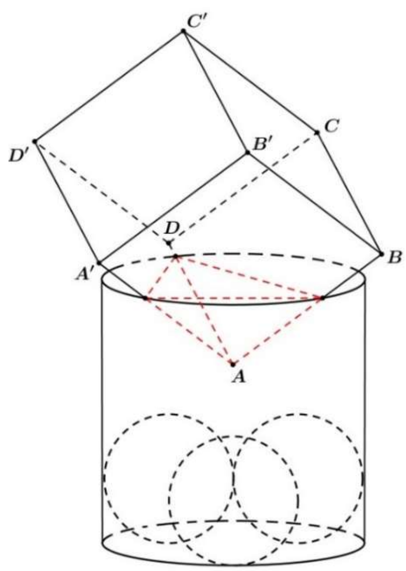
ĐỀ LIÊN TRƯỜNG NGHỆ AN LẦN 1

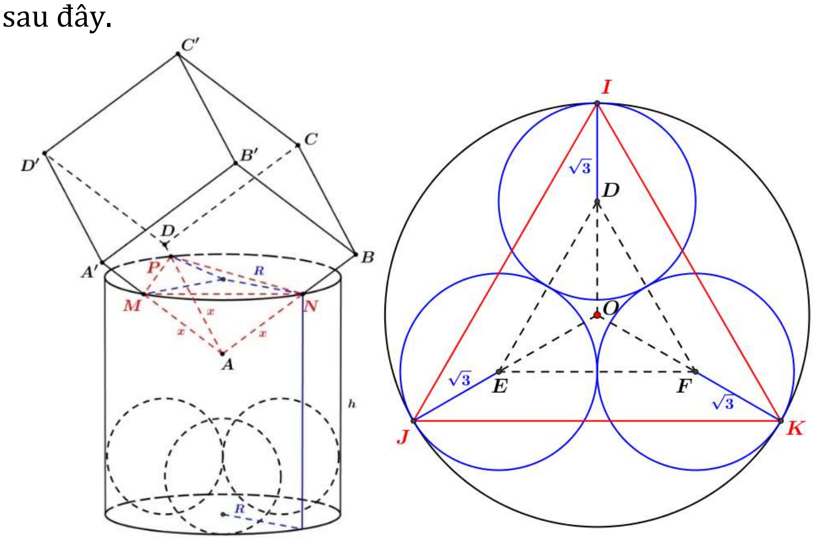
Câu 46. Một bình thủy tinh hình trụ không có nắp, trong bình được xếp vào ba viên bi bằng nhau có bán kính $\sqrt{3}dm$ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với đáy, đôi một tiếp xúc nhau và tiếp xúc với đường sinh của bình. Người ta đổ đầy nước vào rồi đặt lên miệng bình một khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ đặc, sao cho đường chéo AC' có phương vuông góc với mặt đáy của bình và các cạnh AA', AB, AD tiếp xúc với miệng bình (xem hình vẽ). Sau đó quan sát thấy lượng nước tràn ra ngoài bằng $\frac{1}{16}$ lượng nước ban đầu có trong bình. Giả sử chiều dày của vỏ bình không đáng kể, hỏi thể tích của bình thủy tinh gần nhất với số nào sau đây ?



A. $276,41\left(dm^3\right)$. **B.** $319,94\left(dm^3\right)$. **C.** $350,31\left(dm^3\right)$. **D.** $275,44\left(dm^3\right)$.

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ sau đây.



Hình 1 **Hình 2**

Chú thích: hình 2 là hình mặt cắt khối hình 1 qua khối trụ và ba khối cầu trong khối trụ đó.

Gọi các cạnh AA', AB, AD tiếp xúc với miệng bình lần lượt là các điểm M, N, P.

Theo hình 1, ta có:

Nhận xét: do đường chéo AC' có phương vuông góc với mặt đáy của bình nên ta suy ra khối tứ diện $AMNP$ là một khối tam diện vuông có ba cạnh AA', AB, AD bằng nhau và bằng $x\left(dm\right)$, thể tích bằng

$\frac{1}{6}x^3\left(dm^3\right)$. Khi đó M,N,P đều nằm trên đường tròn đáy của khối trụ tức bán kính đường tròn đáy của trụ $\left(R\right)$ cũng chính bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ΔMNP, suy ra

$R=R_{(MNP)}=\frac{MN}{\sqrt{3}}=\frac{AM\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(dm\right)$. (1)

Do đổ nước đầy bình sau khi bỏ ba quả cầu nên ta có thể tích nước ban đầu bằng:

$V_0=\pi R^2h-3.\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3=\pi R^2h-12\pi\sqrt{3}\left(dm^3\right)$ với h là chiều cao của khối trụ.

Theo hình 2, ta có:

Gọi D,E,F lần lượt là tâm đường tròn mặt cắt tử ba quả cầu và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF. Tiếp đến ta gọi I,J,K là các điểm tiếp xúc của đường tròn mặt cắt với đường tròn ngoài có bán kính bằng R. Ta có ΔDEF đều có cạnh bằng $2\sqrt{3}\left(dm\right)$ nên suy ra $OF=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2\left(dm\right)$

Suy ra: $R=OK=OF+FK=2+\sqrt{3}\left(dm\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có được: $\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}\Rightarrow x=\sqrt{6}+\frac{3}{\sqrt{2}}\left(dm\right)$

Theo giả thiết thì thể tích phần nước tràn (tức thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng $\frac{1}{16}$ lượng nước ban đầu có trong bình nên ta có phương trình sau: $\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{16}\left(\pi R^2h-12\pi\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{6}\left(\sqrt{6}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{16}\left(\pi R^2h-12\pi\sqrt{3}\right)$

Giải phương trình ta thu được $h\approx 7,312\left(dm\right)$.

Vậy thể tích khối trụ cần tìm là: $V_{tru}=\pi R^2h=\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^2 7,312\approx 319,94\left(dm^3\right)$. **Chọn B**

Câu 50. Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn $\left(y+2z\right)\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=xy+2xz-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_5\left(y^2+z^2\right)+\frac{1}{4}\log_5^2\left(\frac{3y+6z}{x}+3y^2-3z^2\right)$

A. -1. **B.** -2. **C.** $4-\log_5 3$. **D.** $3-\log_3^2 5$.

Lời giải

Giả thiết ban đầu suy ra: $\left(y+2z\right)\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=x\left(y+2z\right)-3\Leftrightarrow\left(3^x-27^{\frac{1}{y+2z}}\right)=x-\frac{3}{y+2z}$

$\Leftrightarrow 3^x-x=3^{\frac{3}{y+2z}}-\frac{3}{y+2z}$. Xét hàm số $y=f\left(t\right)=3^t-t$ trên $\left(0;+\infty\right)$ có $f'\left(t\right)=3^t\ln 3-1>0,\forall t\in\left(0;+\infty\right)$

Suy ra $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ tức $x=\frac{3}{y+2z}$

Ta có: $\frac{3y+6z}{x}+3y^2-3z^2=\frac{3\left(y+2z\right)}{x}+3y^2-3z^2=\left(y+2z\right)^2+3y^2-3z^2=4y^2+z^2+4yz=\left(2y+z\right)^2$

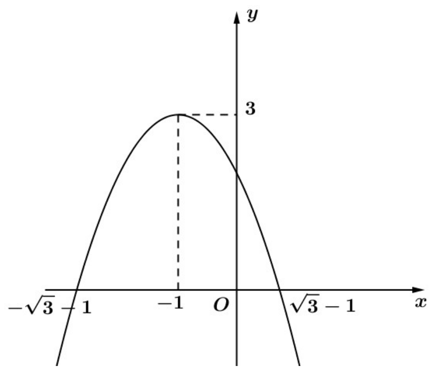
Cùng với: $y^2+z^2=\frac{\left(2y\right)^2}{4}+\frac{z^2}{1}\ge\frac{\left(2y+z\right)^2}{5}$ (Svac-xo) nên $P\ge\log_5\frac{\left(2y+z\right)^2}{5}+\frac{1}{4}\log_5^2\left(2y+z\right)^2$.

Đặt $t=2y+z>0$ ta suy ra:

$P\ge\log_5\left(\frac{t^2}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\log_5 t^2\right)^2=\left(\frac{1}{2}\log_5 t^2+1\right)^2-2\ge-2$. Vậy $P_{\min}=-2$ khi $t=2y+z=\frac{1}{5}$. **Chọn B**

ĐỀ THCS – THPT NGUYỄN KHUYẾN TPHCM

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f\left(\sqrt{3}-1\right)=1$ và $f'(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in R)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của $g(x)=f\left(\left|f(x)\right|-2\right)-8\sqrt{3+\left|f(x)\right|}-\left(\dfrac{f^2(x)+6\left|f(x)\right|}{8}\right)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên, dễ dàng giải hệ a,b,c ra được $f'(x)=-x^2-2x+2\Rightarrow f(x)=-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+C$

Với $f\left(\sqrt{3}-1\right)=1$ ta suy ra $C=\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}$, tức $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}$

Ta có: $g(x)=f\left(\left|f(x)\right|-2\right)-8\sqrt{3+\left|f(x)\right|}-\left(\dfrac{\left|f(x)\right|^2+6\left|f(x)\right|+9-1}{8}\right)+1$

$=f\left(\left|f(x)\right|+3-5\right)-8\sqrt{\left|f(x)\right|+3}-\left(\dfrac{\left(\left|f(x)\right|+3\right)^2-1}{8}\right)+1$

Đặt $u=\sqrt{\left|f(x)\right|+3}>0$ khi đó $g(u)=f\left(u^2-5\right)-8u-\dfrac{u^4}{8}+\dfrac{9}{8}\Rightarrow g'(u)=2uf'\left(u^2-5\right)-8-\dfrac{u^3}{2}=0$

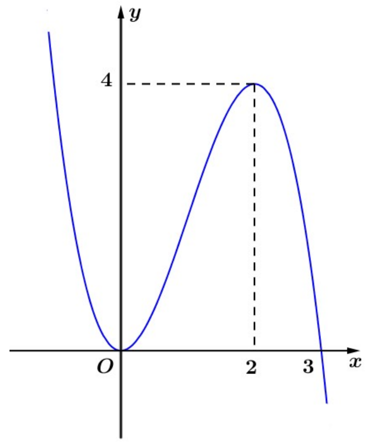
$\Leftrightarrow f'\left(u^2-5\right)=\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{4}{u}=\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{2}{u}+\dfrac{2}{u}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{u^2}{4}.\dfrac{2}{u}.\dfrac{2}{u}}=3\Rightarrow f'\left(u^2-5\right)\geq 3$ (đánh giá Cauchy 3 số không âm).

Khi đó: $\begin{cases}-\left(u^2-5\right)^2-2\left(u^2-5\right)+2\geq 3\\ f'(x)=-x^2-2x+2\end{cases}\Leftrightarrow (u-2)^2(u+2)^2\leq 0\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=2\\u=-2\end{array}\right.\\ u=\sqrt{\left|f(x)\right|+3}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\left|f(x)\right|+3}=\pm 2$

Suy ra: $\left|f(x)\right|+3=4\Leftrightarrow f(x)=\pm 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}=1\\-\dfrac{x^3}{3}-x^2+2x+\dfrac{11}{3}-2\sqrt{3}=-1\end{array}\right.$ (1)

Thử bằng máy tính casio ta thấy (1) có 5 nghiệm bội lẻ nên ta suy ra $g(x)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=-x^3+bx^2+cx$ có đồ thị như hình sau:



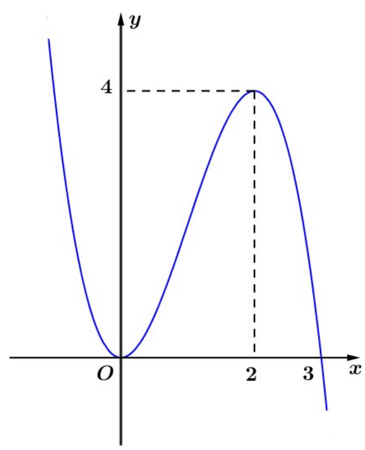
Hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi $y=f\left(x\right), y=0, x=0, x=4$ quay quanh Ox sinh ra một khối tròn xoay có thể tích bằng V. Khẳng định **đúng** là

A. $V=\dfrac{3072\pi}{35}$. **B.** $V=\dfrac{3073\pi}{35}$. **C.** $V=\dfrac{3074\pi}{35}$. **D.** $V=\dfrac{3076\pi}{35}$.

Lời giải

Giả thiết ban đầu suy ra: $f\left(x\right)=-x^3+3x^2$. Suy ra $V=\int\limits_0^4 \pi f^2\left(x\right)dx=\pi\int\limits_0^4\left(-x^3+3x^2\right)^2dx=\dfrac{3072\pi}{35}$

Câu 48. Cho hàm số $y=f'\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như sau



Và $f\left(0\right)=0$. Số điểm cực trị của hàm $g\left(x\right)=f\left(xf\left(x\right)\right)-\ln\left(xf\left(x\right)\right)$ bằng

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Giả thiết ban đầu suy ra: $f'\left(x\right)=-x^3+3x^2=x^2\left(3-x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{x^4}{4}+x^3$ với $f\left(0\right)=0$.

Ta có: $g\left(x\right)=f\left(xf\left(x\right)\right)-\ln\left(xf\left(x\right)\right)\Rightarrow\left(xf\left(x\right)\right)'\left[f'\left(xf\left(x\right)\right)-\dfrac{1}{xf\left(x\right)}\right]=0$. Cho $g'\left(x\right)=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=0 \\ f'\left(xf\left(x\right)\right)=\dfrac{1}{xf\left(x\right)} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{1}{x}\quad(1) \\ f'\left(xf\left(x\right)\right)=\dfrac{1}{xf\left(x\right)}\quad(2) \end{array}\right..$$

Tại (1) phương trình tương đương với: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x-4}=0$.

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x-4}$ có $h'(x)=-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{(x-4)^2}<0$ tức $h(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{16}{5}$ (nhận).

Tại (2) phương trình tương đương với: (đặt $t=xf(x)$) $\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow -t^3+3t^2=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0.764 \\ t=2.961\end{array}\right.$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{0.764}{x} \\ f(x)=\dfrac{2.961}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{0.764}{x} \\ f(x)=\dfrac{2.961}{x}\end{array}\right.$. Khảo sát sự tương giao của đồ thị $y=f(x)$ và hai đường cong lần lượt là $y=\dfrac{0.764}{x}$ và $y=\dfrac{2.961}{x}$ ta thấy có 6 nghiệm bội lẻ (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số $g(x)$ có tổng cộng 7 điểm cực trị.

Câu 49. Cho $(C_1): y=g(x)=\dfrac{2}{x}; (C_2): y=f(x)=4x^2+bx+c$, (C_2) tiếp xúc Ox tại $A\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ và (C_2) qua $B(2;1)$. Giá trị nhỏ nhất của $\sqrt{2}.g\left(\dfrac{4+x+2f(x)}{(1+f(x))(2+x)}\right)-\sqrt{x}|2x-3|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ và

$M=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

Khẳng định **đúng** là

A. $M\in(-2;0)$. **B.** $M\in(0;1)$. **C.** $M\in(1;2)$. **D.** $M\in(2;4)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=8x+b$. Do (C_2) tiếp xúc Ox tại $A\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ nên $A\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ là điểm cực trị của đồ thị (C_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0 \\ f(2)=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}12+b=0 \\ 16+2b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} b=-12 \\ c=9\end{cases}\Rightarrow y=f(x)=4x^2-12x+9=(2x-3)^2\geq 0$$

Tiếp đến, ta có: $\dfrac{4+x+2f(x)}{(1+f(x))(2+x)}=\dfrac{2(1+f(x))+(2+x)}{(1+f(x))(2+x)}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{\frac{x}{2}+1}+\dfrac{1}{(2x-3)^2+1}$

Khi đó, suy ra: $P=\sqrt{2}.g\left(\dfrac{4+x+2f(x)}{(1+f(x))(2+x)}\right)-\sqrt{x}|2x-3|=\sqrt{2}.\dfrac{2}{\dfrac{1}{\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2+1}+\dfrac{1}{|2x-3|^2+1}}-\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{x}{2}}|2x-3|$

Đặt $(a;b)=\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}};|2x-3|\right)\Rightarrow (x;y)=\left(2a^2;|4a^2-3|\right)$. Do $x\in[0;2]$ nên $a\in(0;1], b\in[0;3)$

-Nếu $ab>1$ thì $a|4a^2-3|>1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(4a^2-3)>1 \\ a(4a^2-3)<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(a+1)(2a-1)^2<0 \\ (a-1)(2a+1)^2>0\end{array}\right.$ (vô lí do $a\in(0;1]$)

-Nếu $0 \le ab \le 1$ thì ta có: $P = \dfrac{2\sqrt{2}}{\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1}} - \sqrt{2}ab$

Đến đây ta có bất đẳng thức (*) sau: $\forall a,b$ thỏa $0 \le ab \le 1$ thì ta có: $\dfrac{1}{a^2+1} + \dfrac{1}{b^2+1} \le \dfrac{2}{1+ab}$

Thật vậy, bất đẳng thức (*) tương đương với:

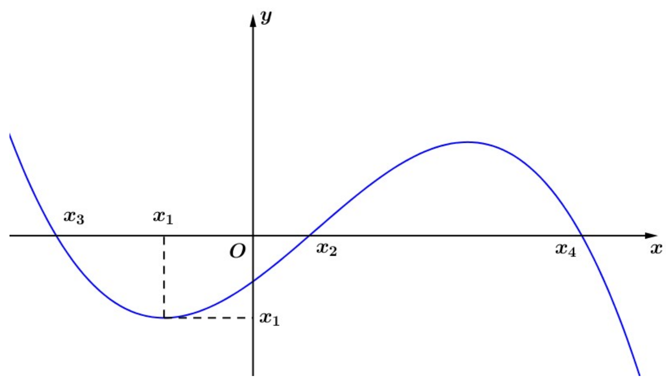
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2+1} - \dfrac{1}{1+ab} + \dfrac{1}{b^2+1} - \dfrac{1}{1+ab} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{ab-a^2}{\left(a^2+1\right)\left(ab+1\right)} + \dfrac{ab-b^2}{\left(b^2+1\right)\left(ab+1\right)} \le 0$

$\Leftrightarrow a\left(b-a\right)\left(b^2+1\right) - b\left(b-a\right)\left(a^2+1\right) \le 0 \Leftrightarrow \left(b-a\right)^2\left(ab-1\right) \le 0$ luôn đúng với $0 \le ab \le 1$

Như vậy (*) đúng, suy ra $P \ge \dfrac{2\sqrt{2}}{\dfrac{2}{1+ab}} - \sqrt{2}ab = \sqrt{2}\left(ab+1\right) - \sqrt{2}ab = \sqrt{2}$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{2}$ khi $x = 2$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên R, có $f''\left(x\right) > 0,\ \forall x \in \left[x_3; x_2\right]$ và có đồ thị $y = f\left(x\right)$ như hình dưới đây



Gọi $\left[f\left(x\right) - xf'\left(f\left(x_0\right)\right) - f\left(f\left(x_0\right)\right) + 1\right]^2 = m$; $\left[\dfrac{1 - f'\left(f\left(x_0\right)\right)f\left(x_0\right)}{2}\right]^2 = n$; $x_0 \in \left[x_3; 0\right]$. Khi giá trị nhỏ nhất của $S = \dfrac{2}{\left(m+1\right)\left(4n+1\right)} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m+4n}{4mn+1}} + \sqrt{mn}$ trên $x \in \left[x_3; x_2\right]$ bằng k và $T = \left(k + f\left(x_0\right)\right)\left(k - f\left(x_0\right)\right) + x^2$. Khẳng định **đúng** là

A. $T \in \left(0;1\right)$. **B.** $T \in \left(2;3\right)$. **C.** $T \in \left(4;5\right)$. **D.** $T \in \left(5;6\right)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta có: $f\left(x_1\right) = x_1; f\left(x_3\right) = 0$

-Trên $\left[x_3; 0\right]$ thì $f\left(x\right) \le 0$ (dựa vào đồ thị) $\Rightarrow \begin{cases} f\left(x_0\right) \le 0, x_0 \in \left[x_3; 0\right] \\ f\left(x_0\right) \ge f\left(x_1\right) = x_1 > x_3 \end{cases} \Rightarrow f\left(x_0\right) \in \left[x_1; 0\right]$

-Vì $f''\left(x\right) > 0,\ \forall x \in \left[x_3; x_2\right]$ nên theo bất đẳng thức tiếp tuyến, với mọi $f\left(x_0\right) \in \left[x_3; 0\right]$ thì

$f\left(x\right) \ge f'\left(f\left(x_0\right)\right)\left(x - f\left(x_0\right)\right) + f\left(f\left(x_0\right)\right)$

$\Rightarrow f\left(x\right) - xf'\left(f\left(x_0\right)\right) - f\left(f\left(x_0\right)\right) + 1 \ge f'\left(f\left(x_0\right)\right)\left(x - f\left(x_0\right)\right) + f\left(f\left(x_0\right)\right) - xf'\left(f\left(x_0\right)\right) - f\left(f\left(x_0\right)\right) + 1$

$\Leftrightarrow f\left(x\right) - xf'\left(f\left(x_0\right)\right) - f\left(f\left(x_0\right)\right) + 1 \ge 1 - f'\left(f\left(x_0\right)\right)f\left(x_0\right) \quad (1)$

-Lại có $f''\left(x\right) > 0,\ \forall x \in \left[x_3; x_2\right]$ nên suy ra $f'\left(x\right)$ đồng biến và liên tục trên $\left[x_3; x_2\right]$

Do $x_0 \in \left[x_3; 0\right]$ nên $x_1 \le f\left(x_0\right) \le 0$ (suy ra từ nhìn nhận đồ thị)

$\Rightarrow f'\left(f\left(x_0\right)\right) \ge f'\left(x_1\right) = 0$ (do $x = x_1$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số).

Mà mặt khác $f\left(x_0\right) \le 0$ nên suy ra $f'\left(f\left(x_0\right)\right) f\left(x_0\right) \le 0 \Rightarrow \left[\dfrac{1 - f'\left(f\left(x_0\right)\right) f\left(x_0\right)}{2}\right]^2 = n \ge \dfrac{1}{4}$

Kéo theo $\left[f\left(x\right) - xf'\left(f\left(x_0\right)\right) - f\left(f\left(x_0\right)\right) + 1\right]^2 = m \ge 1$

Đặt $\left(m;4n\right) = \left(a;b\right)$ thì khi đó $a,b \ge 1$ và $a \ge b$

Ta có: $S = \dfrac{2}{\left(m+1\right)\left(4n+1\right)} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m+4n}{4mn+1}} + \sqrt{mn} = \dfrac{2}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a+b}{ab+1}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{ab}$

Do $a,b \ge 1$ nên ta có: $\left(a-1\right)\left(b-1\right) \ge 0 \Rightarrow ab+1 \ge a+b \Rightarrow \left(a+1\right)\left(b+1\right) = \left(ab+1\right) + \left(a+b\right) \le 2\left(ab+1\right)$

Suy ra: $S \ge \dfrac{1}{ab+1} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a+b}{ab+1}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{ab} = \dfrac{2 + \sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)} + \sqrt{ab}\left(ab+1\right)}{2\left(\sqrt{ab+1}\right)^2}$

Đến đây ta cần chứng minh $\dfrac{2 + \sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)} + \sqrt{ab}\left(ab+1\right)}{2\left(\sqrt{ab+1}\right)^2} \ge \dfrac{3}{2}$ (**)

$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)} + \sqrt{ab}\left(ab+1\right) \ge 3\left(ab+1\right) \Leftrightarrow \sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)} + \sqrt{ab}\left(ab+1\right) \ge 3ab+1$

Ta nhận thấy: do $ab+1 \ge a+b$ nên

$\sqrt{\left(a+b\right)\left(ab+1\right)} + \sqrt{ab}\left(ab+1\right) \ge a+b+\sqrt{ab}\left(ab+1\right) \ge 2\sqrt{ab} + \sqrt{ab}\left(ab+1\right)$

Đến đây ta cần chứng minh $2\sqrt{ab} + \sqrt{ab}\left(ab+1\right) \ge 3ab+1$ (*). Thật vậy, ta có:

(*) tương đương với: $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{ab} \ge 1 \\ 2t + t\left(t^2+1\right) \ge 3t^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(t-1\right)^3 \ge 0$ và luôn đúng với mọi $t \ge 1$

Như vậy bất đẳng thức (*) đúng, tức kéo theo (**) đúng, từ đó suy ra $\min S = k = \dfrac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 = x_1$ và $f\left(x_0\right) = x_0$

Suy ra: $T = \left(k + f\left(x_0\right)\right)\left(k - f\left(x_0\right)\right) + x^2 = k^2 - f^2\left(x_0\right) + x_0^{\ 2} = \dfrac{9}{4} - x_0^{\ 2} + x_0^{\ 2} = \dfrac{9}{4} \in \left(2;3\right)$

ĐỀ THPT ĐÔ LƯƠNG 1 NGHỆ AN

Câu 46. Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x - 2y = \log_3\left(\log_3 5\right)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3^x + \dfrac{1}{25^y}$ là $a + \log_b c$ trong đó a,b,c là các số tự nhiên, b,c là số nguyên tố. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$.

A. $T = 22$ **B.** $T = 23$. **C.** $T = 17$ **D.** $T = 8$.

Lời giải

Ta thực hiện biến đổi biểu thức P như sau:

$$P = 3^x + \frac{1}{5^{2y}} = 3^x + \frac{1}{5^{x - \log_3\left(\log_3 5\right)}} = 3^x + \frac{5^{\log_3\left(\log_3 5\right)}}{5^x} = 3^x + \frac{\left(\log_3 5\right)^{\log_3 5}}{\left(5^x\right)^{\log_3 3}} = 3^x + \frac{\left(\log_3 5\right)^{\log_3 5}}{\left(3^x\right)^{\log_3 5}} = \log_3 5\left(\frac{3^x}{\log_3 5}\right) + \left(\frac{\log_3 5}{3^x}\right)^{\log_3 5}$$

Đặt $t = \dfrac{\log_3 5}{3^x} > 0$, xét hàm số $y = f\left(t\right) = t^{\log_3 5} + \dfrac{\log_3 5}{t}$ có $f'\left(t\right) = \log_3 5\left(t^{\log_3 5 - 1} - \dfrac{1}{t^2}\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

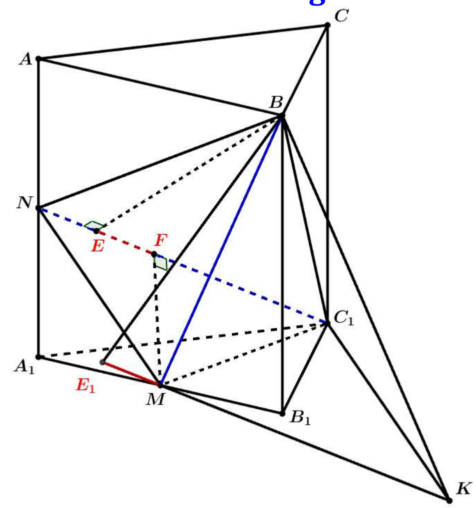
Mà $f''\left(1\right) > 0$ nên ta suy ra $\min P = \min f\left(x\right) = f\left(1\right) = 1 + \log_3 5$.

Đồng nhất hệ số ta suy ra $a = 1, b = 3, c = 5$. Vậy $T = a + 2b + 3c = 22$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy $AB = 5$. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của A_1B_1 và AA_1. Biết rằng hình chiếu của BM lên đường thẳng C_1N là đoạn thẳng có độ dài bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$ và chiều $AA_1 > 3$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. $\frac{125\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{125\sqrt{3}}{2}$. **C.** $25\sqrt{3}$. **D.** $\frac{125\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta kẻ $BE \perp C_1N; MF \perp C_1N$ thì khi đó ta thu được hình chiếu của BM lên đường thẳng C_1N chính là đoạn EF. Mặt khác, khi ta dựng hình bình hành NC_1KM và kẻ $BE_1 \perp KM$ tại E_1 thì hình chiếu lúc này chính là ME_1, ta nhận thấy cả hai trường hợp này đều cho ra 2 đoạn hình chiếu song song và bằng nhau.

Khi đó ta suy ra $\begin{cases} EF = ME_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ BE = BE_1 \end{cases}$. Đặt $AA_1 = x > 3 \Rightarrow BM = \sqrt{x^2 + \frac{25}{4}}; C_1N = BN = \sqrt{25 + \frac{x^2}{4}}; BC_1 = \sqrt{x^2 + 25}$

Tiếp đến ta có: $\begin{cases} d(N; BC_1) = d(A_1; B_1C_1) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ d(N; BC_1).BC_1 = BE.C_1N \end{cases} \Rightarrow BE = BE_1 = 5\sqrt{\frac{3x^2+75}{4x^2+25}} \Rightarrow ME_1^2 = MB^2 - BE_1^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{25}{4}\right) - 25\left(\frac{3x^2+75}{4x^2+25}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = AA_1 = 5 \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = AA_1 S_{ABC} = \frac{125\sqrt{3}}{4}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = 10^x + x$ và $g(x) = x^3 - mx^2 + (m^2+1)x - 2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x + f(x))$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng?

A. $\frac{21}{2}$ **B.** 6 **C.** 21 **D.** 5

Lời giải

Ta có: $y = h(x) = g(10^x + 2x) \Rightarrow h'(x) = (10^x \ln 10 + 2) g'(10^x + 2x)$

Xét $g'(x) = 3x^2 - 2mx + (m^2+1)$ có $\begin{cases} \Delta'_{g'(x)} = m^2 - 3(m^2+1) = -2m^2 - 3 < 0 \\ 3 > 0 \end{cases}$ nên suy ra hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[0;1]$ tức giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)$ tại $x = 1$

Khi đó ta có: $h(1) = g(12) = 12^3 - m12^2 + 12(m^2+1) - 2 = 12m^2 - 144m + 1738 = 12(m-6)^2 + 1306 \geq 1306$

Như vậy dấu bằng xảy ra khi $m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 6$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa mãn $f(x)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)dt$. với $\forall x\in[-1;1]$

Khi đó $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ bằng

A. $I=3$ **B.** $I=4$ **C.** $I=2$ **D.** $I=1$

Lời giải

Chú ý trong tích phân lấy theo biến t do đó x trong tích phân lúc này là tham số các em nhé, nên không đặt $m=\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)dt$ được: $f(x)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x+t)f(t)dt=\frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1}xf(t)dt+\int_{-1}^{1}tf(t)dt\right]=\frac{3}{2}x\int_{-1}^{1}f(t)dt+\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}tf(t)dt$

Do đó $\Rightarrow f(x)+2=ax+b;\left(a=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f(t)dt;b=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}tf(t)dt\right)$.

Thay ngược lại đẳng thức đã cho

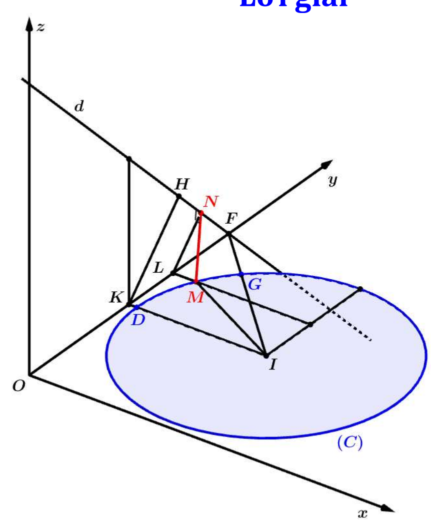
$ax+b=\frac{3}{2}x\int_{-1}^{1}(at+b-2)dt+\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t(at+b-2)dt=\frac{3}{2}x\times 2(b-2)+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}a=3(b-2)x+a$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3(b-2)\\ b=a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=3\Rightarrow f(x)=3x+1\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(3x+1)dx=2$. **Chọn đáp án C.**

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng tọa độ (xOy) với mặt cầu $(S):(x-6)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=41$. Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm $A(0;0;12)$ và $B(0;4;8)$. Với M,N là các điểm thay đổi thứ tự trên (C) và d. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN là

A. $2+\sqrt{17}$. **B.** $\frac{\sqrt{34}}{3}$. **C.** $1+2\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

Lời giải



Đầu tiên ta có phương trình $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=32$ với tâm $I(6;6)$ và bán kính $R=4\sqrt{2}$

Gọi $F=(d)\cup Oy$, $IK\perp Oy$, $D=IK\cap(C)$, $G=IF\cap(C)$, $ML\perp Oy$. Như vậy để MN đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{DG}$.

Kẻ $\begin{cases}KH\perp(d);NL\perp(d)\\ LK=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{NL}{KH}=\frac{FL}{FK}\\ KH=d(K;(d))=3\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow NL=KH\frac{6-x}{6}=\frac{6-x}{\sqrt{2}}$

Cùng với $LM=6-\sqrt{R^2-d^2\left(I;(ML)\right)}=6-\sqrt{32-KL^2}=6-\sqrt{32-x^2}$

Suy ra $MN=\sqrt{ML^2+LN^2}=\sqrt{\left(\dfrac{6-x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(6-\sqrt{32-x^2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{(6-x)^2}{2}+\left(6-\sqrt{32-x^2}\right)^2}=f(x)$

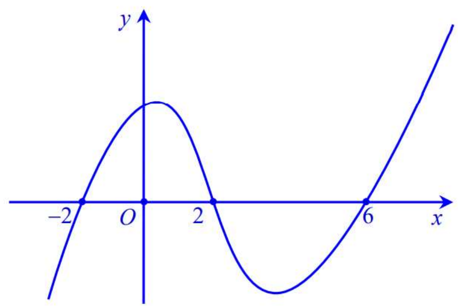
Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt{\dfrac{(6-x)^2}{2}+\left(6-\sqrt{32-x^2}\right)^2}$, $\forall x\in\left[-4\sqrt{2};4\sqrt{2}\right]$. Có

$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x-(x+6)\sqrt{32-x^2}=0\Leftrightarrow x=x_0\approx 3,5145\in\left[-4\sqrt{2};4\sqrt{2}\right]\Rightarrow \min f(x)=f(3,5145)\approx 2.35488$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của MN bằng xấp xỉ 2.35488. **Chọn đáp án E.**

ĐỀ THI THỬ LẦN 2 SỞ HẢI DƯƠNG

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R. Biết hàm số $y=f'(x)$ là hàm bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|2x^3+3x\right|-m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị.

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

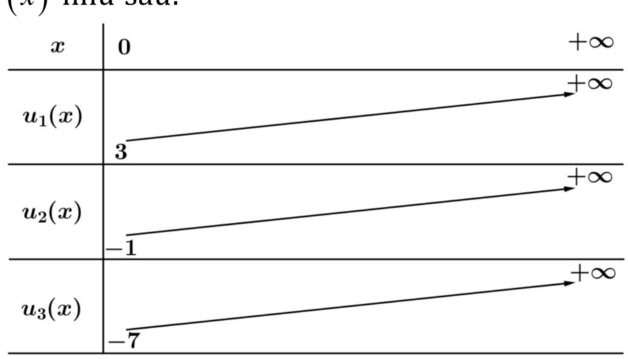
Lời giải

Đầu tiên ta thấy $f'(x)=0$ có ba nghiệm lần lượt là $-2;2;6$.

Tiếp đến, ta có: $g(-x)=f\left(\left|-2x^3-3x\right|-m+1\right)=f\left(\left|-\left(2x^3+3x\right)\right|-m+1\right)=g(x)$ nên suy ra $g(x)$ là hàm chẵn tức đồ thị hàm số $g(x)$ đối xứng qua Oy. Suy ra để hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $h(x)=f\left(2x^3+3x-m+1\right)$ phải có 2 điểm cực trị dương.

Tức $h'(x)=\left(6x^2+3\right)f'\left(2x^3+3x-m+1\right)=0$ phải có nghiệm dương bội lẻ. Phương trình tương đương với:

$f'\left(2x^3+3x-m+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^3+3x-m+1=-2\\2x^3+3x-m+1=2\\2x^3+3x-m+1=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2x^3+3x+3=u_1(x)\\m=2x^3+3x-1=u_2(x)\\m=2x^3+3x-7=u_3(x)\end{array}\right.$. Khi đó ta có bảng biến thiên gộp từ ba hàm $u_1(x),u_2(x),u_3(x)$ như sau:



Vậy để thỏa yêu cầu đề bài thì $-1<m\le 3$ tức có 4 giá trị nguyên m thỏa. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên y thuộc đoạn $[-2022;2022]$ sao cho tồn tại $x \in R$ thỏa mãn $12\sqrt[3]{3y+12.2^x} = 2^{3x} - 3y$

A. 2028 **B.** 2027 **C.** 2021 **D.** 2022

Lời giải

Ta có: $12\sqrt[3]{3y+12.2^x} = 2^{3x} - 3y$. Đặt $u = \sqrt[3]{3y+12.2^x}$ khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$\begin{cases} 12u = 2^{3x} - 3y \\ u^3 = 3y + 12.2^x \end{cases}$. Lấy hai phương trình cộng vế theo vế ta có được phương trình mới như sau:

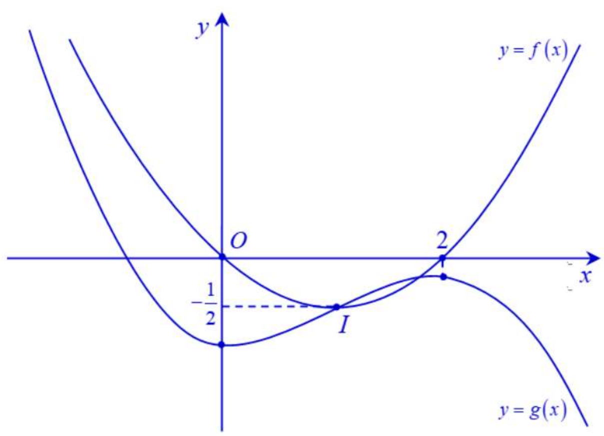
$\Leftrightarrow u^3 + 12u = 2^{3x} + 12.2^x$. Xét hàm số $y = f(t) = t^3 + 12t$ có $f'(t) = 3u^2 + 12 > 0,\ \forall u \in R$. Như vậy ta suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên R. Khi đó: $u = 2^x \Leftrightarrow 3y + 12.2^x = 2^{3x} \Leftrightarrow y = \dfrac{2^{3x} - 12.2^x}{3}$

Xét hàm số $y = g(x) = \dfrac{2^{3x} - 12.2^x}{3}$ có $g'(x) = 8^x \ln 2 - 4.2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Như vậy để tồn tại $x \in R$ thì tham số y phải thỏa: $y \ge g(1) = -\dfrac{16}{3} \xrightarrow{y\in[-2022;2022]} -\dfrac{16}{3} \le y \le 2022$

Như vậy có tất cả $2022 - (-5) + 1 = 2028$ giá trị y nguyên thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 48. Cho đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như hình vẽ bên dưới



Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\dfrac{1}{2}$ và $y = g(x)$ là một hàm số bậc ba. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1x_2x_3 = -6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với giá trị nào dưới đây ?

A. 6 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 8

Lời giải

Từ hình trên ta quy ước hoành độ giao điểm giữa hai hàm số từ trái qua phải là x_1, x_2, x_3.

Đầu tiên ta dễ dàng tìm được $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x$ với $x_I = 1$, khi đó ta suy ra $x_1x_3 = -6$

Gọi $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \ne 0)$. Nhận ra điểm I cũng chính là điểm uốn của hàm số $y = g(x)$ nên ta suy ra $\begin{cases} g(1) = -\dfrac{1}{2} \\ g''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d = -\dfrac{1}{2} \\ 6a + 2b = 0 \end{cases}$.

Tiếp theo, xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(x)$ và $y=g(x)$, ta có:

$ax^3+bx^2+cx+d=\dfrac{x^2}{2}-x \Leftrightarrow ax^3+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)x^2+(c+1)x+d=0$ (1)

Biết rằng phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 nên theo định lí Viét ta có được:

$x_1x_2x_3=-6=\dfrac{-d}{a} \Leftrightarrow d=6a$. Từ đó ta giải hệ 4 ẩn ra được: $a=-\dfrac{1}{8},b=\dfrac{3}{8},c=0,d=-\dfrac{3}{4}$

Suy ra: $f(x)-g(x)=-\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{3}{8}x^2+x-\dfrac{3}{4}$ kéo theo phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm là $\left\{\begin{array}{l} x=1\pm\sqrt{7} \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy $S=\displaystyle\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}}\left|f(x)-g(x)\right|dx \approx 6,22$ gần với 6. **Chọn đáp án A.**

Câu 49. Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z+2+2i|=1$ và $|w+2-i|=|w-3i|$. Khi $|z-w|+|w-3+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z+2w|$

A. $\sqrt{61}$ **B.** 7 **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $2\sqrt{13}$

Lời giải

Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w

Qua biến đổi đại số, ta suy ra: $\left\{\begin{array}{l} M(z)\in(C):(x+2)^2+(y+2)^2=1 \\ N(w)\in(d):x+y-1=0 \end{array}\right.$. Gọi $A(3;-3)$, khi đó ta có:

$P=|z-w|+|w-3+3i|=MN+NA=MN+NB\ge MB$ trong đó $B(4;-2)$ là điểm đối xứng với A qua (d).

