CHUYÊN ĐỀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
ÔN THI VÀO LỚP 10

I. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho a, b,c là các số không âm chứng minh rằng

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Giải:

Cách 1: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \geq 4xy$

Ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2$

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

Ví dụ 2:

1) Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1 CMR: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9$ (403-1001)

2) Cho x, y, z > 0 và x + y + z = 1 CMR:x + 2y + z $\geq 4(1-x)(1-y)(1-z)$

3) Cho a > 0, b > 0, c > 0

CMR: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

4) Cho $x \geq 0$,$y \geq 0$ thỏa mãn $2\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$;CMR: $x+y \geq \frac{1}{5}$

Ví dụ 3: Cho a>b>c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$

Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

Giải:

Do a, b, c đối xứng,giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{a+c} \geq \frac{c}{a+b} \end{cases}$

Áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 4:

Cho a, b, c, d > 0 và abcd = 1.Chứng minh rằng :

$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$

Giải:

Ta có $a^2+b^2 \geq 2ab$

$c^2+d^2 \geq 2cd$

Do abcd =1 nên cd =$\frac{1}{ab}$ (dùng $x+\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$)

Ta có $a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+cd)=2(ab+\frac{1}{ab}) \geq 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$

=(ab+cd)+(ac+bd)+(bc+ad)

$$=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right)\geq 2+2+2$$

Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\geq 10$

<u>Ví dụ 5:</u> Cho 4 số a, b, c, d bất kỳ chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

<u>Giải:</u> Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

tacó ac+bd$\leq\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

mà $(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2$

$\leq(a^2+b^2)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$

$\Rightarrow\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

II. Một số bài tập thường gặp trong các đề thi vào lớp 10

<u>Bài 1:</u> Cho các số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$

<u>Bài giải:</u>

Với a, b, c > 0 ta có: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq$ a (áp dụng bất đẳng thức Cô si)

Tương tự ta có: $\frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\geq$ b; và $\frac{c^2}{b+a}+\frac{a+b}{4}\geq$ c

$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}+\frac{a+b+c}{2}\geq a+b+c$

$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$ (đpcm)

Vậy $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$

<u>Bài 2</u>: Cho x, y > 0; thoả x + y = 1. Tìm Min A = $\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}$.*<u>Bài giải:</u>*

Ap dụng bất đẳng thức $(a+b)^2\geq 4ab\Rightarrow\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ (a, b > 0)

Mặt khác: $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}$ (áp dụng bất đẳng thức Cô si)

$$A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\geq\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{1}{2xy}\geq 4+\frac{1}{2.\frac{1}{4}}=4+2=6$$

Vậy $Min_A=6$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Bài 3.

Cho $a,b,c>0:abc=1$

$$CMR:\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}$$

Hướng dẫn

Ta có: $a^2+b^2\geq 2ab;\quad b^2+1\geq 2b\Rightarrow a^2+2b^2+3\geq 2(ab+b+1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+2b^2+3} \le \frac{1}{2(ab+b+1)}$$

Tương tự =>

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\right)$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab^2c+abc+ab}+\frac{b}{bca+ab+b}=1$$

=> $\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 4: Cho ba số x,y,z dương và xyz = 1.

CMR : $\frac{\sqrt{x^3+y^3+1}}{xy}+\frac{\sqrt{z^3+y^3+1}}{yz}+\frac{\sqrt{x^3+z^3+1}}{xy} \ge 3\sqrt{3}$

Bài giải

Ta có $x^3+y^3+1 \ge 3\sqrt[3]{x^3y^3}=3xy$

$z^3+y^3+1 \ge 3\sqrt[3]{z^3y^3}=3zy$

$x^3+z^3+1 \ge 3\sqrt[3]{x^3z^3}=3xz$

Nên vế trái = $\frac{\sqrt{3xy}}{xy}+\frac{\sqrt{3zy}}{zy}+\frac{\sqrt{3xz}}{xz}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{zy}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}\right) \ge 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{xy}\sqrt{zy}\sqrt{xz}}}=3\sqrt{3}$

Vì xyz = 1. Dấu " = " khi x = y = z

Bài 5: Cho 3 số dương a, b, c chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Giải

Vận dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+1 \ge 3\frac{a}{b} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+1 \ge 3\frac{b}{c} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}+1 \ge 3\frac{c}{a} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế (1) (2) và (3) ta có:

$$2\left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\right)+3 \ge 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

$$\ge 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+3$$

Vậy: $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

Bài 6. (1đ) (Đắc Lắc 12 – 13)

Cho hai số dương x, y thõa mãn: x + 2y = 3. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geq 3$

HD: Áp dụng 1/x + 1/y + 1/z ≥ 9/(x + y + z)

Bài 7: (Hải Dương 12 – 13)

Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$Q=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2ba^2}$.

