0$, ta có bảng biến thiên hàm số $g(x)$ như sau: (hình phải)

Do $g(x) = |h(x)|$ có số điểm cực trị bằng số điểm cực trị hàm số $h(x)$ **cộng** với số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$ nên để $g(x)$ có số điểm cực trị tối đa thì $h(x) = 0$ phải có số nghiệm tối đa (3 nghiệm như hình)

Xét hàm số $u(x) = g[f(x)]$ có $u'(x) = f'(x)g'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ g'[f(x)] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1; x = x_2 \\ f(x) = x_1; f(x) = x_2 \ (*) \\ f(x) = m < x_1 \quad (1) \\ f(x) = n \in (x_1; x_2) \quad (2) \\ f(x) = p > x_2 \quad (3) \end{array}\right.$



Từ hình vẽ ta thu được (1) có **1** nghiệm đơn, (2) có **3** nghiệm đơn, để có số điểm cực trị tối đa thì (3) phải có **3** nghiệm đơn, (*) có tổng là **4** nghiệm đơn, cùng với **2** nghiệm $x = x_1; x = x_2$, ta suy ra tổng số điểm cực trị **tối đa** của hàm số $f[g(x)]$ bằng $1+3+3+4+2=13$ điểm cực trị. **Chọn đáp án D.**

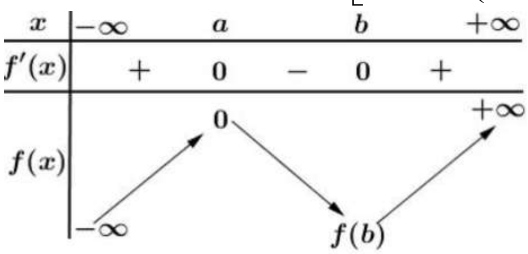
Câu 50.2 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-a)(x-b)$ với a,b là hai hằng số và $a<b$, biết rằng $f(a)=0$ và hàm số $g(x)=\left|\frac{1}{3}f^3(x)-\left(\frac{f(b)}{4}+1\right)f^2(x)+f(b)f(x)+m\right|$ (với m là tham số). Khi đó hàm số $g(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 15 **B.** 17. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Đầu tiên ta xét hàm số $h(x)=\frac{1}{3}f^3(x)-\left(\frac{f(b)}{4}+1\right)f^2(x)+f(b)f(x)+m$

Ta có $h'(x)=f'(x)\left(f^2(x)-\left(\frac{f(b)}{4}+1\right)f(x)+f(b)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\Leftrightarrow x=a;x=b\\ f^2(x)-\left(\frac{f(b)}{4}+1\right)f(x)+f(b)=0\quad(1)\end{array}\right.$.



Đến đây ta có các nhận xét như sau:

Vì $f(b)<f(a)=0$ nên phương trình (1) theo ẩn $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu $\left[\begin{array}{l}f(x)=p>0\\ f(x)=q<0\end{array}\right.$

Với $f(x)=p>0$ thì ta có được $x=x_1>b$

Với $f(x)=q<0$ thì ta có được tối đa 3 nghiệm $x=x_2<a;x=x_3\in(a;b),x=x_4\in(b;x_1)$

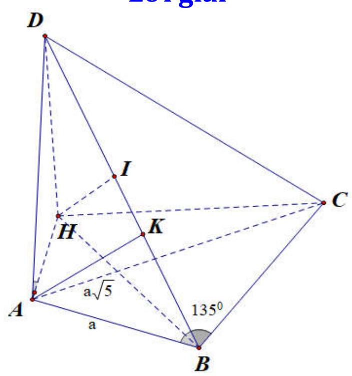
Ta có $g(x)=|h(x)|$ có số điểm cực trị bằng số điểm cực trị hàm số $h(x)$ **cộng** với số nghiệm của phương trình $h(x)=0$ nên với $h(x)$ có tối đa 6 điểm cực trị nên phương trình $h(x)=0$ có tối đa 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy ta suy ra số điểm cực trị tối đa của hàm cần tìm là 13 điểm cực trị. **Chọn đáp án D.**

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, AC = a\sqrt{5}, \widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30 độ. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$ **B.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của D trên (ABC) suy ra $BC \perp BH, AB \perp AH$ và $\widehat{HBA} = 45^0$ do đó HAB là tam giác vuông cân tại A suy ra $AH = AB = a$. Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 - 2AC.BC\cos 135^0 + BC^2} \Leftrightarrow BC = \sqrt{2}a, HB = a\sqrt{2}$.

Tiếp đến ta đặt $DH = x$ ta có $DA = \sqrt{x^2 + a^2}$.

+ $\sin\left((ABD);(BCD)\right) = \dfrac{d\left(A;(BCD)\right)}{d(A;BD)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow d\left(H;(BCD)\right) = \dfrac{1}{2}d(A;BD)(1)$.

$d(A;BD) = AK = \dfrac{AD.AB}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}; d\left(A;(BDC)\right) = HI = \dfrac{HD.HB}{\sqrt{HD^2+HB^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+2a^2}}$

Thay vào (1) $\dfrac{a\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+2a^2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{x^2+a^2} \Leftrightarrow x = a$. Vậy suy ra $V_{ABCD} = \dfrac{a^3}{6}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 47.1 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B\left(3;4;\dfrac{19}{2}\right)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM không phải là tam giác **nhọn** và có diện tích bằng 20. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(5;10)$ **B.** $(3;5)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $S_{\Delta OAM} = \dfrac{1}{2}d(M;OA).OA = 20 \Leftrightarrow d(M;OA) = 4$. (1)

Gọi tọa độ $M(x;y;z) \to \overrightarrow{OM} = (x;y;z)$ sao cho thỏa (1), khi đó ta luôn có $x^2 + y^2 = 16$.

Tiếp đến do tam giác OAM không phải là tam giác nhọn (tức vuông hoặc tù) nên ta suy ra hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} \le 0 \\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO} \le 0 \\ \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AM} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \le 0, z - 10 \ge 0 \\ x^2 + y^2 + z(z-10) \le 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 10z + 16 \le 0 \\ z \le 0, z \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow z \in (-\infty;0] \cup [2;8] \cup [10;+\infty)$.

Suy ra $MB^2=(x-3)^2+(y-4)^2+\left(z-\frac{19}{2}\right)^2=\underbrace{x^2+y^2}_{=16}-6x-8y+z^2-19z+\frac{461}{4}=-6x-8y+z^2-19z+\frac{525}{4}$

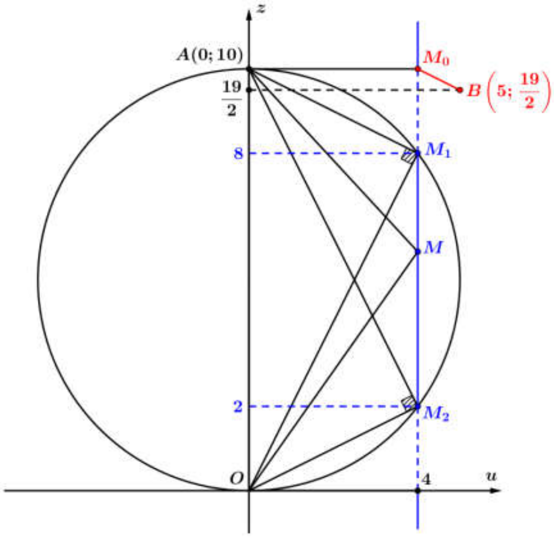
Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta lại có $\left(-(6x+8y)\right)^2\le\left(6^2+8^2\right)\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow -40\le -(6x+8y)\le 40$

Suy ra: $MB^2=-6x-8y+z^2-19z+\frac{525}{4}\ge z^2-19z+\frac{525}{4}-40=z^2-19z+\frac{365}{4}=\left(z-\frac{19}{2}\right)^2+1\ge\frac{5}{4}$ tại $z=10$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MB bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **Chọn đáp án D.**

Cách 2: Thực hiện đo đạc trực tiếp (không hề tà đạo, lại nhanh hơn cách 1)

Chuyển về hệ trục hai chiều là Ouz với $u=\sqrt{x^2+y^2}$, khi đó ta có hình vẽ sau:



Từ hình vẽ trên, ta suy ra giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MB bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **Chọn đáp án D.**

Câu 47.2 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;10)$ và $B\left(3;4;\frac{19}{2}\right)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho tam giác OAM không phải là tam giác **tù** và có diện tích bằng 20. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(5;10)$ **B.** $(3;5)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $S_{\Delta OAM}=\frac{1}{2}d(M;OA).OA=20\Leftrightarrow d(M;OA)=4$. (1)

Gọi tọa độ $M(x;y;z)\to\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$ sao cho thỏa (1), khi đó ta luôn có $x^2+y^2=16$.

Tiếp đến do tam giác OAM không phải là tam giác tù (tức vuông hoặc nhọn) nên ta suy ra hệ bất phương trình sau: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}\ge 0\\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}\ge 0\\ \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AM}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z\ge 0, z-10\le 0\\ x^2+y^2+z(z-10)\ge 0\\ x^2+y^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^2-10z+16\ge 0\\ 0\le z\le 10\end{cases}\Leftrightarrow z\in[0;2]\cup[8;10]$.

Suy ra $MB^2=(x-3)^2+(y-4)^2+\left(z-\frac{19}{2}\right)^2=\underbrace{x^2+y^2}_{=16}-6x-8y+z^2-19z+\frac{461}{4}=-6x-8y+z^2-19z+\frac{525}{4}$

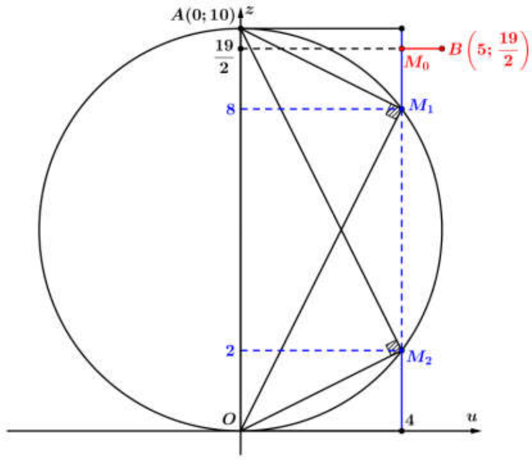
Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta lại có $\left(-(6x+8y)\right)^2\le\left(6^2+8^2\right)\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow -40\le-(6x+8y)\le 40$

Suy ra: $MB^2=-6x-8y+z^2-19z+\frac{525}{4}\ge z^2-19z+\frac{525}{4}-40=z^2-19z+\frac{365}{4}=\left(z-\frac{19}{2}\right)^2+1\ge 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MB bằng $1\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **Chọn đáp án D.**

Cách 2: Thực hiện đo đạc trực tiếp (không hề tà đạo, lại nhanh hơn cách 1)

Chuyển về hệ trục hai chiều là Ouz với $u=\sqrt{x^2+y^2}$, khi đó ta có hình vẽ sau:



Từ hình vẽ trên, ta suy ra giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng MB bằng $1\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho các số phức z,w,u thỏa mãn $|z-4+2i|=|2z+\overline{z}|$, $\frac{w-8-10i}{w-6-10i}$ là số thuần ảo và $|u+1-2i|=|u-2+i|$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|u-z|+|\overline{u}-\overline{w}|$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(0;5]$ **B.** $(5;8)$. **C.** $[8;10)$. **D.** $[10;+\infty)$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi A,N_1,M lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w,u trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Khi đó ta có: $\begin{cases}A(a;b):|z-4+2i|=|2z+\overline{z}|\\ M(c;d):|u+1-2i|=|u-2+i|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\in(P):y=2x^2+2x-5\\ M\in(d):y=x\end{cases}$

Đặt $w=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$, khi đó $e=\frac{w-8-10i}{w-6-10i}=ki\ \ (k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow(w-8-10i)\overline{(w-6-10i)}=mi\ \ (m\in\mathbb{R})$

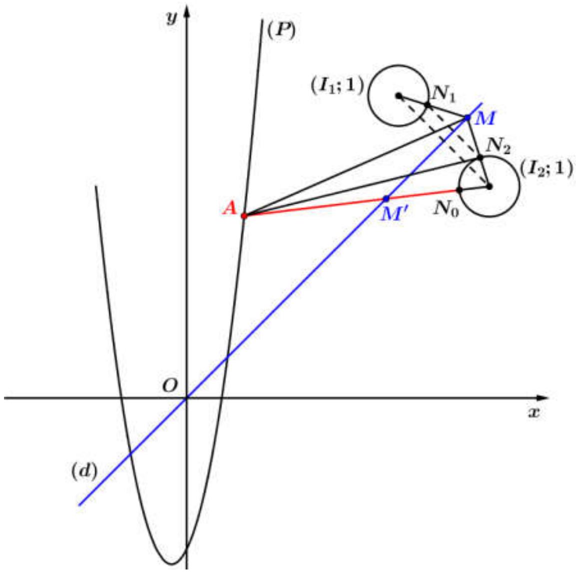
$\Rightarrow(w-8-10i)(\overline{w}-6+10i)=|w|^2+(-6+10i)w-(8+10i)\overline{w}+148-20i$ (2)

Thế $w=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ vào (2) kết hợp biến đổi đại số, ta được $\mathrm{Re}(e)=x^2-14x+y^2-20y+148=0$, suy ra $N\in(C):(x-7)^2+(y-10)^2=1$, tức N_1 thuộc đường tròn tâm $I_1(7;10)$, bán kính $R=1$.

Khi đó ta luôn có: $P=|u-z|+|\overline{u-w}|=|u-z|+|u-w|=MA+MN_1\ge MA+MI_1-1$

Gọi I_2 là điểm đối xứng với $I_1(7;10)$ qua (d), khi đó ta suy ra $I_2(10;7)$ tức $N_2\in(I_2;1)$.

Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ, ta dễ dàng suy ra: $P = MA + MI_1 - 1 = MA + MI_2 - 1 = MA + MN_2$

Mặt khác theo bất đẳng thức *đường gấp khúc* ta luôn có: $MA + MN_2 \ge AN_2$ nên $P \ge AN_2 = AI_2 - 1$ khi $N_2 \equiv N_0$ tức $P_{\min}$ khi và chỉ khi AI_2 min. Lúc này ta quy về bài toán đơn giản hơn như sau:

"Cho $A(a;b) \in (P): y = 2x^2 + 2x - 5$ và $I_2(10;7)$, khi ấy tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng AI_2".

Lúc này ta có: $AI_2 = \sqrt{(a-10)^2 + (2a^2 + 2a - 5 - 7)^2} = \sqrt{(a-10)^2 + 4(a^2 + a - 6)^2}$ (Cái hàm mệt mỏi nha).

Chạy TABLE ta suy ra $AI_2 \ge \sqrt{63.85} - 1 \in (5;8)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên dương y để tồn tại số thực $x > 1$ thỏa mãn

$$x\left(2^{xy} + \log_2(xy)\right) = xy^4 + 15xy - 30 + 10y$$

A. 16 **B.** 15. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình sau: $x\left(2^{xy} + \log_2(xy)\right) = xy^4 + 15xy - 30 + 10y$ (*)

$\Leftrightarrow 2^{xy} + \log_2(xy) = y^4 + 15y - \dfrac{30 - 10y}{x} \Leftrightarrow 2^{xy} + \log_2(xy) + \dfrac{30}{x} - \dfrac{10y}{x} = y^4 + 15y$ (1)

Giải thích: ta cô lập vế phải là một hàm theo biến y luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ ($f'(y) = 4y^3 + 15 > 0$)

Tiếp theo ta khảo sát hàm số $g(x) = 2^{xy} + \log_2(xy) + \dfrac{30}{x} - \dfrac{10y}{x}$ trên $(1;+\infty)$

Ta có: $g'(x) = y2^{xy}\ln 2 + \dfrac{1}{x\ln 2} - \dfrac{30}{x^2} + \dfrac{10y}{x^2}$. Thế $y = 3$ vào ta có $g'(3) = 8^{x+1}\ln 2 - \dfrac{1}{x\ln 2} > 64\ln 2 - \dfrac{1}{\ln 2} > 0, \forall x > 1$

Suy ra $\forall y \ge 3$ thì $g'(x) > 0$, kéo theo đó ta có được: $\begin{cases} g(x) > g(1) = 2^y + \log_2(y) - 10y + 30 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$.

Khi ấy để (*)có nghiệm $\forall x > 1$ thì cần có: $2^{xy} + \log_2(xy) + \dfrac{30}{x} - \dfrac{10y}{x} > 2^y + \log_2(y) - 10y + 30$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $2^y + \log_2(y) - 10y + 30 < y^4 + 15y \Leftrightarrow 2^y + \log_2(y) - 25y + 30 - y^4 < 0,\ \forall y \ge 3$ (3)

Cho vế trái (3) bằng không giải ra nghiệm (shift SOLVE) $y \approx 16,01$ (**), khi đó ta có ý tưởng sau:

Giả sử đảo chiều (3), ta có: $2^y + \log_2(y) - 10y + 30 > y^4 + 15y \Leftrightarrow 2^y + \log_2(y) - 25y + 30 - y^4 > 0$ (4).

Tới đây ta sẽ chứng minh bất phương trình (4) luôn đúng với mọi $y \geq 17$.

Xét hàm số $h(y) = 2^y + \log_2(y) - 25y + 30 - y^4$ có $h(16) = -366 < 0; h(17) > 0$ nên suy ra $h(y) < 0, \forall y < 17$ tức $h(y) > 0, \forall y \geq 17$. Suy ra bất phương trình (4) luôn đúng với mọi $y \geq 17$ tức bất phương trình (3) luôn đúng với mọi $3 \leq y \leq 17$.

Do (**) nên ta thử từng giá trị $y: 3 \to 17$ theo thứ tự từ lớn xuống, nhận thấy $y = 17$ không thỏa nên $3 \leq y < 17$

Mà đề cho $y \in \mathbb{Z}^+$ nên ta thử hai giá trị còn lại lần lượt là $y \in \{1; 2\}$, nhận thấy hai giá trị này đều thỏa nên suy ra $1 \leq y < 17$ tức $y \in \{1; 2; ...; 15; 16\}$. Vậy có tất cả 16 giá trị nguyên y thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = (x-3)^2(2x-7)^3(3x-10)^{2023}(x-4)^{2024}$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $h(x) = f\left(\left|-x^4 + 8x^2 + mx\right|\right)$ có số điểm cực tiểu nhiều nhất là $S = (a; b) \setminus \{c\}$. Giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2 + abc$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(1; 100)$ **B.** $(115; 130)$. **C.** $(100; 115)$. **D.** $(130; 2023)$.

Lời giải

Bước 1: Xử lí hàm $f(x)$ (có 2 cách)

Cách 1:

Trường hợp 1: $f(x) = 0$ thì ta thu được các nghiệm bội chẵn lần lượt là $x = 3; x = 4$ (1)

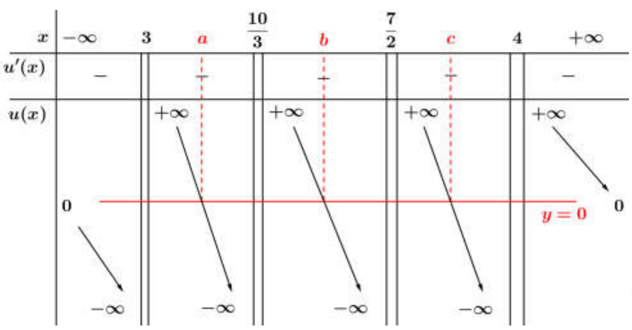
Trường hợp 2: $f(x) \neq 0$, thực hiện biến đổi $\begin{cases} \ln f(x) = 2\ln|x-3| + 3\ln|2x-7| + 2023\ln|3x-10| + 2024\ln|x-4| \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{3; \frac{10}{3}; \frac{7}{2}; 4\right\} \end{cases}$

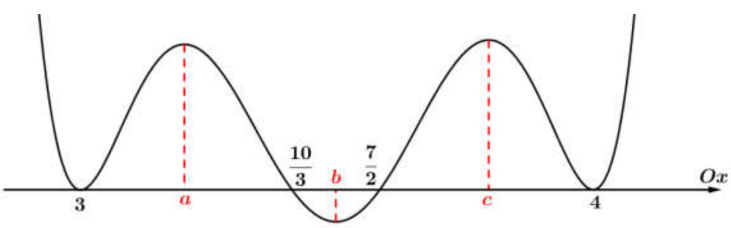
Đạo hàm hai vế ta có: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{2x-7} + \dfrac{6069}{3x-10} + \dfrac{2024}{x-4} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{2x-7} + \dfrac{6069}{3x-10} + \dfrac{2024}{x-4}\right)$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{2x-7} + \dfrac{6069}{3x-10} + \dfrac{2024}{x-4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \quad (L) \\ \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{2x-7} + \dfrac{6069}{3x-10} + \dfrac{2024}{x-4} = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Xét hàm số $u(x) = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{2x-7} + \dfrac{6069}{3x-10} + \dfrac{2024}{x-4}$ có $u'(x) = -\dfrac{2}{(x-3)^2} - \dfrac{12}{(2x-7)^2} - \dfrac{3.6069}{(3x-10)^2} - \dfrac{2024}{(x-4)^2} < 0$

Suy ra $u(x)$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định. Với $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, khi đó ta có BBT như sau (hình trái)





Khi đó (2) có các nghiệm là: $x = a \in \left(3; \frac{10}{3}\right); x = b \in \left(\frac{10}{3}; \frac{7}{2}\right); x = c \in \left(\frac{7}{2}; 4\right)$ (3).

Từ (1) và (3), ta suy ra $f(x)$ có 5 điểm cực trị lần lượt là $3, a, b, c, 4$ (với $3 < a < \frac{10}{3} < b < \frac{7}{2} < c < 4$).

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Cách 2: Nhận diện, xác định hàm $f(x)$ dễ dàng bằng vẽ tay như hình bên phải.

Tiếp đến ta xét hàm số $h(x)=f\left(\left|-x^4+8x^2+mx\right|\right)$ ta có:

$$h'(x)=\frac{\left(-4x^3+16x+m\right)\left(-x^4+8x^2+mx\right)f'\left(\left|-x^4+8x^2+mx\right|\right)}{\left|-x^4+8x^2+mx\right|}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4x^3+16x+m=0\quad(4)\\-x^4+8x^2+mx=0\quad(5)\\f'\left(\left|-x^4+8x^2+mx\right|\right)=0\quad(6)\end{array}\right..$$

Để hàm số $h(x)$ có nhiều cực tiểu nhất thì (4), (5), (6) phải có nhiều nghiệm bội lẻ nhất.

Khi đó (4) tương đương với: $m=4x^3-16x=q(x)\to m\in\left(q\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right);q\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)\right)\Rightarrow m\in\left(\frac{-64}{3\sqrt{3}};\frac{64}{3\sqrt{3}}\right)$ (7).

Giải (5), khi đó phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}x=0\\-x^3+8x+m=0\quad(*)\end{array}\right.(*)\Leftrightarrow m=x^3-8x=r(x)\to m\in\left(r\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right);r\left(\frac{-2\sqrt{6}}{3}\right)\right)\Rightarrow m\in\left(-\frac{32\sqrt{6}}{9};\frac{32\sqrt{6}}{9}\right)\ (8)$$

Từ (7) và (8) ta suy ra $m\in\left(-\frac{32\sqrt{6}}{9};\frac{32\sqrt{6}}{9}\right)\backslash\{0\}$. (9)

Giải (6), khi đó phương trình tương đương với: $\left\{\begin{array}{l}\left|-x^4+8x^2+mx\right|=3;\left|-x^4+8x^2+mx\right|=4\\\left|-x^4+8x^2+mx\right|=a;\left|-x^4+8x^2+mx\right|=b;\left|-x^4+8x^2+mx\right|=c\end{array}\right..$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x^3+8x+m=\pm\frac{3}{x};-x^3+8x+m=\pm\frac{4}{x}\\-x^3+8x+m=\pm\frac{a}{x};-x^3+8x+m=\pm\frac{b}{x};-x^3+8x+m=\pm\frac{c}{x}\end{array}\right..$$

Giả sử ta có hàm số $p(x)=-x^3+8x+m$ ta suy ra để thỏa mãn đề bài thì hàm số $p(x)$ phải luôn cắt các đường cong $-\frac{3}{x};-\frac{4}{x};-\frac{a}{x};-\frac{b}{x};-\frac{c}{x}$ tại 2 điểm phân biệt tại mỗi đường.

<u>Giải thích:</u> Trong 5 hàm tương giao với $p(x)$ lần lượt là $\frac{a}{x},\frac{b}{x},\frac{c}{x},\frac{3}{x},\frac{4}{x}$ thì hàm $\frac{4}{x}$ là hàm bao ngoài cùng 4 hàm còn lại là $\frac{a}{x},\frac{b}{x},\frac{c}{x},\frac{3}{x}$ nên cận trên và dưới của m là hai trường hợp tiếp xúc giữa $\frac{4}{x}$ và hàm $p(x)$

Gọi x_0 là hoành độ của điểm tiếp xúc giữa $p(x)$ và $y=\frac{4}{x}$, khi đó x_0 là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\left\{\begin{array}{l}-x_0^{\ 3}+8x_0+m=\frac{4}{x_0}\\-3x_0^{\ 2}+8=-\frac{4}{x_0^{\ 2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-x_0^{\ 3}+8x+m=\frac{4}{x_0}\\3x_0^{\ 4}-8x_0^{\ 2}-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=x_0^{\ 3}-8x_0+\frac{4}{x_0}\\x_0=\pm\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{7}}{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm6.35$$

Như vậy để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì ta cần có $m\in(-6.35;6.35)$ (10).

Từ (9) và (10) ta suy ra $m\in(-6.35;6.35)\backslash\{0\}$. Vậy $T=a^2-ab+b^2+abc=3(6.35)^2\in(115;150)$.

Chọn đáp án B.

ĐỀ THI THỬ LIÊN TRƯỜNG QUẢNG NAM

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 44. Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f(x)dx = F(4) - G(1) + m$ với $m > 0$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 1$ và $x = 4$. Khi $S = 12$ thì m bằng

A. 6 **B.** 12. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Đầu tiên ta có $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên suy ra $F(x) = G(x) + C$

Ta có: $S = \int_1^4 |F(x) - G(x)|dx = \int_1^4 |C|dx = 3|C| = 12 \Leftrightarrow C = \pm 4$.

Mà $\int_1^4 f(x)dx = F(4) - F(1); F(1) = G(1) + C \Leftrightarrow \int_1^4 f(x)dx = F(4) - G(1) - C = F(4) - G(1) + m; m > 0$

Nên ta suy ra $m = -C = 4$. **Chọn đáp án D.**

Câu 49. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $w = 2z - 5 + i$ sao cho số phức z thỏa mãn $(z - 3 + i)(\overline{z} - 3 - i) = 36$. Xét các số phức $w_1, w_2 \in S$ thỏa mãn $|w_1 - w_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $P = |w_1 - 5i|^2 - |w_2 - 5i|^2$ bằng

A. $4\sqrt{37}$ **B.** $5\sqrt{17}$. **C.** $7\sqrt{13}$. **D.** 20.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $(z - 3 + i)(\overline{z} - 3 - i) = 36 \Leftrightarrow (z - 3 + i)\overline{(z - 3 + i)} = 36 \Leftrightarrow |z - 3 + i|^2 = 36 \Leftrightarrow |2z - 6 + 2i| = 12$.

Do $w = 2z - 5 + i \Leftrightarrow 2z = w + 5 - i$ nên suy ra $|w + 5 - i - 6 + 2i| = 12 \Leftrightarrow |w - 1 + i| = 12$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $w_1, w_2 \in S$ khi đó A, B sẽ thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-1)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$. Với điểm $C(0;5)$ và E là trung điểm AB, ta suy ra:

$$P = |w_1 - 5i|^2 - |w_2 - 5i|^2 = CA^2 - CB^2 = \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{CI}\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}$$

$= 2CI.AB.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{AB}}\right) \le 2CI.AB = 4\sqrt{37}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \int_0^2 (x + u)f(u)du$ có đồ thị (C). Khi đó hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 5$ có diện tích S bằng

A. $S = \frac{8405}{39}$ **B.** $S = \frac{137}{6}$. **C.** $S = \frac{83}{3}$. **D.** $S = \frac{125}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta có: $y = f(x) = x^2 + \int_0^2 (x + u)f(u)du = y = f(x) = x^2 + \int_0^2 xf(u)du + \int_0^2 uf(u)du$

Đặt $(a;b) = \left(\int_0^2 f(u)du; \int_0^2 uf(u)du\right)$ thì $y = f(x) = x^2 + ax + b$.

Với $a = \int_0^2 (u^2 + au + b)du = \frac{8}{3} + 2a + 2b$; $b = \int_0^2 (u^3 + au^2 + bu)du = 4 + \frac{8a}{3} + 2b$.

Từ đây ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3a + 6b = -8 \\ 8a + 3b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b) = \left(-\frac{16}{13}; -\frac{28}{99}\right)$ tức $y = f(x) = x^2 - \frac{16}{13}x - \frac{28}{99}$

Khi đó tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại $x=5$ là: $(d): y=f'(5)(x-5)+f(5) \Rightarrow (d): y=\frac{114}{13}(x-5)+\frac{707}{39}$

Suy ra diện tích S cần tìm là: $S=\int_0^5\left|x^2-\frac{16}{13}x-\frac{28}{99}-\left(\frac{114}{13}(x-5)+\frac{707}{39}\right)\right|dx=\frac{125}{3}$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: (from Mr. Triển)

Đầu tiên ta có: $y=f(x)=x^2+\int_0^2(x+u)f(u)du=y=f(x)=x^2+\int_0^2 xf(u)du+\int_0^2 uf(u)du$

Đặt $(a;b)=\left(\int_0^2 f(u)du;\int_0^2 uf(u)du\right)$ thì $y=f(x)=x^2+ax+b$.

Lại có: tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại $x=5$ là: $(d): y=f'(5)(x-5)+f(5)$

Suy ra diện tích S cần tìm là: $S=\int_0^5\left|f(x)-\left(f'(5)(x-5)+f(5)\right)\right|dx$ với $h(x)=f(x)-\left(f'(5)(x-5)+f(5)\right)$

<u>Nhận xét:</u> $f(x)$ tiếp xúc với (d) tạo nghiệm bội chẵn tức hàm hiệu $h(x)$ sẽ xuất hiện nhị thức $(x-5)^2$.

Khi đó suy ra $f(x)-\left(f'(5)(x-5)+f(5)\right)=k(x-5)^2$. Tiếp tuyến (d) là hàm số bậc nhất, $f(x)$ có hệ số chứa x^2 bằng 1 nên $k=1$. Vậy $S=\int_0^5\left|(x-5)^2\right|dx=\frac{125}{3}$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN LẦN 1

Câu 46. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình sau:

$$\log_2\left(3x^2+2x+3y^2+2y\right)^2+\log_3\left(x^2+y^2\right)^3\le 3\log_3\left[7\left(x^2+y^2\right)+4(x+y)\right]+2\log_2(x+y)$$

A. 7 **B.** 6. <u>**C.**</u> 8. **D.** 9.

Lời giải

Đầu tiên ta có điều kiện ban đầu là: $x+y>0$. Khi đó bất phương trình tương đương với:

$\Leftrightarrow \log_2\left(3\left(x^2+y^2\right)+2(x+y)\right)^2+3\log_3\left(x^2+y^2\right)\le 3\log_3\left[7\left(x^2+y^2\right)+4(x+y)\right]+2\log_2(x+y)$ (1)

Đặt $(u;v)=\left(x^2+y^2;x+y\right)$ thì (1) trở thành: $\Leftrightarrow 2\log_2|3u+2v|+3\log_3 u\le 3\log_3(7u+4v)+2\log_2 v$

$\Leftrightarrow 2\log_2(3u+2v)-2\log_2 v\le 3\log_3(7u+4v)-3\log_3 u \Leftrightarrow 2\log_2\left(3\frac{u}{v}+2\right)\le 3\log_3\left(7+4\frac{v}{u}\right)$ (2)

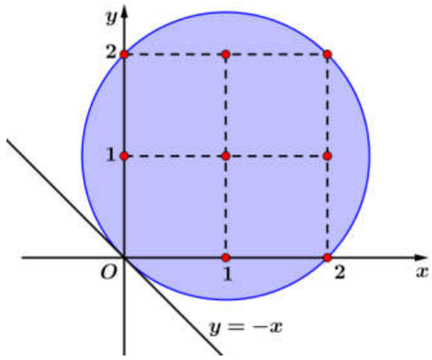
Đặt $t=\frac{u}{v}>0$ thì (2) trở thành $2\log_2(3t+2)-3\log_3\left(7+\frac{4}{t}\right)\le 0$.

Xét hàm số $f(t)=2\log_2(3t+2)-3\log_3\left(7+\frac{4}{t}\right)$ trên $(0;+\infty)$ có

$f'(t)=\frac{6}{(3t+2)\ln 2}\log_2(3t+2)+\frac{12}{t^2\left(7+\frac{4}{t}\right)\ln 3}>0$ tức hàm số $f(t)$ luôn đồng biên trên $(0;+\infty)$.

Mà $f(2)=0$ nên suy ra $f(t)\le f(2)$ tức $t\le 2\Rightarrow \frac{u}{v}\le 2\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x+y}\le 2\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ (hình tròn)

Kết hợp điều kiện ban đầu là $x+y>0$ (nửa mặt phẳng), khi đó ta có hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ trên ta kết luận có 8 cặp $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án C.**

Câu 47. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $S=[a;b]$. Tính $a\sqrt{2}+8b$

A. 2   **B.** 6.   **C.** 5.   **D.** 3.

Lời giải

Đầu tiên ta có $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0 \Leftrightarrow x^4+1-x^2+x\sqrt{2m\left(x^4+1\right)}\ge 0$ (1).

Thực hiện biến đổi: $x^4+1-x^2=x^4+1+2x^2-3x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2=\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right)\left(x^2+x\sqrt{3}+1\right)>0$

Khi đó bất phương trình (1) được đánh giá như sau:

- Với $x\ge 0$ thì (1) thành: $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0, \forall m\ge 0$
- Với $x>0$ thì (1) thành: $x^4+1-x^2+\sqrt{2mx^2\left(x^4+1\right)}\ge 0$

Đặt $\begin{cases}\left(b_1;b_2\right)=\left(x^4+1;x^2\right)\\ b_1\ge 1;b_2\ge 0;b_1-b_2>0\end{cases}$ thì ta nhận thấy $m=0$ (luôn đúng) nên ta chỉ cần xét $m>0$.

Với $m>0$, ta luôn có: $b_1-b_2\ge\sqrt{2mb_1b_2}\Leftrightarrow b_1^2-2b_1b_2+b_2^2\ge 2mb_1b_2\Leftrightarrow\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)^2-2(m+1)\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)+1\ge 0$ (2)

Đặt $t=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{x^4+1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}\ge 2\sqrt{x^2.\dfrac{1}{x^2}}=2$ thì (2) thành: $t^2-2(m+1)t+1\ge 0$.

Xét hàm số $h(t)=t^2-2(m+1)t+1$ trên $[2;+\infty)$, với $\Delta'>0,\forall m\ge 0$ thì $h(t)$ luôn có nghiệm t_1,t_2.

Suy ra: $t^2-2(m+1)t+1\ge 0$,$\forall t\ge 2$ với $t_1<t_2\le 2$. Khi đó để thỏa yêu cầu bài toán, ta cần có:

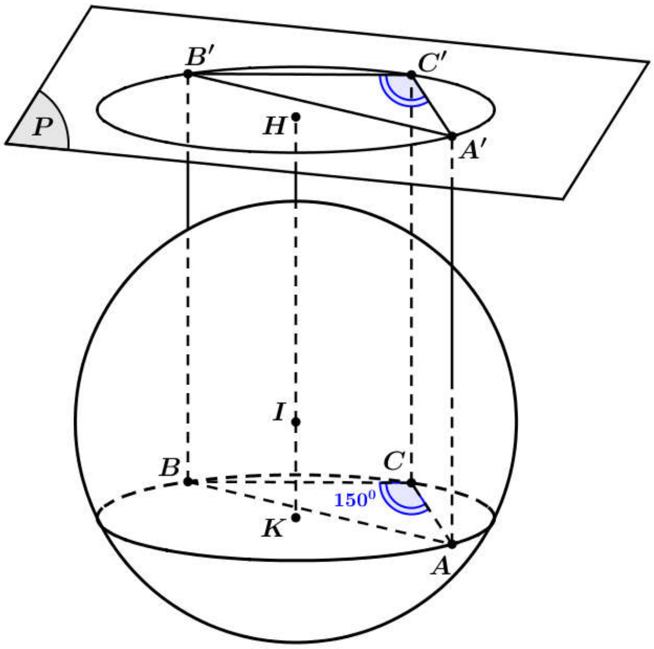
$\begin{cases}h(2)\ge 0\\ \dfrac{t_1+t_2}{2}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h(2)\ge 0\\ m+1<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{1}{4}\\ m<1\end{cases}\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{4}$. Đối chiếu với điều kiện ta suy ra $0\le m\le\dfrac{1}{4}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=4, \widehat{ACB}=150^\circ$. Ba điểm A,B,C thay đổi nhưng luôn thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+8x-6y+4z+4=0$ và ba điểm A',B',C' luôn thuộc mặt phẳng $(P): x+2y+2z+23=0$. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABC'B'$ bằng

A. $\dfrac{40\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}$ **B.** $\dfrac{24}{4-\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{8}{4-\sqrt{3}}$. **D.** $80\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Lời giải



Đầu tiên ta có mặt cầu (S) có tâm $I(-4;3;-2)$ và bán kính $R=5$.

Khoảng cách từ I đến mp (P) là $IH=\dfrac{|-4+6-4+23|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=7$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính là $r=\dfrac{AB}{2\sin\widehat{ACB}}=4$.

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khoảng cách từ I đến mp (ABC) là $IK=\sqrt{R^2-r^2}=3$.

Do $\begin{cases}(ABC)//(P)\\ IK\perp(ABC)\\ IH\perp(P)\end{cases}$ nên ba điểm K,H,I thẳng hàng. Chiều cao AA' lớn nhất khi I nằm giữa H và K.

Giá trị lớn nhất của AA' là $AA'=IH+IK=10$. (1)

Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C,AB)=2d(C,AB)$. Trên đường tròn (K), điểm C luôn nhìn xuống cạnh AB không đổi dưới một góc 150° nên $d(C,AB)$ lớn nhất khi C là điểm chính giữa cung bé $\overset{\frown}{AB}$, khi đó tam giác ABC cân ở C.

Gọi N là trung điểm của AB. Khi đó giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là

$S_{ABC}=2.CN=2.NB.\tan 15^\circ=4(2-\sqrt{3})$ (2) và cũng có được $V_{ABC'B'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}AA'.S_{ABC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $\max\left(V_{ABC'B'}\right)=\dfrac{1}{3}.10.4\left(2-\sqrt{3}\right)=\dfrac{40}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT ĐÀO SƠN TÂY – HÀ NỘI

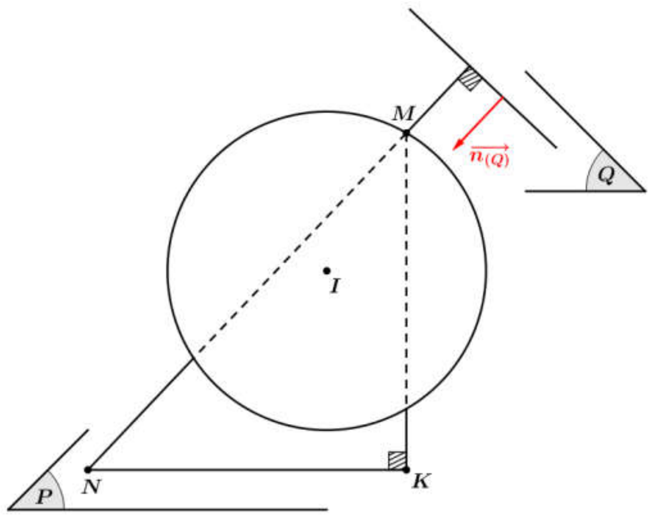
Câu 47. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$, $(Q): x+2y-2z-5=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN vuông góc với (Q). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. $9+5\sqrt{3}$ **B.** 14. **C.** 28. **D.** $3+5\sqrt{3}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=5$.

Ta có $d(I;(P))=3\sqrt{3}>R; d(I;(Q))=\dfrac{14}{3}>R$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) và φ là góc giữa MN và (P), khi đó ta suy ra: $\sin\varphi=\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên (P), khi đó: $MN=\dfrac{MK}{\sin\varphi}$ nên $MN_{\max}$ khi $MK_{\max}$

Mà $MK_{\max}=d(I;(P))+R=3\sqrt{3}+5$ nên suy ra $MN_{\max}=\dfrac{MK_{\max}}{\sin\varphi}=\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}+5\right)=9+5\sqrt{3}$. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ SỞ HẢI PHÒNG

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x-4}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(2)=0$ và $f(0)=1$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+2f(-1)-f(3)$ bằng

A. $3\ln\dfrac{2}{5}+2$ **B.** $2\ln\dfrac{2}{5}+2$. **C.** $3\ln\dfrac{2}{5}+3$. **D.** $3\ln\dfrac{5}{2}+2$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $f'(x)=\dfrac{x-4}{x^2+x-2}=\dfrac{x-4}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}$

Suy ra $f(-4)+2f(-1)-f(3)=f(-3)-\int_{-4}^{-3}f'(x)dx+2\left(f(0)-\int_{-1}^{0}f'(x)dx\right)-f(2)-\int_{2}^{3}f'(x)dx$

$=f(-3)-f(2)+2f(0)-\int_{-4}^{-3}f'(x)dx-2\int_{-1}^{0}f'(x)dx-\int_{2}^{3}f'(x)dx=3\ln\dfrac{2}{5}+2$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 41. Trên tập hợp các số phức, cho biết phương trình $z^2-4z+\frac{c}{d}=0$ (với $c\in\mathbb{Z};d\in\mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm z_1,z_2. Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn hình học của z_1,z_2 trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, giá trị của biểu thức $P=2c-5d$ bằng

A. $P=16$ **B.** $P=19$. **C.** $P=17$. **D.** $P=22$.

Lời giải

Đầu tiên ta có z_1,z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-4z+\frac{c}{d}=0$ (*), suy ra $z_1+z_2=4;z_1z_2=\frac{c}{d};\Delta=4-\frac{c}{d}$

Trường hợp 1: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow c\le 4d$ thì (*) có hai nghiệm thực phân biệt, khi đó O,A,B thẳng hàng nên ta loại.

Trường hợp 2: $\Delta\le 0\Leftrightarrow c\ge 4d$ thì (*) có hai nghiệm phức phân biệt lần lượt là $m+ni$ và $m-ni$, dễ thấy do $z_1+z_2=2m=4$ nên $m=2$. Tam giác OAB đều nên $OA=OB=AB\Leftrightarrow\sqrt{m^2+n^2}=2n\Leftrightarrow 4=3n^2\Leftrightarrow n=\pm\frac{2}{\sqrt3}$

Suy ra $z_{12}=2\pm\frac{2}{\sqrt3}i\Rightarrow\frac{c}{d}=z_1z_2=\left(2+\frac{2}{\sqrt3}i\right)\left(2-\frac{2}{\sqrt3}i\right)=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$ tức $P=2c-5d=17$. **Chọn đáp án C.**

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+4m-5$ có hai điểm cực trị nằm về 2 phía của đường thẳng $d:x-1=0$

A. 2020 **B.** 4043. **C.** 4042. **D.** 2019.

Lời giải

Đầu tiên ta có $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+4m-5$, chuyển về $f(x+1)$ ta có:

$f(x+1)=\frac{1}{3}(x+1)^3-m(x+1)^2+(m+2)(x+1)+4m-5=\frac{x^3}{3}-(m-1)x^2-(m-3)x+4m-\frac{8}{3}$, khi ấy ta quy về bài toán hai điểm cực trị nằm về 2 phía của đường thẳng $d:x=0$ tức trục tung, khi đó hai điểm cực trị phải trái dấu nhau. Xét đạo hàm của hàm số mới: $y'=x^2-2(m-1)x-(m-3)$ với $y'=0$ ta có phương trình: $x^2-2(m-1)x-(m-3)=0$, có hai nghiệm là x_1,x_2, suy ra để thỏa yêu cầu đề bài thì $P=x_1x_2=3-m<0$ $\Leftrightarrow m>3\xrightarrow{m\in[-2023;2023]}m\in[4;2023]$ tức có 2020 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 45. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+3+2i|=1$ và $|z_2+2-i|=1$. Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $2a-b=0$. Khi biểu thức $T=|z-z_1|+|z-2z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị biểu thức $P=3a^2-b^3$ bằng

A. 9 **B.** 11. **C.** -5. **D.** 5.

Lời giải

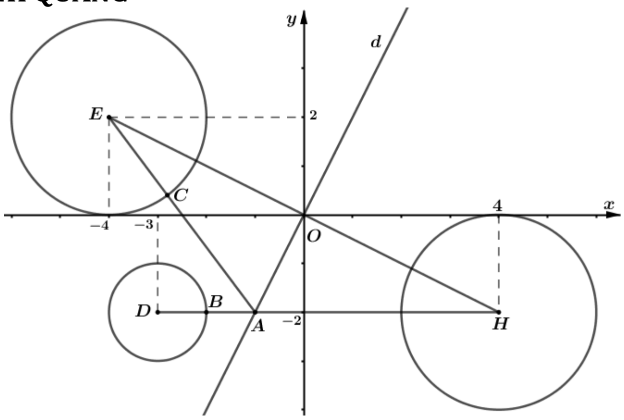
Cách 1: Đầu tiên ta có số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ có phần thực bằng a, phần ảo bằng b thỏa mãn $2a-b=0$ nên tập hợp điểm A biểu diễn số phức z là đường thẳng $d:y=2x$.

- $|z_1+3+2i|=1\to$ tập hợp điểm B biểu diễn số phức z_1 là đường tròn có tâm $D(-3;-2)$, bán kính bằng 1.
- $|z_2+2-i|=1\Leftrightarrow|2z_2+4-2i|=2$. Đặt $z_3=2z_2$ khi đó $|z_3+4-2i|=2$

$\to$ tập hợp điểm C biểu diễn số phức z_3 là đường tròn có tâm $E(-4;2)$, bán kính bằng 2.

Khi đó $T=|z-z_1|+|z-2z_2|=|z-z_1|+|z-z_3|=AB+AC$.

Gọi H là điểm đối xứng của E qua đường thẳng d, khi đó ta tìm được $H(4;-2)\longrightarrow$ phương trình đường thẳng $DH:y=-2$. Do đó $T_{\min}$ khi và chỉ khi $A=DH\cap d\longrightarrow$ tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=2x\\y=-2\end{cases}$



$\longrightarrow A(-1;-2) \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \longrightarrow P=3a^2-b^3=3(-1)^2-(-2)^3=11$ **Chọn đáp án B.**

Cách 2: Ta có $|z-z_1|+|z-2z_2|=|(z+3+2i)-(z_1+3+2i)|+|(z+4-2i)-2(z_2+2-i)|$

$\geq |z+3+2i|-|z_1+3+2i|+|z+4-2i|-2|z_2+2-i|=|z+3+2i|+|z+4-2i|-3$

$=\sqrt{(a+3)^2+(b+2)^2}+\sqrt{(a+4)^2+(b-2)^2}-3=\sqrt{(a+3)^2+(2a+2)^2}+\sqrt{(a+4)^2+(2a-2)^2}-3.$

Xét hàm $y=\sqrt{(a+3)^2+(2a+2)^2}+\sqrt{(a+4)^2+(2a-2)^2}-3$ trên $\mathbb{R}$, ta được $\min\limits_{\mathbb{R}} f(a)=4$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=-1 \longrightarrow b=-2$. Suy ra $P=3a^2-b^3=3(-1)^2-(-2)^3=11$. **Chọn đáp án B.**

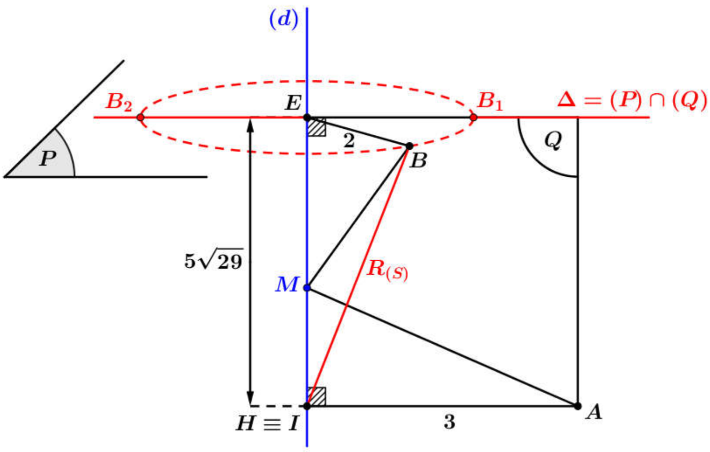
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;-2;-7)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Biết điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng bao nhiêu ?

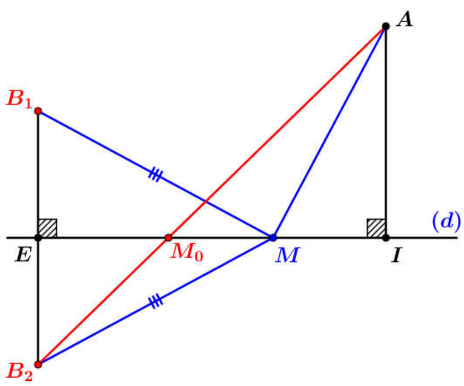
A. $5\sqrt{29}$ **B.** $\sqrt{742}$. **C.** $5\sqrt{30}$. **D.** 27.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng (d), suy ra tọa độ $H(-3;-;4;-5)$ với $AH=3$, mà mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-;4;-5)$, bán kính $R=27$ nên suy ra $H\equiv I$.

Tiếp đến ta có $d=d(I;(P))=5\sqrt{29}$ nên suy ra B thuộc đường tròn giao quyến (C), có tâm là $E(7;11;15)$, bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}=2$. Từ đó ta có hình vẽ như sau:





NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Dựng (Q) là mặt phẳng chứa A và (d), và Δ là giao tuyến giữa 2 mặt phẳng (Q) và (P), khi đó suy ra:

$\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{u_{(d)}};\overrightarrow{AI}\right]\right]=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{AI}\right]\right]=(1;2;-2)$, suy ra $\Delta:\begin{cases}x=7+t\\ y=11+2t\\ z=15-2t\end{cases},\ (t\in\mathbb{R})$

Suy ra $B(7+t;11+2t;15-2t)$ mà $EB=2$ nên ta có phương trình sau:

$EB^2=t^2+(2t)^2+(-2t)^2=9t^2=4\Leftrightarrow t=\pm\frac{2}{3}\to B_1\left(\frac{23}{3};\frac{37}{3};\frac{41}{3}\right);B_2\left(\frac{19}{3};\frac{29}{3};\frac{49}{3}\right)$

Một trong 2 vị trí điểm B này sẽ khác phía với điểm A so với đường thẳng (d) để khi đó

$T=MA+MB=MA+MB_{1,2}\ge AB_{1,2}$ (tức $AB_{1,2}$ cắt (d)), khi đó ta suy ra $T_{\min}=AB_2=5\sqrt{30}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x+y^2+3y\right)+\log_2\left(x+y^2\right)\le\log_3 y+\log_2\left(x+y^2+6y\right)$$

A. 69 **B.** 34. **C.** 35. **D.** 70.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $\log_3\left(x+y^2+3y\right)+\log_2\left(x+y^2\right)\le\log_3 y+\log_2\left(x+y^2+6y\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x+y^2+3y\right)-\log_3(9y)+2\left(\log_2\left(x+y^2+6y\right)-\log_2\left(2x+2y^2\right)\right)\le0$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{x+y^2+3y}{y}\right)-2\log_2\left(\frac{x+y^2+6y}{x+y^2}\right)\le0\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{x+y^2}{y}+3\right)-2\log_2\left(1+6\frac{y}{x+y^2}\right)\le0$ (*)

Đặt $t=\frac{x+y^2}{y}=\frac{x}{y}+y>0$ thì bất phương trình (*) trở thành: $\log_3(t+3)-2\log_2\left(1+\frac{6}{t}\right)\le0$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3(t+3)-2\log_2\left(1+\frac{6}{t}\right)$ có $f'(t)=\frac{1}{(t+3)\ln3}+\frac{12}{t^2\left(1+\frac{6}{t}\right)\ln2}>0,\ \forall t>0$ và $f(6)=0$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và với $f(t)\le0$ ta suy ra $t\le6\Leftrightarrow\frac{x+y^2}{y}\le6$

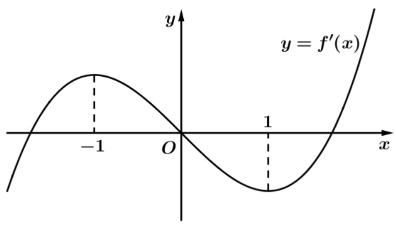
$\Leftrightarrow-y^2+6y\ge x>0\Leftrightarrow0<y<6\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}}y\in\{1;2;3;4;5\}$.

Thế $y=1\to x\le5\to x\in\{1;2;3;4;5\}$ có 5 cặp, $y=2\to x\le8\to x\in\{1;2;..;8\}$ có 8 cặp,

$y=3\to x\le9\to x\in\{1;2;...;9\}$ có 9 cặp, $y=4\to x\le8\to x\in\{1;2;..;8\}$ có 8 cặp và cuối cùng thế

$y=5\to x\le5\to x\in\{1;2;3;4;5\}$ có 5 cặp. Tổng cộng có 35 cặp thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\left|4f(\sin x)+\cos2x-m\right|$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. 6 **B.** 7. **C.** Vô số. **D.** 5.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Đầu tiên ta có: $y=\left|4f(\sin x)+\cos 2x-m\right|=\sqrt{\left(4f(\sin x)+\cos 2x-m\right)^2}$. Suy ra:

$$y'=\frac{\left(4\cos xf'(\sin x)-2\sin 2x\right)\left(4f(\sin x)+\cos 2x-m\right)}{\left|4f(\sin x)+\cos 2x-m\right|}=\frac{4\cos x\left(f'(\sin x)-\sin x\right)\left(4f(\sin x)+\cos 2x-m\right)}{\left|4f(\sin x)+\cos 2x-m\right|}\le 0$$

Ta có: $f'(t)<t,\ \forall t\in(0;1)$ (kẻ đường thẳng $y=x$ trên hình vẽ) nên suy ra $f'(\sin x)-\sin x<0,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Do đó để yêu cầu bài toán thỏa mãn, ta suy ra: $4f(\sin x)+\cos 2x-m\ge 0,,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$m\le 4f(\sin x)+1-2\sin^2 x,\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm $g(t)=4f(t)+1-2t^2,\ \forall t\in(0;1)$ có: $g'(t)=4f'(t)-4t<0,\ \forall t\in(0;1)$ (kẻ đường thẳng $y=x$ trên hình vẽ) . Suy ra $m\le g(1)=4f(1)+1-2.1^2=7\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$ tức có 7 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án B.

ĐỀ THI THỬ SỞ THANH HÓA

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;1;4), B(2;5;4), C\left(-\frac{5}{2};5;-1\right), D(-3;1;-4)$. Các điểm M, N thỏa mãn $MA^2+3MB^2=48$ và $ND^2=\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{ND}$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $MA^2+3MB^2=48$, gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(2;4;4)$, khi đó ta có:

$\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=48\Leftrightarrow 4MI^2+IA^2+3IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}\right)=48$

$\Leftrightarrow 4MI^2+12=48\Leftrightarrow MI=3$ tức M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(2;4;4)$, bán kính $R=3$

Tiếp đến ta có: $ND^2=\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{ND}\Leftrightarrow ND^2=\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{ND}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{ND}=0$ (1)

Gọi $N(x;y;z)$, với $\begin{cases}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=k(2;-2;1)\\ \overrightarrow{ND}=(x+3;y-1;z+4)\end{cases}$ thế vào (1), ta suy ra $N\in(P): 2x-2y+z+12=0$.