Như vậy $P_{\min}=MB_{\min}=MI-R_{(C)}=6-1=5$ với $I(-2;-2)$ là tâm đường tròn (C).

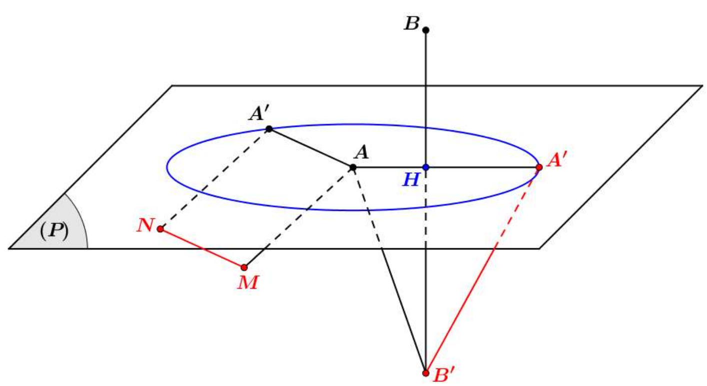
Dấu bằng xảy ra khi $M(-1;-2)$ và $N(3;-2)$. Vậy $|z+2w|=\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}\right|=\sqrt{61}$ **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-3)$ và $B(-2;3;1)$. Xét hai điểm M,N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho $MN=2$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Xét mặt phẳng $(P):y=1$. Dựng đường tròn (C) tâm A, bán kính $AA'=MN=2$ với $A'\in(C)$ sao cho $AA'NM$ là hình bình hành. Đến đây ta nhận thấy A',B đều cùng phía với mặt phẳng (Oxz) nên ta suy ra:

$AM+BN=A'N+BN\ge A'N+B'N\ge A'B'$ với $B'(-2;-3;1)$ là điểm đối xứng với B qua (Oxz)

Gọi $H(-2;1;1)$ là hình chiếu của B' lên (P) khi đó ta suy ra HA' đạt giá trị nhỏ nhất khi ba điểm A,H,A' thẳng hàng với H nằm giữa A và A'. Ta có: $AH=5$ nên suy ra $HA'_{\min}=|AA'-AH|=|MN-AH|=3$

Vậy $(AM+BN)_{\min}=A'B'_{\min}=\sqrt{B'H^2+A'H^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ LẦN 1 SỞ HÀ NỘI

Câu 42. Cho bất phương trình: $8^x+3x.4^x+\left(3x^2+2\right)2^x\le\left(m^3-1\right)x^3+2\left(m-1\right)x$. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có đúng năm nghiệm nguyên dương phân biệt là

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$8^x+3x.\left(2^x\right)^2+3x^2.2^x+x^3+2\left(2^x+x\right)\le\left(mx\right)^3+2\left(mx\right)\Leftrightarrow\left(2^x+x\right)^3+2\left(2^x+x\right)\le\left(mx\right)^3+2\left(mx\right)$

Xét hàm đặc trưng $y=f\left(t\right)=t^3+2t$ có $f'\left(t\right)=3t^2+2>0$ với mọi $t\in R$ nên $f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên R.

Từ đó ta suy ra $f\left(2^x+x\right)\le f\left(mx\right)\Leftrightarrow 2^x+x\le mx$ (*)

Với $x\ne 0$ thì bất phương trình (1) tương đương với $m\ge\frac{2^x}{x}+1$. Xét hàm số $y=g\left(x\right)=\frac{2^x}{x}+1,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$ thì ta có: $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=x_0\approx 1,44$, cùng với $g''\left(x_0\right)>0$ nên suy ra $x=x_0$ là điểm cực tiểu.

Do $g\left(1\right)=g\left(2\right)=3$ nên để có 5 nghiệm nguyên dương phân biệt thì

Suy ra để thỏa yêu cầu đề bài thì $g\left(4\right)<m\le g\left(6\right)\Leftrightarrow 7,4\le m\le 11,6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{8;9;10;11\right\}$ tức có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án B.**

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M\left(1;2;3\right)$. Đường thẳng $\left(d\right)$ đi qua điểm M, $\left(d\right)$ cắt tia Ox tại A và cắt mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ tại B sao cho $MA=2MB$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ **B.** $\frac{5\sqrt{17}}{2}$ **C.** $\sqrt{17}$ **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Lời giải

Ta có: $A\left(a;0;0\right)$ và $B\left(0;b;c\right)$ cùng với M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{O}$.

Suy ra $M\left(\frac{x_A+2x_B}{2};\frac{y_A+2y_B}{2};\frac{z_A+2z_B}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}3=a\\6=2b\\9=2c\end{cases}\Rightarrow\left(a;b;c\right)=\left(3;3;\frac{9}{2}\right)\Rightarrow AB=\frac{3\sqrt{17}}{2}$ **Chọn đáp án A.**

Câu 44. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\frac{z}{z^2+2\overline{z}}$ là số thực và $\left(z+2\right)\left(\overline{z}+2i\right)$ là số thuần ảo ?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Cách 1:

Đầu tiên ta đặt $z=a+bi\ \left(a,b\in R\right)$

Điều kiện: $z^2+2\overline{z}\ne 0\Rightarrow\left(a^2-b^2+2a\right)+\left(2ab-2b\right)i\ne 0+0i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2+2a\ne 0\\2ab-2b\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left(a;b\right)\ne\left(-2;0\right)$

Do $\frac{z}{z^2+2\overline{z}}=\frac{\left(a+bi\right)\left[\left(a^2-b^2+2a\right)-\left(2ab-2b\right)i\right]}{\left(a^2-b^2+2a\right)^2+\left(2ab-2b\right)^2}$ là số thực nên suy ra

$-a\left(2ab-2b\right)+b\left(a^2-b^2+2a\right)=0\Leftrightarrow 4ab-a^2b-b^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b^2=4a-a^2\end{array}\right.$ (1)

Tiếp theo ta có: $\left(z+2\right)\left(\overline{z}+2i\right)=\left|z\right|^2+2i\left(a+bi\right)+2\left(a-bi\right)+4i$, do $\left(z+2\right)\left(\overline{z}+2i\right)$ là số thuần ảo nên suy ra $a^2+b^2-2b+2a=0$ (2). Từ (1) và (2) ta xét hai trường hợp như sau:

<u>TH1:</u> $b=0$ loại

TH2: $b^2=4a-a^2$ thì thế vào (2) suy ra $b=3a$. Đưa về hình học Oxy thì số nghiệm $(a;b)$ chính là số giao điểm giữa đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-1)^2=2$ có tâm $I(-1;1), R=\sqrt{2}$ và đường thẳng $(d): y=3x$

Nhận thấy $d(I;(d))<R$ nên suy ra (d) cắt (C) tại 2 điểm tức có 2 số phức tồn tại là $(0;0)$ (L) và $\left(\frac{2}{5};\frac{6}{5}\right)$.

Tổng hợp ta kết luận có tất cả **1 số phức** thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án A.**

Cách 2:

Điều kiện: $b\neq 0$. Nhận xét: số phức w là một số thực thì khi đó ta luôn có: $w=\overline{w}$. Từ đó, ta có:

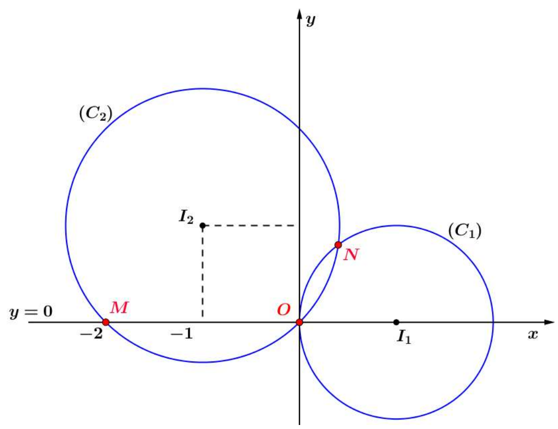
1) $\frac{z}{z^2+2\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+2z}\Leftrightarrow |z|^2\overline{z}+2z^2=|z|^2 z+2\overline{z}^2\Leftrightarrow (z-\overline{z})\left(|z|^2-2z-2\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\overline{z}\\ |z|^2=2(z+\overline{z})\end{array}\right.$

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in R)$ thì khi đó phương trình tương đương với: $\left[\begin{array}{l} b=0\\ a^2+b^2=2a\end{array}\right.$.

2) $(z+2)(\overline{z}+2i)$ là số thuần ảo, khi đó ta có: $a^2+b^2+2a-2b=0$

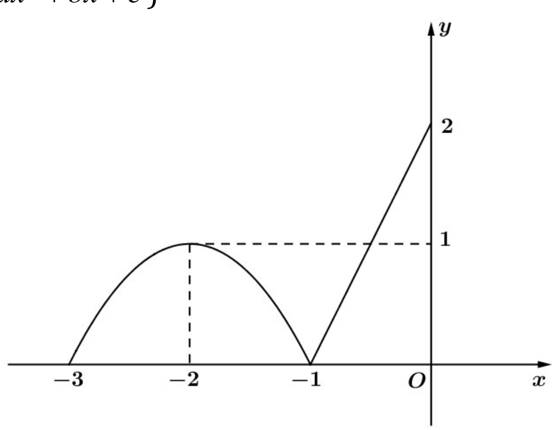
Chuyển về xét tương giao trên hệ trục tọa độ Oxy, ta có: $\begin{cases}(C_1):(x-1)^2+y^2=1\\ (C_2):(x+1)^2+(y-1)^2=2\end{cases}; y=0$

Từ đó ta có hình vẽ như sau:



Đối chiếu với điều kiện $b\neq 0$ nên ta suy ra chỉ có 1 số phức thỏa mãn, tức điểm N. **Chọn đáp án A.**

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ trên $[-3;0]$ có hình vẽ như sau (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$)



Cho $\int_{e^{-3}}^{1}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\frac{2}{3}$, giá trị $f(0)$ bằng

A. 2 **B.** $-\frac{7}{9}$ **C.** $\frac{14}{9}$ **D.** 1

Lời giải

Đầu tiên từ đồ thị trên ta dễ dàng có được: $y=f'(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3, & -3\le x\le -1\\ 2x+2 &, -1\le x\le 0\end{cases}$

Khi đó ta có: $\dfrac{2}{3}=\int\limits_{e^{-3}}^{1}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=\int\limits_{e^{-3}}^{1}f(\ln x)d(\ln x)=\int\limits_{-3}^{0}f(x)dx$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=x+3\end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{2}{3}=\int\limits_{-3}^{0}f(x)dx=3f(0)-\int\limits_{-3}^{0}(x+3)f'(x)dx=3f(0)-\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)f'(x)dx-\int\limits_{-1}^{0}(x+3)f'(x)dx$

$=3f(0)+\int\limits_{-3}^{-1}(x+3)(-x^2-4x-3)dx+\int\limits_{-1}^{0}(x+3)(2x+2)dx=3f(0)+4$. Suy ra $f(0)=\dfrac{14}{9}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(1;2;2), I(0;0;4)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm C. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn IC là

A. 5 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 4 **D.** $3\sqrt{2}$

Lời giải

Cách 1: Nhận xét: để tồn tại mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B thì tâm $K(a;b;c)$ của mặt cầu đó phải nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, tức mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm AB nhận $\overrightarrow{AB}$ là pháp tuyến có phương trình là: $(P): y+z-3=0$

Ta có C là hình chiếu của K lên mặt phẳng Oxy với $C(a;b;0)$. Từ đó ta có phương trình sau:

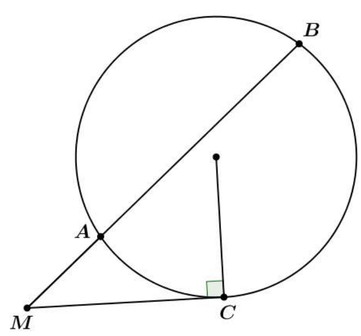
$KA^2=KC^2\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=c^2\Leftrightarrow a^2+b^2+3=2(a+b+c)$ (1)

Mặt khác ta lại có K thuộc mặt phẳng (P) nên $b+c-3=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $a^2+b^2+3=2(a+3)\Leftrightarrow(a-1)^2+b^2=4$ tức điểm C thuộc đường tròn tâm $I_1(1;0)$ và bán kính $R=2$. Tiếp theo ta có: $IC=\sqrt{IO^2+OC^2}=\sqrt{16+OC^2}$ tức khi IC max thì OC cũng max

Mà $OC_{\max}=OI_1+R=2+2=4$ nên suy ra $IC_{\max}=\sqrt{16+3^2}=5$. **Chọn đáp án A.**

Cách 2: Sử dụng phương tích



Ta có phương trình đường thẳng AB có dạng: $(AB):\begin{cases}x=1\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases}$. Gọi $M=AB\cap(Oxy)$ nên suy ra $M(1;0;0)$

Từ đó ta có được $MC^2=MA.MB=4\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=4$ với $x\in[-1;3]$

Suy ra: $IC^2=x^2+y^2+16=2x+19\le 2.3+19=25\Rightarrow IC_{max}=5$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-10;10\right]$ để hàm số $h\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị ?

A. 19 **B.** 20 **C.** 18 **D.** 21

Lời giải

Để hàm số $h\left(x\right)$ có đúng 3 điểm cực trị thì phương trình $f\left(x\right)=m$ phải có 1 nghiệm bội lẻ.

Dễ dàng thấy rõ với $m\in\left(0;1\right)$ thì $h\left(x\right)$ có đúng 5 điểm cực trị nên suy ra để thỏa yêu cầu đề bài thì $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1\end{array}\right.$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $m\in\left[-10;10\right]$ tức có 21 giá trị nguyên thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho hai số phức z,w phân biệt thỏa mãn $|z|=|w|=4$ và $\left(z-i\right)\left(\overline{w}+i\right)$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$ bằng

A. 8 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{15}$ **D.** $2\sqrt{14}$

Lời giải

Cách 1: Đầu tiên ta đặt ẩn dạng lượng giác như sau: $\begin{cases} z=4\cos u+4i\sin u \\ w=4\cos v+4i\sin v\end{cases}$

Suy ra ta có: $\left(z-i\right)\left(\overline{w}+i\right)=\left(4\cos u+4i\sin u-i\right)\left(4\cos v-4i\sin v+i\right)$ mà do là số thực nên ta có được phương trình sau: $\cos u-\cos v+4\sin\left(u-v\right)=0\Leftrightarrow -2\sin\frac{u-v}{2}\left(\sin\frac{u+v}{2}-4\cos\frac{u-v}{2}\right)=0$

Cùng với z,w là hai số phức phân biệt nên ta suy ra $\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)=4\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$

Ta có: $\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\in\left[-1;1\right]\Rightarrow\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)\in\left[\frac{-1}{4};\frac{1}{4}\right]\Rightarrow\cos^2\left(\frac{u-v}{2}\right)\in\left[0;\frac{1}{16}\right]$

Suy ra: $|z-w|^2=16\frac{|z-w|^2}{16}=16.\left[\left(\sin u-\sin v\right)^2+\left(\cos u-\cos v\right)^2\right]=16.\left[2-2\left(\sin u\sin v+\cos u\cos v\right)\right]$

$=32.\left(1-\cos\left(u-v\right)\right)=32\left(1-\left(2\cos^2\left(\frac{u-v}{2}\right)-1\right)\right)=32\left(2-2\cos^2\left(\frac{u-v}{2}\right)\right)\ge 32\left(2-2\frac{1}{16}\right)=60$

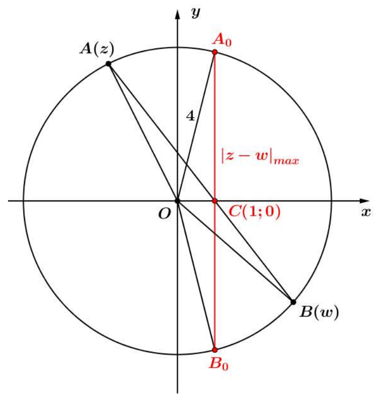
Vậy $|z-w|\ge\sqrt{60}=2\sqrt{15}$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: Đầu tiên ta đặt ẩn như sau: $\begin{cases} a=z-i \\ b=w-i\end{cases}$ thì khi đó ta có: $|a+i|+|b+i|=4$

$\left(z-i\right)\left(\overline{w}+i\right)=\left(a+bi-i\right)\left(c-di+i\right)=\left(ac+bd-b-d+1\right)+\left(a-c-ad+bc\right)i$

Mà do $\left(z-i\right)\left(\overline{w}+i\right)$ là số thực nên suy ra $a-c-ad+bc=0\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b-1}{d-1}$. Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z,w và điểm $C\left(0;1\right)$

Từ đó ta suy ra với hệ thức trên ta có được A,C,B thẳng hàng. Khi đó ta có hình vẽ như sau:



Ta suy ra $\left|z-w\right|_{\max}=AB_{\max}=2\sqrt{4^2-1^2}=2\sqrt{15}$. **Chọn đáp án C.**

Cách 3: Sử dụng cách thuần đại số

Ta có: $(z-i)\left(\overline{w}+i\right)=(z-i)\overline{\left(\overline{w}+i\right)}=(z-i)(w-i)\in R\Rightarrow z-i=k(w-i)\Leftrightarrow(k-1)i=kw-z\ \ (k\neq1)$

Suy ra: $|k-1|^2=|kw-z|^2\geq\left(|kw|-|z|\right)^2=16\left(|k|-1\right)^2$. Mà vì $k\neq1$ nên suy ra $k<0$

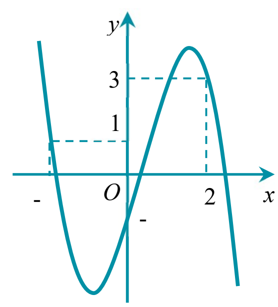
Do đó $(k-1)^2=|kw-z|^2=k^2|w|^2+|z|^2-k\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)\Leftrightarrow-k\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)=-15\left(k^2+1\right)-2k$

Tiếp theo, ta nhận thấy: $-15(k+1)^2=-15k^2-30k-15\leq0\Leftrightarrow-15\left(k^2+1\right)-2k\leq28k$ nên suy ra

$-k\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)\leq28k\Leftrightarrow-\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)\geq28\ \ (k<0)$. Từ đó ta có được:

$|z-w|^2=32-\left(z\overline{w}+\overline{z}w\right)\geq32+28=60\Leftrightarrow|z-w|\geq2\sqrt{15}$. **Chọn đáp án C.**

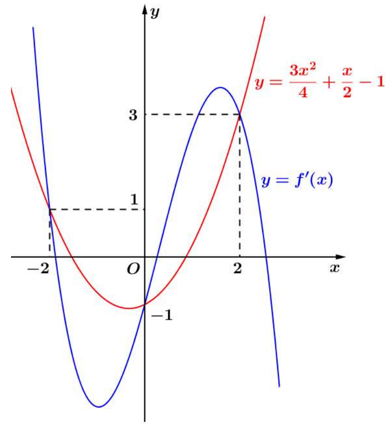
Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho trong hình vẽ dưới đây



Đặt hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{4}-\dfrac{x^2}{4}+x$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ là

A. $[-1;+\infty]$ **B.** $(-5;-1)$ **C.** $(-\infty;-5]$ **D.** $(-1;+\infty)$

Lời giải



Ta có: $g'(x)=f'(x)-\frac{3x^2}{4}-\frac{x}{2}+1\le 0 \Leftrightarrow f'(x)\le \frac{3x^2}{4}+\frac{x}{2}-1$

Xét tương giáo giữa hai đồ thị $y=f'(x)$ và $y=\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{2}-1$ thì khoảng x làm cho $g'(x)<0$ là các khoảng sau: $\left[\begin{array}{l}-2\le x\le 0\\ x\ge 2\end{array}\right.$.

Tiếp đến, ta có: $y'=g'(x+m)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x+m\le 0\\ x+m\ge 2\end{array}\right., \forall x>3 \Leftrightarrow m\ge 2-x, \forall x>3 \Rightarrow m\ge \max(2-x) \Leftrightarrow m\ge -1$.

Giải thích: trường hợp $-2\le x+m\le 0$ bị loại vì $x=+\infty$ bị sai. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THI THỬ CHUYÊN SƠN LA LẦN 1

Câu 39. Cho hàm số xác định trên $R\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}, f(-3)-f(3)=0, f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}\ln 20+\frac{1}{3}$ **C.** $\ln 80+1$ **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$

Lời giải

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1, \forall x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_2, \forall x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_3, \forall x\in(1;+\infty)\end{cases}$

Trên $(-\infty;-2)$ ta có: $f(-3)=\frac{\ln 4}{3}+C_1$. Trên $(-2;1)$, ta có $f(0)=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_2=\frac{1}{3}\Rightarrow C_2=\frac{1+\ln 2}{3}$

Từ đó suy ra: $f(-1)=\frac{2\ln 2+1}{3}$. Trên $(1;+\infty)$ ta có: $f(-3)=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}+C_3$. Mà $f(-3)-f(3)=0$ nên

$C_1-C_3=\frac{-\ln 10}{3}\Rightarrow f(-4)+f(-1)-f(4)=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1+\frac{\ln 2}{3}+C_2+\frac{\ln 2}{3}-C_3=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2\ln 2}{3}+C_2+(C_1-C_3)$

$=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1+\ln 2}{3}-\frac{\ln 10}{3}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **Chọn đáp án A.**

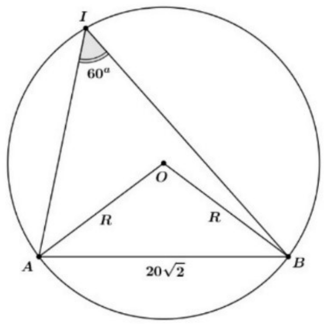
Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x+3y+2z+2=0$. Đường thẳng Δ song song với (P), đi qua $M(2;2;4)$ và cắt đường thẳng d có phương trình là

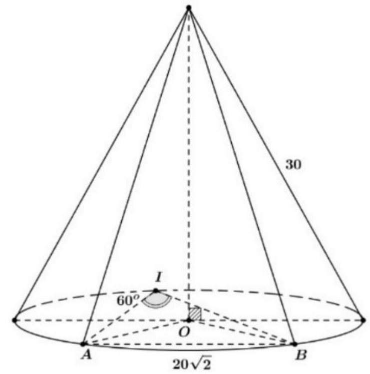
A. $\frac{x+2}{9}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z+4}{6}$ **B.** $\frac{x-2}{9}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-4}{6}$ **C.** $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-4}{6}$ **D.** $\frac{x+2}{9}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z+4}{-6}$

Lời giải

Đầu tiên ta loại đáp án C,D đi vì vector chỉ phương nhân vô hướng với vector pháp tuyến mặt phẳng (P) khác 0. Tiếp đến do đường thẳng Δ qua $M(2;2;4)$ nên ta khoanh B. **Chọn đáp án B.**

Câu 42. Bà Hương nhận làm 100 chiếc nón lá giống nhau có độ dài đường sinh là $30cm$. Ở phần mặt trước của mỗi chiếc nón (từ A đến B như hình vẽ) bà Hương thuê người sơn và vẽ hình trang trí. Biết $AB = 20\sqrt{2}cm$ và giá tiền công để sơn trang trí $1m^2$ là 50000 đồng. Tính số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà bà Hương phải thuê sơn trang trí cho cả đợt làm nón





A. 128.000 đồng **B.** 257.000 đồng **C.** 384.000 đồng **D.** 209.000 đồng

Lời giải

Đầu tiên theo tính chất góc ở tâm bằng hai lần góc nội tiếp chắn cung tương ứng nên ta suy ra: $\widehat{AOB} = 2\widehat{AIB} = 120^\circ$. Sử dụng đính li Cosin ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 120^\circ \Leftrightarrow 3R^2 = \left(20\sqrt{2}\right)^2$

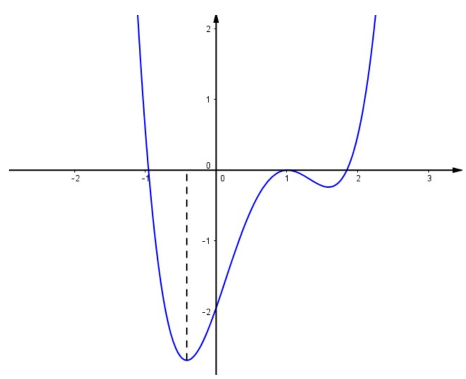
Từ đó suy ra $R = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}(cm)$. Tiếp theo, ta gọi đỉnh của hình nón là S, sau đó ta trải phẳng mặt xung quanh của nón ra, khi ấy diện tích mặt cần sơn và trang trí chính là phần hình quạt SAB.

Ta có độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ là $l = \dfrac{2\pi}{3}.\dfrac{20\sqrt{6}}{3} = \dfrac{40\pi\sqrt{6}}{9}(cm)$. Từ đó ta tính được diện tích hình quạt SAB là:

$S = \dfrac{l.SA}{2} = \dfrac{1}{2}.30.\dfrac{40\pi\sqrt{6}}{9} = \dfrac{1200\pi\sqrt{6}}{18}\left(cm^2\right) = \dfrac{1200\pi\sqrt{6}}{18}.10^{-4}\left(m^2\right)$. Mà giá tiền công để sơn trang trí $1m^2$ là 50000 đồng nên giá tiền công sơn 100 cái nón là: $\dfrac{1200\pi\sqrt{6}}{18}.10^{-4}.50.000.100 = 256.509$ (đồng).

Như vậy tổng tiền này gần với đáp án B nhất. **Chọn đáp án B.**

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(f(x) - 1\right)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$



A. 9 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 8

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(x).f'\left(f(x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ (1) \\ f'\left(f(x) - 1\right) = 0 \ (2) \end{array}\right.$

Nhìn vào đồ thị, dễ thấy (1) có 3 nghiệm.

(2) tương đương với: $\left[\begin{array}{l} f(x)-1=a\in(-1;0) \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=b\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a+1\in(0;1)\to 2n_0 \\ f(x)=2\to 2n_0 \\ f(x)=b+1\in(2;3)\to 2n_0 \end{array}\right.$. Tổng là 6 nghiệm.

Như vậy hàm số cần tìm có tất cả 9 nghiệm. **Chọn đáp án A.**

Câu 44. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0;2022]$ để bất phương trình $\left[(m-1)4^x-\frac{2}{4^x}+2m+1\right]\left(-x+4^{1-x}\right)\le 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $[0;1)$?

A. 2021 **B.** 1011 **C.** 2022 **D.** 1

Lời giải

Đầu tiên ta xét $-x+4^{1-x}=\frac{x4^x-4}{4^x}<0,\forall x\in[0;1)$, do $x4^x<4,\forall x\in[0;1)$ nên bất phương trình tương đương với: $(m-1)4^x-\frac{2}{4^x}+2m+1\le 0$. Đặt $t=4^x\in[1;4)$, khi bất phương trình trở thành:

$(m-1)t-\frac{2}{t}+2m+1\le 0\Leftrightarrow (m-1)t^2+(2m+1)t-2\le 0,\forall t\in[1;4)\Leftrightarrow m\le\frac{t^2-t+2}{t^2+2t},\forall t\in[1;4)$

Xét hàm số $y=f(t)=\frac{t^2-t+2}{t^2+2t},\forall t\in[1;4)$ có $f'(t)=\frac{3t^2-4t-4}{\left(t^2+2t\right)^2}=0\Leftrightarrow t=2$

Mà $\lim\limits_{t\to 1^+}f(t)=\frac{2}{3};\lim\limits_{t\to 4^-}f(t)=\frac{7}{12};f(2)=\frac{1}{2}$ nên ta suy ra được $f(t)\ge\frac{1}{2}$ tức $\min f(t)=\frac{1}{2}$

Suy ra để bất phương trình có nghiệm đúng trên tập cho trước thì $m\le\min f(t)\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$

Với $m\in[0;2022]$ ta thu được $m\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ tức có 1 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

Câu 45. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2$ và $w=(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là số thực ?

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $z=a+bi\ (a,b\in R)$

$w=(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)=|z|^2+(1+3i)(a+bi)+(3-i)(a-bi)+6+8i$. Do w là số thực nên ta suy ra $\mathrm{Im}(w)=b+3a-3b-a+8=2a-2b+8=0$. Cùng với $|z+2-i|=2$ ta quy về hình học Oxy nên số các số phức z thỏa chính là số giao điểm giữa đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=4$ với tâm $I(-2;1),R=2$ và đường thẳng $x-y+4=0$.

Ta nhận thấy $d(I,d)<R$ nên (d) cắt (C) tại 2 điểm tức có 2 số phức thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

Câu 46. Cho ba số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=1,|z_2|=\sqrt{7},|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ và giá trị lớn nhất của biểu thức $|3z_1+2z_2+z_3|$ bằng 78. Giá trị $|z_3|$ bằng

A. $78-\sqrt{53}$ **B.** 25 **C.** $78-\sqrt{73}$ **D.** 5

Lời giải

Ta có: $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1z_2|=2\Leftrightarrow|z_1z_2|=3$, khi đó ta suy ra:

$|3z_1+2z_2|=\sqrt{9|z_1|^2+4|z_2|^2+12|z_1z_2|}=\sqrt{9+4.7+12.3}=\sqrt{73}$.

Mà theo bất đẳng thức Mincopski ta có: $\left|\left(3z_1+2z_2\right)+z_3\right|\le\left|3z_1+2z_2\right|+\left|z_3\right|=\sqrt{73}+\left|z_3\right|=78$ nên ta suy ra:

Giá trị của $\left|z_3\right|=78-\sqrt{73}$. Thử lại dấu bằng xảy ra tại bất đẳng thức trên ta thấy z_1,z_2 không tồn tại dấu bằng thỏa mãn nên ta kết luận không có đáp án nào đúng.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+3a+at\\ y=-2+t\\ z=2+3a+(1+a)t\end{cases}$. Biết rằng khi a thay đổi thì luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $6\sqrt{3}$ **B.** $5\sqrt{3}$ **C.** $7\sqrt{3}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có: $\Delta:\begin{cases}x=1+3a+at\\ y=-2+t\\ z=2+3a+(1+a)t\end{cases}\Rightarrow x+y-z=-3$. Thế $t=-3$ vào ta thu được: $\begin{cases}x=1\\ y=-5\\ z=-1\end{cases}$

Khi đó ta suy ra rằng Δ luôn qua điểm $A(1;-5;-1)$ cố định, và nằm trong mặt phẳng $(P):x+y-z+3=0$.

Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng Δ với mọi a nên mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A.

Đường thẳng IA vuông góc với (P) có phương trình là: $\begin{cases}x=1+t\\ y=-5+t\Rightarrow I(1+t;-5+t;-1-t)\\ z=-1-t\end{cases}$.

Mà $IA=IM$ nên $t^2+t^2+t^2=t^2+(t-6)^2+(t+2)^2\Leftrightarrow t=5\Rightarrow I(6;0;-6)\Rightarrow R=IM=5\sqrt{3}$

Vậy bán kính của mặt cầu cần tìm là bằng $5\sqrt{3}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để bất phương trình $2^{m^2-14}<2^{x^2-2x-3}+\dfrac{x^2-2x-m^2+11}{2^{x-3}}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x

A. 6 **B.** 9 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Bất phương trình tương đương với: $2^{m^2-14}.2^{x-3}<2^{x^2-2x-3}.2^{x-3}+x^2-2x-m^2+11$

$\Leftrightarrow 2^{m^2+x-17}<2^{x^2-x-6}+\left(x^2-2x-m^2+11\right)\Leftrightarrow 2^{m^2+x-17}+\left(m^2+x-17\right)<2^{x^2-x-6}+\left(x^2-x-6\right)$

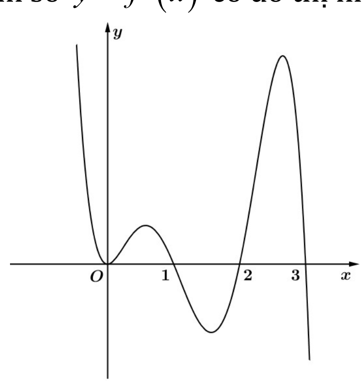
Xét hàm đặc trưng $y=f(t)=2^t+t$ có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0$ với mọi $t\in R$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên R.

Từ đó kéo theo: $m^2+x-17<x^2-x-6\Leftrightarrow x^2-2x-m^2+11>0\Leftrightarrow \Delta'=1-\left(-m^2+11\right)\le 0\Leftrightarrow -\sqrt{10}\le m\le\sqrt{10}$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in[-3;3]$ tức có 7 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án C.**

Câu 49. Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị của m để $m\in[0;6], 2m\in\mathbb{Z}$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-2|x-1|-2x+m\right)$ có đúng 9 điểm cực trị.

A. 6 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 3

Lời giải

Ta có: $g(x)=f\left(|x-1|^2-2|x-1|+m-1\right)$.

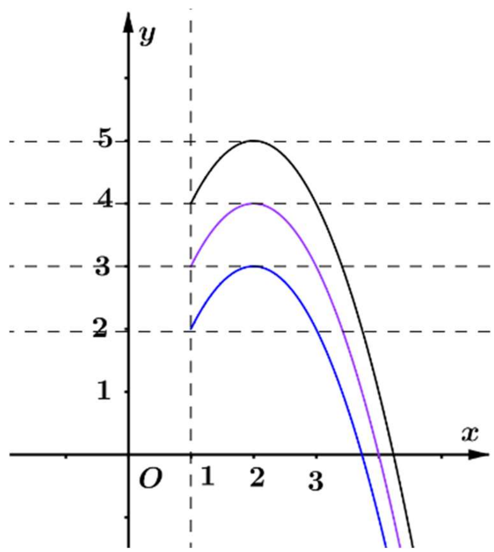
Đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận đường thẳng $x=1$ làm trục đối xứng và hàm số $y=g(x)$ luôn có một điểm cực trị là $x=1$.

Xét trường hợp $x>1$, ta có: $g(x)=f\left(x^2-4x+2+m\right)$. $g'(x)=(2x-4).f'\left(x^2-4x+2+m\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+2+m=0\\x^2-4x+2+m=1\\x^2-4x+2+m=2\\x^2-4x+2+m=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=2&\\x^2-4x+2+m=0&(*)\\-x^2+4x-1=m&(1)\\-x^2+4x=m&(2)\\-x^2+4x+1=m&(3)\end{array}\right..$$

Phương trình $(*)$ nếu có nghiệm thì các nghiệm này sẽ là nghiệm bội chẵn của $g'(x)=0$ nên hàm số $g(x)$ không đạt cực trị tại các nghiệm này.

Đồ thị các hàm số $y=-x^2+4x-1$, $y=-x^2+4x$, $y=-x^2+4x+1$ trên khoảng $(1;+\infty)$ được cho bởi hình dưới đây:



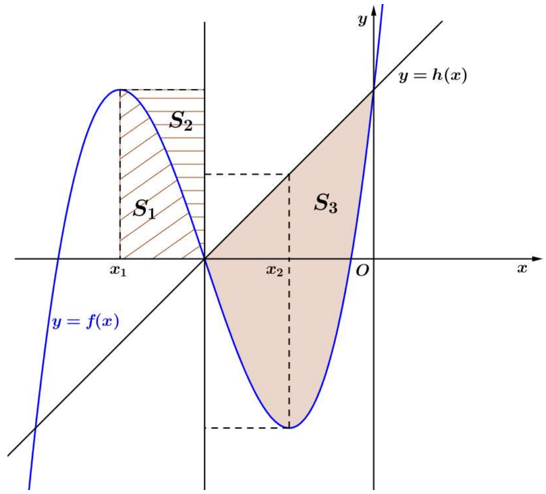
Hàm số $y=g(x)$ có 9 cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=g(x)$ có 4 cực trị $x>1$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $g'(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt $x>1$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3<m<4\\m\le 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6<2m<8\\2m\le 4\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $2m\in\mathbb{Z}$ và $0\le 2m\le 12$ ta được: $2m\in\{0;1;2;3;4;7\}$, tức là $m\in\left\{0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{7}{2}\right\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được gạch như hình bên và S_3 là diện tích phần tô đậm. Tính tỉ số $\frac{S_2}{S_3}$?



A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{2}{16}$ **D.** $\frac{3}{16}$

Lời giải

Cách 1:

Ta thực hiện tịnh tiến điểm gốc tọa độ vào trùng với tọa độ trung điểm hai hoành độ x_1, x_2. Khi đó diện tích của các phần cần tính không thay đổi và hàm số $\begin{cases} y = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \to \begin{cases} y = g(x) \\ y = h_1(x) \end{cases}$

– Ta thấy S_1 và S_2 trở thành S_1' và S_2' tương ứng không thay đổi giá trị.

– Ta thấy $y = g(x)$ là hàm lẻ $\Rightarrow y = g(x) = ax^3 + bx\,(a > 0)$ có hai điểm cực trị x_1' và x_2' thỏa mãn $x_2' = -x_1'$.

Mặt khác $x_2' = x_1' + 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1' = -1 \\ x_2' = 1 \end{cases}$.

– Ta có $g'(x) = 3ax^2 + b$ có nghiệm $x_1' = -1$ và $x_2' = 1$.

$\Rightarrow g'(\pm 1) = 0 \Rightarrow b = -3a. \Rightarrow g(x) = ax^3 - 3ax \;\Rightarrow$ Tại $x_1' = -1$ thì $g(-1) = 2a$.

$\Rightarrow S_1' = \int_{-1}^{0} g(x) = \int_{-1}^{0} (ax^3 - 3ax)dx = -\frac{a}{4} + \frac{3a}{2} = \frac{5a}{2} \Rightarrow S_2' = \int_{-1}^{0} [2a - g(x)]dx = \int_{-1}^{0} [2a - (ax^3 - 3ax)]dx = \frac{3a}{4}$

Do đường thẳng $h_1(x)$ cắt $g(x)$ tại ba điểm trong đó có điểm uốn nên suy ra hai hoành độ còn lại lần lượt là $2x_1' = -2$ và $2x_2' = 2$ với $g(-1) = g(2) - 2a$, suy ra $h_1(x) = ax \;\;(a > 0)$

Suy ra: $\Rightarrow S_3' = \int_{0}^{2} (h_1(x) - g(x))dx = \int_{0}^{2} (ax - (ax^3 - 3ax))dx = \int_{0}^{2} (-ax^3 + 4ax)dx = 4a$

Vậy tỉ số $\frac{S_2}{S_3} = \frac{S_2'}{S_3'} = \frac{3a}{4}.\frac{1}{4a} = \frac{3}{16}$. **Chọn đáp án D.**

Cách 2: Chọn $y = g(x) = x^3 - 3x, y = h_1(x) = x$ để tính toán cho gọn

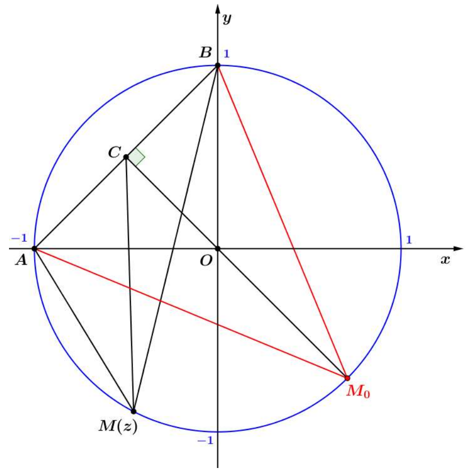
ĐỀ THI THỬ CHUYÊN KHTN – HÀ NỘI LẦN 1

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z-i|$

A. $\sqrt{8-4\sqrt{2}}$ **B.** 2 **C.** $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

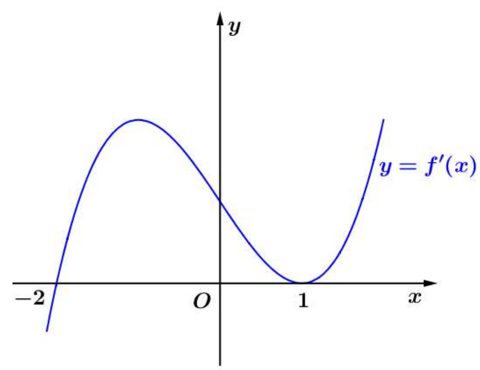
Đặt $z=a+bi,(a,b\in R)$ và gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z|=1$.