Hướng dẫn

Với $a>0;b>0$ ta có: $(a^2-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^4-2a^2b+b^2\geq 0\Rightarrow a^4+b^2\geq 2a^2b$ $\Leftrightarrow a^4+b^2+2ab^2\geq 2a^2b+2ab^2 \;\; \Leftrightarrow \frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}\leq\frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (1)
Tương tự có $\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b}\leq\frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow Q\leq\frac{1}{ab\left(a+b\right)}$
Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Leftrightarrow a+b=2ab$ mà $a+b\geq 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab\geq 1\Rightarrow Q\leq\frac{1}{2(ab)^2}\leq\frac{1}{2}$.
Khi a = b = 1 thì $\Rightarrow Q=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{1}{2}$

Bài 8: (Hà Nội 12 – 13) Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x\geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x^2+y^2}{xy}$

<u>Hướng dẫn</u>

Ta có M = $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=(\frac{x}{4y}+\frac{y}{x})+\frac{3x}{4y}$

Vì x, y > 0, áp dụng bdt Co si cho 2 số dương $\frac{x}{4y};\frac{y}{x}$ ta có $\frac{x}{4y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}.\frac{y}{x}}=1$,

dấu "=" xảy ra ⇔ x = 2y

Vì x ≥ 2y $\Rightarrow\frac{x}{y}\geq 2\Rightarrow\frac{3}{4}.\frac{x}{y}\geq\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra ⇔ x = 2y

Từ đó ta có M ≥ 1 $+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, dấu "=" xảy ra ⇔ x = 2y

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi x = 2y

Bài 9:

(1,0 điểm)

1. Cho x > 0, y > 0. Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$. Dấu «=» xảy ra khi nào ?

2. Cho x > 0, y > 0 và 2x + 3y ≤ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{4}{4x^2+9y^2}+\frac{9}{xy}$$

Hướng dẫn:

Ta thấy

$A = \dfrac{4}{4x^2+9y^2} + \dfrac{9}{xy} = \dfrac{4}{4x^2+9y^2} + \dfrac{4}{12xy} + \dfrac{26}{3xy} \geq \dfrac{16}{(2x+3y)^2} + \dfrac{26}{3xy}$ (theo kết quả câu a). (1)

Lại có $2x + 3y \leq 2 \Leftrightarrow (2x + 3y)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 + 12xy \leq 4$ (2)

Mặt khác $4x^2 + 9y^2 \geq 12xy$ (Bất đẳng thức Côsi cho x, y > 0) (3)

Từ (1) và (2) suy ra $12xy + 12xy \leq 4 \Leftrightarrow 3xy \leq \dfrac{1}{2}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $A \geq \dfrac{16}{4} + \dfrac{26}{\frac{1}{2}} = 4 + 52 = 56$

Vậy minA = 56 khi khi $x = \dfrac{1}{2}$ và $y = \dfrac{1}{3}$

Bài 10 (Hà Nam: 12 – 13)

Cho ba số thực a, b, c thoả mãn $a \geq 1; b \geq 4; c \geq 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{bc\sqrt{a-1} + ca\sqrt{b-4} + ab\sqrt{c-9}}{abc}$

Hướng dẫn:

$P = \dfrac{bc\sqrt{a-1} + ca\sqrt{b-4} + ab\sqrt{c-9}}{abc} = \dfrac{\sqrt{a-1}}{a} + \dfrac{\sqrt{b-4}}{b} + \dfrac{\sqrt{c-9}}{c}$

Vì $a \geq 1;\ b \geq 4;\ c \geq 9$ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được:

$\sqrt{a-1}\quad 1.\sqrt{a-1} \leq \dfrac{1+a-1}{2}\quad \dfrac{a}{2}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{a-1}\quad 1 \Leftrightarrow a\quad 2$

$\sqrt{b-4} = \dfrac{2.\sqrt{b-4}}{2} < \dfrac{4+b-4}{4} = \dfrac{b}{4}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{b-4} = 2 \Leftrightarrow b = 8$

$\sqrt{c-9} = \dfrac{3.\sqrt{c-9}}{3} < \dfrac{9+c-9}{6} = \dfrac{c}{6}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{c-9} = 3 \Leftrightarrow c = 18$