Vậy ta kết luận $MN_{\min}=d\left(I;(P)\right)-R=\frac{12}{3}-3=1$. **Chọn đáp án D.**

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right)<3$ là $(a;b)$. Tính $6a+8b$

A. 8 **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** 9.

Lời giải

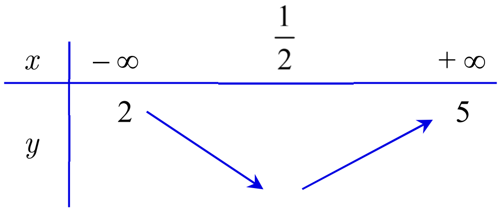
Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right)<3$. (1)

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+4}\ge 0$ thì (1) trở thành: $\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)<3$.

Xét hàm số $y=f(x)=\log_3(t+1)+2\log_5\left(t^2+1\right)$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(x)=t'\left(\frac{1}{(t+1)\ln 3}+\frac{4t}{\left(t^2+1\right)\ln 5}\right)$

Do dễ thấy $\dfrac{1}{(t+1)\ln 3}+\dfrac{4t}{(t^2+1)\ln 5}>0, t\in(0;+\infty)$ nên phương trình $f'(x)=0$ tương đương với:

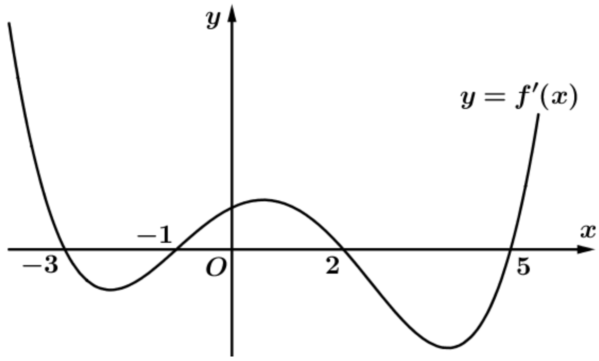
$t'=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+4}}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$, với $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



Nhẩm nhanh được $f(0)=f(1)=3$ nên suy ra bất phương trình $f(x)<3$ tương đương với $0<x<1$

Suy ra $a=0, b=1 \Rightarrow 6a+8b=8$. **Chọn đáp án A.**

Câu 42. Cho hàm đa thức bậc năm $y=f(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+3x\right|+m-2m^2\right)$ có đúng 3 điểm **cực đại** ?



A. 3 **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

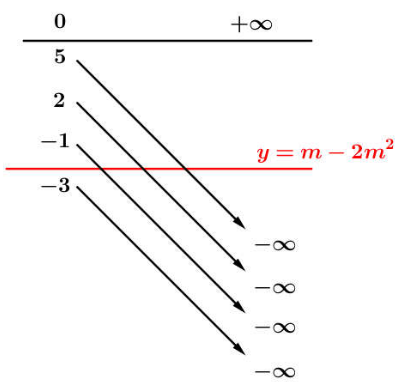
Lời giải

Đầu tiên ta xét: $u(x)=\left|x^3+3x\right|$ có $u(-x)=\left|-u(x)\right|=u(x)$ nên suy ra $u(x)$ là hàm số chẵn đối xứng qua Oy.

Để hàm số $f\left(\left|x^3+3x\right|+m-2m^2\right)$ có 3 điểm **cực đại**, tức có 7 điểm cực trị thì hàm số $f\left(x^3+3x+m-2m^2\right)$ chỉ có 3 điểm cực trị dương.

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^3+3x+m-2m^2\right)$ có $h'(x)=3\left(x^2+1\right)f'\left(x^3+3x+m-2m^2\right)$

Giải $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3+3x+m-2m^2=-3\\ x^3+3x+m-2m^2=-1\\ x^3+3x+m-2m^2=2\\ x^3+3x+m-2m^2=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2m^2=-x^3-3x-3=u_1(x)\\ m-2m^2=-x^3-3x-1=u_2(x)\\ m-2m^2=-x^3-3x+2=u_3(x)\\ m-2m^2=-x^3-3x+5=u_4(x)\end{array}\right.$



Vẽ các đồ thị $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)$ lên cùng hệ trục xác định trên $(0;+\infty)$

Suy ra $-3\le m-2m^2<-1 \to m\in\left[-1;\dfrac{-1}{2}\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{2}\right] \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=-1$ tức có 1 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán trên. **Chọn đáp án C.**

Câu 44. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(y^{2\log_3 x}-2^{2+\log_3 x\log_2 y}+8\right)=\log_3\left[7-\left(x^2+y^3-2025\right)\sqrt{x^2+y^3-2022}\right]$$

A. 2 **B.** 3 . **C.** 0 . **D.** 1.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình tương đương với:

$\Leftrightarrow \log_2\left(y^{2\log_3 x}-2^{2+\log_3 x\log_2 y}+8\right)=\log_3\left[7-\left(x^2+y^3-2025\right)\sqrt{x^2+y^3-2022}\right]$ (1),

Đặt $t=\sqrt{x^2+y^3-2022}$ thì (1) thành: $\log_2\left(\left(y^{\log_3 x}\right)^2-4.\left(2^{\log_2 y}\right)^{\log_3 x}+8\right)=\log_3\left[7-t\left(t^2-3\right)\right]$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\left(y^{\log_3 x}\right)^2-4y^{\log_3 x}+8\right)=\log_3\left(-t^3+3t+7\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\left(y^{\log_3 x}-2\right)^2+4\right)=\log_3\left(-t^3+3t+7\right)$

Ta có đánh giá sau: $\left(y^{\log_3 x}-2\right)^2+4\ge 4$ nên suy ra ta thu được:

$\begin{cases}\log_3\left(-t^3+3t+7\right)\ge\log_2 4=2\\ y^{\log_3 x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^3-3t+2\le 0\\ y^{\log_3 x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\le -2\,(L);t=1\\ y^{\log_3 x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^3-2022}=1\\ \log_3 x.\log_2 y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^3=2023\\ \log_3 x.\log_2 y=1\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}(x;y)=\left(3^a;2^b\right)\\ a,b>0\end{cases}$ thì hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}9^a+8^b=2023\\ b=\dfrac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow 9^a+8^{\frac{1}{a}}=2023$.

Xét hàm số $y=f(a)=9^a+8^{\frac{1}{a}}$ có $f'(a)=9^a\ln 9-\dfrac{1}{a^2}8^{\frac{1}{a}}\ln 8$. Xét $f'(a)=0\Leftrightarrow 3^{2a+1}-\dfrac{3}{a^2}2^{\frac{3}{a}}=0$ (2)

Xét hàm số $g(a)=3^{2a+1}-\dfrac{3}{a^2}2^{\frac{3}{a}}$ có $g'(a)=2.3^{2a+1}\ln 3+\dfrac{6}{a^3}2^{\frac{3}{a}}+\dfrac{9}{a^4}2^{\frac{3}{a}}\ln 2>0$ với mọi $a>0$, khi đó ta suy ra hàm số $g(a)$ luôn đồng biến với mọi $a>0$ tức phương trình (2) có duy nhất 1 nghiệm, suy ra hàm số $f(a)$ có đúng 1 cực trị $a=\alpha, f(\alpha)<2023$, suy ra $f(a)=2023$ có đúng 2 nghiệm phân biệt, tức tồn tại 2 cặp số $(a;b)$ cũng như 2 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án A.**

Câu 45. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-3-3i|=2$ và $|z_2-4-2i|=|z_2+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|+|z_2-3-2i|+|z_2+3+i|$ bằng

A. $3\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2$ **B.** $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+2$. **C.** $3\sqrt{5}+\sqrt{2}-2$. **D.** $3\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên hình học tọa độ Oxy. Bằng biến đổi đại số ta dễ dàng suy ra $M(z_1)$ thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;3)$, bán kính $R=2$ và $N(z_2)\in(d):x+y=2$.

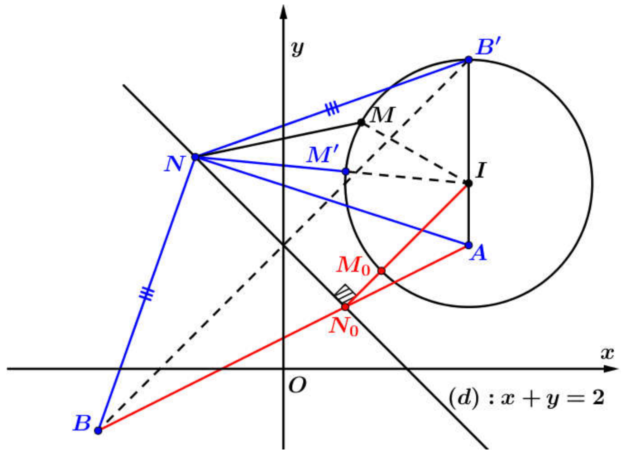
Tiếp đến ta có: $P=|z_1-z_2|+|z_2-3-2i|+|z_2+3+i|=MN+NA+NB$ với $A(3;2)$ và $B(-3;-1)$.

Khi đó ta luôn có: $P=MN+NA+NB\ge NI-R+NA+NB=NI+NA+NB-2$ tại $M\equiv M'=NI\cap(C)$.

Tới đây ta có 2 hướng giải quyết như sau:

Hướng 1: Do A,B khác phía với đường thẳng (d) nên ta xét dấu bằng xảy ra nhỏ nhất của biểu thức P đồng thời của 2 biểu thức NI và $NA+NB$, nếu hai dấu bằng xảy ra đồng thời giống nhau thì ta kết thúc bài toán.

Ta có: $NA + NB \geq AB$ tại $N \equiv N_1 = AB \cap (d)$ nên với phương trình $(AB): x - 2y + 1 = 0$ thì tọa độ $N_1(a;b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} a - 2b + 1 = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow N_1(1;1)$.



Ta có NI nhỏ nhất khi $NI = d(I;(d))$ mà nhận thấy $\overrightarrow{IN_1}.\overrightarrow{u_{(d)}} = 0$ nên suy ra P_{min} khi $N \equiv N_1(1;1)$.

Suy ra $P_{min} = NI + NA + NB - 2 = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 2$. **Chọn đáp án A.**

<u>Hướng 1:</u> Do A, B khác phía với đường thẳng (d) nên ta gọi B' là điểm đối xứng với B qua (d), khi ta suy ra tọa độ $B'(3;5) \in (C)$, tức ta có: $P = NI + NA + NB - 2 = NI + NA + NB' - 2$.

Theo tính chất góc bên ngoài đường tròn, khi N di động trên (d) gần đường tròn (C) thì 2 góc $\widehat{B'NI}$ và $\widehat{INA}$ càng gần bằng nhau, suy ra $(NA + NB')_{\min}$ khi NI là phân giác trong $\widehat{B'NA}$ tức $\frac{IA}{IB'} = \frac{NA}{NB'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow NB'^2 = 4NA^2$

Gọi tọa độ $N(a; 2-a)$ thế vào phương trình trên dễ dàng ra được $a = 1$ tức $N(1;1)$

Suy ra $P_{min} = NI + NA + NB - 2 = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 2$. **Chọn đáp án A.**

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (b, c, d, e \in \mathbb{R})$ đạt cực trị tại $x_1, x_2, x_3 \ (x_1 < x_2 < x_3)$ và có $f(x_1) = 1, f(x_2) = 16, f(x_3) = 9$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ và trục hoành là

<u>A</u>. 8   **B.** 4.   **C.** 6.   **D.** 2.

Lời giải

Đầu tiên ta có hàm số $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ (b, c, d, e \in \mathbb{R})$ đạt cực trị tại $x_1, x_2, x_3 \ (x_1 < x_2 < x_3)$ nên khi đó ta suy ra $f'(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ và trục hoành, khi đó phương trình tương đương với: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1, x = x_2, x = x_3$, khi đó ta suy ra:

$$S = \int_{x_1}^{x_3} |g(x)| dx = \int_{x_1}^{x_3} \left| \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \right| dx + \int_{x_2}^{x_3} \left| \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \right| dx = 2\left(\left| \sqrt{f(x_2)} - \sqrt{f(x_1)} \right| + \left| \sqrt{f(x_3)} - \sqrt{f(x_2)} \right| \right)$$

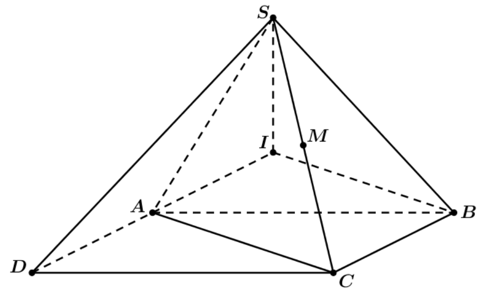
$= 2\left(\left| \sqrt{16} - \sqrt{1} \right| + \left| \sqrt{9} - \sqrt{16} \right| \right) = 4.2 = 8$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC, I là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Biết $AIBC$ là hình vuông cạnh a và $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{a^3}{6}$ **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** a^3.

Lời giải



Đầu tiên ta có $AIBC$ là hình vuông nên suy ra $\widehat{ACB}=\widehat{IAC}=90^\circ$ tức $IA\perp AC$ và $IC=a\sqrt{2}$ (1)
Tiếp đến ta có I là hình chiếu của S trên $(ABCD)$ nên $SI\perp AC$, suy ra $AC\perp(SAI)\Rightarrow SA\perp AC$
Với ΔSAC vuông tại A và trung tuyến AM ta suy ra $SC=2AM=a\sqrt{3}$ (2)
Từ (1) và (2) ta suy ra $SI=\sqrt{SC^2-CI^2}=a$. Theo tính chất hình bình hành, suy ra $AD=BC=AI=a$ và $S_{ABCD}=2S_{ABC}=S_{AIBC}=a^2$. Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SI.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$. **Chọn đáp án B.**

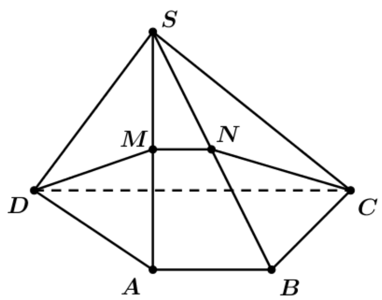
ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN BIÊN HÒA – HÀ NAM

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AB\parallel CD$, $CD=7AB$. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=k$, $(0<k<1)$. Tìm giá trị của k để (CDM) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nha $IA\perp AC$ u.

A. $k=\frac{-7+\sqrt{65}}{2}$ **B.** $k=\frac{-7+\sqrt{53}}{4}$. **C.** $k=\frac{-7+\sqrt{53}}{2}$. **D.** $k=\frac{-7+\sqrt{71}}{4}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại N, khi đó ta thu được hai khối chóp nhỏ là $S.MNDC$ và $ABMNDC$ có thể tích bằng nhau theo yêu cầu đề bài (*). Ta có: $\frac{V_{S.MDC}}{V_{S.ADC}}=\frac{SM}{SA}=k; S_{ADC}=\frac{d(A;DC).DC}{2}=7\frac{d(C;AB).AB}{2}=7S_{ABC}$

Suy ra: $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.=k^2\Rightarrow V_{S.MNDC}=V_{S.MNC}+V_{S.MDC}=kV_{S.ADC}+k^2V_{S.ABC}=(7k+k^2)V_{S.ABC}=\frac{k^2+7k}{8}V_{S.ABCD}$

Mà từ (*) ta cần $V_{S.MNDC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ nên suy ra $\frac{k^2+7k}{8}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\frac{-7+\sqrt{65}}{2}$. **Chọn đáp án A.**

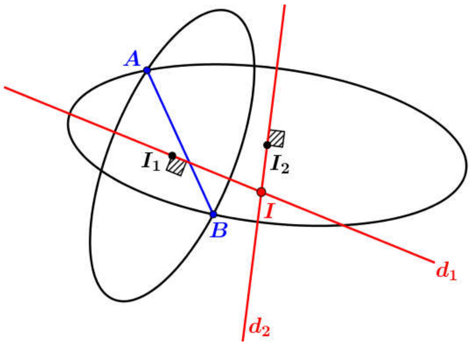
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;2), B(2;-2;0)$. Gọi $I_1(1;1;-1)$ và $I_1(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB. Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S)

A. $R = 2\sqrt{6}$ **B.** $R = \dfrac{\sqrt{129}}{3}$. **C.** $R = \dfrac{\sqrt{219}}{3}$. **D.** $R = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Gọi $(S_1),(S_2)$ là các mặt cầu lần lượt qua đường tròn tâm I_1 và tâm I_2. Gọi $(d_1),(d_2)$ lần lượt là các đường thẳng qua tâm I_1, I_2 và lần lượt vuông góc với $(I_1AB),(I_2AB)$. Khi đó $(d_1),(d_2)$ lần lượt chứa tâm của $(S_1),(S_2)$

Suy ra mặt cầu đi qua cả hai đường tròn tâm I_1 và I_2 có tâm là $I = (d_1) \cap (d_2)$ và bán kính $R = IA = IB$. (1)

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{I_1A} = (-1;1;3); \overrightarrow{I_1B} = (1;-3;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(I_1AB)}} = \left[\overrightarrow{I_1A}; \overrightarrow{I_1B}\right] = k(5;2;1) = \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{I_2A} = (-3;1;1); \overrightarrow{I_2B} = (-1;-3;-1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(I_2AB)}} = \left[\overrightarrow{I_2A}; \overrightarrow{I_2B}\right] = m(1;-2;5) = \overrightarrow{u_2} \end{cases}$ với $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vector chỉ phương của $(d_1),(d_2)$. Suy ra phương trình $(d_1): \begin{cases} x = 1+5a \\ y = 1+2a \\ z = -1+a \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 3+b \\ y = 1-2b \\ z = 1+5b \end{cases} \quad (a,b \in \mathbb{R})$.

Xét hệ phương trình sau: $\begin{cases} 1+5a = 3+b \\ 1+2a = 1-2b \\ -1+a = 1+5b \end{cases} \quad (a,b \in \mathbb{R})$ ta giải được $(a;b) = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $I\left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$ tức $R_{(S)} = R = IA = \dfrac{\sqrt{129}}{3}$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 48. Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=4$ và $\dfrac{z}{z-6}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S

A. 12 **B.** 0. **C.** 6. **D.** 14.

Lời giải

Nhận xét: $z=a+bi \Rightarrow -\bar{z}=-a+bi \Rightarrow \operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(-\bar{z})$. Khi đó với $\dfrac{z}{z-6}=\dfrac{z(\bar{z}-6)}{(z-6)(\bar{z}-6)}$ là số thuần ảo thì ta luôn có: $z(\bar{z}-6)+\bar{z}\overline{(\bar{z}-6)}=0 \Leftrightarrow z(\bar{z}-6)+\bar{z}(z-6)=0 \Leftrightarrow 2|z|^2-6(z+\bar{z})=0$ (1) (Điều kiện $z \neq 6$ (*))

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thì (1) thành: $2(x^2+y^2)-6(2x)=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=9$ tức điểm $M(z)$ luôn di động trên đường tròn (C_1) tâm $I_1(3;0)$, bán kính $R=3$.

Mặt khác $|z-m|=4$ ta lại có $M(z)$ luôn di động trên đường tròn (C_2) tâm $I_2(m;0)$, bán kính $R'=4$ nên để có đúng một số phức thỏa mãn thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) phải tiếp xúc **trong** hoặc **ngoài** nhau, khi đó ta có:

- Tiếp xúc ngoài: $|3-m|=R+R'=7 \Leftrightarrow m=-4; m=10$.
- Tiếp xúc trong: $|3-m|=|R-R'|=1 \Leftrightarrow m=-2; m=4$.

Ta thử lại từng giá trị m như sau:

Với $m=\pm4$ thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại O tức $z=0$ (thỏa mãn).

Với $m=-2;10$ thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại $A(6;0)$ tức $z=6$ (loại vì (*))

Vậy tổng giá trị m cần tìm là: $(-4)+4=0$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ sao cho thỏa mãn bất phương trình sau:

$$(x+2y)\left[\log_2(x^2+y^2)-\log_2(x+2y)-2y+x\right]<6x+y(12-5y)$$

A. 61 **B.** 65. **C.** 62. **D.** 64.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình sau: $(x+2y)\left[\log_2(x^2+y^2)-\log_2(x+2y)-2y+x\right]<6x+y(12-5y)$

$$\Leftrightarrow (x+2y)\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x+2y}\right)-4(x+2y)+(x^2+y^2)-2(x+2y)<0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)\left(\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x+2y}\right)-2\right)+(x^2+y^2)-(4x+8y)<0 \Leftrightarrow (x+2y)\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{4x+8y}\right)+(x^2+y^2)-(4x+8y)<0$$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{x^2+y^2}{4x+8y}\right)+4\left(\dfrac{x^2+y^2}{4x+8y}\right)<4$ (1). Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{4x+8y}>0$ thì (1) trở thành: $\Leftrightarrow \log_2 t+4t<4$.

Xét hàm số $y=f(t)=\log_2 t+4t$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+4>0, \forall t\in(0;+\infty)$ tức $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Suy ra $f(t)<f(1) \Leftrightarrow t<1 \Rightarrow 0<t<1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{4x+8y}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2>0 \\ (x-2)^2+(y-4)^2<20 \end{cases} \rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2<20$

Ta chia các trường hợp sau: $x=\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1;0$

Vậy **dùng 1 năng lực tâm linh nào đó** ta có tất cả 61 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=x^2+(a+x)\sqrt{x^2+1}+ax$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in(-20;20)$ sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị $A(x_0;y_0)$ và $y_0<-5$?

A. 15 **B.** 19. **C.** 39. **D.** 16.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f(x)=x^2+(a+x)\sqrt{x^2+1}+ax=(a+x)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Ta đặt $\begin{cases} t=x+\sqrt{x^2+1} \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+1}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1}=+\infty\end{array}\right\}\to t>0 \end{cases}\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=t-x\Leftrightarrow x^2+1=t^2+x^2-2xt\Leftrightarrow x=\dfrac{t^2-1}{2t}$,

Khi ấy hàm số ban đầu trở thành: $g(t)=t\left(a+\dfrac{t^2-1}{2t}\right)=at+\dfrac{t^2-1}{2}$.

Giải phương trình $g'(t)=0\Leftrightarrow a+t=0\Leftrightarrow t=-a>0\Leftrightarrow a<0\quad(1)$

Suy ra: $g(-a)=a(-a)+\dfrac{(-a)^2-1}{2}=-\dfrac{a^2+1}{2}>-5\Leftrightarrow\begin{cases}a>3\\a<-3\end{cases}\Rightarrow a<-3\quad(1)\xrightarrow{a\in(-20;20)}a\in\{-19;-18;...;-5;-4\}$

Vậy có tất cả 16 giá trị nguyên a thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ SỞ SƠN LA LẦN 1

Câu 41. Cho hàm số $y=\left|2x^3-3(2m+1)x^2+6(m^2+m)x-m\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 9 **B.** 12. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Xét hàm số sau: $f(x)=2x^3-3(2m+1)x^2+6(m^2+m)x-m$ ta có: $f'(x)=6x^2-6(2m+1)x+6(m^2+m)$

Để $|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì ta có hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $f(x)\ge0,\ \forall x\in(0;1)$ và $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$, khi đó ta có:

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-(2m+1)x+(m^2+m)\ge0,\ \forall x\in(0;1)\\ f(0)\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-m)^2-(x-m)\ge0,\forall x\in(0;1)\\ m\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le m\vee x\ge m+1,\forall x\in(0;1)\\ m\le0\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}m\ge x,\ \forall x\in(0;1)\vee m\le x-1,\ \forall x\in(0;1)\\ m\le0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1]\cup\{0\}$ tức $m\le0$ (1)

Trường hợp 2: $f(x)\le0,\ \forall x\in(0;1)$ và $f(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$, khi đó ta có:

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-m)^2-(x-m)\le0,\ \forall x\in(0;1)\\ f(0)\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le x\le m+1,\ \forall x\in(0;1)\\ m\ge0\end{cases}$. Suy ra $m=0$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $m\le0\xrightarrow{m\in(-10;10)}m\in\{-9;-8;...;0\}$ tức 10 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3F(5)+G(5)=50$ và $3F(-3)+G(-3)=2$. Khi đó $\int\limits_0^2 x\left(4+f\left(2x^2-3\right)\right)dx$ bằng

A. 11 **B.** 72. **C.** 7. **D.** 71.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Ta có $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên suy ra trừ theo vế hệ sau: $\begin{cases} 3F(5)+G(5)=50 \\ 3F(-3)+G(-3)=2 \end{cases}$ ta suy ra được: $3\left(F(5)-F(-3)\right)+\left(G(5)-G(-3)\right)=3\int\limits_{-3}^{5} f(x)+\int\limits_{-3}^{5} f(x)=4\int\limits_{-3}^{5} f(x)=48 \Leftrightarrow \int\limits_{-3}^{5} f(x)=12$

$$I=\int\limits_{0}^{2} 4x dx+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2} 4xf\left(2x^2-3\right)dx=8+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{2} f\left(2x^2-3\right)d\left(2x^2-3\right)=8+\frac{1}{4}\int\limits_{-3}^{5} f(t)dt=8+\frac{1}{4}\int\limits_{-3}^{5} f(x)dx=8+\frac{12}{4}=11$$

Chọn đáp án A.

Câu 47. Cho số thực a thỏa mãn giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|\ln\left(x^2+1\right)-\frac{x^2}{2}-a\right|$ trên đoạn $[0;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của a thuộc khoảng nào dưới đây ?

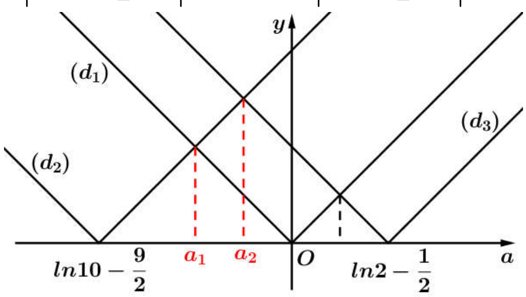
A. $(-1;0)$ **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Đầu tiên ta xét hàm số $y=f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\frac{x^2}{2}-a$ có $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ (nhận).

Ta có: $|f(0)|=|-a|;|f(3)|=\left|\ln 10-\frac{9}{2}-a\right|;|f(1)|=\left|\ln 2-\frac{1}{2}-a\right|$.

Vẽ các đồ thị $(d_1): y=|-a|;(d_2): y=\left|\ln 10-\frac{9}{2}-a\right|;(d_3): y=\left|\ln 2-\frac{1}{2}-a\right|$ lên hệ trục tọa độ Oay như sau:



Khi đó để hàm số $|f(x)|$ có giá trị lớn nhất đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của hoành độ a phải là nghiệm của phương trình hoành độ của giao điểm sau:

$\ln 10-\frac{9}{2}-a=-\left(\ln 2-\frac{1}{2}-a\right) \Leftrightarrow 2a=\ln 10-\frac{9}{2}+\ln 2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=a_2=\frac{\ln 20-5}{2} \in (-2;-1)$. **Chọn đáp án C.**

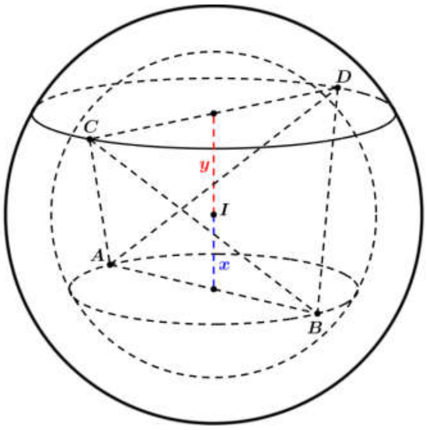
Câu 48. Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) đồng tâm I, có bán kính lần lượt là $R_1=2$ và $R_2=\sqrt{10}$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A,B nằm trên (S_1) và hai đỉnh C,D nằm trên (S_2). Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(8;9)$ **B.** $(7;8)$. **C.** $(10;11)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Ta sử dụng công thức sau: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.\sin\left(AB,CD\right).d\left(AB,CD\right)$.

Luôn có đánh giá sau: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.\sin\left(AB,CD\right).d\left(AB,CD\right)\le\frac{AB.CD.d\left(AB,CD\right)}{6}$ khi $AB\perp CD$.



Tới đây ta gọi x, y lần lượt là khoảng cách từ I đến AB và CD, khi ấy suy ra: $d\left(AB,CD\right)=x+y$.

Suy ra $\begin{cases} AB = 2\sqrt{R_1^2 - x^2} = 2\sqrt{4-x^2} \\ CD = 2\sqrt{R_2^2-y^2} = 2\sqrt{10-x^2}\end{cases}$ tức $V_{ABCD} \le \dfrac{AB.CD.d\left(AB,CD\right)}{6} = \dfrac{2}{3}(x+y)\sqrt{4-x^2}\sqrt{10-y^2}$ (*)

Ta quy về tìm giá trị lớn nhất của biểu thức (*) như sau:

Do không có điều kiện cụ thể cho x, y nên theo bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, ta có:

$(x+y)^2 = \left(x + k\dfrac{y}{k}\right)^2 \le \left(1+k^2\right)\left(x^2+\dfrac{y^2}{k^2}\right)$, khi ấy dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{y}{k^2} \Leftrightarrow \boxed{x^2=\dfrac{y^2}{k^4}}$ (1).

Lại có: $(x+y)^2\left(4-x^2\right)\left(10-y^2\right) \le \left(1+k^2\right)\left(4-x^2\right)\left(10-y^2\right)\left(x^2+\dfrac{y^2}{k^2}\right) = k^2\left(1+k^2\right)\left(4-x^2\right)\left(\dfrac{10-y^2}{k^2}\right)\left(x^2+\dfrac{y^2}{k^2}\right)$

$\underset{Cauchy-Schwartz}{\le} k^2\left(1+k^2\right)\left(\dfrac{\dfrac{10}{k^2}+4+\left(\dfrac{y^2}{k^2}-\dfrac{y^2}{k^2}\right)+\left(x^2-x^2\right)}{3}\right)^3 = \dfrac{k^2\left(1+k^2\right)\left(\dfrac{10}{k^2}+4\right)^3}{27}$ (2). → Ta cần tìm k phù hợp

Theo (2), dấu "=" xảy ra theo AM-GM là: $4-x^2=\dfrac{10-y^2}{k^2}=x^2+\dfrac{y^2}{k^2}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4-t\\ \dfrac{y^2}{k^2}=\dfrac{10}{k^2}-t; x^2+\dfrac{y^2}{k^2}=t\end{cases}$

Suy ra: $4-t+\dfrac{10}{k^2}-t=t \Leftrightarrow t=\dfrac{4+\dfrac{10}{k^2}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{8}{3}-\dfrac{10}{3k^2}\\ \dfrac{y^2}{k^2} = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{10}{k^2}\right)\end{cases}$, thế vào (1) ta suy ra $k=\sqrt{2}$, thế vào (2) ta suy ra

$(x+y)^2\left(4-x^2\right)\left(10-y^2\right)\le 162 \Rightarrow V_{ABCD}\le \dfrac{2}{3}\sqrt{162}=6\sqrt{2}$ tức $\max\left(V_{ABCD}\right)=6\sqrt{2}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 49. Xét các số phức z thỏa mãn $|z-i|=2$. Biết rằng biểu thức $P=|z+3i|+2|z-5-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=x+yi$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó, giá trị của tổng $x+y$ bằng

A. $\dfrac{-3-3\sqrt{79}}{13}$ **B.** $\dfrac{3+3\sqrt{79}}{13}$. **C.** $\dfrac{-3+3\sqrt{79}}{13}$. **D.** $\dfrac{3-3\sqrt{79}}{13}$.

Lời giải

Ta đặt $z=x+yi$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thì ta có $x^2+\left(y-1\right)^2-4=0$. Suy ra: $P=|z+3i|+2|z-5-i|$

$=\sqrt{x^2+(y+3)^2}+2\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+3)^2+3\left(x^2+(y-1)^2-4\right)}+2\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}$

$=2\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}\right)=2(MO+MA)$ với $A(5;1)$ và $M(x;y)(z)\in(C):x^2+(y-1)^2=4$

Với $\begin{cases} IO<R_{(C)} \\ IA>R_{(C)} \end{cases}$ nên suy ra $P=2(MA+MO)\geq 2AO=2\sqrt{26}$ khi $M=AO\cap(C)$

Phương trình $(OA):x=5y$, thế vào (C) ta có phương trình sau: $25y^2+(y-1)^2=4\Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{79}}{26}$.

Mà M nằm giữa O và A nên $y_M=\dfrac{1+\sqrt{79}}{26}$. Vậy $x+y=5y+y=6y=\dfrac{3+3\sqrt{79}}{13}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50. Xét các số thực x,y sao cho $4\log_3 a^{(\log_2 a-2x+2)}-(y^2-25)\log_{\sqrt{3}}4\geq 0$ luôn đúng với mọi $a>0$. Hỏi có tối đa bao nhiêu giá trị nguyên của biểu thức $F=x^2+y^2-2x-12y+38$?

A. 120 **B.** 121. **C.** 122. **D.** 125.

Lời giải

Ta có bất phương trình tương đương với: $4\log_3 a^{(\log_2 a-2x+2)}-(y^2-25)\log_{\sqrt{3}}4\geq 0$

$\Leftrightarrow(\log_2 a-2x+2)\log_3 2\log_2 a-(y^2-25)\log_3 2\geq 0\Leftrightarrow(\log_2 a-2x+2)\log_2 a-(y^2-25)\geq 0$

$\Leftrightarrow(\log_2 a)^2-2(x-1)\log_2 a-(y^2-25)\geq 0$ (*) với mọi $a>0$ tức với mọi $\log_2 a>0$. Khi đó bất phương trình vừa nêu trên với ẩn $\log_2 a$ sẽ luôn đúng khi $\Delta'_{(*)}=(x-1)^2+(y^2-25)\leq 0\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\leq 25$. Gọi $M(x;y)$ thì khi đó M thuộc **hình** tròn (C) tâm $I(1;0)$, bán kính $R=5$.

Lại có: $F=x^2+y^2-2x-12y+38\Rightarrow F-1=(x-1)^2+(y-6)^2=MA^2$ với $A(1;6), IA=6>R$ nên ta suy ra: $(AI-R)^2\leq MA^2\leq(AI+R)^2\Leftrightarrow 1\leq F-1\leq 121\Leftrightarrow 2\leq F\leq 122$ tức có tất cả $122-2+1=121$ giá trị nguyên mà biểu thức F nhận được. **Chọn đáp án B.**

ĐỀ THI THỬ SỞ PHÚ THỌ LẦN 2

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y+4z-3=0$ và điểm $A(1;1;3)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) cắt các tia Ox,Oy lần lượt tại các điểm B,C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $2\sqrt{22}$. Khoảng cách từ điểm $M(2;2;1)$ đến (Q) bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

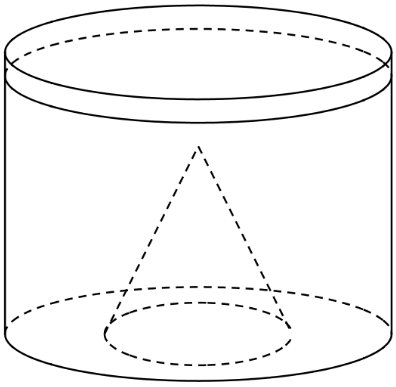
Lời giải

Ta có: (Q) song song với (P) nên suy ra $(Q):x+y+4z-a=0\Leftrightarrow(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{4z}{a}=1$. Khi đó theo tính chất của mặt chắn ta suy ra tọa độ $B(a;0;0), C(0;a;0)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua $A(1;1;3)$ và vuông góc với BC, lại thấy $d(B;(\alpha))=d(C;(\alpha))$ nên suy ra tam giác ABC cân tại A tức với $N\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$ là trung điểm BC thì

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AN.BC\Leftrightarrow AN^2BC^2=16.22$

$\Leftrightarrow 2a^2\left(2\left(\dfrac{a}{2}-1\right)^2+9\right)=16.22\Leftrightarrow a=4$. Suy ra: $(Q):x+y+4z-4=0\Rightarrow d(M;(Q))=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 42. Một khối nón (N) có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng 18, được làm bằng chất liệu không thấm nước và có khối lượng riêng lớn hơn khối lượng riêng của nước. Khối (N) được đặt trong một cái cốc hình trụ đường kính bằng $6R$, sao cho đáy của (N) tiếp xúc với đáy của cốc (tham khảo hình vẽ). Đổ nước vào cốc đến khi mực nước đạt độ cao bằng 18 thì lấy khối (N) ra. Độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối (N) ra bằng



A. $\frac{52}{3}$ **B.** $\frac{214}{3}$. **C.** $\frac{74}{3}$. **D.** $\frac{70}{3}$.

Lời giải

Gọi V_1 lần lượt là thể tích của khối nón (N). Khi đó $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 6\pi R^2$.

Do đổ nước vào cốc đến khi mực nước đạt độ cao bằng 18 nên thể tích của khối nón và cả phần nước trong cốc trụ tại mực nước như trên là: $V_2 = \pi(3R)^2 h = 162\pi R^2$.

Sau khi bỏ khối nón (N) ra thì thể tích phần nước trong cốc trụ là: $V_3 = V_2 - V_1 = 156\pi R^2$.

Suy ra mực nước cần tìm là: $h' = \frac{V_3}{\pi(3R)^2} = \frac{156\pi R^2}{9\pi R^2} = \frac{52}{3}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{3};3\right]$ và thỏa mãn $f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x, \forall x \in \left[\frac{1}{3};3\right]$. Tích phân $\int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{8}{9}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$ thì khi đó: $I_1 = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}dx = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)}\left(\frac{dt}{-t^2}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{1+t}dt = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+x}dt = I_2$

Suy ra: $I_1 + I_2 = 2I = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+x}dx = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{x^3 - x}{x^2+x}dx \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{x-1}{2}dx = \frac{8}{9}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên dương a $(a \le 2024)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn

$$x\left(\ln a^3 + e^x\right) \le e^x\left(1 + \ln\left(3x\ln a\right)\right)$$

A. 2022 **B.** 2019. **C.** 2023. **D.** 2018.

Lời giải

Đầu tiên dễ thấy điều kiện ban đầu $a > 0$ và khi $a = 1$ thì BPT vô lí nên ta xét $a \ge 2$ (*)

Ta có bất phương trình tương đương với: $x\left(\ln a^3 + e^x\right) \le e^x\left(1 + \ln\left(3x\ln a\right)\right) \Leftrightarrow e^{3x\ln a} + xe^x \le e^x\left(1 + \ln\left(3x\ln a\right)\right)$

$\Leftrightarrow e^{\ln(3x\ln a) - x} + x \le 1 + \ln\left(3x\ln a\right) \Leftrightarrow e^{\ln(3x\ln a) - x} \le 1 + \ln\left(3x\ln a\right) - x$. Đặt $t = \ln\left(3x\ln a\right) - x$ thì khi đó bất phương trình trở thành: $e^t \le t + 1$. Mặt khác theo bất đẳng thức Bernoulli ta luôn có: $e^t \ge t + 1, \forall t \in \mathbb{R}$ nên ta suy ra bất phương trình tương đương với $t = 0 \Leftrightarrow \ln\left(3x\ln a\right) = x \Leftrightarrow 3x\ln a = e^x \Leftrightarrow \ln a = \dfrac{e^x}{3x}$, với $x > 0$

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{e^x}{3x}$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(x) = \dfrac{e^x 3x - 3e^x}{9x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1, f''(1) > 0$ nên suy ra $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$, khi đó $\ln a \ge \min\limits_{(0;+\infty)} f(x) \Leftrightarrow \ln a \ge f(1) \Leftrightarrow \ln a \ge \dfrac{e}{3} \Leftrightarrow a \ge e^{\frac{e}{3}} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \ge 3$ (1)

Với $a \le 2024$ ta suy ra $a \in \{3;4;...;2023;2024\}$ tức có 2022 giá trị nguyên a thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 8 = 0$. Tam giác ABC có $A(-1;2;2)$ và trọng tâm G nằm trên d. Khi các đỉnh B, C di động trên (P) sao cho khoảng cách từ A tới đường thẳng BC đạt giá trị lớn nhất, một vector chỉ phương của đường thẳng BC là

A. $(2;1;1)$ **B.** $(2;1;-1)$. **C.** $(1;-2;0)$. **D.** $(1;2;0)$.

Lời giải

Cách 1:

Do G là trọng tâm của ΔABC nên $\begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \\ 3z_G = z_A + z_B + z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_G = -1 + 2x_M \\ 3y_G = 2 + 2y_M \\ 3z_G = 2 + 2z_M \end{cases}$ với $M\left(x_M; y_M; z_M\right)$ là trung điểm BC

Mặt khác ta có: $G \in d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ nên thế vào ta có: $\begin{cases} 3(-1+2t) = -1 + 2x_M \\ 3(2+t) = 2 + 2y_M \\ 3(2-t) = 2 + 2z_M \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-1 + 3t; 2 + \dfrac{3}{2}t; 2 - \dfrac{3}{2}t\right)$

Mà $B, C \in (P)$ tức $M \in (P)$ nên suy ra $2(-1+3t) + \left(2 + \dfrac{3}{2}t\right) + \left(2 - \dfrac{3}{2}t\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M\left(2; \dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Với M cố định thì G cố định, khi đó $d(A; BC) \le AM$ tức $\overrightarrow{u_{BC}} = \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = k(1;-2;0)$. **Chọn đáp án C.**

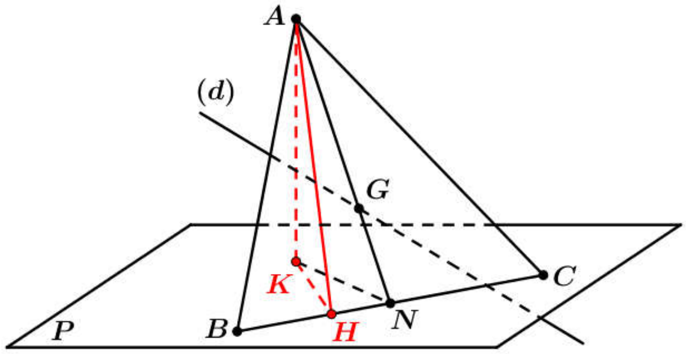
Cách 2: Vì $G \in d \Rightarrow G(-1+2t; 2+t; -2-t)$

Gọi N là trung điểm của BC nên: $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN} \Rightarrow N\left(3t - 1; \dfrac{3}{2}t + 2; -\dfrac{3}{2}t - 4\right)$

Mà $N\left(3t - 1; \dfrac{3}{2}t + 2; -\dfrac{3}{2}t - 4\right) \in (P) \Rightarrow 2(3t-1) + \dfrac{3}{2}t + 2 - \dfrac{3}{2}t - 4 - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow N(5;5;-6)$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên (P) và H là chân đường cao kẻ từ A xuống BC trong tam giác ABC

Khi đó ta có $BC \perp (AHK) \Rightarrow BC \perp HK$



Ta có: $AK \perp (P) \Rightarrow AK: \begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = 2 + t' \\ z = 2 + t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \Rightarrow K(-1+2t'; 2+t'; 2+t') \in (P) \Rightarrow K(1;3;3)$

Ta có: $d(A, BC) = AH$. Mà ta có: $AH^2 = AK^2 + KH^2 = AK^2 + KN^2 - HN^2$. Để $d(A, BC)_{\max} \Leftrightarrow AH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv N$ hay tam giác ABC cân tại A. Khi đó ta có: $AG \perp BC$. Do đó ta có: $\begin{cases} AG \perp BC \\ AK \perp BC \end{cases}$

Vậy ta suy ra $\overrightarrow{u_{BC}} = \left[\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AK}\right] = (8; -16; 0) = 8(1; -2; 0)$ là một VTCP của BC. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Cho số phức $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|\overline{z} - 3 - 2i| \le 5$ và $\dfrac{|z + 4 + 3i|}{|z - 3 + 2i|} \le 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7$. Khi đó $M + m$ bằng

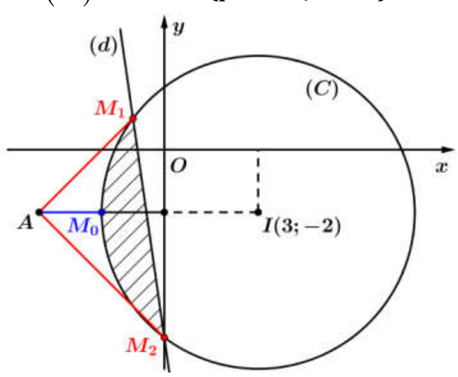
A. 32 **B.** 36. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ thì khi đó $|\overline{z} - 3 - 2i| \le 5 \Leftrightarrow |z - 3 + 2i| \le 5 \Leftrightarrow (C): (x-3)^2 + (y+2)^2 \le 25$ (1)

Tiếp đến ta có: $\dfrac{|z + 4 + 3i|}{|z - 3 + 2i|} \le 1 \Leftrightarrow |z + 4 + 3i|^2 \le |z - 3 + 2i|^2 \Leftrightarrow (d): 7x + y + 6 \le 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hình vẽ biểu diễn miền (D) như sau (phần sọc đen):



Giải phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) suy ra $M_1(-1; 1)$ và $M_2(0; -6)$.

Lại có $P = x^2 + y^2 + 8x + 4y + 7 = (x+4)^2 + (y+2)^2 - 13 \Leftrightarrow P + 13 = MA^2$ với $A(-4; -2)$ nên dựa vào hình vẽ trên ta suy ra: $AM_0 \le P + 13 \le \max\{AM_1; AM_2\} \Leftrightarrow -9 \le P \le 19 \to M + m = 19 + (-9) = 10$. **Chọn đáp án C.**

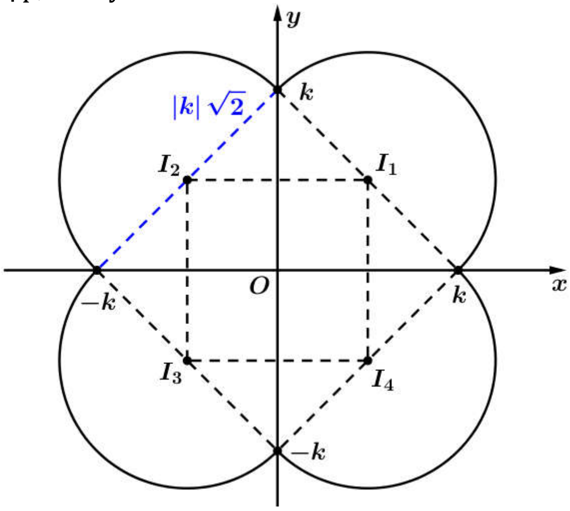
Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy, gọi (H) là tập hợp điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2=k(|x|+|y|)$ với k là số nguyên dương, S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H). Giá trị lớn nhất của k để $S<250$ bằng

A. 5 **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2=k(|x|+|y|)\Leftrightarrow |x|^2-k|x|+|y|^2-k|y|=0\Leftrightarrow \left(|x|-\frac{k}{2}\right)^2+\left(|y|-\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2$

Phá trị kết hợp với chia 4 trường hợp, khi ấy ta có hình vẽ như sau:



Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi các đoạn nối giữa các điểm cắt bởi các đường tròn (C) với Ox, Oy (hình vuông), khi ấy ta dễ dàng suy ra được: $S_1=\left(k\sqrt{2}\right)^2=2k^2$

Gọi S_2 là tổng diện tích các hình viên phân của các phần đường tròn cắt bởi các đoạn bằng $|k|\sqrt{2}$, dễ thấy các hình viên phân trên là một nửa của đường tròn thành phần nên $S_2=\frac{1}{2}.\pi\left(k\sqrt{2}\right)^2=\pi k^2$

Suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H) là:

$S=S_1+S_2=(\pi+2)k^2<250\Leftrightarrow k^2<\frac{250}{\pi+2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{\pm6;\pm5;\pm4;\pm3;\pm2;\pm1\}$ tức $k_{\max}=6$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ SỞ THÁI NGUYÊN LẦN 2 (MÃ 118)

Câu 41. Thầy Bình đặt lên bàn 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Bạn An chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Xác suất để trong 10 tấm thẻ lấy ra có 5 tấm thẻ được ghi số lẻ, riêng 5 tấm thẻ được ghi số chẵn trong đó chỉ có 1 tấm thẻ được ghi số chia hết cho 10 bằng

A. $\frac{8}{11}$ **B.** $\frac{99}{667}$. **C.** $\frac{99}{167}$. **D.** $\frac{3}{11}$.

Lời giải

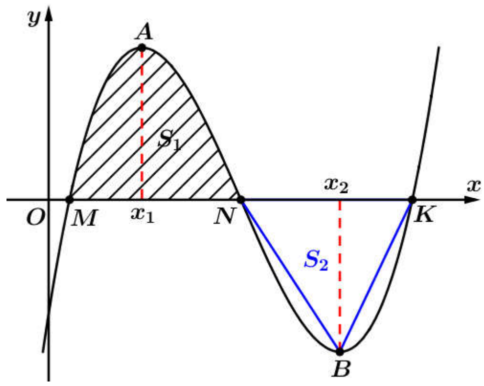
Đầu tiên ta có không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{30}^{10}$ (cách).

Trong 30 thẻ có 15 thẻ mang số chẵn, 15 thẻ mang số lẻ và 3 số chia hết cho 10, do đó ta chọn 10 tấm thẻ lấy ra 5 tấm thẻ mang số lẻ và 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có một tấm mang số chia hết cho 10 có:

$n(A)=C_{15}^5C_3^1C_{12}^4$ (cách). Suy ra xác suất cần tìm là: $P=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_{15}^5C_3^1C_{12}^4}{C_{30}^{10}}=\frac{99}{667}$. **Chọn đáp án B.**

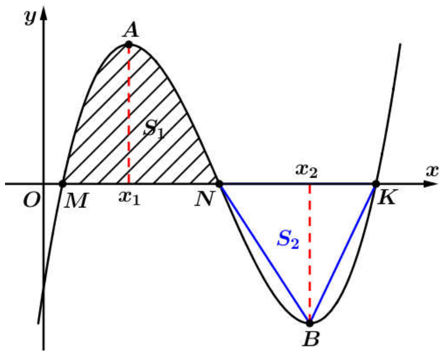
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

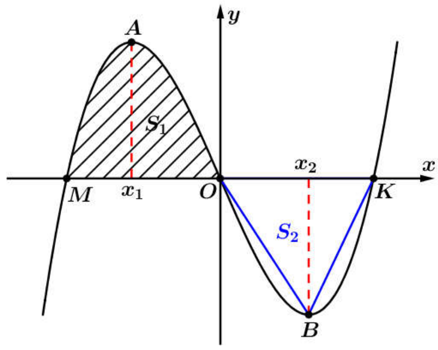
Câu 46. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình vẽ. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C); M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành, S_1 là diện tích hình phẳng được gạch trong hình; S_2 là diện tích tam giác NBK. Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải





Đầu tiên ta nhận thấy kết quả bài toán không thay đổi khi ta tịnh tiến đồ thị đồ thị (C) sang trái sao cho điểm uốn trùng với gốc tọa độ O. (như hình bên). Khi đó với hàm số bậc ba $y = f(x)$ nhận tâm đối xứng là gốc tọa độ nên khi đặt $x_1 = -a; x_2 = a$ $(a > 0)$ thì ta luôn có $f'(x) = k(x-a)(x+a) = k(x^2 - a^2)$ với $a, k > 0$.

Suy ra: $f(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - a^2x\right)$. Giải phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{x^2}{3} - a^2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -a\sqrt{3} \\ x_K = a\sqrt{3} \end{cases}$

Lại có tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn tâm O nên suy ra $OA = OM = a\sqrt{3}$.

Khi đó ta có: $f(x_1) = \sqrt{OA^2 - x_1^2} \Leftrightarrow f(-a) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k\left(-\frac{a^3}{3} + a^3\right) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{a^2\sqrt{2}}$.

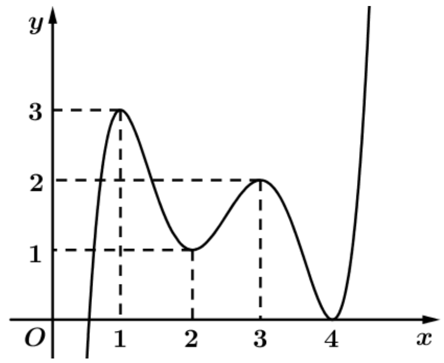
Suy ra: $f(x) = \frac{3}{a^2\sqrt{2}}\left(\frac{x^3}{3} - a^2x\right)$ tức ta có được $S_1 = \int\limits_{-a\sqrt{3}}^{0} f(x)dx = \frac{3}{a^2\sqrt{2}}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{a^2x^2}{2}\right)\Bigg|_{-a\sqrt{3}}^{0} = \frac{9\sqrt{2}}{8}a^2$

Cùng với $S_2 = S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2}f(-a).MO = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$, ta suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn đáp án A**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 48. Cho hàm số đa thức bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $h(x)=2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?



A. $(-\infty;1)$ **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Đầu tiên ta xét $h(x)=2\left[f(x)\right]^3-9\left[f(x)\right]^2$ có $h'(x)=f'(x)\left(6f^2(x)-18f(x)\right)$

Giải phương trình $h'(x)=0$ khi đó phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow f'(x)\left(6f^2(x)-18f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0; f(x)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; x=2; x=3 \\ x=a\in(0;1); x=b\in(3;+\infty) \end{array}\right..$$

Khi đó ta có bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		a		1		2		3		b		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng trên ta suy ra hàm số $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, cùng chứa d và cắt Δ tại M, N. Độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN có giá trị bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{10}}{21}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{42}}{21}$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ là các vector chỉ phương của d và Δ, khi đó ta có: $\overrightarrow{u_1}=(1;3;2),\overrightarrow{u_2}=(1;-1;1),\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}=0$

Khi đó ta suy ra $d\perp\Delta$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M, N lên d, khi đó $A\equiv B$ và

$MN^2=MA^2+AN^2\geq 2\sqrt{MA^2AN^2}=const$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA=AN$ tức ΔMAN vuông cân tại A

Tới đây dễ dàng suy ra khoảng cách MN ngắn nhất cũng chính bằng đoạn vuông góc chung giữa d và Δ tức $MN_{\min}=2d(d;\Delta)$ (tính chất đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền trong tam giác vuông).

Gọi α là mặt phẳng chứa d và song song Δ với $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(5;1;-4)$

Suy ra $(\alpha):5x+y-4z-6=0$ tức $\begin{cases} E(2;1;1)\in\Delta \\ MN_{\min}=2d(d;\Delta)=2d(E;\alpha)=\dfrac{\sqrt{42}}{21} \end{cases}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2023; 2023]$ để phương trình $(x^2-1)\log^2(x^2+1) - m\sqrt{2(x^2-1)}\log(x^2+1) + m + 4 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1 \le |x_1| \le |x_2| \le 3$?