Khi đó điểm M chạy trên đường tròn tâm O, bán kính $R=1$. Đặt $A(-1;0),B(0;1)$, ta suy ra $P=|z+1|+|z-i|=MA+MB$. Gọi $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AB. Theo công thức đường trung tuyến ta có: $MC^2=\frac{2(MA^2+MB^2)-AB^2}{4}\Leftrightarrow 2(MA^2+MB^2)=4MC^2+AB^2=4MC^2+2$

Suy ra: $P\le\sqrt{2(MA^2+MB^2)}=\sqrt{4MC^2+2}$. Mà theo hình dưới thì MC max khi $M\equiv M_0$ với $M_0C=CO+R=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên suy ra $P\le\sqrt{4\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 9. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;2]$. Khi đó, giá trị $M-m$ bằng



A. $\frac{16}{3}$ **B.** $\frac{32}{3}$ **C.** $\frac{27}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Đầu tiên, từ đồ thị trên ta dễ dàng suy ra: $f'(x)=a(x+1)^2(x-2)=ax^3-3ax+2a$ với $a\neq 0$

Khi đó, ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^3-3ax+2a)dx=\frac{ax^4}{4}-\frac{3ax^2}{2}+2ax+C$

Mà diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 9 nên ta suy ra:

$$\int_{-2}^{1} f'(x)dx = 9 \Leftrightarrow f(1) - f(-2) = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 2a + C\right) - (4a - 6a - 4a + C) = 9 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Khi đó ta suy ra: $f(x) = \frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{8}{3}x + C$, ta có bảng biến thiên trên đoạn $[-3;2]$ như sau:

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$1+C$	$\searrow$	$-8+C$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{8}{3}+C$

Với $M = \frac{8}{3} + C, m = -8 + C$ ta suy ra $M - m = \left(\frac{8}{3} + C\right) - (-8 + C) = \frac{32}{3}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình là: $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}, d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$. Lập phương trình đường thẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho độ dài AB đạt giá trị nhỏ nhất ?

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$ **C.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ **D.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$

Lời giải

Đầu tiên ta có: $\begin{cases} A = d \cap d_1 \\ B = d \cap d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1+a;-2+2a;a) \\ B(2+2b;1+b;1+b) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3+2b-a;3+b-2a;1+b-a)$ (1)

Mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-2)$ cùng với $AB \parallel (P)$ nên ta có:

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (3+2b-a) + (3+b-2a) - 2(1+b-a) = 0 \Leftrightarrow a = b+4$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $AB^2 = (3+2b-a)^2 + (3+b-2a)^2 + (1+b-a)^2 = 2b^2 + 8b + 35 = 2(b+2)^2 + 27 \geq 27$

Khi đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3;-3;-3) = k(1;1;1)$

Như vậy phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng lần lượt có phương trình là: $d_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}, d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ **C.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$

Lời giải

Đầu tiên, ta gọi $B = d \cap d_2$ tức $B \in d_2$, khi đó ta có: $B(2+t;-1-t;1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1+t;-t;t-2)$ khi đó $\overrightarrow{AB}$ chính là vector chỉ phương của đường thẳng d. Mà $d \perp d_1$ với vector chỉ phương d_1 là $\vec{u} = (1;4;-2)$ nên suy ra: $1.(1+t) - 4t - 2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-1;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Biết rằng có đúng một số phức z thỏa mãn $|z-2i|=|\overline{z}+2+4i|$ và $\frac{z-i}{\overline{z}+i}$ là số thuần ảo. Tính tổng phần thực và phần ảo của z

A. 4 **B.** -4 **C.** -1 **D.** 1

Lời giải

Đặt $z=a+bi,(a,b\in R)$. Khi đó ta có:

$|z-2i|=|\overline{z}+2+4i| \Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(b-4)^2 \Leftrightarrow b=a+4$ (1)

$\frac{z-i}{\overline{z}+i}=\frac{(a+(b-1)i)(a+(b-1)i)}{a^2+(b-1)^2}=\frac{a^2-(b-1)^2+2a(b-1)i}{a^2+(b-1)^2}$ là số thuần ảo, khi đó $a^2-(b-1)^2=1$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có: $a^2=(a+3)^2 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$. Vậy tổng cần tìm là $a+b=2a+4=-1$. **Chọn đáp án D.**

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và thỏa mãn $f(x^3+3x)=x^2+2$ với mọi số thực x. Từ đó hãy tính $\int_0^4 x^2 f'(x)dx$

A. $\frac{27}{4}$ **B.** $\frac{219}{18}$ **C.** $\frac{357}{4}$ **D.** $\frac{27}{8}$

Lời giải

Đầu tiên, ta thế $x=1$ vào phương trình $f(x^3+3x)=x^2+2$ thu được $f(4)=3$

Ta gọi tích phân cần tìm là $I=\int_0^4 x^2 f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2xdx \\ v=f(x) \end{cases}$

Suy ra: $I=\int_0^4 x^2 f'(x)dx=16f(4)-\int_0^4 2xf(x)dx=48-\int_0^4 2xf(x)dx$

Đặt $\begin{cases} x=t^3+3t \Rightarrow dx=(3t^2+3)dt \\ t:0\to 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^4 2xf(x)dx=\int_0^1 2(3t^2+3)(t^3+3t)f(t^3+3t)dt$

$=\int_0^1 2(3t^2+3)(t^3+3t)(t^2+2)dt=\frac{165}{4}$. Vậy $I=48-\frac{165}{4}=\frac{27}{4}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm thực.

$$\left(a^{\log x}+1\right)^{\log a}+a^{\log x}=2x-2$$

A. 8 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 9

Lời giải

Điều kiện ban đầu: $x>0$ của phương trình $\left(a^{\log x}+1\right)^{\log a}+a^{\log x}=2x-2$ (1)

Đầu tiên ta xét hai trường hợp cơ bản nhất như sau:

-Trường hợp 1: Nếu $a=1$ thì (1) trở thành: $2=2x-2 \Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

-Trường hợp 2: Nếu $a>1$ thì ta luôn có: $\log a>0$. Khi đó ta đặt $t=\log a>0 \Rightarrow a=10^t$

Phương trình (1) trở thành: $\left(\left(10^t\right)^{\log x}+1\right)^t+\left(10^t\right)^{\log x}=2x-2 \Leftrightarrow \left(x^t+1\right)^t+x^t=2x-2$ (2)

Đặt $y=x^t+1 \Rightarrow \begin{cases} x^t=y-1>0 \\ y>1 \end{cases}$. Khi ấy phương trình (2) trở thành: $\Leftarrow y^t+y-1=2x-2$

Từ đó ta có hệ sau: $\begin{cases} x^t = y-1 \\ y^t = 2x-y-1 \end{cases}$. Trừ hai phương trình theo vế ta thu được phương trình mới tương ứng là: $x^t - y^t = 2y - 2x \Leftrightarrow x^t + 2x = y^t + 2y$ (3)

-Nếu $x > y > 0$ thì ta luôn có $VT(3) > VP(3)$. Tương tự nếu $y > x > 0$ thì ta luôn có $VP(3) > VT(3)$

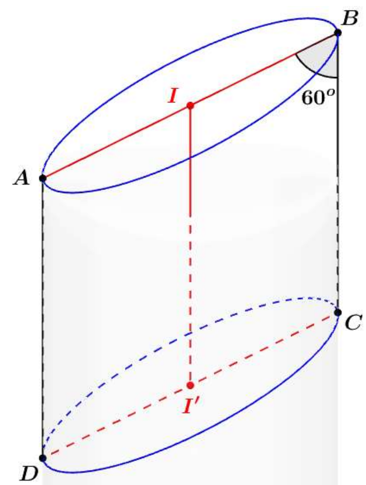
Như vậy, để dấu bằng phương trình (3) xảy ra thì ta phải có: $\begin{cases} x = y \\ y = x^t + 1 \end{cases} \Rightarrow x^t = x-1 \Rightarrow t = \dfrac{\log(x-1)}{\log(x)}$

Do $x > 2 \Rightarrow 0 < \log(x-1) < \log x$ nên ta suy ra: $\log a = t = \dfrac{\log(x-1)}{\log(x)} < 1 \Leftrightarrow a < 10 \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}^+} a \in [2;9]$

Vậy có tất cả 9 giá trị nguyên dương a thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ CÂU LẠC BỘ TOÁN LIM ++

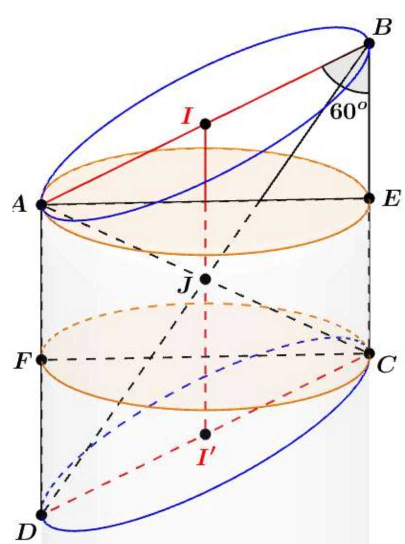
Câu 42. Tính thể tích của hình trụ bị cắt bởi hai mặt phẳng song song (hình vẽ) dưới đây. Biết rằng $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 4 và $\widehat{ABC} = 60^\circ$



A. 12π **B.** 16π **C.** 8π **D.** 6π

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Ta kẻ $AE \perp BC, CF \perp AD$. Khi đó ta gọi V_1 là thể tích giới hạn bởi đường tròn đường kính AE, elip trục lớn AB và đường cao BE, V_2 là thể tích giới hạn bởi đường tròn đường kính CF, elip trục lớn CD và đường cao , và V là thể tích khối trụ có đường tròn đáy đường kính AE và đường sinh AF.

$AE = CF = AB\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}; AF = CE = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB}{2} = 2$ (do ΔABC đều).

Nhận thấy rằng $\begin{cases} V_1+V_2=V \\ V_1=V_2 \end{cases}$ nên suy ra $V_1=V_2=\dfrac{V}{2}$, lúc này thể tích của khối tròn xoay cần tìm là:

$V_{ct}=V+V_1+V_2=2V=2\pi AF.\left(\dfrac{CF}{2}\right)^2=2.2\pi.3=12\pi$. **Chọn đáp án A**

Câu 43. Xét trên tập số phức phương trình: $z^2-2mz-m^2+2m+4=0$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $z_1;z_2$ sao cho $|z_1|^2+|z_2|^2=10$?

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

Lời giải

Ta có $\Delta'=2m^2-2m-4$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'\neq 0 \Leftrightarrow m\neq\{-1;2\}$. Nên để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=10$ Khi đó ta có:

$\begin{cases} (z_1-z_2)^2=(z_1+z_2)^2-4z_1z_2=8(m^2-m-2) \\ 20=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4m^2+8|m^2-m-2| \Leftrightarrow m^2+2|m^2-m-2|=5 \end{cases}$. Từ đó ta suy ra:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ 3m^2-2m-4=5 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2-m-2<0 \\ -m^2+2m+4=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1\pm2\sqrt{7}}{3} \\ m=1 \end{array}\right. \Rightarrow S=\left\{\dfrac{1-2\sqrt{7}}{3};1;\dfrac{1+2\sqrt{7}}{3}\right\}$$

Vậy có duy nhất 3 giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án C.**

Câu 44. Có 6 vị khách tham gia bữa tiệc trong đó có Phượng và Hòa, cần phải sắp xếp họ ngồi quanh một bàn tròn có 6 ghế **phân biệt**. Có bao nhiêu cách xếp để Phượng và Hòa không ngồi cạnh nhau ?

A. 600　　**B.** 280　　**C.** 576　　**D.** 432

Lời giải

Số cách để xếp 6 người (trong đó có Phượng và Hòa) vào 1 bàn tròn ghế bất kì là: $6!$ (cách) (do 6 ghế đã phân biệt nên cách xếp xem như tương tự với xếp 1 hàng ngang).
Ta sẽ giải phần bù tức tìm số cách xếp để Phượng và Hòa ngồi cạnh nhau
Coi Phượng và Hòa là một phần tử ngồi cạnh nhau, 2 bạn tự hoán đổi nhau trong lúc xếp nên có 2! cách, như vậy có tất cả 6 cách để xếp phần tử này vào 6 ghế cố định.
Còn 4 vị trí còn lại cho 4 người, có tất cả 4! cách.
Suy ra số cách xếp để Phượng và Hòa ngồi cạnh nhau là $2.6.4!$ cách
Suy ra số cách xếp cần tìm là $6!-2.6.4!=432$ cách. **Chọn đáp án D.**

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b\in(-12;12)$ để bất phương trình $a\left[1+xe^{x-1}(1-\ln x)\right]+be^{x-b-1}\leq 0$ có nghiệm

A. 1210　　**B.** 890　　**C.** 1211　　**D.** 891

Lời giải

Ta có bất phương trình tương đương với:

$a\left[1+xe^{x-1}(1-\ln x)\right]+be^{x-b-1}\leq 0 \Leftrightarrow a\left[\dfrac{1+xe^{x-1}(1-\ln x)}{e^{x-1}}\right]+\dfrac{be^{x-b-1}}{e^{x-1}}\leq 0 \Leftrightarrow a\left[e^{1-x}+x(1-\ln x)\right]+be^{-b}\leq 0$ (1)

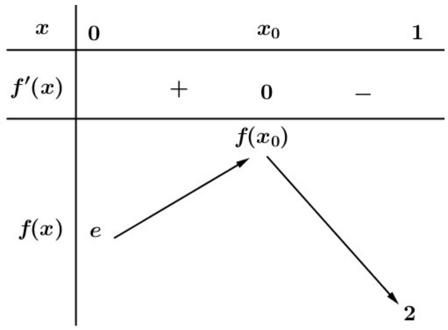
Tiếp theo ta xét hàm số: $y=f(x)=e^{1-x}+x(1-\ln x)$ có $f'(x)=-e^{1-x}-\ln x$; $f''(x)=e^{1-x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x}$

Ta nhận thấy với $\forall x>0$ thì $e^{x-1}\geq x$ nên suy ra $\dfrac{1}{e^{x-1}}<\dfrac{1}{x}$ tức $f''(x)=e^{1-x}-\dfrac{1}{x}<0,\forall x>0$

Khi đó suy ra $f(x)$ là hàm lõm và $f'(x)=0$ có nhiều nhất một cực trị trên $(0;1)$

Khi đó ta suy ra $x = x_0 \approx 0.08$ với $f(x_0) \approx 2,79$. Với $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(e^{1-x} + x(1-\ln x)\right) = e$; $\lim\limits_{x \to 1^-}\left(e^{1-x} + x(1-\ln x)\right) = 2$

Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



Từ bảng biến thiên trên, với $\min\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = 2$ ta suy ra (1) $\Leftrightarrow 2a + be^{-b} \le 0 \Leftrightarrow 2a \le -be^{-b}$

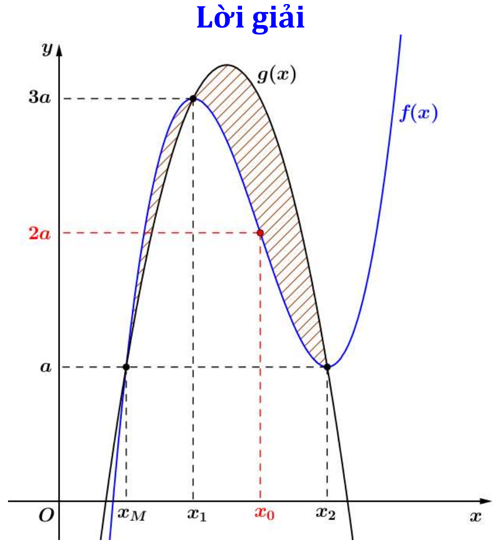
Như vậy với $b < 0$ thì hàm số $y = g(b) = -be^{-b}$ luôn đồng biến, tức $2a$ có nghĩa, mà theo đề bài ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b \in (-12;12)$ nên suy ra $b \in (-12;-6]$ kéo theo $h(-6) \le 0$ với $h(x) = 2a + be^{-b}$, tương đương $2a - 6e^6 \le 0 \Leftrightarrow a \le 3e^6 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}^+} 1 \le a \le 1210$

Vậy có tất cả 1210 số nguyên dương a thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn đáp án A.**

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$ và đồ thị $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $M(x_1 - 1; f(x_2))$. Gọi $y = g(x)$ là hàm bậc 2 có đồ thị đi qua 2 điểm cực trị của $f(x)$ và đi qua M. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $f(x), g(x)$

A. $\dfrac{19}{4}$ **B.** $\dfrac{25}{6}$ **C.** $\dfrac{37}{12}$ **D.** $\dfrac{23}{4}$

Lời giải



Gọi x_0 là hoành độ trung điểm giữa hai hoành độ x_1, x_2 tức hoành độ điểm uốn của đồ thị . $y = f(x)$.

Đầu tiên, ta dễ dàng nhận ra x_M, x_1, x_2 và x_1, x_0, x_2 lần lượt là các cấp số cộng có công sai lần lượt là 1 và $\dfrac{1}{2}$

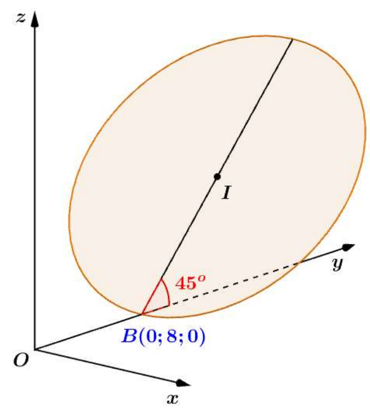
Khi đó ta xem như $x_M = x_1 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2, x_0 = 3, x_2 = 4$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $f(x), g(x)$ không thay đổi. Từ đó ta có hệ sau: $\begin{cases} f''(3) = 18 + 2b = 0 \\ f'(2) = 12 + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + d$ (1)

Ta lại có: $f(2) - 3f(1) = 0 \Leftrightarrow 20 + d = 3(d + 16) \Leftrightarrow d = -14$. Như vậy ta suy ra $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$. Tiếp theo, ta đặt: $g(x) = ax^2 + dx + e$ $(a \ne 0)$, khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} g(1) = a + d + e = 3 \\ g(2) = 4a + 2d + e = 9 \\ g(4) = 16a + 4d + e = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 10 \\ c = -6 \end{cases} \Rightarrow g(x) = -2x^2 + 10x - 6 \text{. (2)}$$

Từ (1) và (2), ta suy ra diện tích cần tìm là: $S = \int_1^4 \left| f(x) - g(x) \right| dx = \frac{37}{12}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 47. Tính thể tích vật thể khi quay hình tròn (I), đường kính $AB = 2R = 8$ quanh trục Oz. Biết hình tròn tiếp xúc với Oy tại $B(0;8;0)$, mặt (Oyz) chứa tâm I vuông góc với mặt phẳng chứa hình tròn. Hình tròn nghiêng 1 góc 45° so với đáy (Oxy) (xem hình vẽ).



A. $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{160\pi\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{128\pi\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

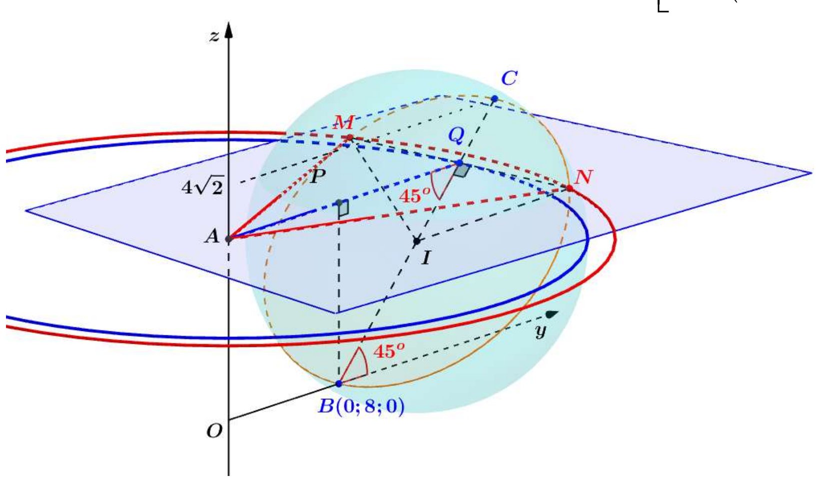
Đầu tiên ta có hình vẽ như sau: (Xét mặt phẳng cắt hình tròn (I) và vuông góc với trục Oz)

Do hình tròn nghiêng 1 góc 45° so với đáy (Oxy) nên dễ dàng tính được tâm $I\left(0;8+2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$

Đặt $OA = PB = z$, khi đó $IQ = BQ - IB = PB\sqrt{2} - IB = z\sqrt{2} - 4$.

Suy ra: $QN = \sqrt{IN^2 - IQ^2} = \sqrt{16 - \left(z\sqrt{2} - 4\right)^2}$. Do dùng mặt cắt vuông góc với Oz và hình tròn ta thu được chính là đoạn MN ta suy ra thiết diện mặt cắt của khối tròn xoay chính là hình vành khăn tâm A.

Tức ta có diện tích thiết diện cần tìm là: $S = \pi\left(AN^2 - AQ^2\right) = \pi QN^2 = \pi\left[16 - \left(z\sqrt{2} - 4\right)^2\right] = \pi\left(8\sqrt{2}z - 2z^2\right)$.



Từ đó ta suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm với thiết diện S chạy từ cao độ 0 đến $4\sqrt{2}$ là:

$V = \int_0^{4\sqrt{2}} S_0 dx = \int_0^{4\sqrt{2}} \pi\left(8\sqrt{2}z - 2z^2\right) dx = \frac{128\pi\sqrt{2}}{3}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A\left(-\sqrt{2};0;0\right), B\left(\sqrt{2};0;0\right), C\left(4;1;-2\right)$ và $D\left(1;-2;4\right)$. Điểm M thay đổi thỏa mãn $MA+MB=2\sqrt{3}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2MC^2+MD^2$ thuộc khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(-\infty;40\right)$ **B.** $\left(40;41\right)$ **C.** $\left(41;42\right)$ **D.** $\left(42;+\infty\right)$

Lời giải

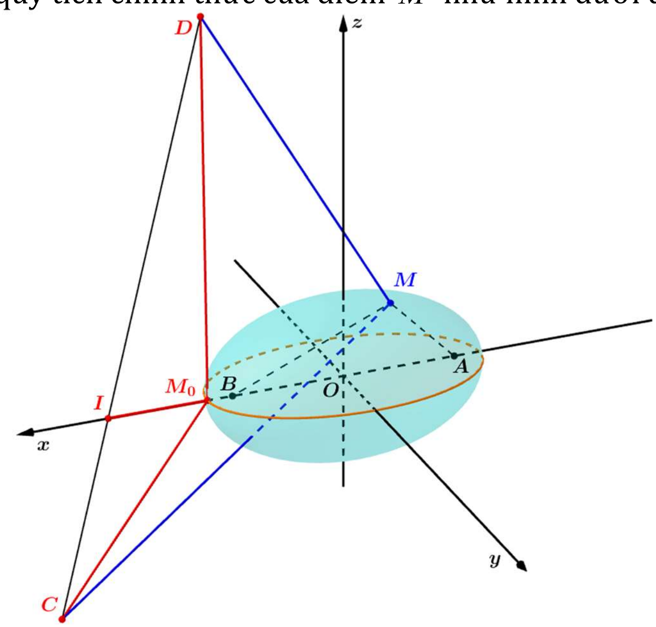
Cách 1: Phương pháp hình học

Gọi tọa độ điểm M là $M\left(x;y;z\right)$, khi đó ta có:

Xét riêng trên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ ta nhận thấy quỹ tích điểm M để thỏa đẳng thức $MA+MB=2\sqrt{3}$ là một elip chính tắc có tiêu cự là $AB=2c=2\sqrt{2}$ và độ dài trục lớn là $2a=2\sqrt{3}$, từ đó suy ra hệ số $b=1$, tức phương trình elip là: $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ (1).

Tương tự xét riêng trên mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ ta cũng thu được phương trình: $\dfrac{x^2}{3}+z^2=1$ (2).

Từ (1) và (2) ta sẽ thu được quỹ tích chính thức của điểm M như hình dưới đây.



Gọi I là điểm thỏa $2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ từ đó suy ra $I=\dfrac{2C+D}{3}=\left(3;0;0\right)$ (tâm tỉ cự)

Như vậy biểu thức T min khi MI min, mà $I\in Ox$ nên ta suy ra giá trị nhỏ nhất của MI là:

$MI_{\min}=OM_0-\dfrac{2a}{2}=3-\sqrt{3}$ với $M\equiv M_0\left(\sqrt{3};0;0\right)$.

Vậy ta suy ra $T_{\min}=\left(2MC^2+MD^2\right)_{\min}\approx 40.7\in\left(40;41\right)$. **Chọn đáp án B.**

Cách 2: Phương pháp đại số

Ta có:

$$12=\left(MA+MB\right)^2=MA^2+2MA.MB+MB^2=2\left(MA^2+MB^2\right)-\left(MA-MB\right)^2=2\left(MA^2+MB^2\right)-\frac{\left(MA^2-MB^2\right)^2}{\left(MA+MB\right)^2}$$

Tiếp theo ta đặt $M\left(x;y;z\right)$, khi đó ta có: $\begin{cases} MA^2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2+z^2 \\ MB^2=\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2+z^2 \end{cases}$. Từ đó ta suy ra:

$MA^2+MB^2=2\left(x^2+y^2+z^2+2\right); MB^2-MA^2=4\sqrt{2}x$. Thế vào phương trình trên ta suy ra được:

$12 = 4\left(x^2+y^2+z^2+2\right)-\dfrac{32x^2}{12} \Leftrightarrow 3 = x^2+y^2+z^2+2-\dfrac{2}{3}x^2 \Leftrightarrow x^2+3y^2+3z^2=3$.

Như vậy điểm $M(x;y;z)$ dao động trên đường cong khép kín $(T): x^2+3y^2+3z^2=3 \Rightarrow y^2+z^2=1-\dfrac{x^2}{3}$

$T = 2MC^2+MD^2 = 2\left((x-4)^2+(y-1)^2+(z+2)^2\right)+(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2$

$= 3\left(x^2+y^2+z^2\right)-18x+63 = 3\left(x^2+1-\dfrac{x^2}{3}\right)-18x+63 = 2x^2-18x+66$

Mà $x^2+3y^2+3z^2=3$ nên suy ra $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Xét hàm số $y=f(x)=2x^2-18x+66$ trên $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

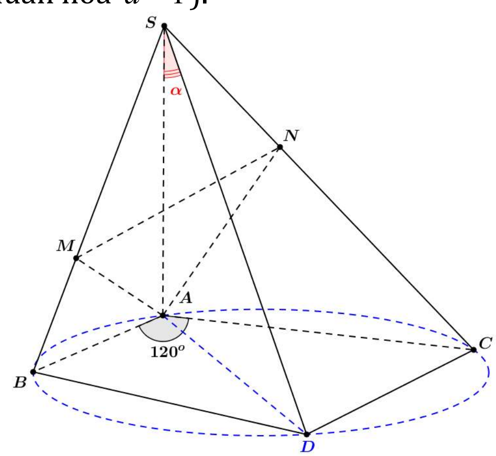
Do $f'(x)=4x-18<0, \forall x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ nên $T\ge f\left(\sqrt{3}\right)=72-18\sqrt{3}\approx 40,82\in(40;41)$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, các cạnh $AB=a, AC=2a$ và góc $\widehat{BAC}=120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên các cạnh SB, SC. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) sao cho $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) ?

A. $\sqrt{\dfrac{7}{13}}$ **B.** $\sqrt{\dfrac{3}{13}}$ **C.** $\sqrt{\dfrac{10}{13}}$ **D.** $\sqrt{\dfrac{6}{13}}$

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau: (chuẩn hóa $a=1$).



Dựng đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó ta có: $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^\circ$.

Mà $SA\perp(ABC)$ nên suy ra $\begin{cases} BD\perp(SAB) \\ CD\perp(SAC)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM\perp BD \\ AN\perp CD\end{cases}$ mà $\begin{cases} AM\perp SB \\ AN\perp SC\end{cases}$ nên $\begin{cases} AM\perp(SBD) \\ AN\perp(SCD)\end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} SD\perp(AMN) \\ SA\perp(ABC)\end{cases}$ tức $\widehat{((AMN);(ABC))}=\widehat{(SD;SA)}=\widehat{ASD}=\alpha$, suy ra: $\tan\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{AD}{SA}$ (1).

Mà : $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC\cos120^\circ}=\sqrt{7}; AD=2R=\dfrac{BC}{\sin120^\circ}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ nên $SA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AD=\sqrt{7}$.

Khi đó ta có: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}SA.AB.AC.\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{21}}{6}; S_{SAB}=\dfrac{1}{2}SA.AB=\dfrac{\sqrt{7}}{2}; SB=2\sqrt{2}; SC=\sqrt{11}$.

Suy ra: $\begin{cases} S_{\Delta SBC}=\sqrt{13}; \varphi=\widehat{((SAB);(SBC))} \\ V_{SABC}=\dfrac{2\sin\varphi S_{\Delta SAB}.S_{\Delta SBC}}{3SB}=\dfrac{\sqrt{21}}{6}\end{cases} \Rightarrow \sin\varphi=\sqrt{\dfrac{6}{13}} \Rightarrow \cos\varphi=\sqrt{\dfrac{7}{13}}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Cho số phức z thỏa mãn tồn tại các số phức w_1, w_2 sao cho $\left(w_1-\overline{w_1}\right)\left(w_2+\overline{w_2}\right)=0$ trong đó ta có $w_1=\dfrac{z}{z^2+4}; w_2=\dfrac{z}{z^2-16}$. Ngoài ra $|z-4-4i|=m$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m sao cho tồn tại đúng 5 số phức z như vậy ?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** Vô số.

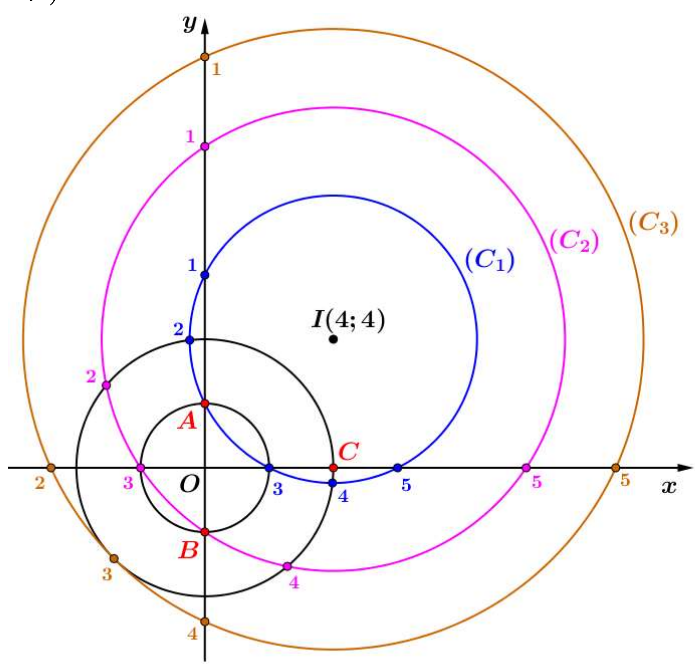
Lời giải

Đầu tiên ta có điều kiện ban đầu là: $\begin{cases} z^2+4\neq 0 \\ z^2-16\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq 4 \\ z\neq \pm 2i \end{cases}$. Tiếp theo ta có:

$\left(w_1-\overline{w_1}\right)\left(w_2+\overline{w_2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w_1=\overline{w_1} \\ w_2=-\overline{w_2} \end{array}\right.$ như vậy ta suy ra: với $z=a+bi, (\forall a,b\in R)$ ta có hệ sau:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{z^2+4}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}^2+4} \\ \dfrac{z}{z^2-16}=-\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}^2-16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z}^2.z+4z=\overline{z}.z^2+4\overline{z} \\ \overline{z}^2.z-16z=-\overline{z}.z^2+16\overline{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(|z|^2-4\right)\left(\overline{z}-z\right)=0 \\ \left(|z|^2-16\right)\left(\overline{z}+z\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a^2+b^2=4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a^2+b^2=16 \end{array}\right. \end{cases}$$

Chuyển về hệ trục tọa độ (Oxy) ta có được hình vẽ như sau:



Do $\begin{cases} z\neq 4 \\ z\neq \pm 2i \end{cases}$ nên ta loại các điểm A, B, C đi (như hình vẽ).

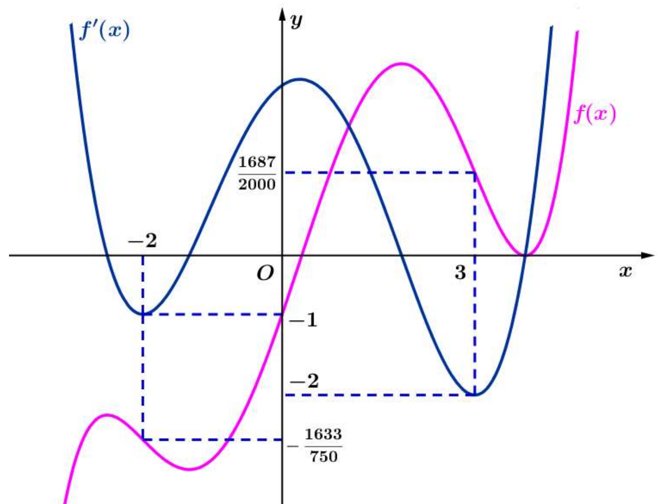
Phương trình $|z-4-4i|=m$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(4;4)$ có bán kính $R=m$

Với đúng 5 số phức z thỏa mãn ta nhận thấy qua hình vẽ đường tròn (C) qua tiếp xúc ngoài với đường tròn $x^2+y^2=16$, đi qua $(0;2)$ và đi qua $(0;-2)$.

Với ba đường tròn thỏa mãn ta suy ra có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

ĐỀ THI THỬ CHUYÊN BIÊN HÒA – HÀ NAM

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức và có đồ thị $f(x),f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số dưới đây trên đoạn $[-2;3]$ không vượt quá 4044: $g(x)=f(x)+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+(3+m^2)\frac{x^3}{3}-(m+1)x^2+4x+2022$.



A. 32 **B.** 30 **C.** 31 **D.** 29.

Lời giải

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x^4-2x^3+(3+m^2)x^2-2(m+1)x+4$

$=[f'(x)+2]+(x^2-x)^2+(mx-1)^2+x^2+(x-1)^2$. Nhận thấy khi tịnh tiến thêm 2 đơn vị theo chiều dương Oy của đồ thị $f'(x)$ thì đồ thị $f'(x)+2$ luôn dương trên đoạn $[-2;3]$

Mà $(x^2-x)^2+(mx-1)^2+x^2+(x-1)^2\ge 0,\forall x\in[-2;3]$ nên suy ra $g'(x)>0,\forall x\in[-2;3]$ tức hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên đoạn $[-2;3]$

Khi đó ta có được $\max\limits_{[-2;3]} g(x)=g(3)=f(3)+\frac{20601}{10}+9m^2-9m=\frac{1687}{200}+\frac{20601}{10}+9m^2-9m\le 4044$

Suy ra: $-14.32\le m\le 15.32\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in[-14;15]$ tức có 30 giá trị nguyên m thỏa. **Chọn đáp án B.**

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1},d_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$. Tìm phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt $.d_1,d_2$. lần lượt tại A và B sao cho $AB=\sqrt{29}$ và điểm A có hoành độ dương.

A. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{-3}$ **B.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-3}{3}$ **C.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+2}{-3}$ **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{3}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có A,B lần lượt là các điểm thuộc d_1,d_2 nên ta suy ra: $\begin{cases}A(-1+a;-2+2a;a)\\B(2+2b;1+b;1+b)\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-a+2b+3;-2a+b+3;1-a+b)$ mà $d\parallel(P)$ nên ta suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$ với $\vec{n}=(1;1;-2)$ là vector pháp tuyến của (P). Khi đó: $(-a+2b+3)+(-2a+b+3)-2(1-a+b)=0\Leftrightarrow -a+b=-4\Rightarrow b=a-4$ (1).

Ta có: $AB^2=(-a+2b+3)^2+(-2a+b+3)^2+(1-a+b)^2=(a-5)^2+(a+1)^2+9=29$ thế từ (1).

Giải phương trình suy ra $\left[\begin{array}{l}a=1\\a=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(0;0;1)\\A(2;4;3)\end{array}\right.\xrightarrow{x_A>0}\begin{cases}A(2;4;3)\\B(0;0;0)\end{cases}R$ **. Chọn đáp án B.**

Câu 42. Tính tổng các nghiệm nguyên thuộc $\left[-5;10\right]$ của bất phương trình sau đây:

$$2^{x^2+x}\left(3x^2-6x+6\right)\ge 7x^2-29x+34$$

A. 54 **B.** 40 **C.** 55 **D.** 41.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với: $2^{x^2+x-2}\left(12x^2-24x+24\right)\ge\left(7x^2-29x+34\right)$ (1)

Ta nhận thấy: $\left(12x^2-24x+24\right)-\left(7x^2-29x+34\right)=5x^2+5x-10=5\left(x^2+x-2\right)$ nên (1) trở thành:

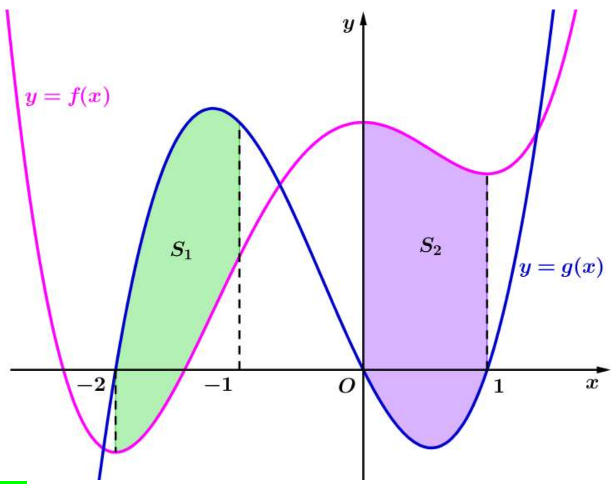
$$\Leftrightarrow 2^{\frac{12x^2-24x+24}{5}}\left(12x^2-24x+24\right)\ge 2^{\frac{7x^2-29x+34}{5}}\left(7x^2-29x+34\right)$$

Xét hàm số $y=f\left(t\right)=t.2^{\frac{t}{5}}$ có $f'\left(t\right)=2^{\frac{t}{5}}+\frac{t}{5}2^{\frac{t}{5}}\ln 2>0$ với mọi số thực t nên suy ra hàm số $f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên tức $12x^2-24x+24\ge 7x^2-29x+34\Leftrightarrow x^2+x-2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right.$

Mà $x\in\left[-5;10\right]$ nên $x\in\left[-5;-2\right]\cup\left[1;10\right]$. Suy ra tổng nghiệm nguyên của bất phương trình (1) là:

$S=\sum\limits_{k=-5}^{-2}X+\sum\limits_{k=1}^{10}X=41$. **Chọn đáp án D.**

Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+bx+2$ và hàm số $y=g\left(x\right)=cx^3+dx^2-2x$ (với $a,b,c,d\in R$) là các hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S_1,S_2 là diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ, biết $S_1=\frac{97}{60}$. Tính S_2



A. $\frac{143}{60}$ **B.** $\frac{133}{60}$ **C.** $\frac{153}{60}$ **D.** $\frac{163}{60}$.

Lời giải

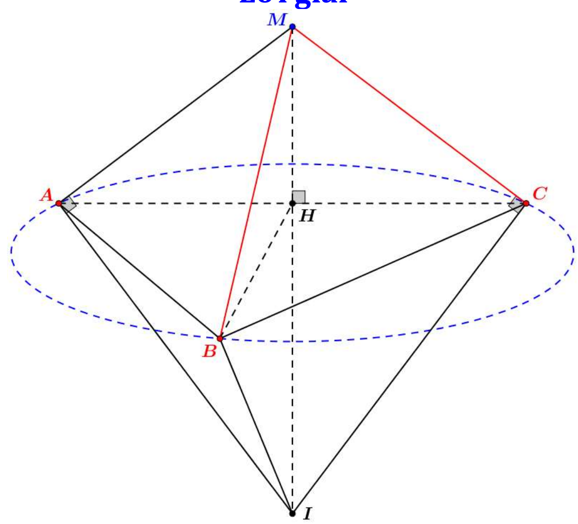
Ta nhận thấy $\begin{cases}g\left(-2\right)=g\left(1\right)=0\\ f'\left(-2\right)=f'\left(1\right)=0\end{cases}$, Giải 2 hệ ta lần lượt ra được: $\begin{cases}f\left(x\right)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+2\\ g\left(x\right)=x^3+x^2-2x\end{cases}$

Suy ra: $S_2=\int\limits_0^1\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x+2\right)dx=\frac{133}{60}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=48$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$. Điểm $M(a;b;c),(a>0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA,MB,MC đến mặt cầu $(S),(A,B,C$ là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^0,\widehat{BMC}=90^0,\widehat{CMA}=120^0$. Tính $Q=a+b-c$.

A. $Q=6-4\sqrt{2}$ **B.** $Q=10+4\sqrt{2}$ **C.** $Q=9+4\sqrt{2}$ **D.** $Q=9-4\sqrt{2}$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=4\sqrt{3}$.

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S).

Đặt $MA=MB=MC=x$ khi đó $AB=x,BC=x\sqrt{2},CA=x\sqrt{3}$ do đó ΔABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H,I,M thẳng hàng.

Vì $\widehat{AMC}=120^0$ nên ΔAIC đều do đó $x\sqrt{3}=R\Leftrightarrow x=AM=4$ suy ra $IM=2AM=2x=8$.

Lại có $M\in d$ nên $M\left(-1+t;2+t;3+\sqrt{2}t\right),(t>1)$.