Suy ra $P = \dfrac{\sqrt{a-1}}{a} + \dfrac{\sqrt{b-4}}{b} + \dfrac{\sqrt{c-9}}{c} \leq \dfrac{a}{2a} + \dfrac{b}{4b} + \dfrac{c}{6c} = \dfrac{11}{12}$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là $P_{max} = \dfrac{11}{12} \Leftrightarrow a = 2; b = 8; c = 9$

Bài 11: (Hưng Yên 12 – 13)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 4.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} \geq 1$

HD $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq \dfrac{4}{x(y+z)} = \dfrac{4}{x(4-x)}$

Bài 12: (Thanh Hóa 12 – 13)

Cho hai số thực a; b thay đổi, thoả mãn điều kiện a + b ≥ 1 và a > 0

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $\dfrac{8a^2 + b}{4a} + b^2$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi a=b=$\frac{1}{2}$

các bạn cứ ép điểm rơi tại a=b=$\frac{1}{2}$ hoặc a=$\frac{1}{2}$ hoặc b=$\frac{1}{2}$

Ta có

$A=\frac{8a^2+b}{4a}+b^2=2a+\frac{b}{4a}+b^2=2a-\frac{1}{4}+(\frac{b}{4a}+\frac{1}{4})+b^2$

=> $A=2a-\frac{1}{4}+\frac{a+b}{4a}+b^2$ Do a + b ≥ 1

=> $A\geq 2a-\frac{1}{4}+\frac{1}{4a}+b^2=a+\frac{1}{4a}+b^2+a-\frac{1}{4}$. Do a + b ≥ 1 => a ≥ 1 - b

=> $A\geq a+\frac{1}{4a}+b^2+1-b-\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4a}+(b-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$

Do a > 0, theo cosi ta có $a+\frac{1}{4a}\geq 2\sqrt{a\frac{1}{4a}}=1$ (1)

Từ (1) và (2) => $A\geq\frac{3}{2}$

=> Giá trị nhỏ nhất của A là : $A_{min}=\frac{3}{2}$. Khi

a = b = 0,5

Bài 13: (Quảng Ngãi 12 – 13)

Cho $x>0, y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{-2xy}{1+xy}$.

Hướng dẫn: Với $x>0,\ y>0$ ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq xy \Leftrightarrow xy\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+xy\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{1+xy}\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{1+xy}\geq\frac{4}{3}$$

Do đó $A=\frac{-2xy}{1+xy}=-2+\frac{2}{1+xy}\geq -2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Từ $\begin{cases} x>0, y>0 \\ x=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\min A=-\frac{2}{3}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 14: (Quảng nam 12 – 13)

Cho a, b ≥ 0 và a + b ≤ 2. Chứng minh : $\frac{2+a}{1+a}+\frac{1-2b}{1+2b}\geq\frac{8}{7}$

Hướng dẫn:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+2b}\geq\frac{8}{7}$

Ta có: $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{2b+1}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{2}}\geq 2\frac{1}{\sqrt{(a+1)(b+\frac{1}{2})}}$ (1) (bđt Côsi)

$$\sqrt{(a+1)(b+\frac{1}{2})} \le \frac{a+1+b+\frac{1}{2}}{2} \le \frac{7}{4}$$ (bđt Cô si)

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+\frac{1}{2})}} \ge \frac{8}{7} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+2b} \ge \frac{8}{7}$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi : a + 1 = b + $\frac{1}{2}$ và a + b = 2 $\Leftrightarrow$ a = $\frac{3}{4}$ và b = $\frac{5}{4}$

Bài 15: Chuyên lam Sơn Thanh Hóa 11 – 12 (Vòng 01)

Cho a, b, c là ba số thực dương t/m a + b + c = 2 Tìm Max P

biết $P=\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ac+2b}}$

Hướng dẫn

* Vì a + b+ c = 2 $\Rightarrow$ 2c+ab = c(a+b+c)+ab= ca+cb+c^2+ ab = (ca+ c^2)+(bc + ab)

= c(a+c) + b(a+c)=(c+a)(c+b) $\Rightarrow$ 2c+ab = (c+a)(c+b)

vì a ; b ; c > 0 nên $\frac{1}{a+c}>0$ và $\frac{1}{b+c}>0$ áp dụng cosi ta có

$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} \ge 2.\sqrt{\frac{1}{(a+c)(b+c)}}$ dấu (=) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{a+c}=\frac{1}{b+c}$ $\Rightarrow$ a + c = b + c $\Rightarrow$ a = b

hay $\frac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{1}{2}(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b})$

$\Rightarrow \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$ (1) dấu bằng $\Leftrightarrow$ a = b

Tương tự: $\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{cb}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$ (2) dấu bằng $\Leftrightarrow$ b = c