A. 4040 **B.** 2025. **C.** 2023. **D.** 4035.

Lời giải

Đầu tiên ta có điều kiện ban đầu là: $x \ge 1 \vee x \le -1$, khi đó phương trình ban đầu tương đương với:

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2(x^2-1)}\log(x^2+1)\right)^2 - 2m\left(\sqrt{2(x^2-1)}\log(x^2+1)\right) + 2m + 8 = 0$ (*)

Tiếp đến ta đặt $t = x^2 \ge 1$, do $1 \le |x_1| \le |x_2| \le 3$ nên $1 \le {x_1}^2 \le {x_2}^2 \le 9 \Leftrightarrow t \in [1;9]$

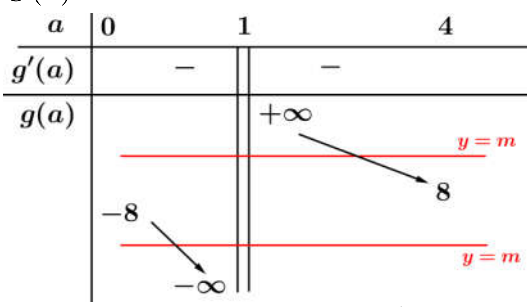
Xét hàm số $y = f(t) = \sqrt{2(t-1)}\log(t+1)$ trên $[1;9]$ có $f'(t) = \dfrac{\log(t+1)}{\sqrt{2(t-1)}} + \dfrac{\sqrt{2(t-1)}}{(t-1)\ln 10} > 0$ tức hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[1;9]$, khi đó ta suy ra $f(1) \le f(t) \le f(9) \Leftrightarrow 0 \le f(t) \le 4$.

Đặt $u = \sqrt{2(x^2-1)}\log(x^2+1)$ thì khi đó $a \in [0;4]$, lúc này phương trình (*) viết lại thành:

$\Rightarrow a^2 - 2ma + 2m + 8 = 0 \ (1)$, do $a = 1$ không phải là nghiệm của (1) nên ta xét $a \ne 1$ thì (1) trở thành:

$2m = \dfrac{a^2+8}{a-1}$ (2). Xét hàm số $g(a) = \dfrac{a^2+8}{a-1}$ trên $[0;4]\setminus\{1\}$ có $g'(a) = \dfrac{a^2-2a-8}{(a-1)^2} = 0$. Giải $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$.

Khi đó ta có bảng biến thiên hàm số $g(a)$ như sau:



Mỗi 1 giá trị a cho 1 giá trị t, mỗi 1 giá trị t cho ra 2 giá trị x nên để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) phải có nghiệm duy nhất, khi đó ta suy ra $\left[\begin{array}{l} 2m \ge 8 \\ 2m \le -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m \le -4 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in[-2023;2023]} m \in [-2023;-4] \cup [4;2023]$

Với $m \in \mathbb{Z}$ ta suy ra có tất cả 4040 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ SỞ THÁI NGUYÊN LẦN 2 (MÃ 109)

Câu 38. Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên 8 tấm, xác suất để chọn được 5 tấm ghi số lẻ, 3 tấm ghi số chẵn trong đó ít nhất 2 tấm có ghi số chia hết cho 4 bằng

A. $\dfrac{417}{4199}$ **B.** $\dfrac{90}{4199}$. **C.** $\dfrac{41}{4199}$. **D.** $\dfrac{504}{4199}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{20}^8$ (cách). Trong 20 tấm thẻ có 10 tấm mang số lẻ, có 5 tấm mang số chẵn không chia hết cho 4 và 5 tấm thẻ mang số chẵn chia hết cho 4, do đó ta có 2 trường hợp như sau

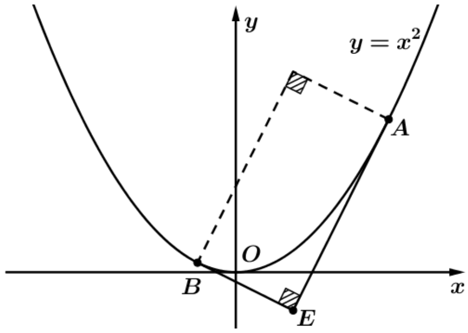
- Trường hợp 1: Lấy được 5 tấm mang số lẻ, 2 tấm mang số chẵn chia hết cho 4 và tấm mang 1 số chẵn không chi hết cho 4 có $C_{10}^5 C_5^2 C_5^1$ (cách).
- Trường hợp 2: Lấy được 5 tấm mang số lẻ, 3 tấm mang số chẵn chia hết cho 4 có $C_{10}^5 C_5^3$ (cách).

Suy ra xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_{10}^5 C_5^2 C_5^1 + C_{10}^5 C_5^3}{C_{20}^8} = \dfrac{504}{4199}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C), biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai tiếp tuyến tại A, B tạo thành một hình chữ nhật (H) có chiều dài gấp đôi chiều rộng (minh họa như hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến tại A, B, S_2 là diện tích hình chữ nhật (H). Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{125}{768}$ **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{125}{128}$.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $A(a;a^2), B(b;b^2)$ thì khi đó không mất tính tổng quát, xét $a > 0, b < 0$.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A, B, khi đó: $\begin{cases} d_1 : y = 2ax - a^2 \\ d_2 : y = 2bx - b^2 \end{cases}$

Do $d_1 \perp d_2$ nên $2a.2b = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4a} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{4a}; \frac{1}{16a^2}\right)$ tức $d_2 : y = -\frac{x}{2a} - \frac{1}{16a^2}$.

Gọi $E = (d_2) \cap (d_1)$, khi đó giải hệ theo ẩn a thu được $E\left(\frac{4a^2-1}{8a}; -\frac{1}{4}\right)$, từ đó ta suy ra chiều dài và chiều rộng lần lượt là: $EA = \frac{\sqrt{(4a+1)^3}}{8a}; EB = \frac{\sqrt{(4a+1)^3}}{16a^2}$, mà chiều dài gấp đôi chiều rộng tức $EA = 2EB$ nên giải phương trình suy ra được $a = 1$ tức ta thu được $S_2 = EA.EB = \left.\frac{(4a+1)^3}{128a^3}\right|_{a=1} = \frac{125}{128}$.

Tiếp đến ta suy ra: $\begin{cases} d_1 : y = 2x - 1 \\ d_2 : y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{16} \end{cases}$ và $A(1;1), B\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right), E\left(\frac{3}{8}; -\frac{1}{4}\right)$, từ đó ta suy ra được

$S_1 = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}} \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 dx + \int_{\frac{3}{8}}^{1} (x-1)^2 dx = \frac{125}{768}$. Vậy ta kết luận được tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{125}{768}.\frac{128}{125} = \frac{1}{6}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 50. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a > 1, b > 0, c > 0$ và bất phương trình $a^{x^2}.(b+4c)^{2x+3} \geq 1$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{16a}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = m, b = n, c = p$. Khi đó, tổng $m + n + p$ bằng

A. $\frac{81}{16}$ **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{57}{20}$. **D.** $\frac{51}{16}$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$$\ln a^{x^2} + \ln(b+4c)^{2x+3} \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 \ln a + (2x+3)\ln(b+4c) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Khi đó ta luôn có: $\begin{cases} \ln a > 0,\ \forall a > 1 \\ \Delta' = \ln^2(b+4c) - 3\ln a \ln(b+4c) \le 0 \end{cases}$ (luôn đúng).

$\Leftrightarrow (b+4c)(\ln(b+4c) - 3\ln a) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \ln(b+4c) \le \ln(a^3) \Leftrightarrow 1 \le b+4c \le a^3$

Từ đó ta suy ra: $P = \dfrac{16a}{3} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{16a}{3} + \dfrac{1^2}{b} + \dfrac{2^2}{4c} \ge \dfrac{16a}{3} + \dfrac{(1+2)^2}{b+4c} \ge \dfrac{16a}{3} + \dfrac{9}{a^3} = \dfrac{16a}{9} + \dfrac{16a}{9} + \dfrac{16a}{9} + \dfrac{9}{a^3}$

$\ge 4\sqrt[4]{\dfrac{16a}{9}.\dfrac{16a}{9}.\dfrac{16a}{9}.\dfrac{9}{a^3}} = 4\sqrt[4]{\dfrac{16^3}{81}} = \dfrac{32}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{16a}{3} = \dfrac{9}{a^3}; \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{4c} \\ b+4c = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c) = \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{8}; \dfrac{9}{16}\right)$

Vậy ta suy ra $m+n+p = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{8} + \dfrac{9}{16} = \dfrac{51}{16}$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI

Câu 48. Cho các số phức u, v, w thỏa mãnm các điều kiện $|u+4-2i| = 2; |3v-1+i| = |2v+1-i|$ và $|w| = |\overline{w}+2+2i|$. Tìm $|w|$ khi $S = |u-w| + |v-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất

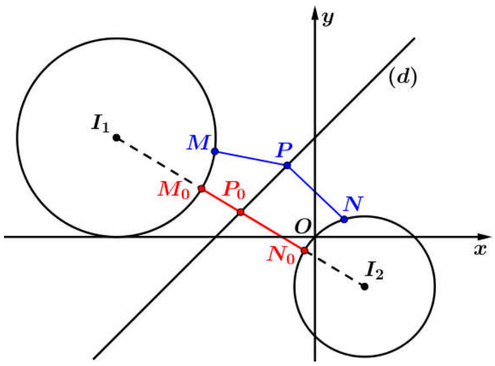
A. $|w| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ **B.** $|w| = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $|w| = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$. **D.** $|w| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức u, v, w. Khi ấy bằng biến đổi đại số ta dễ dàng suy ra $M \in (C_1)$ tâm $I_1(-4;2)$, bán kính $R_1 = 2$ và $N \in (C_2)$ tâm $I_1(1;-1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{2}$.

Với $|w| = |\overline{w}+2+2i| \Leftrightarrow |w| = |w+2-2i|$ ta suy ra $P(w) \in (d): x-y+2=0$.

Lúc này ta có hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ ta suy ra: $S = |u-w| + |v-w| = MP + NP \ge M_0P_0 + N_0P_0 = M_0N_0 = I_1I_2 - (R_1 + R_2) = \sqrt{34} - (2+\sqrt{2})$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $P_0 = I_1I_2 \cap (d)$. Ta có phương trình $(I_1I_2): 3x+5y+2=0$ thì khi đó $P_0(a;b)$ là nghiệm của hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3a+5b+2=0 \\ a-b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b) = \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ tức $P_0\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, khi đó suy ra S nhỏ nhất khi $|w| = OP_0 = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(0;0;\sqrt{3}\right)$ và điểm B thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi C là điểm trên tia Oz thỏa mãn $d\left[C;AB\right]=d\left[C;OB\right]=k$. Thể tích của khối trỏn xoay tạo bởi tập hợp tất cả các điểm M mà $MC\le k$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(0.2;0.7)$ **B.** $(1.2;1.7)$. **C.** $(1.7;2.2)$. **D.** $(0.7;1.2)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{\sqrt{3}}{2}$ nên suy ra $OB=1$, mà B thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) nên suy ra thuộc đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 1 nằm trong mặt phẳng (Oxy). Khi quét tam giác OAB quanh trục Oz thì ta thu được khối tròn xoay là một khối nón (N) có trục OA, bán kính đáy OB.

Do $d\left[C;AB\right]=d\left[C;OB\right]=k$ nên suy ra C là tâm đường tròn nội tiếp khối nón (N) và với M thỏa $MC\le k$ thì M thuộc khối cầu nội tiếp khối nón (N), tóm lại thể tích cần tìm V là thể tích khối cầu nội tiếp khối nón (N).

Chọn một mặt phẳng qua trục khối nón (N) khi đó thu được thiết diện là tam giác ACD với O là trung điểm CD.

Khi đó ΔACD đều tức khi hạ đường trung trực của AD tại E và cắt AO tại F thì EF chính là bán kính mặt cầu cần tìm với F là trọng tâm ΔACD, suy ra $EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{\left(\frac{AC}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Suy ra thể tích cần tìm là $V=\frac{4}{3}\pi EF^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\approx(0.7;1.2)$. **Chọn đáp án D.**

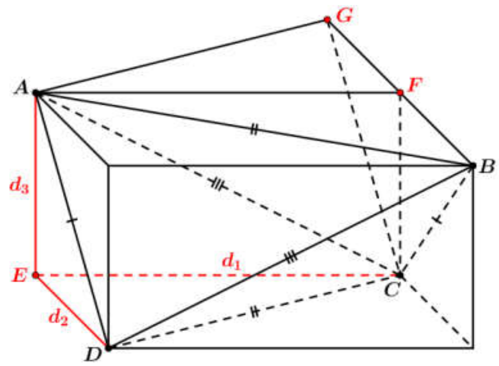
ĐỀ THI THỬ NHÓM TOÁN LIM+

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau. Biết khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện này lần lượt bằng 2,3,4. Thể tích của tứ diện $ACBD$ bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 8.

Lời giải

Ta chọn khối hộp chữ nhật sao cho các đường chéo các mặt của khối hộp là cạnh của tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau. Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Từ đó ta suy ra d_1 là khoảng cách giữa hai đoạn thẳng AD,BC, d_2 là khoảng cách giữa hai đoạn thẳng AC,BD và d_3 là khoảng cách giữa hai đoạn thẳng AB,CD. Không mất tính tổng quát ta suy ra thể tích khối hộp là: $V_{box}=d_1d_2d_3=2.3.4=24$.

Gọi $G=BF\cap(ACD)$ khi đó F là trung điểm BG và $d\left(B;(ACD)\right)=2d\left(F;(ACD)\right)=2d\left(E;(ACD)\right)$

Suy ra $V_{ABCD}=2V_{E.ACD}=2.\frac{1}{6}V_{box}=\frac{V_{box}}{3}=\frac{24}{3}=8$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-6x^2-\frac{1}{2}\int_0^2\left(3x-\frac{5}{7}t\right)f(t)dt$ có đồ thị (C). Khi đó hình phẳng bởi (C), trục tung và tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ có diện tích bằng

A. 8 **B.** $\frac{47}{5}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{86}{7}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta đặt $a=-\frac{1}{2}\int_0^2\left(3x-\frac{5}{7}t\right)f(t)dt, \forall a\in\mathbb{R}$ thì khi đó $f(x)=x^3-6x^2+a$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ là $d: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

Ta có: $f'(x)=3x^2-12x$ nên suy ra: $\begin{cases} f'(1)=-9 \\ f(1)=a-5 \end{cases}$ tức $d: y=-9(x-1)+a-5$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d ta có được: $x^3-6x^2+a=-9(x-1)+a-5$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$. Vậy $S=\int_0^4\left|x^3-6x^2+9x-4\right|dx=8$. **Chọn đáp án A.**

Câu 44. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M kẻ hai tiếp tuyến tới (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là H. Tính độ dài đoạn thẳng OH, với O là gốc tọa độ ?

A. $\sqrt{34}$ **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Lời giải

Đầu tiên gọi $M(m;1-2m)\in(d)$, khi đó tiếp tuyến có phương trình là: $y=k(x-m)+1-2m$. Từ đó ta suy ra điều kiện tiếp xúc là: $\begin{cases} k(x-m)+1-2m=\frac{x+2}{x-1} \\ k=\frac{-3}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3(x-m)}{(x-1)^2}+1-2m=\frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow 2mx^2-(4m-6)x-m-3=0$ (1)

Tiếp đến ta gọi $A\left(a;\frac{a+2}{a-1}\right), B\left(b;\frac{b+2}{b-1}\right)$ thì khi đó: $\begin{cases} a+b=\frac{2m-3}{m} \\ ab=\frac{-m-3}{2m} \end{cases} \Leftrightarrow a+b-2ab=3 \Rightarrow b=\frac{3-a}{1-2a}$. (2)

Do điều kiện cần có hai tiếp tuyến nên $2m\neq 0$ và $\Delta'_{(1)}=(2m-3)^2+2m(m+3)=6m^2-6m+9\neq 0$ (luôn đúng).

Khi đó từ (2) suy ra: $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;\frac{-3(b-a)}{ab-a-b+1}\right)=\lambda(ab-a-b+1;-3)$

Suy ra: $\overrightarrow{n_{AB}}=(3;(a-1)b-a+1)=\left(3;\frac{(a-1)(a+2)}{1-2a}\right)=\frac{1}{1-2a}(3-6a;(a-1)(a+2))$

Khi đó $(AB): (3-6a)(x-a)+(a-1)(a+2)\left(y-\frac{a+2}{a-1}\right)=0 \Leftrightarrow -(y+5)a^2+(6x-y+7)a+(2y-3x+4)=0$

Suy ra tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y+5=0 \\ 6x-y=-7; 2y-3x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow H(-2;-5)\Rightarrow OH=\sqrt{29}$

Chọn đáp án C.

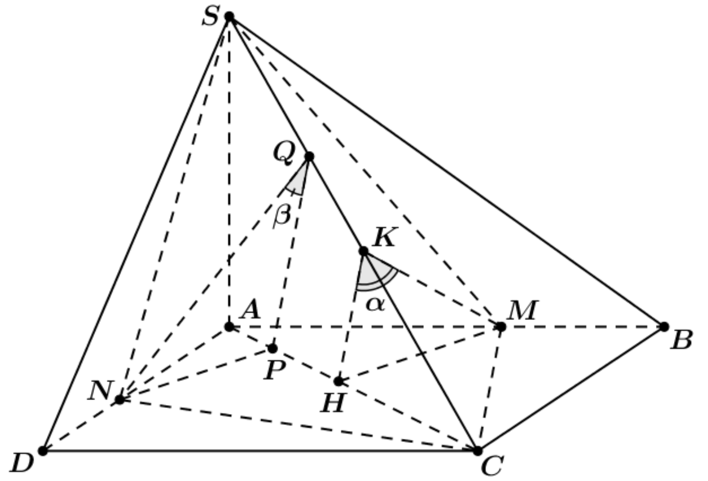
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$ và $SA = 2a$ với SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SMC) và (SNC) bằng 45 độ. Thể tích khối chóp $S.AMCN$ nhỏ nhất bằng

A. $\left(2\sqrt{2}-\dfrac{11}{6}\right)a^3$ **B.** $\dfrac{10}{21}a^3$. **C.** $\left(\dfrac{11}{3}-2\sqrt{2}\right)a^3$. **D.** $\dfrac{4}{5}a^3$.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta chuẩn hóa $a = 1$, khi đó ta có hình vẽ như sau:



Kẻ $MH \perp AC, NP \perp AC, HK \perp SC, PQ \perp SC$ thì khi đó ta suy ra: $\begin{cases} \widehat{((SMC);(SAC))} = \widehat{MKH} = \alpha \\ \widehat{((SNC);(SAC))} = \widehat{NQP} = \beta \end{cases}$.

Tiếp đến ta đặt $\begin{cases} AM = 2x \\ AN = y \end{cases}$, $(0 \le x, y \le 1)$ thì $\begin{cases} MH = AM\sin\widehat{BAC} = \dfrac{4x}{\sqrt{5}} \\ NP = AN\cos\widehat{BAC} = \dfrac{y}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} HK = HC\sin\widehat{SCA} = \dfrac{2(5-4x)}{3\sqrt{5}} \\ PQ = PC\sin\widehat{SCA} = \end{cases}$

Từ đó ta suy ra: $\tan\alpha = \dfrac{MH}{HK} = \dfrac{3x}{5-4x}; \tan\beta = \dfrac{NP}{PQ} = \dfrac{3y}{5-y}$.

Vì $\widehat{((SMC);(SNC))} = 45^\circ$ nên $\tan(\alpha+\beta) = \tan(\pm 45^\circ) = \pm 1 \Leftrightarrow \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + 4y - 2xy = 5 \\ x - 2y + 4xy = 5 \end{array}\right.$

Vì $x - 2y + 4xy = 5 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{4} \le xy \le -1$ (mâu thuẫn với $0 \le x, y \le 1$) nên suy ra $7x + 4y - 2xy = 5$. (1)

Khi đó ta có: $V_{S.AMCN} = V_{S.AMC} + V_{S.ANC} = \dfrac{SA}{6}(BC.AM + CD.AN) = \dfrac{2}{3}(x+y)$

Thế (1) vào khi đó ta suy ra: $V_{S.AMCN} = \dfrac{2}{3}(x+y) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{9}{2y-7} + 2 + y\right) = f(y) \ge f(0) = \dfrac{10}{21}$.

Dấu bằng xảy ra khi $S.AMCN$ suy biến thành khối chóp $S.AMC$ với $N \equiv A$ và $AM = \dfrac{10}{7}$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

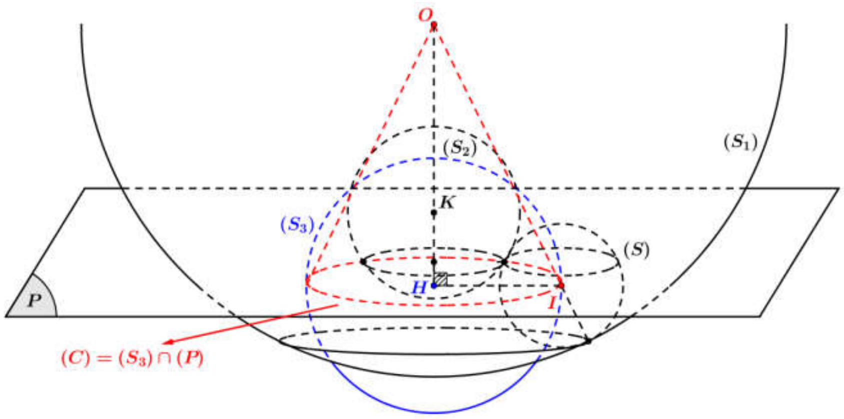
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính R_1 bằng 5 và mặt cầu $(S_2):(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=1$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2) và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x-z+6=0$. Tính thể tích hình nón có đỉnh là O và đáy là tập hợp tâm mặt cầu (S)

A. $\frac{14\pi\sqrt{2}}{9}$ **B.** $\frac{14\pi\sqrt{2}}{27}$. **C.** $\frac{7\pi\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{7\pi\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S_2) tâm $K(-2;0;2)$, bán kính $R_2=1$. Khi đó ta nhận thấy $OK\perp(P)$ nên gọi H là hình chiếu của O lên (P) (*) với O,H,K thẳng hàng. Suy ra $OH=d(O;(P))=3\sqrt{2}; KH=d(K;(P))=\sqrt{2}$.

Nhận xét: do mặt cầu (S_1) chứa mặt cầu (S_2), (S_1) cắt (P) nhưng (S_2) không cắt (P), do đó ta suy ra mặt cầu (S) tâm I, bán kính R phải tiếp xúc trong với (S_1) và tiếp xúc ngoài với (S_2), khi đó ta có hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ trên ta suy ra: $OI=R_1-R=5-R$ và $KI=R_2+R=1+R$.

Lại có: $IH^2=OI^2-OH^2=KI^2-KH^2 \Leftrightarrow (5-R)^2-(3\sqrt{2})^2=(1+R)^2-(\sqrt{2})^2$, suy ra $R=\frac{2}{3}$ tức $IH=\frac{\sqrt{7}}{3}$

Suy ra tập hợp các điểm I thuộc mặt cầu tâm H, bán kính $r=\frac{\sqrt{7}}{3}$, mặt khác $H\in(P)$ (*) nên suy ra I thuộc đường tròn thiết diện (C) có tâm H và bán kính $r=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Vậy thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 d(O;(P))=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 3\sqrt{2}=\frac{7\pi\sqrt{2}}{9}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để bất phương trình

$\log_2^2(2x^2+3y^2+6z^2)-(m^2+6m-8)\log_4\left(\frac{x+y+z}{4}\right)\le 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt ?

A. 4030 **B.** 4047. **C.** 4028. **D.** 4037.

Lời giải

Với $m^2+6m-8=0$, chọn hai nghiệm bất kì chẳng hạn $(x;y;z)=\left(\frac{\pm1}{\sqrt{2}};0;0\right)$ thì bất phương trình hiển nhiên thỏa mãn nên ta nhận.

Với $m^2+6m-8<0$, ta chọn $x=y=1$ và $z=t-2$ $(t>0)$, cho t tiến về 0^+ thì bất phương trình ban đầu tiến về $-\infty$, khi đó tồn tại vô số t luôn đúng tức luôn có vô số bộ $(x;y;z)$ để bất phương trình luôn đúng.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Với $m^2+6m-8>0$ thì bất phương trình ban đầu tương đương với: $\dfrac{m^2+6m-8}{2}\geq\dfrac{\log_2^2\left(2x^2+3y^2+6z^2\right)}{\log_2\left(x+y+z\right)-2}$, trong đó ta đặt $P=\dfrac{\log_2^2\left(2x^2+3y^2+6z^2\right)}{\log_2\left(x+y+z\right)-2}$ và điều kiện $x+y+z>4$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta luôn có đánh giá như sau:

$$\left(x+y+z\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}y+\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6}z\right)^2\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(2x^2+3y^2+6z^2\right)=2x^2+3y^2+6z^2$$

Khi đó ta suy ra $t=\log_2\left(x+y+z\right)>2$ tức $P\geq\dfrac{4t^2}{t-2}$. Xét hàm số $y=f\left(t\right)=\dfrac{4t^2}{t-2}$ trên $\left(2;+\infty\right)$ ta dễ thấy $P\geq f\left(4\right)=32$ với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2x=3y=6z\\x+y+z=16\end{cases}$

Do đó, nếu $\dfrac{m^2+6m-8}{2}\leq\min f\left(t\right)=32$ thì bất phương trình ban đầu vô nghiệm hoặc có duy nhất 1 bộ nghiệm $\left(x;y;z\right)=\left(8;\dfrac{16}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. (loại)

Mặt khác, với $\dfrac{m^2+6m-8}{2}>32$, ta chọn $2x=3y=6z$ thì $P=\dfrac{4t^2}{t-2}$ tồn tại vô số t để $P<\dfrac{m^2+6m-8}{2}$. (nhận)

Tóm lại, ta chỉ cần bỏ phần $m\in S:\left\{m\in\mathbb{Z}\,|\,0<m^2+6m-8\leq 64\right\}$. Mà $m\in\left[-2023;2023\right]$ nên kết luận có tất cả 4037 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho hàm số $I\left(x\right)=\int\limits_0^2\left|t^2-tx+2\right|dt$. Biết $I\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=x_0$ và $x_0^2=\sqrt{a}+b$, trong đó a,b là các số nguyên. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 16 **B.** 24. **C.** 44. **D.** 36.

Lời giải

Đầu tiên ta dễ nhận thấy phương trình $t^2-tx+2=0$ có tối đa hai nghiệm t với mọi số thực x tồn tại nên suy ra phương trình $t^2-tx+2=0\Leftrightarrow t+\dfrac{2}{t}=x$ sẽ có tối đa 2 nghiệm a,b với $0<a,b\leq 2$.

Khi đó ta biến đổi $I\left(x\right)$ như sau:

$$I\left(x\right)=\int\limits_0^2\left|t^2-tx+2\right|dt=\int\limits_0^a\left|t^2-tx+2\right|dt+\int\limits_a^b\left|t^2-tx+2\right|dt+\int\limits_b^2\left|t^2-tx+2\right|dt$$

$\geq\int\limits_0^a\left(t^2-tx+2\right)dt-\int\limits_a^b\left(t^2-tx+2\right)dt+\int\limits_b^2\left(t^2-tx+2\right)dt=\dfrac{2}{3}\left(a^3-b^3\right)+\left(b^2-a^2-2\right)x+4a-4b+\dfrac{20}{3}$. Do kết quả giá trị nhỏ nhất sau cùng là biểu thức không phụ thuộc vào tham số x nên khi đó:

Ta chọn a,b với $0<a,b\leq 2$ sao cho $\begin{cases}b^2-a^2-2=0\\x_0=a+\dfrac{2}{a}=b+\dfrac{2}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\left(a;b\right)=\left(\pm\sqrt{\sqrt{5}-1};\pm\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)$

Vậy $I\left(x\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ${x_0}^2=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2=4+2\sqrt{5}=4+\sqrt{20}$ tức $a+b=24$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Cho các số phức z, w, u thay đổi sao cho thỏa mãn $|z| = |w| = 5$ và $|z-w|^2 = 8|2u - z + w|$. Biết rằng $(z-4i)(\overline{w}-4i)$ và $(2u+z-w-8i).\overline{z-w-2u}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |u-2+i| + |2u+1-3i|$ bằng

A. $3+\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $3\sqrt{2}+1$.

Lời giải

Trước hết ta cần ghi nhớ bổ đề như sau:

Cho các điểm A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z, z_1, z_2. Khi đó:

- Nếu $(z-z_1)\overline{z-z_2}$ là số thực dương thì $AB \parallel AC \vee \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}\,(k>0)$ và ngược lại.
- Nếu $(z-z_1)\overline{z-z_2}$ là số thuần ảo thì $AB \perp AC \vee \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

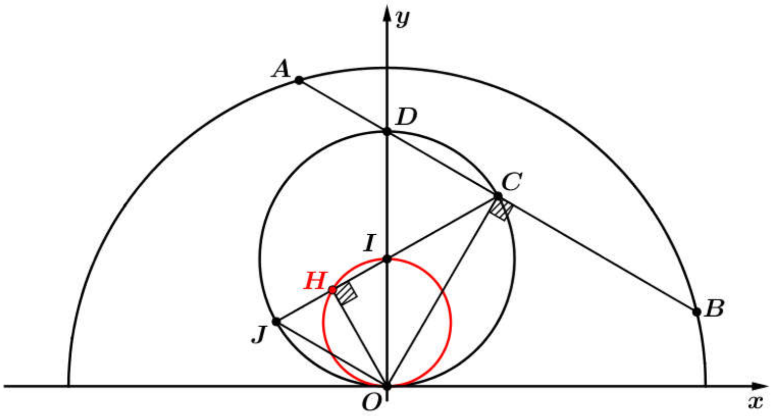
Trở lại bài toán, ta gọi $A(z), B(-w), C\left(\dfrac{z-w}{2}\right)$ và các điểm $H(u), D(4i), I(2i)$ và $J\left(4i - \dfrac{z-w}{2}\right)$

Khi đó ta suy ra C là trung điểm AB và I là trung điểm JC.

Với $(z-4i)(\overline{w}-4i)$ là số thực dương ta suy ra $DA \parallel DB; \overrightarrow{DA} = -k\overrightarrow{DB}$

Với $(2u+z-w-8i).\overline{z-w-2u}$ là số thực dương ta suy ra $HJ \parallel HC; \overrightarrow{HJ} = -k\overrightarrow{HC}$.

Từ đó ta có hình vẽ như sau:



Ta có: $A, B \in (C_1)$ tâm O, bán kính $R_1 = 5$ nên suy ra $OC \perp AB$ với $C \in (C_2)$ tâm I, bán kính $R_2 = 2$.

Mà I là trung điểm JC nên JC là đường kính của (C_2) tức $JC = 4$.

Tiếp đến ta có $O \in (C_2)$ nên $\widehat{COJ} = 90^\circ$. Mà $|z-w|^2 = 8|2u-z+w| \Leftrightarrow OC^2 = JC.HC$ nên suy ra $OH \perp JC$ tức $\widehat{OHI} = 90^\circ$, suy ra khi C thay đổi thì $H(u)$ luôn thuộc đường tròn đường kính OI tức $|u-i| = 1$

Đặt $u - i = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$ thì $x^2 + y^2 = 1$, khi đó $-\sqrt{2} \le x - y \le \sqrt{2}$.

Suy ra ta biến đổi được biểu thức P như sau:

$$P = |u-i-2+2i| + |2(u-i)-1-3i| = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} + \sqrt{(2x-1)^2+(2y+1)^2} = \sqrt{9-4(x-y)} + \sqrt{6+4(x-y)}$$

Đặt $t = x - y \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ thì khi đó ta khảo sát hàm số $f(t) = \sqrt{9-4t} + \sqrt{6+4t}$ trên $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

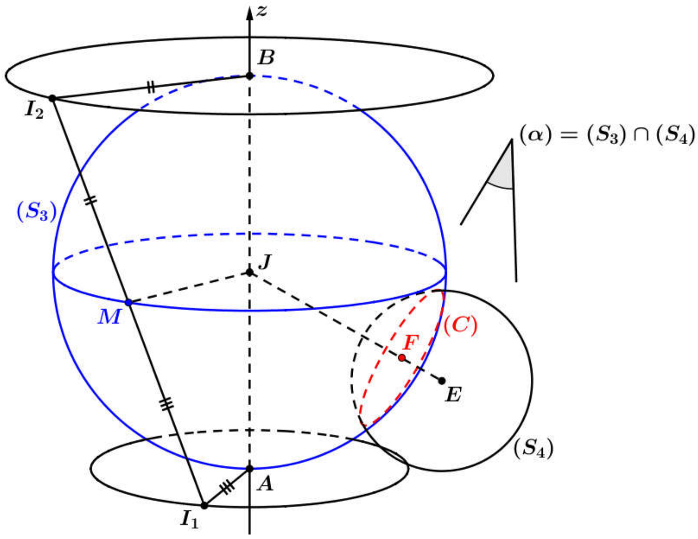
Dễ thấy được $f(t) \ge f\left(-\sqrt{2}\right) = 3+\sqrt{2}$ nên suy ra $P_{\min} = 3+\sqrt{2}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2), B(0;0;10), C(1;1;2)$ và $D(1;1;6)$. Gọi $(S_1),(S_2)$ lần lượt là các mặt cầu thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với trục Oz tại A và B; đồng thời hai mặt cầu này tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm M sao cho $MA=\sqrt{2}MC$. Giá trị lớn nhất của $P=2MC+MD$ gần nhất với giá trị nào sau đây ?

A. 9 **B.** $\frac{35}{4}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** $\frac{42}{5}$.

Lời giải



Đầu tiên ta gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm của các mặt cầu $(S_1),(S_2)$. Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với I_1I_2 tại M và cắt AB tại I thì khi ấy ta có IM, AB đều là các tiếp tuyến chung của cả hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$, khi đó ta suy ra $IA=IB=IM$ tức M thuộc mặt cầu đường kính AB là $(S_3): x^2+y^2+(z-6)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=12z-20$. (1)

Mặt khác ta gọi $M(x;y;z)$ thì với $MA=\sqrt{2}MC \Leftrightarrow MA^2=2MC^2$ ta biến đổi đại số dễ dàng suy ra điểm M thuộc mặt cầu $(S_4):(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$, khi ấy ta dễ dàng kết luận: $M\in(S_3)\cap(S_4)$.

Lấy hai phương trình mặt cầu $(S_3),(S_4)$ trừ nhau theo vế ta được mặt phẳng $(\alpha): x+y=2z-3$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra được đánh giá sau:

$$16=x^2+y^2+(z-6)^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}+(z-6)^2=\frac{(2z-3)^2}{2}+(z-6)^2 \Leftrightarrow \frac{18-\sqrt{30}}{6}\le z\le\frac{18+\sqrt{30}}{6}$$

Khi đó ta biến đổi biểu thức P như sau:

$$P=2MC+MD=\sqrt{2}MA+MD=\sqrt{2x^2+2y^2+2(z-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-6)^2}$$

$=\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)-8z+8}+\sqrt{(x^2+y^2+z^2)-(2x+2y+12z)+38}$, kết hợp với (1) và (2) ta suy ra:

$P=4\sqrt{z-2}+2\sqrt{6-z}$, đến đây ta khảo sát hàm số $g(z)=4\sqrt{z-2}+2\sqrt{6-z}$ trên $\left[\frac{18-\sqrt{30}}{6};\frac{18+\sqrt{30}}{6}\right]$

Dễ dàng đánh giá được $g(z)\le g\left(\frac{18+\sqrt{30}}{6}\right)$ nên suy ra $P_{\max}\approx 8.42$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ VĨNH PHÚC

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu lần lượt là $(S_1):(x-7)^2+(y+7)^2+(z-5)^2=24$ và $(S_2):(x-3)^2+(y+5)^2+(z-1)^2=\dfrac{3}{2}$ và cùng với mặt phẳng $(P):3x-4y-20=0$. Gọi A,M,N lần lượt là các điểm thuộc $(S_1),(S_2)$ và (P). Khi đó giá trị nhỏ nhất của $d=AM+AN$ bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\dfrac{11\sqrt{6}}{10}$.

Lời giải

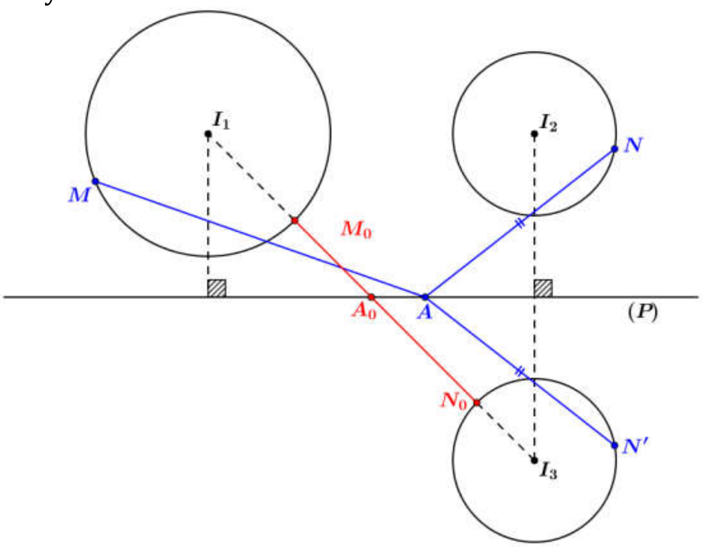
Đầu tiên ta có: (S_1) có tâm $I_1(7;-7;5)$, bán kính $R_1=2\sqrt{6}$ và (S_2) có tâm $I_2(3;-5;1)$, bán kính $R_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra: $I_1I_2=6$. Cùng với $(P):3x-4y-20=0$, ta cũng có được:

$d(I_1;(P))=\dfrac{29}{5}>R_1; d(I_2;(P))=\dfrac{9}{5}>R_2$. (1)

Mặt khác thế tọa độ I_1,I_2 vào mặt phẳng (P), nhận thấy $(3x_{I_1}-4y_{I_1}-20)(3x_{I_2}-4y_{I_2}-20)>0$ (2).

Từ (1) và (2) ta dễ dàng suy ra các mặt cầu $(S_1),(S_2)$ không cắt (P) và I_1,I_2 nằm cùng phía với mặt phẳng (P), được thể hiện ở hình vẽ dưới đây.



Gọi (S_3) là mặt cầu tâm I_3 đối xứng với (S_2) qua (P) và N' đối xứng với N qua (P), khi đó với A,M,N lần lượt là các điểm thuộc $(S_1),(S_2)$ và (P), suy ra $d=AM+AN=AM+AN'\geq I_1I_3-(R_1+R_2)$ với $N'\in(S_3)$. (3)

Trước hết ta có: $\overrightarrow{I_2I_1}=(4;-2;4)$ và $\overrightarrow{I_2I_3}=k(-3;4;0)$ (với $k>0$). Khi đó suy ra $\cos\widehat{I_1I_2I_3}=-\dfrac{2}{3}$

Do $\widehat{I_1I_2I_3}>90^\circ$ nên theo định lí Cosin ta suy ra được:

$$I_1I_3=\sqrt{I_1I_2^2+I_2I_3^2-2I_1I_2.I_2I_3\cos\widehat{I_1I_2I_3}}=\sqrt{6^2+\left(\frac{18}{5}\right)^2-2.6.\frac{18}{5}.\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{18\sqrt{6}}{5}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta kết luận $d_{\min}=I_1I_3-(R_1+R_2)=\dfrac{18\sqrt{6}}{5}-\left(2\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=\dfrac{11\sqrt{6}}{10}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50.1 Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2 + i| = |\overline{z_1} + 1 - 2i|$ và $\dfrac{1-z_2}{1+i}$ là số thuần ảo. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5 + 5i| + |z_2 - 5 + 5i|$

A. $P_{\min} = 8$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{58}$. **C.** $P_{\min} = \sqrt{57}$. **D.** $P_{\min} = 2\sqrt{14}$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.

Khi ấy bằng biến đổi đại số ta suy ra $M \in (d_1): 3x + y = 0$.

Tiếp đến ta có $w = \dfrac{1-z_2}{1+i} = \dfrac{(1-z_2)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{(1-z_2)(1-i)}{2}$ là số thuần ảo nên suy ra khi đặt $z_2 = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ ta có: $1 - i + (-x - yi)(1-i) \Rightarrow \text{Re}(2w) = 1 - x - y = 0 \Leftrightarrow x + y = 1$

Khi đó ta suy ra $N \in (d_2): x + y = 1$.

Ta có: $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5 + 5i| + |z_2 - 5 + 5i| = AM + MN + NA$.

Lấy A_1 là điểm đối xứng với A qua d_1 và A_2 là điểm đối xứng với A qua d_2, khi đó $\begin{cases} A_1(-1;-7) \\ A_2(6;-4) \end{cases}$

Suy ra: $P = A_1M + MN + NA_2 \geq A_1A_2 = \sqrt{58}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} M = A_1A_2 \cap (d_1) \\ N = A_1A_2 \cap (d_2) \end{cases}$. **Chọn đáp án B.**

ĐỀ THI THỬ SỞ QUẢNG BÌNH

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho ứng với mỗi giá trị nguyên dương của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x thỏa mãn

$$\log_5(3x^2 + xy + 36y^2) + \log_3(x^2 + 12y^2) < \log_5(xy) + \log_3(x^2 + 16xy + 12y^2) + 1$$

A. 40. **B.** 36. **C.** 21. **D.** 33.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$$\log_5(3x^2 + xy + 36y^2) + \log_3(3x^2 + 36y^2) < \log_5(5xy) + \log_3(3x^2 + 48xy + 36y^2)$$

Đặt $(a;b) = (3x^2 + 36y^2; xy)$ thì khi đó bất phương trình ban đầu trở thành:

$\log_5(a+b) + \log_3 a < \log_5 5b + \log_3(a + 48b) \Leftrightarrow \log_5\left(\dfrac{a}{5b} + \dfrac{1}{5}\right) - \log_3\left(1 + 48\dfrac{b}{a}\right) < 0$ (1)

Đặt $t = \dfrac{a}{b}$ thì bất phương trình (1) trở thành: $\log_5\left(\dfrac{t+1}{5}\right) - \log_3\left(1 + \dfrac{48}{t}\right) < 0$ (2)

Xét hàm số $f(t) = \log_5\left(\dfrac{t+1}{5}\right) - \log_3\left(1 + \dfrac{48}{t}\right)$ có $f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)\ln 5} + \dfrac{48}{t^2 \ln 3}\left(1 + \dfrac{48}{t}\right)^{-1} > 0, \ \forall t \in (0; +\infty)$

Khi đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$, mà $f(24) = 0$ nên suy ra bất phương trình (2) tương đương với $t < 24 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} < 24 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2 + 36y^2}{xy} < 24 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 12y^2}{xy} < 8 \Leftrightarrow x^2 - 8xy + 12y^2 < 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x - 6y) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y < x < 6y \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$. Do mỗi giá trị nguyên dương của y có không quá 15 giá trị nguyên dương của x nên khi đó

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Ta có: $S_x = [2y+1; 6y-1]$ và tập S_x là tập con của $[1;15]$, tức khi đó ta suy ra:

$(6y-1)-(2y+1) = 4y-2 \le 15 \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}^+} y \in \{1;2;3;4\}$

Với $y=1$ thì $x\in[3;6]$ tức có 3 cặp. Với $y=2$ thì $x\in[5;11]$ tức có 7 cặp

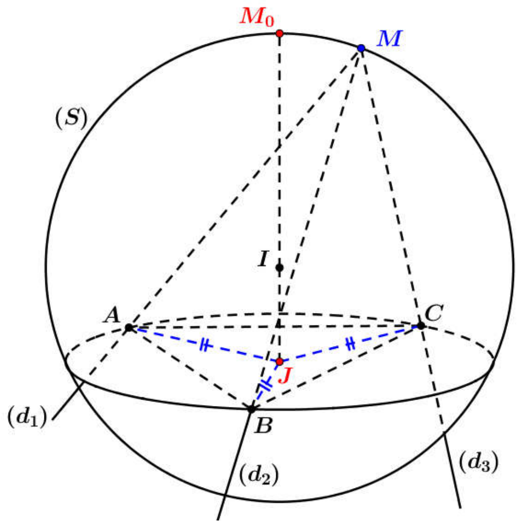
Với $y=3$ thì $x\in[7;17]$ tức có 11 cặp. Với $y=4$ thì $x\in[9;23]$ tức có 15 cặp

Tổng cộng có tất cả 36 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z-11=0$ và điểm $M(0;-2;1)$. Gọi d_1, d_2, d_3 là ba đường thẳng thay đổi không đồng phẳng cùng đi qua điểm M và lần lượt cắt mặt cầu (S) tại điểm thứ hai là A, B, C. Thể tích của tứ diện $MABC$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{50\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{1000\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{100\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{500\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải



Ta có mặt cầu (S) tâm $I(3;2;1)$, bán kính $R=5$ và $IM=5$ nên suy ra $M\in(S)$. Tiếp đến ta gọi r là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với tâm J, khi đó $d(M;(ABC)) = MI + IJ \le 5 + IJ$ khi $MI \perp (ABC)$.

Ta đặt $(\widehat{AJB}; \widehat{BJC}; \widehat{CJA}) = (\alpha;\beta;\gamma)$ khi đó ta suy ra: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AJB} + S_{\Delta BJC} + S_{\Delta CJA} = \dfrac{r^2}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$.

Mặt khác ta lại có: $\alpha+\beta+\gamma = 360^\circ$ nên theo bất đẳng thức Hàm Jensen, ta luôn có đánh giá như sau:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \le 3\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3\sin(120^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Khi ấy ta suy ra $V_{M.ABC} = \dfrac{d(M;(ABC))S_{\Delta ABC}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}(5+IJ)(25-IJ^2)}{4}$, đặt $IJ = x \in [0;5]$

Khi ấy ta xét hàm số $f(x) = (5+x)(25-x^2)$, theo bất đẳng thức Cosi ta luôn có:

$$(5+x)(25-x^2) = \frac{(5+x)(5+x)(10-2x)}{2} \le \frac{(10-2x+5+x+5+x)^3}{2.27} = \frac{20^3}{2.27} = \frac{4.10^3}{27}$$

Vậy ta kết luận: $V_{M.ABC} \le \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{4.10^3}{27} = \dfrac{1000\sqrt{3}}{27}$ dấu bằng xảy ra khi $MABC$ là khối chóp đều. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ NGHỆ AN LẦN 2

Câu 40. Trên tập số phức, cho phương trình $z^2-8z+|m-1|=0$ với $m\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;90]$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|\,|z_1|+|z_2|$ là một số nguyên dương.

A. 34. **B.** 32. **C.** 30. **D.** 33.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình sau: $z^2-8z+|m-1|=0$ (1) có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2

Khi đó ta có: $\Delta_{(1)}=16-|m-1|$, tiếp đến ta có hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: z_1,z_2 là các số thực, khi đó $\Delta_{(1)}=16-|m-1|>0\Leftrightarrow -15<m<17\Leftrightarrow -14\le m\le 16$

Mà $m\in[-10;90]$ nên suy ra $m\in[-10;16]$ (2)

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=8>0\\ z_1z_2=|m-1|>0\end{cases}$ nên suy ra $z_1,z_2\ge 0$, khi đó $|z_1|+|z_2|=z_1+z_2=8$ (hiển nhiên đúng).

Trường hợp 2: z_1,z_2 là các số phức, khi đó $\Delta_{(1)}=16-|m-1|<0\Leftrightarrow m<-15\vee m>17$

Mà $m\in[-10;90]$ nên suy ra $m\in[18;90]\to m-1\in[17;89]$ (3)

Khi đó $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{|m-1|}\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow\sqrt{m-1}\in\mathbb{N}^*$ tức $m-1$ là một số chính phương. (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra $m-1\in\{25;36;49;64;81\}\Leftrightarrow m\in\{26;37;50;65;82\}$ (5)

Từ (2) và (5) ta suy ra $\Leftrightarrow m\in\{-10;-9;...;15;16;26;37;50;65;82\}$ tức có 27+5=32 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn đáp án B.**

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn $x+y\log_2(x+3y)\le 8$ và $27^y(1+\log_3 x)\ge 1$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Đầu tiên ta xét bất phương trình sau: $x+y\log_2(x+3y)\le 8$ $(*)\Leftrightarrow x+3y+y\log_2(x+3y)\le 8+3y$

$\Leftrightarrow (x+3y)+y(\log_2(x+3y)-3)\le 8$.

Hướng 1: Áp dụng bổ đề $\alpha t+(a^t-b)\le c$ ta suy ra: $x+3y\le 8\Rightarrow x\le 8-3y<8\Leftrightarrow x<8$. (1)

Hướng 2: Đặt $u=\log_2(x+3y)\Rightarrow x=2^u-3y$, thế vào (*) ta có: $2^u+y(u-3)-8\le 0$

Xét hàm số $f(u)=2^u+y(u-3)-8$ có $f'(u)=2^u\ln 2+y>0$ với mọi $u,y\in\mathbb{R}^+$.

Khi đó suy ra hàm số $f(u)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}^+$, mà $f(3)=0$ nên suy ra bất phương trình $f(u)\le 0$ tương đương với $u\le 3\Leftrightarrow \log_2(x+3y)\le 3\Leftrightarrow x+3y\le 8$ (1)

Ta cũng có được: $\forall y>0\to 27^y>1$ và $\forall x\in\mathbb{Z}^+\to\log_3 x>0$ thì $27^y(1+\log_3 x)\ge 1$ (luôn đúng) (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $1\le x\le 8\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} x\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$ tức có 7 giá trị nguyên x. **Chọn đáp án B.**

Câu 47. Xét ba số phức z_1, z_2, w thỏa mãn $(z_1-1-i)\left(i.z_1+i.\overline{z_1}-2-2i\right)$ là số thực, $|z_2|=|z_2-2-2i|$, $\dfrac{w-7-i}{z_2-7-i}$ là số thực dương và $|w-7-i|=\dfrac{12}{|z_2-7-i|}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1-w|$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(2;3)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(5;6)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Trước hết ta gọi M,N,P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, w.

Ta có: $A=i(z_1-1-i)\left(z_1+\overline{z_1}-2+2i\right)=i(z_1-1-i)\left(z_1-1-i+\overline{z_1-1-i}+2i\right)$ là số thực. (1)

Đặt $a=z_1-1-i=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$ thì khi đó $ia\left(a+\overline{a}+2i\right)=\overline{ia\left(a+\overline{a}+2i\right)}$

$\Leftrightarrow ia\left(a+\overline{a}+2i\right)+i\overline{a}\left(a+\overline{a}-2i\right)=0 \Leftrightarrow i(x+yi)(2x+2i)+i(x-yi)(2x-2i)=0 \Leftrightarrow y=x^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $z_1=(x+1)+\left(x^2+1\right)i,\ (x\in\mathbb{R}) \Rightarrow z_1=(x+1)+\left((x+1)^2-2(x+1)+2\right)i,\ (x\in\mathbb{R})$

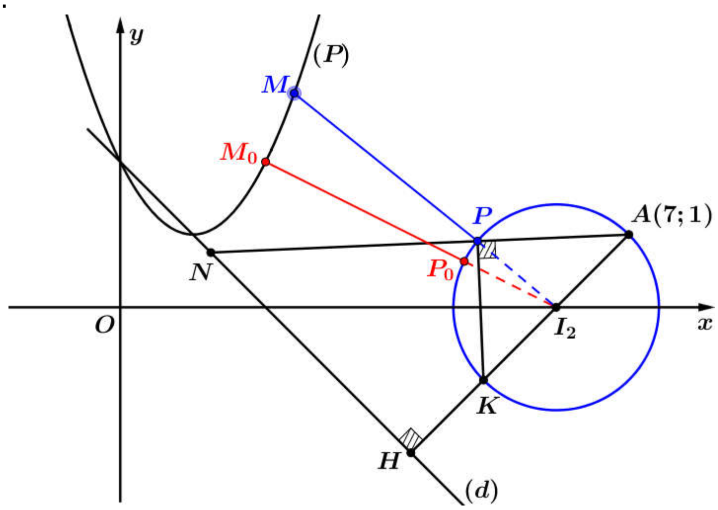
Suy ra điểm $M(z_1)$ thuộc $(P): y=x^2-2x+2$

Tiếp đến ta có: $|z_2|=|z_2-2-2i|$, biến đổi đại số dễ dàng suy ra $N(z_2)\in(d): x+y=2$.

Gọi điểm $A(7;1)$, khi đó với $\dfrac{w-7-i}{z_2-7-i}=\dfrac{(w-7-i)\overline{z_2-7-i}}{|z_2-7-i|^2}$ là số thực tức $(w-7-i)\overline{z_2-7-i}$ là số thực nên khi ấy ta suy ra $\overrightarrow{PA}=n\overrightarrow{NA}\ (n>0)$.

Lại có $|w-7-i|=\dfrac{12}{|z_2-7-i|} \Leftrightarrow AN.AP=12$. Gọi H là hình chiếu của A lên (d) là điểm $K\in AH$ sao cho thỏa $AN.AP=AH.AK=12$ khi ấy suy ra $\Delta APK \backsim \Delta AHN\ (c-g-c)$ tức $\widehat{APK}=\widehat{AHN}=90^\circ$, khi ấy ta suy ra $P(w)$ thuộc đường tròn đường kính AK tức (C_2) tâm $E(6;0)$, bán kính $R_2=\sqrt{2}$.

Từ đó ta có hình vẽ như sau:



Với $M\left(a;a^2-2a+2\right)$, ta có: $MI_2=f(a)=\sqrt{(a-6)^2+\left(a^2-2a+2\right)^2}\ge f(2)=2\sqrt{5}$

Suy ra $|z_1-w|=MP=MI_2-I_2P=MI_2-\sqrt{2}\ge 2\sqrt{5}-\sqrt{2}\in(3;4)$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho hai điểm thay đổi A, B lần lượt thuộc đồ thị $y = e^{x-1}$ và $y = \ln(x-1)$. Giá trị nhỏ nhất của AB bằng $a + b\sqrt{2}, (a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 1.

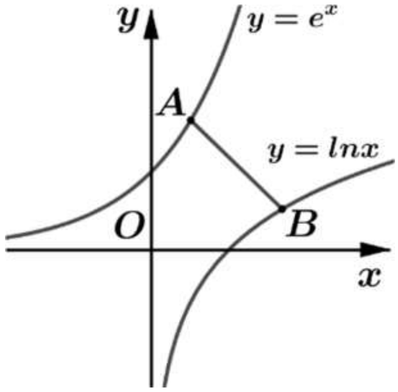
Lời giải

Cách 1:

Đầu tiên ta nhận thấy đồ thị của hai hàm số $y = e^{x-1}$ và $y = \ln(x-1)$ nhận $y = x - 1$ làm trục đối xứng nên khi đó ta lần lượt thực hiện phép tịnh tiến 1 đơn vị về bên trái theo trục hoành cho cả 3 đồ thị nêu trên thì khi đó ta có bài toán trở thành:

"Gọi A và B lần lượt là hai điểm di động trên hai đồ thị hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ như hình vẽ. Khoảng cách giữa hai điểm A, B nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?"

Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ nên AB đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow A$, B đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$. Gọi $A(a; e^a)$, khi đó

$AB = 2d(A, d) = \sqrt{2}\left|a - e^a\right| = \sqrt{2}\left|f(a)\right| \geq \sqrt{2}\min\limits_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right| = \sqrt{2}\left|f(0)\right| = \sqrt{2}$. **Chọn đáp án D.**

Cách 2: (from Mr.Triển)

Đầu tiên ta nhận thấy đồ thị của hai hàm số $y = e^{x-1}$ và $y = \ln(x-1)$ nhận $y = x - 1$ làm trục đối xứng nên khi đó ta gọi $A(a; e^{a+1}), B(e^b - 1; b)$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwartz, ta có: $AB^2 = \left(e^{a+1} - b\right)^2 + \left(e^b - a - 1\right)^2 \geq \dfrac{\left(e^{a+1} - b + e^b - a - 1\right)^2}{2}$

Mặt khác ta có: $e^{a+1} + e^b \geq 2e^{\frac{a+b+1}{2}} \geq 2\left(\dfrac{a+b+1}{2} + 1\right) = 2 + (a+b+1)$ (sử dụng $AM - GM$ và Bernoulli)

Nên khi đó ta suy ra $AB^2 \geq \dfrac{\left(2(a+b+1) - (a+b+1)\right)^2}{2} = 2 \Leftrightarrow AB \geq \sqrt{2}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-8;-1;6), B(1;2;3), C(-4;14;\sqrt{11})$. Điểm M di động trên mặt cầu $(S_1):(x-4)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=49$ sao cho tam giác MAB có $2\sin\widehat{MAB}=\sin\widehat{MBA}$. Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng CM thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(10;11)$. **B.** $(9;10)$. **C.** $(8;9)$. **D.** $(7;8)$.