Mà $IM=8$ nên $t^2+t^2+\left(\sqrt{2}t\right)^2=64\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-4\end{array}\right.\Rightarrow M\left(3;6;3+4\sqrt{2}\right)\Rightarrow a+b-c=6-4\sqrt{2}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Xét hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|(z_1-2-i)\left(2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\left|\left(z_1-\overline{z_1}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)\right|$ và $|z_2+i|=|z_2+1+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng

A. $\sqrt{7}$ **B.** $2\sqrt{6}$ **C.** $\frac{34}{5}$ **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $z_1=a+bi$; $z_2=c+di,\ (a,b,c,d\in R)$. Khi đó ta có:

$$\left|(z_1-2-i)\left(2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\left|\left(z_1-\overline{z_1}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)\right|\Leftrightarrow 2|z_1-2-i|=\left|z_1-\overline{z_1}\right|\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2=b^2\Rightarrow b=\frac{1+(a-2)^2}{2}$$

Tiếp đến ta có: $|z_2+i|=|z_2+1+2i|\Rightarrow c+d+2=0$

Từ đó ta suy ra: $|z_1-z_2|^2=(a-c)^2+(b-d)^2=(a-c)^2+\left(\frac{a^2-4a+5}{2}+c+2\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(a-c+\frac{a^2-4a+5}{2}+c+2\right)^2$

$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a^2-4a+5}{2}+2\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{(a-1)^2}{2}+4\right)^2\geq 8\Rightarrow|z_1-z_2|\geq 2\sqrt{2}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 giá trị nguyên y thỏa mãn $\log_5\left(x^2+y\right)\ge\log_4\left(x+y\right)$?

A. 37 **B.** 38 **C.** 40 **D.** 36.

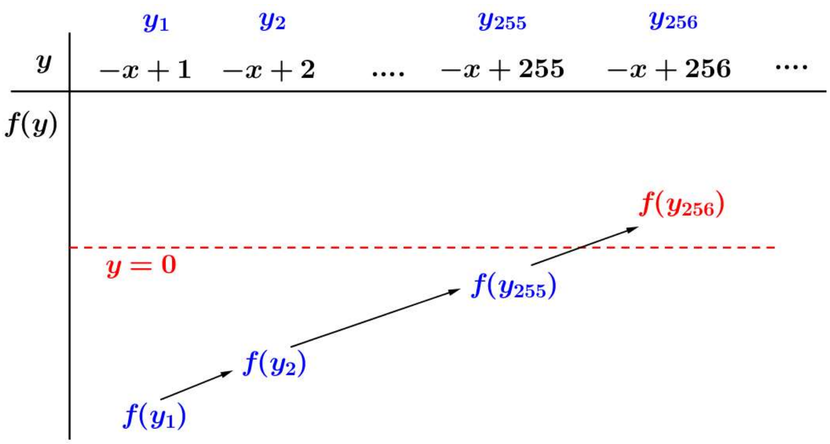
Lời giải

Cách 1:

Ta có $\forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2\ge x$ nên điều kiện: $y>-x$ mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $y\ge -x+1$ tức $(-x+1)$ là nghiệm đầu tiên của tham số y (tức y_1)

Tiếp theo ta có bất phương trình tương đương với: $\log_4\left(x+y\right)-\log_5\left(x^2+y\right)\le 0$

Xét hàm số $f_x\left(y\right)=\log_4\left(x+y\right)-\log_5\left(x^2+y\right)$ có: $f_x'\left(y\right)=\dfrac{1}{\left(x+y\right)\ln 4}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 5}>0$. Từ đó ta suy ra hàm số $f_x\left(y\right)$ luôn đồng biến trên tập xác định. Ta có bảng biến thiên như sau:



Ta có bất phương trình là: $f_x\left(y\right)\le 0$.

Do đề bài cần không qua 255 giá trị nguyên y nên ta chỉ nhận đúng 255 giá trị, tức từ y_1 đến y_{255} để $f_x\left(y\right)\le 0$, suy ra tại giá trị y_{256} phải làm cho $f_x\left(y\right)>0$ tức ta có điều kiện cần và đủ để tồn tại nghiệm thỏa là: $f_x\left(y_{256}\right)=f_x\left(-x+256\right)>0\Leftrightarrow\log_4 256-\log_5\left(x^2-x+256\right)>0$

$\Leftrightarrow\log_5\left(x^2-x+256\right)<\log_4 256\Leftrightarrow x^2-x+\left(256-5^{\log_4 256}\right)<0\Leftrightarrow -18.72\le x\le 19.72$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên ta suy ra $-18\le x\le 19$ tức có $19-\left(-18\right)+1=38$ giá trị nguyên x thỏa mãn**. Chọn đáp án B.**

Cách 2:

Đầu tiên, với $x,y\in\mathbb{Z}$ ta luôn có:

$\log_5\left(x^2+y\right)\ge\log_4\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 5^{\log_4\left(x+y\right)}\Leftrightarrow x^2-x\ge 5^{\log_4\left(x+y\right)}-\left(x+y\right)$ (*)

Đặt $t=x+y$. Xét hàm số $y=f\left(t\right)=5^{\log_4 t}-t$ có $f'\left(t\right)=\dfrac{1}{t\ln 5}5^{\log_4 t}-1>0$ với mọi $t\ge 1$ $\left(t\in\mathbb{Z}^+\right)$

Từ đó ta suy ra bất phương trình (*) tương đương với: $1\le x+y\le f^{-1}\left(x^2-x\right)$

Ta có nhận xét sau: khi giá trị nguyên của y không quá 255 thì giá trị nguyên của $t=x+y$ cũng không quá 255 giá trị, tức $1\le x+y\le f^{-1}\left(x^2-x\right)\le 256\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-x\right)\le 256\Leftrightarrow x^2-x\le f\left(256\right)$

$\Rightarrow x^2-x\le 5^{\log_4 256}-256\Leftrightarrow x^2-x-5^{\log_4 256}+256\le 0\Leftrightarrow -18.72\le x\le 19.72$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên ta suy ra $-18\le x\le 19$ tức có $19-\left(-18\right)+1=38$ giá trị nguyên x thỏa mãn**. Chọn đáp án B.**

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên dương a để phương trình $z^2-(a+3)z+a^2-a=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 sao cho thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1.

Lời giải

Ta chia hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Hai nghiệm là hai số phức z_1 và z_2 có phần ảo khác không

Để phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm phức có phần ảo khác không khi

$$\Delta=(a-3)^2-4(a^2+a)<0\Leftrightarrow -3a^2-10a+9<0\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\frac{-2\sqrt{13}-5}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{13}-5}{3};+\infty\right).$$

Giả sử $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2}$; $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2}$. Ta có $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow |a-3|=\sqrt{|-3a^2-10a+9|}$

$\Leftrightarrow (a-3)^2=|-3a^2-10a+9|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-9\\ a=\pm1\\ a=0\end{array}\right.$ so với điều kiện ta nhận được $a=-9$; $a=1$.

Trường hợp 2: Hai nghiệm là hai số thực z_1 và z_2.

$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow S^2=S^2-4P\Leftrightarrow P=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=-1\end{array}\right.$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy ta suy ra $S_a=\{-9;-1;0;1\}$ tức có 4 giá trị nguyên a thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

ĐỀ THI THỬ SỞ THANH HÓA LẦN 2

Câu 40. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình sau có đúng 5 nghiệm phân biệt: $\left(f^2(x)+x^2\right)^2-(m^2+2m+14)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$

A. 0 **B.** 4043 **C.** 4044 **D.** 1.

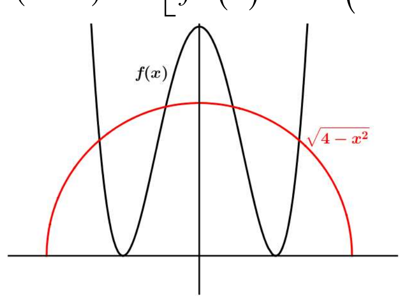
Lời giải

Đầu tiên, từ bảng biến thiên đã cho ta dễ dàng tìm được $f(x)=3x^4-6x^2+3$

Ta có phương trình tương đương với: $\left(f^2(x)+x^2\right)^2-(m^2+2m+14)\left(f^2(x)+x^2\right)+4(m+1)^2+36=0$

Đặt $t=f^2(x)+x^2$ thì khi đó phương trình trở thành: $\Leftrightarrow t^2(t-4)-(m+1)^2(4-t)-9(t-4)=0$

$$\Leftrightarrow (t-4)\left(t-9-(m+1)^2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4\\ t=9+(m+1)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{4-x^2}\\ f^2(x)+x^2-(m^2+2m+10)=0\ \ (*)\end{array}\right.\left(f(x)>0\right)$$



Ta để ý rằng hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là phương trình nửa trên đường tròn có tâm là gốc tọa độ nên từ đó ta nhận thấy $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Do hàm số $y=f^2(x)+x^2-(m^2+2m+10)$ là hàm số chẵn nên có 2 nghiệm, suy ra $m=-1$, thử lại ta thấy phương trình (*) có 3 nghiệm. Mặt khác ta nhận thấy (1) có 4 nghiệm phân biệt nên suy ra (2) phải có duy nhất 1 nghiệm nên ta kết luận không có giá trị m nào thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=e^x+2x+1, \quad \forall x\in R$ và $f(0)=1$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(1)=e$. Tính $F(0)$

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{5}{6}$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** $-\frac{5}{6}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^x+2x+1)dx=e^x+x^2+x+C$ mà $f(0)=1$ nên $C=0$. Suy ra:

$f(x)=e^x+x^2+x\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=e^x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C'$ mà $F(1)=e$ nên $C'=-\frac{5}{6}$ nên ta suy ra:

$F(x)=e^x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}\Rightarrow F(0)=\frac{1}{6}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in R)$ thỏa mãn $\min\limits_R f''(x)=f''\left(\frac{1}{4}\right)$ và hàm số $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$. Biết đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị là $A(m;g(m)),B(0;g(0)),C(1;g(1))$. Gọi $y=h(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua 3 điểm A,C và $D(2;b+5)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=(x^2+1)(h(x)-x-1)$ bằng

A. $\frac{46}{15}$ **B.** $\frac{64}{15}$ **C.** $\frac{56}{15}$ **D.** $\frac{44}{15}$.

Lời giải

Ta có: $y=f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c\Rightarrow\begin{cases}f''(x)=12x^2+6ax+2b\\ f'''(x)=24x+6a\end{cases}$. Mà $\min\limits_R f''(x)=f''\left(\frac{1}{4}\right)$ nên ta suy ra:

$f'''\left(\frac{1}{4}\right)=0\Leftrightarrow 6+6a=0\Leftrightarrow a=-1\Rightarrow\begin{cases}f(x)=x^4-x^3+bx^2+cx+d\\ f'(x)=4x^3-3x^2+2bx+c\end{cases}$

Tiếp đến ta có: $g'(x)=\frac{(x^2+1)f'(x)-2xf(x)}{(x^2+1)^2}=0$. Từ giả thiết đề bài ta suy ra: $\begin{cases}g'(0)=0\\ g'(1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}f'(0)=0\\ f'(1)=f(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ b+d=2b+1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^4-x^3+bx^2+b+1=(x^4-x^3+1)+b(x^2+1)$

Khi đó: $g(x)=\frac{(x^4-x^3+1)+b(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{x^4-x^3+1}{x^2+1}+b$.

Ta nhận thấy ba điểm A,B,C cùng nằm trên đồ thị $y=\frac{f'(x)}{(x^2+1)'}=\frac{4x^3-3x^2+2bx}{2x}=2x^2-\frac{3}{2}x+b$. Mặt khác điểm $D(2;b+5)$ cũng thuộc đồ thị tương ứng nên ta suy ra: đồ thị của hàm số $y=h(x)$ cũng có dạng là: $h(x)=2x^2-\frac{3}{2}x+b$. Suy ra: $y=(x^2+1)(h(x)-x-1)=(x^2+1)\left(2x^2-\frac{3}{2}x+b-x-1\right)=u(x)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $u(x)$ và $f(x)$, ta có:

$$x^4-x^3+b\left(x^2+1\right)+1=\left(x^2+1\right)\left(2x^2-\frac{3}{2}x+b-x-1\right)\Leftrightarrow x^4+\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}x-2=0\Leftrightarrow x=\pm1$$

Suy ra: $S=\int_{-1}^{1}\left|u(x)-f(x)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|x^4+\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}x-2\right|dx=\frac{44}{15}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-2}, d_2:\begin{cases}x=2-t\\y=3+t\\z=4+t\end{cases}$ (t là tham số) và mặt phẳng $(P):x-y+z-6=0$. Đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) và cắt $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại A và B sao cho $AB=3\sqrt{6}$. Phương trình của (d) là

A. $\frac{x-5}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-2}$ **B.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-1}$ **C.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+4}{-2}$ **D.** $\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2}$.

Lời giải

Ta chia hai trường hợp như sau:

Đầu tiên ta có A,B lần lượt là các điểm thuộc d_1,d_2 nên ta suy ra: $\begin{cases}A(1+2a;-2+a;2-2a)\\B(2-b;3+b;4+b)\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1-2a-b;b-a+5;2a+b+2)$ mà $d\parallel(P)$ nên ta suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$ với $\vec{n}=(1;-1;1)$ là vector pháp tuyến của (P). Khi đó: $(1-2a-b)-(b-a+5)+(2a+b+2)=0\Leftrightarrow a-b=2\Rightarrow b=a-2$ (1).

Ta có: $AB^2=(1-2a-b)^2+(b-a+5)^2+(2a+b+2)^2=(3-3a)^2+9+9a^2=54$ thế từ (1).

Giải phương trình suy ra $\left[\begin{array}{l}a=-1;b=-3\\a=2;b=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(-1;-3;4)\\A(0;5;6)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(6;3;-3)=k(2;1;-1)\\\overrightarrow{AB}=(-3;3;6)=k(1;-1;-2)\end{array}\right.$.

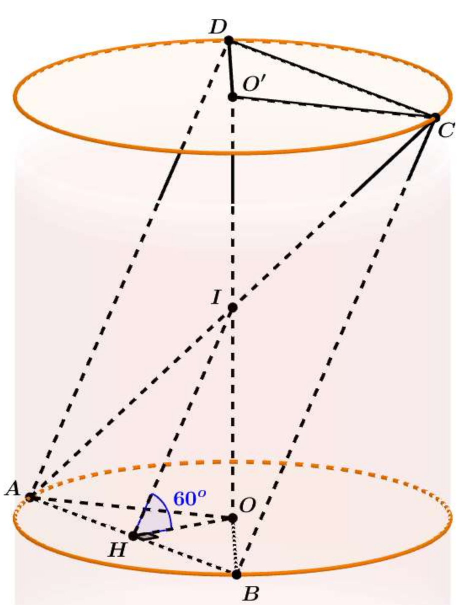
Mà đường thẳng tại phương án B nằm trong (P) nên ta **chọn đáp án D.**

Câu 44. Cho hình trụ O và O' là tâm của hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A,B cùng thuộc đường tròn (O) và C,D cùng thuộc đường tròn (O') sao cho $AB=3\sqrt{3}, BC=6$, đồng thời mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 60°. Thể tích khối trụ bằng

A. $3\sqrt{3}\pi$ **B.** $27\sqrt{3}\pi$ **C.** $9\sqrt{3}\pi$ **D.** 81π.

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Gọi I là trung điểm OO' và kẻ $OH \perp AB$ tại H khi đó ta suy ra $\widehat{IHO} = 60^\circ$. Cùng với $IH = \frac{BC}{2} = 3$, ta suy ra: $\begin{cases} IO = IH\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ OH = IH\cos 60^\circ = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OO' = 2IO = 3\sqrt{3} \\ OA = \sqrt{OH^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3 \end{cases}$. Như vậy, khối trụ có đường sinh $OO' = 3\sqrt{3}$ và bán kính đáy $R = 3$ có thể tích là: $V = \pi R^2 h = 27\sqrt{3}\pi$. **Chọn đáp án B.**

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 10 = 0$ và hai điểm $A(1;-1;2), B(2;0;-4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho luôn tồn tại hai mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{6}$ tiếp xúc với mặt phẳng (P), đồng thời tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại M. Gọi $T = [m;n)$ là tập giá trị của biểu thức $25a^2 + b^2 + 2c^2$. Tổng $m + n$ bằng

A. $\frac{12371}{76}$ **B.** 86 **C.** 140 **D.** $\frac{1340}{19}$.

Lời giải

Đầu tiên, ta nhận thấy: A, B đều nằm cùng phía với mặt phẳng (P).

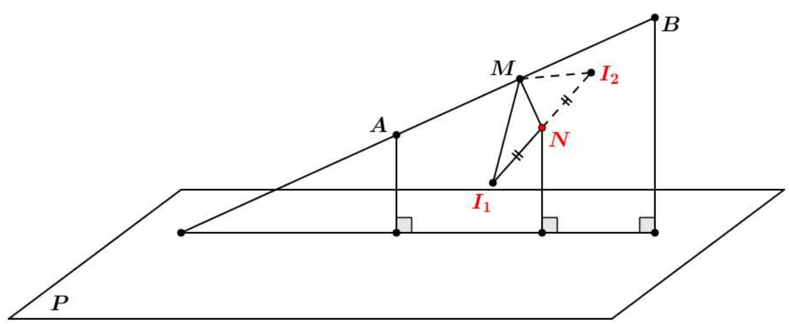
Phương trình (AB) có dạng là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$

Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm của hai mặt cầu cố định đó. Suy ra $I_1I_2 = 2\sqrt{6}$ và MI_1I_2 là tam giác cân tại M

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P), suy ra: $(Q): x - y - 2 = 0$

Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q) và (R), suy ra: $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$

Gọi mặt phẳng $(R): x + y - 2z + 4 = 0$ và N là trung điểm của I_1I_2. Ta có hình vẽ như sau:



Vì N thuộc giao tuyến (Q) và (R) nên tọa độ là: $N(-1+a;-3+a;a)$.

Ta có: $M \in (AB) \Rightarrow M(1+t;-1+t;2-6t)$. Mà M là điểm thuộc đoạn thẳng AB nên $t \in [0;1]$.

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = (a-t-2;a-t-2;a+6t-2)$. Mà MN vuông góc với AB nên ta có:

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_{AB}} = 0 \Leftrightarrow (a-t-2) + (a-t-2) - 6(a+6t-2) = 0 \Leftrightarrow a - 2 = -\frac{19t}{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{21t}{2};-\frac{21t}{2};-\frac{7t}{2}\right)$

Suy ra điều kiện để tồn tại hai mặt cầu cố định thỏa đề bài là: $MN < \sqrt{6} \Leftrightarrow MN^2 < 6$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{21t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{21t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7t}{2}\right)^2 < 6 \Leftrightarrow t^2 < \frac{24}{931}$

Lại có: $T = 25a^2 + b^2 + 2c^2 = 98t^2 + 34$ nên suy ra: $\begin{cases} T = 98t^2 + 34 \geq 34 \\ T = 98t^2 + 34 < 98.\frac{24}{931} + 34 \end{cases} \Rightarrow T \in \left[34;\frac{694}{19}\right)$

Vậy ta suy ra $m + n = 34 + \frac{694}{19} = \frac{1340}{19}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\right)\sqrt{3-\log_5 x}\ge 0$

A. 64 **B.** 9 **C.** 65 **D.** 8.

Lời giải

Đầu tiên ta có điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 3-\log_5 x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le 125$.

Trường hợp 1: $\left(-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\right)\sqrt{3-\log_5 x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=125 \\ \left(-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=125 \\ x=\dfrac{1}{2};x=64 \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $\left(-\log_2^2 x+5\log_2 x+6\right)\sqrt{3-\log_5 x}>0$.

++Trường hợp 2a: $\begin{cases} -\log_2^2 x+5\log_2 x+6>0 \\ \sqrt{3-\log_5 x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}<x<64 \\ x\ne 125 \end{cases}$. So với điều kiện, ta nhận.

++Trường hợp 2b: $\begin{cases} -\log_2^2 x+5\log_2 x+6<0 \\ \sqrt{3-\log_5 x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.So với điều kiện, ta loại.

Vậy, tổng 2 trường hợp ta suy ra: $x\in\left[\dfrac{1}{2};64\right]\cup\{125\}$ tức có 65 giá trị nguyên x thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-3x-2,\ \forall x\in R$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-30;30]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị ?

A. 2 **B.** 16 **C.** 17 **D.** 1.

Lời giải

Ta có $f'(x)=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow x=-1$ (nghiệm kép) hoặc $x=2$ (nghiệm đơn).

Đặt $y=g(x)=f\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)$. Ta có:

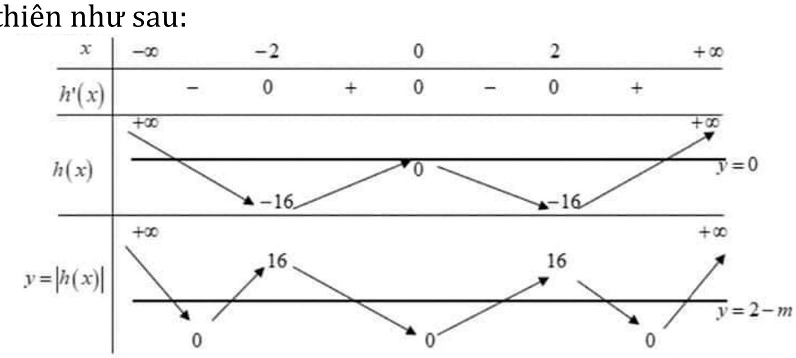
$$g'(x)=\frac{\left(x^4-8x^2\right)\left(4x^3-16x\right)}{\left|x^4-8x^2\right|}f'\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ f'\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)=0 \end{array}\right.$$

Vì hàm số $g(x)$ không xác định tại $x=0,x=\pm\sqrt{2}$ và đổi dấu khi x qua điểm $x=0,x=\pm\sqrt{2}$ nên ta suy ra $g(x)$ đạt cực trị tại $x=0,x=\pm\sqrt{2}$. Suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị là $x=0,x=\pm\sqrt{2},x=\pm 2$

Tiếp đến ta có: $f'\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} \left|x^4-8x^2\right|+m=-1 & (1) \\ \left|x^4-8x^2\right|+m=2 & (2) \end{array}\right.$, các nghiệm của (1) (nếu có) là nghiệm bội chẵn nên không phải là cực trị của hàm số.

Từ (2) ta suy ra: $\left|x^4-8x^2\right|=2-m$. Xét hàm số $y=h(x)=x^4-8x^2$ có $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



Như vậy để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì (2) phải có 2 nghiệm phân biệt $x \notin \{\pm 2; \pm\sqrt{2}; 0\}$ tức ta có được $m+16 \le 2 \Leftrightarrow m \le -14 \xrightarrow{m\in[-30;30]} -30 \le m \le -14$. Như vậy có tất cả 17 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án C.

Câu 48. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2z - m + 2 = 0$ (m là tham số thực). Gọi T là tập hợp các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt được biểu diễn hình học bởi hai điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$, với $C(-1;1)$. Tổng các phần tử trong T bằng

A. 4 **B.** 9 **C.** 8 **D.** -1.

Lời giải

Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình đề cho. Khi đó ta có: $\Delta' = m - 1 \ne 0$. Sau đó ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m-1>0$, tức z_1, z_2 là 2 số thực. Khi đó ta có: $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{m-1}$ tức $A, B \in Ox$

Suy ra: $AB = |z_1 - z_2| = 2\sqrt{m-1} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.d(C;Ox) = \sqrt{m-1} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 9$ (1)

Trường hợp 2: $m-1<0$, tức z_1, z_2 là 2 số phức. Khi đó ta có: $z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{1-m}$ mà $A, B \in (d): x = 1$ nên suy ra: $AB = |z_1 - z_2| = 2\sqrt{1-m} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.d(C;Ox) = 2\sqrt{1-m} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -1$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra tổng các phần tử T bằng $9 + (-1) = 8$. **Chọn đáp án C.**

Câu 49. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương với $y \le 20$ thỏa mãn những

$$\log_{2022}\frac{x+1}{y+1} \le y^4 + 2y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$$

A. 380 **B.** 200 **C.** 420 **D.** 210.

Lời giải

Ta có bất phương trình tương đương với: $\Leftrightarrow \log_{2022}\frac{x+1}{y+1} \le y^2(y^2 - x^2) + 2y^2(y-x)$

$$\Leftrightarrow \log_{2022}\frac{x+1}{y+1} \le y^2\big((y+1)-(x+1)\big)\big((y+1)+(x+1)\big) \Leftrightarrow \log_{2022}(x+1) - \log_{2022}(y+1) \le y^2\left((y+1)^2 - (x+1)^2\right) \quad (*)$$

Xét hai trường hợp sau: ($y^2 > 0$ luôn đúng)

- $x+1 > y+1 \Leftrightarrow x > y$ thì $VT(*) > VP(*)$ nên ta loại trường hợp này.

- $x+1 \le y+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le y \\ y \le 20 \end{cases} \Rightarrow x \in \{1; 2; ...; y\}$. Suy ra số cặp $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\sum_{y=1}^{20} y = 210$ (cặp).

Vậy có tất 210 cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đề bài. **Chọn đáp án D.**

Câu 50. Xét các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $M = |z_1 + z_2|$ khi biểu thức $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M = \sqrt{41}$ **B.** $M = 6$ **C.** $M = 2\sqrt{5}$ **D.** $M = 2\sqrt{13}$.

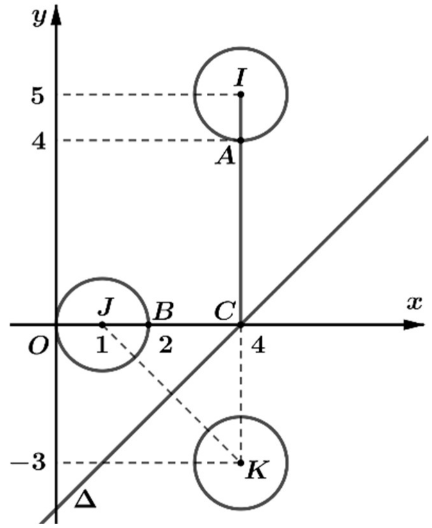
Lời giải

Ta có như sau:

$|z_1 - 4 - 5i| = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm A biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C_1) có tâm $I(4;5)$, bán kính $R_1 = 1$.

$|z_2 - 1| = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm B biểu diễn số phức z_2 là đường tròn (C_2) có tâm $J(1;0)$, bán kính $R_2 = 1$.

Đặt $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$. Ta có $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i| \longrightarrow a^2 + (-b+4)^2 = (a-8)^2 + (b+4)^2 \Leftrightarrow a - b = 4$. Suy ra tập hợp điểm C biểu diễn số phức z nằm trên đường thẳng $\Delta: x - y = 4$.



Khi đó $P=|z-z_1|+|z-z_2|=CA+CB$. Gọi K là điểm đối xứng của J qua đường thẳng Δ, khi đó ta tìm được $K(4;-3)\longrightarrow$ phương trình đường thẳng $IK:x=4$. Do đó $P_{\min}$ khi và chỉ khi $C=IK\cap\Delta$ và $\begin{cases}A=CI\cap(C_1) & (A \text{ o giua } CI)\\ B=CJ\cap(C_2) & (B \text{ o giua } CJ)\end{cases}\longrightarrow A(4;4),B(2;0)\longrightarrow M=|z_1+z_2|=2\sqrt{13}$. **Chọn đáp án D.**

ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC HỌC HUẾ LẦN 1

Câu 2. Cho số nguyên dương n và số phức z thỏa mãn $10(1+iz)^n=(6-8i)(z+i)^n$. Chứng minh rằng z là một số thực.

Lời giải

Đặt $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, khi đó phương trình trở thành: $10(1+i(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=(6-8i)(\cos\varphi+i\sin\varphi+i)^n$

Câu 3. Cho hàm số f nhận giá trị dương, có đạo hàm trên R và thỏa mãn

$$f(x)=2022(x^2+4)\left(1+\int_0^x\frac{f(t)}{t^2+4}dt\right),\ \forall x\in R$$

Tính giá trị của $f(1)$

Lời giải

Ta có phương trình tương đương với: $\dfrac{f(x)}{x^2+4}=2022\left(1+\displaystyle\int_0^x\frac{f(t)}{t^2+4}dt\right),\ \forall x\in R$ (1)

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+4}$ thì (1) trở thành: $g(x)=2022\left(1+\displaystyle\int_0^x g(t)dt\right),\ \forall x\in R$ (2)

Thay $x=0$ vào (2) ta dễ dàng có được $g(0)=2022$

Tiếp theo, ta đạo hàm hai vế cho phương trình (2) thu được: $g'(x)=2022g(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)}=2022\Rightarrow\displaystyle\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=2022x\Leftrightarrow \ln|g(x)|=2022x+C$

Thay $x=0$ vào, cùng với $g(0)=2022$ ta thu được $C=\ln|f(0)|=\ln 2022$

Suy ra: $\ln|g(x)|=2022x+\ln 2022\Rightarrow g(x)=2022e^{2022x}$. Với $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2+4}$ ta suy ra:

$f(x)=2022(x^2+4)e^{2022x}$. Vậy $f(1)=10110e^{2022}$

ĐỀ CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ LẦN 1

Câu 36. Cho hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo và $|z_1-1|=1$. Giá trị lớn nhất của $|z_1-z_2|$ bằng

A. 1. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, khi đó $\overrightarrow{OC}=z_1+z_2$ và $\overrightarrow{BA}=z_1-z_2$

Do $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số ảo nên $OC \perp BA$. Ta cũng có: $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=ki\ \ (k\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow (1-ki)z_1=-(1+ki)z_2$

$\Rightarrow |1-ki||z_1|=|1+ki||z_2| \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$. Suy ra $OACB$ là hình thoi và $|z_1-z_2|=AB$

Trường hợp 1: A và B đối xứng nhau qua trục tung, khi đó $C\in Oy$, suy ra AB đạt max khi A và B nằm trên trục hoành, nhưng loại vì khi đó $\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số thực.

Trường hợp 2: A và B đối xứng nhau qua trục hoành, khi đó $C\in Ox$, suy ra AB đạt max khi tâm đường tròn số phức z_1 là trung điểm AB tức $\max|z_1-z_2|=AB_{\max}=2R=2$. **Chọn đáp án D.**

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=BC=CD=BD=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD, CD. Góc giữa hai đường thẳng MN và AD là

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải

Dễ nhận thấy $\Delta ABC, \Delta BCD$ đều. Gọi E là trung điểm BC thì khi đó

$\begin{cases} AI\perp BC \\ DI\perp BC \end{cases} \Rightarrow BC\perp (AID) \Rightarrow AD\perp BC$. Mà $MN \parallel BC$ (tính chất đường trung bình)

Nên $MN\perp AD$ tức góc giữa hai đường thẳng MN và AD là 90°. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tọa độ đỉnh $S(6;-2;3)$, thể tích $V=18$ và $AB=a\,(a<7)$. Đường thẳng BC có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh SB. Khi đó bán kính của mặt cầu (S) thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(2;3)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(5;6)$.

Lời giải

Gọi E là trung điểm BC khi đó ta dễ dàng có $E(1+t;-1+2t;t)\ \ (t\in\mathbb{R})$

Ta có: $\begin{cases} SO\perp BC \\ OE\perp BC \end{cases} \Rightarrow BC\perp (SOE) \Rightarrow SE\perp BC$ tức $\overrightarrow{SE}.\overrightarrow{u_{BC}}=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow E(2;1;1) \Rightarrow SE=\sqrt{29}$.

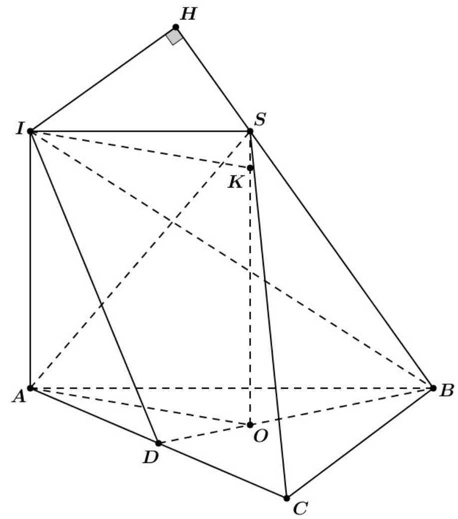
Ta có: $\begin{cases} AB=BC=a\,(a<7) \\ SO=\sqrt{SE^2-OE^2}=\sqrt{29-\dfrac{a^2}{12}} \end{cases} \Rightarrow V=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{29-\dfrac{a^2}{12}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=18 \Leftrightarrow \begin{cases} a=AB=2\sqrt{6} \\ a<7 \end{cases}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu với I là tâm.

Ta có $IA\perp(ABC), BS\perp IH, IA=IH=R$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Tiếp đến gọi K là hình chiếu của I lên SO, khi đó, $IKOA$ là hình chữ nhật

Do $IA = IH = R$ nên $\Delta BHI = \Delta BAI \ (ch - cgv) \Rightarrow BH = BA$



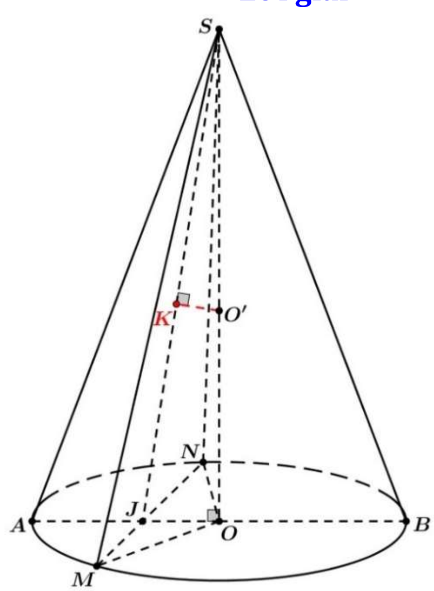
Ta lại có: $\begin{cases} SO = \sqrt{29 - \dfrac{\left(2\sqrt{6}\right)^2}{12}} = 3\sqrt{3}; SK = SO - IA = 3\sqrt{3} - R; HS = \left|BH - BS\right| = \left|BA - BS\right| = \sqrt{35} - 2\sqrt{6} \\ SB = \sqrt{SE^2 + EB^2} = \sqrt{35} \end{cases}$

Vì $IH^2 + HS^2 = IK^2 + SK^2$ nên ta suy ra $R^2 + \left(\sqrt{35} - 2\sqrt{6}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{3} - R\right)^2$. Giải phương trình trên ta suy ra được $R = 3,26.... \in (3;4)$. **Chọn đáp án C.**

Câu 49. Cho hình nón đỉnh S có góc ở đỉnh bằng 60° và có độ dài đường sinh $l = 12cm$. Gọi AB là một đường kính cố định của đáy hình nón, MN là một dây cung thay đổi của đường tròn đáy và luôn vuông góc với AB. Biết rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SMN luôn thuộc một đường tròn (C) cố định. Tính bán kính của đường tròn (C).

A. $6\sqrt{2}cm$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}cm$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}cm$. **D.** $2\sqrt{3}cm$.

Lời giải



Gọi J là giao điểm của AB và MN. Theo đề bài ta có được $MN \perp AB$ tại J.

Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔSAB và O' là điểm cố định.

Lúc này ta có được $O'E = O'F = O'A = O'S$, (do O' nằm trên mặt phẳng trung trực của MN).

Vẽ tiếp $O'K \perp (SMN)$ khi đó ta giả sử E là trung điểm SN (1), thì khi đó $O'E \perp SN$

Mà $O'K \perp SN, SN \subset (SMN)$ nên $SN \perp (KO'E)$, suy ra $KE \perp SN$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SMN với $K \in SJ$.

Do $K \in (SAB)$ và nhìn $O'S$ dưới một góc vuông nên điểm K sẽ di động trên đường tròn đường kính $O'S$.

Tới đây ta có: $\widehat{ASB} = 2\widehat{ASO} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ \Rightarrow SO = SA\cos\widehat{ASO} = 12\cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$.

Khi đó ta suy ra $R_{SAB} = S'O = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{12^2}{2.6\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

Vậy điểm K sẽ di động trên đường tròn (C) bán kính là $R = \dfrac{O'S}{2} = 2\sqrt{3}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 50. Số các giá trị nguyên của $m \in (-2021;2022)$ để $5a^{\sqrt{\log_a b}} - 3b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 2$ với mọi a, $b \in (1;+\infty)$ là

A. 4044. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2022.

Lời giải

Ta đặt $\sqrt{\log_a b} = x > 0$. Khi đó bất phương trình ban đầu trở thành:

$$\Leftrightarrow 5a^{\sqrt{\log_a b}} - 3b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 2 \Leftrightarrow 5a^x - 3\left(a^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} > mx + 2 \Leftrightarrow 5a^x - 3a^x > mx + 2 \Leftrightarrow m < \frac{2a^x - 2}{x} \quad (1)$$

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{2a^x - 2}{x}$ với mọi $x > 0$, ta có $f'(x) = \dfrac{2a^x(x\ln a + 2)}{x^2} > 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ đó ta nhận thấy để (1) có nghĩa thì $m \le \min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = 2\ln a$

Mà do $\ln a > 0,\ \forall a > 1$ nên suy ra $m \le 0 \xrightarrow{m\in(-2021;2022)} m \in (-2021;0]$ tức có tất cả 2021 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án C.**

SỞ BÌNH PHƯỚC LẦN 1

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(2;-1;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến bất kì AM, AN, AP đến (S). Gọi T là điểm thay đổi trên mặt phẳng (MNP) sao cho từ T kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau đến (S) và cả hai tiếp tuyến này đều nằm trong mặt phẳng (MNP) Khoảng cách từ điểm T đến giao điểm của đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ với mặt phẳng (MNP) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{27\sqrt{3}}{16} + \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{16} - \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{8} - \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có mặt cầu (S) tâm $I(0;1;-2)$, bán kính $R = 3$.

Ta có tiếp phương trình mặt cầu (S_1) với tâm là trung điểm IA và bán kính $\dfrac{IA}{2}$ là

$(S_1):(x-1)^2+y^2+z^2=12$ thì khi đó phương trình mặt phẳng (MNP) chính là kết quả của phép trừ vế theo vế của phương trình mặt cầu (S) và (S_1) tức $(MNP):2x-2y+4z+1=0$.

Tiếp đến gọi (C) là đường tròn thiết diện của mặt cầu (S) và mặt phẳng (MNP) và tâm là E.

Khi đó ta có $R^2=MI^2=IE.IA\Rightarrow IE=\dfrac{9}{2\sqrt{6}}\Rightarrow\dfrac{IE}{EA}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow 5\overrightarrow{EI}+3\overrightarrow{EA}=0\Rightarrow E\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Khi đó đường tròn (C) sẽ có tâm $E\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$ và bán kính $r=\sqrt{R^2-IE^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

Tiếp theo, do hai tiếp tuyến qua T và vuông góc với nhau nên đoạn ET luôn bằng $\sqrt{2}$ lần r tức ta có quỹ tích điểm T là đường tròn (C_1) có tâm $E\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$ là bán kính $r_1=r\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

Mặt khác, ta dễ dàng tìm được giao điểm của (Δ) và (MNP) là $F\left(-\dfrac{17}{16};\dfrac{33}{16};\dfrac{13}{16}\right)$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất cần tìm chính là $|EF-r_1|=\dfrac{27\sqrt{3}}{16}-\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính modun của số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{314}$. **B.** $|w|=2\sqrt{309}$. **C.** $|w|=\sqrt{1258}$. **D.** $|w|=3\sqrt{137}$.

Lời giải

Vì $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}\longrightarrow$ tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$. Ta có $P=|(x+2)+yi|^2-|x+(y-1)i|^2=(x+2)^2+y^2-\left[x^2+(y-1)^2\right]=4x+2y+3$

$\longrightarrow 4x+2y+3-P=0$. Ta tìm P sao cho đường thẳng $\Delta:4x+2y+3-P=0$ và đường tròn (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d[I,\Delta]\le R\Leftrightarrow\frac{|12+8+3-P|}{\sqrt{20}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow|23-P|\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33.$$

Suy ra: $w=M+mi=13+33i$ tức $|w|=\sqrt{1258}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-2)^2(x^2-x), x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Lời giải

Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)\Rightarrow g'(x)=(x-6)f'\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ (chỉ tính nghiệm bội lẻ)

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\ \dfrac{1}{2}x^2-6x+m=g_1(x)=0\ \ (1)\\ \dfrac{1}{2}x^2-6x+m=g_2(x)=1\ \ (2)\end{array}\right.$. Như vậy để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì cả phương trình (2) và (3) đều phải có 2 nghiệm và khác 6, tức ta suy ra điều kiện cần có là:

$$\begin{cases}\Delta'_{(1)}>0\\ \Delta'_{(2)}>0\\ g_1(6)\neq 0\\ g_2(6)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-\dfrac{m}{2}>0;9-\dfrac{m-1}{2}>0\\ m-18\neq 0;m-19\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 18;m\neq 19\\ m<18\end{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in[1;17]$$ S là $\sum\limits_{k=1}^{17}X=153$.**Chọn đáp án D.**

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b, có đúng ba giá trị nguyên dương a thỏa mãn $\log_2\dfrac{2^a+a}{ab}+2^a\leq a(b-1)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với: $\log_2\dfrac{2^a+a}{ab}+2^a\leq a(b-1)\Leftrightarrow\log_2(2^a+a)+(2^a+a)\leq\log_2(ab)+(ab)$

Hàm số $y=g(t)=\log_2 t+t$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên suy ra $2^a+a\leq ab$. Do a nguyên dương nên bất phương trình tương đương với: $b\geq\dfrac{2^a+a}{a}$. Xét hàm số $y=f(a)=\dfrac{2^a+a}{a}$ trên $(0;+\infty)$ có

$f'(a)=\dfrac{2^a(a\ln 2-1)}{a^2}=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\ln 2};f''\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)>0$ suy ra $a=\dfrac{1}{\ln 2}\approx 1,44$ là điểm cực tiểu của $f(a)$

Do đề bài yêu cầu có đúng ba giá trị nguyên dương a tức giá trị a lấy từ 1 đến 3

Như vậy điều kiện cần và đủ là $f(2)<b<f(4)\Leftrightarrow 3<b<5\xrightarrow{b\in\mathbb{Z}}b=4$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Trên parabol $(P):y=x^2$ lấy hai điểm $A(-1;1),B(2;4)$. Gọi M là điểm trên cung AB của (P) sao cho diện tích của tam giác AMB lớn nhất. Biết chu vi của tam giác MAB là $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}+c\sqrt{29}$, khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{29}{6}$. **B.** $\dfrac{41}{9}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{3}$.