$\frac{ac}{\sqrt{2b+ca}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{b+a}\right)$ (3) dấu bằng $\Leftrightarrow$ a = c

cộng vế với vế của (1) ; (2) ; (3) ta có

$\Rightarrow$: P=$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}} \le \frac{1}{2}(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}+\frac{cb}{b+a}+\frac{cb}{c+a}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ac}{c+b})$

$\Rightarrow$ P $\le \frac{1}{2}\left[(\frac{ab}{c+a}+\frac{cb}{c+a})+(\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{c+b})+(\frac{cb}{a+b}+\frac{ac}{a+b}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{(a+c).b}{c+a}+\frac{a.(b+c)}{b+c}+\frac{c.(b+a)}{a+b}\right]=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}.2=1$

$\Rightarrow$ P=$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}} \le 1$ dấu bằng $\Leftrightarrow$ a = b = c = $\frac{2}{3}$

Vậy min P = 1 khi a = b = c =$\frac{2}{3}$

Bài 16: ***(Vĩnh Phúc 11 – 12)***

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}$.

Hướng dẫn: Từ a + b + c = 1 => ac + bc + c^2 = c (Do c > 0)

Vì vậy: c + ab = ac + ab + bc + c^2 = (b+c)(c+a)

Do đó $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}\le\frac{\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}}{2}$ (Cô – si)

Tương tự: $\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}\le\frac{\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}}{2}$; $\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\le\frac{\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}}{2}$

Vậy $P\le\frac{\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+b}{a+b}}{2}=\frac{3}{2}$

Do đó: MinP = 3/2, xảy ra khi a = b= c = 1/2

Bài 17: (*Hà Nội 11 – 12)*

Với x > 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$.

Hướng dẫn

$M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011=4x^2-4x+1+x+\frac{1}{4x}+2010$

$=(2x-1)^2+(x+\frac{1}{4x})+2010$

Vì $(2x-1)^2\ge 0$ và x > 0 $\Rightarrow\frac{1}{4x}>0$, Áp dụng bdt Cosi cho 2 số dương ta có: x + $\frac{1}{4x}\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{4x}}=2.\frac{1}{2}=1$

⇨ M $=(2x-1)^2+(x+\frac{1}{4x})+2010\ge 0+1+2010=2011$

⇨ M ≥ 2011 ; Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=0\\x=\frac{1}{4x}\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\x^2=\frac{1}{4}\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy M_{min} = 2011 đạt được khi x = $\frac{1}{2}$

Bài 18. (Hải Dương 11 – 12)

Cho *x, y, z* là ba số dương thoả mãn *x + y + z =3*. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1.$$

Hướng dẫn

Từ $\left(x-\sqrt{yz}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+yz\ge 2x\sqrt{yz}$ (*) Dấu "=" khi x^2 = yz
Ta có: 3x + yz = (x + y + z)x + yz = x^2 + yz + x(y + z) $\ge x(y+z)+2x\sqrt{yz}$ Suy ra $\sqrt{3x+yz}\ge\sqrt{x(y+z)+2x\sqrt{yz}}=\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})$ (Áp dụng (*))

$x+\sqrt{3x+yz}\ge\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\Rightarrow\dfrac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}\le\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ (1) Tương tự ta có: $\dfrac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}\le\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ (2), $\dfrac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ (3)
Từ (1), (2), (3) ta có $\dfrac{x}{x+\sqrt{3x+yz}}+\dfrac{y}{y+\sqrt{3y+zx}}+\dfrac{z}{z+\sqrt{3z+xy}}\le 1$ Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1

Bài 19: Cho các số a, b, c đều lớn hơn $\dfrac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{a}{2\sqrt{b}-5}+\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+\frac{c}{2\sqrt{a}-5}.$$

Do a, b, c > $\dfrac{25}{4}$ (*) nên suy ra: $2\sqrt{a}-5>0$, $2\sqrt{b}-5>0$, $2\sqrt{c}-5>0$
Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương, ta có: $\dfrac{a}{2\sqrt{b}-5}+2\sqrt{b}-5\ge 2\sqrt{a}$ (1) $\dfrac{b}{2\sqrt{c}-5}+2\sqrt{c}-5\ge 2\sqrt{b}$ (2) $\dfrac{c}{2\sqrt{a}-5}+2\sqrt{a}-5\ge 2\sqrt{c}$ (3)
Cộng vế theo vế của (1),(2) và (3), ta có: $Q\ge 5.3=15$. Dấu "=" xẩy ra $\Leftrightarrow a=b=c=25$ (thỏa mãn điều kiện (*))
Vậy Min Q = 15 $\Leftrightarrow a=b=c=25$