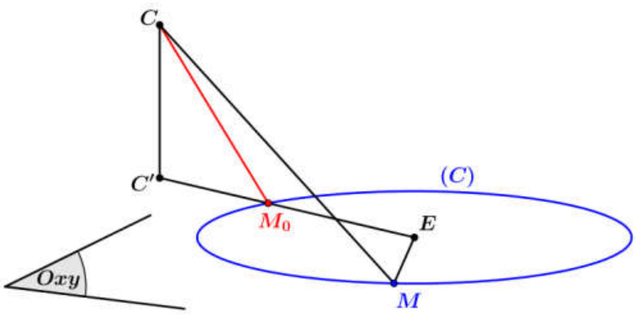
Lời giải

Áp dụng định lí hàm số sin trong ΔMAB, ta có: $2\dfrac{MB}{R_{(MAB)}}=\dfrac{MA}{R_{(MAB)}} \Leftrightarrow MA=2MB$. Đặt $M(x;y;z)$ thì khi đó ta có:

$MA^2=4MB^2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2+(x-2)^2=44$ tức $M\in(S_2)$ tâm $I_2(4;3;2)$, bán kính $R_2=2\sqrt{11}$.

Mặt khác ta cũng có $M\in(S_1)$ tâm $I_1(4;3;-3)$, bán kính $R_1=7$ với $I_1I_2<R_1+R_2$ nên suy ra

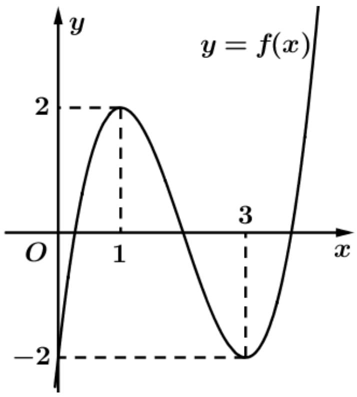
$\begin{cases} M\in(C)=(S_1)\cap(S_2) \\ (C)\subset(Oxy) \end{cases}$, với (C) có tâm $E(4;3;0)$, bán kính $r=2\sqrt{10}$. Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Gọi C' là hình chiếu của C lên mặt phẳng (Oxy), khi đó ta có $C(-4;14;0)$ và $EC'>r$ ta suy ra:

$\begin{cases} EC'=\sqrt{185} \\ CM_{\max}=CM_0=\sqrt{CC'^2+C'M_0{}^2}=\sqrt{CC'^2+(C'E-r)^2}=\sqrt{11+\left(\sqrt{185}-2\sqrt{10}\right)^2}\in(7;8) \end{cases}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^4(x)+2=3f^2(x)+|f(x)+m|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt ?

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình tương đương với: $f^4(x)-3f^2(x)+2=|f(x)+m|$

Tới đây ta có hai hướng giải quyết như sau:

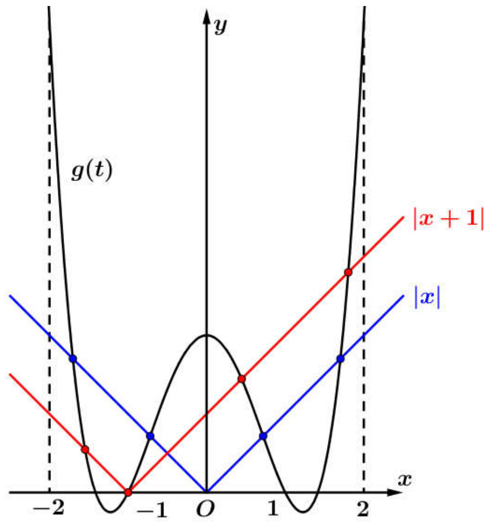
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

<u>Hướng 1:</u> Đặt $t = f\left(x\right)$ thì phương trình trở thành: $t^4 - 3t^2 + 2 = \left|t+m\right|$, với $t \in \left(-2;2\right)$ thì 1 giá trị t cho ra 3 giá trị x, với $t \in \left(-\infty;-2\right) \cup \left(2;+\infty\right)$ thì 1 giá trị t cho ra 1 giá trị x và với $t \in \left\{-2;2\right\}$ thì 1 giá trị t cho ra 2 giá trị x.

Đến đây ta quy về tương giao giữa 2 đồ thị hàm số $g\left(t\right) = t^4 - 3t^2 + 2$ và $h_m\left(t\right) = \left|t+m\right|, \forall m \in \mathbb{Z}$.

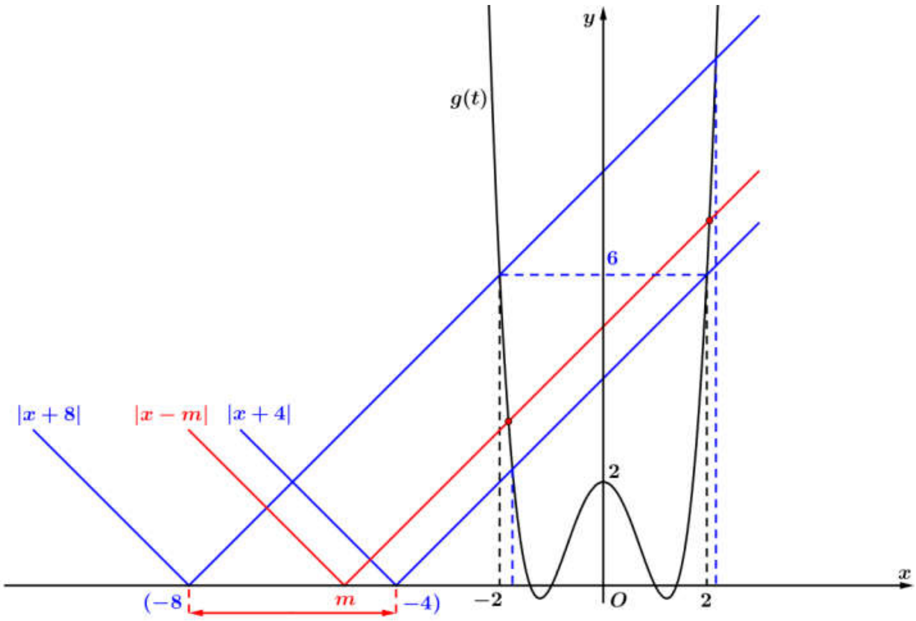
<u>Trường hợp 1:</u> $m = 0 \Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + 2 = \left|t\right|$, dựa vào đồ thị dễ dàng thấy có 4 nghiệm t tức có hơn 4 nghiệm x phân biệt nên ta loại

<u>Trường hợp 2:</u> $m = \pm 1 \Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + 2 = \left|t \pm 1\right|$ dựa vào đồ thị dễ dàng thấy có 4 nghiệm $t \in \left(-2;2\right)$ tức có 12 nghiệm x phân biệt nên ta loại



<u>Trường hợp 3:</u> $\left|m\right| \geq 2$, ta sẽ xét riêng trường hợp $m \leq -2$ rồi lấy đối xứng tập giá trị m thu được. (*)

Đến đây ta có hình vẽ như sau:



Nhận thấy cả hai đồ thị $y = \left|x+4\right|$ và $y = \left|x+8\right|$ đều cắt đồ thị $g\left(t\right)$ tại hai điểm tương ứng cho ra 3 giá trị x phân biệt nên suy ra để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m \in \left(-8;-4\right)$.

Kết hợp với (*) ta suy ra $m \in \left(-8;-4\right) \cup \left(4;8\right) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \left\{-7;-6;-5;5;6;7\right\}$ tức có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn.

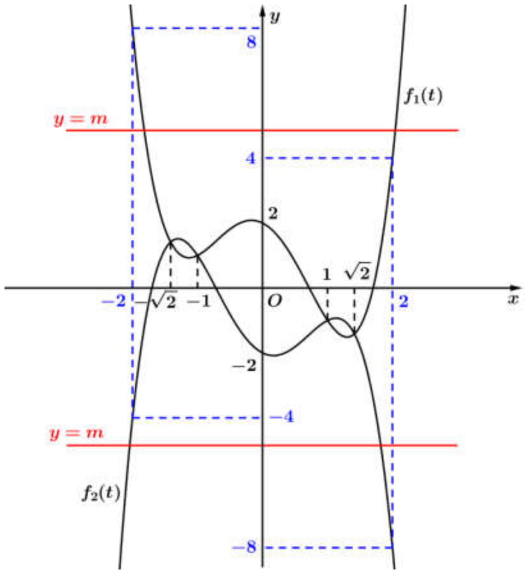
Chọn đáp án C.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Hướng 2:

Đặt $t = f(x)$ thì hệ phương trình trở thành: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^4 - 3t^2 + 2 = t + m \\ t^4 - 3t^2 + 2 = -t - m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = t^4 - 3t^2 - t + 2 \\ m = -t^4 + 3t^2 - t - 2 \end{array}\right.$, với $t \in (-2;2)$ thì 1 giá trị t cho ra 3 giá trị x, với $t \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ thì 1 giá trị t cho ra 1 giá trị x và với $t \in \{-2;2\}$ thì 1 giá trị t cho ra 2 giá trị x. Gọi $f_1(t) = t^4 - 3t^2 - t + 2$ và $f_2(t) = -t^4 + 3t^2 - t - 2$, ta có hình vẽ như sau:



Tương tự hướng 1, trường hợp $m = 0; m = \pm 1$ dễ dàng loại

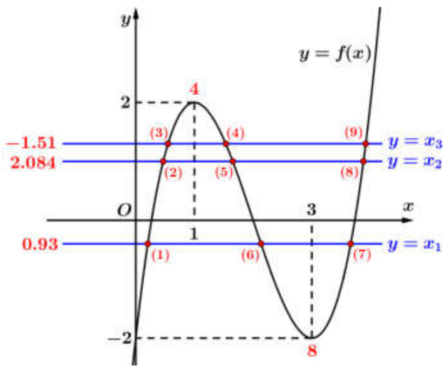
Trường hợp $m \in \{\pm 2; \pm 3\}$ thì $y = m$ cắt hệ tại 4 điểm $t \in (-2;2)$ tạo ra 12 nghiệm x nên loại.

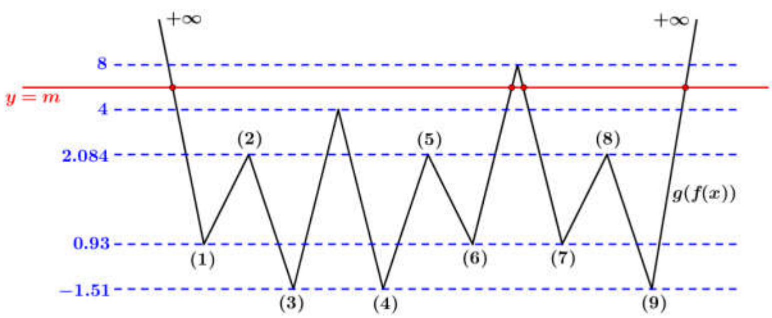
Trường hợp $m \in \{\pm 4; \pm 8\}$ thì $y = m$ cắt hệ tại 2 điểm tương ứng cho ra 3 giá trị x phân biệt.

Vậy để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m \in (-8;-4) \cup (4;8) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-7;-6;-5;5;6;7\}$ tức có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Hướng 3: Tương tự hướng 1, trường hợp $m = 0; m = \pm 1$ dễ dàng loại. Đến đây ta đánh giá như sau:" Nếu a, b, c, d là các nghiệm của pt với $m = m_0$ thì $4 - a, 4 - b, 4 - c, 4 - d$ cũng là nghiệm của pt với $m = -m_0$", khi đó ta chỉ cần xét $m \geq 2$ (*). Lúc này ta phá trị suy ra: $f^4(x) - 3f^2(x) + 2 = f(x) + m \Leftrightarrow m = t^4 - 3t^2 - t + 2$ với $t = f(x)$.

Xét hàm $g(t) = t^4 - 3t^2 - t + 2$ có $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 = 1.3 \\ x = x_2 = -0.16 \\ x = x_3 = -1.13 \end{array}\right. \Rightarrow (g(x_1); g(x_2); g(x_3)) = (-1.5; 2.08; 0.93)$.





Để thỏa yêu cầu đề bài thì $y = m$ phải cắt đồ thị $g(f(x))$ tại 4 điểm phân biệt nên $m \in (4;8)$.

Kết hợp với (*) ta suy ra $m \in \{-7;-6;-5;5;6;7\}$ tức có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ - HÒA BÌNH

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P):x+y-2z+8=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm MN. Một vector chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(6;1;2)$. **B.** $\vec{u}=(7;2;8)$. **C.** $\vec{u}=(3;2;2)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;2)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $M\in(d)$ nên $M(-1+2t;t;2+t)$ $(t\in\mathbb{R})$

Mà A là trung điểm MN nên $\begin{cases} x_N=2x_A-x_M=4-(-1+2t)=5-2t \\ y_N=2y_A-y_M=-2-t \\ z_N=2z_A-z_M=6-(2+t)=4-t \end{cases}$. Mà $N\in(P)$ nên thế vào ta có phương trình sau: $(5-2t)-(t+2)-2(4-t)+8=0 \Leftrightarrow -t+3=0 \Leftrightarrow t=3 \to N(-1;-5;1) \to \overrightarrow{AN}=(3;4;2)$.

Chọn đáp án D.

Câu 46. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho thỏa mãn $x>3y$, $0<x\le 2022$ và $\ln(x-3y)+x^2+3y^2+y=x(4y+1)$?

A. 674. **B.** 676. **C.** 673. **D.** 675.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$\ln(x-3y)+x^2-4xy+3y^2+y-x=0 \Leftrightarrow \ln(x-3y)+(x-y)\left(e^{\ln(x-3y)}-1\right)=0$. Đặt $a=\ln(x-3y)$ thì phương trình trở thành: $a+(x-y)(e^a-1)=0$ (*), trong đó với $x>3y>y$ $(x,y\in\mathbb{Z}^+)$ thì luôn có $x-y>0$

Dễ thấy với $a>0$ thì $e^a-1>0$ tức vế trái (*) luôn dương và ngược lại nên dấu bằng xảy ra khi $a=0$

Suy ra: $x-3y=1$ $(1) \Leftrightarrow 3y+1\in(0;2022] \Leftrightarrow y\in\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2021}{3}\right] \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{0;1;...;672;673\}$ tức có 674 giá trị nguyên dương y, mà quan hệ của (1) là một đường thẳng nên 1 x cho 1 y.

Vậy có 674 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và khác 0 trên $[-1;2]$, thỏa mãn $xf(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f^2(x)+2f(x)$ và $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Biết $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=a+b\ln 2$ $(a,b\in\mathbb{Z})$, biểu thức $a+b$ bằng

A. -9. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Đầu tiên ta có $xf(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f^2(x)+2f(x)$ nên suy ra

$$(xf(x))'=f(x)+xf'(x)=f^2(x)+2f(x) \Leftrightarrow -f(x)+xf'(x)=f^2(x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{f^2(x)}=1$$

Suy ra $\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)'=-1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{f(x)}=-x+C$, mà $f(1)=\dfrac{1}{2}$ tức $C=3$ nên $f(x)=\dfrac{x}{3-x}=-1+\dfrac{3}{3-x}$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{2}\left(-1+\dfrac{3}{3-x}\right)dx=\left(-x-3\ln|x-3|\right)\Big|_{-1}^{2}=-3+6\ln 2$ tức $a+b=3$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 48. Cho phương trình $m^2 - m\left(\dfrac{x^4+2x^3+x^2+3x+1}{x(x+1)}\right)+3x+1=0$ với m là tham số. Số giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2023;2023]$ để phương trình có đúng 4 nghiệm thực phân biệt là

A. 4045. **B.** 2022. **C.** 4040. **D.** 2023.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$

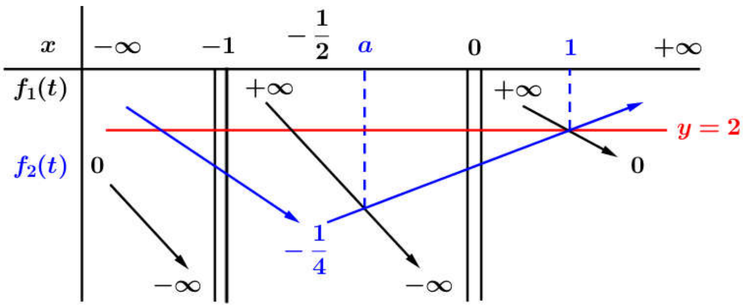
Khi đó ta có: $m^2 - m\left(\dfrac{x^4+2x^3+x^2+3x+1}{x(x+1)}\right)+3x+1=0 \Leftrightarrow m^2 - m\left[x(x+1)+\dfrac{3x+1}{x(x+1)}\right]+(3x+1)=0$

Xét: $\Delta_m = \left[x(x+1)+\dfrac{3x+1}{x(x+1)}\right]^2 - 4(3x+1) = \left[x(x+1)-\dfrac{3x+1}{x(x+1)}\right]^2$

Khi đó phương trình tương đương với : $m = x(x+1) = f_1(t)$ hoặc $m = \dfrac{3x+1}{x(x+1)} = f_2(t)$

Trước hết ta xét phương trình hoành độ giao điểm của $f_1(t)$ và $f_2(t)$, khi đó ta có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x=a\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right) \\ x=1 \end{array}\right.$

Đến đây ta có hình vẽ như sau:



Khi đó để thỏa yêu cầu bài toán thì $m\in(0;2023]\setminus\{2\}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{1;3;\ldots;2023\}$ tức có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=2, |z_2|=3$ và $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2z_1-3z_2+3-4i|$ bằng

A. $\sqrt{43}-5$. **B.** $\sqrt{115}+5$. **C.** $\sqrt{13}+5$. **D.** $\sqrt{43}+5$.

Lời giải

Ta có: $|z_1-z_2|=4 \Rightarrow |z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-\left(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\right)=16 \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}=-3$

Suy ra $|2z_1-3z_2| = \sqrt{4|z_1|^2+9|z_2|^2-6\left(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\right)} = \sqrt{4.2^2+9.3^2-6(-3)} = \sqrt{115}$

Khi đó ta suy ra: $T=|(2z_1-3z_2)+(3-4i)| \le |2z_1-3z_2|+|3-4i| = 5+\sqrt{115}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ cắt mặt phẳng $(P): x-2y-z-1=0$ tại điểm M. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a>0$ thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A. Biết rằng diện tích tam giác IAM bằng $12\sqrt{3}$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** -10. **C.** 10. **D.** -6.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Đầu tiên với $M = d \cap (P)$ ta có $M(-1+2t;-t;1+t)(t \in \mathbb{R})$, thế vào (P) giải ra được tọa độ $M(1;-1;2)$.

Tiếp đến gọi α là góc giữa d và (P), khi đó ta tính được $\sin\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}.\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_{(d)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Ta lại có $\sin\alpha = \dfrac{IA}{IM}; \cos\alpha = \dfrac{AM}{IM}; S_{IAM} = \dfrac{IA.AM}{2} = \dfrac{IM^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2} = \dfrac{IM^2 \sin 60^\circ}{4} = 12\sqrt{3} \Leftrightarrow IM^2 = 96$

Với $I \in (d)$ nên suy ra $I(-1+2u;-u;1+u)(u \in \mathbb{R})$, với $a = -1+2u > 0 \Leftrightarrow u > \dfrac{1}{2}$ nên ta suy ra:

$IM^2 = (2u-2)^2 + 2(u-1)^2 = 96 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-3 \\ u=5 \end{array}\right. \to u = 5$, suy ra $I(9;-5;6)$ tức $a+b+c=10$. **Chọn đáp án C.**

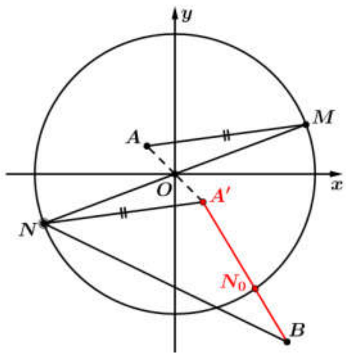
ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN THÁI BÌNH – LẦN 3

Câu 42. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = |w| = 5$ và $|z-w| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z+1-i| + |w-4+6i|$ bằng

A. $\sqrt{74}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $5+\sqrt{52}$. **D.** $5-\sqrt{52}$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, w trên mặt phẳng tọa độ. Khi đó ta suy ra M, N đều thuộc đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 5$. Mà $|z-w| = MN = 10$ nên suy ra MN là đường kính của (C).



Gọi A' là điểm đối xứng với A qua gốc tọa độ, khi đó ta thu được $A'(1;-1)$.

Suy ra $T = |z+1-i| + |w-4+6i| = AM + BN = A'N + BN \geq A'B = \sqrt{34}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $N \equiv N_0 = A'B \cap (C)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 44. Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(x) = xg'(x), g(x) = xf'(x), \forall x \in (0;+\infty)$ và $f(1) - g(1) = 4$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1, x = 2$, $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $4\ln 2$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $16\ln 2$. **D.** $8\ln 2$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} f(x) = xg'(x) \\ g(x) = xf'(x) \end{cases}, \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = -x\left[f'(x) - g'(x)\right] \\ h(x) = f(x) - g(x) \end{cases} \Leftrightarrow h(x) = -xh'(x), \forall x \in (0;+\infty)$

Suy ra: $h(x) + xh'(x) = \left(xh(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow xh(x) = C$. Mà $f(1) - g(1) = h(1) = 4$ nên $C = 4$, tức ta có được $h(x) = \dfrac{4}{x}, \forall x \in (0;+\infty)$. Vậy $S = \int_1^2 |f(x) - g(x)|dx = \int_1^2 h(x)dx = \int_1^2 \dfrac{4}{x}dx = 4\ln 2$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_3\left(x^2+y^2+3x+4y+6\right)+\log_2\left(x^2+y^2+2x+4y+5\right)\le\log_3\left(x+1\right)+\log_2\left(x^2+y^2+26x+4y+29\right)$$

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$$\log_3\left((x+1)^2+(y+2)^2+x+1\right)+\log_2\left((x+1)^2+(y+2)^2\right)\le\log_3(x+1)+\log_2\left((x+1)^2+(y+2)^2+24(x+1)\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{(x+1)^2+(y+2)^2+x+1}{x+1}\right)\le+\log_2\left(\frac{(x+1)^2+(y+2)^2+24(x+1)}{(x+1)^2+(y+2)^2}\right)\ (1).$$

Đặt $a=\dfrac{(x+1)^2+(y+2)^2}{x+1}>0$ thì khi đó (1) trở thành $\Leftrightarrow\log_3(a+1)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{a}\right)\le 0$ (2).

Xét hàm số $f(a)=\log_3(a+1)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{a}\right)$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(a)=\dfrac{1}{(a+1)\ln 3}+\dfrac{24}{a^2\ln 2}\left(1+\dfrac{24}{a}\right)^{-1}>0,\forall a\in(0;+\infty)$ nên $f(a)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

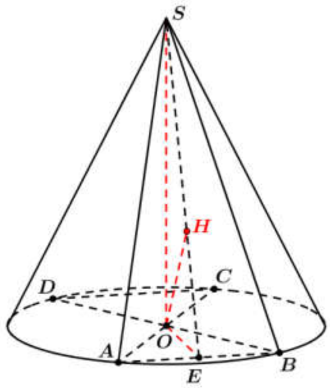
Mà $f(8)=0$ nên suy ra (2) tương đương với: $a\le 8\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+2)^2\le 8(x+1)\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+2)^2\le 16$.

Dò giá trị $x\in\{-1;0;...;6;7\}$. Dùng ***một thế lực tâm linh nào đó*** ta kết luận có 49 cặp thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho khối nón có đỉnh S, đáy là đường tròn $(O;R)$, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\dfrac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=12$. Gọi C,D lần lượt là các điểm đối xứng với A,B qua O. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{24}{5}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5}{24}$.

Lời giải



Đầu tiên ta có $V=\dfrac{\pi R^2h}{3}=\dfrac{800\pi}{3}\Leftrightarrow R=10$. Gọi E là hình chiếu của O lên AB, khi đó E là trung điểm AB và từ đó tính được $OE=\sqrt{R^2-\dfrac{AB^2}{4}}=8=SO$. Khi đó ΔSOE vuông cân tại O. Gọi H là hình chiếu của O lên SE, với $AB\perp(SOE)$ tức $AB\perp OH$ ta suy ra $OH\perp(SAB)$ tức $d(O;(SAB))=OH=\dfrac{SO}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

Vậy $d(CD;SA)=d(CD;(SAB))=d(C;(SAB))=2d(O;(SAB))=2OH=8\sqrt{2}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;10), B(3;4;6)$. Xét các điểm thay đổi sao cho MB luôn vuông góc với OA và tam giác OAM có diện tích bằng 15. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(4;5)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(6;7)$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi $M(x;y;z) \to \overrightarrow{BM} = (x-3;y-4;z-6)$, khi đó ta có:

Với $MB \perp OA$ ta suy ra $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow z = 6$, khi ấy ta suy ra $M(x;y;6)$.

Lại có: $S_{\Delta OAM} = \dfrac{OA.d(M;OA)}{2} = 15 \Rightarrow d(M;OA) = 3$ nên suy ra $x^2 + y^2 = 9$.

Khi đó $MB^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 34 - (6x + 8y)$.

Mặt khác ta có đánh giá $(6x+8y)^2 \le 100(x^2+y^2) = 900 \Leftrightarrow -30 \le -(6x+8y) \le 30$ nên ta suy ra:

$MB^2 = 34 - (6x+8y) \le 34 - (-30) = 64 \Leftrightarrow MB_{\max} = 8 \in (7;9)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m(-\infty;20)$ để hàm số $y = \left|x^3 - (m+3)x + 25 - m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải

Đầu tiên ta xét hàm số $f(x) = x^3 - (m+3)x + 25 - m^2$ có $f'(x) = 3x^2 - (m+3) = 0$.

Để hàm số $|f(x)|$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ thì ta có hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $f(x) \ge 0,\ \forall x \in (0;2)$ và $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$, khi đó ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - (m+3) \ge 0,\ \forall x \in (0;2) \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \min(3x^2 - 3),\ \forall x \in (0;2) \\ 25 - m^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -3 \\ -5 \le m \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \le m \le -3 \ (1)$$

Trường hợp 2: $f(x) \le 0,\ \forall x \in (0;2)$ và $f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$, khi đó ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - (m+3) \le 0,\ \forall x \in (0;2) \\ f(0) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \max(3x^2 - 3),\ \forall x \in (0;2) \\ 25 - m^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 9 \\ m \le -5; m \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 9 \ (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} -5 \le m \le -3 \\ m \ge 9 \end{cases} \xrightarrow{m \in (-\infty;20)} m \in \{-5;-4;-3;9;10;...;19\}$ tức 14 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án D.

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI – HẢI DƯƠNG

Câu 45. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;4)$. Gọi d là đường thẳng qua M cắt trục Oz tại A và cắt mặt phẳng (Oxy) tại B sao cho M là trung điểm AB. Phương trình của d là

A. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{8-z}{4}$. **B.** $\dfrac{2-x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{8-z}{4}$. **C.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{4}$. **D.** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-8}{4}$.

Lời giải

Đầu tiên từ giả thiết suy ra $A(0;0;a)$ và $B(b;c;0)$, mà M là trung điểm AB nên ta có:

$$x_M = \frac{0+b}{2} = 1; y_M = \frac{0+c}{2} = 2; z_M = \frac{a+0}{2} = 4 \Leftrightarrow (b;c;a) = (2;4;8), \text{ suy ra } \begin{cases} A(0;0;8) \\ B(2;4;0) \end{cases} \to \overrightarrow{AM} = (1;2;-4)$$

Chọn đáp án A.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm A thuộc mặt cầu $(S_1): x^2+(y-2)^2+(z-5)^2=1$ và điểm B thuộc mặt cầu $(S_2): (x-4)^2+(y-3)^2+(z-6)^2=9$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng $(P): x+2y-2z+15=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=MA+MB$ thuộc khoảng nào sau đây ?

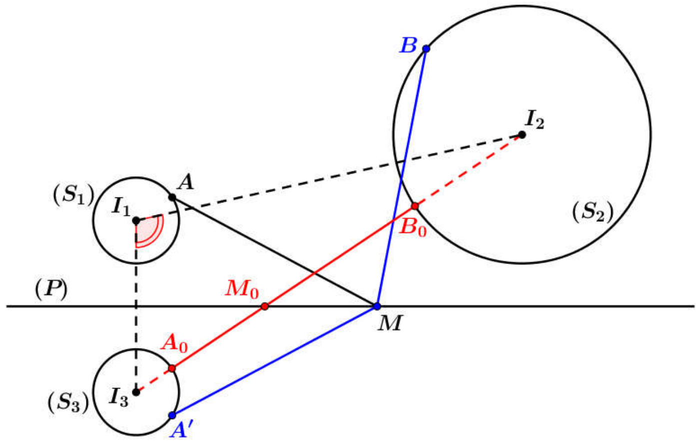
A. $(11;12)$. **B.** $(9;10)$. **C.** $(12;13)$. **D.** $(10;11)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S_1) tâm $I_1(0;2;5)$, bán kính $R_1=1$ và mặt cầu (S_2) tâm $I_2(4;3;-6)$, bán kính $R_2=3$.

Nhận thấy $I_1I_2>R_1+R_2$ nên ta suy ra (S_1) và (S_2) không cắt nhau.

Tiếp đến ta nhận thấy $d(I_1;(P))=3>R_1 \vee d(I_2;(P))=\dfrac{37}{3}>R_2$ nên suy ra (P) không cắt cả hai mặt cầu và hai tâm của mặt cầu cùng phía với mặt phẳng (P). Từ đó ta có hình vẽ như sau:



Gọi (S_3) là mặt cầu tâm $I_3(-2;-2;9)$ đối xứng với (S_1) qua (P) và A' đối xứng với A qua (P), khi đó ta dễ dàng suy ra $T=MA+MB=MA'+MB\geq A'B=I_2I_3-(R_1+R_2)$ với $A'\in(S_3)$.

Trước hết ta có: $\overrightarrow{I_1I_2}=(4;1;-11)$ và $\overrightarrow{I_1I_3}=(-2;-4;4)$. Khi đó suy ra $\cos\widehat{I_2I_1I_3}=-\dfrac{28}{3\sqrt{138}}$

Do $\widehat{I_2I_1I_3}>90^\circ$ nên theo định lí Cosin ta suy ra được:

$$I_2I_3=\sqrt{I_1I_2^{\,2}+I_1I_3^{\,2}-2I_1I_2.I_1I_3\cos\widehat{I_3I_1I_2}}=\sqrt{\left(\sqrt{138}\right)^2+6^2-2.6.\sqrt{138}.\left(-\frac{28}{3\sqrt{138}}\right)}=\sqrt{510}.$$

Từ đó kết luận $d_{\min}=I_2I_3-(R_1+R_2)=\sqrt{510}-(3+1)\in(10;11)$. **Chọn đáp án D.**

Câu 47. Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$ và $z_1(z_2+z_3+2z_1)=z_2z_3$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Đầu tiên từ giả thiết ta suy ra A,B,C đều thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R=2$.

Tiếp đến ta có: $z_1(z_2+z_3+2z_1)=z_2z_3 \Leftrightarrow z_1(z_3+2z_1)=z_2(z_3-z_1) \Leftrightarrow |z_1(z_3+2z_1)|=|z_2(z_3-z_1)|$

Do giả thiết $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$ nên suy ra $|z_3+2z_1|=|z_3-z_1| \Leftrightarrow |z_3+2z_1|^2=|z_3-z_1|^2$

Sử dụng tính chất khai triển sau: $|az\pm bw|^2=a^2|z|^2+b^2|w|^2\pm ab(\bar{z}w+z\bar{w})$, áp dụng vào ta suy ra:

$$2\left(\overline{z_1}z_3+z_1\overline{z_3}\right)+12=-\left(\overline{z_1}z_3+z_1\overline{z_3}\right)\Leftrightarrow \overline{z_1}z_3+z_1\overline{z_3}=-4.$$

Khi đó dễ dàng suy ra $\left|z_1-z_3\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_3\right|^2-\left(\overline{z_1}z_3+z_1\overline{z_3}\right)=12\Leftrightarrow\left|z_1-z_3\right|=AC=2\sqrt{3}$.(1)

Tương tự ta cũng có: $\left|z_2+2z_1\right|=\left|z_2-z_1\right|\Rightarrow\left|z_2-z_1\right|=AB=2\sqrt{3}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác ABC cân tại A.

Lại có: $\cos\widehat{AOB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA.OB}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOB}=120^\circ$ .Tương tự ta cũng có được $\widehat{BOC}=\widehat{COA}=120^\circ$

Khi ấy ta kết luận tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ tức $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)-f^2\left(x\right)=m$ có ít nhất 6 nghiệm ?

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** Vô số.

Lời giải

Đầu tiên từ bảng biến thiên ta dễ dàng suy ra $f'\left(x\right)=ax\left(x^2-4\right)\Rightarrow f\left(x\right)=a\left(\dfrac{x^4}{4}-2x^2\right)+C$

Với $f\left(0\right)=0;f\left(2\right)=-2$ ta suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{x^4}{8}-x^2$.

Đặt $t=f\left(x\right)\geq-2$ thì phương trình ban đầu trở thành: $f\left(t\right)=t^2+m\Leftrightarrow m=f\left(t\right)-t^2=\dfrac{t^4}{8}-2t^2$ (1)

Xét hàm số $g\left(t\right)=\dfrac{t^4}{8}-2t^2$ có $g'\left(t\right)=\dfrac{t^3}{2}-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\pm2\sqrt{2}\end{array}\right.$. Khi đó ta có bảng biến thiên như sau:

t	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'\left(t\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(t\right)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Tới đây ta nhận xét như sau: Với $t\in\left\{-2\right\}\cup\left(0;+\infty\right)$ thì 1 giá trị t sẽ cho ra 2 giá trị x và $t\in\left(-2;0\right)$ thì 1 giá trị t sẽ cho ra 4 giá trị x. Do đó, để phương trình ban đầu có ít nhất 6 nghiệm x phân biệt thì phương trình (1) phải có ít nhất 2 nghiệm $t\in\left(-2;0\right)$ và 1 nghiệm $t\in\left[0;+\infty\right)$. Suy ra $m\in\left[g\left(-2\right);0\right)\Leftrightarrow m\in\left[-6;0\right)$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\right\}$ tức có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại đúng 2 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn

$$\begin{cases}(x+y)(\log_2(x+y)+x+y)+3=\log_2(x+y)+4x+4y \quad (1)\\ x+y=\sqrt{2(x+4)(y+3)+m} \quad (2)\end{cases}$$

A. -170. **B.** -165. **C.** -238. **D.** -207.

Lời giải

Đặt $t=x+y$, điều kiện $t>0, \log_2 t+t>0$

Phương trình (1) tương đương với: $t(\log_2 t+t)+3=\log_2 t+4t \Leftrightarrow (t-1)\log_2 t+(t-1)(t-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ \log_2 t+(t-3)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1\\ x+y=2\end{array}\right..$$

Khi đó phương trình (2) tương đương với: $(x+y)^2=2(x+4)(y+3)+m \Leftrightarrow m=(x+y)^2-2(x+4)(y+3)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1-2(x+4)(4-x)\\ m=4-2(x+4)(5-x)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2x^2-31=f_1(x)\\ m=2x^2-2x-36=f_2(x)\end{array}\right.$. Ta nhận thấy hai hàm $f_1(x), f_2(x)$ đều là các đường cong parabol và: $\begin{cases} f_1(x)=2x^2-31\geq -31\\ f_2(x)=2x^2-2x-36=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{73}{2}\geq -\frac{73}{2}\end{cases}$, nên suy ra để thỏa yêu cầu bài toán tức đường thẳng $y=m$ cắt 2 đồ thị này tại 2 nghiệm phân biệt thì $m\in\left(\frac{-73}{2};-31\right)\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-36;-35;-34;-33;-32\}$

Suy ra tổng cần tìm bằng -170. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $x=-1$ và $x=3$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có diện tích bằng 12. Giá trị $|f(-1)-f(3)|$ bằng

A. 18. **B.** 16. **C.** 48. **D.** 19.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi $g(x)$ là đồ thị có dạng đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $h(x)=f(x)-g(x)$. Đường thẳng khi đi qua hai điểm cực trị thì sẽ đi qua cả điểm uốn của đồ thị $y=f(x)$. Lấy hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị, suy ra điểm uốn có hoành độ là $x=1$ tức phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ sẽ cho ra 3 nghiệm lần lượt là $-1;1;3$.

Khi đó từ giả thiết ban đầu ta suy ra: $h(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)$.

Với $x\in[-1;1]: f(x)>g(x)$ và $x\in[1;3]: f(x)<g(x)$, ta suy ra:

$$S=\int_{-1}^{3}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{3}\left|a(x^2-1)(x-3)\right|dx=a\left(\int_{-1}^{1}(x^2-1)(x-3)dx-\int_{1}^{3}(x^2-1)(x-3)dx\right)=12.$$

Từ ấy ta dễ dàng tính được $a=\frac{3}{2}$ tức $f'(x)=3a(x+1)(x-3)=\frac{9}{2}(x+1)(x-3)$.

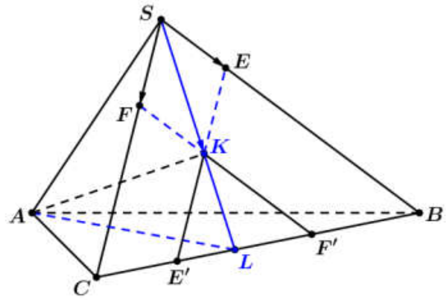
Vậy $|f(-1)-f(3)|=\left|-\int_{-1}^{3}f'(x)dx\right|=\frac{9}{2}\left|-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx\right|=\frac{9}{2}\left|\frac{32}{3}\right|=48$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ SỞ NINH BÌNH LẦN 2

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ và L là giao điểm của đường thẳng SK với đường thẳng BC. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng 56, thể tích khối chóp $S.ABL$ bằng

A. 42. **B.** 32. **C.** 21. **D.** 40.

Lời giải



Đầu tiên với $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ ta suy ra $K\in(SBC)$. Gọi E,F lần lượt là các điểm thuộc SB,SC sao cho $SE=\frac{SB}{4};SF=\frac{SC}{3}$. Tiếp đến gọi $E'=KE\cap BC;F'=KF\cap BC$ thì khi đó $CE'=\frac{CB}{4};CF'=\frac{CB}{3}\Rightarrow E'F'=\frac{5CB}{12}$.

Xét tam giác SCL có 3 điểm F,K,F' thẳng hàng: $\frac{FC}{FS}.\frac{KS}{KL}.\frac{F'L}{F'C}=1\rightarrow\frac{KS}{KL}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{BC}{F'L}=\frac{BC}{3F'L}$ (1)

Xét tam giác SBL có 3 điểm E,K,E' thẳng hàng: $\frac{EB}{ES}.\frac{KS}{KL}.\frac{E'L}{E'B}=1\rightarrow\frac{KS}{KL}=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{BC}{E'L}=\frac{BC}{4E'L}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\frac{BC}{3F'L}=\frac{BC}{4E'L}\Leftrightarrow 3F'L=4E'L$, suy ra $E'L=\frac{3}{7}E'F'=\frac{3}{7}.\frac{5CB}{12}=\frac{5BC}{28}\rightarrow\frac{BC}{F'L}=\frac{28}{5}$

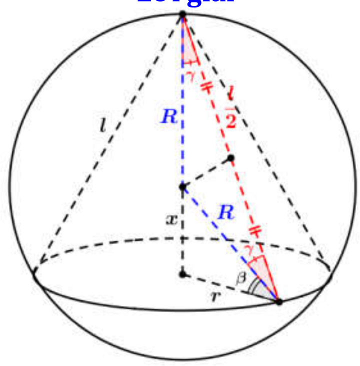
Thế tỉ số vừa phân tích vào (1) ta suy ra: $\frac{KS}{KL}=\frac{7}{5}$ tức ta suy ra $CL=CE'+E'L=\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{28}\right)BC=\frac{3}{7}BC$

Vậy ta kết luận: $\frac{V_{S.ACL}}{V_{S.ABC}}=\frac{CL}{BC}=\frac{3}{7}\rightarrow V_{S.ABL}=V_{S.ABC}-V_{S.ACL}=\left(1-\frac{3}{7}\right)V_{S.ABC}=32$. **Chọn đáp án B.**

Câu 43. Cho một mặt cầu và một hình nón nội tiếp trong mặt cầu. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác nhọn, không đều và diện tích xung quanh của hình nón bằng $\frac{3}{8}$ diện tích mặt cầu. Gọi α là góc giữa đường sinh và mặt đáy của hình nón. Biết $\cos\alpha=\frac{\sqrt{a}-b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 28. **B.** 26. **C.** 18. **D.** 16.

Lời giải



Đầu tiên ta gọi r,l là bán kính đáy và đường sinh của hình nón và R là bán kính của mặt cầu.

Khi đó ta suy ra: $\begin{cases} S_{xq-non}=\pi rl \\ S_{cau}=4\pi R^2 \end{cases} \to \pi rl=\dfrac{3}{8}\left(4\pi R^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{r}{R}\left(\dfrac{l}{2R}\right)=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \cos\beta\cos\gamma=\dfrac{3}{4}$ (1)

Từ hình vẽ ta có: $\beta+2\gamma=90^\circ \Leftrightarrow \beta=90^\circ-2\gamma \Leftrightarrow \cos\beta=\sin 2\gamma=2\sin\gamma\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\beta\cos\gamma=2\sin\gamma\cos^2\gamma$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình sau: $\sin\gamma\cos^2\gamma=\dfrac{3}{8} \Leftrightarrow \left(1-\sin^2\gamma\right)\sin\gamma=\dfrac{3}{8} \Leftrightarrow \sin\gamma=\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$

Vậy $\cos\alpha=\sin y=\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$ tức $a+b+c=18$. **Chọn đáp án C.**

Câu 44. Gọi S là tập các số nguyên dương a để bất phương trình $6^x+2^{a+2}<4.3^x+2^{x+a}$ có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên. Tổng các phần tử của S bằng

A. 204. **B.** 208. **C.** 201. **D.** 205.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $6^x-4.3^x<2^{x+a}-2^{a+2} \Leftrightarrow \left(3^x-2^a\right)\left(2^x-4\right)<0$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2^x-4>0 \\ 3^x-2^a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<a\log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<a\log_3 2$, kết hợp với yêu cầu đề bài suy ra $S_x\in[3;12]$

Suy ra $3<a\log_3 2<13 \Leftrightarrow 4{,}75<a<20{,}6$. (1)

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2^x-4<0 \\ 3^x-2^a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>a\log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow a\log_3 2<x<2$, kết hợp với yêu cầu đề bài suy ra $S_x\in[-8;1]$

Suy ra: $-9<a\log_3 2<1 \Leftrightarrow -14<a<1{,}58$. (2)

Mà a nguyên dương nên từ (1) và (2) suy ra $a\in\{1;5;6;...;18;19;20\}$, vậy tổng cần tìm bằng 201. **Chọn đáp án C.**

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2023;2023)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+6|+1$ có 3 điểm cực trị ?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Đầu tiên từ giả thiết ta có: $y=\begin{cases} x^2-2m(x-m+6)+1 & (x-m+6\ge 0) \\ x^2+2m(x-m+6)+1 & (x-m+6<0) \end{cases} \to y'=\begin{cases} 2x-2m & (x-m+6\ge 0) \\ 2x+2m & (x-m+6<0) \end{cases}$

Từ đó ta suy ra hàm số hoàn toàn không có đạo hàm tại điểm $x=m-6$ và khi đó:

Phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2m=0 \\ x-m+6>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2m=0 \\ x-m+6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=m \\ 6>0\ (LD) \end{cases} \\ \begin{cases} x=-m \\ -2m+6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=-m\ \ (m>3) \end{array}\right.$.

Suy ra điều kiện cần để hàm số có 3 điểm cực trị là $m>3$, khi đó ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		$-m$		$m-6$		m		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Điều này chứng tỏ với mọi giá trị m thỏa $m>3$ thì hàm số luôn có 3 điểm cực trị.

Mà $m\in(-2023;2023)$ nên ta suy ra $m\in[4;2022]$ tức có 2019 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=3\\z=-2+t\end{cases}$ và mặt cầu $(S):(x-2-m)^2+(y-1+m)^2+(z-2+m)^2=25$, với m là tham số. Gọi I là tâm của (S). Khi Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất, OI bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{19}$. **D.** $2\sqrt{19}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(m+2;1-m;2-m)$. Nhận thấy $\begin{cases}2(m+2)+(1-m)+(2-m)=7\\2(m+2)+3(1-m)-(2-m)=5\end{cases}$ nên dễ dàng suy ra tâm $I\in\begin{cases}(P):2x+y+z-7=0\\(Q):2x+3y-z-5=0\end{cases}\Rightarrow I\in(d)=(Q)\cap(P)$. Với $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right]$ ta dễ dàng suy ra:

$I\in(d):\begin{cases}x=5-t\\y=-2+t\,(t\in\mathbb{R})\\z=-1+t\end{cases}$. Dễ thấy Δ và d đều chéo nhau nên suy ra để Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất thì khoảng cách từ I đến Δ phải nhỏ nhất. Điều này chỉ xảy ra khi đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm này chính là đường vuông góc chung của Δ và d .

Gọi $\begin{cases}A(a;3;-2+a)\in\Delta\\I(5-b;-2+b;-1+b)\in d\end{cases}(a,b\in\mathbb{R})\to\overrightarrow{AI}=(5-b-a;b-5;1-a+b)$.

Gọi tiếp d' là đường vuông góc chung của Δ và d thì khi đó $\overrightarrow{u_{d'}}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(1;2;-1)$ nên suy ra:

$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{u_{d'}}\Leftrightarrow\begin{cases}5-b-a=k.1\\b-5=2k\\1-a+b=-k\end{cases}\to a=b=3\to I(2;1;2)\Rightarrow OI=3$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)=f'(x)+2(3x+1)e^x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=-3e$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2f(x)$ và $y=f'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(20;30)$. **B.** $(10;20)$. **C.** $(0;10)$. **D.** $(30;40)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f(x)=f'(x)+2(3x+1)e^x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}=-2(3x+1),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{e^x}\right)=-6x+2,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{e^x}=-3x^2+2x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $f(1)=-3e$ nên suy ra $C=2$ tức $f(x)=(-3x^2-2x+2)e^x\to f'(x)=(-6x-2)e^x$.

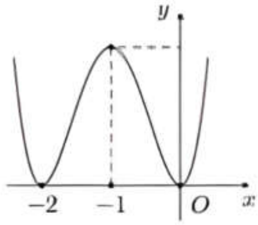
Từ đó suy ra phương trình $f'(x)-2f(x)=0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

Vậy $S=\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{2}\left|f'(x)-2f(x)\right|dx=\int_{-\frac{2}{3}}^{2}\left|-3x^2+4x+4\right|e^xdx\approx21{,}97\in(20;30)$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 48. Cho $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?



A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta đặt $2x-1=\log_2\left(t^2+2t+2\right)$ với $g(t)=f\left(\log_2\left(t^2+2t+2\right)\right)$ thì khi đó

$g'(t)=\dfrac{2(t+1)}{\left(t^2+2t+2\right)\ln 2}f'\left(\log_2\left(t^2+2t+2\right)\right)$. Giải phương trình $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=-1$

Nhận xét: với $t>-1$ thì $f'\left(\log_2\left(t^2+2t+2\right)\right)$ và $g'(t)$ cùng dấu và $t<-1$ thì ngược lại.

Đặt $h(t)=\log_2\left(t^2+2t+2\right)$ ta có $h'(t)=\dfrac{2(t+1)}{\left(t^2+2t+2\right)\ln 2}$, từ đó ta có bảng biến thiên như sau:

t	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$h'(t)$			$-$		0		$+$		
$h(t)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$

Dựa vào đồ thị ban đầu ta có $g'(t)<0$ khi $t\in(-1;0)$, do đó $f'\left(\log_2\left(t^2+2t+2\right)\right)<0$ khi $t\in(-1;0)$

Suy ra: $\begin{cases}0<\log_2\left(t^2+2t+2\right)<1\\ 2x-1=\log_2\left(t^2+2t+2\right)\end{cases}$ tức $f'(2x-1)<0$ khi $0<2x-1<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x<1$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: Ta đặt $u(x)=\log_2\left(x^2+2x+2\right)$ ta có $u'(x)=\dfrac{2(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)\ln 2}$.

<u>Nhận xét:</u> khi $u(x)\neq 0$ thì $f'(u(x))=\dfrac{\left[f(u(x))\right]'}{u'(x)}$, do đó $f'(u)\geq 0$ khi $f(u(x))$ và $u(x)$ đơn điệu cùng chiều và $f'(u)\leq 0$ khi $f(u(x))$ và $u(x)$ đơn điệu ngược chiều, từ đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$
$f(u(x))$		↘		↗		↘		↗	
$f'(u)$		$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	

Ta có $f'(u)\leq 0$ khi $u\in(0;1)$ nên $2f'(2x-1)=\left(f(2x-1)\right)'<0$ khi $2x-1\in(0;1)$. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 49. Xét hai số phức z, w thỏa mãn $|z-w|=2$ và $|\bar{z}+4+4i|+|w|=3\sqrt{2}$. Biết biểu thức $P=|w+1+2i|$ đạt giá trị lớn nhất khi $w=w_0$, giá trị $|w_0+2-i|$ bằng

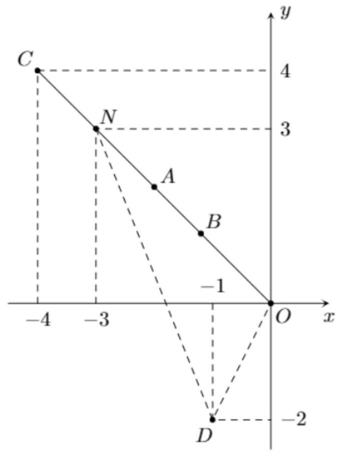
A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, w trên mặt phẳng tọa độ.

Khi đó ta có được: $\begin{cases} |z-w| = AB = 2 \\ |\bar{z}+4+4i|+|w| = |z+4-4i|+|w| = AC+OB = 3\sqrt{2} \end{cases}$ với $C(-4;4)$.

$\Rightarrow AC+OB+AB = 3\sqrt{2}+\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow OC = 4\sqrt{2}$. Suy ra O, B, A, C thẳng hàng như hình vẽ.



Khi ấy với $D(-1;-2)$ thì ta suy ra: $P=|w+1+2i| = BD \le ND = \sqrt{29}$ khi $B \equiv N(-3;3)$ tức $w_0=-3+3i$

Vậy $|w_0+2-i| = |-1+2i| = \sqrt{5}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 50. Xét các số thực dương a, b sao cho thỏa mãn $\log_2(a+b)=\log_3(a^2+b^2)$. Khi đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên ?

A. 36. **B.** 35. **C.** 37. **D.** 38.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\log_2(a+b)=\log_3(a^2+b^2)=t \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2^t \\ a^2+b^2=3^t \end{cases}$

Theo Cauchy-Schwartz ta có đánh giá sau: $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow 4^t \le 2.3^t \Leftrightarrow t \le \log_{\frac{4}{3}} 2$

Lại có: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) = -\dfrac{(a+b)^3}{2}+\dfrac{3(a+b)^3}{2}-3ab(a+b)$

$= -\dfrac{(a+b)^3}{2}+\dfrac{3}{2}(a+b)\left((a+b)^2-2ab\right) = -\dfrac{(a+b)^3}{2}+\dfrac{3}{2}(a+b)(a^2+b^2) = -\dfrac{8^t}{2}+\dfrac{3}{2}6^t$

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{8^t}{2}+\dfrac{3}{2}6^t$ trên $\left(-\infty;\log_{\frac{4}{3}} 2\right]$ có $f'(t)=-\dfrac{8^t}{2}\ln 8+\dfrac{3}{2}6^t\ln 6>0$ tức $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\log_{\frac{4}{3}} 2\right]$. Suy ra $0<f(t)=a^3+b^3 \le f\left(\log_{\frac{4}{3}} 2\right)=37,48 \xrightarrow{a^3+b^3\in\mathbb{Z}} a^3+b^3\in\{1;2;...;36;37\}$ tức có tất cả 37 giá trị nguyên nhận được cho biểu thức này. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI KHẢO SÁT SỞ NINH BÌNH LẦN 1

Câu 45. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=(m+1)x+5$ bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** 16. **C.** $\frac{64}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình hoành độ giao điểm như sau: $x^2+2x+1=(m+1)x+5 \Leftrightarrow x^2+(1-m)x-4=0$.

Với mọi m ta đều có $-4<0$ (luôn đúng) tức phương trình luôn có 2 nghiệm x_1,x_2 $(x_1<x_2)$.

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=m-1 \\ p=x_1x_2=-4 \end{cases}$ và $x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(m-1)^2+16}$.

Khi đó ta suy ra: $S=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left|x^2+(1-m)x-4\right|dx=-\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(x^2+(1-m)x-4\right)dx\right|=\left(\frac{x^3}{3}+(1-m)\frac{x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$

$=\frac{m^2-2m+17}{6}(x_1-x_2)=\frac{\left(\sqrt{(m-1)^2+16}\right)^3}{6}\ge\frac{4^3}{6}=\frac{32}{3}$ khi $m=1$. **Chọn đáp án D.**

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích là V. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm trên cạnh SB sao cho $SN=3NB$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua các điểm M,N và cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại P,Q. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.MNPQ$?

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{27}{80}V$. **C.** $\frac{27}{40}V$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $\left(\frac{SC}{SP};\frac{SD}{SQ}\right)=(x;y)$ với $x,y\ge1$. Vì hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành nên ta có

$\frac{SA}{AM}+\frac{SC}{SP}=\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}\Leftrightarrow 2+\frac{SC}{SP}=\frac{4}{3}+\frac{SD}{SQ}\Leftrightarrow 2+x=\frac{4}{3}+y\Rightarrow y=\frac{2}{3}+x$.

Từ đó suy ra: $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{SM}{SA}.\frac{SQ}{SD}.\frac{SP}{SC}\right)=\frac{1}{4x}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{4x}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2x+2}\right)$

$\Rightarrow\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{9(x+2)}{16(3x^2+2x)}$. Xét hàm số $f(x)=\frac{9(x+2)}{16(3x^2+2x)}$ trên $[1;+\infty)$, $f'(x)=-\frac{9(3x^2+12x+4)}{16(3x^2+2x)^2}<0,\forall x\ge1$

nên $f(x)$ luôn nghịch biến trên $[1;+\infty)$, khi ấy $\max f(x)=f(1)=\frac{27}{80}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 48. Cho các số thực a,b thỏa mãn $1<a<b\le4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=3\log_a\left(b^2+16b-16\right)+\frac{16}{27}\log_{\frac{b}{a}}^3 a$

A. 8. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 17.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \forall b\in(1;4]\to(b-1)(b^2-16)\le0\to b^2+16b-16\ge b^3; t=\log_a b-1>0 \\ P\ge3\log_a\left(b^3\right)+\frac{16}{27}\frac{1}{(\log_a b-1)^3}=9t+\frac{16}{27}\left(\frac{1}{t^3}\right)+9=\underbrace{3t+3t+3t+\frac{16}{27}\left(\frac{1}{t^3}\right)}_{Cauchy}+9\ge4\sqrt[4]{(3t)^3.\frac{16}{27t^3}}+9=17 \end{cases}$.