Lời giải

Trên (P) lấy điểm $M(a;a^2)$ với $a\in(-1;2)$

Ta có đường thẳng AB có phương trình là $x-y+2=0$, phương trình đường thẳng AM có dạng là $y=(a-1)x+a$, phương trình đường thẳng BM có dạng là $y=(a+2)x-2a$

Suy ra ta có: $S_{AMB}=\int\limits_{-1}^{a}\left((x+2)-(a-1)x-a\right)dx+\int\limits_{a}^{2}\left((x+2)-(a+2)x+2a\right)dx$

$$=\int\limits_{-1}^{a}(2-a)(x+1)dx+\int\limits_{a}^{2}(a+1)(2-x)dx=\frac{(2-a)(a^2+2a+1)}{2}+\frac{(a+1)(a^2-4a+4)}{2}$$

$$=\frac{(2-a)(a+1)}{2}\left[(a+1)+(2-a)\right]=\frac{3}{2}(2-a)(a+1)\leq\frac{3}{2}\frac{\left[(a+1)+(2-a)\right]^2}{4}=\frac{27}{8}$$

Vậy $S_{AMB}\max=\dfrac{27}{8}$ khi và chỉ khi $2-a=a+1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$

Suy ra: $MA+MB+AB=3\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\sqrt{5}+\dfrac{3}{4}\sqrt{29}$ tức $a+b+c=3+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$. **Chọn đáp án C.**

THPT KIM LIÊN – HÀ NỘI LẦN 2

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25$ và hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ lần lượt có phương trình $d_1:\begin{cases}x=1+mt\\y=-1\\z=1+t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-1\\z=1-mt\end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của m để (d_1), (d_2) cắt mặt cầu (S) tại 4 điểm phân biệt sao cho bốn điểm đó tạo thành tứ giác có diện tích lớn nhất

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

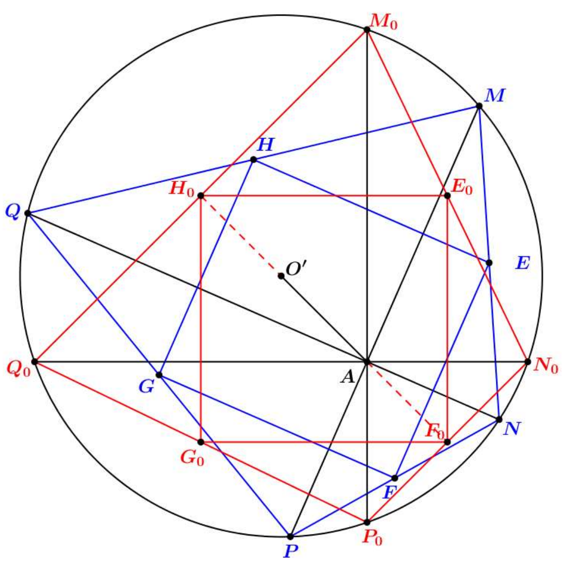
Cách 1:

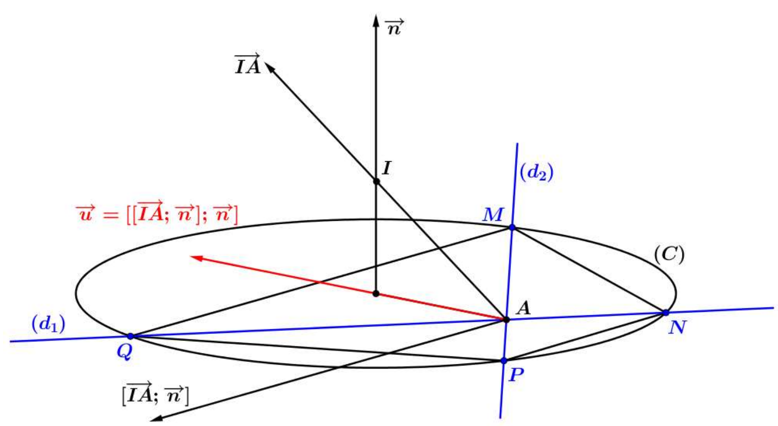
Ta nhận thấy hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ chung điểm $A(1;-1;1)$ và $IA=3<5=R$ với $I(-1;-3;2)$.

Tiếp đến hai vector chỉ phương của $(d_1),(d_2)$ lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(m;0;1),\overrightarrow{u_2}=(1;0;-m)$, nhận thấy $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0$ nên suy ra $(d_1)\perp(d_2)$.

Do $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(0;1+m^2;0)$ nên 2 đường thẳng trên luôn thuộc mặt phẳng $(P): y=-1$ với $\vec{n}=(0;1;0)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng tương ứng.

Gọi M,N,P,Q lần lượt là các giao điểm giữa hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và mặt cầu, từ đó suy ra bốn điểm trên đều nằm trên đường tròn (C) giao tuyến giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu đó.





Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm MN,NP,PQ,QM khi đó ta luôn có $EFGH$ là hình chữ nhật.

Khi diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất thì diện tích tứ giác $EFGH$ lớn nhất tức $EFGH$ là hình vuông.

Dựa vào hình vẽ trên, ta suy ra diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất khi vector $\vec{u}$ chính là vector phân giác giữa hai vector chỉ phương của $(d_1),(d_2)$ tức $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{u_1}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\pm\dfrac{\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$ với $\vec{u}=\left[\left[\overrightarrow{IA};\vec{n}\right];\vec{n}\right]$.

Ta có: $\begin{cases}\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{u_1}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|}\pm\dfrac{\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\left(\dfrac{m\pm1}{\sqrt{m^2+1}};0;\dfrac{\mp m+1}{\sqrt{m^2+1}}\right)\\ \vec{u}=\left[\left[\overrightarrow{IA};\vec{n}\right];\vec{n}\right]=(-2;0;1)\end{cases}$. Suy ra ta có hệ thức sau: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{-2}{m+1}=\dfrac{1}{-m+1}\\ \dfrac{-2}{m-1}=\dfrac{1}{m+1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Vậy chỉ có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: Ta có đánh giá khác như sau: (Gọi R_C là bán kính của đường tròn thiết diện (C))

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}MP.NQ=\frac{1}{2}.2\sqrt{R_C{}^2-d^2(O';MP)}.2\sqrt{R_C{}^2-d^2(O';NQ)}\le 2\left(\frac{2R_C{}^2-d^2(O';MP)-d^2(O';NQ)}{2}\right)$$

$=2R_C{}^2-O'A^2=const$ với $O'(-1;-1;2)$ là tâm đường tròn (C).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $d(O';MP)=d(O';NQ)\Leftrightarrow d(O';d_1)=d(O';d_2)\Leftrightarrow\left\|\left[\overrightarrow{O'A};\overrightarrow{u_1}\right]\right\|=\left\|\left[\overrightarrow{O'A};\overrightarrow{u_2}\right]\right\|$

$\Leftrightarrow|2+m|=|-2m+1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$, Vậy chỉ có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án C.**

THPT PHỤ DỰC THÁI BÌNH LẦN 2

Câu 42. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, biết cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SBC) bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta chuẩn hóa $a=1$ và đặt $SA=x$

Ta có: $\begin{cases}d(C;SB)=BC=1;\ AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ d(C;(SBD))=d(A;(SBD))=d(A;SO)=\frac{SA.AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\frac{x}{2\sqrt{(2x^2+1)}}\end{cases}$

Suy ra: $\sin\left(\widehat{(SBD);(SBC)}\right)=\frac{d(C;(SBD))}{d(C;SB)}=\frac{x}{2\sqrt{(2x^2+1)}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=SA=2$

Vậy $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{2}{3}$ tức $V=\frac{2a^3}{3}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2az+b^2-2b=0$ (a,b là các tham số thực). Gọi S là tập hợp các cặp $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $3z_1+2iz_2=3+6i$. Số phần tử thuộc S bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có phương trình $z^2-2az+b^2-2b=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 nên ta luôn có: $\begin{cases}z_1+z_2=-2a\\ z_1z_2=b^2-2b\end{cases}$

Trường hợp 1: z_1,z_2 là số thực.

Khi đó phương trình $3z_1+2iz_2=3+6i$ tồn tại nghiệm duy nhất với $\begin{cases}z_1=1\\ z_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=4\\ b^2-2b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ \left[\begin{array}{l}b=-1\\ b=3\end{array}\right.\end{cases}$

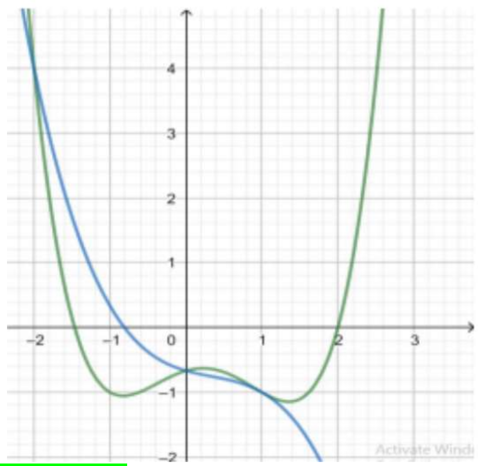
Suy ra có 2 cặp $(a;b)$ tồn tại.

Trường hợp 2: z_1,z_2 không phải là số thực.

Do $\overline{z_1} = z_2$ nên ta suy ra $\begin{cases} 3z_1 + 2i\overline{z_1} = 3 + 6i \\ z_1 = x + yi \end{cases} \Leftrightarrow 3(x+yi) + 2i(x-yi) = 3 + 6i \Rightarrow (5x+y)i = 3 + 6i$

Suy ra $x = \frac{3}{5}; y = 6$ tức $z_1 = \frac{3}{5} + 6i; z_2 = \frac{3}{5} - 6i \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{6}{5} \\ b^2 - 2b = \frac{9}{25} + 36 \ (*) \end{cases}$. Do pt (*) có 2 nghiệm nên ta suy ra có 2 cặp $(a;b)$ tồn tại. **Chọn đáp án D.**

Câu 44. Cho hai hàm đa thức bậc 4 và bậc 3 là $y = f(x), y = g(x)$ (hình vẽ dưới đây chỉ mang tính chất minh họa). Biết rằng hai đồ thị $y = f(x), y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt nhau tại 2 điểm khác có hoành độ lần lượt là $-2; 0$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên ở nửa mặt phẳng bên trái và nửa bên phải của trục tung. Khi $S_2 = \frac{2}{15}$ thì



A. $S_1 = \frac{28}{5}$.

B. $S_1 = \frac{56}{15}$.

C. $S_1 = \frac{51}{15}$.

D. $S_1 = \frac{28}{15}$.

Lời giải

Ta có hai đồ thị $y = f(x), y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt nhau tại 2 điểm khác có hoành độ lần lượt là $-2; 0$ nên suy ra $h(x) = f(x) - g(x) = ax(x-1)^2(x+2)$

$S_2 = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 \left| ax(x-1)^2(x+2) \right| dx = \frac{2}{15} \Leftrightarrow a = \pm\frac{2}{3}$

Suy ra: $S_1 = \int_{-2}^0 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^0 \left| \pm\frac{2}{3} x(x-1)^2(x+2) \right| dx = \frac{56}{15}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên $y \in [-2022; 2022]$ sao cho bất phương trình sau có nghiệm ?

$$e^{2x} + 2(2-y)e^x - 4yx - y^2 \le -2022$$

A. 4016.

B. 1993.

C. 4015.

D. 1994.

Lời giải

Ta có bất phương trình: $e^{2x} + 2(2-y)e^x - 4yx - y^2 + 2022 \le 0$ (1)

Xét hàm số $f_y(x) = e^{2x} + 2(2-y)e^x - 4yx - y^2 + 2022$ (hàm theo biến x, và y là tham số) có

$$\begin{cases} f_y'(x) = 2e^{2x} + 2(2-y)e^x - 4y = 0 \\ f_y''(x) = 4e^{2x} + 2(2-y)e^x \end{cases} \Leftrightarrow e^{2x} + (2-y)e^x - 2y = 0 \ (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x = y \\ e^x = -2 \end{array} \right.$$ (nghiệm đẹp).

<u>Trường hợp 1:</u> $e^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \ (1) \end{cases}$. Do $\lim\limits_{x \to -\infty} f_y(x) = 0; \lim\limits_{x \to +\infty} f_y(x) = +\infty$ nên $x = \ln y$ là điểm cực tiểu với

$$f_y''(\ln y) = 4e^{2\ln y} + 2(2-y)e^{\ln y} = 4y^2 + 2y(2-y) = 2y^2 + 4y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y < -2 \end{cases} \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta rút ra <u>điều kiện cần</u> cho y là $y > 0$.

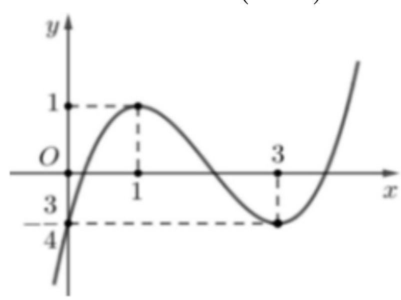
Cùng với <u>điều kiện đủ</u> là $f_y(\ln y) = y^2 + 2y(2-y) - 4y\ln y - y^2 + 2022 \le 0$ nên ta có $y \ge 29.5$

<u>Trường hợp 2:</u> phương trình (*) vô nghiệm tức ta luôn tồn tại tập bù của $y > 0$ tức $y \le 0$ để bất phương trình $f_y'(x) = 2e^{2x} + 2(2-y)e^x - 4y \ge 0$ có nghĩa $\Delta_{f'} = (y+2)^2 \le 0 \Leftrightarrow y = -2$

Xét $y = 0$ ta thấy không thỏa bất phương trình đề bài. Suy ra trường hợp 2 ta thu được $y < 0$

Vậy tổng hai trường hợp ta thu được $\begin{cases} y < 0 \\ y \ge 29.5 \end{cases} \xrightarrow{y \in [-2022;2022]} y \in [-2022;-1] \cup [30;2022]$ tức có tất cả 4015 giá trị nguyên y thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án C.**

Câu 47. Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị hàm số $f(2-x)$ như hình vẽ sau



Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2022;2022)$ để hàm số $g(x) = \left| f\left(\left| x^{2023} + 2022x - m^2 \right| + m \right) \right|$ có số điểm cực trị nhiều nhất ?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2020.

Lời giải

Để $g(x)$ có số điểm cực trị max thì số nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(\left| x^{2023} + 2022x - m^2 \right| + m \right) = 0$ cũng phải đạt max. Kéo theo số điểm cực trị của hàm số $h(x) = f\left(\left| x^{2023} + 2022x - m^2 \right| + m \right)$ cũng phải đạt max.

Suy ra tiếp số nghiệm bội lẻ nguyên dương của $u(x) = f\left(x^{2023} + 2022x - m^2 \right)$ cũng phải đạt max và $m < 0$

<u>Giải thích</u>: vì khi càng tịnh tiến về bên phải theo trục hoành của hàm số $u(x)$ thì số nghiệm và điểm cực trị của $h(x)$ càng lớn và đạt max.

Khi đó ta có: $u'(x) = \left(2023x^{2022} + 2022 \right) f'\left(x^{2023} + 2022x - m^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2023} + 2022x - m^2 = -1 \\ x^{2023} + 2022x - m^2 = 1 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2023} + 2022x = m^2 - 1 \\ x^{2023} + 2022x = m^2 + 1 \end{array} \right.$. Như vậy để có nhiều nghiệm nhất thì $m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array} \right.$

Suy ra $m > 1 \xrightarrow{m \in (-2022;2022)} m \in [2;2021]$ tức có 2020 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn phần thực của $\frac{1}{|z|-z}$ bằng $\frac{1}{18}$. Biết các số phức z_1, z_2, z_3 thuộc S thỏa mãn $|z_1-z_2|=18, |z_3-z_2|=9\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F=|z_1-1-i|^2+|z_2-1-i|^2-4|\overline{z_3}-1+i|^2$ gần nhất với số nguyên nào trong các số sau đây ?

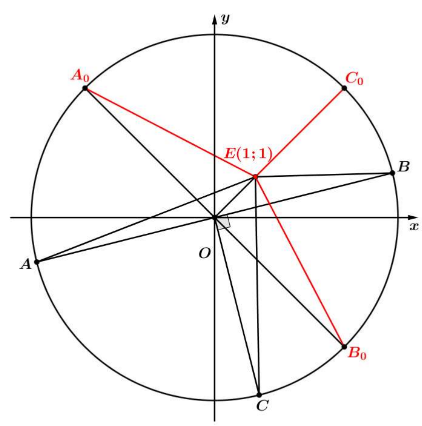
A. -268. **B.** -64. **C.** 55. **D.** -55.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Do $w=\frac{1}{|z|-z}$ nên $|z|-z\neq 0 \Rightarrow w=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-x-yi}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x+yi}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}$

Từ đó theo giả thiết ta có: $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^2+y^2}=\frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{x^2+y^2-2x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}=\frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}=\frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{18} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=9$. $\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\neq 0\right)$



Từ đó ta suy ra ba điểm $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ luôn thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R=9$.

Do $|z_1-z_2|=18, |z_3-z_2|=9\sqrt{2}$ nên ta suy ra $AB=2R=18$ và $BC=R\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

Từ đó ta có hình vẽ được biểu diễn như trên: (với $E(1;1)$)

Suy ra: $F=|z_1-1-i|^2+|z_2-1-i|^2-4|\overline{z_3}-1+i|^2=|z_1-1-i|^2+|z_2-1-i|^2-4|z_3-1-i|^2=AE^2+BE^2-4CE^2$.

Do I là trung điểm AB nên $EI^2=\frac{2\left(AE^2+BE^2\right)-AB^2}{4} \Rightarrow AE^2+BE^2=2EI^2+\frac{AB^2}{2}=166$.

Khi đó ta suy ra F max khi CE min

Vậy $CE_{\min}=|EI-R|=\left|\sqrt{2}-9\right|=9-\sqrt{2} \Rightarrow F_{\max}=166-4\left(9-\sqrt{2}\right)^2=-64,176\approx -64$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=7$. Hỏi có bao nhiêu điểm M trên mặt phẳng (Oxy) với M có tọa độ nguyên sao cho qua M kẻ được ít nhất hai tiếp tuyến vuông góc với nhau đến mặt cầu (S).

A. 8. **B.** 45. **C.** 36. **D.** 24.

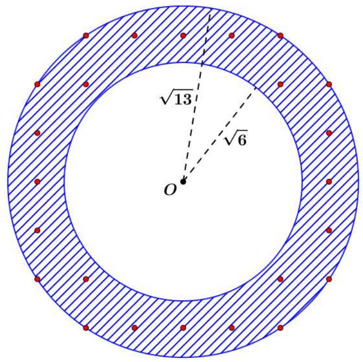
Lời giải

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\sqrt{7}$.

Do $M\in(Oxy)$ nên ta suy ra $M(a;b;0)$

Nhận xét: Nếu từ M kẻ được ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc đến mặt cầu khi và chỉ khi $R\le IM\le R\sqrt{2}\Leftrightarrow R^2\le IM^2\le 2R^2\Leftrightarrow 7\le a^2+b^2+1\le 14\Leftrightarrow 6\le a^2+b^2\le 13$.

Tập các điểm thỏa đề là các điểm nguyên nằm trong hình vành khăn (kể cả biên), nằm trong mặt phẳng (Oxy), tạo bởi 2 đường tròn đồng tâm $O(0;0;0)$ bán kính lần lượt là $\sqrt{6}$ và $\sqrt{13}$.



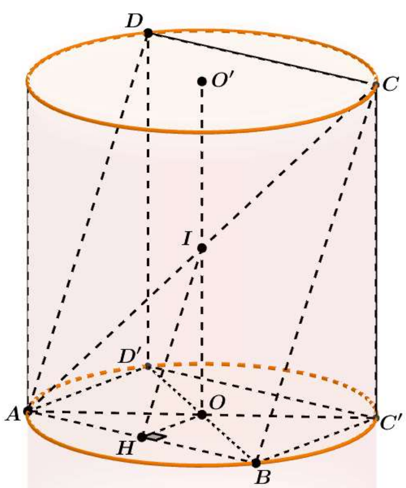
Từ hình vẽ trên ta kết luận có 24 điểm M thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

Câu 50. Cho hình trụ có đường kính đáy bằng $\sqrt{5}$. Hình vuông $ABCD$ nội tiếp hình trụ với hai điểm A,B thuộc đường tròn là đáy trên và C,D thuộc đường tròn đáy dưới của hình trụ và $AB<3$. Biết diện tích hình chiếu của hình vuông $ABCD$ trên mặt đáy bằng 2 (đơn vị diện tích). Tính thể tích của khối trụ đó.

A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{5\pi\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{5\pi\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{5\pi\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Ta có hình vẽ như sau:



Ta kẻ lần lượt các đường sinh CC' và DD' với $C',D'\in\left(O;\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ sao cho $S_{ABC'D'}=2$

Khi đó với $ABC'D'$ là hình chữ nhật ta có: $S_{ABC'D'}=AB.BC'=2$

Mà $AB^2+BC'^2=(2R)^2=5$ nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}AB.BC'=2\\AB^2+BC'^2=5\end{cases}$

Do $AB < 3$ nên hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} AB = BC = 1 \\ BC' = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} AB = BC = 2 \\ BC' = 1 \end{cases}$

Trường hợp 1: $\begin{cases} AB = BC = 1 \\ BC' = 2 \end{cases} \Rightarrow CC' = h = \sqrt{BC^2 - BC'^2}$ không tồn tại nên loại.

Trường hợp 2: $\begin{cases} AB = BC = 2 \\ BC' = 1 \end{cases} \Rightarrow CC' = h = \sqrt{BC^2 - BC'^2} = \sqrt{3}$

Vậy ta suy ra thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{4}$. **Chọn đáp án D.**

THPT CHUYÊN VINH LẦN 2

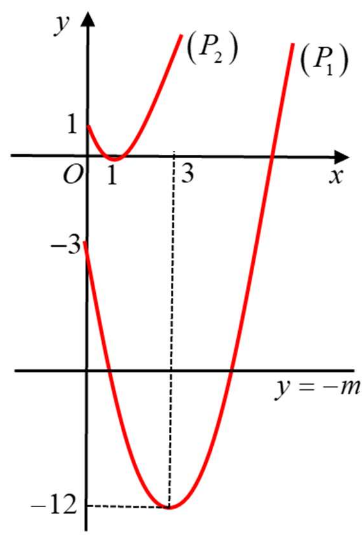
Câu 38. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $\left|4^x - 2^{x+2} + m - 1\right| = 2^{x+1} + 2$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

Đặt $t = 2^x\ (t > 0)$. Phương trình đã cho trở thành $\left|t^2 - 4t + m - 1\right| = 2t + 2\ (*)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - 4t + m - 1 = 2t + 2 \\ t^2 - 4t + m - 1 = -2t - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m = t^2 - 6t - 3\ (P_1) \\ -m = t^2 - 2t + 1\ (P_2) \end{array}\right..$$



Vẽ hai parabol $(P_1),(P_2)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -12 < -m < -3 \\ -m = 0 \\ -m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < m < 12 \\ m = 0 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. Vì $m \in \mathbb{N}$

nên $m \in \{0;4;5;...;11\}$ tức có 9 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 39. Cho phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 8 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2}$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 8 = 0\ \ (*)$ có biệt số $\Delta' = m^2 - 6m + 8$.

Giả thiết $z_1.\overline{z_1} = z_2.\overline{z_2} \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$. $\quad (1)$

Xét $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 2. \end{array}\right.$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (nhận).

Xét $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 4$.

Khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức liên hợp với nhau nên (1) luôn đúng.

Mà m nguyên nên $m = 3$ (nhận). Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

Câu 41. Biết đồ thị (C) của hàm số $f(x) = x^4 + bx^2 + c \ (b, c \in \mathbb{R})$ có điểm cực trị là $A(1;0)$. Gọi (P) là parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua điểm $B(2;3)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Ta có: (P) là parabol có đỉnh $I(0;-1) \Rightarrow (P): y = a(x-0)^2 - 1$

Mà $B(2;3) \in (P)$ nên $3 = a(2-0)^2 - 1 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow (P): y = x^2 - 1$

Ta có: (C) có điểm cực trị là $A(1;0) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 4 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow (C): f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) là: $x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left|x^4 - 3x^2 + 2\right| dx = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \left|x^4 - 3x^2 + 2\right| dx + \int_{-1}^{1} \left|x^4 - 3x^2 + 2\right| dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left|x^4 - 3x^2 + 2\right| dx$$

$= \left|\int_{-\sqrt{2}}^{-1} (x^4 - 3x^2 + 2) dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^4 - 3x^2 + 2) dx\right| + \left|\int_{1}^{\sqrt{2}} (x^4 - 3x^2 + 2) dx\right| \approx 2,54$. **Chọn đáp án B.**

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ và $g(x) = \left|f(2 + \sin x) + m\right|$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) + \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 50$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(2 + \sin x) + m$. Khi đó $g(x) = |h(x)|$.

Ta có : $1 \le 2 + \sin x \le 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Đặt $1 + 2\sin x = t, t \in [1;3]$

Hàm số trở thành $h(t) = f(t) + m$ trên đoạn $[1;3]$.

$h'(t) = f'(t) = -3t^2 + 3 < 0, \forall t \in [1;3]$, hàm số $h(t)$ nghịch biến trên $[1;3]$.

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} h(t) = h(1) = m + 2$ và $\min\limits_{[1;3]} h(t) = h(3) = m - 18$. Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} h(x) = m + 2$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} h(x) = m - 18$.

Trường hợp 1: $(m+2)(m-18) \le 0 \Leftrightarrow m \in [-2;18]$

Khi đó $\min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 0$; $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = \dfrac{\left|(m+2)+(m-18)\right| + \left|(m+2)-(m-18)\right|}{2} = |m-8| + 10$

Do đó: $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) + \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 50 \Leftrightarrow |m-8| = 40 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -32 \\ m = 48 \end{array}\right. (l)$.

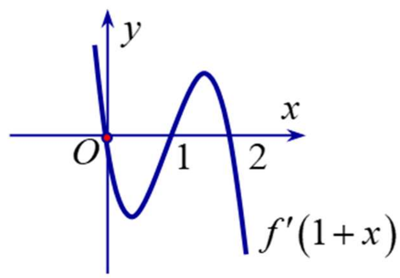
Trường hợp 2: $(m+2)(m-18) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-2) \cup (18;+\infty)$

Khi đó ta suy ra: $\begin{cases} \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = \dfrac{|(m+2)+(m-18)|-|(m+2)-(m-18)|}{2} = |m-8|-10 \\ \max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = \dfrac{|(m+2)+(m-18)|+|(m+2)-(m-18)|}{2} = |m-8|+10 \end{cases}$

Do đó: $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) + \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 50 \Leftrightarrow |m-8| = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 33 \\ m = -17 \end{array}\right. (t)$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn. **Chọn đáp án C.**

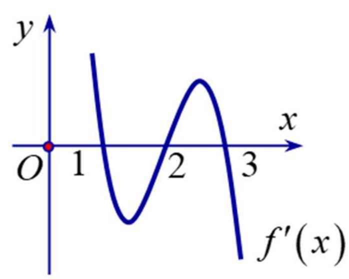
Câu 44. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(1+x)$ có đồ thị như trong hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho hàm số $g(x) = f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?



A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2022. **D.** 2024.

Lời giải

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(1+x)$ sang phải 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



$g'(x) = (-2x+2)f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow g'(x) \ge 0, \forall x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow f'\left(-x^2+2x-2022+m\right) \ge 0, \forall x \in (0;1)$ (vì $-2x+2 > 0, \forall x \in (0;1)$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x-2022+m \le 1, \forall x \in (0;1) \\ 2 \le -x^2+2x-2022+m \le 3, \forall x \in (0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 \le x^2-2x+2022, \forall x \in (0;1) \\ \begin{cases} m-2 \ge x^2-2x+2022, \forall x \in (0;1) \\ m-3 \le x^2-2x+2022, \forall x \in (0;1) \end{cases} \end{array}\right. (*)$.

Xét hàm số $h(x) = x^2-2x+2022$ trên khoảng $(0;1)$.

$h'(x) = 2x-2 < 0, \forall x \in (0;1)$ nên hàm số $h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 \le h(1) \\ \begin{cases} m-2 \ge h(0) \\ m-3 \le h(1) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 \le 2021 \\ \begin{cases} m-2 \ge 2022 \\ m-3 \le 2021 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2022 \\ m = 2024 \end{array}\right.$.

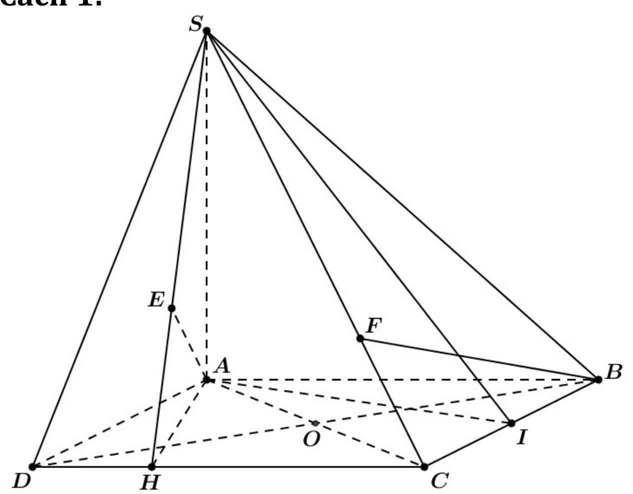
Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; ...; 2022; 2024\}$. **Chọn đáp án B.**

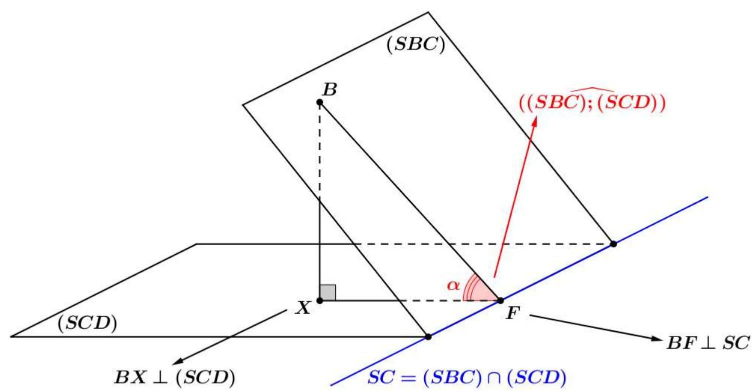
Câu 45. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB=\sqrt{2}a, AD=2a, \widehat{ABC}=45^\circ$ và góc giữa hai mặt phẳng $(SBC),(SCD)$ bằng 30°. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{2}{3}a^3$. **D.** $\frac{3}{4}a^3$.

Lời giải

Cách 1:





Do $AB=\sqrt{2}a, AD=2a, \widehat{ABC}=45^\circ$ nên suy ra $\widehat{BAD}=135^\circ; BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB.AD\cos 135^\circ}=\sqrt{10}$

Suy ra $AC=2AO=\sqrt{2\left(AB^2+AD^2\right)-BD^2}=\sqrt{2}=AB$ nên ΔABC cân tại A tức ΔSBC cân tại S.

Đặt $SA=x>0$. Kẻ $AI\perp BC, AH\perp CD, AE\perp SH$ khi đó ta có $AI=a$, suy ra $SI=\sqrt{x^2+a^2}; SC=\sqrt{x^2+2a^2}$

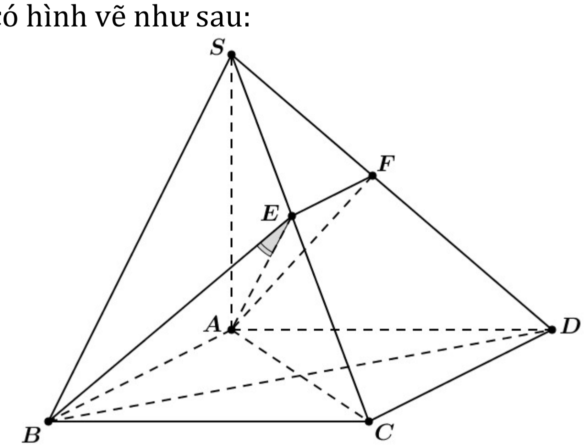
Ta có $S_{SBC}=\frac{1}{2}SI.BC=\frac{1}{2}SC.BF$ với $BF\perp SC$ nên suy ra $d(B;SC)=BF=\frac{SI.BC}{SC}=2\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2+2a^2}}$

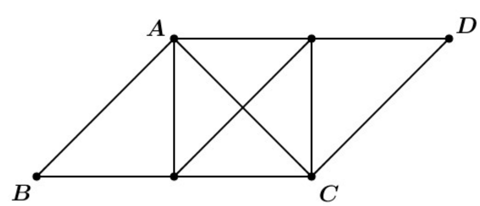
Ta lại có: $AH=d(C;AB)=\frac{AI.BC}{AB}=a\sqrt{2}\Rightarrow d\left(B;(SCD)\right)=d\left(A;(SCD)\right)=AE=\frac{SA.AH}{\sqrt{SA^2+AH^2}}=\frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}$

Từ đó ta suy ra $\sin\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right)=\frac{BX}{BF}=\frac{d\left(B;(SCD)\right)}{d(B;SC)}=\frac{xa\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=SA=a$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.\left(2S_{\Delta ABD}\right)=\frac{1}{3}SA.\left(AB.AD\sin 135^\circ\right)=\frac{2}{3}a^3$. **Chọn đáp án C.**

Cách 2: Ta có hình vẽ như sau:





Ta có: $SC=(SBC)\cap(SCD)$. Kẻ $AE\perp SC$ tại E (1) và đường thẳng qua E song song với CD cắt SD tại F.

Do $AB=\sqrt{2}a, AD=2a, \widehat{ABC}=45^\circ$ nên suy ra $\widehat{BAD}=135^\circ; BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB.AD\cos 135^\circ}=\sqrt{10}$

Suy ra $AC=2AO=\sqrt{2\left(AB^2+AD^2\right)-BD^2}=\sqrt{2}=AB$, từ đó ta thu được mặt đáy như hình trên, suy ra $AC\perp CD$ tức $CD\perp(SAC)\Rightarrow AE\perp CD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AE\perp(SCD)\Rightarrow AE\perp EF$ tức $\widehat{AEF}=90^\circ$.

Từ đó ta có được: $SC\perp(ABEF)$ và $\widehat{((SBC),(SCD))}=\widehat{(BE,EF)}=180^\circ-\widehat{BEF}=180^\circ-\left(\widehat{BEA}+\widehat{AEF}\right)$

$=90^\circ-\widehat{BEA}=\alpha$. Tiếp đến lại có: $\tan\widehat{BEA}=\dfrac{AB}{AE}=\cot\alpha=\cot 30^\circ\Rightarrow AE=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Lại có: $\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AC^2}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2a^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{2a^2}\Rightarrow SA=a$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.(2S_{\Delta ABD})=\dfrac{1}{3}SA.\left(AB.AD\sin 135^\circ\right)=\dfrac{2}{3}a^3$. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)-f(x)=(x+1)e^{3x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=\dfrac{5}{4}$, giá trị $f(1)$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}e^3+e$. **B.** $\dfrac{3}{4}e^3-e$. **C.** $\dfrac{3}{4}e^3+e$. **D.** $\dfrac{5}{4}e^3-e$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)-f(x)=(x+1)e^{3x}\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=(x+1)e^{2x}\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=(x+1)e^{2x}$

Khi đó: $e^{-x}f(x)=\int(x+1)e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}+C$

Do $f(0)=\dfrac{5}{4}$ nên: $\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow C=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)e^{3x}-\dfrac{1}{4}e^{3x}+e^x$. Vậy $f(1)=\dfrac{3}{4}e^3+e$.

Chọn đáp án C.

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại số thực $b\ge a$ thỏa mãn $4^a=2^b+b$ và đoạn $[a;b]$ chứa không quá 5 số nguyên ?

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 11.

Lời giải

Ta có $4^a=2^b+b\Leftrightarrow 2^b+b-4^a=0$

Xét hàm số $f(b)=2^b+b-4^a\Rightarrow f'(b)=2^b\ln b+1>0$ nên hàm số $f(b)$ luôn đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

Ta có $4^a=2^b+b\ge 2^a+a\Leftrightarrow 2^a+a-4^a\le 0\Leftrightarrow f(a)\le 0$

Nên để tồn tại số thực b và đoạn $[a;b]$ không chứ quá 5 số nguyên:

$\Leftrightarrow\begin{cases}f(a)\le 0\\ f(a+5)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^a+a-4^a\le 0\\ 2^{a+5}+a+5-4^a>0\end{cases}\Rightarrow a\in\{-5;-4;..;4;5\}$ tức có 11 giá trị nguyên a sao cho thỏa mãn yêu cầu đề bài. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\left(x^2+9x\right)\left(x^2-9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x^3+3x\right|+2m-m^2\right)$ có không quá 6 điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Do $g(-x)=f\left(\left|-x^3-3x\right|+2m-m^2\right)=f\left(\left|x^3+3x\right|+2m-m^2\right)=g(x)$ nên hàm số này là hàm số chẵn tức để hàm số $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị (cụ thể là tối đa 5 cực trị) thì hàm $h(x)=f\left(x^3+3x+2m-m^2\right)$ có tối đa 2 điểm cực trị dương.

Kéo theo phương trình $h'(x)=\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x+2m-m^2\right)=0$ có tối đa 2 nghiệm bội lẻ dương.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x+2m-m^2=0\\x^3+3x+2m-m^2=-9\\x^3+3x+2m-m^2=-3\\x^3+3x+2m-m^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=m^2-2m=y_3\\x^3+3x=m^2-2m-9=-y_1\\x^3+3x=m^2-2m-3=y_2\\x^3+3x=m^2-2m+3=y_4\end{array}\right.\ (*)$$

Như vậy để thỏa mãn đề bài thì bốn đường thẳng lần lượt là y_1,y_2,y_3,y_4 phải cắt đồ thị $y=x^3+3x$ tại tối đa hai nghiệm dương. Xét hàm số $y=x^3+3x$ có $y'=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y(0)=0$.

Nhận thấy $m^2-2m+3=(m-1)^2+2>0$ luôn đúng nên hệ (*) có tối thiểu 1 nghiệm, từ đó ta có:

<u>Trường hợp 1:</u> $m^2-2m\le 0\Leftrightarrow m\in[0;2]$ thì hệ (*) có 1 nghiệm tức hàm số luôn có 3 điểm cực trị

<u>Trường hợp 2:</u> $m^2-2m>0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<0\\m>2\end{array}\right.$ thì hệ (*) đang có 2 nghiệm dương. Do hàm số có tối đa 5 điểm cực trị nên chỉ có tối đa 2 nghiệm dương tức ta có điều kiện đủ là: $\left\{\begin{array}{l}m^2-2m-9\le 0\\m^2-2m-3\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in[-1;3]$

So với điều kiện ta suy ra $m\in\{-1;3\}$.