Chọn đáp án D.

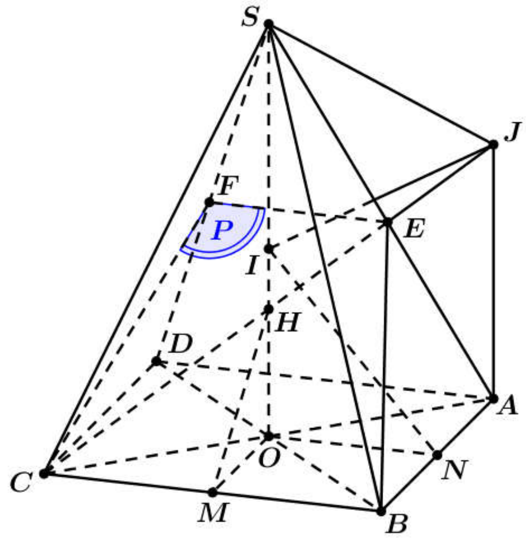
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Một mặt cầu tâm J (với J, S nằm cùng phía với mặt phẳng chứa đáy $ABCD$) tiếp xúc với $(ABCD)$ tại A, đồng thời tiếp xúc ngoài với mặt cầu nội tiếp hình chóp. Một mặt phẳng (P) đi qua J và BC. Gọi φ là góc giữa (P) và $(ABCD)$. Tính $\tan\varphi$ biết các đường chéo của thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) lần lượt cắt và vuông góc với SA, SD ?

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu tâm J và bán kính mặt cầu tâm I nội tiếp khối chóp.
Đặt $AB = a, SO = h$ với O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó do hai mặt cầu tâm I và tâm J tiếp xúc ngoài với nhau nên $OA = 2\sqrt{2Rr}$ hay $a^2 = 8Rr$.
Tiếp đến gọi $E = JC \cap AS$ và $H = JC \cap SO$ thì theo giả thiết ta có $CE \perp SA$ tức $SEOC$ là tứ giác nội tiếp. Khi ấy ta suy ra $\widehat{HCO} = \widehat{ASO}$ tức ta có được $\Delta HCO \backsim \Delta ASO$ $(g-g) \Leftrightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{OC}{OS} \to \frac{OA^2}{h} = \frac{4Rr}{h}$.

Tiếp đến theo tính chất đường trung bình ta có $OH = \frac{JA}{2} = \frac{R}{2}$ nên $\frac{4Rr}{h} = \frac{R}{2} \Rightarrow h = 8r$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AB, khi đó ta có: $\frac{SN}{ON} = \frac{SI}{OI} \Rightarrow \frac{2r}{a} = \frac{OI}{ON} = \frac{SI}{SN} = \frac{SO}{SN+ON} = \frac{2h}{a+\sqrt{4h^2+a^2}}$

Mà $h = 8r$ nên suy ra $\frac{2h}{8a} = \frac{2h}{a+\sqrt{4h^2+a^2}} \Leftrightarrow 7a = \sqrt{4h^2+a^2} \Leftrightarrow h^2 = 12a^2 \Leftrightarrow \frac{h}{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Mặt khác dễ thấy $BC \perp (OHM)$ thì $\tan((P);(ABC)) = \tan\widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{8Rr}{ah} = \frac{a^2}{ah} = \frac{a}{h}$

Nên suy ra $\tan\varphi = \frac{a}{h} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: Đầu tiên ta chuẩn hóa như sau: xét hình chóp đều có cạnh đáy bằng 1 và đường cao bằng m. Gọi O là tâm mặt đáy của hình chóp và I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp. Tiếp đến ta áp hệ trục $Oxyz$ vào hình chóp trên, khi đó ta có các tọa độ lần lượt là: $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right), A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;m), I(0;0;n), J\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;k\right)$

Ta có: $CJ \perp SA$ nên suy ra $\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{SA}=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{m}$ (1)

Lại có: $\overrightarrow{n_{(SAB)}}=\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{AB}\right]=\left(-m;m;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nên suy ra phương trình $(SAB): m\sqrt{2}x-m\sqrt{2}y-z+m=0$.

Tiếp đến ta có I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp nên $d\left(I;(ABCD)\right)=d\left(I;(SAB)\right)$, khi đó ta có phương trình sau: $n=\frac{2}{m^2}\left(\sqrt{m^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)$. (2)

Mặt khác theo đề bài, ta có mặt cầu $(J;JA)$ và $(I;IO)$ tiếp xúc nhau nên

$IJ=JA+OI \Leftrightarrow \frac{1}{2}+(k-n)^2=(k+n)^2 \Leftrightarrow nk=\frac{1}{8}$, thế (1) vào ta suy ra $\frac{n}{m}=\frac{1}{8}$, thế vào (2), ta suy ra phương trình sau: $\frac{m}{8}=\frac{2}{m^2}\left(\sqrt{m^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m^3=16\sqrt{m^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(m^3+\frac{1}{2}\right)^2=16^2\left(m^2+\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow m=2\sqrt{3} \to k=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Suy ra $J\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ tức $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_{(JBC)}}=\left[\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC}\right]=\left(\sqrt{2};\sqrt{2};4\sqrt{3}\right)$, cùng với $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{n_{(ABCD)}}=(0;0;1)$,

Vậy ta kết luận $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{52}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **Chọn đáp án C**

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN QUANG TRUNG – BÌNH PHƯỚC

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;-2)$, $\Delta \parallel (P)$ và Δ cắt d. Giao điểm của Δ và mặt phẳng (Oxy) là $M(x_0;y_0;z_0)$, khi đó $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. $\frac{32}{5}$. **B.** $\frac{21}{5}$. **C.** $\frac{31}{5}$. **D.** $\frac{19}{5}$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi $M=d\cap\Delta \Rightarrow M(-1+2t;1+t;2+3t)$. Khi đó $\overrightarrow{AM}(-2+2t;t;4+3t)$ là 1 vector chỉ phương của Δ.

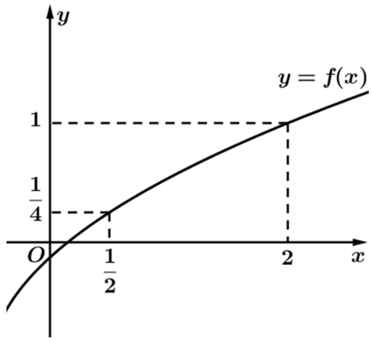
Mà $\Delta \parallel (P)$ nên suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_P}=0\\ \overrightarrow{n_P}=(1;-1;-1)\end{cases} \Leftrightarrow t=-3 \to \overrightarrow{AM}=(-8;-3;-5)=k(8;3;5)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+8t\\ y=1+3t\\ z=-2+5t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Mà $M=\Delta\cap(Oxy)$ nên suy ra $-2+5t=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{5}$

Suy ra $x_0+y_0+z_0=1+8\left(\frac{2}{5}\right)+1+3\left(\frac{2}{5}\right)-2+5\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{32}{5}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$, có đồ thị như hình vẽ đồng thời thỏa mãn $f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{18}\left(1-\frac{1}{x^2}\right),\forall x>0$



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)-(x-1)^2}{x}$ và $y=0$ bằng

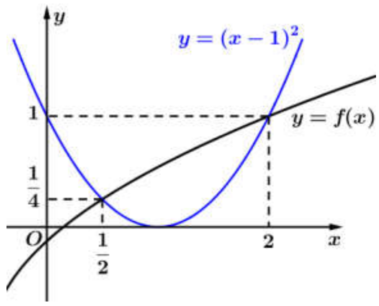
A. $\frac{37}{24}-\frac{17}{9}\ln 2$. **B.** $\frac{37}{24}-\frac{11}{9}\ln 2$. **C.** $\frac{37}{24}-\frac{13}{9}\ln 2$. **D.** $\frac{31}{24}-\frac{13}{9}\ln 2$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{18}\left(1-\frac{1}{x^2}\right),\forall x>0 \Leftrightarrow \left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{5}{18}\left(1-\frac{1}{x^2}\right),\forall x>0$

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{18}\left(x+\frac{1}{x}\right)+C,\forall x>0$. Thế $x=2$ ta có: $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{18}.\frac{5}{2}+C$.

Nhìn vào đồ thị dễ thấy $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4};f(2)=1$ nên suy ra $C=\frac{5}{9}$ tức $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{18}\left(x+\frac{1}{x}+2\right),\forall x>0$.



Tiếp đến xét phương trình $\frac{f(x)-(x-1)^2}{x}=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$ (Nhìn vào đồ thị).

Ta xét tích phân sau: $I_{(1)}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$. Đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$, khi đó: $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}tf\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}=I_{(2)}$

Suy ra: $I_{(1)}+I_{(2)}=2I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\left(\frac{5}{18}\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\right)dx\Rightarrow I=\frac{5(4\ln 2+3)}{36}$

Vậy diện tích $S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)-(x-1)^2}{x}dx=I-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(x-1)^2}{x}dx=\frac{5(4\ln 2+3)}{36}-\ln 4+\frac{9}{8}=\frac{37}{24}-\frac{13}{9}\ln 2$. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;0;0), B(1;2;3)$. Gọi M là một điểm di động thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}=\dfrac{\sqrt{3}OM.OA}{2}$ và $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}=0$. Gọi $p;q$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của BM. Giá trị của biểu thức p^2+q^2 bằng

A. 40. **B.** 30. **C.** $34-2\sqrt{39}$. **D.** $34+2\sqrt{39}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}=0$ nên suy ra $\widehat{AMO}=90^\circ$ tức M thuộc mặt cầu đường kính AO tâm $I(2;0;0)$, bán kính $R=2$. Tiếp đến với $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}=\dfrac{\sqrt{3}OM.OA}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{OA}\right|}=.\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MOA}=30^\circ$.

Khi ấy ta có được: $d(M;OA)=MO\sin 30^\circ=AO\sin 30^\circ\cos 30^\circ=2R\sin 30^\circ\cos 30^\circ=R\sin 60^\circ=2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên OA, khi đó $OH=3$ Suy ra M chạy trên đường tròn tâm $H(3;0;0)$, bán kính $r=\sqrt{3}$ nằm trong mặt phẳng $z=3$. Khi đó ta có tọa độ theo tham số là $M\left(3;a;\sqrt{3-a^2}\right)$

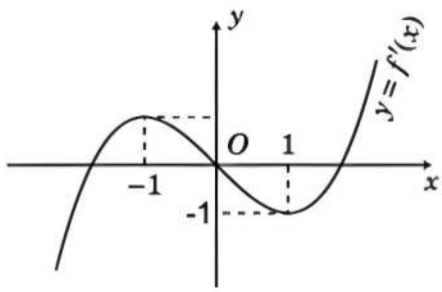
Suy ra: $MB^2=4+(a-2)^2+\left(\sqrt{3-a^2}-3\right)^2=4+\left(\sqrt{3}\sin\alpha-2\right)^2+\left(\sqrt{3}\cos\alpha-3\right)^2$ (Lượng giác hóa).

$=20-\sqrt{3}(4\sin\alpha+6\cos\alpha)$.

Mặt khác ta có đánh giá sau: $(4\sin\alpha+6\cos\alpha)^2\le 52\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=52 \Leftrightarrow -2\sqrt{13}\le 4\sin\alpha+6\cos\alpha\le 2\sqrt{13}$

Nên từ đó ta suy ra: $MB^2\in\left[20-2\sqrt{39};20+2\sqrt{39}\right]\Rightarrow\begin{cases}p^2=20-2\sqrt{39}\\ q^2=20+2\sqrt{39}\end{cases}\to p^2+q^2=40$. **Chọn đáp án A.**

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)=3$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x)=\left|2f(x)+x^2-2mx+2m\right|$ đồng biến trên $(0;1)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $h(x)=2f(x)+x^2-2mx+2m$ trên $(0;1)$. Để thỏa đề bài, ta có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}h'(x)\le 0,\forall x\in(0;1)\\ h(0)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge f'(x)+x,\forall x\in(0;1)\\ 6+2m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\le -3\end{cases}\to m\in\varnothing$

Trường hợp 2: $\begin{cases}h'(x)\ge 0,\forall x\in(0;1)\\ h(0)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le f'(x)+x,\forall x\in(0;1)\\ 6+2m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m\ge -3\end{cases}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1\}$

Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $\frac{x^2+y^2+7x}{x} > \log_2\frac{x^2+y^2}{x} + \left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^{\log_2 3}$

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $\frac{x^2+y^2}{x}+7 > \log_2\frac{x^2+y^2}{x} + 3^{\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}$

$\Leftrightarrow \log_2\frac{x^2+y^2}{x} + 3^{\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)} - 2^{\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)} - 7 < 0$. Đặt $a=\log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$ thì bất phương trình trở thành:

$\Rightarrow a+3^a-2^a-7<0$. Xét hàm số $f(a)=a+3^a-2^a-7$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(a)=1+3^a\ln 3-2^a\ln 2>0$

Khi đó hàm số $f(a)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $f(2)=0$ nên suy ra bất phương trình $f(a)<0 \Leftrightarrow a<2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)<2 \Leftrightarrow 0<\frac{x^2+y^2}{x}<4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2>0 \\ (x-2)^2+y^2<4 \\ x\neq 0 \end{cases}$. Vậy có tất cả 9 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án C.

ĐỀ THI THỬ THPT CỤM NAM ĐỊNH

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-2;4), B(-2;6;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$. Gọi M là điểm thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA\perp MB$ và N là điểm thay đổi thuộc d. Khi MN nhỏ nhất, tìm hoành độ điểm M.

A. -1. **B.** 5. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{17}{5}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $MA\perp MB$ tức M nhìn AB dưới một góc vuông nên suy ra M thuộc mặt cầu đường kính AB.

Khi đó suy ra $M\in(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$. Mà $M\in(Oxy)$ nên thay $z=0$ vào ta suy ra:

$M\in(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$ (1). Nhận ra $d \parallel Oz$ nên suy ra $MN\geq ME$ với $E=d\cap(Oxy)\rightarrow E(5;-1;0)$.

Khi đó dấu bằng xảy ra khi $M\equiv M_0=EI\cap(C)$ với $I(1;2;0)$ và M nằm giữa E và I.

Quy về Oxy giải, với $I(1;2), E(5;-1)$ ta suy ra phương trình $(EI): y=\frac{x+3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(x-1)^2+\left(\frac{x+3}{2}-2\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M=\frac{17}{5} \\ x_M=..... \end{array}\right.$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(2)=7$ và $[f'(x)]^2=21x^4-12x-12xf(x)$ vơi $\forall x\in[0;2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox,Oy và $x=2$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\int_0^2[f'(x)]^2dx+6\int_0^2(2x)f(x)dx=\int_0^2(21x^4-12x)dx$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\to du=f'(x)dx\\dv=2xdx\to v=x^2\end{cases}$

Suy ra: $\int_0^2[f'(x)]^2dx+6\left[\left(x^2f(x)\right)_0^2-\int_0^2x^2f'(x)dx\right]=\frac{552}{5}\Leftrightarrow\int_0^2[f'(x)]^2dx+168-6\int_0^2x^2f'(x)dx=\frac{552}{5}$

$\Leftrightarrow\int_0^2[f'(x)]^2dx-6\int_0^2x^2f'(x)dx+\frac{288}{5}=0\Leftrightarrow\int_0^2[f'(x)-3x^2]^2dx=0\Leftrightarrow f'(x)=3x^2\to\begin{cases}f(x)=x^3-1\\f(2)=7\end{cases}$

Khi đó: $S=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2|x^3-1|dx=\frac{7}{2}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 46: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn

$$\log_3(x^2+y+3x)+\log_2(x^2+y)\le\log_3x+\log_2(x^2+y+18x)?$$

A. 41. **B.** 36. **C.** 42. **D.** 35.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\log_3\left(\frac{x^2+y}{x}+3\right)-\log_2\left(1+18\frac{x}{x^2+y}\right)\le0$ đặt $a=\frac{x^2+y}{x}>0$

Xét $f(a)=\log_3(a+3)-\log_2\left(1+\frac{18}{a}\right)$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(a)=\frac{1}{(a+3)\ln3}+\frac{18}{a^2\ln2}\left(1+\frac{18}{a}\right)^{-1}>0,\forall a\in(0;+\infty)$.

Khi đó hàm số $f(a)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$, mà $f(6)=0$ nên $f(a)\le f(6)\Leftrightarrow a\le6\Leftrightarrow0<\frac{x^2+y}{x}\le6$. (1)

Suy ra: $\begin{cases}x\in(0;6)\\y\in(0;6x-x^2]\end{cases}$. Thử giá trị $x:1\to5$, *bằng một năng lực tâm linh nào đó*. **Chọn đáp án D.**

Câu 47: Xét các số phức thỏa mãn $|z^2-6z-i(3+5i)|=4|z-3|$. Gọi M và m lần lượt là giá tri lớn nhất và giá tri nhỏ nhất của $|z-3|$. Giá tri của biểu thức $3M^2-4m^2$ bằng

A. 71. **B.** 79. **C.** 11. **D.** 19.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $w=z-3$, khi đó ta có: $|z^2-6z+(5-3i)|=4|z-3|\Leftrightarrow|w^2-(4+3i)|=4|w|$

Sử dụng Mincopski đánh giá được: $\begin{cases}4|w|=|w^2-(4+3i)|\ge|w|^2-|4+3i|\\4|w|=|(4+3i)-w^2|\ge|4+3i|-|w|^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|w|^2-4|w|-5\le0\\|w|^2+4|w|-5\ge0\end{cases}\Leftrightarrow1\le|w|\le5$

Vậy $M=5,m=1$ tức $3M^2-4m^2=71$. **Chọn đáp án A.**

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2023;2023)$ của tham số m để hàm số $y=\left|\ln\left(x^2+x+m\right)+x\right|$ đồng biến trên khoảng $(-1;3)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 2023.

Lời giải

Đầu tiên ta xét: $h(x)=\ln\left(x^2+x+m\right)+x\to h'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+m}+1$, khi đó ta có hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}h'(x)\le 0,\forall x\in(-1;3)\\ h(-1)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2+x+m}+1,\forall x\in(-1;3)\\ \ln m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\min\left[-\left(x^2+3x+1\right)\right],\forall x\in(-1;3)\\ 0<m\le e\end{cases}$

Hàm số $y=-\left(x^2+3x+1\right)$ luôn nghịch biến trên $(-1;3)$ nên suy ra $\begin{cases}m\le u(3)\\ 0<m\le e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -19\\ 0<m\le e\end{cases}\to m\in\varnothing$

Trường hợp 2: $\begin{cases}h'(x)\ge 0,\forall x\in(-1;3)\\ h(-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\max\left[-\left(x^2+3x+1\right)\right],\forall x\in(-1;3)\\ m\ge e\end{cases}$

Tương tự ta suy ra được $\begin{cases}m\ge u(-1),\forall x\in(-1;3)\\ m\ge e\end{cases}\to\begin{cases}m\ge 1\\ m\ge e\end{cases}\xrightarrow{m\in[-2022;2022]}m\in[3;2022]$

Vậy có tất cả 2020 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

ĐỀ THI THỬ THỊ XÃ QUẢNG TRỊ

Câu 38: Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1+z_2+i\right|=1$ và $\left|3z_1-z_2\right|=10$. Khi $P=\left|4z_2+5+3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của $\left|z_1+2z_2\right|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{57}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{55}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{58}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $\begin{cases}w_1=z_1+z_2+i\\ w_2=3z_1-z_2\end{cases}$, thì khi đó ta có: $\begin{cases}\left|w_1\right|=1\\ \left|w_2\right|=10\end{cases}$ và $\begin{cases}4z_2=3w_1-w_2-3i\\ 4z_1=w_1+w_2-i\end{cases}$.

Tiếp đến ta đặt A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức w_1,w_2, khi đó ta có: $OA=1,OB=10$.

$\Rightarrow\left|4z_2+3i\right|=\left|3w_1-w_2\right|=\sqrt{9OA^2+OB^2-6OA.OB\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}=\sqrt{109-60\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)}\ge\sqrt{109-60}=7$ (1)

Khi đó: $P=\left|\left(4z_2+3i\right)+5\right|\ge\left|4z_2+3i\right|-5=2$ (2). Cả 2 dấu bằng (1) và (2) đều xảy ra khi và chỉ khi

$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}\ (k>0)\Leftrightarrow\begin{cases}w_2=10w_1\\ 4z_2+3i=-7\end{cases}$.

Suy ra: $3z_1-z_2=10\left(z_1+z_2+i\right)\Leftrightarrow 7z_1+11z_2+10i=0\Leftrightarrow 7\left(z_1+2z_2\right)=\dfrac{3}{4}\left(4z_2-\dfrac{40}{3}i\right)=\dfrac{3}{4}\left(-7-3i-\dfrac{40}{3}i\right)$

Vậy $\left|z_1+2z_2\right|=\dfrac{3}{28}\left|-7-\dfrac{49}{3}i\right|=\dfrac{3}{28}\dfrac{7.\sqrt{58}}{3}=\dfrac{\sqrt{58}}{4}$. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=3f(2x)$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)=3$ và $F(2)+4F(8)=0$. Khi đó $\int_0^2 f(3x+2)dx$ bằng

A. 9. **B.** -9. **C.** 15. **D.** -5.

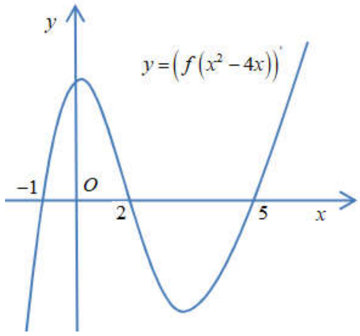
Lời giải

Đầu tiên ta có: $\int_2^4 f(x)dx=3\int_2^4 f(2x)dx \Leftrightarrow \begin{cases} F(4)-F(2)=\dfrac{3}{2}(F(8)-F(4)) \\ F(4)=3 \end{cases} \Leftrightarrow 2F(2)+3F(8)=15$.

Cùng với $F(2)+4F(8)=0$ ta giải hệ phương trình ra được: $F(2)=12, F(8)=-3 \rightarrow$

Suy ra: $I=\int_0^2 f(3x+2)dx=\dfrac{1}{3}\int_0^2 f(3x+2)d(3x+2)=\dfrac{1}{3}\int_2^8 f(x)dx=\dfrac{F(8)-F(2)}{3}=-5$. **Chọn đáp án D.**

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f(x^2-4x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ dưới. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x^4-6|x|^3+5x^2+12|x|\right)$ bằng



Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x^4-4|x|^3+6x^2-4|x|\right)$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $g(x)=f(x^2-4x) \Rightarrow g'(x)=\left[f(x^2-4x)\right]'=2(x-2)f'(x^2-4x)$.

Từ hình vẽ ta suy ra $g'(x)=(x-2)(x+1)(x-5).h(x),(h(x)\geq 0\ \forall x)$.

$\Rightarrow f'(x^2-4x)=(x+1)(x-5).\dfrac{h(x)}{2}=(x^2-4x-5)\dfrac{h(x)}{2}$.

Đặt $t=x^2-4x \Rightarrow f'(t)=(t-5).v(t),\ (v(t)\geq 0\ \forall t)$. Khi đó $f(x)$ có điểm cực trị $x=5$.

Xét hàm số $P(x)=f(x^4-6x^3+5x^2+12x) \Rightarrow P'(x)=(4x^3-18x+10x+12).f'(x^4-6x^3+5x^2+12x)$.

Giải phương trình $P'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3-18x^2+10x+12=0 \\ f'(x^4-6x^3+5x^2+12x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^3-18x^2+10x+12=0 \\ x^4-6x^3+5x^2+12x=5 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}>0;\ x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}>0;\ x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<0; x=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}>0;\ x=\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}<0; x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}>0;\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}>0$

Suy ra hàm số $y=P(x)$ có 5 điểm cực trị dương. Do đó hàm số $y=P(|x|)$ có 11 điểm cực trị.

Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} P(|x|)=+\infty$ nên $y=P(|x|)$ có 5 điểm cực đại và 6 điểm cực tiểu. **Chọn đáp án D.**

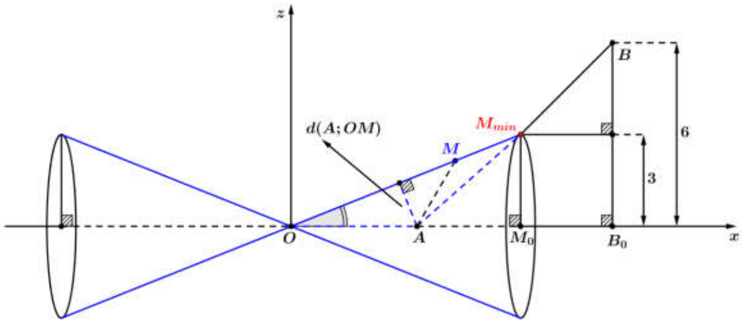
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;0)$ và $B(8;0;6)$. Xét điểm M thay đổi sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng OM bằng 2 và diện tích tam giác OAM không lớn hơn 6. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(5;7)$. **B.** $\left(\frac{13}{3};5\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{2};4\right)$. **D.** $\left(4;\frac{13}{3}\right)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\sin\beta = \sin\widehat{MOA} = \frac{d(A;OM)}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$ và $S_{\Delta OAM} = \frac{OM.d(A;OM)}{2} \le 6 \to OM \le 6$.



Suy ra quỹ tích của điểm M sẽ nằm trên mặt xung quanh của hai hình nón chung đỉnh O, trục OA, góc ở đỉnh nón là $2\beta = 60^\circ$, và đường sinh đều dài bằng 6. Khi đó MB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm M được biểu diễn như hình vẽ trên.

Gọi M_0, B_0 lần lượt là hình chiếu của M, B lên trục hoành. Khi đó ta có: $\begin{cases} OM_0 = 6\cos\beta = 3\sqrt{3} \\ MM_0 = 6\sin\beta = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} OB_0 = 8 \\ BB_0 = 6 \end{cases}$ với tọa độ $B_0(8;0;0)$. Suy ra: $BM_{\min} = \sqrt{\left(8-3\sqrt{3}\right)^2 + (6-3)^2} \approx 4,1 \in \left(4;\frac{13}{3}\right)$. **Chọn đáp án D.**

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z+2=0$ và hai điểm $A(2;0;1), B(1;1;2)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (α) và cắt đường thẳng AB, thỏa mãn góc giữa hai đường thẳng AB và d bằng góc giữa đường thẳng AB và (α). Khoảng cách từ A đến đường thẳng d bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \left(\widehat{AB;d}\right) = \left(\widehat{AB;(\alpha)}\right) \\ B \in (\alpha) \end{cases} \to AB \perp (d)$ tại B và $\sin\left(\widehat{AB;d}\right) = \sin\left(\widehat{AB;(\alpha)}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Suy ra: $\sin\left(\widehat{AB;d}\right) = \frac{d(A;d)}{AB} \to d(A;d) = AB\sin\left(\widehat{AB;d}\right) = \sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn đáp án C**

ĐỀ THI THỬ SỞ BÌNH THUẬN

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) - \frac{f(x)}{x^2+x} = \frac{x}{x+1}, \forall x \in (0;+\infty)$. Giá trị của $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(0;1)$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x^2+x}=\dfrac{x}{x+1},\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow(x^2+x)f'(x)+(-1)f(x)=x^2,\forall x\in(0;+\infty)$. (1)

Đặt $\begin{cases}u=x^2+x\\u'=-1\end{cases}$ thì khi đó ta có: $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}=\dfrac{-1}{x^2+x}\rightarrow u=e^{\int\frac{-1}{x^2+x}dx}=\dfrac{x+1}{x}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow\left(\dfrac{x+1}{x}f(x)\right)'=1$

$\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x}f(x)=x+C$. Mà $f(1)=\dfrac{1}{2}$ nên $C=0$ tức $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}\rightarrow f(2)=\dfrac{4}{3}\in(1;2)$. **Chọn đáp án A.**

Câu 44: Một hộp chứa 15 quả cầu gồm 4 quả cầu màu đỏ, 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu vàng. Các quả cầu đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 8 quả từ hộp đó, xác suất để số quả cầu còn lại đủ 3 màu là

A. $\dfrac{661}{715}$. **B.** $\dfrac{8}{15}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{54}{715}$.

Lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy khi chuyển về bài toán lấy ngẫu nhiên 7 quả sao cho 7 quả có đủ 3 màu thì kết quả không đổi nên gọi A là biến cố "lấy ngẫu nhiên 7 quả sao cho 7 quả có đủ 3 màu". Khi đó $\overline{A}$ là biến cố "lấy ngẫu nhiên 7 quả sao cho 7 quả **không** có đủ 3 màu". Dễ thấy với trường hợp 7 quả chỉ có mỗi 1 màu không tồn tại nên ta xét trường hợp 7 quả chỉ có mỗi 2 màu như sau, có 3 trường hợp nhỏ lần lượt là:

- Chỉ có đỏ và xanh (tổng là 9 viên), chọn ngẫu nhiên 7 trong 9 viên có: C_9^7 cách.
- Chỉ có đỏ và vàng (tổng là 10 viên), chọn ngẫu nhiên 7 trong 9 viên có: C_{10}^7 cách.
- Chỉ có vàng và xanh (tổng là 11 viên), chọn ngẫu nhiên 7 trong 9 viên có: C_{11}^7 cách.

Suy ra $n(\overline{A})=C_9^7+C_{10}^7+C_{11}^7$ (cách). Vậy $P=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=1-\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=1-\dfrac{C_9^7+C_{10}^7+C_{11}^7}{C_{15}^7}=\dfrac{661}{715}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=25$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục tung, với tung độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến S đúng 2 tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

A. 18. **B.** 22. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(2;-3;3)$, bán kính $R=5$. Tiếp đến gọi $M(0;a;0)\in Oy,\forall a\in\mathbb{Z}$.

Gọi (P) là hai mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến từ M đến (S). Khi đó (P) qua $M(0;a;0)$, vuông góc với đường thẳng d, từ đây ta có được phương trình $(P):4(x-0)-2(y-a)+1(z-0)=0\Leftrightarrow(P):4x-2y+z+2a=0$.

Nhận xét: để từ M kẻ được đến S đúng 2 tiếp tuyến cùng vuông góc với d thì M phải nằm ngoài (S), suy ra:

$$\begin{cases}IM^2>R^2\\d(I;(P))<R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+(a+3)^2+9>25\\\dfrac{|2a+17|}{\sqrt{21}}<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+3)^2>12\\|2a+17|<5\sqrt{21}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>2\sqrt{3}-3\\a<-2\sqrt{3}-3\end{array}\right.\\\dfrac{-17-5\sqrt{21}}{2}<a<\dfrac{-17+5\sqrt{21}}{2}\end{cases}$$

Suy ra: $a\in\left(\dfrac{-17-5\sqrt{21}}{2};-2\sqrt{3}-3\right)\cup\left(2\sqrt{3}-3;\dfrac{-17+5\sqrt{21}}{2}\right)\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a\in[-19;-6]\cup[1;2]$ tức có tất cả 16 giá trị nguyên a thỏa mãn. Vậy có 16 điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\log_2\left(16x^2+25y^2+400\right)+\log_3\left(16x^2+25y^2\right)\le\log_2 400+\log_3\left(16x^2+25y^2+800\right)$$

A. 54. **B.** 63. **C.** 62. **D.** 44.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\log_2\left(16x^2+25y^2+400\right)-\log_2 400\le\log_3\left(16x^2+25y^2+800\right)-\log_3\left(16x^2+25y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{16x^2+25y^2}{400}+1\right)-\log_3\left(1+\dfrac{800}{16x^2+25y^2}\right)\le 0$. Đặt $a=\dfrac{16x^2+25y^2}{400}=\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}>0$,

Khi đó bất phương trình trở thành: $\Leftrightarrow \log_2(a+1)-\log_3\left(1+\dfrac{2}{a}\right)\le 0$.

Xét hàm số $f(a)=\log_2(a+1)-\log_3\left(1+\dfrac{2}{a}\right)$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(a)=\dfrac{1}{(a+1)\ln 2}+\dfrac{2}{a^2\ln 3}\left(1+\dfrac{2}{a}\right)^{-1}>0$ trên $(0;+\infty)$ nên suy ra hàm số $f(a)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Mà $f(1)=0$ nên suy ra $f(a)\le f(1)\Leftrightarrow 0<a\le 1\Leftrightarrow 0<\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}\le 1$. (Elip).

Dễ thấy $x\in[-5;5]\setminus\{0\}$ nên thử từng giá trị x ứng với giá trị y, bằng một thế lực tâm linh nào đó ta kết luận được có tất cả 62 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn (loại cặp $(x;y)=(0;0)$). **Chọn đáp án C.**

Câu 50: Gọi z_1,z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-3-4i|=5$ và $|z_1-z_2|=4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{22}$. **B.** $4\sqrt{22}$. **C.** 10. **D.** 40.

Lời giải

Đầu tiên ta có: z_1,z_2 thỏa $\begin{cases}|z_1-3-4i|=5\\|z_2-3-4i|=5\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}w_1=z_1-3-4i\\w_2=z_2-3-4i\end{cases}\to\begin{cases}w_1+3+4i=z_1\\w_2+3+4i=z_2\end{cases}\vee\begin{cases}|w_1|=|w_2|=5\\|z_1-z_2|=|w_1-w_2|=4\end{cases}$

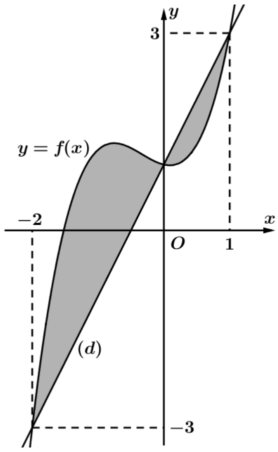
Suy ra: $\begin{cases}|w_1-w_2|^2=|w_1|^2+|w_2|^2-\left(\overline{w_1}w_2+w_1\overline{w_2}\right)=16\to\overline{w_1}w_2+w_1\overline{w_2}=34\\|w_1+3w_2|=\sqrt{|w_1|^2+9|w_2|^2+3\left(\overline{w_1}w_2+w_1\overline{w_2}\right)}=\sqrt{10.25+3.9}=4\sqrt{22}\end{cases}$

Suy ra: $|z_1+3z_2|=|w_1+3w_2+4(3+4i)|\to\begin{cases}|z_1+3z_2|\le|w_1+3w_2|+4|3+4i|=20+4\sqrt{22}\\|z_1+3z_2|\ge\big||w_1+3w_2|-4|3+4i|\big|=20-4\sqrt{22}\end{cases}\to\begin{cases}M=20+4\sqrt{22}\\m=20-4\sqrt{22}\end{cases}$

Vậy $M+m=\left(20+4\sqrt{22}\right)+\left(20-4\sqrt{22}\right)=40$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ SỞ HÒA BÌNH LẦN 2

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đường thẳng $d: y = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích phần tô đậm bằng $\frac{37}{12}$ và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{19}{12}$. Tích phân $\int_{-1}^0 xf'(2x)dx$ bằng

A. $-\frac{15}{8}$. **B.** $-\frac{20}{3}$. **C.** $-\frac{15}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Đầu tiên từ hình vẽ ta thấy với d qua hai điểm $A(-2;-3), B(1;3)$ ta suy ra $d: y = 2x + 1$

Khi đó từ giả thiết ban đầu ta suy ra:

$$S = \int_{-2}^{0}\left(f(x) - 2x - 1\right)dx + \int_0^1\left(2x + 1 - f(x)\right)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx - \frac{19}{12} + \int_0^1(2x+1)dx - \int_{-2}^0(2x+1)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \frac{29}{12}$$

Mặt khác: $\int_{-1}^0 xf'(2x)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^0(2x)f'(2x)d(2x) = \frac{1}{4}\int_{-2}^0 xf'(x)dx = \frac{1}{4}\left[\left(xf(x)\right)_{-2}^0 - \int_{-2}^0 f(x)dx\right] = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\int_{-2}^0 f(x)dx$

Nên suy ra: $\int_{-1}^0 xf'(2x)dx = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left(S - \frac{29}{12}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{37}{12} - \frac{29}{12}\right) = -\frac{5}{3}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 44: Xét hai số phức z_1, z_2 thay đổi đồng thời thỏa mãn các điều kiện $|z_1 - 6 - 2i| = |z_2 - 6 - 2i| = 5$ và $|z_1 - 3|^2 + |z_2 - 3|^2 = |z_1 - z_2|^2$. Đặt $P = |z_1 + z_2 - 3|$, giá trị nhỏ nhất của P thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(4;7)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 khi đó ta suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $I(6;2)$, bán kính $R = 5$. Gọi $C(3;0)$, khi đó kết hợp giả thiết ta suy ra $CA^2 + CB^2 = AB^2$ tức ΔACB vuông tại C. Gọi $M(z_1 + z_2), N\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ và E là trung điểm CI thì khi đó: $\overrightarrow{EN} = \frac{\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{IN}}{2} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}{4}$

$$= \frac{2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}{4} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 4EN^2 = IC^2 + 2R^2 + 2\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4EN^2 = IC^2 + 2R^2 + 2\left(\frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2} - \frac{IA^2 + IC^2 - AC^2}{2} - \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow 4EN^2 = IC^2 + 2R^2 - 2IC^2$. Suy ra: $EN = \sqrt{\dfrac{2R^2 - IC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{2R^2 - IC^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2.5^2 - 13}}{2} = \dfrac{\sqrt{37}}{2}$.

Mặt khác N là trung điểm OM nên suy ra nên theo *tính chất phép vị tự* ta suy ra M thuộc đường tròn tâm J sa sao cho E là trung điểm OJ và bán kính $2EN = \sqrt{37}$.

Vậy với $J(9;2)$ ta suy ra $P = |z_1 + z_2 - 3| = MC \geq JC - 2EN = 2\sqrt{10} - \sqrt{37}$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: Sử dụng công thức $2\left(|z|^2 + |w|^2\right) = |z + w|^2 + |z - w|^2$, áp dụng vào bài toán trên ta có:

$100 = 2\left(|z_1 - 6 - 2i|^2 + |z_2 - 6 - 2i|^2\right) = |(z_1 - 6 - 2i) - (z_2 - 6 - 2i)|^2 + |(z_1 - 6 - 2i) + (z_2 - 6 - 2i)|^2$

$\Leftrightarrow 100 = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2 - 12 - 4i|^2$. (1). Gọi $A(z_1), B(z_2), C(3;0), M(z_1 + z_2), N\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$ thì khi đó N là trung điểm AB tức $AB = 2NC$, suy ra: $|z_1 - z_2| = 2\left|\dfrac{z_1 + z_2}{2} - 3\right|$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\Leftrightarrow 4\left|\dfrac{z_1 + z_2}{2} - 3\right|^2 + |z_1 + z_2 - 12 - 4i|^2 = 100$. Đặt $z_1 + z_2 = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì khi đó ta biến đổi được: $\Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 + (x-12)^2 + (y-4)^2 = 100 \Leftrightarrow (x-9)^2 + (y-2)^2 = 37$ tức M thuộc đường tròn (C) tâm $I(9;2)$, bán kính $R = \sqrt{37}$. Suy ra $P = |z_1 + z_2 - 3| = MC \geq IC - R = 2\sqrt{10} - \sqrt{37}$.

Chọn đáp án C.

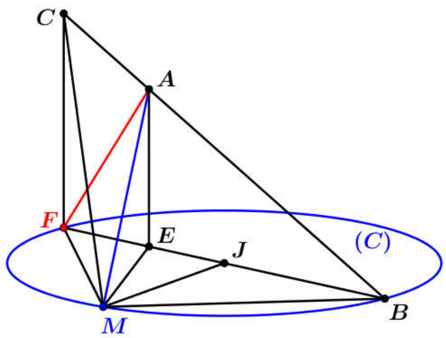
Câu 45: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;1;0), B(-1;1;4), C(5;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 7 = 0$. Giả sử d là đường thẳng bất kì thuộc mặt phẳng (P) luôn đi qua B. Gọi M là hình chiếu của C lên đường thẳng d. Giá trị nhỏ nhất của AM bằng

A. $2\sqrt{5} + 3$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5} + 4$. **D.** $2\sqrt{5} + 1$.

Lời giải

Đầu tiên ta có M là hình chiếu của C lên đường thẳng d với $B \in d$ nên suy ra $\widehat{BMC} = 90^\circ$ tức M thuộc mặt cầu đường kính BC, suy ra $M \in (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 18$ có tâm $I(2;1;1)$, bán kính $R = 3\sqrt{2}$.

Mà mặt khác $M \in (P)$ nên suy ra gọi J là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P), ta nhận xét được M thuộc đường tròn giao tuyến của (S) khi cắt (P) với tâm $J(1;-1;3)$, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I;(P))} = 3$. Ta có hình vẽ sau:



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A, C lên (P), khi đó do A, B, C thẳng hàng nên kéo theo E, F, B thẳng hàng và $E(3;-3;2), F\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Từ hình vẽ ta suy ra: $AM_{\min} = \sqrt{AE^2 + FE^2} = \sqrt{AE^2 + (EJ - FJ)^2} = 2\sqrt{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv F$. **Chọn đáp án B.**

Câu 46: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $1 \le x \le 2023$ và

$$(y+2)\log_2\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+\frac{xy-2x-4y+8}{x+5}\log_3\left(\frac{x+5}{x-4}+1\right)\le 0$$

A. 4038. **B.** 4040. **C.** 2023. **D.** 2020.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow (y+2)\log_2\left(\frac{y-2}{y+2}+1\right)+\frac{(x-4)(y-2)}{x+5}\log_3\left(\frac{x+5}{x-4}+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(y+2)\log_2\left(\frac{2y}{y+2}\right)+(x-4)(y-2)\log_3\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)\le 0$$ (1), điều kiện $x>4$.

Vì y nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $y>2$ thì khi đó $\frac{2y}{y+2}>1 \to (x+5)(y+2)\underbrace{\log_2\left(\frac{2y}{y+2}\right)}_{\to 0^+}+\underbrace{(x-4)\underbrace{(y-2)}_{\to 0^+}\log_3\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)}_{\to 0^+}>0$,

  khi đó để bất phương trình (1) có nghiệm thì $\log_3\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-4}<1 \Leftrightarrow x<-5$. Mà mặt khác giả thiết cho $1 \le x \le 2023$ nên ta loại
- Trường hợp 2: $y=2$ thì khi đó $VT(1)=0$ tức bất phương trình luôn đúng với mọi $x>4$, mà mặt khác giả thiết cho $1 \le x \le 2023$ nên ta suy ra $x \in [5;2023]$ tức có 2019 cặp số nguyên dương $(x;y)$. (2)
- Trường hợp 3: $y<2 \to y=1$ thì khi đó bất phương trình (1) trở thành:

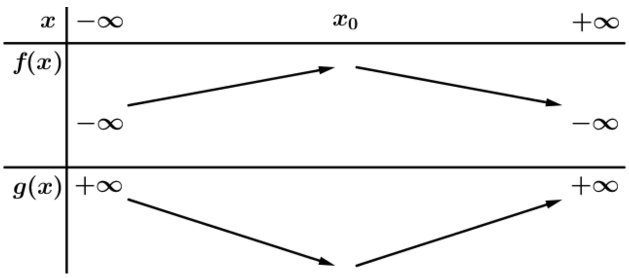
  $$\Rightarrow 3(x+5)\log_2\frac{2}{3}-(x-4)\log_3\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)\le 0,\forall x>4 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x+5}{x-4}\right)\log_2\frac{2}{3}-\log_3\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)\le 0,\forall x>4$$

  Với $\forall x \ge 5: \frac{x-4}{x+5}>0 \to 3\left(\frac{x+5}{x-4}\right)\log_2\frac{2}{3}>0 \to \log_3\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)>0$ (luôn đúng với mọi $x \ge 5$).

  Suy ra $\forall x \in [5;2023]$ thì $y=1$ tức có 2019 cặp số nguyên dương thỏa mãn. (3)

Từ (2) và (3) ta kết luận có $2 \times 2019 = 4038$ cặp số nguyên dương thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f(x_0)-g(x_0)=6$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để cho hàm số $y=\left|m-2-\left|f(x)-g(x)\right|\right|$ có 7 điểm cực trị có dạng $(a;b)$ Hiệu $a-b$ bằng



A. -5. **B.** -6. **C.** 6. **D.** 4.

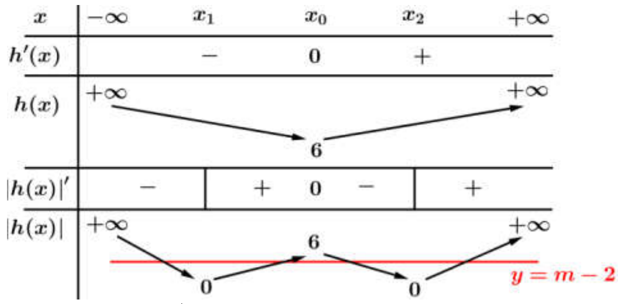
NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $h(x)=f(x)-g(x)\to h(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 (nhìn vào bảng biến thiên).

Tiếp đến $h'(x)=f'(x)-g'(x)\to h'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0\,(x_1<x_0<x_2)$ và $h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=6$

Từ đó ta có các bảng biến thiên như sau:



Như vậy để hàm số $y=\left|m-2-|f(x)-g(x)|\right|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $|f(x)-g(x)|=m-2$ phải có 4 nghiệm phân biệt tức đường thẳng $y=m-2$ cắt đồ thị $|h(x)|$ tại 4 điểm phân biệt.

Suy ra $0<m-2<6\Leftrightarrow m\in(2;8)\to a-b=-6$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|3+5i-iz_1|=|\overline{z_2}-5-3i|=10$ và $|z_1-z_2|=16$. Khi đó mođun của số phức $w=z_1+z_2-10+6i$ bằng

A. 20. **B.** 6. **C.** 16. **D.** 12.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $|3+5i-iz_1|=|\overline{z_2}-5-3i|=10\Leftrightarrow|z_1-5+3i|=|z_2-5+3i|=10$.

Sử dụng công thức $2\left(|z|^2+|w|^2\right)=|z+w|^2+|z-w|^2$, áp dụng vào bài toán trên ta có:

Khi đó: $200=|z_1-5+3i|^2+|z_2-5+3i|^2=\dfrac{|(z_1-5+3i)+(z_2-5+3i)|^2-|(z_1-5+3i)-(z_2-5+3i)|^2}{2}$

$=\dfrac{|z_1+z_2-10+6i|^2-|z_1-z_2|^2}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}|w|^2-|z_1-z_2|^2=400\\|z_1-z_2|=16\end{cases}\Rightarrow|w|=\sqrt{400-16^2}=12$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ CHUYÊN KHTN LẦN 3

Câu 45: Xét hàm số $f(x)=x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2)+f(m-4x)=0$ có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1;4)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $f(-x)=-x+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-x+\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\left(x+\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)=-f(x)$ nên từ đó suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ. Khi đó $f(x^2)+f(m-4x)=0\Leftrightarrow f(x^2)=-f(m-4x)=f(4x-m)$. (1)

Xét hàm số $f(x)=x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ có $f'(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ tức $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $x^2=4x-m\Leftrightarrow m=4x-x^2=g(x)$. Giải phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in(-1;4)$.

Suy ra để yêu cầu bài toán thỏa thì $m\in(g(4);g(2))\Rightarrow m\in(0;4)\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\{1;2;3\}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(6;2;-4)$, mặt phẳng $(P): x+y+2z+3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+(z-4)^2=1$. Xét các điểm M thuộc (P) và N thuộc (S) sao cho $AM+MN$ nhỏ nhất. Gọi $(a;b;c)$ là tọa độ điểm M, tổng $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(0;1;4)$, bán kính $R=1$. Tiếp đến thế tọa độ I,A vào mặt phẳng (P) thì dễ thấy rằng $(x_A+y_A+2z_A+3)(x_I+y_I+2z_I+3)>0$ tức A,I cùng phía với mặt phẳng (P). Khi đó ta gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), với $A'(5;1;-6)$, ta suy ra $AM+MN=A'M+MN=A'I-R=5\sqrt{5}-1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M=A'I\cap(P)$. Ta có phương trình đường thẳng $(A'I): \begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=4-2t \end{cases}$.

Thế vào mặt phẳng (P) suy ra: $t=4 \Rightarrow M(4;1;-4) \Rightarrow a+b+c=1$. **Chọn đáp án B.**

Câu 47: Cho các số phức $z=a+3i$ và $w=b+i$ với $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z+w|=\sqrt{2}|z-1|=\sqrt{2}|w+1|$. Modun của số phức $z+w$ **gần** nhất với số nào dưới đây ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Từ giả thiết ban đầu ta có $2|z+w|^2=2\left(|z-1|^2+|w+1|^2\right)=|z+w|^2+|z-w-2|^2 \Leftrightarrow |z+w|^2=|z-w-2|^2$

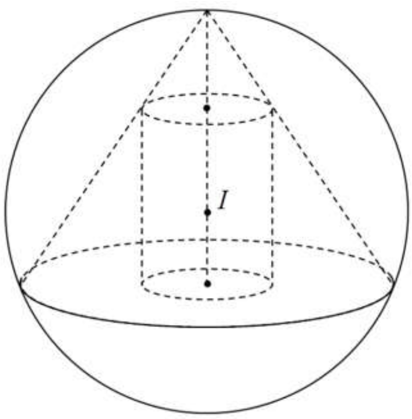
$\Leftrightarrow (a+b)^2+16=(a-b-2)^2+4 \Leftrightarrow 4+2ab+a-2b=0 \Rightarrow a=\dfrac{2b-4}{2b+1}$

Tiếp đến ta có: $|z+w|^2=2|w+1|^2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2b-4}{2b+1}+b+4i\right|^2=2|b+1+i|^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2b-4}{2b+1}+b\right)^2+16=2(b+1)^2+2$ (*)

Giải phương trình (*) ta thu được $b=2 \to a=0 \to z+w=2+4i \to |z+w|=2\sqrt{5}$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ SỞ NINH THUẬN LẦN 1

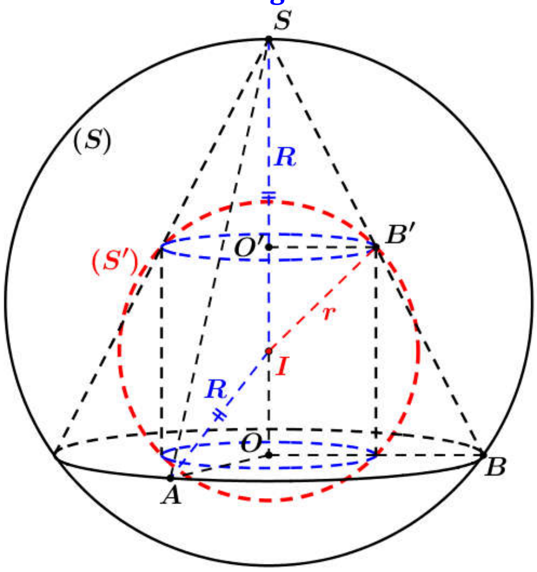
Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$. Gọi (N) là hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp trong mặt cầu (S) và (T) là hình trụ có diện tích xung quanh lớn nhất nội tiếp bên trong hình nón (như hình vẽ). Khi đó, điểm nào dưới đây có thể thuộc đường tròn đáy của hình trụ ?



A. $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $Q\left(0;\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $N\left(\dfrac{2}{3};0;\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $P\left(0;0;\dfrac{4}{3}\right)$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải



(Điểm O sử dụng trong bài không phải là gốc tọa độ trong hệ trục $Oxyz$).

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$. Với $OI=x\in[0;1]$, từ hình vẽ ta có được:

$$V_{non}=\frac{1}{3}\pi OA^2.OS=\frac{\pi}{3}\left(1-x^2\right)(1+x)=\frac{\pi}{6}(1+x)(1+x)(2-2x)\le\frac{\pi}{6}\frac{(1+x+1+x+2-2x)^3}{27}=\frac{32\pi}{81}$$

Nên khi đó suy ra thể tích nón đạt giá trị lớn nhất khi $1+x=2-2x\Leftrightarrow x=OI=\frac{1}{3}\to SO=\frac{4}{3}\to OA=OB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tiếp đến theo định lí Ta-lét ta có: $\frac{O'B'}{OB}=\frac{SO'}{SO}\Leftrightarrow O'B'=\frac{OB}{SO}SO'=\frac{SO'}{\sqrt{2}}\to OO'=\frac{4}{3}-SO'$.

Suy ra diện tích xung quanh của trụ là $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi\frac{SO'}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3}-SO'\right)=\pi\sqrt{2}y\left(\frac{4}{3}-y\right), SO'=y\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$

Đánh giá được $f(y)=-y^2+\frac{4}{3}y=-\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\le\frac{4}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $y=SO'=\frac{2}{3}\to O'I=\frac{1}{3}$ tức I là trung điểm OO'. Suy ra hai đường tròn đáy của hình trụ luôn thuộc mặt cầu (S') tâm $I(1;1;1)$ và bán kính tương ứng bằng $r=\sqrt{O'I^2+O'B^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{1}{3}$.

Thế 4 đáp án vào mặt cầu trên ta thấy điểm M tại đáp án A thỏa thuộc (S'). **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ THPT BẠCH ĐẰNG – QUẢNG NINH

Câu 1: Có bao nhiêu cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ sao cho thỏa mãn bất phương trình sau:

$$(4x-3y)^2.7^{20x^2-28xy+10y^2-4}\le 4-4x^2+4xy-y^2$$

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: $(4x-3y)^2.7^{20x^2-28xy+10y^2-4}\le 4-4x^2+4xy-y^2$

Nhận thấy có biến đổi: $\begin{cases}(3x-2y)^2+(y-x)^2=10x^2-14xy+5y^2\\4-4x^2+4xy-y^2=4-(2x-y)^2\end{cases}$ nên suy ra bất phương trình trở thành:

$\Leftrightarrow (4x-3y)^2.7^{2(3x-2y)^2+2(x-y)^2-4}\le 4-(2x-y)^2$ (1). Đặt $\begin{cases}a=3x-2y\\b=y-x\end{cases}$ thì (1) trở thành:

$\Leftrightarrow (a-b)^2.7^{2(a^2+b^2)-4}\le 4-(a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 7^{(a+b)^2+(a-b)^2-4}\le 4-(a+b)^2$

$\Leftrightarrow \log_7(a-b)^2+(a-b)^2\le \log_7\left(4-(a+b)^2\right)+\left(4-(a+b)^2\right)$. (2)

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+t,\forall t\in(0;+\infty)$, khi đó suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ tức (2) tương đương với: $(a-b)^2\le 4-(a+b)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2\le 2\Leftrightarrow 0<(3x-2y)^2+(x-y)^2\le 2$.

Do đề bài cần $x,y\in\mathbb{Z}$ nên bất phương trình tương đương với các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}3x-2y=\pm 1\\x-y=\pm 1\end{cases}$. Vẽ 4 đường thẳng trên hệ trục tọa độ Oxy dễ dàng thu được 4 cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: $\begin{cases}3x-2y=0\\x-y=\pm 1\end{cases}$. Vẽ 3 đường thẳng trên hệ trục tọa độ Oxy dễ dàng thu được 2 cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 3: $\begin{cases}3x-2y=\pm 1\\x-y=0\end{cases}$. Vẽ 3 đường thẳng trên hệ trục tọa độ Oxy dễ dàng thu được 2 cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 4: $\begin{cases}3x-2y=0\\x-y=0\end{cases}$. Cặp nghiệm duy nhất thỏa là $(x;y)=(0;0)$.

Tóm lại ta kết luận có tổng cộng 1+4+4=9 cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),G(x)$ lần lượt là hai nguyên hàm của các hàm số $f(x)$ và $f(x)+2x$. Biết rằng $f(7)=3$, $F(1)=2G(1)+3$ và $F(7)=2G(7)-1$. Khi đó tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2 xf'(2x+1)dx$ bằng

A. $\dfrac{55}{2}$. **B.** -23. **C.** 92. **D.** -4.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\begin{cases} F(1)=2G(1)+3 \\ F(7)=2G(7)-1 \end{cases} \to F(7)-F(1)=2\left(G(7)-G(1)\right)-4 \Leftrightarrow \int_1^7 F'(x)dx=2\int_1^7 G'(x)dx-4$

Mà $F(x),G(x)$ lần lượt là hai nguyên hàm của các hàm số $f(x)$ và $f(x)+2x$ nên ta suy ra:

$\Rightarrow \int_1^7 f(x)dx=2\int_1^7\left(f(x)+2x\right)dx-4 \Leftrightarrow \int_1^7 f(x)dx=4-4\int_1^7 xdx=-92$. Khi đó ta kết luận:

$I=\int_0^3 xf'(2x+1)dx=\frac{1}{4}\int_1^7 (x-1)f'(x)dx=\frac{\left((x-1)f(x)\right)\Big|_1^7}{4}-\frac{1}{4}\int_1^7 f(x)dx=\frac{3}{2}.3-\frac{1}{4}(-92)=\frac{55}{2}$. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 48: Cho ba số thực dương $(x;y;z)$ thỏa mãn $5\left(x^3+y^3+z^3\right)=(x+y+z)(xy+yz+zx)+15xyz$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_2\left(y^2+z^2-x-y-z+8\right)$ bằng

A. 2. **B.** $\log_2 6$. **C.** 3. **D.** $\log_2 3$.

Lời giải

Đầu tiên ta biến đổi đẳng thức ban đầu như sau: $5\left(x^3+y^3+z^3\right)=(x+y+z)(xy+yz+zx)+15xyz$

$\Leftrightarrow 5\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)=(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

$\Leftrightarrow 5(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

$\Leftrightarrow 5\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=xy+yz+zx \Leftrightarrow 5\left(x^2+y^2+z^2\right)=6(xy+yz+zx)$ (1).

Từ biểu thức S đề cho, ta tiếp tục biến đổi (1) như sau:

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-6x(y+z)=6yz-5\left(y^2+z^2\right) \\ 6yz-5\left(y^2+z^2\right)=-4\left(y^2+z^2-2yz\right)-\left(y^2+z^2+2yz\right)=-4(y-z)^2-(y+z)^2\le-(y+z)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-6x(y+z)\le-(y+z)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y+z}{x}\right)^2-6\left(\frac{y+z}{x}\right)+5\le 0 \Leftrightarrow 1\le\frac{y+z}{x}\le 5 \Leftrightarrow -\frac{y+z}{5}\ge -x\ge-(y+z).$$

Suy ra: $S=\log_2\left(y^2+z^2-x-y-z+8\right)\ge\log_2\left(\frac{(y+z)^2}{2}-x-(y+z)+8\right)\ge\log_2\left(\frac{(y+z)^2}{4}-(y+z)+4\right)+1$

$=\log_2\left(\left(\frac{y+z}{2}-1\right)^2+3\right)+1\ge\log_2 3+1=\log_2 6$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49: Cho z_1,z_2,z_3 là các số phức thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2, z_2\ne z_3$ và a là số thực bất kì. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|az_2+(1-a)z_3-z_1\right|$ là

A. $\frac{|z_1-z_2|.|z_1-z_3|}{2}$. **B.** $\frac{|z_1-z_2|.|z_2-z_3|}{2}$. **C.** $\frac{|z_1-z_2|.|z_2-z_3|}{4}$. **D.** $\frac{|z_1-z_2|.|z_1-z_3|}{4}$.

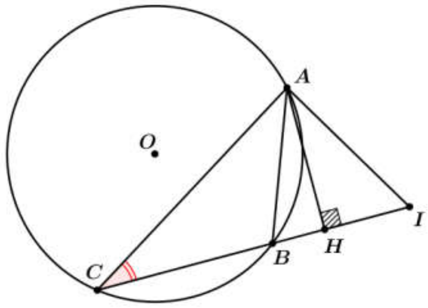
Lời giải

Đầu tiên ta gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2,z_3.

Khi đó ta suy ra A,B,C đều thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R=2$.

Tiếp theo ta gọi I là điểm sao cho thỏa: $\overrightarrow{OI}=a\overrightarrow{OB}+(1-a)\overrightarrow{OC}=a\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}$. Mà O,B,C thẳng hàng nên suy ra I nằm trên đường thẳng BC tức $P=\left|\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}\right|=AI$.

Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BC

Suy ra: $P = AI \geq AH = d\left(A;BC\right) = AC\sin\widehat{ACI} = AC.\dfrac{AB}{2R} = \dfrac{AC.AB}{4} = \dfrac{|z_1 - z_2|.|z_1 - z_3|}{4}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Gọi A, B lần lượt là điểm trên (S) và d; $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho giá trị $MA + MB$ nhỏ nhất. Tính $T = x_0 + y_0 + z_0$

A. $T = \dfrac{3}{2}$. **B.** $T = \dfrac{2}{3}$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đầu tiên dễ thấy $d \parallel (Oxz)$, tiếp đến lấy 1 điểm bất kì trên d có tung độ bằng 2 thì dễ nhận ra đều cùng phía với tâm mặt cầu (S) là $I(1;2;-3)$ so với mặt phẳng (Oxz),

Khi đó ta gọi I' là điểm đối xứng với I qua (Oxz) tức ta thu được $A' \in (S')$ tâm $I'(1;-2;-3)$, bán kính $R = 1$.

Khi đó với mọi điểm $M \in (Oxz), B \in d$ ta luôn có: $P = MA + MB = MA' + MB \geq A'B \geq d(I';d) - 1 = \sqrt{17} - 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi B là giao điểm giữa đường thẳng Δ qua A vuông góc d với d, và $M = \Delta \cap (Oxz)$.

Gọi $E(1;1;1) \in d$ thì khi đó $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\left[\overrightarrow{I'E};\overrightarrow{u_d}\right];\overrightarrow{u_d}\right] = (2;3;2)$ tức $\Delta:\begin{cases} x = 1+2a \\ y = -2+3a, (a \in \mathbb{R}) \\ z = -3+2a \end{cases}$.

Suy ra: $M(1+2a;-2+3a;-3+2a)$ mà $M \in (Oxz)$ nên suy ra $-2+3a = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{3} \to M\left(\dfrac{7}{3};0;\dfrac{5}{3}\right)$

Vậy $T = x_0 + y_0 + z_0 = \dfrac{2}{3}$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ KIÊN GIANG

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(6;6;0), B(6;0;6), C(0;6;6)$. Mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (ABC) sao cho (P) cắt các **đoạn** AB, AC tại các điểm M, N thỏa mãn thể tích tứ diện $OAMN$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào sau đây ?

A. $H(1;-3;4)$. **B.** $E(1;5;-3)$. **C.** $D(1;3;2)$. **D.** $F(1;-1;3)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\overrightarrow{n_{(ABC)}} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = k(1;1;1)$ nên ta suy ra mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến là $(1;1;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $(AB): \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 - a \\ z = a \end{cases}$ và $(AC): \begin{cases} x = 6 - b \\ y = 6 \\ z = b \end{cases}$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Mà (P) cắt các đoạn AB, AC tại các điểm M, N tức $\begin{cases} M \in (AB) \\ N \in (AC) \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} M \in (6;6-a;a) \\ N \in (6-b;6;b) \end{cases}$ $\forall a, b \in [0;6]$.

Từ đó ta có được: $\overrightarrow{n_{(OMN)}} = \left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right] = (6b-6a-ab;6a-6b-ab;6a+6b-ab)$.

Do $(P) \perp (ABC)$ tức $(OMN) \perp (ABC)$ nên $\overrightarrow{n_{(ABC)}}.\overrightarrow{n_{(OMN)}} = 0 \Leftrightarrow 6a+6b+3ab = 0 \Leftrightarrow -ab = -2a-2b$.

Suy ra: $\overrightarrow{n_{(OMN)}} = \left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right] = (4b-8a;4a-8b;4a+4b)$. Cùng với $\overrightarrow{OA} = (6;6;0)$ ta có được:

$$V_{OAMN} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right]\right| = \frac{|24b-48a+24a-48b|}{6} = 4|a+b| = 4(a+b).$$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} ab = 2a+2b \\ a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{2(a+b)} \end{cases} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 8(a+b) \Leftrightarrow a+b \geq 8$ nên $V_{OAMN} \geq 4.8 = 32$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ tức $\overrightarrow{n_{(OMN)}} = (1;1;-2) \to (P): x+y-2z = 0$. **Chọn đáp án C.**

Câu 42: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + m^2 - m + 1 = 0$ với m là tham số thực. Biết rằng có hai giá trị m_1, m_2 của tham số m làm cho phương trình trên có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = 3$. Giá trị của tổng $m_1 + m_2$ bằng

A. $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy z_1, z_2 là 2 nghiệm liên hợp nên $\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = 3 \Leftrightarrow {z_1}^2 + {z_2}^2 = 3$.

Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = 2m \\ P = z_1z_2 = m^2 - m + 1 \end{cases}$, lại có $\Delta' = m^2 - (m^2 - m + 1) = m - 1$.

<u>Trường hợp 1:</u> z_1, z_2 là các số thực tức $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$, khi đó ${z_1}^2 + {z_2}^2 = 2m^2 + 2m - 2 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$ (1)

<u>Trường hợp 2:</u> z_1, z_2 không là số thực tức $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 1$, khi đó $z_1 = m + i\sqrt{m-1}; z_2 = m - i\sqrt{m-1}$

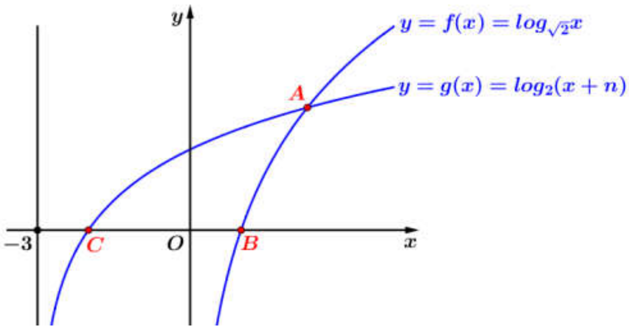
Suy ra: ${z_1}^2 + {z_2}^2 = 2m^2 - 2(m-1) = 3 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m_1 + m_2 = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 43: Đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ được cho như hình dưới.



Diện tích tam giác ABC gần nhất với giá trị nào sau đây ?

A. $3,6$. **B.** $3,8$. **C.** $3,7$. **D.** $3,4$.

Lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy $\lim\limits_{x \to -n} \log_2(x+n) = -\infty$ nên suy ra đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng của $g(x)$ tức $n = 3$

Suy ra $f(x) = 2\log_2 x$ và $g(x) = \log_2(x+3)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x), g(x)$ là: $2\log_2 x = \log_2(x+3) \Leftrightarrow x+3 = x^2$ (Điều kiện $x_A > 0$).

Suy ra: $x_A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ và kéo theo đó $d(A;BC) = |y_A| = y_A = 2\log_2\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Với $B = f(x) \cap Ox, C = g(x) \cap Ox$ suy ra $x_B = 1, x_C = -2 \to BC = |x_B - x_C| = 3$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}d(A;BC).BC = 3\log_2\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \approx 3,61$. **Chọn đáp án A.**

Câu 44: Cho số phức z thỏa mãn $|z+6-13i| + |z-3-7i| = 3\sqrt{13}$ và $(12-5i)(z-2+i)^2$ là số thực âm. Khi đó giá trị của $|z|$ bằng

A. $\sqrt{145}$. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 145.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $(12-5i)(z-2+i)^2 = \dfrac{-(5-i)^2(z-2+i)^2}{2} = -\dfrac{1}{2}\left((5-i)(z-2+i)\right)^2$ là số thực âm nên khi đó

Ta đặt $w = (5-i)(z-2+i)$, suy ra: $|(z-2+i)+8-14i| + |(z-2+i)-i-8i| = 3\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow |(5-i)(z-2+i)+(5-i)(8-14i)| + |(5-i)(z-2+i)+(5-i)(-1-8i)| = 3\sqrt{13}.|5-i|$

$\Leftrightarrow |w+26-78i| + |w-13-39i| = 39\sqrt{2}$. Gọi $M(w), A(-26;78), B(13;39)$ với $AB = 39\sqrt{2}$ ta suy ra $MA + MB = AB$ tức M chạy trên đoạn thẳng AB.

Mà $(12-5i)(z-2+i)^2 - \dfrac{1}{2}\left((5-i)(z-2+i)\right)^2 = -\dfrac{w^2}{2}$ là số thực âm tức w^2 là số thực dương nên khi đặt

$w = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ thì ta suy ra $\operatorname{Im}(w^2) = 2xy = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$. Nhận thấy đoạn thẳng AB không cắt trục hoành nên loại $y = 0$, suy ra $x = 0$. Do $AB \cap Oy = M(0;52)$ nên suy ra $w = (5-i)(z-2+i) = 52i$

Suy ra $z = \dfrac{52i}{5-i} + 2 - i = 9i$. Vậy $|z| = 9$. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Cách 2: Ta đặt $z = x + yi\ \ (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó với $(12-5i)(z-2+i)^2$ là một số thực âm thì ta suy ra:

$$\begin{cases}(z-2+i)^2 = a(12+5i)\\ a<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2-(y+1)^2 = 12a\\ 2(x-2)(y+1)=5a\end{cases}, \forall a<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-2)^2-(y+1)^2}{2(x-2)(y+1)} = \dfrac{12}{5}\\ 2(x-2)(y+1)=5a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5\left(\dfrac{x-2}{y+1}\right)^2 - 24\left(\dfrac{x-2}{y+1}\right)-5=0\\ 2(x-2)(y+1)=5a\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{y+1}=5 \vee \dfrac{x-2}{y+1} = -\dfrac{1}{5}\\ 2(x-2)(y+1)=5a\end{array}\right..$$

Do $a<0$ nên $(x-2)(y+1)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{y+1}<0 \to \dfrac{x-2}{y+1} = -\dfrac{1}{5}$, suy ra: $\begin{cases}y+1=-5(x-2)\\ -2(x-2)^2 = a\end{cases}$. (1)

Tiếp đến ta gọi $M(z), A(-6;13), B(3;7)$ với $AB = 3\sqrt{13}$ ta suy ra $MA+MB=AB$ tức M chạy trên đoạn thẳng AB. Đến đây ta viết được phương trình đường thẳng $AB: 2(x-3)+3(y-7)=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra M là giao điểm giữa đường thẳng $d: y+1=-5(x-2)$ và AB. Khi đó tọa độ $M(a;b)$ biểu diễn số phức z là nghiệm của hệ phương trình sau: $\begin{cases}2(a-3)+3(b-7)=0\\ b+1=-5(a-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=9\end{cases} \to M(0;9) \to |z| = 9$

Chọn đáp án C.

Câu 50: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+(a-9)x^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ có đồ thị (C). Gọi (C') là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Biết rằng (C) và (C') cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ là $x_1=2, x_2=3$ và $x_3=6$. Tổng các giá trị cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. 31. **B.** $-\dfrac{32}{27}$. **C.** $-\dfrac{31}{27}$. **D.** 32.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f'(x)=3ax^2+2(a-9)x+c\ \ (a\neq 0)$. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C) và (C') là: $ax^3-(2a+9)x^2+(18-2a+c)x+d-c=0$.

Khi đó theo định lí Vi-ét ta có được: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=11=\dfrac{2a+9}{a}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=36=\dfrac{18-2a+c}{a}\\ x_1x_2x_3=36=\dfrac{c-d}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ c=20\\ d=-16\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}y=f(x)=x^3-8x^2+20x-16\\ f'(x)=3x^2-16x+20\end{cases}$. Giải phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{10}{3}\end{array}\right. \to \begin{cases}f(2)=0\\ f\left(\dfrac{10}{3}\right)=-\dfrac{32}{7}\end{cases}$.

Chọn đáp án B.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ TUYÊN QUANG

Câu 39: Cho các số phức z,u,w lần lượt thỏa mãn $|z-3-4i|=2$, $|u+7+i|=|u+3+i|$, $|w|=3$ và $|z+u-w|=|z-u+w|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+u|$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

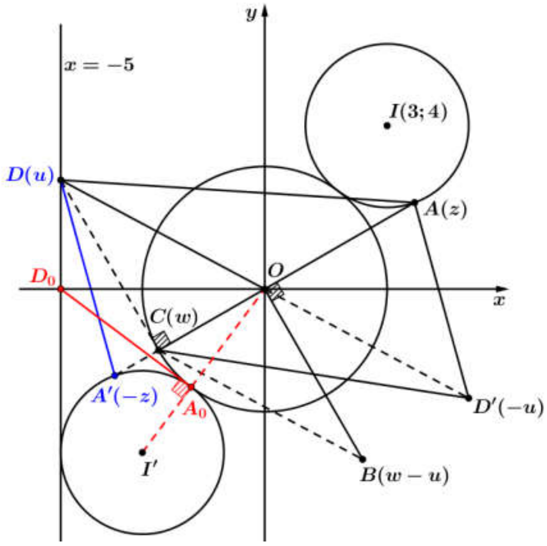
Lời giải

Cách 1: Gọi $A(z), B(w-u)$ thì khi đó $|z+u-w|=|z-u+w| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$.

Gọi M là trung điểm AB thì khi đó phương trình tương đương với: $2OM = AB$ tức ΔOAB vuông tại O có trung tuyến OM bằng nửa cạnh huyền AB. Suy ra $OA \perp OB$ tức $z\left(\overline{w-u}\right)$ là số thuần ảo.

Đặt $C(w), D(u)$ thì khi đó $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, kéo theo đó ta cũng có $OC \perp CD$ $(OA \perp CD)$.

Bằng phương pháp đại số, ta suy ra $A(z)$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=2$, $C(w)$ thuộc đường tròn (C_2) tâm O, bán kính $r=3$ và $D(u)$ thuộc đường thẳng $x=-5$. Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Lấy điểm D' đối xứng với D qua O và đường tròn (C_3) tâm I' đối xứng với (C_1) qua O với $A' \in (C_3)$

Khi đó $|z+u|=|u-(-z)|=A'D \ge d(D;A'O)=DC=\sqrt{DO^2-r^2} \ge \sqrt{D_0O^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A' \equiv C \equiv A_0 = (C_2)\cap(C_3)$ và $D_0(-5;0)$. **Chọn đáp án B.**

Cách 2: Ta đặt $\begin{cases} x=z+u \\ y=z-u \end{cases}$ với x,y là các số phức thì khi đó $(z;u)=\left(\frac{x+y}{2};\frac{x-y}{2}\right)$.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} |z-3-4i|=2; |w|=3 \\ |u+7+i|=|u+3+i| \\ |z+u-w|=|z-u+w| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y-6-8i|=8 \quad (1) \\ |x-y+14+2i|=|x-y+6+2i| \quad (2) \\ |x-w|=|y+w| \quad (3) \end{cases}$

Áp dụng các bất đẳng thức số phức ta lần lượt có được các đánh giá như sau:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow 8 \ge \big||x+y|-|6+8i|\big| = \big||x+y|-10\big| \\ (2) \Rightarrow x-y=-10+bi, b\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(|x+y|-10\right)^2 \le 64 \\ |x-y|=\sqrt{b^2+100} \ge 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le |x+y| \le 8 \\ |x-y| \ge 10 \end{cases}.$$

Từ đó ta suy ra: $8 \le \big||x-y|-|x+y|\big| \le 2|x| \Leftrightarrow |x| \ge 4$ tức $|z+u| \ge 4$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ CẦN THƠ

Câu 39: Cho số phức z thỏa mãn $|2z+i|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|8z+7i|^2+8|z-\overline{z}|^3$. Khi đó giá trị của biểu thức $M+m$ bằng

A. -14. **B.** 114. **C.** 82. **D.** 98.

Lời giải

Cách 1: Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ thì khi đó ta biến đổi được như sau:

$$|2z+i|=1\Leftrightarrow\left|z+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow y\in[-1;0].$$

Suy ra: $P=|8z+7i|^2+8|z-\overline{z}|^3=|8x+(8y+7)i|^2+8|2yi|^3=64x^2+(8y+7)^2-64y^3$

$$=64\left[\frac{1}{4}-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right]+(8y+7)^2-64y^3=-64y^3+48y+49.$$

Xét hàm số $f(y)-64y^3+48y+49$ trên $[-1;0]$ có $f'(y)=192y^2+48=0\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\in[-1;0]$

Suy ra $P_{\max}=\max\limits_{[-1;0]}f(y)=f(-1)=65$ và $P_{\min}=\min\limits_{[-1;0]}f(y)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=33$ tức $M+m=98$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ SỞ HẢI PHÒNG LẦN 2

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2az+b^2-1=0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+3iz_2=4+3i$?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Trường hợp 1: z_1,z_2 là hai nghiệm phức.

Đặt $z=m+ni\ (m,n\in\mathbb{R})$ thì khi đó $(m+ni)+3i(m-ni)=4+3i\Leftrightarrow m+3n+(n+3m)i=4+3i$

Đồng nhất hệ số khi đó ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}m+3n=4\\3m+n=3\end{cases}\Leftrightarrow(m;n)=\left(\frac{5}{8};\frac{9}{8}\right)$ tức

Từ đó suy ra $z_1=\frac{5}{8}+\frac{9}{8}i,z_2=\frac{5}{8}-\frac{9}{8}i$.

Theo định lí Vi-ét, ta có: $z_1+z_2=-2a=\frac{5}{4};z_1z_2=b^2-1=\frac{53}{32}\Leftrightarrow(a;b)=\left(\frac{-5}{8};\pm\sqrt{\frac{85}{32}}\right)$ (1)

Trường hợp 2: z_1,z_2 là hai nghiệm thực tức $a^2-b^2+1>0$

Khi đó đẳng thức $z_1+3iz_2=4+3i$ xảy ra khi $z_2=1$ và $z_1=4$

Theo định lí Vi-ét ta suy ra $z_1+z_2=-2a=5$ và $z_1z_2=b^2-1=4$. Suy ra $(a;b)=\left(-\frac{5}{2};\pm\sqrt{5}\right)$ tức có 2 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn. (2)

Từ (1) và (2) ta kết luận có 4 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 44: Cho x,y là các số nguyên dương nhỏ hơn 2023. Gọi S là tập hợp các giá trị của y thỏa mãn: Với mỗi giá trị của y luôn có ít nhất 100 giá trị không nhỏ hơn 3 của x thỏa $\left(2^{x+y^2}-2^{y^2-x}\right)\log_x y>4^{\frac{2y^2-1}{2}}-\frac{1}{2}$, đồng thời các tập hợp có y phần tử có số tập con lớn hơn 2048. Số phần tử của tập S là

A. 32. **B.** 1921. **C.** 1912. **D.** 33.

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình ban đầu tương đương với: $\left(2^{x+y^2}-2^{y^2-x}\right)\log_x y>4^{\frac{2y^2-1}{2}}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left(2^x-2^{-x}\right)\log_x y>\dfrac{2^{y^2}-2^{-y^2}}{2}$ (1). Căn cứ vào điều kiện $x,y\in\mathbb{R}^+,x\neq 1$, ta có các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: $y=1$, dễ thấy (1) không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $y=2$, thì (1) trở thành $\dfrac{2^x-2^{-x}}{\log_2 x}>\dfrac{255}{32}$ $(2)\Leftrightarrow x>4$ mà $x\in\mathbb{Z},x<2023$ nên $x\in[5;2022]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tới đây ta có thêm hai trường hợp nhỏ như sau:

- Trường hợp 2.1: $x=4$ thì (2) không thỏa mãn
- Trường hợp 2.2: $x\geq 5$, xét hàm số $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{\log_2 x}$ có $f'(x)=\dfrac{2^x(x\ln 2\ln x-1)+x.2^{-x}\ln 2\ln x+2^{-x}}{x\ln 2\log_2^2 x}>0$

  Khi ấy suy ra $f(x)\geq f(5)>\dfrac{255}{32},\forall x>4$. (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $y\geq 3$ thì (1) thành: $\Leftrightarrow\dfrac{2^x-2^{-x}}{\ln x}>\dfrac{2^{y^2}-2^{-y^2}}{\ln y^2}$ (3)

Xét hàm số $y=g(t)=\dfrac{2^t-2^{-t}}{\ln t}$ nhận thấy hàm luôn đồng biến trên $[3;+\infty)$ nên suy ra $x>y^2\geq 9$

Suy ra $9\leq y^2<x<2023$. Từ đó theo giả thiết ta có được $2022-\left(y^2-1\right)\geq 100\Leftrightarrow -43\leq y\leq 43$.

Mặt khác tập hợp có y phần tử có số tập con lớn hơn 2048 tức $y>11$ (Công thức số tập con của n phần tử là 2^n) nên ta kết luận $y\in[12;43]$ tức có 32 giá trị nguyên y thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)-f'(x)=x^3-6x^2+7x-2,\forall x\in\mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$ và $y=xf'(x)$ bằng

A. $\dfrac{69}{32}$. **B.** $\dfrac{21}{32}$. **C.** $\dfrac{27}{32}$. **D.** $\dfrac{135}{64}$.

Lời giải

Ta đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ thì khi đó $f'(x)=3x^2+2ax+b$. Thế vào dữ kiện đề bài ta suy ra: $x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x+(c-b)=x^3-6x^2+7x-2$. Đồng nhất hệ số ta suy ra $a=-3;b=1;c=-1$

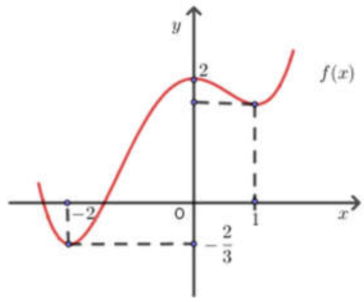
Suy ra: $f(x)=x^3-3x^2+x-1$ và $xf'(x)-f(x)=2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm trên thu được nghiệm là: $x=1;x=-\dfrac{1}{2}$

Vậy ta suy ra diện tích cần tìm là: $S=\int\limits_{-0.5}^{1}(x-1)^2(2x+1)dx=\dfrac{27}{32}$. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25;20)$ để hàm số $g(x)=\frac{1}{3}f^3(x)+\frac{1}{2}m.f^2(x)+(3m-5)f(x)-7$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 20. **D.** 19.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $g'(x)=f'(x)\left(f^2(x)+m.f(x)+3m-5\right)\geq 0, \forall x \in (-2;0)$. Do $f'(x)\geq 0, \forall x\in(-2;0)$ (dựa vào hình vẽ) nên ta suy ra để thỏa mãn đề bài thì $f^2(x)+m.f(x)+3m-5\geq 0, \forall x\in(-2;0)$. (1)

Đặt $t=f(x)\Rightarrow t\in\left(-\frac{2}{3};2\right)$, khi đó (1) thành $t^2+mt+3m-5\geq 0, \forall t\in\left(-\frac{2}{3};2\right) \Leftrightarrow m\geq\frac{5-t^2}{t+3}, \forall t\in\left(-\frac{2}{3};2\right)$

Xét hàm số $h(t)=\frac{5-t^2}{t+3}$ có $h'(t)=\frac{t^2+6t+5}{(t+3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-5\end{array}\right.\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $m\geq\max\limits_{\left(-\frac{2}{3};2\right)}h(t)\Leftrightarrow m\geq h(-1)\Leftrightarrow m\geq 2$. Mà $m\in(-25;20)$ nên suy ra $m\in[2;19]$ tức có 18 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 49: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, từ điểm $A(1;1;0)$ kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;1)$ và bán kính $R=1$. Gọi $M(a;b;c)$ là một trong các tiếp điểm ứng với các tiếp tuyến trên. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2a+c-1|$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 11. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $\begin{cases}IM^2=1\\AM^2=IA^2-IM^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=1\\(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=4\\2a-c+2=0\end{cases}$

Suy ra $4\geq(a-1)^2+c^2=(a-1)^2+(2a+2)^2\Leftrightarrow -1\leq a\leq\frac{-1}{5}$. Vậy $T=|2a+c-1|=|4a+1|\leq 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)=(-1;1;0)$. **Chọn đáp án A.**

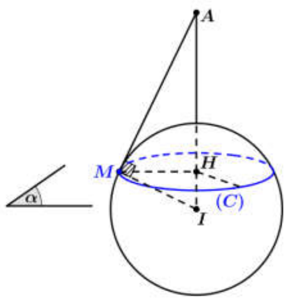
Cách 2:

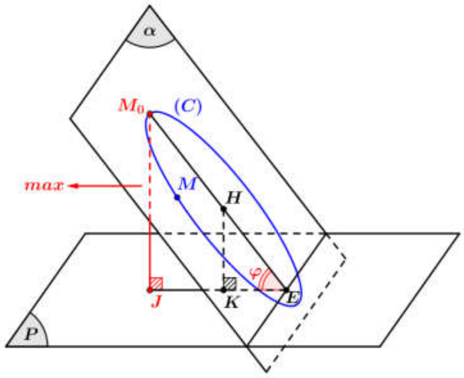
Đầu tiên ta có: $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{5}\overrightarrow{IA}$, khi ấy suy ra tọa độ $H\left(-\frac{3}{5};1;\frac{4}{5}\right)$. Tiếp đến xét hệ: $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4\end{cases}$

Ta trừ hai phương trình theo vế thì khi ấy thu được phương trình mặt phẳng $(\alpha): 2x-z+2=0$.

Từ đây ta cũng suy ra M di động trên một đường tròn thiết diện (C) tạo bởi (P) khi cắt (S) có tâm $H\left(-\frac{3}{5};1;\frac{4}{5}\right)$ và bán kính bằng $r=\sqrt{{R_{(S)}}^2-d^2\left(I;(\alpha)\right)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Tiếp đến ta gọi mặt phẳng $(\alpha):2x+z-1=0$ thì khi đó biểu thức $T=|2a+c-1|=\sqrt{5}d\left(M;(P)\right)$.





Ta có: $\cos\varphi=\cos\left(\widehat{(\alpha);(P)}\right)=\frac{|4-1|}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\to\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{4}{5}$ và $HK=d\left(H;(P)\right)=\frac{7}{5\sqrt{5}}$.

Khi đó suy ra: $HE=\frac{HK}{\sin\varphi}=\frac{7}{4\sqrt{5}}$. Đến đây ta nhận thấy $T_{\max}$ khi $d\left(M;(P)\right)$ đạt max

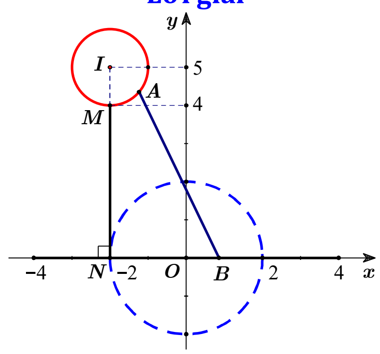
Suy ra: $T_{\max}=\sqrt{5}d\left(M_0;P\right)=\sqrt{5}M_0J=\frac{\sqrt{5}ME}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{5}\left(MH+HE\right)}{\sin\varphi}=\frac{\sqrt{5}\left(r+HE\right)}{\sin\varphi}=3$

Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv M_0=HE\cap(C)$ như hình vẽ trên. **Chọn đáp án A.**

Câu 50: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$, $\left|(i+1)w+7-3i\right|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z^2+wz-4\right|$ bằng

A. 8. **B.** $2\left(\sqrt{29}-3\right)$. **C.** $2\left(\sqrt{29}-1\right)$. **D.** 4.

Lời giải



Ta có: $\left|(i+1)w+7-3i\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|w+2-5i|=1$. Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thì khi đó ta suy ra:

$P=\left|z^2+wz-4\right|=\left|z^2+wz-z.\overline{z}\right|=|z|.\left|z-\overline{z}+w\right|=2|2bi+w|$

$T=\left|z^2-wz+4\right|=\left|z^2-wz+|z|^2\right|=\left|z^2-wz+z.\overline{z}\right|=|z|\left|z-w+\overline{z}\right|=2\left|z+\overline{z}-w\right|$ (*)

Đặt $z=a+bi$. Suy ra $z+\overline{z}=2a$. Vì $|z|=2$ nên $-2\le a\le 2\Rightarrow -4\le 2a\le 4$.

Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức w và $2a$. Suy ra

+ A thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;5)$ bán kính $R=1$.

+ B thuộc trục Ox và $-4\le x_B\le 4$.

Từ (*) suy ra $T = 2AB \ge 2MN = 2.4 = 8$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv M(-2;4) \Rightarrow w = -2+4i$ và $B \equiv N(-2;0) \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow z = -1+bi$. Mà $|z| = 2 \Rightarrow 1+b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3} \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{3}i$.

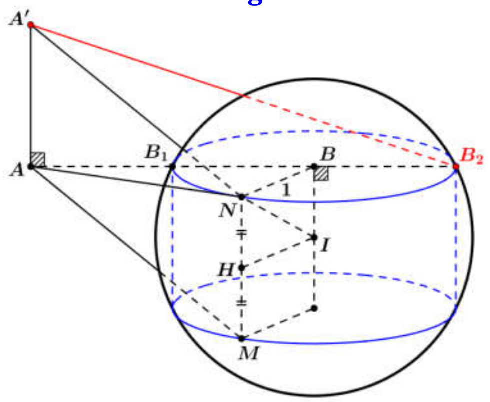
Vậy $T = |z^2 - wz + 4|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 8. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ SỞ HẢI DƯƠNG

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4), B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 7. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;2;-2), \overrightarrow{IB} = (0;2;2) = k(0;1;1)$ tức $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IB}$. Lại có $AB = \sqrt{17}, IB = 2\sqrt{2}, IA = 5$ nên suy ra ΔIBA vuông tại . Do MN là dây cung mặt cầu nên suy ra $d(I;MN) = \sqrt{R_{(S)}{}^2 - MH^2} = 1$. Mà mặt khác $MN = 2IB$ tức $BN = \sqrt{R_{(S)}{}^2 - IB^2} = 1$ (cố định) (*) nên suy ra quỹ tích của dây cung MN là một mặt trụ có trục IB và bán kính bằng 1 như hình vẽ dưới.

Dựng A' sao cho $AMNA'$ là hình bình hành với $A'(4;6;8)$ thì khi đó $A'N = AM$ tức biểu thức max khi $A'N_{\max}$ (*)

Suy ra $T = |AM - BN| = |A'N - BN| = \left|\sqrt{A'A^2 + AN^2} - 1\right| \le \left|\sqrt{MN^2 + (AB+1)^2} - 1\right| = ...$

Dấu bằng xảy ra khi $N \equiv B_2 = AB \cap (B;1)$ như hình vẽ trên. **Chọn đáp án E.**

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2) f^2(x),\ \forall x \in [1;2]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox, $x = 1, x = 2$. Chọn mệnh đề đúng ?

A. $2 < S < 3$. **B.** $1 < S < \frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2} < S < 1$. **D.** $0 < S < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2) f^2(x),\ \forall x \in [1;2] \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{f(x)} + \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-f'(x)}{f^2(x)}\right) = 2x+1$.

$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{xf(x)}\right)' = 2x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{xf(x)} = x^2 + x + C$. Mà $f(1) = -\frac{1}{2}$ nên suy ra $C = 0$

Từ đó suy ra $f(x)=-\frac{1}{x^3+x^2}$, tới đây ta nhận xét $f'(x)>0, \forall x\in[1;2]$ tức hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[1;2]$. Khi đó ta suy ra $S=\left|\int_1^2 \frac{-dx}{x^3+x^2}\right|=0.2 \Rightarrow 0<S<\frac{1}{2}$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ SỞ NAM ĐỊNH LẦN 2

Câu 40: Đặt $I=\int_0^1 \frac{(2x+1)e^x+2ax^2+a}{e^x+ax}dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(0;2023)$ để thỏa mãn $I>6$?

A. 2023. **B.** 2024. **C.** 1877. **D.** 189.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1 \frac{(2x+1)e^x+2ax^2+a}{e^x+ax}dx=\int_0^1 \frac{2x(e^x+ax)+(e^x+a)}{e^x+ax}dx=\int_0^1\left(2x+\frac{e^x+a}{e^x+ax}\right)dx=1+\int_0^1\frac{d(e^x+ax)}{e^x+ax}$

$=1+\ln\left|e^x+ax\right|\Big|_0^1=1+\ln|e+a|$. Mà $I>6$ nên $\ln|e+a|>5 \Leftrightarrow |e+a|>e^5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e+a>e^5 \\ e+a<-e^5\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a>e^5-e \\ a\in(0;2023)\end{cases}$

$\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a\in[146;2022]$ tức có 1877 giá trị nguyên a thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án C.**

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=5$ và

$xf(1-x^3)+f'(x)=x^7-5x^4+7x+3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$?

A. $-\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{-13}{12}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{17}{6}$.

Lời giải

Ta có: $xf(1-x^3)+f'(x)=x^7-5x^4+7x+3 \Leftrightarrow x^2f(1-x^3)+xf'(x)=x^8-5x^5+7x^2+3x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int_0^1(-3x^2)f(1-x^3)dx+\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1(x^8-5x^5+7x^2+3x)dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(1-x^3)d(1-x^3)+f(1)-\int_0^1 f(x)dx=\frac{28}{9} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)dx+5=\frac{28}{9} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{17}{6}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 44: Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2+4m+3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $(z_1-z_2)^2+2m=z_1+\overline{z_2}$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Xét delta của phương trình ban đầu: $\Delta'=(m+1)^2-(m^2+4m+3)=-2(m+1)$.

Trường hợp 1: z_1,z_2 là các số thực tức $\begin{cases} m<-1 \\ \overline{z_2}=z_2\end{cases}$, khi đó theo Vi-ét ta lần lượt có: $\begin{cases} z_1+z_2=2(m+1) \\ z_1z_2=m^2+4m+3\end{cases}$.

Thế vào phương trình ban đầu ta suy ra $(z_1-z_2)^2+2m=z_1+z_2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-4z_1z_2+2m=z_1+z_2$

$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-4(m^2+4m+3)+2m=2(m+1) \Leftrightarrow -8m-10=0 \Leftrightarrow m=-\frac{5}{4}$ (thỏa mãn).

<u>Trường hợp 2:</u> z_1, z_2 không là các số thực tức $m > -1$.

Khi đó ta suy ra z_1, z_2 là hai nghiệm phức có phần ảo khác không, suy ra $(z_1 - z_2)^2 + 2m$ là số thực $\forall m > -1$.

Và mặt khác $z_1 + \overline{z_2}$ là số phức có phần ảo khác không $\forall m > -1$ nên suy ra điều này bị mâu thuẫn nên loại.

Vậy $m = -\dfrac{5}{4}$ là giá trị duy nhất của tham số m cần tìm. **Chọn đáp án C.**

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-15;7;-11), B(-3;1;1), C(7;-1;5)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+1}{1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa (d) sao cho A, B, C ở cùng phía với mặt phẳng (α). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α). Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{82}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{67}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $(d): \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = z+1 \\ 4(1-x) = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (d) \in (P): x+z=0 \\ (d) \in (Q): 4x+y-3=0 \end{cases}$

Từ đó ta <u>*tham số hóa*</u> được phương trình mặt phẳng (α) có dạng là: $a(x+z) + b(4x+y-3) = 0$.

Tiếp đến do A, B, C ở cùng phía với mặt phẳng $(\alpha): (a+4b)x + by + az - 3b = 0$ nên khi đó ta cần $a^2 + b^2 > 0$

Dễ thấy khi $b = 0$ thì $(\alpha) \equiv (P)$ tức A, B, C không ở cùng phía nên ta chọn $b = 1$

Suy ra $(\alpha): (a+4)x + y + az - 3 = 0$. Tiếp theo ta cần xét sự cùng phía, khi đó ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} \left((a+4)x_A + y_A + az_A - 3\right)\left((a+4)x_B + y_B + az_B - 3\right) \ge 0 \\ \left((a+4)x_B + y_B + az_B - 3\right)\left((a+4)x_C + y_C + az_C - 3\right) \ge 0 \\ \left((a+4)x_C + y_C + az_C - 3\right)\left((a+4)x_A + y_A + az_A - 3\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-26a-56)(-4a-28) \ge 0 \\ (-4a-28)(36a+72) \ge 0 \\ (36a+72)(-26a-56) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (13a+28)(a+7) \ge 0 \\ (a+7)(a+2) \le 0 \\ (a+2)(13a+28) \le 0 \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình trên ta suy ra: $-\dfrac{28}{13} \le a \le -2$.

Tiếp theo ta có: $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3 = \dfrac{\left|(-26a-56) + (-4a-28) + (36a+72)\right|}{\sqrt{(a+4)^2 + 1 + a^2}} = \dfrac{|12-6a|}{\sqrt{2a^2+8a+17}} = \dfrac{6|2-a|}{\sqrt{2a^2+8a+17}}$

Khi đó ta xét hàm số $f(a) = \dfrac{6(2-a)}{\sqrt{2a^2+8a+17}}$ trên $\left[\dfrac{-28}{13}; -2\right]$ dễ thấy $f(a) \le f\left(\dfrac{-28}{13}\right) = \ldots\ldots\ldots$ **Chọn đáp án E.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT QUẢNG OAI – HÀ NỘI

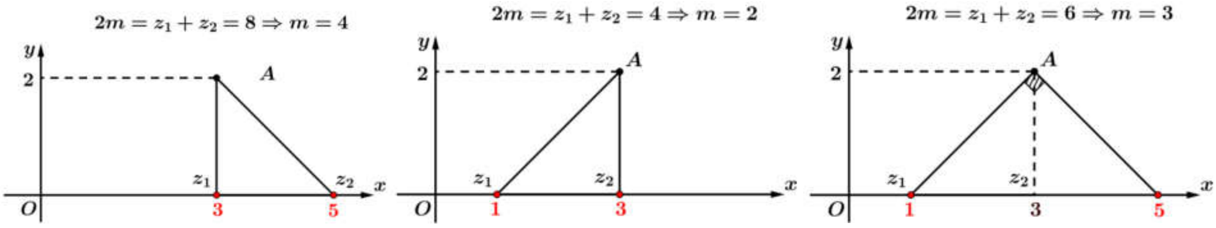
Câu 38: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + n = 0$ (với n, n là tham số thực). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 mà điểm biểu diễn của chúng tạo với điểm $A(3;2)$ thành một tam giác vuông cân. Khi đó tổng các giá trị của tập S bằng

A. 12. **B.** 18. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

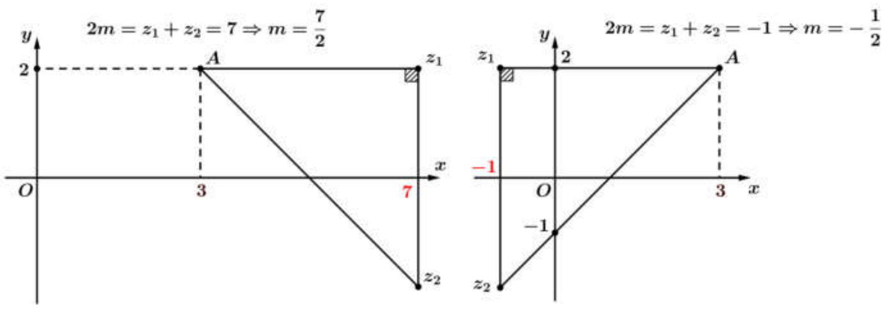
Đầu tiên ta luôn có: $2m = z_1 + z_2$. Khi đó ta chia hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: z_1, z_2 là các số thực. Khi đó ta có lần lượt ba trường hợp nhỏ hơn như sau:



Từ đó ta suy ra $m \in \{2;3;4\}$.

Trường hợp 2: z_1, z_2 không là các số thực. Khi đó ta có lần lượt hai trường hợp nhỏ hơn như sau:



Từ đó ta suy ra $m \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}$.

Như vậy từ 2 trường hợp trên ta suy ra tổng cần tìm là: $S = 2 + 3 + 4 + \frac{7}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$. **Chọn đáp án A.**

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thoả $f^2(x) + 6xf(x) - f'(x) = 3 - 9x^2$ và $f(1) = -4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

A. $\frac{9 - 2\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{3 + 2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3 - 2\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{9 + 2\ln 2}{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $f^2(x) + 6xf(x) - f'(x) = 3 - 9x^2 \Leftrightarrow f^2(x) + 6xf(x) + 9x^2 = f'(x) + 3$

$$\Leftrightarrow (f(x) + 3x)^2 = f'(x) + 3 \Leftrightarrow \frac{f'(x) + 3}{(f(x) + 3x)^2} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x) + 3}{(f(x) + 3x)^2} dx = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x) + 3x} = x + C.$$

Mà $f(1) = -4$ nên ta suy ra $C = 0$ tức $f(x) = -3x - \frac{1}{x}$. Do $f'(x) < 0, \forall x \in [1;2]$ nên ta suy ra:

$S = \left| \int_1^2 \left(-3x - \frac{1}{x}\right) dx \right| = \frac{9 + 2\ln 2}{2}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hai hàm số $F(x)$ và $xF(x)-G(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $F(0)+G(0)=3$ và $G(4)-3G(2)=6$. Khi đó $\int_4^8 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. 16. **B.** 32. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\int_0^2 f(x)dx = \underbrace{F(2)-F(0)}_{F(x)} = \underbrace{2F(2)-G(2)-\left(0F(0)-G(0)\right)}_{xF(x)-G(x)}$

$\Leftrightarrow F(2)-F(0)=2F(2)-G(2)+G(0) \Leftrightarrow F(2)-G(2)=-\left(F(0)+G(0)\right)=-3$. (1)

Lại có: $\int_2^4 f(x)dx = \underbrace{F(4)-F(2)}_{F(x)} = \underbrace{4F(4)-G(4)-\left(2F(2)-G(2)\right)}_{xF(x)-G(x)} \Leftrightarrow 3F(4)-G(4)=F(2)-G(2)=-3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có: $3F(4)-G(4)-3\left(F(2)-G(2)\right)=6 \Leftrightarrow 3\left(F(4)-F(2)\right)-\left(G(4)-3G(2)\right)=6$.

Mà $G(4)-3G(2)=6$ nên $\int_4^8 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_2^4 f(x)dx = 2\left(F(4)-F(2)\right)=2.\frac{6+6}{3}=8$. **Chọn đáp án D.**

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f'(1-x)=-4x^3+12x^2-8x, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, hỏi hàm số $y=g(x)=f(2-x)f(1-2x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\left[\frac{5}{2};4\right]$ bằng

A. 2025. **B.** 20736. **C.** $\frac{2025}{16}$. **D.** 0.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f'(1-x)=4(1-x-1)(1-x)(1+1-x), \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra: $f'(x)=4x(x-1)(x+1)=4(x^3-x) \Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+C$. Mà $f(0)=1$ nên suy ra $f(x)=(x^2-1)^2$.

Khi đó ta có: $g(x)=f(2-x)f(1-2x)=\left((2-x)^2-1\right)^2\left((1-2x)^2-1\right)^2=16x^2(1-x)^4(3-x)^2$

Nhận thấy nên suy ra $\sqrt{g(x)}=\sqrt{16x^2(1-x)^4(3-x)^2}=4x(3-x)(1-x)^2$

Xét hàm số $h(x)=4x(3-x)(1-x)^2$ dễ thấy $h'(x)<0, \forall x\in\left[\frac{5}{2};4\right]$ nên ta suy ra:

$\max\limits_{\left[\frac{5}{2};4\right]} h(x)=h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{45}{4}$, từ đó ta cũng suy ra $\max\limits_{\left[\frac{5}{2};4\right]} g(x)=\left(\max\limits_{\left[\frac{5}{2};4\right]} h(x)\right)^2=\left(\frac{45}{4}\right)^2=\frac{2025}{16}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48: Trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$ cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3;0)$, đường tròn đi qua ba trung điểm c $g(x)\geq 0$ ủa các cạnh của tam giác ABC là giao của mặt cầu $(S): x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+z^2=\frac{25}{4}$ với mặt phẳng (xOy). Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua 3 đỉnh của tam giác ABC sẽ đi qua điểm nào sao đây?

A. $(5;0;5)$. **B.** $(5;-5;0)$. **C.** $(5;2;-3)$. **D.** $(0;5;1)$.

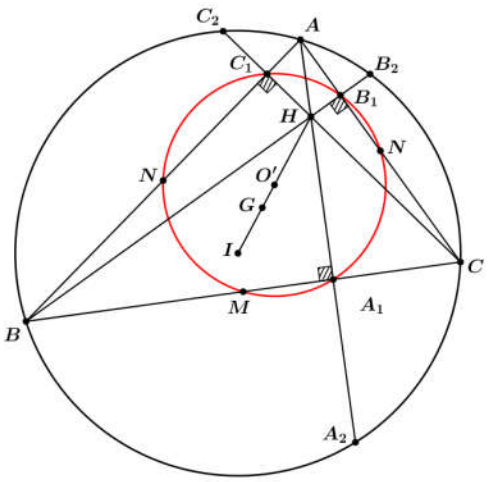
Lời giải

Đầu tiên vì $R_{\min}=R$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên ta gọi $K\left(0;\frac{5}{2};0\right)$ tức tâm mặt cầu (S)

Ta cần chứng minh K là trung điểm của IH với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi G,H,I lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Xét phép vị tự $H\left(G;k=-\frac{1}{2}\right)$, ta có: $A,B,C\to M,N,P$ nên suy ra $(I)\to(MNP)$.

Suy ra phép vị tự biến $(I)\to(O')$ với O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP tức O' là trung điểm IH.
Theo hàng điểm điều hòa ta có: $(H,G,O',I)=-1$ nên H là tâm vị tự ngoài của (I) và (O').



Nhìn hình vẽ trên, xét phép vị tự $H\left(H;k=+\frac{1}{2}\right): A\to D$ (với D là trung điểm AH) thì ta có:

$A\to D, B\to E, C\to F$. Mặt khác $H:(I)\to(O')$ nên suy ra $D,E,F\in(O')$.
Lại có: $H: A_2\to A_1; B_2\to B_1; C_2\to C_1$ nên ta suy ra $A_1,B_1,C_1\in(O')$. Vậy ta suy ra các điểm trên cùng thuộc đường tròn (O') với O' là trung điểm IH và $K\equiv O'$. Vậy K là trung điểm của IH, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ tâm $I(1;2;0)$ và bán kính bằng $R=2R_{(S)}=5$

Suy ra mặt cầu cần tìm là: $(S'):(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=25$. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 49: Cho bất phương trình $\ln\left(x^2-\frac{3x^2}{y+4}\right)>\left[4-x^2-\left(x^2-1\right)y\right]\left[\frac{3x^2+\left(3x^2+5\right)y+20}{y^2+2y+1}\right]$. Có bao nhiêu giá trị x nguyên thuộc $[-200;200]$ để phương trình trên đúng với mọi y dương ?

A. 198. **B.** 398. **C.** 199. **D.** 396.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2y+x^2}{y+4}\right)>\left[4+y-\left(x^2y+x^2\right)\right]\left[\frac{3x^2+\left(3x^2+5\right)y+20}{y^2+2y+1}\right](1)$

Với $x^2y+x^2>y+4$ thì (1) luôn đúng

Với $x^2y+x^2\le y+4$ thì: $\ln\left(\frac{x^2y+x^2}{y+4}\right)<0<\left[4+y-\left(x^2y+x^2\right)\right]\left[\frac{3x^2+\left(3x^2+5\right)y+20}{y^2+2y+1}\right]$

Khi đó suy ra với $(1)\Rightarrow x^2y+x^2>y+4\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)y>4-x^2\,(2)$

Với $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$ thì (2) không đúng với mọi $y>0$

Với $x>1,(2)\Leftrightarrow y>\frac{4-x^2}{x^2-1}$. Suy ra để bất phương trình đúng với mọi $y>0$ thì $\frac{4-x^2}{x^2-1}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le -2\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta suy ra $x\ge 2$, mà $x\in[-200;200]$ nên suy ra $x\in[2;200]$ tức có 199 giá trị nguyên x thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án C.**

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ luôn nhận giá trị dương và có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng $(1;+\infty)$ đồng thời thoả mãn các điều kiện $f(1)=f'(1)=\sqrt{2}$ và $x\left(\left[f'(x)\right]^2-2x^2-x\right)+f(x)\left[xf''(x)-f'(x)\right]=0$. Tính giá trị của $f(2)$.

A. $f(2)=\frac{\sqrt{85}}{6}$. **B.** $f(2)=\frac{\sqrt{510}}{6}$. **D.** $f(2)=\frac{\sqrt{82}}{4}$. **D.** $f(2)=\frac{\sqrt{82}}{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $x\left\{\left[f'(x)\right]^2-2x^2-x\right\}+f(x)\left[xf''(x)-f'(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow x\left\{\left[f'(x)\right]^2+f(x)f'(x)\right\}-f(x)f'(x)=2x^3+x^2\Leftrightarrow x\left[f'(x)f(x)\right]'-f(x)f'(x)=2x^3+x^2$

Với $x>1\Leftrightarrow \frac{x\left[f'(x)f(x)\right]'-f(x)f'(x)}{x^2}=2x+1$

Lấy nguyên hàm cả 2 vế ta được: $\frac{f'(x)f(x)}{x}=x^2+x+C$

Mà $f'(1)=f(1)=\sqrt{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow\frac{f'(x)f(x)}{x}=x^2+x\Leftrightarrow f'(x)f(x)=x^3+x^2$.

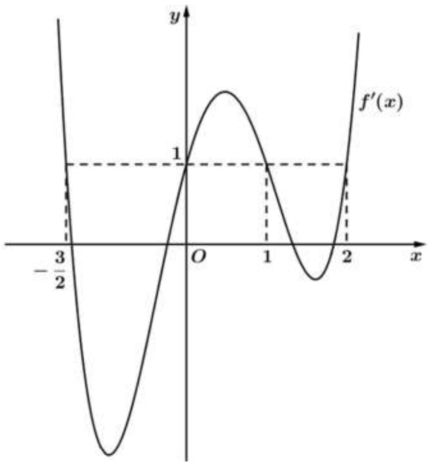
Lấy nguyên hàm cả 2 vế ta được: $\frac{1}{2}f^2(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C_1$

Mà $f(1)=\sqrt{2}\Rightarrow C_1=\frac{5}{12}\Rightarrow f^2(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}\Rightarrow f(2)=\frac{\sqrt{510}}{6}$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ CÀ MAU LẦN 2

Câu 47: Cho $f\left(x\right)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Biết $f\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{653}{320}, f\left(0\right)=-2$ và $f\left(1\right)=\frac{-1}{60}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất cúa hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x+a$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};1\right]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $[-2023;2023]$ để $9m^2-320M>0$?



A. 4004. **B.** 4002. **C.** 4001. **D.** 4003.

Lời giải

Đầu tiên ta xét hàm số: $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x+a$ có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-1=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2}; x=0 \\ x=1, x=2 \end{array}\right.$.

Khi đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\frac{3}{2}$		0		1
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$

Ta có: $g\left(0\right)=a-2; g\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1133}{320}+a; g\left(1\right)=a-\frac{61}{60}$. Khi đó ta suy ra: $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};1\right]} g\left(x\right)=a-2; \max\limits_{\left[-\frac{3}{2};1\right]} g\left(x\right)=a+\frac{1133}{320}$

Mà theo giả thiết ta có: $9m^2-320M>0$ nên suy ra $9\left(a-2\right)^2-\left(320a+1133\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-2.8 \\ a>42.3 \end{array}\right.$.