Từ hai trường hợp ta suy ra $m\in\{-1;0;1;2;3\}$ tức có 5 giá trị nguyên m thỏa. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+16=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S). Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh của (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q):2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng

A. -15. **B.** -13. **C.** -14. **D.** -7.

Lời giải

Đầu tiên, ta có mặt cầu (S) tâm $I(2;-1;3)$, bán kính $R=\sqrt{21}$

Tiếp đến ta nhận thấy: $d(I;(P))=9>\sqrt{21}$ nên suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Gọi a,b là các kích thước mặt đáy hình hộp chữ nhật và $d=d(I;(Q))$. Khi đó ta có:

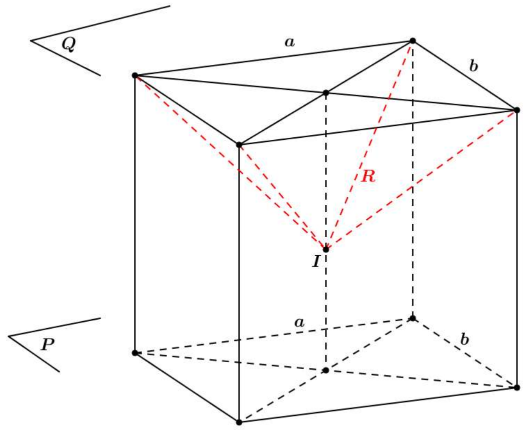
Ta có: $V=\left(d(I;(P))+d(I;(Q))\right)ab=(9+d)ab\le(9+d)\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)=2(9+d)\left(21-d^2\right)=f(d)$

Xét hàm số $y=f(d)=(9+d)\left(21-d^2\right)$ trên $(0;+\infty)$ có $f'(d)=0\Leftrightarrow d=1\Rightarrow\max\limits_{\mathbb{R}^+}f(d)=f(1)$

Suy ra thể tích khối hộp đạt max khi và chỉ khi $d=d(I;(Q))=1,\ (P)\parallel(Q)$

Suy ra: $(Q):2x-y+2z+d=0;\ d(I;(Q))=\dfrac{|11+d|}{3}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=-8\\d=-14\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(Q_1):2x-y+2z-8=0\\(Q_2):2x-y+2z-14=0\end{array}\right.$

Xét điểm $N(0;0;-8)$ bất kì thuộc mặt phẳng (P) ta nhận ra để thể tích max thì chiều cao hộp phải max tức hai điểm I và N phải nằm cùng phía với mặt phẳng (Q)



Như vậy ta nhận mặt phẳng $(Q_2): 2x-y+2z-14=0$ do $(2x_I-y_I+2z_I-14)(2x_N-y_N+2z_N-14)>0$

Với $(Q): 2x+by+cz+d=0$, ta đồng nhất hệ số ra $b+c+d=-13$. **Chọn đáp án B.**

Câu 50. Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$ và $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$. **C.** $5-2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Cách 1: Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w, khi đó với $|z+w|=\sqrt{2}$ ta luôn có ΔOAB là tam giác vuông tại O với $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$, khi đó ta luôn có $z.\overline{w}$ là số thuần ảo tức $z.\overline{w}=ki$ $(k\in\mathbb{R})$

Khi đó $\begin{cases} P=|zw+2i(z+w)-4|=\left|ki\frac{w}{\overline{w}}+2i\left(\frac{ki}{\overline{w}}+w\right)-4\right|=|kiw^2+2i(kiw+w)-4|=|kiw^2-2kw+2iw-4| \\ |z+w|=\left|\frac{ki}{\overline{w}}+w\right|=|w(ki+1)|=|w|\sqrt{k^2+1}=\sqrt{2}\Rightarrow k=1 \end{cases}$

Đặt $w=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ khi đó ta có: $P=|iw^2+(2i-2)w-4|=|w^2+(2+2i)w+4i|=|(w+1+i)^2+2i|$

Đặt $u=w+1+i\Rightarrow w=u-1-i\Rightarrow|w|=|u-1-i|=1$, khi đó ta suy ra (đặt trước $z_0=-1-i$) (*)

$P^2=|u^2+2i|^2=|u^2+z_0^2|^2=(u^2+z_0^2)(\overline{u}^2+\overline{z_0}^2)=|u|^4+|z_0|^4+(u.\overline{z_o}+z_o.\overline{u})^2-2|u.z_o|^2=|u|^4-4|u|^2+4+(u.\overline{z_o}+z_o.\overline{u})^2$

Mà $(u+z_o)(\overline{u}+\overline{z_o})=|u+z_0|^2=|u-1-i|^2=1$ (*) $\Rightarrow u.\overline{z_o}+z_o.\overline{u}=1-|u|^2-|z_o|^2=-|u|^2-1$

Suy ra $\frac{9}{2}^2=|u|^4-4|u|^2+4+(|u|^2+1)^2=2|u|^4-2|u|^2+5=2\left(|u|^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\ge\frac{9}{2}\Rightarrow P\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn đáp án A.**

Cách 2: Ta biến đổi biểu thức P như sau: $P=|zw+2i(z+w)-4|=|(w+2i)(z+2i)|=|z+2i|.|w+2i|$

Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w, cùng với điểm $M(0;-2)$

Khi đó hai điểm A,B cùng thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

Do $|z+w|=\sqrt{2}$ nên ta suy ra $|z+w|=|z-w|=AB=\sqrt{2}$ và $P=MA.MB$

Ta có: $\begin{cases} x_A = \sin\alpha \\ y_A = \cos\alpha \end{cases}$, do $OA \perp OB$ nên ta suy ra $\begin{cases} x_B = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \\ y_B = \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \end{cases}$. Suy ra ta có tọa độ hai điểm A, B mới lần lượt là $A(\sin\alpha;\cos\alpha), B(\cos\alpha;-\sin\alpha)$

Suy ra: $P = MA.MB = \sqrt{(5+4\cos\alpha)(5-4\sin\alpha)} = \sqrt{25-20(\sin\alpha-\cos\alpha)-16\sin\alpha\cos\alpha}$

Đặt $t = \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow t^2 = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{2}$

Khi đó ta có: $P = \sqrt{25-20t+8(t^2-1)} = \sqrt{8t^2-20t+17} = f(t)$

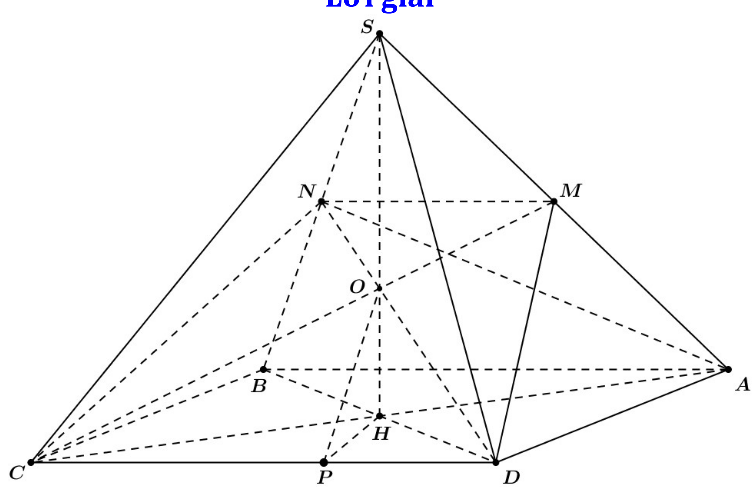
Xét hàm số $f(t)$ ta thấy $\min P = \min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} f(t) = f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THPT QUẢNG XƯƠNG LẦN 2

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm H, $SH \perp (ABCD)$. Hai đường chéo $AC = 2a$ $BD = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và điểm P thuộc cạnh CD. Biết rằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MNP) bằng a, thể tích khối đa diện $AMNP$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải



Đầu tiên ta chuẩn hóa $a = 1$. Gọi $O = CM \cap DN$ khi đó O là trọng tâm ΔSAC. (*)

Ta nhận thấy do mặt phẳng (MNP) luôn trùng với mặt phẳng $(MNCD)$ nên ta đặc biệt hóa điểm P nằm tại chân đường vuông góc hạ từ H xuống CD. Khi đó ta có: $CD \perp (OHP)$ tức ta suy ra:

$d(A;(MNP)) = 2d(H;(MNP)) = 2d(H;OP) = 1 \Rightarrow d(H;OP) = \dfrac{1}{2}$. Đặt $SH = x$, khi đó $OH = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{x}{3}$ (*)

Do $HP \perp CD$ nên xét trong tam giác vuông CHD ta có: $HP = \dfrac{HC.HD}{\sqrt{HC^2+HD^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Suy ra: $d\left(H;OP\right)=\dfrac{OH.HP}{\sqrt{OH^2+HP^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{3\left(x^2+3\right)}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=SH=3$.

Ta giả sử tiếp P di động đến trùng điểm D, khi đó ta có: $V_{AMNP}=V_{AMND}=V_{SMND}=\dfrac{1}{4}V_{SABD}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$

Vậy $V_{AMNP}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{24}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{24}.3.\dfrac{1}{2}.AC.BD=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 44. Tại một cửa hàng kinh doanh quần áo X có doanh thu $R\left(t\right)$ với tốc độ $R'\left(t\right)=7250-18t^2$ (triệu/ năm) sau thời gian t năm. Chi phí kinh doanh $C\left(t\right)$ của cửa hàng tăng với tốc độ $C'\left(t\right)=3620+12t^2$ (triệu/ năm). Hỏi sau bao nhiêu năm lợi nhuận $L\left(t\right)=R\left(t\right)-C\left(t\right)$, của cửa hàng bắt đầu giảm và lợi nhuận L sinh ra trong khoảng thời gian đó là bao nhiêu ?

A. $t=12$ năm, $L=26620$ triệu đồng. **B.** $t=12$ năm, $L=26620$ triệu đồng.
C. $t=12$ năm, $L=26620$ triệu đồng. **D.** $t=12$ năm, $L=26620$ triệu đồng.

Lời giải

Ta có tốc độ lợi nhuận sau thời gian t năm là:
$L'\left(t\right)=R'\left(t\right)-C'\left(t\right)=7250-18t^2-\left(3620+12t^2\right)=3630-30t^2$

Giải phương trình: $L'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=11\\t=-11\end{array}\right.\Rightarrow t=11$, như vậy sau 11 năm thì việc sinh lời không còn nữa

Khi đó giá trị tiền lãi thực trên khoảng thời gian $0\le t\le 11$ là

$L\left(11\right)-L\left(0\right)=\int\limits_0^{11}L'\left(t\right)dt=\int\limits_0^{11}\left(3630-30t^2\right)dt=26620$ (triệu đồng). **Chọn đáp án C.**

Câu 45. Hai bạn A và B, mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để các chữ số có mặt ở hai số bạn A và B viết giống nhau bằng

A. $\dfrac{25}{2916}$. **B.** $\dfrac{31}{2916}$. **C.** $\dfrac{1}{648}$. **D.** $\dfrac{1}{108}$.

Lời giải

Đầu tiên mỗi bạn có $9.A_9^2$ cách viết nên không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=\left(9.A_9^2\right)^2$ cách.

Ta tìm cách viết mà các chữ số có mặt trong hai số mà bạn A và B viết giống nhau. Bạn A có tất cả $9.A_9^2$ cách viết mà số không bao gồm chữ số 0 và có $\left(9.A_9^2-A_9^3\right)$ cách viết mà số có bao gồm chữ số 0.

Trường hợp 1: Nếu A viết số không gồm chữ số 0 có A_9^3 cách, lúc này B có $3!$ cách viết.

Trường hợp 2: Nếu A viết số có bao gồm chữ số 0 có $\left(9.A_9^2-A_9^3\right)$ cách, lúc này B có 4 cách viết.

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{A_9^3.3!+\left(9.A_9^2-A_9^3\right)4}{\left(9.A_9^2\right)^2}=\dfrac{25}{2916}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 46. Cho số phức z có phần thực không âm, phần ảo không dương, đồng thời thỏa mãn $\left|z+2+i\right|\ge\left|\overline{z}-3i\right|$ và $z\left(\overline{z}-2+i\right)-4i-1$ là số phức có phần ảo không dương. Khi số phức $w=z+3\overline{z}i$ có phần ảo nhỏ nhất thì modun của w bằng

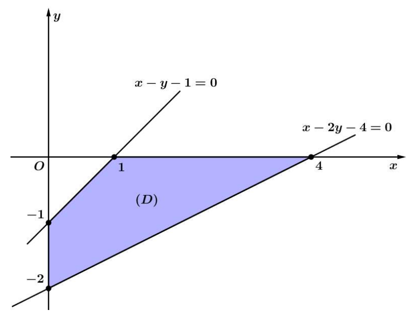
A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Đầu tiên ta đặt $z = a + bi\ \ (a \ge 0, b \le 0)$. Khi đó ta có: $|z+2+i| \ge |\overline{z} - 3i| \Leftrightarrow |z+2+i| \ge |z+3i|$

$(a+2)^2 + (b+1)^2 \ge a^2 + (b+3)^2 \Leftrightarrow a - b - 1 \ge 0 \Rightarrow -a + b + 1 \le 0$.

Lại có: $z(\overline{z} - 2 + i) - 4i - 1 = (a+bi)[(a-2)+(1-b)i] - 4i - 1 = (....) + (a - 2b - 4)i$ là số phức có phần ảo không dương nên ta suy ra $a - 2b - 4 \le 0$. Từ đó ta có hình vẽ dưới đây với miền (D) là phần chứa các số phức z thỏa. Tiếp đến ta có $w = z + 3\overline{z}i = (a+3b) + (b+3a)i$ có phần ảo nhỏ nhất tức $b + 3a$ nhỏ nhất.



Suy ra $b + 3a$ nhỏ nhất khi $(a;b) = (0;-2)$ tức $w = -6 - 2i$. Vậy $|w| = 2\sqrt{10}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $0 < a, b \le 20$ sao cho đồ thị của hai hàm số $y = \dfrac{1}{a^x} + \dfrac{1}{b}$ và $y = \dfrac{1}{b^x} + \dfrac{1}{a}$ cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt ?

A. 340. **B.** 342. **C.** 361. **D.** 324.

Lời giải

Đầu tiên ta nhận thấy $a > 1, b > 1$. Dễ dàng nhận ra nếu $a = b$ thì hai đồ thị lúc này trùng nhau nên có vô số điểm chung, suy ra loại. Do đó $a \ne b$, tiếp đến, vì vai trò của a và b như nhau nên ta chỉ cần tìm cặp số nguyên $(a;b), a > b > 1$ sao cho phương trình $\dfrac{1}{a^x} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b^x} + \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^x} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b^x} - \dfrac{1}{a} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{a^x} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b^x} - \dfrac{1}{a}$ có $f'(x) = -\dfrac{\ln a}{a^x} + \dfrac{\ln b}{b^x}$ và $f(1) = 0$

Giải phương trình $f'(x) = -\dfrac{\ln a}{a^x} + \dfrac{\ln b}{b^x} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \log_{\frac{b}{a}}\left(\dfrac{\ln b}{\ln a}\right), f'(x) > 0$

Cùng với $f'(x) < 0$ khi $x > x_0$ và $f'(x) > 0$ khi $x < x_0$. Nên ta xét 2 trường hợp sau:

<u>Trường hợp 1:</u> $x_0 = \log_{\frac{b}{a}}\left(\dfrac{\ln b}{\ln a}\right) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b} \Leftrightarrow (a;b) = (4;2)$

Xét hàm số $y = g(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ ta có: $\dfrac{\ln 3}{3} > \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{2\ln 2}{4} = \dfrac{\ln 4}{4} > \dfrac{\ln 5}{5} > .... > \dfrac{\ln 20}{20}$

Khi đó $f(x) \ge f(x_0) = f(1) = 0$ tức $f(x)$ có đúng 1 nghiệm $x_0 = 1$

<u>Trường hợp 2:</u> $x_0 = \log_{\frac{b}{a}}\left(\dfrac{\ln b}{\ln a}\right) \ne 1$. Khi đó vẽ bảng biến thiên ta thấy $f(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Với mỗi $b = k \in \{2;3;...;19\}$ thì $a \in \{k+1;....;20\}$ tức có $20 - k$ cách chọn giá trị a.

Suy ra có $\sum_{k=2}^{19}(100 - k) = 171$ cặp $(a;b)$ với $a > b > 1$ và loại đi cặp $(4;2)$ ta có 170 cặp.

Xét tương tự với $b > a > 1$ ta cũng có 170 cặp. Vậy có tất cà 340 cặp số thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-6) < 0$ và bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = \left|3f\left(-x^4 + 4x^2 - 6\right) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2\right|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Xét hàm số $y = h(x) = 3f\left(-x^4 + 4x^2 - 6\right) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ ta có:

$h'(x) = \left(-12x^3 + 24x\right)f'\left(-x^4 + 4x^2 - 6\right) + 12x^5 - 12x^3 - 24x = -12x\left(x^2 - 2\right)f'\left(-x^4 + 4x^2 - 6\right) + 12x\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 1\right)$

Giải $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; x = \pm\sqrt{2} \\ f'\left(-x^4 + 4x^2 - 6\right) - \left(x^2 + 1\right) = 0 \ \ (*) \end{array}\right.$

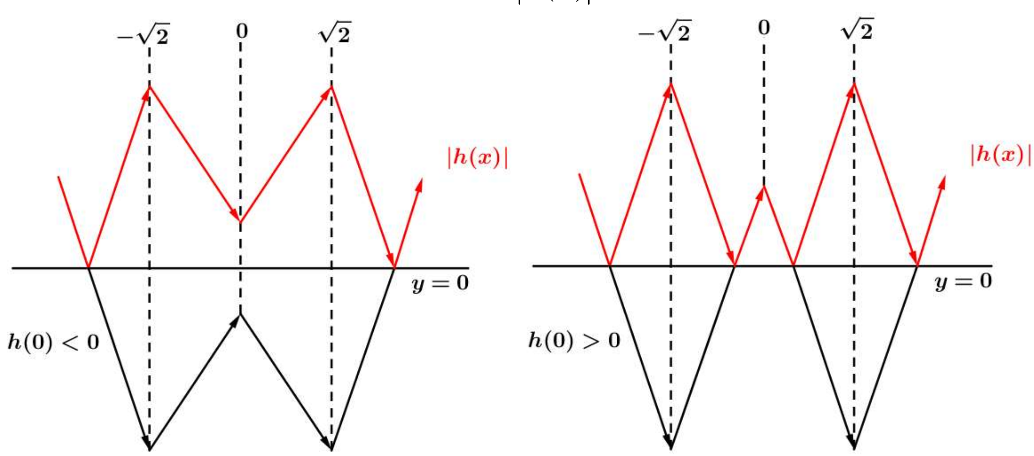
Ta đánh giá (*) như sau: do $f'\left(-x^4 + 4x^2 - 6\right) = f'\left(-\left(x^2 - 2\right)^2 - 2\right) \le f'(-2) = 0; x^2 + 1 \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên phương trình (*) vô nghiệm, tức hàm số $h(x)$ có ba điểm cực trị, từ đó ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Do $f(-6) < 0$ nên kéo theo $h(-6) < 0$, suy ra ta có hai trường hợp xảy ra, đó là $h(0) > 0$ và $h(0) < 0$

Căn cứ vào đó ta có hai trường hợp xảy ra với đồ thị $|h(x)|$, tức đồ thị đề cần tìm.



Vậy $|h(x)|$ chỉ có 2 trường hợp là <u>3 điểm cực tiểu</u> hoặc 4 điểm cực tiểu. **Chọn đáp án C.**

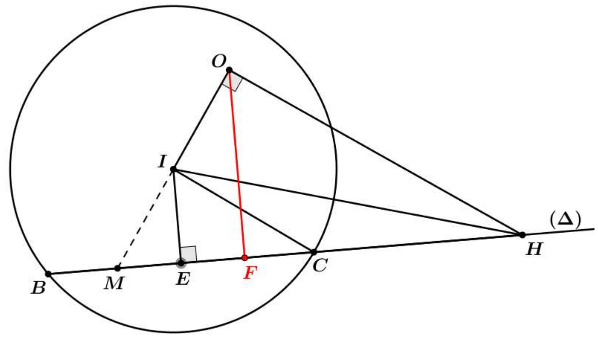
Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và điểm $H(3;0;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm H và cắt mặt cầu theo dây cung $BC = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ không đổi. Khi khoảng cách từ O đến Δ lớn nhất thì Δ đi qua điểm $N(-20;m;n)$. Tính $m + n = ?$

A. $m + n = 3$. **B.** $m + n = 5$. **C.** $m + n = 20$. **D.** $m + n = -20$.

Lời giải

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;0)$ và bán kính $R=2$. Khi đó ta có: $d(I;\Delta)=IE=\sqrt{R^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Dễ dàng đánh giá được khoảng cách từ O đến Δ lớn nhất khi Δ và hai điểm I,O đồng phẳng.



Ta có: $\begin{cases} OH=3\sqrt{2};OI=1;IH=\sqrt{19} \\ IH^2=IO^2+OH^2 \end{cases}$ nên ΔIOH vuông tại O và $\sin\widehat{IHO}=\frac{IO}{IH}=\frac{1}{\sqrt{19}};\cos\widehat{IHO}=\frac{HO}{IH}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$.

Mặt khác ta có: $\sin\widehat{IHE}=\frac{IE}{IH}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{19}};\cos\widehat{IHE}=\frac{HE}{IH}=\frac{\sqrt{IH^2-IE^2}}{IH}=\frac{7}{\sqrt{57}}$

Nên với $OF\perp\Delta$ ta suy ra:

$$d(O;\Delta)_{max}=OF=OH\sin\widehat{OHE}=3\sqrt{2}\sin\left(\widehat{IHO}+\widehat{IHE}\right)=3\sqrt{2}\left(\sin\widehat{IHO}\cos\widehat{IHE}+\cos\widehat{IHO}\sin\widehat{IHE}\right)$$

$$=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{19}}.\frac{7}{\sqrt{57}}+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}.\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{19}}\right)=3\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$$

Gọi $M=OI\cap\Delta$, khi đó ta suy ra $\frac{MI}{MO}=\frac{EI}{OF}=\frac{2}{3}\Rightarrow\overrightarrow{MI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{MO}=0$

Giải hệ tâm tỉ cự trên ta ra được $M(0;3;0)$, suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{HM}=(1;-1;1)\Rightarrow\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{1}$

Mà Δ đi qua $N(-20;23;-20)$ nên đồng nhất suy ra $m+n=3$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có trục đối xứng là trục Oy và thỏa mãn điều kiện $\left(x^2-x\right)f(x+1)-f^2(x)=x^3-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết giá trị của tích phân $\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{f(x)+1}dx=\ln\frac{a}{b\sqrt[3]{2}}$, (với $a,b\in N$, $UCLN(a,b)=1$). Tính giá trị của biểu thức $S=a^3+b^3+a-b$

A. 92. **B.** 8. **C.** 122. **D.** 62.

Lời giải

Do hàm số $f(x)$ là một parabol có trục đối xứng là trục Oy nên ta có : $f(x)=ax^2+c\ \ (a,b\in\mathbb{R},a\neq 0)$.

Thế vào phương trình: $\left(x^2-x\right)f(x+1)-f^2(x)=x^3-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, từ đó ta có:

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)\left(a(x+1)^2+c\right)-\left(ax^2+c\right)^2=x^3-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\left(a-a^2\right)x^4+ax^3+(c-2ac-a)x^2-(a+c)x-c^2=x^3-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Đồng nhất hệ số ta suy ra hệ phương trình sau: $\begin{cases} a-a^2=0 \\ a=1; a+c=0 \\ -c^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-1$.

Suy ra $\int\limits_2^3 \dfrac{\ln(x-1)}{f(x)+1}dx = \int\limits_2^3 \dfrac{\ln(x-1)}{x^2}dx$ (từng phần) $= \left(-\dfrac{\ln(x-1)}{x}\right)\Bigg|_2^3 + \int\limits_2^3 \dfrac{dx}{x(x-1)} = \left(-\dfrac{\ln(x-1)}{x}\right)\Bigg|_2^3 + \left(\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|\right)\Bigg|_2^3$

$= \dfrac{5}{3}\ln 2 - \ln 3 = \ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{32}}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{3\sqrt[3]{2}}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow S=92$. **Chọn đáp án A.**

ĐỀ THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG LẦN 2

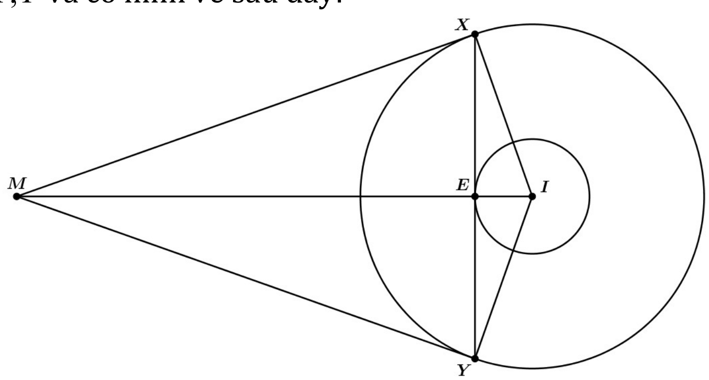
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x-6)^2+(y-7)^2+(z-8)^2=9$ và $(S_2): (x-6)^2+(y-7)^2+(z-8)^2=1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy), với tọa độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S_1) ba tiếp tuyến MX, MY, MZ (với X, Y, Z là các tiếp điểm và đôi một khác nhau) sao cho mặt phẳng (XYZ) tiếp xúc với (S_2)?

A. 6. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Đầu tiên ta có hai mặt cầu (S_1) và (S_2) chung tâm $I(6;7;8)$ và bán kính lần lượt là $R_1=3, R_2=1$

Ta đặc biệt hóa hai điểm X, Y và có hình vẽ sau đây:



Đặt $M(a;b;0), (a,b\in\mathbb{Z})$ khi đó ta có: (áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$$MI=\frac{IX^2}{IE}=\frac{R_1^2}{R_2}=9 \Rightarrow MI^2=(a-6)^2+(b-7)^2+64=81 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-7)^2=17$$

Từ đó ta suy ra điểm M thuộc đường tròn $(C): (x-6)^2+(y-7)^2=17$. Bài toán chuyển về tìm số nghiệm nguyên $(a;b)$ thỏa phương trình $(a-6)^2+(b-7)^2=17$. Khi ấy ta suy ra: $a-6, b-7$ là các căn bậc hai củ số chính phương. Từ đó ta chia thành hai trường hợp như sau:

<u>Trường hợp 1:</u> $\begin{cases} (a-6)^2\le 1 \\ (b-7)^2\le 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le a-6\le 1 \\ -4\le b-7\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le a\le 7 \\ 3\le b\le 11 \end{cases} \Rightarrow (a;b)=(5;3);(5;11);(7;3);(7;11)$

<u>Trường hợp 2:</u> $\begin{cases} (a-6)^2\le 16 \\ (b-7)^2\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\le a-6\le 4 \\ -1\le b-7\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le a\le 10 \\ 6\le b\le 8 \end{cases} \Rightarrow (a;b)=(2;6);(10;6);(2;8);(10;8)$

Như vậy tổng lại ta có 8 tọa độ nguyên M thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 47. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho $|z+1-i|+|z-3-4i|=5$. Xét các số phức z_1, z_2 thuộc S thỏa mãn $|z_1-z_2|=2$, giá trị lớn nhất của $P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2$ bằng

A. $4\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{44}{5}$. **C.** $\dfrac{16}{5}$. **D.** $4\sqrt{17}$.

Lời giải

Gọi $M(z)$ là điểm biểu diễn số phức z, cùng với $A(-1;1), B(3;4)$ và phương trình $MA+MB=5=AB$

Ta suy ra M di động trên đoạn AB. Tiếp đến gọi $N(z_1), P(z_2)$ sao cho $|z_1-z_2|=NP=2$.

Cùng với điểm $Q(0;5)$, ta có: $P=|z_1-5i|^2-|z_2-5i|^2=NQ^2-PQ^2$

Do $N(z_1), P(z_2)\in(AB): -3x+4y-7=0$ nên ta đặt $N\left(a;\dfrac{3a+7}{4}\right), P\left(b;\dfrac{3b+7}{4}\right)$

Quỹ tích của đoạn NP là 1 đoạn thẳng trượt qua lại trên đoạn AB nên ta suy ra $a\in[-1;3]$

Khi đó ta có: $NP^2=(a-b)^2+\left(\dfrac{3a+7}{4}-\dfrac{3b+7}{4}\right)^2=4\Leftrightarrow\dfrac{25}{16}(a-b)^2=4\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=-\dfrac{8}{5}\\ a<b\end{cases}\Rightarrow b=a+\dfrac{8}{5}$.

$$P=NQ^2-PQ^2=a^2+\left(\frac{3a+7}{4}-5\right)^2-\left(a+\frac{8}{5}\right)^2-\left(\frac{3\left(a+\frac{8}{5}\right)+7}{4}-5\right)^2=\ldots=-5a+\frac{19}{5}\le-5(-1)+\frac{19}{5}=\frac{44}{5}$$ với

mọi $a\in[-1;3]$. Vậy $P_{\max}=\dfrac{44}{5}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Có bao nhiêu số nguyên $a\in(-12;12)$ sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất 4 số nguyên b thỏa mãn $4^{b-a^2}+2022\le 2^{a+b}$?

A. 19. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Ta có bất phương trình tương đương với: $4^{b-a^2}-2^{a+b}+2022\le 0$.

Xét hàm số $y=f(b)=4^{b-a^2}-2^{a+b}+2022$ có $f'(b)=4^{b-a^2}\ln 4-2^{a+b}\ln 2=0\Leftrightarrow 2^{2b-2a^2-a-b}=\dfrac{\ln 2}{\ln 4}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$

$\Leftrightarrow b-2a^2-a+1=0\Leftrightarrow b=b_0=2a^2+a-1$. Mặt khác $f''(b_0)=4^{a^2+a-1}\ln^2(4)-2^{2a^2+2a-1}\ln^2(2)>0$ nên ta suy ra $b=b_0$ là điểm cực tiểu hàm số $f(b)$.

Suy ra điều kiện cần để tồn tại nghiệm bất phương trình $f(b)\le 0$ là $f(2a^2+a-1)\le 0$

$\Leftrightarrow 4^{a^2+a-1}-2^{2a^2+2a-1}+2022\le 0$ (CALC) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\le -4\\ a\ge 3\end{array}\right.\xrightarrow{a\in(-12;12)}a\in[-11;-4]\cup[3;11]$. (1)

Tiếp đến ta đánh giá như sau: $2^{a+b}\ge 4^{b-a^2}+2022\ge 2\sqrt{2022.4^{b-a^2}}=2^{b-a^2+1}.\sqrt{2022}\Rightarrow 2^{a^2+a-1}\ge 2\sqrt{2022}$

Suy ra: $a^2+a\ge\log_2\left(\sqrt{2022}\right)+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\ge 3\\ a\le -4\end{array}\right.$ (*) Khi đó ta luôn có $a^2+a\ge 12$.

Từ đó ta thấy ngay với mọi giá trị của $b\in\{a^2-1;a;a^2+1;\ldots\}$ thì bất phương trình ban đầu luôn đúng với mọi a thuộc tập (*) (2).

Vậy ta suy ra $a\in\{-11;-10;\ldots;-4;3;4;\ldots;11\}$ tức có 17 giá trị nguyên a thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

Câu 50. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị ?

A. 15. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 16.

Lời giải

Xét hàm $f\left(x\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)^3$ có $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ nên $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

Như vậy chắc chắn hàm số $f\left(x\right)$ có một điểm cực trị là $x=0$

Mà $f'\left(x\right)>0$ với mọi $x>0$ nên suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Từ đó suy ra hàm số có duy nhất 1 cực trị $x=0$

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^4-8x^2+m\right)$ có $g'\left(x\right)=\left(4x^3-16x\right)f'\left(x^4-8x^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;x=\pm2\\x^4-8x^2+m=0\end{array}\right.$

Như vậy để $g\left(x\right)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $x^4-8x^2+m=0$ phải có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt và khác $\left\{-2;0;2\right\}$. PT tương đương với: $m=-x^4+8x^2=u\left(x\right)$.

Khi đó ta có bảng biến thiên hàm $u\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	16	↘	0	↗	16	↘	$-\infty$

Từ đó ta suy ra $ycbt\Leftrightarrow m\in\left(0;16\right)\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\left\{1;2;...;15\right\}$ tức có tất cả 15 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A.

ĐỀ CHUYÊN KHTN HÀ NỘI LẦN 2

Câu 48. Xét số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=2$, giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|z-2i\right|+\left|z-\sqrt{3}+i\right|+\left|z+\sqrt{3}+i\right|$ bằng

A. $4+2\sqrt{3}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

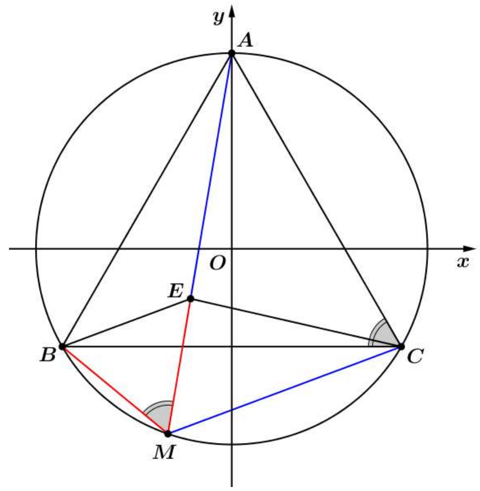
Gọi M là điểm biểu diễn số phức z sao cho thuộc đường tròn $\left(C\right):x^2+y^2=4$. Cùng với ba điểm lần lượt là $A\left(0;2\right),B\left(-\sqrt{3};-1\right),C\left(\sqrt{3};-1\right)$, suy ra ΔABC đều. Gọi $E\in AM$ sao cho $MB=ME$. Ta có như sau:

Tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\widehat{ACB}=\widehat{AMB}=60^\circ$, khi đó ta suy ra ΔBME đều.

Lại có tiếp $\widehat{ABE}+\widehat{CBE}=60^\circ=\widehat{CBE}+\widehat{CBM}\Rightarrow\widehat{ABE}=\widehat{CBM}$

Xét ΔABE và ΔCBM có: $AB=BC;\widehat{ABE}=\widehat{CBM};\widehat{BAM}=\widehat{BCM}$, suy ra $\Delta ABE=\Delta CBM$ $\left(c-g-c\right)$

Khi đó ta suy ra $AE=CM$ (hai cạnh tương ứng bằng nhau).



Suy ra: $P=\left|z-2i\right|+\left|z-\sqrt{3}+i\right|+\left|z+\sqrt{3}+i\right|=MA+MB+MC=MA+\left(ME+CE\right)=AM+AM=2AM$

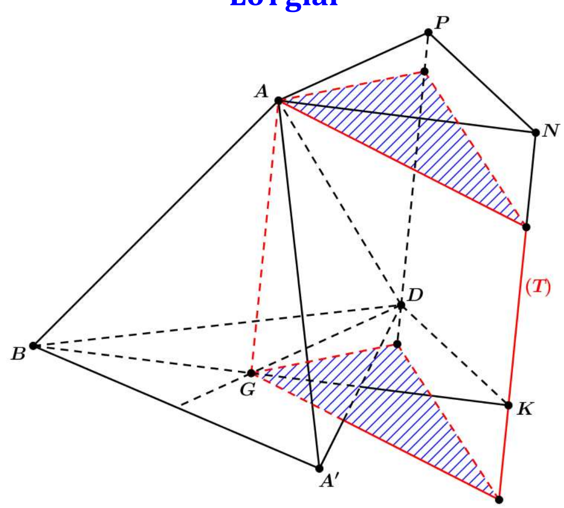
Như vậy khi biểu thức P max thì đoạn AM đạt max. Suy ra: $P_{\max}=2AM=2R_C=4$. **Chọn đáp án C.**

SỞ NINH BÌNH LẦN 2

Câu 47. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC'=\sqrt{3}$. Biết rằng các khoảng cách từ các điểm A',B,D đến đường thẳng AC' là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích $S=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$, thể tích của khối hộp đã cho là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Gọi $G=AC'\cap\left(A'BD\right)$, khi đó dễ thấy G là trọng tâm $\Delta A'BD$ và $\dfrac{AG}{AC'}=\dfrac{1}{3}$ nên $AG=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lấy điểm K đối xứng với B qua G và dựng hình lăng trụ $GDK.APN$.

Nhận thấy rằng khoảng cách giữa các mặt bên của lăng trụ $GDK.APN$ bằng với khoảng cách từ đỉnh A',B,D đến AG.

Từ đó, qua cách dựng các mặt phẳng đi qua A,G và vuông góc với các cạnh bên của lăng trụ $GDK.APN$, đồng thời cắt các mặt phẳng chứa các mặt bên của lăng trụ này, ta lại thu được một lăng trụ mới (như hình vẽ) là một lăng trụ đứng có chiều cao là AG, tam giác đáy có kích thước lần lượt bằng độ dài khoảng cách từ các đỉnh A',B,D đến đường thẳng AC'.

Khối lăng trụ mới và lăng trụ $GDK.APN$ có cùng thể tích nên $V_m = V_{GDK.APN} = S_m.AG = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$ với $S_m = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

Suy ra: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A'.ABD} = 6V_{GDK.APN} = 6.\dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. Biết hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f''(x)f(x) + [f'''(x)]^2$ có 3 điểm cực trị $x_1 < x_2 < x_3$ và $g(x_1) = 2, g(x_2) = 5, g(x_3) = 1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)+1}$ và trục Ox bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{\ln 6}{2}$. **C.** $\ln 6$. **D.** $2\ln 6$.

Lời giải

Ta có: $f'''(x) = 1$ nên $g'(x) = 2f'(x)f''(x) - 2f'''(x)f(x) - 2f'(x)f''(x) = -2f(x) \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2}g'(x)$

Tiếp đến ta có: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)+1} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ nên phương trình cũng có 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$, và cũng là các điểm cực trị của hàm số $g(x)$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{x_1}^{x_3}\left|\frac{f(x)}{g(x)+1}\right|dx = \left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)}{g(x)+1}dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3}\frac{f(x)}{g(x)+1}dx\right| = \frac{1}{2}\left(\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+1}dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3}\frac{g'(x)}{g(x)+1}dx\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|\int_{g(x_1)}^{g(x_2)}\frac{d(g(x))}{g(x)+1}\right| + \left|\int_{g(x_2)}^{g(x_3)}\frac{d(g(x))}{g(x)+1}\right|\right) \quad (g(x_1) = 2, g(x_2) = 5, g(x_3) = 1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|\int_2^5\frac{dx}{x+1}\right| + \left|\int_5^1\frac{dx}{x+1}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(|\ln 6 - \ln 3| + |\ln 2 - \ln 6|\right) = \frac{\ln 6}{2}.$$ Vậy $S = \dfrac{\ln 6}{2}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Biết nửa khoảng $S = \left[p^m; p^n\right)$ $(p, m, n \in \mathbb{N}^*)$ là tập hợp tất cả các số thực y sao cho ứng với mỗi y tồn tại đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2-2x} - 27\right)\left(5^{x^2} - y\right) \le 0$. Tổng $m+n+p$ bằng

A. $m+n+p = 46$. **B.** $m+n+p = 66$. **C.** $m+n+p = 14$. **D.** $m+n+p = 30$.

Lời giải

<u>Trường hợp 1:</u> $y < 1$, khi đó ta suy ra $5^{x^2} - y > 0$.

Do đó bất phương trình ban đầu trở thành:

$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x} - 27 \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$ tức có 5 giá trị nguyên x (loại)

<u>Trường hợp 2:</u> $y = 1$, khi đó ta suy ra $5^{x^2} - y = 5^{x^2} - 1 \ge 0$.

Do đó bất phương trình ban đầu trở thành:

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2-2x} - 27 \le 0 \\ 5^{x^2} - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x \le 3 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$ tức có 5 giá trị nguyên x (loại)

<u>Trường hợp 3:</u> $y > 1$, khi đó ta xét: $3^{x^2-2x} - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ và $5^{x^2} - y = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\log_5 y}$

-Nếu $\sqrt{\log_5 y} \le 3$ hay $-\sqrt{\log_5 y} \ge -3$ thì tập nghiệm cần tìm chính là $\left[\begin{array}{l}\left[-\sqrt{\log_5 y};-1\right]\cup\left[\sqrt{\log_5 y};3\right]\\ \left[-1;-\sqrt{\log_5 y}\right]\cup\left[\sqrt{\log_5 y};3\right]\end{array}\right.$, tuy nhiên các cặp nghiệm này không chứa đủ 6 số nguyên nên ta loại.

-Nếu $\sqrt{\log_5 y} > 3$ hay $-\sqrt{\log_5 y} < -3$ thì tập nghiệm cần tìm chính là $\left[-\sqrt{\log_5 y};-1\right]\cup\left[3;\sqrt{\log_5 y}\right]$, và tập này chỉ chứa đúng 6 số nguyên khi và chỉ khi $4 \le \sqrt{\log_5 y} < 5 \Leftrightarrow 5^{16} \le y < 5^{25}$

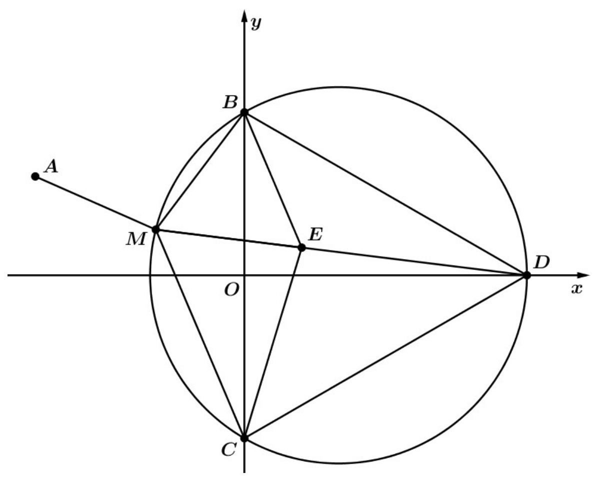
Từ đó ta suy ra: $S = \left[5^{16};5^{25}\right)$ chính là tập nghiệm cần tìm, tức $m+n+p=46$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Xét số phức z có phần thực âm và thỏa mãn $|z-1|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+3-i|+|z-\sqrt{3}i|+|z+\sqrt{3}i|$ bằng

A. 6. **B.** $\sqrt{37}$. **C.** $4+\sqrt{17}$. **D.** $3+\sqrt{17}$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Xét các điểm $A(3;-1), B(0;\sqrt{3}), C(0;-\sqrt{3})$. Cùng với điểm $M(z)$ thỏa mãn $|z-1|=2$, ta có hình vẽ như sau:



Gọi D thuộc đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$ sao cho ΔBCD đều và $E \in MD$ sao cho $MB = ME$

Khi đó ta suy ra $D(3;0)$ và nhận định như sau:

Tứ giác $DBMC$ nội tiếp nên $\widehat{DCB}=\widehat{DMB}=60^\circ$, khi đó ta suy ra ΔBME đều.

Lại có tiếp $\widehat{DBE}+\widehat{CBE}=60^\circ=\widehat{CBE}+\widehat{CBM} \Rightarrow \widehat{DBE}=\widehat{CBM}$

Xét ΔABE và ΔCBM có: $DB=BC;\widehat{DBE}=\widehat{CBM};\widehat{BDM}=\widehat{BCM}$, suy ra $\Delta DBE=\Delta CBM$ $(c-g-c)$

Khi đó ta suy ra $DE=CM$ (hai cạnh tương ứng bằng nhau).

Suy ra: $P=|z+3-i|+|z-\sqrt{3}i|+|z+\sqrt{3}i| = MA+MB+MC = MA+ME+DE = MA+MD \ge AD = \sqrt{37}$

Dấu bằng xảy ra khi $M = AD \cap (C)$. **Chọn đáp án B.**

THỊ XÃ QUẢNG TRỊ LẦN 1

Câu 46. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức $w=2z-5+i$ sao cho số phức z thỏa mãn $(z-3+i)(\overline{z}-3-i)=36$. Xét các số phức $w_1, w_2 \in S$ thỏa mãn $|w_1-w_2|=2$. Giá trị lớn nhất của $P=|w_1-5i|^2-|w_2-5i|^2$ bằng

A. $7\sqrt{13}$. **B.** $4\sqrt{37}$. **C.** $5\sqrt{17}$. **D.** 20.

Lời giải

Ta có: $36=(z-3+i)(\overline{z}-3-i)=(z-3+i)\overline{(z-3+i)}=|z-3+i|^2 \Rightarrow |z-3+i|=6 \Rightarrow |2z-6+2i|=12$

Mà số phức $w=2z-5+i$ nên suy ra $|2z-6+2i|=|(2z-5+i)-1+i|=|w-1+i|=12$

Suy ra điểm $M(w)$ luôn thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=12$.

Tiếp đến xét các điểm $A(w_1), B(w_2)$ thuộc đường tròn (C) sao cho $|w_1-w_2|=AB=2$, cùng với tọa độ điểm $C(0;5)$, và gọi E là trung điểm AB, khi đó ta có:

$$P=|w_1-5i|^2-|w_2-5i|^2=\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2=\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=IA^2-IB^2+2\overrightarrow{CI}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}$$

Ta có: $2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}=2CI.AB\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{AB}}\right)$ nên P max khi hai vector $\overrightarrow{CI}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

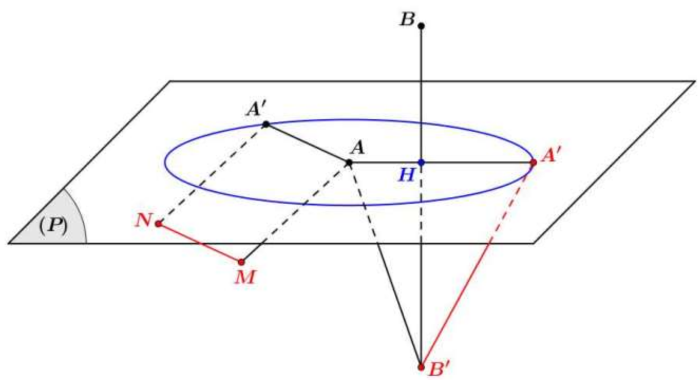
Suy ra: $P=2CI.AB\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{AB}}\right)\le 2CI.AB=4\sqrt{37}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+2z-5=0$ và hai điểm $A(8;-3;3)$, $B(11;-2;13)$. Gọi M, N là hai điểm thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MN=\sqrt{6}$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{53}$. **C.** $4\sqrt{33}$. **D.** $2\sqrt{33}$.

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



Đầu tiên ta cần vẽ một mặt phẳng (P) chứa A và song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+2z-5=0$.

Xét mặt phẳng $(P): 3x-y+2z+33=0$. Dựng đường tròn (C) tâm A, bán kính $AA'=MN=\sqrt{6}$ với $A'\in(C)$ sao cho $AA'NM$ là hình bình hành. Đến đây ta nhận thấy A', B đều cùng phía với mặt phẳng (α) nên ta suy ra: $AM+BN=A'N+BN\ge A'N+B'N\ge A'B'$ với $B'(-13;6;-3)$ là điểm đối xứng với B qua (α)

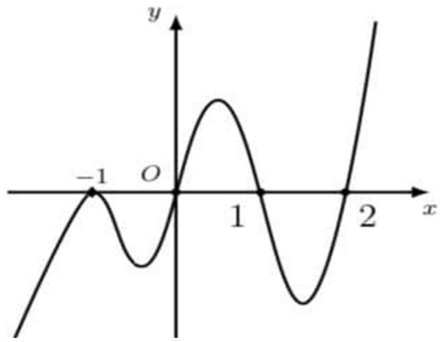
Gọi $H(5;0;9)$ là hình chiếu của B' lên (P) khi đó ta suy ra HA' đạt giá trị nhỏ nhất khi ba điểm A, H, A' thẳng hàng với H nằm giữa A và A'. Ta có: $AH=3\sqrt{6}$ nên suy ra $HA'_{\min}=|AA'-AH|=|MN-AH|=2\sqrt{6}$

Vậy với $B'H=6\sqrt{14}$ ta suy ra $(AM+BN)_{\min}=A'B'_{\min}=\sqrt{B'H^2+A'H^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{14}\right)^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2}=4\sqrt{33}$.

Chọn đáp án C.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.

Số giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f\left(x^2-2|x|+\dfrac{m}{2}\right)$ có 9 điểm cực trị là



A. 11. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 12.

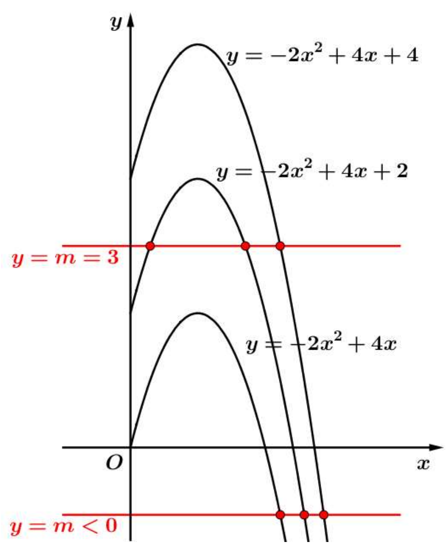
Lời giải

Nhìn vào đồ thị trên ta suy ra: $f'(x)=(x+1)^2 x(x-1)(x-2)$ (trong đó $x=-1$ là nghiệm bội chẵn).

Khi đó ta xét: $y=g(x)=f\left(|x|^2-2|x|+\dfrac{m}{2}\right)$ có $g(-x)=g(x)$ nên suy ra $g(x)$ là hàm chẵn.

Suy ra hàm số $h(x)=f\left(x^2-2x+\dfrac{m}{2}\right)$ phải có 4 điểm cực trị dương tức phương trình $h'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ dương phân biệt. $h'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x+\dfrac{m}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; x^2-2x+\dfrac{m}{2}=0 \\ x^2-2x+\dfrac{m}{2}=1; x^2-2x+\dfrac{m}{2}=2 \end{array}\right.$

Khi đó ta cần hệ: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2x^2+4x+2 \\ m=-2x^2+4x+4 \\ m=-2x^2+4x \end{array}\right.$ có 3 nghiệm dương phân biệt khác 1. Từ đó ta có hình vẽ sau:



Từ hình vẽ trên ta suy ra: $ycbt \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\le 0 \\ m=3 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in(-10;10)} m\in\{-9;-8;..-1;0;3\}$ tức có 11 giá trị nguyên m thỏa mãn. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên $a<11$ sao cho ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b\in(0;8)$ thỏa mãn $\log_4(b^2+12)+\log_3[(b+7)(a-3)]+\log_5(a+19)\ge 7$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Ta có bất phương trình tương đương với: $\log_4\left(b^2+12\right)+\log_3\left[(b+7)(a-3)\right]+\log_5(a+19)-7\ge 0$

Xét hàm số $y=f_a(b)=\log_4\left(b^2+12\right)+\log_3\left[(b+7)(a-3)\right]+\log_5(a+19)-7$ có

$f_a'(b)=\dfrac{2b}{\left(b^2+12\right)\ln 4}+\dfrac{1}{(b+7)\ln 3}>0,\forall b\in(0;8)$ nên hàm số $f_a(b)$ luôn đồng biến trên $(0;8)$.

Do ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b\in(0;\,8)$ tức $b:7\to 2$ nên suy ra $f_a(2)\ge 0$

$\Leftrightarrow \log_4 16+\log_3\left[9(a-3)\right]+\log_5(a+19)-7\ge 0,\forall a\in(3;11)$

$\Leftrightarrow \log_3(a-3)+\log_5(a+19)-3\ge 0\Leftrightarrow \log_3(a-3)+\log_5(a+19)\ge 3$

Xét hàm số $y=g(a)=\log_3(a-3)+\log_5(a+19)$ có $g'(a)>0,\forall a\in(3;11)$ và $g(6)=3$, suy ra $a\ge 6$

Vậy ta suy ra: $a\in\{6;7;8;9;10\}$ tức có 5 giá trị nguyên a thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

SỞ PHÚ THỌ LẦN 2

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_8\left(x^2+4mx+12m\right)<\log_8\left(x^2+4x+12\right)\log_8\left(x^2+8x+24\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $x^2+4x+12=(x+2)^2+8>0;x^2+8x+24=(x+4)^2+8>0$ nên bất phương trình tương đương với:

$\Leftrightarrow \log_8\left(x^2+4mx+12m\right)<\log_8\left((x+2)^2+8\right)\log_8\left((x+4)^2+8\right)$. (*)

Xét $\begin{cases}m=1\\m=2\end{cases}$ thì bất phương trình lần lượt trở thành: $\begin{cases}x^2+4x+4=(x+2)^2>0\\x^2+8x+16=(x+4)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -2\\x\ne -4\end{cases}$ (loại)

Suy ra <u>điều kiện cần</u> chính là: $g(x)=x^2+4mx+12m>0\Rightarrow \Delta'_{g(x)}=4m^2-12m<0\Leftrightarrow 0<m<3$.

Khi đó ta suy ra $m\ne\{1;2\}$ và (*) trở thành: $x^2+4mx+12m<8^{\log_8\left((x+2)^2+8\right)\log_8\left((x+4)^2+8\right)}$

$\Leftrightarrow x^2+m(4x+12)<\left((x+2)^2+8\right)^{\log_8\left((x+4)^2+8\right)}$ (1).

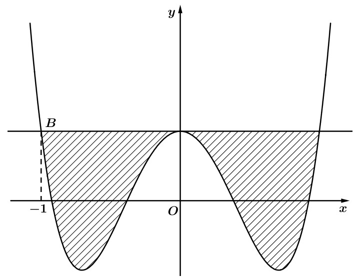
Xét $m=-3$ thì (1) thành: $x^2<9^{\log_8 9}\Leftrightarrow -3^{\log_8 9}<x<3^{\log_8 9}$ (loại).

Xét $m\ne -3$ thì (1) thành: $\Leftrightarrow m<\dfrac{\left((x+2)^2+8\right)^{\log_8\left((x+4)^2+8\right)}-x^2}{4x+12}$.

Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{\left((x+2)^2+8\right)^{\log_8\left((x+4)^2+8\right)}-x^2}{4x+12}$ có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-2\end{array}\right.$. Cùng với $g''(-2)>0$ nên ta suy ra <u>điều kiện đủ</u> là: $m\le\min\limits_{R} g(x)=g(-2)\Leftrightarrow m\le 2$

Kết hợp <u>điều kiện cần và đủ</u> ta suy ra $0<m\le 2\Leftrightarrow m\in\{1;2\}$. Do ta đã loại 2 giá trị này ban đầu nên suy ra không có giá trị m nào thỏa. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết miền tô đậm có diện tích bằng $\frac{4}{15}$ và điểm B có hoành độ bằng -1. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để hàm số $y=f\left(m-3^x\right)$ có đúng một điểm cực trị là



A. 1. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Đường thẳng $(d): y=g(x)$ song song với trục hoành cắt đồ thị $(C): y=ax^4+bx^2+c$ tại hai điểm B và C

Mà điểm B có hoành độ bằng -1 nên điểm C có hoành độ bằng 1. Khi đó ta có:

$S=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|ax^2\left(x^2-1\right)\right|dx=\frac{4}{15}|a|$, mà $S=\frac{4}{15}$ nên suy ra $a=1$, tức $y=x^4+bx^2+c$.

Mà mặt khác $f(-1)=1+b+c=f(0)=c\Rightarrow b=-1\Rightarrow y=f(x)=x^4-x^2+c\Rightarrow f'(x)=4x^3-2x$.

Giải phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-2x=2x\left(2x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0;x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Xét hàm số $y=h(x)=f\left(m-3^x\right)$ có $h'(x)=-3^x\ln 3 f'\left(m-3^x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3^x=0\\ m-3^x=\frac{1}{\sqrt{2}};m-3^x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3^x\\ m=3^x+\frac{1}{\sqrt{2}};m=3^x-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\ (*)$. Mà $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}3^x-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \lim\limits_{x\to-\infty}3^x+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$ nên ta suy ra để $g(x)$ có đúng 1 điểm cực trị (tức (*) có 1 nghiệm duy nhất) thì $m=0$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho phương trình $\log_a 4+\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+ax+2}+4\right)\log_a\left(x^2+ax+5\right)=0$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số a để phương trình có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Điều kiện: $0<a\neq 1$. Ta có phương trình: $\log_a 4+\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+ax+2}+4\right)\log_a\left(x^2+ax+5\right)=0$ (1)

(1) $\Leftrightarrow\log_5\left(\sqrt{x^2+ax+2}+4\right)\log_a\left(x^2+ax+5\right)=\log_a 4$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+ax+2}\geq 0$ khi đó phương trình trở thành $\Leftrightarrow\log_5(t+4)\log_a\left(t^2+3\right)=\log_a 4$ (2). Khi đó ta chia hai trường hợp như sau:

<u>Trường hợp 1:</u> $0<a<1\Rightarrow\frac{1}{\log_4 a}<0$ thì (2) thành $\Leftrightarrow\log_5(t+4)\log_4\left(t^2+3\right)=\log_a 4<0$

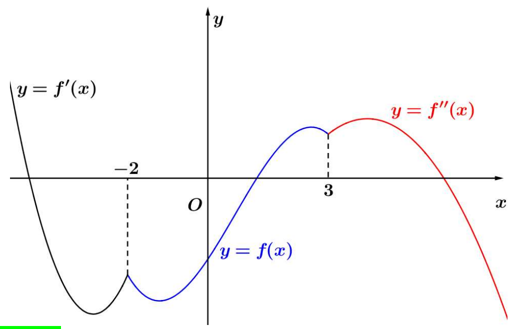
Hàm vế trái $y=f(t)=\log_5(t+4)\log_4\left(t^2+3\right)$ có $f'(t)\geq 0,\ \forall t\in[0;+\infty)$ tức $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Để ý $f(1)=1$ nên ta suy ra $\left[\begin{array}{l}\log_a 4=1\\ t=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=4\\ x^2+ax+1=0\ \ (*)\end{array}\right.$.

Phương trình có nghiệm duy nhất nên ta suy ra $a=\pm 2$. Đối chiếu với điều kiện, ta loại.

Trường hợp 2: $a>1$ thì (2) ta đánh giá tương tự $\Leftrightarrow \log_5(t+4)\log_4(t^2+3)=\log_a 4>0$, đánh giá tương tự trường hợp ta cũng suy ra $a=\pm 2$, đối chiếu điều kiện ta thu được $a\in\{2\}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên $(-\infty;-2]$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ và đồ thị hàm số $y=f''(x)$ trên $[3;+\infty)$. Số điểm cực trị tối đa của hàm số $y=f(x)$ là



A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Đầu tiên từ hình vẽ, ta dễ dàng nhận thấy $f(x)$ có 2 điểm cực trị trên đoạn $[-2;3]$

Tiếp đến xét trên $(-\infty;-2]$, ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm nên $f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Cuối cùng, xét trên $[3;+\infty)$, ta nhận thấy phương trình $f''(x)=0$ có 1 nghiệm nên suy ra $f'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm trên $[3;+\infty)$, tức $f(x)$ có tối đa 2 điểm cực trị trên $[3;+\infty)$.

Vậy tổng cộng số điểm cực trị tối đa của hàm số $y=f(x)$ là 5 điểm cực trị. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-2-2i|=\frac{1}{8}$ và $|z_2-1|+|z_2+1|=2\sqrt{5}$. Số phức z thỏa mãn $|2z+2-5i|=|2z+3-6i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z-2z_1|+|z-z_2|$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** 5.

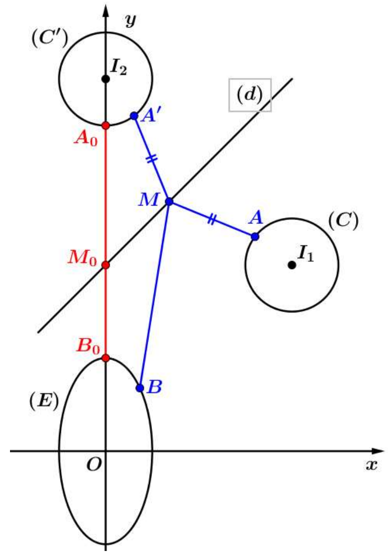
Lời giải

Thông qua biến đổi đại số ta suy ra được quỹ tích của các số phức $2z_1,z_2$ và z như sau:

$$\begin{cases}A(2z_1)\in(C):(x-4)^2+(y-4)^2=\frac{1}{16}\\ B(z_2)\in(E):x^2+\frac{y^2}{4}=1;M(z)\in(d):y=x+4\end{cases}\Rightarrow P=|z-2z_1|+|z-z_2|=MA+MB.$$

Ta gọi (C') là đường tròn đối xứng với (C) qua (d), suy ra ta có: $(C'):x^2+(y-8)^2=\frac{1}{16}$ với $A'\in(C')$.

Từ hình vẽ trên ta kết luận.



$P=|z-2z_1|+|z-z_2|=MA+MB=MA'+MB\geq A_0B_0=\dfrac{23}{4}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;6),B(3;3;-9)$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z-12=0$. Điểm M di động trên (P) sao cho MA,MB luôn tạo với (P) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tung độ của tâm đường tròn đó bằng

A. 0. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** -12. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $M(a;b;c)$, khi đó ta gọi E,F là các chân đường vuông góc từ A,B hạ xuống (P).

Ycbt $\Leftrightarrow \sin\widehat{AME}=\sin\widehat{BMF}\Leftrightarrow \dfrac{AE}{AM}=\dfrac{BF}{BM}\Leftrightarrow \dfrac{d(A;(P))}{AM}=\dfrac{d(B;(P))}{BM}\Leftrightarrow \dfrac{6}{AM}=\dfrac{3}{BM}\Leftrightarrow MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+2)^2+(c-6)^2=4\left((a-3)^2+(b-3)^2+(c+9)^2\right)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-\dfrac{20}{3}a-\dfrac{28}{3}b+28c+\dfrac{352}{3}=0$

Suy ra $M\in(S)$ tâm $I\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{14}{3};-14\right)$ và bán kính $R=\ldots$. Mặt khác $M\in(P)$ nên suy ra quỹ tích điểm M là một đường tròn (C) thiết diện tạo bởi mặt cắt giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu với tâm đường tròn E là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Ta có phương trình đường thẳng (d), qua I, vuông góc (P) là: $\begin{cases} x=\dfrac{10}{3}+2t \\ y=\dfrac{14}{3}+2t,t\in\mathbb{R} \\ z=-14-t \end{cases}$. Mà $E\in(d)\cap(P)$ nên

ta suy ra: $2\left(\dfrac{10}{3}+2t\right)+2\left(\dfrac{14}{3}+2t\right)-(-14-t)-12=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow y_E=\dfrac{14}{3}+2(-2)=\dfrac{2}{3}$. **Chọn đáp án D.**

NGƯỜI BIÊN SOẠN: TRẦN MINH QUANG

SỞ LAI CHÂU LẦN 1

Câu 40. Tìm số giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn $e^{x^2+y^2-m}+e^{x+y+xy-m}=x^2+y^2+x+y+xy-2m+2$.

A. 6. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Xét hàm số $f(t)=e^t-t-1$, $\forall t\in\mathbb{R}$. $f'(t)=e^t-1$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$.

Ta thấy $f'(t)$ đổi dấu từ "- " sang "+" khi qua $t=0$ nên $f(t)\ge f(0)=0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó: $\begin{cases} e^{x^2+y^2-m}-(x^2+y^2-m)-1\ge 0,\forall x,y\in\mathbb{R} \\ e^{x+y+xy-m}-(x+y+xy-m)-1\ge 0,\forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x+y+xy=m \end{cases}$.

Hay $e^{x^2+y^2-m}+e^{x+y+xy-m}=x^2+y^2+x+y+xy-2m+2\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=m & (1) \\ x+y+xy=m & (2) \end{cases}$

Đặt $S=x+y, P=x.y$, ta có: $\begin{cases} S^2-2P=m \\ S+P=m \end{cases}\Rightarrow S^2-S-3P=0$. Vì $S^2\ge 4P\Rightarrow S\in[0;4]$

Lấy $(1)+2.(2)$ vế theo vế ta được: $S^2+2S=3m$ (3).

Xét hàm số $f(S)=S^2+2S, S\in[0;4]$, có $f'(S)=2S+2>0,\forall S\in[0;4]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow(3)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow f(0)\le 3m\le f(4)\Leftrightarrow 0\le m\le 8$. Vậy, có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

Câu 41. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z-3-2i|=|\bar{z}-1|, |z_1-z_2|=2\sqrt{2}$ và số phức w thỏa mãn $|w-2-4i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_2-2-3i|+|z_1-w|$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{17}-1$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$, sử dụng phép biến đổi đại số, suy ra $|z-3-2i|=|\bar{z}-1|\Leftrightarrow x+y-3=0$

Suy ra: $\begin{cases} A(z_1),B(z_2)\in(d):x+y-3=0 \\ C(w)\in(C):(x-2)^2+(y-4)^2=1 \end{cases}$ với (C) có tâm $I(2;4), R=1$.

Đặt $\begin{cases} A(a;3-a) \\ B(b;3-b) \end{cases}(b>a)$, khi đó ta suy ra:

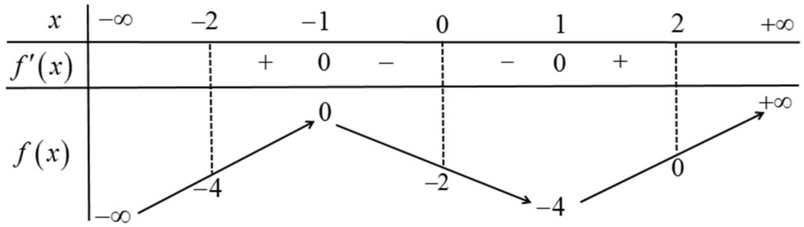
$|z_1-z_2|=AB=2\sqrt{2}\Leftrightarrow AB^2=8\Leftrightarrow 2(b-a)^2=8\Leftrightarrow \begin{cases} b-a=2 \\ b-a>0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} A(a;3-a) \\ B(2+a;1-a) \end{cases}$.

Cùng với $E(2;3)$, ta suy ra:

$P=|z_2-2-3i|+|z_1-w|=BE+AC\ge BE+AI-R=\sqrt{(a-2)^2+(a+1)^2}+\sqrt{a^2+(a+2)^2}-1$.

Xét hàm số $y=f(a)=\sqrt{(a-2)^2+(a+1)^2}+\sqrt{a^2+(a+2)^2}$ có $\min\limits_{R} f(a)=f\left(-\frac{2}{5}\right)=\sqrt{17}$ nên từ đó ta suy ra $P\ge\sqrt{17}-1$. **Chọn đáp án B.**

Câu 42. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên



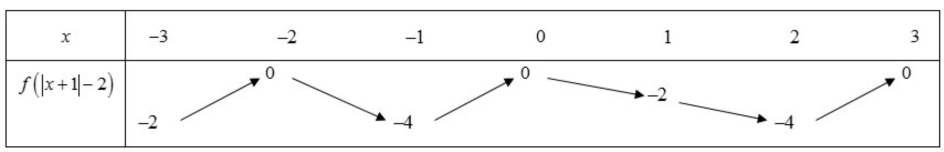
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f\left(\left|x+1\right|-2\right)\right)=m$ có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-3;3\right]$. Số phần tử của tập hợp S là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $t=f\left(\left|x+1\right|-2\right)$. Khi $x>-1$, ta có $y=f\left(\left|x+1\right|-2\right)=f\left(x-1\right)$.

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ sang phải 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)$ và vì đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x+1\right|-2\right)$ nhận đường thẳng $x=-1$ làm trục đối xứng nên ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x+1\right|-2\right)$:



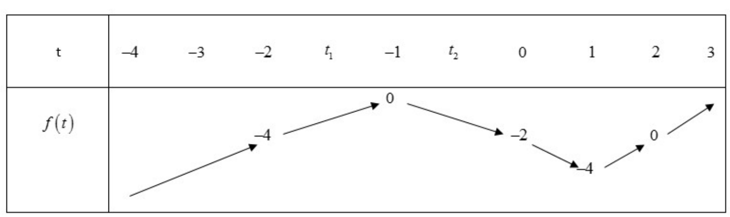
Với $x\in\left[-3;3\right]$, ta có $t\in\left[-4;0\right]$.

+) Nhận xét:

Mỗi $t\in\left(-4;-2\right)$ cho 4 nghiệm $x\in\left[-3;3\right]$; Mỗi $t\in\left[-2;0\right)$ cho 5 nghiệm $x\in\left[-3;3\right]$.

Với $t=-4$, ta có 2 nghiệm $x\in\left[-3;3\right]$; Với $t=0$, ta có 3 nghiệm $x\in\left[-3;3\right]$.

+) Ta có phương trình $f\left(f\left(\left|x+1\right|-2\right)\right)=m$ trở thành phương trình $\Leftrightarrow f\left(t\right)=m$.



+) Phương trình $f\left(f\left(\left|x+1\right|-2\right)\right)=m$ có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-3;3\right]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in\left[-2;0\right)\Leftrightarrow -2<m<0$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=-1$. **Chọn đáp án B.**

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $\left(P\right):x-y+z+3=0$, $\left(Q\right):x+2y-2z-5=0$, và mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Gọi M là điểm di động trên $\left(S\right)$ và N là điểm di động trên $\left(P\right)$ sao cho MN luôn vuông góc với $\left(Q\right)$. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN là

A. $3+5\sqrt{3}$. **B.** 28. **C.** $9+5\sqrt{3}$. **D.** 14.

Lời giải

Đầu tiên ta có: mặt cầu (S) tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=5$, $d(I;(P))=3\sqrt{3}>5$ tức ta suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S)

Do MN luôn vuông góc với (Q) nên vector chỉ phương của MN là $\vec{u}=(1;2;-2)$, cùng với vector pháp tuyến mặt phẳng (P) có dạng $\vec{n}=(1;-1;1)$ ta suy ra sin góc giữa MN và (P) là:

$\sin\left(\widehat{MN;(P)}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ từ đó suy ra $MN=\dfrac{d(M;(P))}{\sin\left(\widehat{MN;(P)}\right)}=\sqrt{3}d(M;(P))\le\sqrt{3}\left[d(I;(P))+R\right]=9+5\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN là $9+5\sqrt{3}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 44. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-6z+m=0$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là một giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$. Hỏi trong khoảng $(0;20)$ có bao nhiêu giá trị $m_0\in\mathbb{N}$.

A. 13. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $\Delta'=9-m$. Nếu $\Delta'>0\Leftrightarrow 9-m>0\Leftrightarrow m<9$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1,z_2 và $z_1=\overline{z_1};z_2=\overline{z_2}$ nên $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}\Leftrightarrow z_1^2=z_2^2\Leftrightarrow z_1=-z_2\Leftrightarrow z_1+z_2=0$. Điều này không xảy ra.

Nếu $\Delta'<0\Leftrightarrow 9-m<0\Leftrightarrow m>9$, thì phương trình có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp .

Khi đó $z_1=\overline{z_2}$; $\overline{z_1}=z_2$ nên ta luôn có $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}$, hay $m>9$ luôn thỏa mãn.

Vì $m_0\in\mathbb{N}$ và $m_0\in(0;20)$ nên có 10 giá trị m_0 thỏa mãn. **Chọn đáp án D.**

Câu 45. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn, mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC), góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải

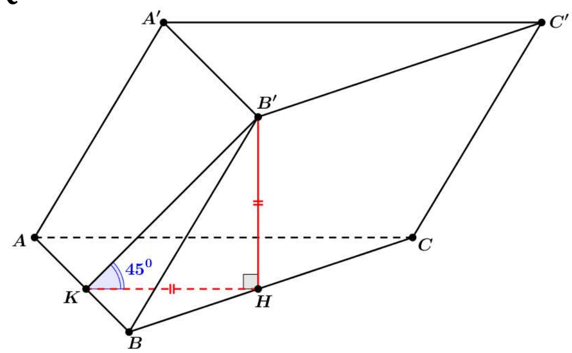
Đầu tiên ta có: $AB=a, AC=a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của B' lên BC

Suy ra $H\in BC$ (do $\widehat{B'BC}$ nhọn). Kéo theo $B'H\perp(ABC)$ (do $(BCC'B')\perp(ABC)$).

Kẻ $HK\parallel AC$ với $K\in AB$, suy ra $HK\perp AB$.

Từ đó ta có: $\left(\widehat{(ABB'A');(ABC)}\right)=\widehat{B'KH}=45^\circ$, suy ra $\Delta B'KH$ vuông cân tại H tức $B'H=KH$. (1)

Mặt khác ta có: $HK\parallel AC$ nên ta có tỉ số sau: $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{HK}{AC}\Rightarrow BH=\dfrac{HK.2a}{a\sqrt{3}}$ (2)



Tiếp đến ta lại có: $BH=\sqrt{4a^2-B'H^2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra phương trình sau: $BH=\sqrt{4a^2-B'H^2}=\dfrac{B'H.2a}{a\sqrt{3}}\Leftrightarrow B'H=a\sqrt{\dfrac{12}{7}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=B'H.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.B'H=\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó tích phân $\int\limits_0^5 x^2f'(x)dx$ bằng

A. -25. **B.** $\dfrac{123}{5}$. **C.** 23. **D.** 15.

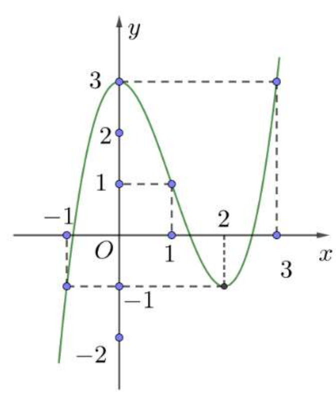
Lời giải

Đầu tiên ta có: $\int\limits_0^1 xf(5x)dx=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 xf(5x)d(5x)=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^5\dfrac{x}{5}f(x)dx=1\Leftrightarrow\int\limits_0^5 xf(x)dx=25$

Ta có tiếp: $\begin{cases}u=f(x)\to du=f'(x)dx\\ dv=xdx\to v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases},\Rightarrow 25=\int\limits_0^5 xf(x)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}f(x)\right]_0^5-\int\limits_0^5 x^2f'(x)dx=\dfrac{25}{2}-\int\limits_0^5\dfrac{x^2}{2}f'(x)dx$

Vậy $\int\limits_0^5\dfrac{x^2}{2}f'(x)dx=\dfrac{25}{2}-25=-\dfrac{25}{2}\Rightarrow\int\limits_0^5 x^2f'(x)dx=-25$. **Chọn đáp án A.**

Câu 47. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

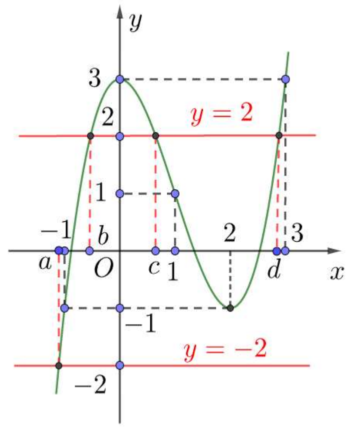


Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

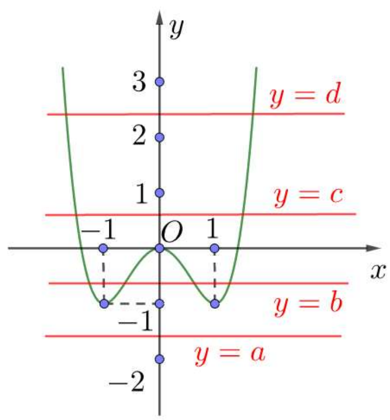
Phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^4-2x^2\right)=2 \\ f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \end{array}\right.$.



* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-2x^2=b, \left(-1<b<0\right) \\ x^4-2x^2=c, \left(0<c<1\right); x^4-2x^2=d, \left(2<d<3\right) \end{array}\right.$.

* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \Leftrightarrow x^4-2x^2=a, \left(-2<a<-1\right)$.

Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^4-2x^2=a, \left(-2<a<-1\right)$ không có nghiệm thực.
- Phương trình $x^4-2x^2=b, \left(-1<b<0\right)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=c, \left(0<c<1\right)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=d, \left(2<d<3\right)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ có 8 nghiệm thực phân biệt. **Chọn đáp án A.**

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, từ điểm $A(1;1;0)$ ta kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;1)$, bán kính $R=1$. Gọi $M(a;b;c)$ là một trong các tiếp điểm ứng với các tiếp tuyến trên. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left|2a-b+2c\right|$

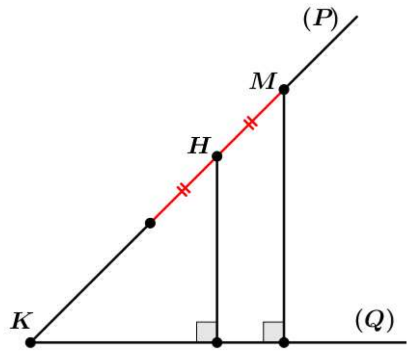
A. $\dfrac{3+\sqrt{41}}{15}$. **B.** $\dfrac{3+2\sqrt{41}}{5}$. **C.** $\dfrac{3+\sqrt{41}}{5}$. **D.** $\dfrac{3+2\sqrt{41}}{15}$.

Lời giải

Ta có $IA=\sqrt{5}$ nên ta suy ra $AM=\sqrt{IA^2-R^2}=2$, từ đó ta suy ra M sẽ luôn thuộc mặt phẳng (P) với mặt phẳng (P) là phương trình từ phép tính $(A;AM)-(I;1)$, tức ta suy ra phương trình có dạng là: $(P):2x-z+2=0$, mà $M\in(S)$ nên suy ra M thuộc đường tròn thiết diện $(C)=(S)\cap(P)$ có tâm H.

Xét ΔMAI vuông tại M có đường cao MH, ta có: $HA=4HI\Rightarrow \overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HI}=0\Leftrightarrow H\left(-\frac{3}{5};1;\frac{4}{5}\right)$.

Suy ra đường tròn (C) có tâm $H\left(-\frac{3}{5};1;\frac{4}{5}\right)$ và bán kính $r=\frac{2}{\sqrt{5}}$ tức ta có hình vẽ như sau:



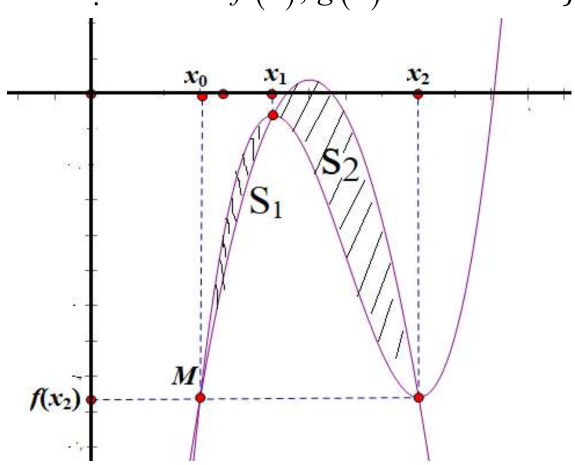
Xét mặt phẳng $(Q):2x-y+2z=0$, ta có: $\cos\alpha=\cos\left(\widehat{(P);(Q)}\right)=\frac{2}{3\sqrt{5}}\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{41}}{3\sqrt{5}}$.

Mà ta có: $d\left(H;(Q)\right)=\frac{1}{5}$ nên ta suy ra $HK=\frac{d\left(H;(Q)\right)}{\sin\alpha}=\frac{3}{\sqrt{205}}\Rightarrow KM=KH+HM=\frac{3}{\sqrt{205}}+\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Nhận thấy $d\left(M;(Q)\right)=\frac{|2a-b+2c|}{3}=\frac{T}{3}$ nên ta suy ra: $T=3d\left(M;(Q)\right)$, kéo theo đó ta có được:

$T=3d\left(M;(Q)\right)\le 3KM\sin\alpha=3\left(\frac{3}{\sqrt{205}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{\sqrt{41}}{3\sqrt{5}}=\frac{3+2\sqrt{41}}{5}$. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1,x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)-3f(x_2)=0$, và đồ thị luôn đi qua $M\left(x_0;f(x_0)\right)$ trong đó $x_0=x_1-1$. $g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị qua 2 điểm cực trị và M. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tạo bởi đồ thị hai hàm $f(x)$, $g(x)$ như hình vẽ).



A. $\frac{5}{32}$. **B.** $\frac{6}{35}$. **C.** $\frac{7}{33}$. **D.** $\frac{4}{29}$.

Lời giải:

Nhận thấy hình phẳng trên có diện tích không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho $x_0 = 0$. Khi đó ta có $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Xét hàm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$.

Vì $x_1 = 1,\ x_2 = 3$ là các điểm cực trị nên ta có: $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases}$ (1).

Hơn nữa, ta có $f(1) = 3f(3) \Leftrightarrow a + b + c + d = 81a + 27b + 9c + 3d$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \\ d = 2a \end{cases}$.

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy: $\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(1) = 3g(3) \\ g(0) = g(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2a \\ m + n + p = 6a \\ 9m + 3n + p = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2a \\ n = 6a \\ p = 2a \end{cases}$.

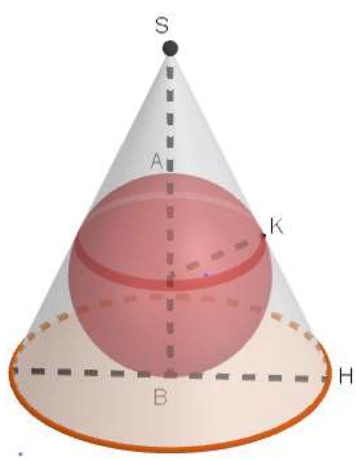
Suy ra: $f(x) = a\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 2\right)$, $g(x) = a\left(-2x^2 + 6x + 2\right)$.

Khi đó ta có: $S_1 = |a|.\int_0^1 \left|x^3 - 4x^2 + 3x\right| \mathrm{d}x = \frac{5}{12}|a|$, $S_2 = |a|\int_1^3 \left|x^3 - 4x^2 + 3x\right| \mathrm{d}x = \frac{8}{3}|a|$. Do đó, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{32}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3), B(6;5;5)$. Xét khối nón (N) ngoại tiếp mặt cầu đường kính AB có B là tâm đường tròn đáy khối nón. Gọi S là đỉnh khối nón (N). Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng qud đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b + c + d$?

A. $T = 24$. **B.** $T = 12$. **C.** $T = 36$. **D.** $T = 18$.

Lời giải



Thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất khi chiều cao của khối nón gấp đôi đường kính mặt cầu.

(*Chứng minh*: Gọi tâm mặt cầu là I , khi đó có

$S_{SBH}=S_{SIH}+S_{BIH}\Rightarrow \frac{1}{2}SB.BH=\frac{1}{2}IK.SH+\frac{1}{2}IB.BH\Rightarrow y.x=r\left(\sqrt{y^2+x^2}+x\right)\Leftrightarrow x^2=\frac{r^2y}{y-2r}$

Với chiều cao khối nón là y , bán kính đáy là x ; bán kính mặt cầu là r $(x>0;y>2r)$.

Thể tích khối nón là

$V=\frac{1}{3}\pi x^2y=\frac{1}{3}\pi r^2.\frac{y^2}{y-2r}=\frac{1}{3}\pi r^2.\frac{y^2}{y-2r}=\frac{1}{3}\pi r^2.\left(y-2r+\frac{4r^2}{y-2r}+4r\right)\geq\frac{1}{3}\pi r^2.\left(2\sqrt{(y-2r).\frac{4r^2}{y-2r}}+4r\right)=\frac{8}{3}\pi r^3.$

Thể tích khối nón nhỏ nhất khi $y-2r=\frac{4r^2}{y-2r}\Leftrightarrow y=4r\Rightarrow dpcm.$)

Tiếp đến ta có đường kính mặt cầu: $AB=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$.

Mặt phẳng (α) chứa đường tròn đáy của (N) đi qua B và nhận $\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$ làm vectơ pháp tuyến. Suy ra phương trình mặt phẳng (α) là: $4(x-6)+4(y-5)+2(z-5)=0\Leftrightarrow 2x+2y+z-27=0$

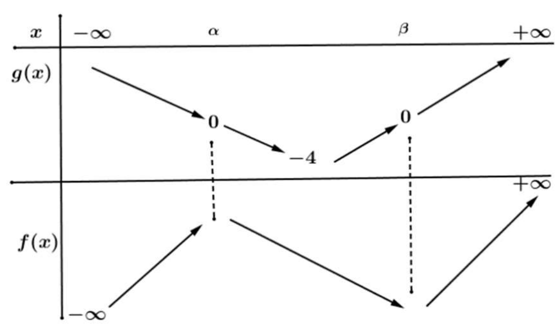
Do mặt phẳng (β) qua đỉnh S và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình

$2x+by+cz+d=0$ nên ta có: $\begin{cases}b=2,c=1\\ \mathrm{d}(B;(\beta))=2AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2,c=1\\ \frac{|2.6+b.5+c.5+d|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2,c=1\\ |27+d|=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2,c=1\\ \left[\begin{array}{l}d=9\\ d=-63\end{array}\right.\end{cases}.$

Vậy $b=2,c=-1,d=19$ (do $\mathrm{d}(B;(\beta))>\mathrm{d}(A;(\beta))$). Khi đó $b+c+d=12$. **Chọn đáp án B.**

CHUYÊN HÀ TĨNH LẦN 1

Câu 44. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3-3x^2+bx+1-2d$ và $g(x)=cx^2-2x+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2=30$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),y=g(x),x=-3,x=6$ bằng



A. $\frac{2113}{12}$. **B.** $\frac{1123}{12}$. **C.** $\frac{1231}{12}$. **D.** $\frac{1321}{12}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3ax^2-6x+b$

Từ BBT suy ra $f'(x)$ và $g(x)$ có chung hai nghiệm là α và $\beta\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{2}{c}=\frac{6}{3a}\\ \alpha.\beta=\frac{d}{c}=\frac{b}{3a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=c\\ b=3d\end{cases}$

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{c};-4\right)$ và $c>0$

$\Rightarrow c.\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{2}{c}+d=-4 \Leftrightarrow d=\dfrac{1}{c}-4 \Rightarrow b=\dfrac{3-12c}{c}$

Xét $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow ax^3-(3+c)x^2+(b+2)x+1-3d=0$ (*)

Từ giả thiết suy ra phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa mãn

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=30 \Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=30$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c+3}{a}\right)^2-2.\frac{b+2}{a}=30 \Leftrightarrow \left(\frac{c+3}{c}\right)^2-2.\frac{\frac{3-12c}{c}+2}{c}=30 \Leftrightarrow (c+3)^2-2(3-10c)-30c^2=0$$

$$\Leftrightarrow -29c^2+26c+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c=1 & (tm) \\ c=-\dfrac{3}{29} & (loai) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow c=1; a=1; b=-9; d=-3 \;\Rightarrow f(x)-g(x)=x^3-4x^2-7x+10$

$\Rightarrow S=\displaystyle\int_{-3}^{6}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{6}\left|x^3-4x^2-7x+10\right|dx=\frac{1321}{12}$. **Chọn đáp án D.**

Câu 46. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $\log_7\dfrac{2x^3-3x^2+1}{6xy+1+2x+3y}=14x+3y-7(x^2+1)$ đồng thời $1<x<2022$?

A. 1347. **B.** 1348. **C.** 674. **D.** 673.

Lời giải

Ta có $\log_7\dfrac{2x^3-3x^2+1}{6xy+1+2x+3y}=14x+3y-7(x^2+1) \Leftrightarrow \log_7\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{(3y+1)(2x+1)}=14x+3y-7(x^2+1)$

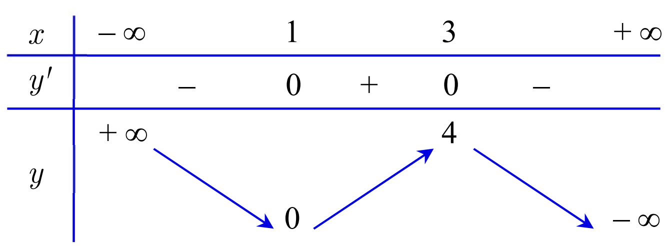
$\Leftrightarrow \log_7(x-1)^2-\log_7(3y+1)=3y-7(x-1)^2 \;\Leftrightarrow \log_7(x-1)^2+7(x-1)^2=\log_7(3y+1)+3y$

$\Leftrightarrow \log_7 7(x-1)^2+7(x-1)^2=\log_7(3y+1)+3y+1$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$, $\forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó, (*) $\Leftrightarrow 7(x-1)^2=3y+1 \Rightarrow y=\dfrac{7(x-1)^2-1}{3}$. y nguyên dương khi $7(x-1)^2-1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow x$ chia hết cho 3 hoặc x chia 3 dư 2. Do đó $x\in\{2;3;...;2021\}\setminus\{4;7;10;....;2020\}$. Vậy có $2020-673=1347$ cặp $(x;y)$ thỏa mãn. **Chọn đáp án A**

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(x-1)+2$ như sau



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2\cos 2x+4\sin x-1$ là:

A. -9. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

$y=f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2\cos 2x+4\sin x-1=f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2-\left(2\sin x-1\right)^2$

$\le f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sin x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$

Đặt $t-1=-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\Leftrightarrow\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|=3-t$. Mà $0\le\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|\le 2$ nên

$0\le 3-t\le 2\Leftrightarrow 1\le t\le 3$. Cho $g(t)=f(t-1)+2\le 4$. Với $g(t)=4\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

Vậy $y_{\max}=4\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$. **Chọn đáp án D.**

SỞ QUẢNG BÌNH LẦN 1

Câu 41. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a, có không quá 22 số nguyên b thỏa mãn $2^a+4.6^b<2^{a+b+2}+3^b$?

A. 31. **B.** 32. **C.** 33. **D.** 34.

Lời giải

Ta có $2^a+4.6^b<2^{a+b+2}+3^b\Leftrightarrow 2^a+4.6^b-2^{a+b+2}-3^b<0\Leftrightarrow 2^a-3^b-4.2^b\left(2^a-3^b\right)<0$

$\Leftrightarrow\left(1-4.2^b\right)\left(2^a-3^b\right)<0\Leftrightarrow\left(4.2^b-1\right)\left(3^b-2^a\right)<0$

Trường hợp 1: $4.2^b-1<0\Leftrightarrow b<-2\xrightarrow{b\in\mathbb{Z}}b\le -3$.

Xét phương trình $3^b-2^a=0\Leftrightarrow b=\log_3\left(2^a\right)\le -3\Leftrightarrow 2^a\le\dfrac{1}{27}\Leftrightarrow\begin{cases}a\le\log_2\left(\dfrac{1}{27}\right)\approx -4,75...\\ a\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing$.

Trường hợp 2: $4.2^b-1>0\Leftrightarrow b>-2\xrightarrow{b\in\mathbb{Z}}b\ge -1$.

Xét phương trình $3^b-2^a=0\Leftrightarrow b=\log_3\left(2^a\right)\ge -1\Leftrightarrow 2^a\ge\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\log_2\left(\dfrac{1}{3}\right)\approx -1,5\\ a\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Rightarrow a>0$.

Mà theo đề ứng với mỗi a, có không quá 22 số nguyên b thỏa mãn nên cùng với $b\ge -1$ ta suy ra

$b:-1\to 20\Rightarrow -1\le\log_3\left(2^a\right)\le 21\Rightarrow 2^a\le 3^{21}\Leftrightarrow a\le\log_2\left(3^{21}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}a\le 33,284\\ a\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Rightarrow a\in\{1;2;...;33\}$ tức có 33 giá trị nguyên a thỏa mãn bài toán. **Chọn đáp án C.**

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $(z+1-i)\left(\bar{z}+1+i\right)=5$ và $P=|z-2i|^2-|z+1|^2$. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng

A. -9. **B.** 11. **C.** -99. **D.** 99.

Lời giải

Ta có: $(z+1-i)\left(\bar{z}+1+i\right)=(z+1-i)\overline{(z+1-i)}=|z+1-i|^2=5\Leftrightarrow|z+1-i|=\sqrt{5}$. Đặt $z=x+yi$, ta có:

$\begin{cases}M(z)\in(C)\\ P=2x-4y+3\end{cases}\to\begin{cases}x+1=\sqrt{5}\cos t\\ y-1=\sqrt{5}\sin t\end{cases}\Rightarrow P=-2x-4y+3=-2\left(-1+\sqrt{5}\cos t\right)-4\left(1+\sqrt{5}\sin t\right)+3$

$\Rightarrow P=1-2\sqrt{5}\cos t-4\sqrt{5}\sin t$. Mà $\left(2\sqrt{5}\cos t-4\sqrt{5}\sin t\right)^2\le\left[\left(-2\sqrt{5}\right)^2+\left(-4\sqrt{5}\right)^2\right]\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)=100$ nên ta suy ra $-10+1\le 1+2\sqrt{5}\cos t-4\sqrt{5}\sin t\le 1+10\Leftrightarrow -9\le P\le 11\to$ Tích bằng -99. **Chọn đáp án C.**

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)=-4x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-1;1;3$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $y=g(x)$ là hàm số bậc hai đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=F(x)$ và $y=g(x)$ bằng

A. $\frac{128}{15}$. **B.** $\frac{64}{15}$. **C.** 16. **D.** 64 .

Lời giải

Ta có: $f(x)=-4\left(x^2-1\right)(x-3)\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=-x^4+4x^3+2x^2-12x+d$. Với $F(-1)=9+d$, $F(1)=-7+d$, $F(3)=9+d$ ta suy ra ba điểm cực trị của hàm số $y=F(x)$ có tọa độ lần lượt là $(-1;9+d)$, $(1;-7+d)$ và $(3;9+d)$. Xét hàm số bậc hai $y=mx^2+nx+p$ $(m,n,p\in\mathbb{R})$ đi qua ba điểm $(-1;9),(1;-7)$ và $(3;9)$. Từ đó ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}m-n+p=9\\m+n+p=-7\\9m+3n+p=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=4\\n=-8\\p=-3\end{cases}\Rightarrow y=4x^2-8x-3$. Suy ra $g(x)=4x^2-8x-3+d$. Ta có $F(x)-g(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x-\left(4x^2-8x-3\right)=-x^4+4x^3-2x^2-4x+3$.

Giải phương trình $F(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x=-1;x=1;x=3$

Vậy diện tích giới hạn bởi hai đường $y=F(x)$ và $y=g(x)$ là

$S=\int_{-1}^{3}\left|F(x)-g(x)\right|dx=\int_{-1}^{3}\left|-x^4+4x^3-2x^2-4x+3\right|dx=\frac{128}{15}$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=12$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+2=0$. Xét điểm M di động trên (P), các điểm A,B,C phân biệt di động trên (S) sao cho MA,MB,MC là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây ?

A. $E(12;23;25)$. **B.** $F\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $G(-12;23;-25)$. **D.** $H\left(\frac{3}{2};0;2\right)$.

Lời giải

Ta đặt $M(a;b;c)$ với $a-2b+2c+2=0$ và $A(x;y;z)\in(S)$ có tâm $I(-1;-1;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Do MA,MB,MC là các tiếp tuyến của (S) nên ta luôn có: $MI^2=MA^2+AI^2=MA^2+R^2=MA^2+12$.

$\Leftrightarrow(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+12$ (*)

Mà $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=12\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=9-2(x+y+z)$ nên thế vào (*) ta suy ra:

$\Rightarrow 2(a+b+c)+3=x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz)+12\Leftrightarrow 2(a+b+c)+3=9-2(x+y+z)-2(ax+by+cz)+12$

$\Leftrightarrow(a+1)x+(b+1)y+(c+1)z+(a+b+c)-9=0\Rightarrow(x+1)a+(y+1)b+(z+1)c+(x+y+z)-9=0$

Mà ta có phương trình: $a-2b+2c+2=0$ nên ta lập dãy tỉ số bằng nhau như sau:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{2}=\frac{-(x+y+z)+9}{-2}=\frac{(x+1)+(y+1)+(z+1)-(x+y+z)+9}{1+(-2)+2+2+(-2)}=\frac{-12}{1}=-12$$

Từ đó ta suy ra: $\frac{x+1}{1}=-12;\frac{y+1}{-2}=-12;\frac{z+1}{2}=-12\Leftrightarrow(x;y;z)=(-13;23;-25)$ tức mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $G(-12;23;-25)$. **Chọn đáp án C.**

THPT TRẦN NHÂN TÔNG - QUẢNG NINH LẦN 1

Câu 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w=\frac{1}{z-i.|z|}$ có phần ảo bằng $\frac{1}{4}$. Xét các số phức $z_1,z_2,z_3\in S$, giá trị lớn nhất của $P=z_1\overline{(z_3-z_2)}+z_2\overline{(z_3-z_1)}+z_3\overline{(z_1+z_2)}$ bằng

A. 6 . **B.** 8 . **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. $w=\frac{1}{-i|z|+z}$ nên $z-i.|z|\neq 0\Leftrightarrow x+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)i\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ \sqrt{x^2+y^2}\neq y\end{cases}\Leftrightarrow x\neq 0$.

Ta có: $w=\frac{1}{z-i.|z|}=\frac{1}{x+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)i}=\frac{x-\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)i}{x^2+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$, với số phức $w=\frac{1}{z-i.|z|}$ có phần ảo bằng $\frac{1}{4}$ nên theo giả thiết ta có: $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x^2+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}-2y=x^2+y^2-y\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-(y+2)\sqrt{x^2+y^2}+2y=0$ (*). Quy về phương trình bậc hai theo $\sqrt{x^2+y^2}$, ta có:

$$\Delta(*)=(y+2)^2-4.2y=(y-2)^2>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{(y+2)+(y-2)}{2}=y\\ \sqrt{x^2+y^2}=\frac{(y+2)-(y-2)}{2}=2\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{x^2+y^2}=2\\ x\neq 0\end{cases}.$$

Từ đó ta suy ra: $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$ thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R=2$.

Ta có: $P=z_1\overline{(z_3-z_2)}+z_2\overline{(z_3-z_1)}+z_3\overline{(z_1+z_2)}=z_1\overline{z_3}-z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}-z_2\overline{z_1}+z_3\overline{z_1}+z_3\overline{z_2}$

$=\left(z_1\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}\right)+\left(z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}\right)-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$

<u>Sử dụng tính chất sau:</u> $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1-z_2|^2$, từ đó ta biến đổi tiếp biểu thức trên:

$P=\left(z_1\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}\right)+\left(z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}\right)-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)=|z_1|^2+|z_3|^2-|z_1-z_3|^2+|z_2|^2+|z_3|^2-|z_2-z_3|^2-|z_1|^2-|z_2|^2+|z_1-z_2|^2$

$=2|z_3|^2-|z_1-z_3|^2-|z_2-z_3|^2+|z_1-z_2|^2=2OC^2-AC^2-BC^2+AB^2=8-(2R\sin B)^2-(2R\sin A)^2+(2R\sin C)^2$

$=16\left(\frac{1}{2}+\sin^2 C-\sin^2 A-\sin^2 B\right)=8\left(\frac{1}{2}+1-\cos^2 C-\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}\right)$

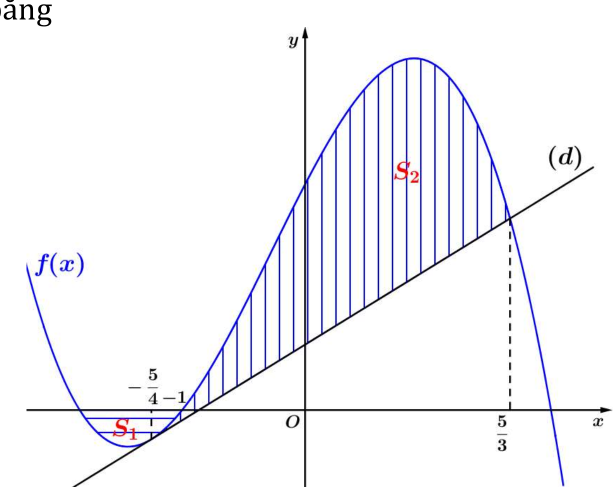
$=16\left(\frac{1}{2}-\cos^2(A+B)+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)\right)=16\left(\frac{1}{2}-\cos^2(A+B)+\cos(A+B)\cos(A-B)\right)$

$=16\left(\frac{1}{2}-\cos^2 C-\cos C\cos(A-B)\right)$

Với $-1\leq-\cos(A-B)\leq 1$ ta suy ra $P\leq 16\left(\frac{1}{2}-\cos^2 C-\cos C\right)=16\left(\frac{1}{2}-\left(\cos C+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\leq 16.\frac{3}{4}=12$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng 12. **Chọn đáp án D.**

Câu 45. Cho hàm số bậc ba $f(x)=\frac{-1}{2}x^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có 2 điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1, x=2$. Đường thẳng (d) tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=\frac{-5}{4}$ cắt đồ thị (C) có hoành độ $x=\frac{5}{3}$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là các diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và trục tung ***(như hình vẽ bên).*** Khi tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $19a-b$ bằng



A. 459. **B.** 435. **C.** 705. **D.** 775.

Lời giải

Từ hình vẽ ban đầu ta suy ra: $f(x)=-\frac{1}{2}(x-a)(x+1)(x-2)$ (1)

Gọi phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $(d): y=mx+n$, từ đó ta suy ra:

$f(x)-(mx+n)=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)^2\left(x-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{4}\right)^2\left(x-\frac{5}{3}\right)+mx+n$ (2), so sánh hệ số chứa x^2 trong hai cách biểu diễn hàm $f(x)$ giữa (1) và (2) ta suy ra $a=-\frac{11}{6}$ tức $f(x)=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{6}\right)(x+1)(x-2)$.

Khi đó ta suy ra: $\begin{cases} f'\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{59}{96} \\ f\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{91}{384} \end{cases} \Rightarrow (d): y=\frac{59}{96}\left(x+\frac{5}{4}\right)-\frac{91}{384} \Rightarrow (d): y=g(x)=\frac{59}{96}x+\frac{204}{384}$

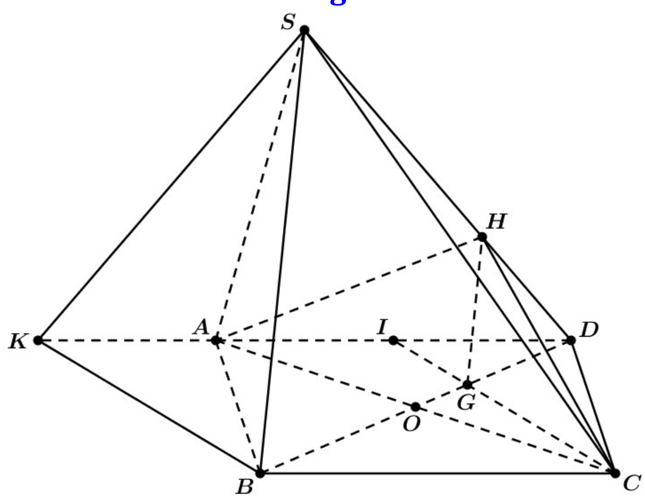
Suy ra: $\begin{cases} S_1=\int\limits_{-\frac{11}{6}}^{-1}|f(x)|dx=\int\limits_{-\frac{11}{6}}^{-1}\left|-\frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{6}\right)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{5125}{31104} \\ S_2=\int\limits_{-\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}}|f(x)-g(x)|dx=\int\limits_{-\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}}\left|-\frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{6}\right)(x+1)(x-2)-\left(\frac{59}{96}x+\frac{204}{384}\right)\right|dx=\frac{1500625}{497664} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{656}{12005}$

Vậy $a=656, b=12005$ tức $19a-b=459$. **Chọn đáp án A.**

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành biết rằng $\widehat{SAD}=\widehat{BAC}=90^\circ$, cạnh $SA=2\sqrt{2}a, BC=2a, SB=\sqrt{6}a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD biết khoảng cách giữa CH và SB bằng $\sqrt{2}a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\sqrt{2}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{10}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{3}a^3$.

Lời giải



Ta gọi I là trung điểm AD và G là trọng tâm ΔACD, kẻ $HG \parallel SB$, khi đó ta có: $\dfrac{DG}{DB}=\dfrac{DH}{DS}=\dfrac{1}{3}$.

Kẻ $BK \parallel IC$ với $K \in AD$ ta suy ra $(HCI) \parallel (SBK)$ và $d(CH,SB)=d((HCI);(SBK))=d(I;(SBK))$.

Tiếp đến ta dễ thấy $IKBC$ là hình bình hành nên suy ra A là trung điểm IK, từ đó ta có $SK=3a$ và $CI=BK=\dfrac{AD}{2}=a$. Mà $SB=\sqrt{6}a$ nên ta suy ra: (Công thức He-rông) $S_{\Delta SBK}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a^2$.

Mặt khác ta có: $d(CH,SB)=d(I;(SBK))=2d(A;(SBK))=\dfrac{6V_{SABK}}{S_{\Delta SBK}}=\dfrac{6V_{SABK}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}a^2}=\sqrt{2}a$ nên ta suy ra

$V_{S.ABK}=\dfrac{1}{6}\dfrac{\sqrt{5}}{2}a^2.\sqrt{2}a=\dfrac{\sqrt{10}}{12}a^3$, mà $S_{\Delta ABK}=S_{\Delta ABI}=\dfrac{S_{ABCD}}{4}\Rightarrow V_{SABK}=\dfrac{V_{S.ABCD}}{4}$ nên ta suy ra

$V_{S.ABCD}=4V_{S.ABK}=4\dfrac{\sqrt{10}}{12}a^3=\dfrac{\sqrt{10}}{3}a^3$. **Chọn đáp án D.**

Câu 48. Có bao nhiêu số nguyên $x\in(-10;10)$ sao cho ứng với mỗi x có ít nhất 8 số nguyên y thỏa mãn $2^{70-6y}+4^{x^2+y}.\log_2(10-x-y)\le 65.4^{x^2+y}$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Ta có bất phương trình sau: $2^{70-6y}+4^{x^2+y}.\log_2(10-x-y)\le 65.4^{x^2+y}$ (*), điều kiện: $y<10-x$.

$2^{70-6y}+4^{x^2+y}.\log_2(10-x-y)-65.4^{x^2+y}\le 0 \Leftrightarrow 2^{70-8y-2x^2}+\log_2(10-x-y)-65\le 0$

Xét hàm số $f(y)=2^{70-8y-2x^2}+\log_2(10-x-y)-65$ trên $(-\infty;10-x)$ ta có

$f'(y)=-8.2^{70-8y-2x^2}\ln 2-\dfrac{1}{(10-x-y)\ln 2}<0,\quad \forall y(-\infty;10-x)$

Từ đó ta suy ra hàm số $f(y)$ luôn nghịch biến trên $(-\infty;10-x)$.

Ta có bất phương trình $f(y)<0\Leftrightarrow f^{-1}(0)<y<10-x$. Do theo đề bài ứng với mỗi x có ít nhất 8 số nguyên y thỏa mãn nên ta suy ra y sẽ chạy từ $2-x$ tới $9-x$.

Từ đó ta suy ra $f^{-1}(0)>1-x\Leftrightarrow f(1-x)<0\Leftrightarrow 2^{70-8(1-x)-2x^2}+\log_2(9)-65<0$

$\Leftrightarrow -2x^2+8x+62<\log_2(65-\log_2 9)\Leftrightarrow -2x^2+8x+62-\log_2(65-\log_2 9)<0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>7.659 \\ x<-3.65 \end{array}\right. \xrightarrow{x\in(-10;10)} x\in(-10;-3.65)\cup(7.659;10)$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên ta suy ra $x\in\{-9;-8;\ldots;-4;8;9\}$ tức có 8 giá trị nguyên x thỏa mãn. **Chọn đáp án B.**

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z-7=0$, điểm $M(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x+2y-4z-7=0$. Đường thẳng (d) đi qua M cắt $(P),(S)$ lần lượt tại các điểm A và B sao cho M là trung điểm AB. Biết độ dài ngắn nhất của đoạn AB là $2\sqrt{a-2\sqrt{b}}$, giá trị $a+b$ bằng

A. 232. **B.** 223. **C.** 212. **D.** 192.

Lời giải

Ta có mặt cầu (S) tâm $I(-2;-1;2)$, bán kính $R=4$ và $d(I;(P))=5>R=4$ nên suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S). Tiếp đến ta tìm mặt phẳng (Q) đối xứng với (P) qua M.

Ta có $(Q): x+2y-2z+D=0$ và $d(M;(P))=d(M;(Q))=3\Leftrightarrow \dfrac{|D-2|}{3}=3\Leftrightarrow D=11$

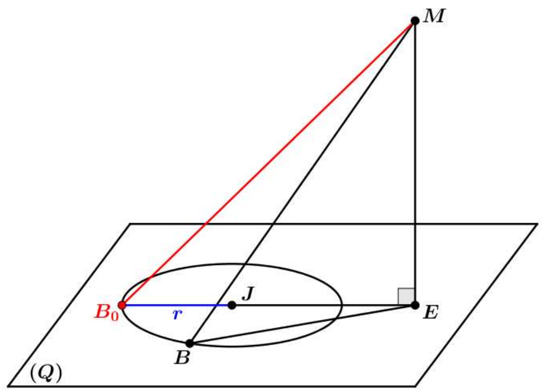
Suy ra: $(Q): x+2y-2z+11=0$. Tới đây ta tìm quỹ tích điểm B như sau:

Theo giả thiết, ta có $MA=MB\Rightarrow B\in(Q)$, do đó B luôn nằm trong hình tròn (C) được tạo từ mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S). Gọi J là hình chiếu của I lên trên (Q), giải hình chiếu trên ra $J\left(-\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

Từ đó ta suy ra bán kính của (C) bằng $r=\sqrt{R^2-IJ^2}=\sqrt{15}$.

Suy ra điểm B luôn thuộc đường tròn (C) tâm $J\left(-\dfrac{7}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$, bán kính $r=\sqrt{15}$.

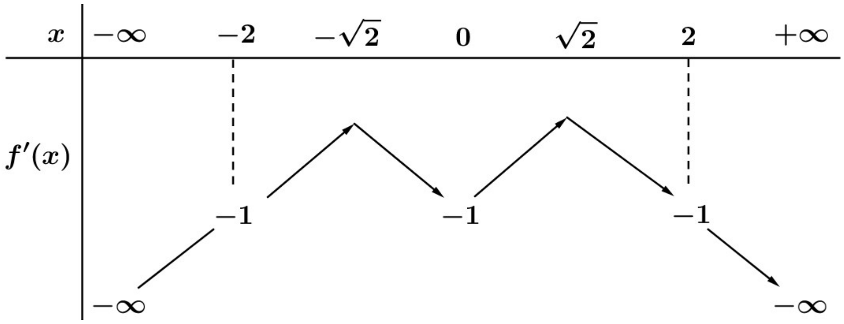
Do $AB=2MB$ nên AB lớn nhất chỉ khi MB lớn nhất, khi đó ta có hình vẽ như sau:



Từ hình vẽ trên ta suy ra $AB=2MB\le 2MB_0=2\sqrt{ME^2+EB_0^{\,2}}=2\sqrt{ME^2+(EJ+r)^2}=2\sqrt{9+\left(\sqrt{15}+\sqrt{13}\right)^2}$

$=2\sqrt{37+2\sqrt{195}}$. Đồng nhất hệ số ra $a=37, b=195$ tức $a+b=232$. **Chọn đáp án A.**

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có $f(2)=36, f(-2)=-32$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-50;50)$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)-\frac{6}{2x-1}+m\right|$ có 5 điểm cực trị ?

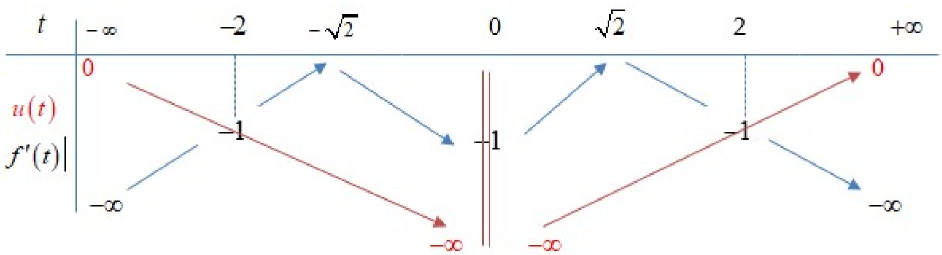
A. 63. **B.** 34. **C.** 36. **D.** 62.

Lời giải

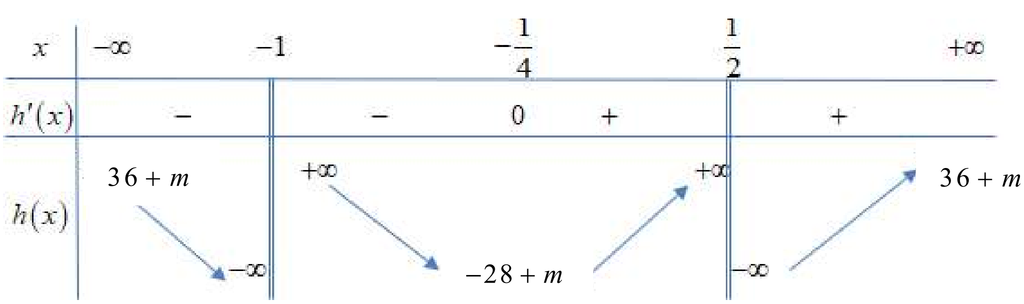
Xét $h(x)=f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)-\frac{6}{2x-1}$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};-1\right\}$. Ta có $h'(x)=f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right).\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{12}{(2x-1)^2}$

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{-4(x+1)^2}{(2x-1)^2}$ đặt $t=\frac{2x-1}{x+1}$ ta được phương trình $f'(t)=\frac{-4}{t^2}$

Đặt $u(t)=\frac{-4}{t^2}$ dễ dàng suy ra được bảng sau



Do đó $f'(t)=\frac{-4}{t^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$ thay lại ta được $h'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{-1}{4}$. Ta có bảng biến thiên của $h(x)=0$.



Do $h(x)$ có 1 điểm cực trị nên để hàm số $|h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi chỉ khi $h(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt do đó ta suy ra $\begin{cases}36+m>0\\-28+m<0\end{cases}\Leftrightarrow -36<m<28$. Vậy có 63 giá trị của *m.* **Chọn đáp án A.**

SỞ NGHỆ AN LẦN 2

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}+3+6i\right|=\left|z-2-5i\right|$ và số phức z_1 có phần thực bằng phần ảo. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|{z_1}^2+z-z_1\right|$ là

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{26}}{26}$. **C.** $\frac{3\sqrt{26}}{13}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ khi đó ta có: $\left|\overline{z}+3+6i\right|=\left|z-2-5i\right|\Leftrightarrow 5x-y+8=0$ tức $M(z)\in(d):5x-y+8=0$.

Gọi $A\left(z_1-{z_1}^2\right)$ với số phức z_1 phần thực bằng phần ảo, ta suy ra $z_1=a+ai$

Suy ra $z_1-{z_1}^2=a+\left(a-2a^2\right)i\Rightarrow\begin{cases}x_A=a\\y_A=a-2a^2\end{cases}$ tức $A\left(z_1-{z_1}^2\right)\in(P):y=x-2x^2$.

Gọi (d') là tiếp tuyến tiếp xúc với (P) và song song với (d) với $(d'):5x-y+C=0$.

Khi đó gọi $A_0(x_0;y_0)$ là điểm tiếp xúc đó, ta suy ra $\frac{d}{dx}\left(x-2x^2\right)_{x=x_0}=5\Leftrightarrow x_0=-1$ tức $(d'):5x-y+2=0$

Vậy $\left|{z_1}^2+z-z_1\right|=\left|z-\left(z_1-{z_1}^2\right)\right|=MA\geq MA_0=d(d;d')=d(A_0;d)=\frac{3\sqrt{26}}{13}$. **Chọn đáp án C.**

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $g(x)=\frac{1}{3}f(x)-\frac{2}{3}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)$ có hai điểm cực trị là $x=1,x=3$. Với mỗi t là hằng số tùy ý thuộc đoạn $[0;1]$, gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0,y=f(t),y=f(x)$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=1,y=f(t),y=f(x)$. Biểu thức $Q=12S_1+4S_2$ có thể nhận được bao nhiêu giá trị là số nguyên ?

A. 7 . **B.** 10 . **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x^3+ax^2+bx\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f''(x)=6x+2a\Rightarrow f'''(x)=6$

Từ đó ta suy ra: $g'(x)=\frac{1}{3}f'(x)-\frac{2}{3}f''(x)+\frac{1}{2}f'''(x)=\frac{3x^2+2ax+b}{3}-\frac{2(6x+2a)}{3}+3$

Do hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x=1,x=3$ nên suy ra $\begin{cases}g'(1)=0\\g'(3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ tức $y=f(x)=x^3$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y=f(t),y=f(x)$ có $x^3=t^3\Leftrightarrow x=t$

Từ đó ta suy ra: $\begin{cases}S_1=\int\limits_0^1\left(t^3-x^3\right)dt=\frac{3t^4}{4}\\S_2=\int\limits_t^1\left(x^3-t^3\right)dt=\frac{3t^4}{4}-t^3+\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow Q=12S_1+4S_2=12t^4-4t^3+1=f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow t=0;t=\frac{1}{4}$ với $t=\frac{1}{4}$ là điểm cực tiểu và $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{63}{64}$.

Do $t\in[0;1]$ nên ta suy ra $Q\in\left[\frac{63}{64};9\right]$ tức Q có thể nhận 9 giá trị nguyên. **Chọn đáp án C.**

Câu 49. Cho các số thực $a,b,c>1$ thỏa mãn $6\log_{2ab}c\ge 1+\log_{2b}c.\log_a c$ và biết phương trình $c^{x^2+1}=a^x$ có nghiệm. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_a\left(2bc^4\right)$ bằng $\dfrac{m+\sqrt{n}}{p}$ trong đó m,n,p là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{p}$ là phân số tối giản. Giá trị của $m+n+p$ bằng

A. 48. **B.** 60. **C.** 56. **D.** 64.

Lời giải

Ta có: $c^{x^2+1}=a^x\Leftrightarrow x^2+1=x\log_c a\Rightarrow \log_c a=x+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{x.\dfrac{1}{x}}=2\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_c a}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow \log_c a+\dfrac{1}{\log_c a}=\dfrac{5}{2}$ (1)

Tiếp đến ta có: $6\log_{2ab}c\ge 1+\log_{2b}c.\log_a c\Leftrightarrow \dfrac{6}{\log_c 2b+\log_c a}\ge 1+\dfrac{1}{\log_c 2b}.\dfrac{1}{\log_c a}$

$\Leftrightarrow 6\ge\left(1+\dfrac{1}{\log_c 2b}.\dfrac{1}{\log_c a}\right)\left(\log_c 2b+\log_c a\right)\Leftrightarrow 6\ge \log_c 2b+\log_c a+\dfrac{1}{\log_c 2b}+\dfrac{1}{\log_c a}$ (1)

$\Leftrightarrow \log_c 2b+\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{\log_c 2b}\le 6\Leftrightarrow \log_c 2b\in\left[\dfrac{7-\sqrt{33}}{4};\dfrac{7+\sqrt{33}}{4}\right]$. Từ đó ta suy ra:

$$P=\log_a\left(2bc^4\right)=\log_a(2b)+4\log_a c=\frac{\log_c(2b)}{\log_c a}+\frac{4}{\log_c a}=\frac{\log_c(2b)+4}{\log_c a}\le\frac{\frac{7+\sqrt{33}}{4}+4}{2}=\frac{23+\sqrt{33}}{8}$$

Đồng nhất hệ số suy ra $\begin{cases}m=23;n=33\\p=8\end{cases}$ tức $m+n+p=64$. **Chọn đáp án D.**

Cách 2: Đặt $(a;2b)=\left(c^u;c^v\right)$, khi đó ta luôn có: $6\log_{2ab}c\ge 1+\log_{2b}c.\log_a c$ tương ứng với bất phương trình: $6\log_{c^{u+v}}c\ge 1+\log_{c^u}c\log_{c^v}c\Leftrightarrow \dfrac{6}{u+v}\ge 1+\dfrac{1}{uv}\Leftrightarrow 6uv\ge(u+v)(uv+1)$

$\Leftrightarrow 6uv\ge u^2v+uv^2+u+v\Leftrightarrow uv^2+v\left(u^2-6u+1\right)+u\le 0$. (*)

Tiếp đến ta lại có phương trình $c^{x^2+1}=a^x\Leftrightarrow c^{x^2+1}=c^{ux}\Leftrightarrow x^2-ux+1=0$, xét phương trình bậc hai trên theo x ta có: $\Delta=u^2-4\ge 0$ (điều kiện có nghiệm) $\Leftrightarrow u\ge 2$.

Với $u_{\min}=2$ ta thế vào (*) khi đó ta có: $2v^2-7v+2\le 0\Leftrightarrow \dfrac{7-\sqrt{33}}{4}\le v\le\dfrac{7+\sqrt{33}}{4}$

Từ đó ta suy ra: $P=\log_a\left(2bc^4\right)=\log_{c^u}\left(c^{v+4}\right)=\dfrac{v+4}{u}\le\dfrac{v+4}{2}\le\dfrac{\frac{7+\sqrt{33}}{4}+4}{2}=\dfrac{23+\sqrt{33}}{8},\forall u\ge 2$

Đồng nhất hệ số suy ra $\begin{cases}m=23;n=33\\p=8\end{cases}$ tức $m+n+p=64$

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(-4;0;0),B(0;8;0),C(0;0;-12),D(1;-1;-1)$ và M là điểm nằm ngoài mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Các đường thẳng MA,MB,MC,MO lần lượt cắt mặt cầu (S) tại các điểm A',B',C',O' (khác A,B,C,O) sao cho $\dfrac{MA}{MA'}+\dfrac{MB}{MB'}+\dfrac{MC}{MC'}+\dfrac{MO}{MO'}=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $MD+MO$

A. $\sqrt{229}$. **B.** $\sqrt{227}$. **C.** $\sqrt{226}$. **D.** $\sqrt{228}$.

Lời giải

Ta gọi I là tâm mặt cầu (S), nhận ra ba điểm A,B,C nhận thành mặt chắn nên ta suy ra tọa độ của I có dạng là: $I\left(\frac{x_A}{2};\frac{y_B}{2};\frac{z_C}{2}\right)\Rightarrow I(-2;4;-6)$ và bán kính mặt cầu (S) là $R=IA=2\sqrt{14}$.

Tiếp đến ta có: $\frac{MA}{MA'}=\frac{MA^2}{MA'.MA}=\frac{MA^2}{MI^2-R^2}$, tương tự với các tỉ số còn lại là: $\frac{MB}{MB'},\frac{MC}{MC'},\frac{MO}{MO'}$ ta suy ra:

$4=\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}+\frac{MO}{MO'}=\frac{MA^2+MB^2+MC^2+MO^2}{MI^2-R^2}\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MO^2=4\left(MI^2-R^2\right)$ (*)

Gọi $M(x;y;z)$ khi đó thế vào (*) ta suy ra phương trình trở thành:

$(x+4)^2+(y-8)^2+(z+12)^2+3\left(x^2+y^2+z^2\right)=4\left((x+2)^2+(y-4)^2+(z+6)^2\right)-224$

$\Leftrightarrow x-2y+3z-28=0$ tức $M\in(P):x-2y+3z-28=0$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $MD+MO$ với $M\in(P):x-2y+3z-28=0$. Do D,O cùng phía với (P) nên ta gọi O' là điểm đối xứng với O qua (P) với $O'(4;-8;12)$. Suy ra giá trị nhỏ nhất là $MD+MO\geq DO'=\sqrt{227}$. **Chọn đáp án B.**