Mà $a\in[-2023;2023]$ nên suy ra $a\in[-2023;-3]\cup\left[43;2023\right]$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 48: Xét các số thực x, y thỏa mãn

$$\log_4\left(x^2+y^2+14y\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_4 y+\log_3\left(x^2+y^2+16y\right).$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{6y}{x+2y+1}$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Bất phương trình ban đầu tương đương với: $\log_4\left(x^2+y^2+14y\right)+\log_3\left(x^2+y^2\right)\le\log_4 y+\log_3\left(x^2+y^2+16y\right)$

$\Leftrightarrow \log_4\left(x^2+y^2+14y\right)-\log_4 y\le\log_3\left(x^2+y^2+16y\right)-\log_3\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_4\left(\dfrac{x^2+y^2}{y}+14\right)-\log_3\left(1+16\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\le 0$ (1). Đặt $t=\dfrac{x^2+y^2}{y}$ thì bất phương trình (1) trở thành:

$\Leftrightarrow \log_4(t+14)-\log_3\left(1+\dfrac{16}{t}\right)\le 0$. Xét hàm số $y=f(t)=\log_4(t+14)-\log_3\left(1+\dfrac{16}{t}\right)$ trên $(0;+\infty)$ có

$f'(t)=\dfrac{1}{(t+14)\ln 4}+\dfrac{16}{t^2\ln 3}\left(1+\dfrac{16}{t}\right)^{-1}>0, \forall t\in(0;+\infty)$ tức $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$

Suy ra bất phương trình $f(t)\le 0\Leftrightarrow f(t)\le f(2)\Leftrightarrow t\le 2\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2}{y}\le 2\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2\le 1$. (1)

Tiếp đến ta có: $P=\dfrac{6y}{x+2y+1}\Leftrightarrow(d):Px+(2P-6)y+P=0$ (2)

Với (1) là hình tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$, cùng với (2) ta suy ra: $d(I;d)\le R\Leftrightarrow\dfrac{(3P-6)^2}{P^2+(2P-6)^2}\le 1$

$(3P-6)^2\le P^2+(2P-6)^2\Leftrightarrow 4P^2-12P\le 0\Leftrightarrow 0\le P\le 3$. **Chọn đáp án D.**

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ và thỏa mãn $f(x-1)-3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)=1-2x, \forall x\ne\dfrac{1}{2}$. Biết $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=a+b\ln 3+c\ln 5$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính giá trị của biểu thức $P=8a-16b+16c$

A. $P=10$. **B.** $P=8$. **C.** $P=4$. **D.** $P=16$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f(x-1)-3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)=1-2x, \forall x\ne\dfrac{1}{2}$ (1). Đặt $t-1=\dfrac{x-1}{1-2x}\Leftrightarrow x=\dfrac{t}{2t-1}$ thì khi đó (1) thành:

$f\left(\dfrac{t}{2t-1}-1\right)-3f(t-1)=1-\dfrac{2t}{2t-1}\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1-t}{2t-1}\right)-3f(t-1)=\dfrac{-1}{2t-1}$ hay $f\left(\dfrac{1-x}{2x-1}\right)-3f(x-1)=\dfrac{-1}{2x-1}$ (2)

Thế (1) vào (2) ta suy ra: $f\left(\dfrac{1-x}{2x-1}\right)-3\left(1-2x+3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)\right)=\dfrac{-1}{2x-1}\Leftrightarrow -8f\left(\dfrac{1-x}{2x-1}\right)=3(1-2x)-\dfrac{1}{2x-1}$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(x-1)+2x-1}{3}=\dfrac{1}{8}\left(3(2x-1)+\dfrac{1}{2x-1}\right)\Leftrightarrow f(x-1)=\dfrac{x^2-x+1}{4x-2}=\dfrac{(x-1)^2+(x-1)+1}{4(x-1)+2}$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{4x+2}$. Suy ra $I=\displaystyle\int_1^2\left(\dfrac{x^2+x+1}{4x+2}\right)dx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{16}\ln 3+\dfrac{3}{16}\ln 5$ tức $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{16}; c=\dfrac{3}{16}$

Từ đó ta có được $\Rightarrow P=8a-16b+16c=10$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=27$. Gọi mặt phẳng $(P): ax+by+2z+c=0$ đi qua hai điểm $A(0;0;-2), B(-4;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Khi đó $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. 18. **B.** 33. **C.** 21. **D.** 49.

Lời giải

Đầu tiên ta có: mặt phẳng $(P): ax+by+2z+c=0$ đi qua hai điểm $A(0;0;-2), B(-4;0;0)$ nên suy ra $\begin{cases} c=4 \\ a=1 \end{cases}$

Khi đó suy ra: $(P): x+by+2z+4=0$. Với mặt cầu (S) tâm $I(-3;2;2)$, bán kính $R=3\sqrt{3}$, ta có:

$d(I;(P))=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}=x\in\left[0;3\sqrt{3}\right]$ và bán kính đường tròn (C) là $r=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{27-x^2}$.

Do khối nón lấy tâm mặt cầu (S) làm đỉnh nên suy ra chiều cao nón là $h=d(I;(P))=x$

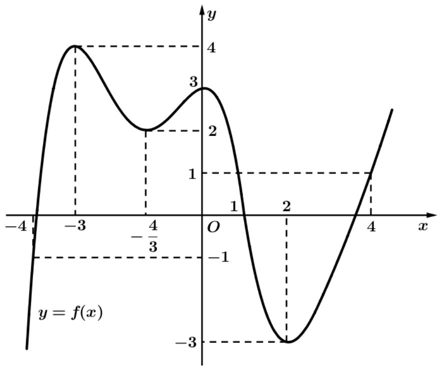
Suy ra: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi}{6}x(27-x^2)$. Xét hàm số $y=f(x)=-x^3+27x$ có $f'(x)=-3x^2+27=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Dễ thấy $\max\limits_{\left[0;3\sqrt{3}\right]} f(x)=f(3)=54$. Suy ra dấu bằng xảy ra khi $d(I;(P))=3 \Leftrightarrow \dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}=9 \Leftrightarrow b=2$

Suy ra $(a;b;c)=(1;2;4)$ tức $a^2+b^2+c^2=21$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ CỤM YÊN PHONG – BẮC NINH LẦN 2

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có các điểm cực trị trên $(-4;4)$ là -3; $-\dfrac{4}{3}$; 0; 2 và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|f(x^3+3x)+m\right|$ nghịch biến trên $(-4;-1)$?

A. 2025. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2022.

Lời giải

Ta xét $g(x)=f(x^3+3x)+m$ có $g'(x)=3(x^2+1)f'(x^3+3x)$

Ta có: $\forall x\in(-4;-1)$ thì $x^3+3x<-4$ tức $f'(x^3+3x)>0$, $\forall x\in(-4;-1)$, suy ra $g'(x)\ge 0$, $\forall x\in(-4;-1)$

Suy ra để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $g(-1)\le 0 \Leftrightarrow f(-4)+m\le 0 \Leftrightarrow m\le 1$.

Mà $m\in[-2023;2023]$ nên suy ra $m\in[-2023;1]$ tức có 2025 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;-2;4), B(-2;6;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$. Gọi M là điểm di động thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$ và N là điểm di động luôn cách d một khoảng là 1 đơn vị và cách mặt phẳng (Oxy) một khoảng không quá 3 đơn vị. Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của MN bằng

A. $3\sqrt{11}+1$. **B.** $\sqrt{58}+1$. **C.** $3\sqrt{10}+1$. **D.** 11.

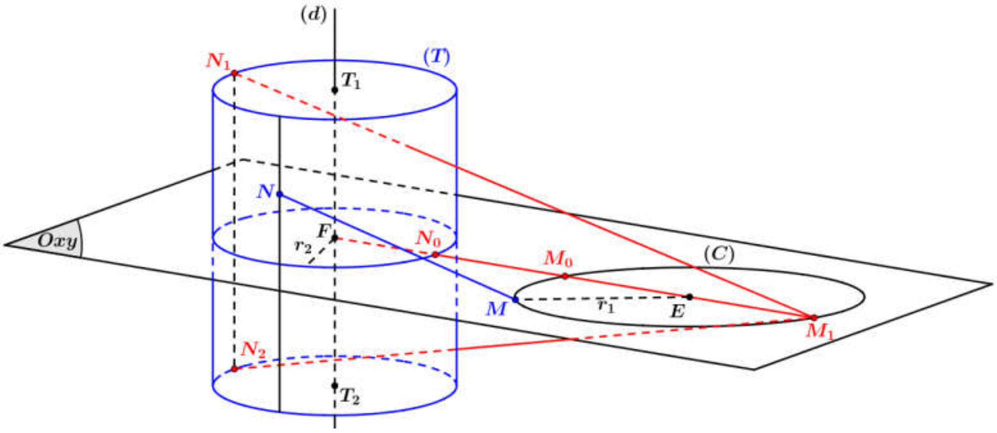
Lời giải

Đầu tiên ta có M thỏa $\widehat{AMB}=90^\circ$ nên suy ra M thuộc mặt cầu đường kính AB

Suy ra $M\in(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$. Mặt khác $M\in(Oxy)$ nên ta cho $z=0$ thì khi ấy ta suy ra:

$M\in(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$ tức M thuộc đường tròn (C) tâm $E(1;2)$, bán kính $r_1=3$.

Tiếp đến đối với điểm N, ta dễ dàng lập luận được N thuộc mặt trụ có trục là T_1T_2 với $\begin{cases}(T_1;1)\subset(P_1):z=3 \\ (T_2;1)\subset(P_2):z=-3\end{cases}$ và bán kính bằng 1 và khi đó ta dễ dàng có hình vẽ như dưới đây.



Từ hình vẽ ta suy ra: MN đạt giá trị nhỏ nhất khi cả $M, N\in(Oxy)$, với $T_1T_2\cap(Oxy)=F(5;-1;0)$ thì khi ấy ta dễ dàng suy ra được $MN\ge M_0N_0=EF-(r_1+r_2)=5-(3+1)=1$.

Tiếp đến bằng phương pháp nhìn nhận hình học, ta dễ dàng lập luận được MN đạt giá trị lớn nhất khi $N\in(P_1)$ hoặc $N\in(P_2)$. Khi ấy ta suy ra $MN\le M_1N_{1,2}=\sqrt{d^2(N;(Oxy))+(EF+r_1+r_2)^2}=3\sqrt{10}$.

Như vậy tổng cần tìm có giá trị là: $MN_{\min}+MN_{\max}=1+3\sqrt{10}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 46: Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+(m-2)z+2m-3=0$ (m là tham số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết rằng có 2 giá trị m_1, m_2 của tham số m để tam giác OMN có một góc bằng 120°. Tổng m_1+m_2 bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -6

Lời giải

Đầu tiên ta có $\Delta=(m-2)^2-4(2m-3)=m^2-12m+16$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z_1, z_2

Trường hợp 1: $\Delta>0\Leftrightarrow m^2-12m+16>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>6+2\sqrt{5} \\ m<6-2\sqrt{5}\end{array}\right.$ khi đó O, M, N thẳng hàng nên không thỏa yêu cầu bài toán. (loại)

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 16 < 0 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{5} < m < 6 + 2\sqrt{5}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \dfrac{2 - m \pm i\sqrt{-m^2 + 12m - 16}}{2}$

Suy ra $M\left(\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{\sqrt{-m^2+12m-16}}{2}\right)$ và $N\left(\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{-\sqrt{-m^2+12m-16}}{2}\right)$.

Điều kiện để O, M, N là ba đỉnh của tam giác là $m \neq 2$.

Khi đó tam giác OMN cân tại O và theo yêu cầu bài toán thì $\widehat{MON} = 120^\circ$ suy ra $\tan 60^\circ = \dfrac{\sqrt{-m^2+12m-16}}{|2-m|}$

$\Leftrightarrow 3(2-m)^2 = -m^2 + 12m - 16 \Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 3 + \sqrt{2} \\ m_2 = 3 - \sqrt{2} \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)

Vậy tổng cần tìm có giá trị bằng 6. **Chọn đáp án A.**

Câu 48: Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $\dfrac{-2x+4y}{x^2+y^2+1} \geq 1$ và $32\left(2^{x-y} + \dfrac{x-y+5}{2^y}\right) \leq 1$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 - 4x - 4y$ lần lượt là M, m. Tổng $M + m$ bằng

A. 22. **B.** 12. **C.** -22. **D.** -12.

Lời giải

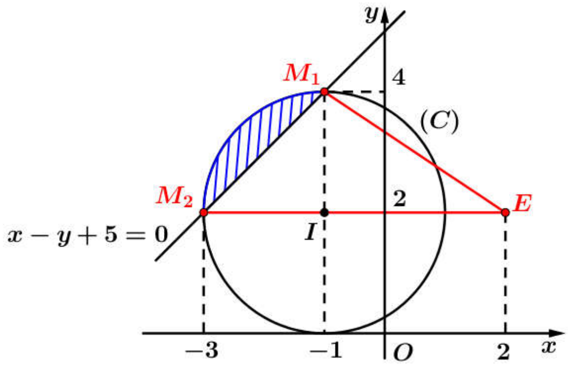
Đầu tiên ta có: $\dfrac{-2x+4y}{x^2+y^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 \leq -2x + 4y \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 4$ (1)

Tiếp đến ta có: $32\left(2^{x-y} + \dfrac{x-y+5}{2^y}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 2^{x-y+5} + \dfrac{x-y+5}{2^{y-5}} \leq 1 \Leftrightarrow 2^x + (x-y+5) \leq 2^{y-5} \Leftrightarrow 2^{y-5} + y - 5 \geq 2^x + x$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ dễ thấy hàm luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $y - 5 \geq x$ (2).

Ta biến đổi biểu thức $T = x^2 + y^2 - 4x - 4y \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = T + 8 \Leftrightarrow T = ME^2 - 8$ với $E(2;2)$.

Từ (1) và (2) khi biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta thu được hình viên phân như sau (phần tô đậm):



Từ hình vẽ ta suy ra: $\begin{cases} ME_{\max} = M_2E = 5 \\ ME_{\min} = M_1E = \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{\max} = M_2E^2 - 8 = 17 \\ T_{\min} = M_1E^2 - 8 = 5 \end{cases} \Rightarrow T_{\max} + T_{\min} = 22$. **Chọn đáp án A.**

Câu 49: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z-2| = |z|$ và $|z_2 - z_1| = 4$. Số phức w thỏa mãn $|w-3-5i| = 1$, số phức u thỏa mãn $|u-4+4i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $T = |w - z_2| + |u - z_1|$ bằng

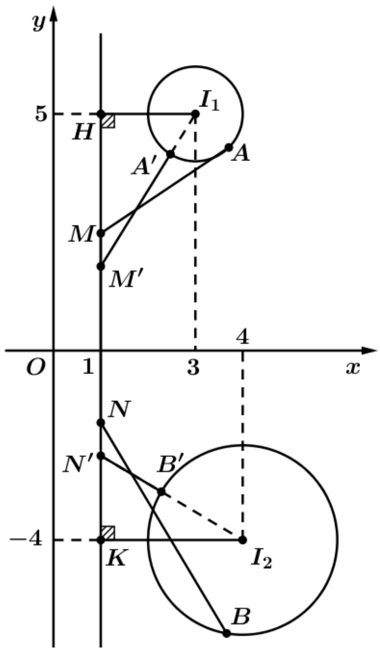
A. $5\sqrt{3} - 3$. **B.** $5\sqrt{2} - 3$. **C.** $2\sqrt{5} - 3$. **D.** $5\sqrt{3} - 2$.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Khi ấy bằng biến đổi đại số, ta suy ra $M, N \in (d): x = 1$ và $|z_2 - z_1| = MN = 4$.

Tiếp đến ta gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức w, u. Khi ấy bằng biến đổi đại số, ta suy ra A thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(3;5)$, bán kính $R_1 = 1$ và B A thuộc đường tròn (C_2) tâm $I_1(4;-4)$, bán kính $R_2 = 2$

Khi ấy ta có hình vẽ như sau:



Từ đây ta có: $T = |w - z_2| + |u - z_1| = AN + BM \geq I_1M' + I_2N' - (R_1 + R_2) = I_1M' + I_2N' - 3$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của I_1, I_2 lên đường thẳng $x = 1$, khi đó ta có $H(1;5), K(1;-4)$. Khi đó suy ra:

$T \geq I_1M' + I_2N' - 3 \geq \sqrt{HM'^2 + 4} + \sqrt{KN'^2 + 9} - 3$

Mà mặt khác ta có: $M'N' = 4 \Rightarrow HM' + KN' = HK - M'N' = 9 - 4 = 5$ nên ta suy ra:

$T \geq \sqrt{HM'^2 + 4} + \sqrt{KN'^2 + 9} - 3 = \sqrt{HM'^2 + 4} + \sqrt{(5 - HM')^2 + 9} - 3 = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(5-x)^2 + 9} - 3; x = HM'$

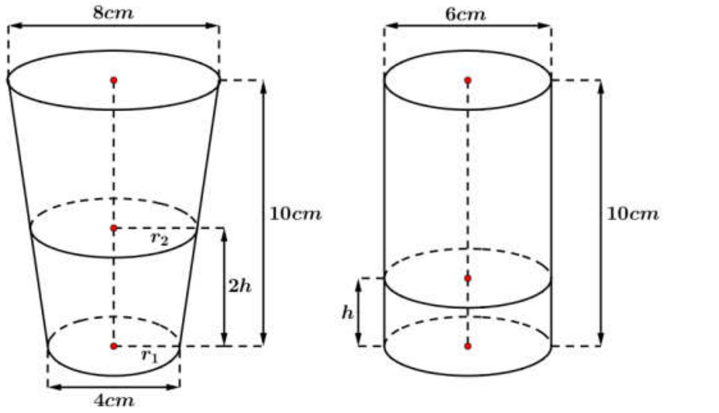
Áp dụng bất đẳng thức Mincopski ta suy ra:

$T \geq \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(5-x)^2 + (+3)^2} - 3 \geq \sqrt{(x + 5 - x)^2 + (2+3)^2} - 3 = 5\sqrt{2} - 3$. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

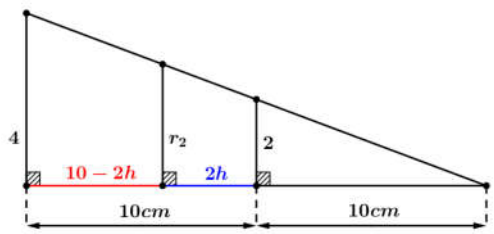
ĐỀ THI THỬ CHUYÊN LAM SƠN – THANH HÓA

Câu 38: Có hai cái cốc, một cái hình trụ và một cái hình nón cụt có kích thước như hình vẽ. Cốc hình trụ đựng đầy nước được rót sang cốc hình nón cụt đến khi thấy chiều cao phần nước còn lại của cốc hình trụ bằng một nửa chiều cao của phần nước trong cốc hình nón cụt thì dừng lại. Hỏi khi đó chiều cao h của phần nước còn lại trong cốc hình trụ thuộc khoảng nào sau đây ?



A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải



Ta có thể tích phần nước trong cốc hình trụ lúc đầy là $V_1 = \pi 3^2.10 = 90\pi \ \left(cm^3\right)$.

Tiếp đến ta gọi V_2, V_3 lần lượt thể tích phần nước ở cốc hình trụ và cốc hình nón cụt sau khi rót

Với $r_1 = 2$, ta có phương trình sau: $V_2 + V_3 = V_1 \Leftrightarrow 9h + \dfrac{2}{3}h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2\right) = 90 \Leftrightarrow 9h + \dfrac{2}{3}h\left(r_2^2 + 2r_2 + 4\right) = 90$ (1).

Cho một mặt phẳng qua trục của mặt cốc hình nón cụt rồi kéo dài đường sinh và trục sao cho cắt nhau tại 1 điểm, khi đó ta thu được mặt cắt như hình trên. Đến đây theo định lí Ta-lét, ta có: $\dfrac{r_2}{4} = \dfrac{10+2h}{20} \Rightarrow r_2 = \dfrac{10+2h}{5}$ (2)

Thế (2) vào (1) ta giải phương trình sau: $9h + \dfrac{2}{3}h\left(\left(\dfrac{10+2h}{5}\right)^2 + 2\left(\dfrac{10+2h}{5}\right) + 4\right) = 90 \Leftrightarrow h \approx 3.67(cm)$.

Chọn đáp án B.

Câu 43: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + z_1z_2 = 1$

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 0.

Lời giải

Ta xét phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$ có $\Delta' = m^2 - 6m + 5$, khi đó ta có hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: z_1, z_2 là các số thực, tức $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < 1 \end{array}\right.$. Khi đó $\begin{cases} \overline{z_1} = z_1 \\ \overline{z_2} = z_2 \end{cases}$, từ đây ta suy ra:

$\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + z_1z_2 = 1 \Leftrightarrow z_1z_2 = 6m - 5 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = \dfrac{8}{9}$. (1)

Trường hợp 2: z_1, z_2 không là các số thực, tức $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$, thì khi đó ta có: $z_1 = \overline{z_2}, z_2 = \overline{z_1}$

Khi đó ta suy ra: $\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + z_1z_2 = 1 \Leftrightarrow z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} + z_1z_2 = 1 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - z_1z_2 = 1$. (2)

Mà $z_{1,2} = m \pm i\sqrt{-m^2 + 6m - 5} \Rightarrow z_1 + z_2 = 2m; z_1z_2 = m^2 + (-m^2 + 6m - 5) = 6m - 5$ nên thế vào (2) ta suy ra:

$(2m)^2 - (6m - 5) = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{8}{9}$ (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra có duy nhất 1 giá trị tham số m thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

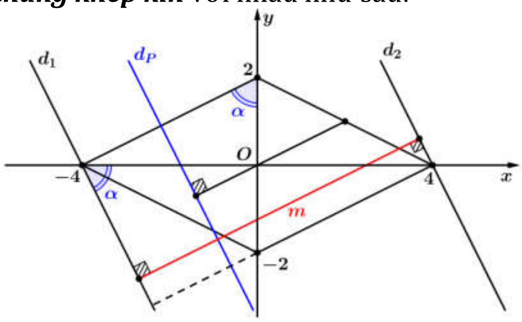
Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn $|z + \overline{z}| + 2|z - \overline{z}| = 8$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Modun của số phức $w = M + mi$ là

A. $\sqrt{521}$. **B.** $\sqrt{530}$. **C.** $\sqrt{542}$. **D.** $\sqrt{523}$.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì khi đó bằng biến đổi đại số ta suy ra $|x| + 2|y| = 4$.

Từ đây ta có hình vẽ là hệ ***bốn đoạn thẳng khép kín*** với nhau như sau:



Tiếp đến ta biến đổi $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = \left((x + 2)^2 + y^2\right) - \left(x^2 + (y - 1)^2\right) \Leftrightarrow (d_P): 4x + 2y + 3 - P = 0$ (1)

Nhận thấy (d_P) và đường thẳng qua hai điểm $(-4; 0), (0; 2)$ vuông góc nhau nên suy ra $\tan\alpha = 2$.

Ứng với mỗi điểm M thỏa $|x_M| + 2|y_M| = 4$ thì điều kiện tồn tại tham số P là: $d(M; (d_P)) \le m$ với m là khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1, d_2 (cùng song song với (d_P))sao cho thỏa mãn nghiệm duy nhất thỏa $|x| + 2|y| = 4$.

Khi đó cực trị của P xảy ra khi $d(I; (d_P)) = m$ tức $\begin{cases} (d_P) \equiv (d_1): 4x + 2y + 16 = 0 \\ (d_P) \equiv (d_2): 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta đồng nhất hệ số suy ra: $\begin{cases} 3 - P_1 = 16 \\ 3 - P_2 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = -13 = P_{\min} \\ P_2 = 19 = P_{\max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = M + mi = 19 - 13i \\ |w| = \sqrt{M^2 + m^2} = \sqrt{530} \end{cases}$

Chọn đáp án B.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ không âm và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$. Biết $f(1) = 3$ và

$\left[2f(x)+1-3x^2\right]f'(x)=6x\left[1+f(x)\right],\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\left[f^3(x)-\frac{6}{7}\right]dx$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{27}{7}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{7}$

Lời giải

Ta có phương trình ban đầu tương đương với: $\left[2f(x)+1-3x^2\right]f'(x)=6x\left[1+f(x)\right],\forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=\left(3x^2-1\right)f'(x)+6x\left[1+f(x)\right]\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=\left(3x^2-1\right)\left[1+f(x)\right]'+\left(3x^2-1\right)'\left[1+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow\left(2f(x)f'(x)\right)'=\left(\left(3x^2-1\right)\left[1+f(x)\right]\right)',\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow f^2(x)=\left(3x^2-1\right)\left[1+f(x)\right]+C$.

Mà $f(1)=3$ nên suy ra $C=1$ tức $\Leftrightarrow f^2(x)=\left(3x^2-1\right)\left[1+f(x)\right]+1$

$\Leftrightarrow\left[1+f(x)\right]\left[f(x)-1\right]=\left(3x^2-1\right)\left[1+f(x)\right]\Leftrightarrow f(x)-1=3x^2-1\Leftrightarrow f(x)=3x^2\Leftrightarrow f^3(x)=27x^6$

Vậy ta suy ra: $\int_0^1\left[f^3(x)-\frac{6}{7}\right]dx=\int_0^1\left[27x^6-\frac{6}{7}\right]dx=3$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ với a,b,c là các hệ số thực có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m\in[-20;20]$ để phương trình $f(x)+2\sqrt{f(x)}+f\left(\sqrt{f(x)}\right)+m=1$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. -3. **B.** 3. **C.** 420. **D.** 0.

Lời giải

Ta có từ bảng biến thiên trên dễ dàng suy ra được $f(x)=-x^4+2x^2$.

Tiếp đến ta xét phương trình sau: $f(x)+2\sqrt{f(x)}+f\left(\sqrt{f(x)}\right)+m=1$. Đặt $t=\sqrt{f(x)}\geq 0$ thì khi đó phương trình trở thành: $t^2+2t+f(t)+m=1$. Mà với mọi $f(x)\geq 0$ nên phương trình tương đương với:

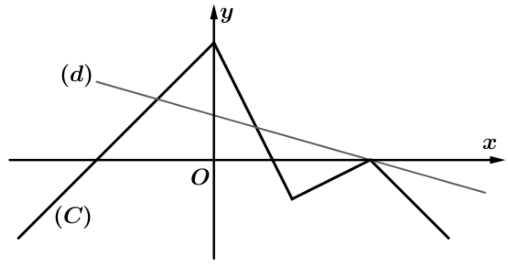
$\Leftrightarrow -m=t^2+2t-1+f(t)$. Chuyển về tương giao (*) giữa hàm số $h(t)=t^2+2t-1+f(t)$ và đường thẳng $y=-m$, xét hàm số $h(t)=t^2+2t-1+f(t)=t^2+2t-1-t^4+2t^2=-t^4+3t^2+2t-1$ trên $(0;1)$

Ta có: $h'(t)=-4t^3+6t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\frac{1-\sqrt{3}}{2};t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\xrightarrow{t\geq 0}t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Nhận thấy với mọi $t\in(0;+\infty)$ thì đường thẳng $y=-m$ chỉ cắt tối đa 2 nghiệm mà với $t\in(0;1)$ thì mỗi giá trị t sẽ cho ra 4 giá trị x (4 nghiệm thực phân biệt) nên ta chỉ cần xét tương giao (*) trên $(0;1)$

Dễ thấy $h'(t)>0,\forall t\in(0;1)$ tức hàm số $h(t)$ luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên từ đó suy ra để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì ta có: $-m\in\left(h(0);h(1)\right)\Leftrightarrow -m\in(-1;3)\Leftrightarrow m\in(-3;1)\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-2;-1;0\}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 49: Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị là đường gấp khúc $\left(C\right)$ (nét đậm) và hàm số $g\left(x\right)$ có đồ thị là đường thẳng d (hình vẽ). Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)-g\left(\left|x\right|\right)\right|$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Đầu tiên ta xét hàm số $y=h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$, khi đó ta có:

Số điểm cực trị của hàm $\left|h\left(\left|x\right|\right)\right|$ = {số điểm cực trị của $h\left(\left|x\right|\right)$} + {số nghiệm bội lẻ của phương trình $h\left(\left|x\right|\right)=0$}

= {2 x số điểm cực trị dương của $h\left(x\right)$ + 1} + 2 x {số nghiệm bội lẻ dương của phương trình $h\left(x\right)=0$}.

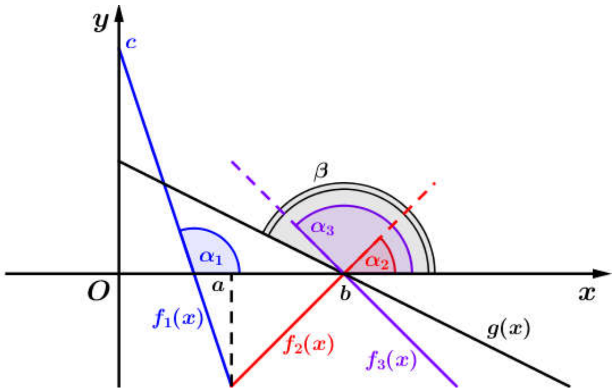
Tóm lại ta cần xét sự đơn điệu của hàm số $y=h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Trước hết từ hình vẽ (bên trái) ta có: $f\left(x\right)=\begin{cases}f_1\left(x\right),0\le x\le a\\ f_2\left(x\right),a\le x\le b\\ f_3\left(x\right),x\ge b\end{cases}\Rightarrow f'\left(x\right)=\begin{cases}\tan\alpha_1,0\le x\le a\\ \tan\alpha_2,a<x\le b\\ \tan\alpha_3,x>b\end{cases};g'\left(x\right)=\tan\beta$ trong đó $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ lần lượt là các góc hợp bởi các đoạn hàm $f_1\left(x\right),f_2\left(x\right),f_3\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ với trục Ox theo chiều vòng tròn lượng giác (cũng chính là hệ số góc), khi đó $\tan\beta<\tan\alpha_3<\tan\alpha_1<0<\tan\alpha_2$.

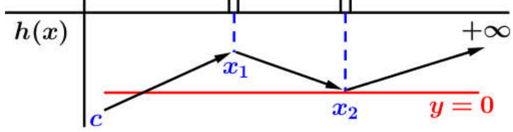
Khi đấy ta suy ra $\tan\alpha_1-\tan\beta=m>0;\tan\alpha_2-\tan\beta=n<0;\tan\alpha_3-\tan\beta=p>0$.

Từ hàm trên ta cũng suy ra $h\left(x\right)$ không có đạo hàm tại hai điểm $x=a,x=b$.

Khi đó xét: $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-g'\left(x\right)$, từ hình vẽ ta thu được bảng biến thiên như sau: (hình bên phải)



x	0	a	b	$+\infty$
$f'(x)$	$tan\alpha_1$	$tan\alpha_2$	$tan\alpha_3$	
$g'(x)$	$tan\beta$	$tan\beta$	$tan\beta$	
$h'(x)$	$m>0$	$n<0$	$p>0$	



Từ bảng biến thiên trên ta suy ra $h\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị dương là $x_1;x_2$

Từ đây ta suy ra số điểm cực trị dương của $h\left(x\right)$ là 2 và số nghiệm bội lẻ dương của phương trình $h\left(x\right)=0$ là 1.

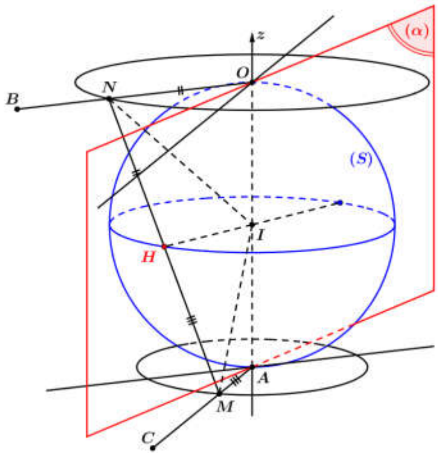
Khi đó ta kết luận số điểm cực trị của hàm $\left|h\left(\left|x\right|\right)\right|$ = {2 x 2+ 1} + 2 x {1} = 5 + 2 = 7 (điểm cực trị)

Chọn đáp án C.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $OABC$ với $O(0;0;0), A(1;-2;2), B(2;2;1)$ và $C\left(-\frac{5}{3};-\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính OA. Một tiếp tuyến MN thay đổi tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H (M thuộc tia AC, N thuộc tia OB). Biết khi M,N thay đổi thì H di động trên mặt phẳng (Q) cố định có phương trình $ax+by-z+c=0$. Tính $a+b+c$?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -6.

Lời giải



Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng chứa AO, AM và (Q) là mặt phẳng chứa AO, ON

Khi đó để M,N thay đổi và đồng thời tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H thì khi đó H luôn thuộc mặt phẳng phân giác chứa các chùm đường đẳng giác giữa hai cặp đường thẳng AI, AM và IO, ON.

Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vector chỉ phương đường phân giác trong giữa AC và OB. Khi đó $\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|}=(0;1;1)$.

Cùng với $\overrightarrow{u_2}=\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{OB}\right]=k\overrightarrow{OA}=(1;-2;2)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{u_1}\perp(\alpha)\\ \overrightarrow{u_2}\perp(\alpha)\end{cases}$ với (α) là mặt phẳng phân giác, ta suy ra mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(4;1;-1)$.

Mà (α) qua O nên suy ra phương trình $(\alpha): 4x+y-z=0$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: (Sử dụng hình vẽ từ cách 1)

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=k_1\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{8}{3}k_1;\frac{4}{3}k_1;\frac{8}{3}k_1\right)\\ \overrightarrow{ON}=k_2\overrightarrow{OB}=(2k_2;2k_2;k_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MH^2=AM^2=16k_1^2\\ NH^2=ON^2=9k_2^2\end{cases}$ và $\begin{cases}M\left(1-\frac{8}{3}k_1;-2+\frac{4}{3}k_1;2+\frac{8}{3}k_1\right)\\ N(2k_2;2k_2;k_2)\end{cases}$

Khi ấy ta có hệ thức sau: $(MH+HN)^2=MN^2=MA^2+AO^2+ON^2$

$(4k_1+3k_2)^2=16k_1^2+9k_2^2+9\Leftrightarrow 24k_1k_2=9\Leftrightarrow k_1k_2=\frac{3}{8}$.

Mặt khác ta có: $\begin{cases}(MH+HN)^2=MN^2=MA^2+AO^2+ON^2\\ MH^2+HN^2+2HM.HN=MA^2+ON^2+2HM.HN\end{cases}\Rightarrow AO^2=2HM.HN=9$ nên ta suy ra:

$HM=\frac{9}{2HN}$, lại có $H\in MN$ nên $\overrightarrow{HM}=-\frac{9\overrightarrow{HN}}{2HN^2}=-\frac{\overrightarrow{HN}}{2k_2^2}$ (hai vector ngược chiều nhau).

Mà $k_1k_2=\dfrac{3}{8}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{2k_2^{\,2}}$ nên suy ra $\overrightarrow{HM}=-\dfrac{\overrightarrow{HN}}{2k_2^{\,2}}=-\dfrac{4}{3}\dfrac{k_1}{k_2}\overrightarrow{HN}\Leftrightarrow 4k_1\overrightarrow{HM}+3k_2\overrightarrow{HN}=\vec{0}$.

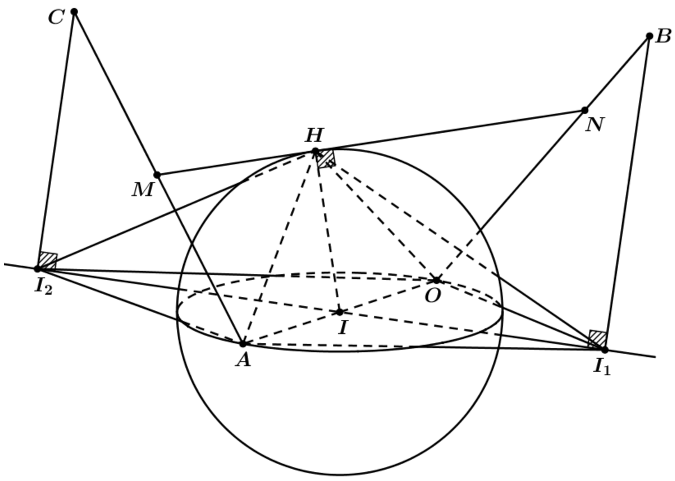
$\Leftrightarrow 4k_1\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OM}\right)+3k_2\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{ON}\right)=\vec{0}$.

Từ đó suy ra: $\Rightarrow\overrightarrow{OH}=\dfrac{4k_1\overrightarrow{OM}+3k_2\overrightarrow{ON}}{4k_1+3k_2}=\dfrac{4k_1}{4k_1+3k_2}\left(\overrightarrow{OM}+\dfrac{3k_2}{4k_1}\overrightarrow{ON}\right)=\dfrac{4k_1}{4k_1+3k_2}\left(1-\dfrac{7}{6}k_1;-2+\dfrac{17}{6}k_1;2+\dfrac{41}{12}k_1\right)$

Ta nhận thấy: $4\underbrace{\left(1-\dfrac{7}{6}k_1\right)}_{x_H}+\underbrace{\left(-2+\dfrac{17}{6}k_1\right)}_{y_H}-\underbrace{\left(2+\dfrac{41}{12}k_1\right)}_{z_H}=0$ nên suy ra $H\in(Q):4x+y-z=0$.

Chọn đáp án C.

Cách 3:



Ta dựng phân giác ngoài của hai đường $(AC),(OB)$ đi qua tâm mặt cầu đường kính OA gọi là I, khi đó thay vì tìm trực tiếp mặt phẳng (Q), ta sẽ tìm hai mặt cầu (S_1) và (S_2) cố định sao cho hai mặt cầu giao nhau tại đường tròn giao tuyến trùng với đường tròn giao tuyến của (Q) cắt (S). Gọi (d) là đường phân giác ngoài tương ứng, khi đó vector chỉ phương là: $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}-\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)=k(4;1;-1)$.

Lúc này, ta suy ra mặt cầu (S_1) và (S_2) có tâm lần lượt là I_1,I_2 sẽ đều thuộc đường thẳng (d) này. Khi đó để đường tròn giao tuyến $(S_1)\cap(S_2)$ trùng với đường tròn giao tuyến của (Q) cắt (S) thì cả hai tâm I_1,I_2 phải cách đều ba điểm H,A,O và I_1,I_2 lần lượt là hình chiếu của B,C lên (d), khi đó để tồn tại mặt cầu thỏa mãn thì $B\in(S_1),C\in(S_2)$ (áp dụng nguyên lí ***cần và đủ*** trong hình học).

Từ đây ta viết được phương trình $(d):\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+4t\\ y=-1+t;z=1-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ và hai điểm $I_1\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right),I_2\left(-\dfrac{13}{6};-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

Đến đây ta suy ra phương trình $\begin{cases}(S_1):\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}\\ (S_2):\left(x+\dfrac{13}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{41}{4}\end{cases}$. Mà $(C)\subset(Q)=(S_1)\cap(S_2)$ nên ta trừ hai phương trình trên ta thu được $H\in(Q):4x+y-z=0$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ SỞ SƠN LA LẦN 2

Câu 45: Cho $z=\dfrac{-8+6i}{5+5i}$ là một nghiệm phức của phương trình $az^2+bz+c=0$, trong đó a,b,c là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=a+b+c$ bằng

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 14.

Lời giải

Đầu tiên ta có $z=\dfrac{-8+6i}{5+5i}=\dfrac{(-8+6i)(5-5i)}{(5+5i)(5-5i)}=\dfrac{-10+70i}{50}=\dfrac{-1+7i}{5}\Leftrightarrow 5z+1=7i$

Suy ra: $(5z+1)^2=(7i)^2=-49\Leftrightarrow 25z^2+10z+50=0\Leftrightarrow 5z^2+2z+10=0$. Đồng nhất hệ số với phương trình $az^2+bz+c=0$, ta suy ra $(a;b;c)=(5;2;10)\to a+b+c=17$. **Chọn đáp án C.**

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ và đồng thời thỏa mãn $2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x}{\sqrt{x^2+3}},\forall x\in(-1;+\infty)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=1$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Đầu tiên ta thay $x=1$ vào điều kiện đầu ta suy ra được: $2f(1)+0.f'(1)=\dfrac{4}{2}=2\Rightarrow f(1)=2$

Theo đề ta có: $2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x}{\sqrt{x^2+3}},\forall x\in(-1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{2f(x)}{(x+1)^2}+\frac{x-1}{x+1}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Leftrightarrow\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+1}f(x)=\sqrt{x^2+3}+C$$

Mà ta tính được: $f(1)=2\Leftrightarrow 0=2+C\Leftrightarrow C=-2$. Suy ra: $\dfrac{x-1}{x+1}f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x+1}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}\Rightarrow S=\displaystyle\int_0^1\left|f(x)\right|dx=\int_0^1\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}dx\in(0;1)$. **Chọn đáp án A**

Câu 47: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	m	↘	n	↗	$+\infty$

Với m,n là các số nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên $(m;n)$ để phương trình $f(|x+5|)=4$ có đúng 4 nghiệm phân biệt ?

A. 18. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 20.

Lời giải

Đầu tiên ta biến đổi đồ thị $f(x)$ sang $f(|x+5|)$ theo công thức: $f(x) \to f(|x|) \to f(|x+5|)$ với $f(0)=d$.
Do việc thay đổi tịnh tiến theo chiều ngang (chiều Ox) không làm thay đổi số nghiệm nên ta quy về biện luận phương trình $f(|x|)=4$. Do hàm số $f(|x|)$ có tính chất đối xứng qua trục tung nên để phương trình $f(|x|)=4$ có nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x)=4$ phải có 2 nghiệm **dương** phân biệt.

Trường hợp 1: $f(0)<n$ thì ta suy ra: $\left[\begin{array}{l} m=4 \to n<4 \to n \in [-10;3] \\ n=4 \to m>4 \to m \in [5;10] \end{array}\right.$. (1)

Trường hợp 2: $n<f(0)<m$ thì ta có:

$\begin{cases} f'(3)=0 \\ f'(5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27a+6b+c=0 \\ 75a+10b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=f(5)=50a+d \\ m=f(3)=54a+d \end{cases}$, khi đó $n<f(0) \Rightarrow n<d \Leftrightarrow 50a<0$ tức $a<0$ (điều này hoàn toàn vô lí dựa theo bảng biến thiên ban đầu).
Vậy tóm lại từ (1) ta suy ra có 20 cặp giá trị nguyên $(m;n)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án D.**

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $3|\bar{z}-3i|=|z^2+3iz|+|z^2+9|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-1+5i|$. Khi đó, tổng M^2+m^2 bằng

A. 71. **B.** 91. **C.** 70. **D.** 90.

Lời giải

Đầu tiên ta có $3|\bar{z}-3i|=|z^2+3iz|+|z^2+9| \Leftrightarrow 3|z+3i|=|z(z+3i)|+|z^2-(3i)^2|$

$\Leftrightarrow 3|z+3i|=|z(z+3i)|+|z+3i|.|z-3i| \Leftrightarrow 3|z+3i|=|z+3i|(|z|+|z-3i|) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3i \\ |z|+|z-3i|=3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $z=-3i$ thì khi đó $|z-1+5i|=|-3i-1+5i|=\sqrt{5}$. (1)

Trường hợp 2: $|z|+|z-3i|=3$ thì khi gọi M là điểm biểu diễn số phức z cùng với $A(0;3)$ thì ta suy ra M luôn di động trên đoạn thẳng OA.

Khi đó biểu thức $T=|z-1+5i|=MB$ với $B(1;-5)$ sẽ có $\begin{cases} T_{\max}=AB=\sqrt{65} \\ T_{\min}=OB=\sqrt{26} \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} T_{\max}=AB=\sqrt{65} \\ T_{\min}=\sqrt{5} \end{cases} \to M^2+m^2=70$. **Chọn đáp án C.**

Câu 49: Cho a,b là các số thực thay đổi thỏa mãn $1<a<b\le 2$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\log_a(b^2+4b-4)+9\left(\log_{\frac{b}{a}} a\right)^2$ là $9\sqrt[3]{m}+n$ (với m,n là các số nguyên dương). Khi đó, giá trị của biểu thức $F=2m+3n+1$ bằng

A. 37. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 38.

Lời giải

Đầu tiên ta cần chứng minh đánh giá sau: $b^2+4b-4\ge b^3$. (1)
Thật vậy, ta có (1) tương đương với $b^3-b^2-4b+4\le 0 \Leftrightarrow (b-1)(b^2-4)\le 0 \Leftrightarrow 1<b\le 2$ (luôn đúng).

Khi đó mệnh đề (1) đúng nên suy ra $P=2\log_a(b^2+4b-4)+9\left(\log_{\frac{b}{a}} a\right)^2 \ge 6\log_a b+9\left(\log_{\frac{b}{a}} a\right)^2$

$$=6\log_a b+\frac{9}{(\log_a b-1)^2}=3(\log_a b-1)+3(\log_a b-1)+\frac{9}{(\log_a b-1)^2}+6\ge 6+3\sqrt[3]{81}=9\sqrt[3]{3}+6$$

Đồng nhất hệ số ta suy ra $(m;n)=(3;6)$ tức $F=2m+3n+1=25$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0)<0$ và $\left[f(x)+6x^3-2\right]f(x)+9x^6=4x^4+6x^3+12x^2+8,\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó, tổng $M+m$ bằng

A. $-7-6\sqrt{2}$. **B.** $-6-6\sqrt{2}$. **C.** $7-6\sqrt{2}$. **D.** $6-6\sqrt{2}$.

Lời giải

Đầu tiên theo đề, ta có: $\left[f(x)+6x^3-2\right]f(x)+9x^6=4x^4+6x^3+12x^2+8,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f^2(x)+(6x^3-2)f(x)+9x^6-4x^4-6x^3-12x^2-8=0$

Ta có: $\Delta_{f(x)}=(6x^3-2)^2-4(9x^6-4x^4-6x^3-12x^2-8)=4(2x^2+3)^2\to\sqrt{\Delta_{f(x)}}=2(2x^2+3)$

Ta tính được: $\left[\begin{array}{l}f(x)=-3x^3+2x^2+4\\ f(x)=-3x^3-2x^2-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=3>0\ (l)\\ f(0)=-3<0\ (n)\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}f(x)=-3x^3-2x^2-2\\ f'(x)=-9x^2-4x\end{cases}$

Tiếp đến ta có: $y=f\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\Rightarrow y'=\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).f'\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$

Xét: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0\\ f'\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0\\ x+\sqrt{1-x^2}=0;x+\sqrt{1-x^2}=-\frac{4}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\ x=-0,89\end{array}\right.$.

Đến đây ta có bảng tính như sau:

x	-1	-0.89	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$	-1	-2.13	-2	$-6-6\sqrt{2}$	-7

Vậy: $M+m=-7-6\sqrt{2}$. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ SỞ BẮC GIANG

Câu 37: Xét các số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$, $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|3i(z_1+z_2)+9-z_1z_2|$. Tổng $M+m$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $(17;19)$. **B.** $(20;22)$. **C.** $(16;18)$. **D.** $(19;21)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $|z_1|=|z_2|=1, |z_1+z_2|=|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

Khi ấy, gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 thì $OA\perp OB$ tức ta luôn có: $z_2=iz_1$

Đến đây ta biến đổi:

$P=|3i(z_1+z_2)+9-z_1z_2|=|z_1z_2-3i(z_1+z_2)+9i^2|=|z_1-3i|.|z_2-3i|=|z_1-3i|.|iz_1-3i|=|z_1-3i|.|z_1-3|$.

Với $|z_1|=|z_2|=1$, ta đặt $\cos\alpha+i\sin\alpha$ thì khi đó $|z_1|^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Từ đó ta suy ra: $P^2=\left[\cos^2\alpha+(\sin\alpha-3)^2\right].\left[\sin^2\alpha+(\cos\alpha-3)^2\right]$

$=\left[1-\sin^2\alpha+(\sin\alpha-3)^2\right].\left[1-\cos^2\alpha+(\cos\alpha-3)^2\right]=(10-6\sin\alpha)(10-6\cos\alpha)$

$=100-60(\cos\alpha+\sin\alpha)+36\cos\alpha\sin\alpha$

Đến đây ta đặt: $t=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow\cos\alpha\sin\alpha=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Khi đó biểu thức trở thành: $P^2=18t^2-60t+82$.

Xét hàm số $f(t)=18t^2-60t+82, \forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ dễ thấy $f'(t)<0, \forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Nên từ đó ta suy ra: $\begin{cases} m=\min P=\sqrt{f(\sqrt{2})}=\sqrt{118-60\sqrt{2}}=10+\sqrt{18} \\ M=\max P=\sqrt{f(-\sqrt{2})}=\sqrt{118+60\sqrt{2}}=10-\sqrt{18} \end{cases}\Rightarrow M+m=20$. **Chọn đáp án D.**

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-2)$, $B(3;-4;2)$. Gọi M là điểm thỏa mãn $MA=MB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ với O là gốc tọa độ.

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi $M(x;y;z)$, khi đó ta có:

$MA^2=MB^2\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2\Leftrightarrow(\alpha):x-2y+2z-6=0$

Suy ra: $T^2=\left|\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{MB}\right|^2=(2x-5)^2+(2y+8)^2+(2z-6)^2$

$\Leftrightarrow\dfrac{T^2}{4}=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=ME^2$ với $E\left(\dfrac{5}{2};-4;3\right)$

Khi ấy điều kiện tồn tại điểm M sẽ là: $\dfrac{T^2}{4}=ME^2\le d^2(E;(\alpha))=\left(\dfrac{7}{2}\right)^2\Leftrightarrow T\le 2.\dfrac{7}{2}=7$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI LẦN 2

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$, $(Q): 2x-y+2z+11=0$ và hai điểm $A(-1;1;1)$, $B(1;2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu bất kì qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P),(Q)$. Gọi I là tâm mặt cầu của (S). Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng BI thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(3;4)$.

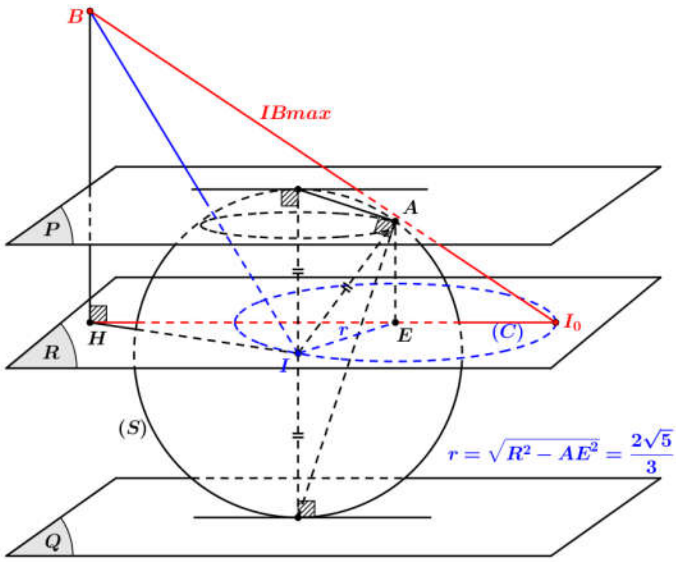
Lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy $(P)\,||\,(Q)$ và khoảng cách giữa hai mặt tương ứng bằng $d=\dfrac{|11-(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4$.

Khi ấy để (S) tiếp xúc với cả hai mặt phẳng $(P),(Q)$ thì $\begin{cases} I\in(R): 2x-y+2z+5=0 \\ 2R=d\to R_{(S)}=R=2 \end{cases}$.

Tiếp đến ta có $A\in(S)$ nên suy ra $IA=2$ và với A cố định thì khi I thay đổi thì I sẽ luôn di động trên một đường tròn (C) có tâm trùng với đường thẳng qua A vuông góc với mặt phẳng $(P),(Q)$. Mà mặt khác $I\in(R)$ nên suy ra tâm đường tròn chính là $E\left(-\dfrac{17}{9};\dfrac{13}{9};\dfrac{1}{9}\right)$ với E là hình chiếu của A lên (R) và bán kính đường tròn (C) bằng $r_{(C)}=r=\sqrt{R^2-AE^2}=\sqrt{R^2-d^2\left(A;(R)\right)}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

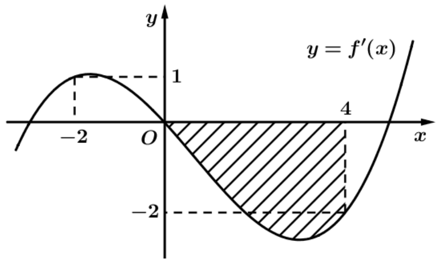
Kiểm tra nhận thấy hai điểm B và A khác phía so với mặt phẳng (P), khi đó ta có hình vẽ như sau:



Gọi H là hình chiếu của B lên R, khi đó ta suy ra $BH=d\left(B;(R)\right)=\dfrac{11}{3}$ với tọa độ $H\left(-\dfrac{13}{9};\dfrac{29}{9};\dfrac{5}{9}\right)$.

Dựa vào hình vẽ ta suy ra: $IB_{\max}=BI_0=\sqrt{BH^2+HI_0^{\,2}}=\sqrt{BH^2+(HE+r)^2}\in(4;5)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 48: Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:



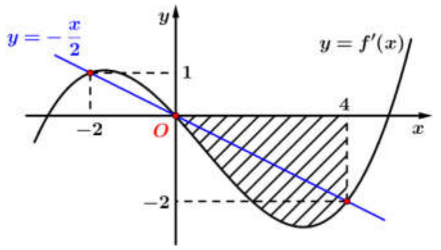
Biết $f(0)=\dfrac{1}{2}$ và diện tích phần kẻ sọc bằng 7. Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2+m\right|$ có ít nhất 5 điểm cực trị ?

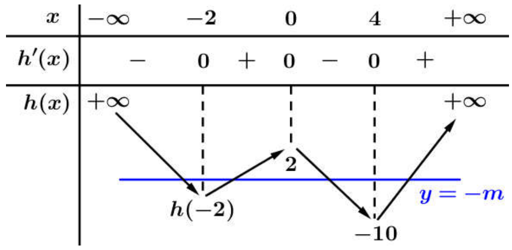
A. 10. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Đầu tiên ta xét $h(x)=4f(x)+x^2$ có $h'(x)=4f'(x)+2x$. Giải phương trình $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{x}{2}$. Chuyển về tương giao giữa đồ thị $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$. Ta có: $h(0)=4f(0)=2$ và

$$f(4)=f(0)+\int_0^4 f'(x)dx=f(0)-S=\frac{1}{2}-7=-\frac{13}{2}\Rightarrow h(4)=4f(4)+1=-10.$$





Từ hình vẽ bên trái ta suy ra $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2; x=0; x=4$. Tính các tung độ của hàm số $h(x)$, khi đó ta có bảng biến thiên như sau (hình bên phải). Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 5 điểm cực trị thì phương trình $h(x)=-m$ phải có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ. Vậy yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $-m>-10 \Leftrightarrow m<10 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;2;..;8;9\}$ tức có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án C.**

Câu 49: Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z có phần thực không âm và số phức w sao cho thỏa mãn $\left|2\bar{z}.z^2-4|z|^2\right|=z(\bar{z})^2+\bar{z}.z^2+4|z|^2$ và $|w|=|\bar{w}+4+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của khoảng cách MN bằng $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 26. **B.** 16. **C.** 11. **D.** 14.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình ban đầu tương đương với: $\left|2\bar{z}.z^2-4|z|^2\right|=z(\bar{z})^2+\bar{z}.z^2+4|z|^2$

$\Leftrightarrow \left|2z.|z|^2-4.|z|^2\right|=\bar{z}.|z|^2+z.|z|^2+4|z|^2 \Leftrightarrow |2z-4|=\bar{z}+z+4$ (1). Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R}, x\ge 0)$ thì khi đó phương trình (1) trở thành $\Leftrightarrow |z-2|^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow y^2=8x$ tức $M\left(\dfrac{y^2}{8};y\right)$

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Tiếp đến bằng biến đổi đại số suy ra $N(w)\in(d): y=2x+5$ tức $N\left(\dfrac{y-5}{2};y\right)$. Ta đổi lại vai trò x,y khi ấy ta suy ra $M\in(P): y=\dfrac{x^2}{8}; N\in(d): x-2y-5=0$. Ta lập một phương trình tiếp tuyến của (P) và song song với (d), gọi là $(\Delta):(x-m)-2\left(y-\dfrac{m^2}{8}\right)=0; m\in\mathbb{R}$. Suy ra $d(d;\Delta)=\dfrac{\left|m+\dfrac{m^2}{4}-5\right|}{\sqrt{5}}\geq\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ tức $a+2b=16$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với mỗi số nguyên y có đúng 5 số nguyên x sao cho thỏa mãn $7^{x^2-|y-2x+4|}.\log_{(|y-2x+4|+5)}\left(x^2+5\right)\leq 1$?

A. 10. **B.** 11. **C.** 16. **D.** 12.

Lời giải

Trước hết ta có điều kiện ban đầu: $0<|y-2x+4|+5\neq 1$ (luôn đúng).

Khi đó ta có bất phương trình tương đương với: $7^{x^2-|y-2x+4|}.\log_{(|y-2x+4|+5)}\left(x^2+5\right)\leq 1$.

$$7^{x^2-|y-2x+4|}.\frac{\ln\left(x^2+5\right)}{\ln\left(|y-2x+4|+5\right)}\leq 1\Leftrightarrow 7^{x^2+5}\ln\left(x^2+5\right)\leq 7^{|y-2x+4|+5}.\ln\left(|y-2x+4|+5\right)$$

Xét hàm số $y=f(t)=7^t\ln t,\forall t\in(0;+\infty)$ có $f'(t)=7^t\ln 7\ln t+\dfrac{7^t}{t}>0,\forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ tức $x^2\leq|y-2x+4|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y-2x+4\geq x^2\\ y-2x+4\leq -x^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y+5\geq(x+1)^2\\ -y-3\geq(x-1)^2\end{array}\right.$ (1).

<u>Trường hợp 1:</u> $\begin{cases}y+5\geq 0\\ -y-3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow y\in[-5;-3]$ thì khi đó ta thử các giá trị nguyên y như sau:

- Với $y=-5$ thì (1) thành $2\geq(x-1)^2\Leftrightarrow x\in\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x\in\{0;1;2\}$ (loại).
- Với $y=-4$ thì (1) thành $\left[\begin{array}{l}(x+1)^2\leq 1\\ (x-1)^2\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in[-2;0]\\ x\in[0;2]\end{array}\right.\to x\in[-2;2]$ (đúng 5 số nguyên) (nhận). (2)
- Với $y=-3$ thì (1) thành $(x+1)^2\leq 2\Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1\right]\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x\in\{-2;-1;0\}$ (loại).

<u>Trường hợp 2:</u> $y+5<0\Leftrightarrow y<-5$ thì khi đó (1) thành: $-y-3\geq(x-1)^2\Leftrightarrow -\sqrt{-y-3}\leq x-1\leq\sqrt{-y-3}$

Do chứa 5 giá trị nguyên x nên $x-1\in\{-2;-1;0;1;2\}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<-\sqrt{-y-3}\leq -2\\ 2\leq\sqrt{-y-3}<3\end{cases}\Leftrightarrow 4\leq -y-3<9\Leftrightarrow -12<y\leq -7$

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $y\in[-11;-7]$ (3)

<u>Trường hợp 3:</u> $-y-3<0\Leftrightarrow y>-3$ thì khi đó (1) thành: $y+5\geq(x+1)^2\Leftrightarrow -\sqrt{y+5}\leq x+1\leq\sqrt{y+5}$

Do chứa 5 giá trị nguyên x nên $x+1\in\{-2;-1;0;1;2\}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<-\sqrt{y+5}\leq -2\\ 2\leq\sqrt{y+5}<3\end{cases}\Leftrightarrow 4\leq y+5<9\Leftrightarrow -1\leq y<4$

Mà $y\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $y\in[-1;3]$ (4).

Từ (2) (3) và (4) ta suy ra $y\in\{-11;-10;-9;-8;-7;-4;-1;0;1;2;3\}$ tức có 11 giá trị nguyên y thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT HÀN THUYÊN – BẮC NINH LẦN 3

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;3)$ và $B(2;-3;-5)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến giữa hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$ và $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$. Gọi M,N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AM+BN$ bằng

A. 78. **B.** $\sqrt{78-\sqrt{13}}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{78-2\sqrt{13}}$.

Lời giải

Đầu tiên ta để thu được mặt phẳng (P), ta trừ theo vế của cả hai phương trình mặt cầu đề cho, khi đó ta suy ra phương trình mặt phẳng $(P): z=0$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B lên mặt phẳng (P).

Khi đó ta có: $AM+BN=\sqrt{AH^2+HM^2}+\sqrt{BK^2+KN^2}=\sqrt{3^2+HM^2}+\sqrt{5^2+KN^2}$

Tiếp đến ta luôn có đánh giá sau: $HM+MN+NK\ge HK=\sqrt{13}\Leftrightarrow HM+NK\ge\sqrt{13}-1$. Kết hợp với bất đẳng thức Mincopski, suy ra: $AM+BN\ge\sqrt{(3+5)^2+(HM+NK)^2}=\sqrt{64+\left(\sqrt{13}-1\right)^2}=\sqrt{78-2\sqrt{13}}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 45: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z|=|z-4-4i|$. Gọi S là tập hợp các số phức $w=\dfrac{8z}{\left|z^2\right|}$. Biết rằng w_1,w_2 là hai số thuộc S sao cho $|w_1-w_2|=2$, khi đó modun của số phức $\dfrac{w_1+w_2}{2}-3-4i$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\sqrt{41}+2$. **B.** $\sqrt{10}+2$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{10}+1$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $\begin{cases} z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R}):\left|\overline{z}\right|=\left|\overline{z}-4+4i\right| \\ w=\dfrac{8z}{\left|z^2\right|}=\dfrac{8z}{|z|^2}=\dfrac{8z}{z.\overline{z}}=\dfrac{8}{\overline{z}}\Rightarrow\overline{z}=\dfrac{8}{w}\end{cases}$, khi đó suy ra: $\left|\dfrac{8}{w}\right|=\left|\dfrac{8}{w}-4-4i\right|\Leftrightarrow|8|=|8-(4-4i)w|$

$\Leftrightarrow\dfrac{|8|}{|4-4i|}=\left|\dfrac{8}{4-4i}-w\right|\Leftrightarrow|w-1-i|=\sqrt{2}$ tức $M(w_1),N(w_2)$ là các điểm thỏa $\begin{cases}|w_1-1-i|=\sqrt{2}\\|w_2-1-i|=\sqrt{2}\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u_1=w_1-1-i\\u_2=w_2-1-i\end{cases}\rightarrow\begin{cases}|u_1|=|u_2|=\sqrt{2}\\|u_1-u_2|=|w_1-w_2|=2\end{cases}$ suy ra OMN là tam giác vuông cân tại O tức $|u_1+u_2|=|u_1-u_2|=2$

Suy ra: $P=\left|\dfrac{w_1+w_2}{2}-3-4i\right|=\left|\dfrac{u_1+u_2+2+2i}{2}-3-4i\right|=\left|\dfrac{u_1+u_2}{2}-(2+3i)\right|\le\dfrac{|u_1+u_2|}{2}+|2+3i|=1+\sqrt{13}$

Chọn đáp án C.

Câu 49: Cho số phức z, biết các điểm biểu diễn của $z,iz,z+iz$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 9. Khi đó modun của số phức z có giá trị bằng

A. 9. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z,iz,z+iz$.

Suy ra $OA\perp OB$ và $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, mà $|z+iz|=|z-iz|$ tức OAB là tam giác vuông cân nên ta suy ra diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác OAB, suy ra $S_{ABC}=S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|z||iz|=\dfrac{|z|^2}{2}=9\Leftrightarrow|z|=3\sqrt{2}$

Chọn đáp án C.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ SỞ BÀ RỊA VŨNG TÀU

Câu 42: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-(m+3)z+m^2+m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 với $|z_1-i|^2+|z_2-i|^2=6$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đầu tiên ta xét phương trình $z^2-(m+3)z+m^2+m=0$ có $\Delta=-3m^2+2m+9$, khi đó ta có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta>0\Leftrightarrow m\in\left(\dfrac{1-2\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}\right)$, khi ấy với $\begin{cases} z_1=a \\ z_2=b \end{cases}(a,b\in\mathbb{R})$, ta suy ra: $|a-i|^2+|b-i|^2=6$.

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2=6\Leftrightarrow(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=4\xrightarrow{Vi-et}-m^2+4m+5=0\Leftrightarrow m=-1\vee m=5\ (L)$ (1).

Trường hợp 2: $\Delta<0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1-2\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$, khi ấy từ giả thiết ta suy ra:

$6=|z_1-i|^2+|z_2-i|^2=(z_1-i)\left(\overline{z_1-i}\right)+(z_2-i)\left(\overline{z_2-i}\right)=(z_1-i)(z_2+i)+(z_2-i)(z_1+i)=2(z_1z_2+1)$. Suy ra ta có được: $2=z_1z_2=\dfrac{\left(m+3+i\sqrt{-\Delta}\right)\left(m+3-i\sqrt{-\Delta}\right)}{4}=\dfrac{(m+3)^2-\Delta}{4}=\dfrac{(m+3)^2-\left(-3m^2+2m+9\right)}{4}$.

$\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow m=1$ (loại) hoặc $m=-2$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $m\in\{-2;-1\}$ tức có 2 giá trị m thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

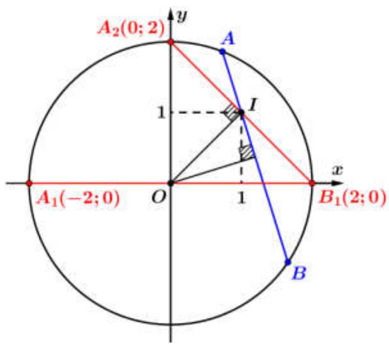
Câu 43: Xét hai số phức z,w thỏa mãn $|z|=|w|=2$ đồng thời $(z-1-i)\left(\overline{w}-1+i\right)$ là số thực. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $|z-w|$. Giá trị của biểu thức M^2+m^2 bằng

A. 24. **B.** 28. **C.** 18. **D.** 20.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Khi ấy ta suy ra A,B đều thuộc đường tròn (C) tâm trùng gốc tọa độ và bán kính bằng 2. Tiếp đến ta có: $(z-1-i)\left(\overline{w}-1+i\right)$ là số thực nên suy ra $\forall a,t\in\mathbb{R}$ ta luôn có $a=(z-1-i)\left(\overline{w-1-i}\right)$ và $z-1-i=\dfrac{a}{\overline{w-1-i}}=\underbrace{\dfrac{a}{|w-1-i|^2}}_{const}(w-1-i)$

$=t(w-1-i)\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=t\overrightarrow{IB},\forall t\in\mathbb{R}$ với $I(1;1)$. Suy ra A,I,B thẳng hàng, từ đây ta có được hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ ta suy ra $|z-w|_{\max}=AB_{\max}=2R=4$ tức $M=4$ với dấu bằng xảy ra khi $A\equiv A_1,B\equiv B_1$.

Tiếp đến ta có: $|z-w|=AB=2\sqrt{R^2-d^2(O;AB)}\geq2\sqrt{R^2-OI^2}=2\sqrt{2}$ nên suy ra $m=2\sqrt{2}$ với dấu bằng xảy ra khi AB thuộc đường thẳng qua I vuông góc với OI như hình vẽ. Vậy $M^2+m^2=24$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 44: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$, trong đó $y\le 10$ và thỏa mãn bất phương trình sau:

$$\log_3 x.\log_2\left(89y-x^2\right)+\frac{1}{2}\log_2 y.\log_3 y\ge 6+\frac{1}{2}\log_2\left(89y-x^2\right).\log_3 y+\log_3 x.\log_2 y\ ?$$

A. 146. **B.** 143. **C.** 145. **D.** 144.

Lời giải

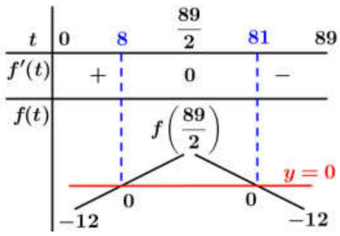
Trước hết ta có điều kiện ban đầu lần lượt là: $x,y\in\mathbb{N}^*,y\le 10,x<\sqrt{89y}$. Tiếp đến ta có bất phương trình ban đầu tương đương với: $\log_2\left(89y-x^2\right)\left(\log_3 x-\dfrac{\log_3 y}{3}\right)-\log_2 y\left(\log_3 x-\dfrac{\log_3 y}{3}\right)-6\ge 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{89y-x^2}{y}\right)\left(\log_3 x-\dfrac{\log_3 y}{2}\right)-6\ge 0\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x}{\sqrt{y}}\log_2\left(89-\dfrac{x^2}{y}\right)-6\ge 0$ (1). Đặt $t=\dfrac{x^2}{y}\in(0;89)$ thì bất phương trình (1) trở thành: $\log_3\left(\sqrt{t}\right).\log_2(89-t)-6\ge 0\Leftrightarrow \log_3 t.\log_2(89-t)-12\ge 0$.

Xét hàm số $y=f(t)=\log_3 t.\log_2(89-t)-12$ trên $(0;89)$ có $f'(t)=\dfrac{\log_2(89-t)}{t.\ln 3}-\dfrac{\log_3 t}{(89-t)\ln 2}$.

Giải phương trình $f'(t)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(89-t)\ln(89-t)=t\ln t\\ h(u)=u\ln u\to h'(u)>0,\forall u\in(0;89)\end{cases}\Leftrightarrow 89-t=t\Leftrightarrow t=\dfrac{89}{2}$.

Mà $f(8)=f(81)=0$ nên bất phương trình $f(t)\le 0$ được biểu diễn nghiệm trên bảng biến thiên như sau:



Từ bảng biến thiên ta suy ra bất phương trình $f(t)\ge 0\Leftrightarrow 8\le t=\dfrac{x^2}{y}\le 81\Leftrightarrow \sqrt{8}.\sqrt{y}\le x\le 9\sqrt{y}$. (1)

Mà hai hàm số $x=\sqrt{8y}$ và $x=9\sqrt{y}$ đều xác định trên $(0;+\infty)$ với $x,y\in\mathbb{N}^*,y\le 10$ suy ra $1\le y\le 10$ và kéo theo đó ta có được $\sqrt{8}.\sqrt{1}\le x\le 9\sqrt{10}\Leftrightarrow x\in\left[\sqrt{8};9\sqrt{10}\right]\xrightarrow{x\in\mathbb{N}^8}x\in[3;28]$.

Ta dễ thấy tập giá trị nguyên của x nhiều hơn tập giá trị nguyên y nên ta thử từng giá trị $y\in\{1;2;...;10\}$. Từ đó ta kết luận có 143 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án B.**

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, xét khối chóp $K.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông có diện tích lớn hơn 1. KA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và góc tạo bởi KB và $(ABCD)$ bằng 45 độ. Biết rằng $A(0;1;1)$ còn ba điểm K,B,D cùng thuộc mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=3$. Thể tích của khối chóp $K.ABCD$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

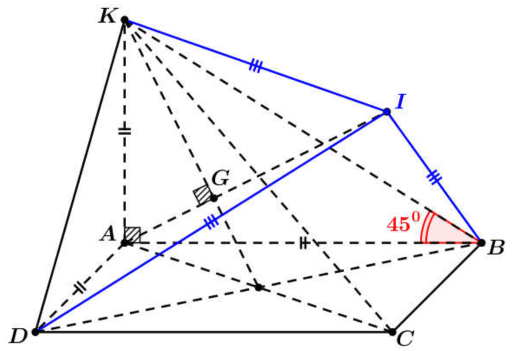
Từ giả thiết ta suy ra: $\widehat{\left(KB;(ABCD)\right)}=\widehat{ABK}=45^\circ$. Tiếp đến ta đặt $AB=a>1$.

Lại có: $AB=AK=AD=a$ nên tam giác KBD đều nhận G là tâm đường tròn ngoại tiếp nên suy ra $AG\perp(KBD)$ và $\dfrac{1}{AG^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{3}{a^2}\Rightarrow AG=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lại có mặt cầu (S) tâm $I(0;1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$, mà K,B,D cùng thuộc mặt cầu (S) tức $IB=ID=IK$ nên suy ra A và G cùng cách đều ba điểm K,B,D tức A,G,I thẳng hàng (cùng thuộc trục đường tròn (KBD))

Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AI}\\ \overrightarrow{IG}=(k-1)\overrightarrow{AI}\end{cases}$, khi đó ta có: $AG=|k|.AI=2|k|=\dfrac{a}{\sqrt{3}};IG=|k-1|AI=2|k-1|$.

Mặt khác lại có: $3=R^2=IG^2+GB^2=IG^2+AB^2-AG^2=IG^2+a^2-AG^2$ nên từ đó ta suy ra được hệ phương trình sau: $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+a^2-4(k-1)^2=3;4k^2=\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=12k^2;a^2>1\\12k^2-8k+1=0\end{cases}\Leftrightarrow(a;k)=\left(\sqrt{3};\dfrac{1}{2}\right)$

Vậy thể tích cần tìm bằng $V_{K.ABCD}=\dfrac{1}{3}KA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{3}.\left(\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3}$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ THPT NGUYỄN GIA THIỀU – HÀ NỘI

Câu 45: Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2-(2m-1)z+m^2+1=0$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình trên có nghiệm z_0 thỏa mãn $\left|{z_0}^2-2(m-1)z_0+m^2+2\right|=2$, khi đó tổng tất cả phần tử của tập S bằng

A. -5. **B.** $-3-\sqrt{2}$. **C.** $-5-\sqrt{2}$. **D.** $-2-\sqrt{2}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có $z=z_0$ là nghiệm của phương trình $z^2-(2m-1)z+m^2+1=0$ nên suy ra $z=z_0$ thỏa mãn ${z_0}^2-(2m-1)z_0+m^2+1=0$, từ đó suy ra:

$2=\left|{z_0}^2-2(m-1)z_0+m^2+2\right|=\left|{z_0}^2-(2m-1)z_0+m^2+1+(z_0+1)\right|=|z_0+1|$ tức $|z_0+1|=2$.

Tiếp đến ta xét $\Delta=(2m-1)^2-4(m^2+1)=-3-4m$, khi đó ta có hai trường hợp như sau:

<u>Trường hợp 1:</u> z_0 là số thực tức $4m+3<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{4}$ (*), khi đó: $z_0=\dfrac{2m-1\pm\sqrt{-3-4m}}{2}$

Suy ra $|z_0+1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_0=1\\z_0=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2m-1\pm\sqrt{-3-4m}=2\\2m-1\pm\sqrt{-3-4m}=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3-4m=(3-2m)^2\\-3-4m=(2m+5)^2\end{array}\right.\xleftrightarrow{(*)}m=-3\pm\sqrt{2}$ (1).

<u>Trường hợp 2:</u> z_0 không là số thực tức $4m+3>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{4}$ (**), khi đó: $z_0=\dfrac{2m-1\pm i\sqrt{3+4m}}{2}$

Suy ra $|z_0+1|=\left|\dfrac{2m-1\pm i\sqrt{3+4m}}{2}+1\right|=2\Leftrightarrow\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3+4m}{4}\right)=4\xleftrightarrow{(**)}m=1$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $m\in\left\{-3-\sqrt{2};-3+\sqrt{2};1\right\}$ tức tổng cần tìm bằng -5. **Chọn đáp án A.**

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;0), B(4;6;0)$ và mặt cầu $(C): x^2+y^2+z^2-8z+7=0$. Gọi S là điểm thuộc đoạn thẳng AB, các tiếp tuyến với mặt cầu (C) kẻ qua điểm S tạo thành mặt nón tròn xoay. Xét các hình nón có đỉnh là S và đáy là đường tròn đi qua các tiếp điểm của các tiếp tuyến, khối nón có thể tích nhỏ nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

A. $(20;26)$. **B.** $(30;36)$. **C.** $(41;44)$. **D.** $(58;66)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(0;0;4)$, bán kính $R=3$, khi đó suy ra $d(I;(AB))=|z_I|=4$ với (AB) qua O.

Tiếp đến ta đặt $SI=x\ (x\ge 4)$, thì khi đó giả sử A là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ S đến (C), khi đó ta thu được đẳng thức sau: $R^2=IH.IS \Leftrightarrow IH=\frac{9}{x}$ với H là tâm đường tròn đi qua các tiếp điểm của tiếp tuyến đó.

Suy ra chiều cao của hình nón cần tìm là: $SH=IS-IH=x-\frac{9}{x}$ và bán kính đáy của nón là

$r=AH=\sqrt{R^2-IH^2}=3\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$. Suy ra thể tích hình nón là: $V=\frac{\pi r^2h}{3}=3\pi\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)$

Nhận thấy $f(x)=\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{9}{x}\right)^2$ có $f'(x)>0, \forall x\ge 4$ nên suy ra $\min\limits_{[4;+\infty)} f(x)=f(4)=\frac{49}{64}$

Vậy ta suy ra $V_{\max}=\frac{\pi r^2h}{3}=3\pi\frac{49}{64}=\frac{147\pi}{64}$.

ĐỀ THI THỬ THPT SẦM SƠN – THANH HÓA

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} f'(1)=g(1)=1 \\ 1-f'(x)g'(x)=g(x)\left[f''(x)+\frac{f'(x)}{x}\right] \end{cases}$ $(\forall x\ne 0)$. Giá trị của $f'(4)g(4)$ bằng

A. $\frac{17}{8}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{15}{8}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $1-f'(x)g'(x)=g(x)\left[f''(x)+\frac{f'(x)}{x}\right] \Leftrightarrow x-x.f'(x)g'(x)=x.g(x)f''(x)+g(x).f'(x)$

$\Leftrightarrow x-g(x).f'(x)=x\left(g(x)f''(x)+f'(x)g'(x)\right) \Leftrightarrow x-f'(x).g(x)=x\left(f'(x)g(x)\right)'$. (1)

Đặt $h(x)=f'(x)g(x)$ thì (1) thành $x-h(x)=xh'(x) \Leftrightarrow x=h(x)+xh'(x)=\left(xh(x)\right)'$

Suy ra: $xh(x)=\frac{x^2}{2}+C \Leftrightarrow xf'(x)g(x)=\frac{x^2}{2}+C$. Mà $f'(1)=g(1)=1$ nên $f'(x)g(x)=\frac{x^2+1}{2x}$

Vậy $f'(4)g(4)=\frac{4^2+1}{2.4}=\frac{17}{8}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 48: Giả sử hàm số $y = mx^4 - (m^2+2)x^2 + \dfrac{m^3+11m}{9}$ có đồ thị (C) và hàm số $g(x) = x^2$ có đồ thị (C') cắt nhau tại 4 điểm phân biệt. Biết rằng hình phẳng (H) giới hạn bởi (C) và (C') là hợp của ba hình phẳng $(H_1),(H_2),(H_3)$ có diện tích tương ứng là S_1,S_2,S_3 trong đó $0 < S_1 \le S_2 \le S_3$ và các hình phẳng $(H_1),(H_2),(H_3)$ đôi một giao nhau tại không quá 1 điểm. Gọi T là tập hợp các giá trị của m sao cho $S_3 = S_1 + S_2$. Tính tổng bình phương các phần tử của tập T ?

A. 23. **B.** 20. **C.** 14. **D.** 19.

Lời giải

Từ giả thiết ta có để thỏa mãn tồn tại ba hình phẳng $(H_1),(H_2),(H_3)$ thì hàm số $f(x)$ phải có 3 điểm cực trị tức ta suy ra $-m(m^2+2) < 0 \Leftrightarrow m > 0$ (1). Tiếp đến ta xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') khi đó ta có: $mx^4 - (m^2+2)x^2 + \dfrac{m^3+11m}{9} = x^2 \Leftrightarrow mx^4 - (m^2+3)x^2 + \dfrac{m^3+11m}{9} = 0$ (2)

Khi ấy phương trình (2) sẽ có 4 nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 sao cho $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$.

Lại có: $\begin{cases} S_1 = S_2 \\ S_3 = S_1 + S_2 \end{cases}$ nên suy ra $\dfrac{S_3}{2} = S_2 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_3} (f(x) - g(x))dx = -\int\limits_{x_3}^{x_4} (f(x) - g(x))dx$

Suy ra: $\int\limits_0^{x_3} (f(x)-g(x))dx + \int\limits_{x_3}^{x_4} (f(x)-g(x))dx = \int\limits_0^{x_4} (f(x)-g(x))dx = \int\limits_0^{x_4} \left(mx^4 - (m^2+3)x^2 + \dfrac{m^3+11m}{9} \right) dx = 0$

$$\Leftrightarrow m\frac{x_4^5}{5} - (m^2+2)\frac{x_4^3}{3} + \left(\frac{m^3+11m}{9}\right)x_4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ m\dfrac{x_4^4}{5} - (m^2+2)\dfrac{x_4^2}{3} + \dfrac{m^3+11m}{9} = 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Mặt khác từ (2) ta suy ra $mx_4^4 - (m^2+3)x_4^2 + \dfrac{m^3+11m}{9} = 0$ (4)

Nên từ (3) và (4) ta có được: $\dfrac{4}{5}mx_4^4 - \dfrac{2}{3}(m^2+3)x_4^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{5}mx_4^4 = \dfrac{2}{3}(m^2+3)x_4^2 \Leftrightarrow x_4^2 = \dfrac{10m^2+30}{12m}$ (5)

Thế (5) vào (4) suy ra: $m(x_4^2)^2 - (m^2+3)x_4^2 + \dfrac{m^3+11m}{9} = 0$, từ đây phương trình tương đương với

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{10m^2+30}{12m}\right)^2 - (m^2+3)\left(\frac{10m^2+30}{12m}\right) + \frac{m^3+11m}{9} = 0 \Leftrightarrow m^3 + \frac{45}{m} = 14m \Leftrightarrow (m-3)(m^2-5) = 0$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \sqrt{5}; m = -\sqrt{5}\,(L) \end{array}\right.$ tức tổng cần tìm bằng $S = 3^2 + (\sqrt{5})^2 = 14$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ SỞ THÁI BÌNH LẦN 2

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng sau: $d_1: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$, $d_2: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và $d_3: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+1}{1}$. Đường thẳng Δ thay đổi cắt các đường thẳng d_1,d_2,d_3 lần lượt tại A,B,C. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AC+BC$ bằng

A. $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy $d_1 \parallel d_2$ và cùng chéo nhau với d_3. Khi đó vector chỉ phương của ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (1;-2;1), \overrightarrow{u_2} = (1;-2;1), \overrightarrow{u_3} = (1;-3;1)$ với $E(2;1;2) \in (d_1), F(3;2;0) \in (d_2)$.

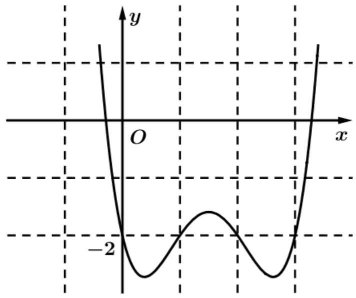
Để Δ cắt cả ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C thì mặt phẳng (P) chứa d_1, d_2 phải cắt d_3 tại C tức C là điểm cố định. Đến đây ta có được vetor pháp tuyến mặt phẳng (P) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{u_1}\right] = (1;1;1)$

Suy ra $(P): x + y + z - 5 = 0$ và $C \in (d_3) \rightarrow C(4+t; 2-3t; -1+t), t \in \mathbb{R}$. Mà $C \in (P) \cap (d_3)$ nên suy ra ta có phương trình sau: $4 + t + 2 - 3t - 1 + t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 0$, suy ra tọa độ $C(4;2;-1)$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên d_1, d_2, từ đây ta nhận xét được như sau: "Khi, A, B là hai điểm di động trên d_1, d_2 di chuyển ra xa hai điểm lần lượt là H, K thì biểu thức $AC + BC$ càng tăng theo tỉ lệ thuận".

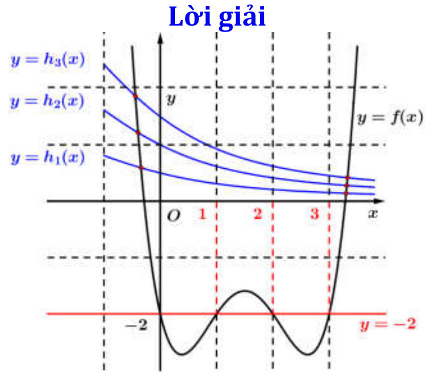
Từ đó ta suy ra $AC + BC \geq CH + CK = d(C; d_1) + d(C; d_2) = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 41: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ và hàm số $g(x) = \sqrt{x^2+4} + x$. Số nghiệm thực của phương trình $f\left[f(x)g(x)\right] + 2 = 0$ bằng



A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải



Đầu tiên ta có: $f\left[f(x)g(x)\right] + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left[f(x)g(x)\right] = -2$. Kẻ đường thẳng $y = -2$ cắt đồ thị $y = f(x)$, khi đó phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+x}; f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}; f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}+x} \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$

Trước hết ta có phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x = m < 0$ và $x = n > 3$ (1).

Tiếp theo ta thấy các hàm số $h_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+x}; h_2(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}+x}; h_3(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}+x}$ đều có nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và có tiệm cận ngang $y = 0$ nên suy ra mỗi đồ thị đều cắt đồ thị $y = f(x)$ 2 điểm phân biệt (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình ban đầu có $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ nghiệm phân biệt. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+4x-6x.e^{x^2-f(x)-1}=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)+f''(x)$ bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** $\frac{27}{3}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $f'(x)+4x-6x.e^{x^2-f(x)-1}=0\Leftrightarrow f'(x)+4x=6x.e^{x^2-f(x)-1}$

$\Leftrightarrow (f'(x)+4x).e^{2x^2+f(x)+1}=6x.e^{x^2-f(x)-1}.e^{2x^2+f(x)+1}=6x.e^{x^2-f(x)-1+2x^2+f(x)+1}=6x.e^{3x^2}$

$\Leftrightarrow \left(e^{2x^2+f(x)+1}\right)'=\left(e^{3x^2}\right)'\Leftrightarrow e^{2x^2+f(x)+1}=e^{3x^2}+C$. Mà $f(0)=-1$ nên suy ra $C=0$.

Từ đó ta thu được: $e^{2x^2+f(x)+1}=e^{3x^2}\Leftrightarrow f(x)=x^2-1\to f'(x)=2x\to f''(x)=2$

Phương trình hoành độ giữa hai đồ thị hàm số đề cho là: $x^2-1=2x+2\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=-1;x=3$

Suy ra diện tích cần tìm là: $S=\int_{-1}^{3}\left|x^2-2x-3\right|dx=\frac{32}{3}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 45: Cho $a,b\in\mathbb{R},a<b$, đặt $P=\int_a^b\left(-x^4+5x^2-4\right)dx$. Khi P có giá trị lớn nhất thì a^2+b^2 bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta xét bất phương trình $-x^4+5x^2-4\ge 0\Leftrightarrow x\in[-2;-1]\cup[1;2]$.

Trường hợp 1: Xét $a,b\in\mathbb{R},-2\le a<b\le -1$, khi đó ta có:

$$P=\int_a^b\left(-x^4+5x^2-4\right)dx=\int_{[-2;-1]\cap[a;b]}\left(-t^4+5t^2-4\right)dt\ge\int_{-2}^{-1}\left(-t^4+5t^2-4\right)dt=\frac{22}{15}.$$

Trường hợp 2: Xét $a,b\in\mathbb{R},1\le a<b\le 2$, khi đó ta có:

$$P=\int_a^b\left(-x^4+5x^2-4\right)dx=\int_{[1;2]\cap[a;b]}\left(-t^4+5t^2-4\right)dt\ge\int_{1}^{2}\left(-t^4+5t^2-4\right)dt=\frac{22}{15}.$$

Tóm lại qua 2 trường hợp ta kết luận giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{22}{15}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a;b)=(-2;-1)\vee(1;2)$, suy ra $a^2+b^2=5$. **Chọn đáp án D.**

Câu 47: Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^3+(1-2m)z^2+2mz+4m=0$ với tham số $m\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt và 3 điểm biểu diễn 3 nghiệm đó tạo thành tam giác đều. Tổng tất cả các phần tử của tập S là

A. 2. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình sau: $z^3+(1-2m)z^2+2mz+4m=0\Leftrightarrow(z+1)\left(z^2-2mz+4m\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1\to A(-1;0)\\ z^2-2mz+4m=0\quad(*)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 và khác nghiệm $z=-1$ $\left(m\ne-\frac{1}{6}\right)$, gọi $B(z_1),C(z_2)$ và xét $\Delta'_{(*)}=m^2-4m$, đến đây ta có 2 trường hợp như sau:

Trường hợp 1: z_1, z_2 là hai số thực tức $\Delta'_{(*)} > 0 \Leftrightarrow m < 0, m > 4$, khi đó $B(z_1), C(z_2) \in Ox$ tức A, B, C thẳng hàng nên suy ra không tồn tại tam giác (loại).

Trường hợp 2: z_1, z_2 không là hai số thực tức $\Delta'_{(*)} < 0 \Leftrightarrow m \in (0;4)$, khi đó gọi H là trung điểm BC, khi đó ta suy ra $H\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \to H(m;0)$. Lại có: $z_{1,2} = m \pm i\sqrt{4m-m^2}$ nên suy ra $BC = |z_1 - z_2| = 2\sqrt{4m-m^2}$.

Do tam giác ABC đều nên suy ra $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}BC \Leftrightarrow (m+1)^2 = 3(4m-m^2) \Leftrightarrow m = \frac{5\pm\sqrt{21}}{4}$ (nhận).

Vậy tóm lại suy ra $m \in \left\{\frac{5+\sqrt{21}}{4}; \frac{5-\sqrt{21}}{4}\right\}$ tức tổng cần tìm bằng $\frac{5}{2}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48: Trong tập hợp số phức, cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2$ và $|iz_2 - 2 + 5i| = 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1^2 - z_1z_2 - 4|$ bằng

A. $2(\sqrt{29}-3)$. **B.** 4. **C.** 8. **D.** $2(\sqrt{29}-5)$.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $(z_1; z_2) = (a+bi; c+di), \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, khi đó ta có: $|z_1|^2 = a^2 + b^2 = 4$.

Tiếp đến ta có: $|iz_2 - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |z_2 + 5 + 2i| = 1 \Leftrightarrow (c+5)^2 + (d+2)^2 = 1$

Khi đó ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} -2 \le a, b \le 2 \\ (c+5)^2 \le 1, (d+2)^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le a, b \le 2 \\ -6 \le c \le -4; -3 \le d \le -1 \end{cases}$.

Từ đây ta suy ra: $|z_1^2 - z_1z_2 - 4| = \left|z_1^2 - z_1z_2 - |z_1|^2\right| = \left|z_1^2 - z_1z_2 - z_1\overline{z_1}\right| = |z_1|.\left|z_1 - z_2 - \overline{z_1}\right| = 2|2bi - (c+di)|$

$= 2\sqrt{c^2 + (2b-d)^2} \ge 2|c| \ge 8$. Dấu bằng xảy ra khi $(a;b;c;d) = (\sqrt{3}; -1; -4; -2)$. **Chọn đáp án C.**

ĐỀ THI THỬ THPT ĐÔNG TRIỀU – QUẢNG NINH

Câu 39: Có bao nhiêu số nguyên dương a để bất phương trình $\sqrt{3^{x^2}}.a^{10} < (243a)^x$ có không quá 9 nghiệm nguyên

A. 58860. **B.** 58861. **C.** 59048. **D.** 59049.

Lời giải

Đầu tiên xét $a = 0$ thì bất phương trình vô lí, $a = 1$ thì bất phương trình ban đầu trở thành

$\sqrt{3^{x^2}} < 243^x \Leftrightarrow x^2 < 10x \Leftrightarrow 0 < x < 10 \Rightarrow x \in [1;9]$ (đúng 9 nghiệm nguyên x) nên thỏa mãn. (1)

Tiếp đến ta xét $\forall a \ge 2$ thì bất phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow 10 + \frac{x^2}{2}\log_a 3 < x + 5x.\log_a 3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x}{2}\log_a 3 - (x-10) < 0 \Leftrightarrow (x-10)\left(\frac{x\log_a 3}{2} - 1\right) < 0$.

Trường hợp 1: $x < 10$ và $x > 2\log_3 a$ tức $x \in (2\log_3 a; 10)$, khi đó để có không quá 9 nghiệm nguyên thì $\log_3 a > 0 \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a > 1$ (luôn đúng vì đang xét $a \ge 2$). (2)

Trường hợp 2: $x > 10$ và $x < 2\log_3 a$ tức $x \in (10; 2\log_3 a)$, khi đó để có không quá 9 nghiệm nguyên thì

$2\log_3 a < 20 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3^{10} \\ a \ge 2 \end{cases} \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a \in [2;59049]$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $a \in [1;59049]$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để điểm cực trị của hàm số $y=x^2+2mx-1$ cũng là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+3(m+1)x^2+3(m^2+2m)x-1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Gọi $f(x)=x^2+2mx-1$ và $g(x)=x^3+3(m+1)x^2+3(m^2+2m)x-1$. Đầu tiên ta có: $y=x^2+2mx-1$ $=(x+m)^2-(m^2+1)\geq -(m^2+1)$ nên suy ra đỉnh của $f(x)$ là $A(-m;-(m^2+1))$ (1).

Tiếp đến xét $g(x)=x^3+3(m+1)x^2+3(m^2+2m)x-1$ có $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2+2(m+1)x+(m^2+2m)=0$.

$\Leftrightarrow (x+m+1)^2=1\Leftrightarrow x=-m\Rightarrow y(-m)=-(m^3+3m^2+1)$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra: $m^2+1=m^3+3m^2+1\Leftrightarrow m^3+2m^2=0\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=0\end{array}\right.$ (đều thỏa $\Delta_{g'(x)}>0$). **Chọn đáp án C.**

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $F(x)=x^2f(x)-x^4+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $(x^2-1)f'(x)$ và $f(0)=-4$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)+2$ và $y=f'(x)-2$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra: $(x^2f(x)-x^4+2x^2)'=2xf(x)+x^2f'(x)-4x^3+4x=(x^2-1)f'(x)$

$\Leftrightarrow 2xf(x)+f'(x)=4x(x^2-1)\Leftrightarrow (2xe^{x^2})f(x)+e^{x^2}f'(x)=(e^{x^2}f(x))'=4e^{x^2}x(x^2-1)$

Suy ra: $e^{x^2}f(x)=\int 4e^{x^2}x(x^2-1)dx=2e^{x^2}(x^2-2)+C$. Mà $f(0)=-4$ nên suy ra $f(x)=2x^2-4$

Khi đó ta có được: $\begin{cases}y=f(x)+2=2x^2-2\\y=f'(x)-2=4x-2\end{cases}$, khi đó phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị này chính là:

$2x^2-4x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$. Vậy ta kết luận: $S=\int_0^2\left|2x^2-4x\right|dx=\frac{8}{3}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 45: Trong tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2-6z-m(m-10)=0$ (m là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1(|z_2|-2)+z_2(|z_1|-2)=0$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $z_1(|z_2|-2)+z_2(|z_1|-2)=0\Leftrightarrow z_1|z_2|+z_2|z_1|=2(z_1+z_2)$. (*)

Xét phương trình $z^2-6z-m(m-10)=0$ có $\Delta'=9+m(m-10)=(m-1)(m-9)$.

Trường hợp 1: z_1,z_2 là các số thực tức $\Delta'>0\Leftrightarrow m<1;m>9$, khi đó (*) thành $2z_1z_2=2(z_1+z_2)$

$\Leftrightarrow z_1z_2=z_1+z_2\xleftrightarrow[Vi-et]{}6=10m-m^2\Leftrightarrow m=5\pm\sqrt{19}$ (nhận) (1)

Trường hợp 2: z_1,z_2 không là số thực tức $m\in(1;9)$, khi ấy $|z_1|=|z_2|=\sqrt{|z_1||z_2|}=\sqrt{|z_1z_2|}=\sqrt{|18-10m+m^2|}$

(*) thành: $\sqrt{|18-10m+m^2|}(z_1+z_2)=2(z_1+z_2)\Leftrightarrow|18-10m+m^2|=4\Leftrightarrow m=5\pm\sqrt{3}$ và $m=5\pm\sqrt{11}$ (loại) (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $m\in\{5+\sqrt{19};5-\sqrt{19}\}$ tức tổng cần tìm bằng 10. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2), B(1;-1;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) gấp 2 lần khoảng cách từ B đến (P) và đồng thời A, B cùng phía với (P). Mặt phẳng (P) đi qua điểm nào trong các điểm sau đây ?

A. $(1;2;2)$. **B.** $(-1;2;2)$. **C.** $(1;2;1)$. **D.** $(1;2;-1)$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=y-1 \\ 3-3y=2z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ 3y+2z-5=0 \end{cases}$, từ đây ta tham số hóa được phương trình mặt phẳng (P) có dạng là: $a(x-y-1)+(3y+2z-5)=0 \Leftrightarrow (P): ax+(3-a)y+2z-(a+5)=0$.

Mà $d(A;(P))=2d(B;(P))$ nên suy ra ta có phương trình sau: $|2-2a|=|2a-4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-2a=2a-4 \\ 2-2a=4-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

A, B cùng phía với (P) thì $\forall a \in \mathbb{R}$ thỏa: $\left(ax_A+(3-a)y_A+2z_A-(a+5)\right)\left(ax_B+(3-a)y_B+2z_B-(a+5)\right)>0$

nên suy ra $\left[\begin{array}{l} (P): 3y+2z-5=0 \quad (L) \\ (P): \dfrac{3}{2}x+\left(3-\dfrac{3}{2}\right)y+2z-\left(\dfrac{3}{2}+5\right)=0 \end{array}\right. \Rightarrow (P): 3x+3y+4z-13=0$. **Chọn đáp án C.**

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho tồn tại số thực $x \in (1;2)$ thỏa mãn

$$2^{xy+x}=y\left(2^x xy-2^{xy}+xy^2+1\right)+2^x$$

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình tương đương với: $2^{xy}.2^x=y\left(2^x xy-2^{xy}+xy^2+1\right)+2^x$ (1)

$\Leftrightarrow \left(2^x+y\right)\left(2^{xy}-1\right)=y\left(2^x xy+xy^2\right) \Leftrightarrow \left(2^x+y\right)\left(2^{xy}-1\right)=xy^2\left(2^x+y\right) \Leftrightarrow \left(2^x+y\right)\left(2^{xy}-xy^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^x=-y & (1) \\ 2^{xy}=xy^2+1 & (2) \end{array}\right.$. Từ (1) ta có $-y=2^x>0 \Leftrightarrow y<0$ (không tồn tại $y \in \mathbb{Z}^+$) nên loại. Khi đó (1) tương đương với $2^{xy}-xy^2-1=0$. Xét hàm số $f_y(x)=2^{xy}-xy^2-1$ trên $(1;2)$ có $f_y'(x)=y\left(2^{xy}\ln 2-y\right)$

Dễ dàng đánh giá được với mọi $x \in (1;2)$ thì $2^{xy}\ln 2-y>2^y\ln 2-y$.

Xét hàm số $g(y)=2^y\ln 2-y$ trên $[1;+\infty)$ dễ thấy $g(y)=2^y\ln^2 2-1=0 \Leftrightarrow y=-2\log_2(\ln 2)=y_0>1$.

Khi đó ta có bảng biến thiên hàm số $g(y)$ trên $[1;+\infty)$ như sau:

y	1		y_0		$+\infty$
$g'(y)$		$-$	0	$+$	
$g(y)$		$\searrow$	$g(y_0)\approx 0.36>0$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta suy ra $g(y)>0, \forall y \geq 1$ và $f_y'(x)>0, \forall x \in (1;2)$ tức hàm số $f_y(x)$ luôn đồng biến trên $(1;2)$ nên để tồn tại nghiệm trên $(1;2)$ của (2) thì $f_y(1)f_y(2)<0 \Leftrightarrow \left(2^y-y^2-1\right)\left(4^y-2y^2-1\right)<0$ (3).

Mà $4^y-2y^2-1>0, \forall y \geq 1$ nên : $(3) \Leftrightarrow 2^y-y^2-1<0 \Leftrightarrow 1<y<4.257 \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y \in \{2;3;4\}$. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 48: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=|w|=4$ và $|z+w|=4\sqrt{3}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2|z-2|-|w+2i|$ có dạng $\sqrt{a+b\sqrt{3}}$ trong đó $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 52. **B.** 84. **C.** 34. **D.** 46.

Lời giải

Đầu tiên ta gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z, w, z+w$. Tới đây ta suy ra $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

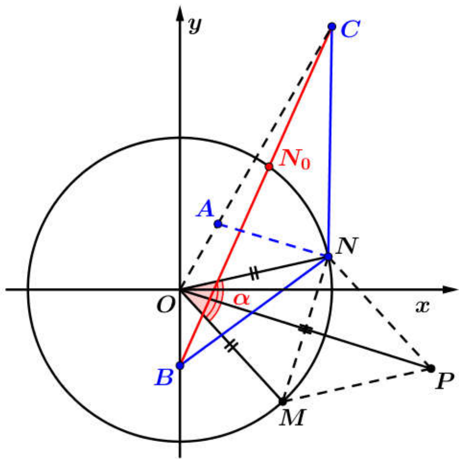
Từ đó ta có được $OP^2=OM^2+ON^2+2OM.ON.\cos\alpha \Rightarrow \alpha=60^\circ$ tức OMN là tam giác đều.

Khi ấy ta suy ra: $|z|^2=|z-w|^2 \Leftrightarrow |w|^2=w\overline{w}=\overline{z}w+z\overline{w} \Leftrightarrow \overline{w}(w-z)=\overline{z}w$ (1)

Đặt $u=\dfrac{z}{w}\to|u|=1$ thì khi đó phương trình (1) thành: $1-u=\overline{u}=\dfrac{\overline{u}.u}{u}=\dfrac{1}{u}\Leftrightarrow u=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}w$

Tiếp đến ta biến đổi: $P=2|z-2|-|w+2i|=2\left|\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}w-2\right|-|w+2i|=\left|\left(1\pm i\sqrt{3}\right)w-4\right|-|w+2i|$

$=2\left|w-\dfrac{4}{1\pm i\sqrt{3}}\right|-|w+2i|=2\left|w-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|-|w+2i|=2NA-NB$ với $A\left(1;\sqrt{3}\right);B(0;-2)$.



Dựng điểm $C\left(4;4\sqrt{3}\right)$ trong hình vẽ trên khi đó theo tính chất *đường tròn Apollonius* thì $\dfrac{NA}{NC}=\dfrac{1}{2}$

Thế vào biểu thức trên suy ra: $P=NC-NB$ với $N(z)\in(C):x^2+y^2=4^2$

Do $OB<4;OC>4$ nên suy ra $P=NC-NB\le CB=\sqrt{(4-0)^2+\left(4\sqrt{3}+2\right)^2}=2\sqrt{17+4\sqrt{3}}=\sqrt{68+16\sqrt{3}}$

Dấu bằng xảy ra khi $N\equiv N_0=CB\cap(C)$. Khi đó ta suy ra: $(a;b)=(68;16)$ tức $a-b=52$. **Chọn đáp án A**

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(6;2;-1), B(-2;-6;3), C(2;-2;1)$. Hai điểm M, N thay đổi sao cho $MN=5, MC=NC$ đồng thời tam giác MAB vuông tại M. Giá trị lớn nhất của biểu thức $2OM^2-ON^2$ gần với số nào trong các số sau ?

A. 90. **B.** 110. **C.** 137. **D.** 87.

Lời giải

Đầu tiên ta có tam giác MAB vuông tại M nên suy ra M luôn thuộc mặt cầu đường kính AB.

Suy ra $M\in(S)$ tâm $I(2;-2;1)$, bán kính $R=6$. Mà $C\equiv I$ nên suy ra $MC=NC=R=6$ tức MN là dây cung của mặt cầu (S).

Suy ra: $2OM^2-ON^2=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)^2=OI^2+R^2+4\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IM}-2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IN}$ ($IM=IN=R$)

$=9-2R^2+4\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IM}-2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IN}$.

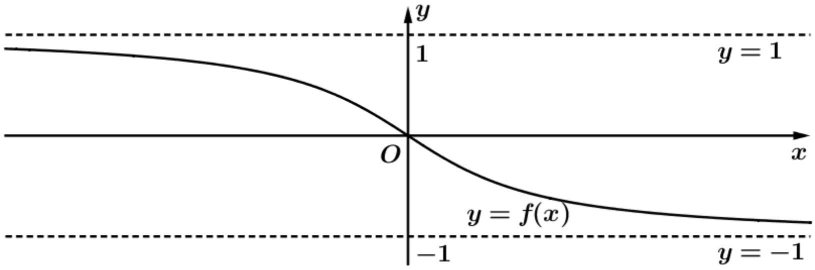
Tiếp đến ta gọi E là trung điểm IN thì khi đó ta suy ra:

$$2OM^2 - ON^2 = 9 + R^2 + 4\overrightarrow{OI}.\left(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IE}\right) = 9 + R^2 + 4\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EM} = 4OI.ME\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{EM}}\right) + 45$$

Do $-1 \le \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{EM}}\right) \le 1$ và $ME = \dfrac{\sqrt{2\left(MI^2 + MN^2\right) - IN^2}}{2} = \sqrt{\dfrac{43}{2}}$ nên suy ra

$2OM^2 - ON^2 \le 4OI.ME + 45 = 4.3.\sqrt{\dfrac{43}{2}} + 45 = 100,647$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{f^3(x) - 3(m-1)f^2(x) + 3\left(m^2 - 2m\right)f(x) + 88}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Đầu tiên ta có: $y' = \dfrac{3f'(x)}{2}.\dfrac{f^2(x) - 2(m-1)f(x) + \left(m^2 - 2m\right)}{\sqrt{f^3(x) - 3(m-1)f^2(x) + 3\left(m^2 - 2m\right)f(x) + 88}}$. Nhận thấy $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f'(x) < 0$, khi ấy để $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $f^2(x) - 2(m-1)f(x) + \left(m^2 - 2m\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow f^2(x) - 2(m-1)f(x) + \left(m^2 - 2m + 1\right) - 1 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(f(x) - (m-1)\right)^2 \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(f(x) - m\right)\left(f(x) - m + 2\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*). Mà $f(x) \in (-1;1), \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình (*) tương đương với: $\Leftrightarrow \begin{cases} m \le f(x) \\ m - 2 \ge f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \\ m - 2 \ge \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m - 2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m \ge 3 \end{cases}$. (*)

Mặt khác ta có hàm số y là căn thức có nghĩa khi $f^3(x) - 3(m-1)f^2(x) + 3\left(m^2 - 2m\right)f(x) + 88 \ge 0$ (1)

Ta xử lí bất phương trình (1) như sau: ta đặt $t = f(x) \to t \in (-1;1)$, lúc này bất phương trình (1) trở thành:

$\Rightarrow t^3 - 3(m-1)t^2 + 3\left(m^2 - 2m\right)t + 88 \ge 0$ (2), đặt $h(t) = t^3 - 3(m-1)t^2 + 3\left(m^2 - 2m\right)t + 88$

Khi ấy yêu cầu bài toán trở thành bất phương trình (2) luôn đúng với mọi $t \in (-1;1)$ khi $h(-1) \ge 0$

Suy ra bất phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow -3m^2 + 3m + 30 \ge 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le 6$ (**)

Nên từ (*) và (**) ta suy ra: $m \in [-5;-1] \cup [3;6]$ tức có 9 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

ĐỀ THI THỬ THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ – HẢI PHÒNG

Câu 45: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1 \le x \le 2023$ và

$$384.128^{x^2-2x} - 6.8^y + 6 = 3y - 7x^2 + 14x$$

A. 2022. **B.** 674. **C.** 1348. **D.** 1346.

Lời giải

Đầu tiên ta có phương trình tương đương với: $384.128^{x^2-2x} - 6.8^y + 6 = 3y - 7x^2 + 14x$

$\Leftrightarrow 2^7.3.2^{7(x^2-2x)} + 7(x^2-2x) = -6 + 6.2^{3y} + 3y \Leftrightarrow 3.2^{7(x^2-2x+1)} + 7(x^2-2x+1) = 3.2^{3y+1} + 3y + 1$

Xét hàm số $f(t) = 3.7^t + t$ có $f'(t) = 3.7^t \ln 7 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ đó suy ra: $7(x-1)^2 = 3y + 1 \Leftrightarrow 3y + 1 > 0 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \ge 0$.

Tới đây ta chia tập $S_x = [1;2023]$ thành 3 tập như sau:

- Tập A bao gồm các số nguyên x chia 3 dư 1, khi đó các số của tập A có dạng là: $x_A = 3n+1$.
- Tập B bao gồm các số nguyên x chia 3 dư 2, khi đó các số của tập B có dạng là: $x_B = 3n+2$.
- Tập C bao gồm các số nguyên x chia hết cho 3, khi đó các số của tập C có dạng là: $x_C = 3n$.

Do $3y+1$ không chia hết cho 3 nên suy ra $7(x-1)^2$ cũng không chia hết cho 3, khi đó ta có:

$7(x_A - 1)^2 = 7(3n+1-1)^2 = 7.(3n)^2 \vdots 3$ nên loại tập A. Nhận thấy cả hai tập B, C thế vào đều không chia hết cho 3 nên suy ra tập giá trị nguyên x lúc này là: $\begin{cases} x = 3m, \forall m \in [1;674] \\ x = 3n+2, \forall n \in [0;673] \end{cases} \forall m,n \in \mathbb{Z}$. Với 674 giá trị nguyên m và 674 giá trị nguyên n ta kết luận có 1348 giá trị nguyên x thỏa mãn tức 1348 cặp $(x;y)$ tồn tại. **Chọn đáp án C.**

Câu 46: Cho đồ thị hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(0;3)$ và $B(2;-1)$. Số nghiệm thực của phương trình $4^{f(f(x))} - 2^{f(x)+f(f(x))} + 3.2^{f(f(x))} = 3.2^{f(x)}$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

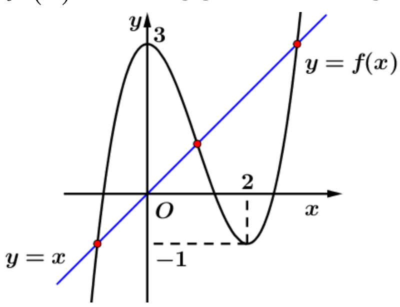
Đầu tiên ta có phương trình sau: $4^{f(f(x))} - 2^{f(x)+f(f(x))} + 3.2^{f(f(x))} = 3.2^{f(x)}$

$2^{f(f(x))}\left(2^{f(f(x))}+3\right) - 2^{f(x)}.\left(2^{f(f(x))}+3\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2^{f(f(x))} - 2^{f(x)}\right)\left(2^{f(f(x))}+3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{f(f(x))} + 3 = 0 \quad (L) \\ 2^{f(f(x))} = 2^{f(x)} \end{array}\right.$

Suy ra: $2^{f(f(x))} = 2^{f(x)} = f(f(x)) = f(x)$ (1)

Đặt $t = f(x)$ thì phương trình (1) thành $x = f(t)$, suy ra: $\begin{cases} t = f(x) \\ x = f(t) \end{cases} \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow f(x) = x$.

Từ giả thiết, ta phác thảo được đồ thị $y = f(x)$ và tương giao với đường thẳng $y = x$ như sau:



Từ hình vẽ ta kết luận phương trình có 3 nghiệm phân biệt. **Chọn đáp án A.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG