# Hai bổ đề trong bài toán phương trình hàm trên tập các số thực dương

Đoàn Quang Đăng*- Võ Trần Hiền†

Ngày 28 tháng 7 năm 2022

*Phương trình hàm trên tập các số thực dương luôn là các bài toán và hay khó. Để giải quyết các bài toán này ta cần vận dụng nhiều kỹ thuật kinh điển trong giải toán phương trình hàm kết hợp nhuần nhuyễn với các kiến thức đại số, giải tích. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu hai bổ đề khá thú vị dùng để giải quyết các lớp bài toán có thể đưa về dạng* $f(x+A)=f(x)+B$ *và* $f(x+A)+B=f(x+C)+D$.

## Mục lục



*THPT Chuyên Bến Tre
†THPT Chuyên Tiền Giang

# §1 Bổ đề 1 - $f(x+A)=f(x)+B$

**Bổ đề 1.1**

Cho các hàm số $f,g,h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(g(x)+y\right)=h(x)+f(y)$$

với mọi số thực dương $x,y$. Khi đó hàm $\frac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

*Chứng minh.* Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f\left(g(x)+y\right)=h(x)+f(y),\forall x,y>0$. Từ $P\left(x,y-g(x)\right)$ ta suy ra

$$f\left(y-g\left(x\right)\right)=f\left(y\right)-h\left(x\right),\forall x>0,y>g(x).$$

Với $x,y>0$ và $p,q\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $pg\left(x\right)-qg\left(y\right)>0$, từ các đẳng thức trên ta dễ dàng chứng minh được

$$f\left(z+pg\left(x\right)-qg\left(y\right)\right)=f\left(z\right)+ph\left(x\right)-qh\left(y\right)$$

với mọi $z>0$. Nếu $ph\left(x\right)-qh\left(y\right)<0$, khi đó ta thay $(p,q)$ bởi $(kp,kq)$ với $k$ nguyên dương đủ lớn thì

$$f\left(z\right)+ph\left(x\right)-qh\left(y\right)<0,$$

vô lý. Như vậy

$$pg\left(x\right)>qg\left(y\right)\Rightarrow ph(x)\geqslant qh(y)\quad\forall x,y>0,$$

hay

$$\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{q}{p}\Rightarrow\frac{h(x)}{h(y)}\geqslant\frac{q}{p}\quad\forall x,y>0.$$

Giả sử $\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{h(x)}{h(y)}$, khi đó ta có thể chọn $p,q\in\mathbb{Z}^+$ sao cho

$$\frac{g(x)}{g(y)}>\frac{q}{p}>\frac{h(x)}{h(y)},$$

điều này mâu thuẫn với chứng minh trên. Vậy

$$\frac{h(x)}{h(y)}\geqslant\frac{g(x)}{g(y)}\Rightarrow\frac{h(x)}{g(x)}\geqslant\frac{h(y)}{g(y)}\quad\forall x,y>0.$$

Thay đổi vai trò $x,y$ trong đánh giá trên ta thu được $\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h(y)}{g(y)}=c\quad\forall x,y>0.$ □

**Bình luận 1.2.** Một cách chứng minh khác của bạn Ngô Quý Đăng: giả sử tồn tại $u,v>0:\dfrac{h(u)}{g(u)}\neq\dfrac{h(x)}{g(x)}$. Đặt $\dfrac{h(u)}{g(u)}=a,\dfrac{h(v)}{g(x)}=b$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a>b$. Với mọi $x>1$, hiển nhiên tồn tại $y>0$ thỏa

$$x=y+\left\lfloor\frac{x-1}{g(u)}\right\rfloor\cdot g(u).\tag{1}$$

Từ phương trình (1.1) suy ra

$$f(y+ng(x))=f(y)+nh(x),\forall x,y>0,n\in\mathbb{N}.$$

Ta có

$$f(x)+f\left(y+\left\lfloor\frac{x-1}{g(u)}\right\rfloor\cdot g(u)\right)=f(y)+\left\lfloor\frac{x-1}{g(u)}\right\rfloor\cdot h(u). \qquad (2)$$

Đẳng thức trên đúng với mọi $x>1$ còn $y$ phụ thuộc vào $x$ theo quan hệ (1). Thay $x$ bởi $2+ng(v)$ vào (2) suy ra

$$f(2+ng(v))=f(y)+\left\lfloor\frac{1+ng(v)}{g(u)}\right\rfloor h(u)>0+\left(\frac{ng(v)+1}{g(u)}-1\right)\cdot h(u)$$

$$\Rightarrow f(2)+nh(v)>\left(\frac{ng(v)+1}{g(u)}-1\right)\cdot h(u)$$

$$f(2)+nbg(v)>a(1+ng(v)-g(u))$$

$$\Rightarrow n(a-b)g(v)<f(2)+ag(u)-a, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Điều này vô lý khi cho $n\to+\infty$. Bài toán được chứng minh.

Bổ đề này sẽ là một công cụ hiệu quả để ta giải quyết các bài toán phương trình hàm có dạng "nửa tuần hoàn" $f(x+A)=f(x)+B$ hoặc các bài có thể đưa về dạng này.
Cần lưu ý rằng các hàm $g,h$ là các hàm số độc lập với biến $y$.
Để thấy rõ thấy sự hiệu quả của bổ đề, ta xét một số bài toán sau:

**Bài toán 1.3** (VMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=1+f(y)$$

với mọi số thực dương $x,y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Áp dụng bổ đề (1.1) ta suy ra tồn tại số thực dương $c$ sao cho

$$\frac{f(x)}{x}=c\Rightarrow f(x)=cx \quad \forall x>0.$$

Thay lại vào phương trình ban đầu ta suy ra

$$c(c+y)=f\left(\frac{f(x)}{x}+y\right)=1+cy\Rightarrow c=1.$$

Như vậy $f(x)=x \quad \forall x>0$.

□

**Bình luận 1.4.** Ta cũng có thể giả sử $\frac{f(x)}{x}$ không là hàm hằng. Khi đó tồn tại $a,b>0$ phân biệt cho cho $\frac{f(b)}{b}>\frac{f(a)}{a}$. Khi đó

$$f\left(\frac{f(a)}{a}+y\right)=f\left(\frac{f(b)}{b}+y\right)=f(y)+1 \quad \forall y>0.$$

Đặt $K=\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}$, như vậy $f(x)=f(x+K) \quad \forall x>\frac{f(a)}{a}$.

Mặt khác, từ giả thiết, ta có

$$f\left(y + n\frac{f(a)}{a}\right) = f(y) + n > n$$

hay $f(x) > n$ với mọi $x > n\frac{f(a)}{a}$. Với $x > 0$ cố định, ta chọn $n = \lfloor f(x) \rfloor + 2 > f(x)$ và số nguyên dương $m$ sao cho $x + mK > n\frac{f(a)}{a}$, như vậy $f(x + mK) > n > f(x) = f(x + mK)$, vô lý. Do đó $f(x) = cx \quad \forall x > 0$.

**Bài toán 1.5**

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = 2y + f(x)$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Áp dụng bổ đề (1.1) ta suy ra $f(y) = 2ay \quad \forall y > 0$ với $a > 0$ là hằng số.
Thay vào phương trình ban đầu ta suy ra $4a^2 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Vậy $f(x) = \sqrt{2}x \quad \forall x > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu.

□

**Bình luận 1.6.** Ta cũng có thể giải bằng phương pháp thêm biến. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(x + f(y)) = 2y + f(x) \quad \forall x, y > 0$.
Giả sử $a, b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$, từ $P(x, a), P(x, b)$ ta suy ra

$$2a + f(x) = f(x + f(a)) = f(x + f(b)) = 2b + f(x) \Rightarrow a = b.$$

Vậy $f$ là đơn ánh. Từ $P(x, y + z)$ ta suy ra

$$\begin{aligned} f(x + f(y + z)) &= 2(y + z) + f(x) \\ &= (2y + f(x)) + 2z = f(x + f(y) + f(z)) \quad \forall x, y, z > 0. \end{aligned}$$

Mà $f$ là đơn ánh nên ta suy ra $f(z + y) = f(z) + f(y)$ hay $f(x) = ax, \forall x > 0$. Thay vào phương trình ban đầu ta tìm được $a = \sqrt{2}$.

**Bài toán 1.7** (Balkan MO 2021)

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(x) + f(y)) = 2f(x) + y$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(x + f(x) + f(y)) = 2f(x) + y \quad \forall x, y > 0$. Từ $P(1, y)$ ta suy ra

$$f(1 + f(1) + f(y)) = 2f(1) + y \quad \forall y > 0.$$

Mặt khác từ $P(x, 1 + f(1) + f(y))$ ta suy ra

$$f((x + f(x) + 2f(1)) + y) = (2f(x) + 1 + f(1)) + f(y) \quad \forall x, y > 0.$$

Áp dụng bổ đề (1.1) ta suy ra ngay $\frac{2f(x)+1+f(1)}{x+f(x)+2f(1)} = c \quad \forall x > 0$ (với $c > 0$ là hằng số) hay

$$(c-2)f(x) = -cx + f(1) + 2cf(1) + 1, \forall x > 0.$$

Nếu $c = 2$ thì ta thấy ngay điều vô lý, do đó $c \neq 2$. Suy ra $f(x) = ax + b \quad \forall x > 0$.
Thay vào phương trình ban đầu ta tìm được $a = 1$ và $b = 0$.
Vậy tất cả hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x, \forall x > 0$. □

**Bình luận 1.8.** Ở bài toán trên, ta đã tính được $f(C + f(y)) = D + y$, từ đó thay $y$ bởi $C + f(y)$ vào phương trình hàm ban đầu thì thu được phương trình dạng $f(y+A) = f(y)+B$ quen thuộc.

### Bài toán 1.9

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(f\left(x + f\left(x\right)\right) + y\right) = 2x + f\left(y\right)$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Áp dụng bổ đề (1.1) ta suy ra

$$f\left(x + f(x)\right) = 2cx \quad \forall x > 0$$

với $c > 0$ là hằng số. Thay vào phương trình ban đầu ta thu được

$$f\left(2cx + y\right) = 2x + f(y) \quad \forall x, y > 0.$$

Ta thay $x$ bởi $\frac{x}{2c}$ vào đẳng thức trên thì được

$$f(x+y) = \frac{x}{c} + f(y) \quad \forall x, y > 0.$$

Thay đổi vai trò $x, y$ trong phương trình trên và đối chiếu với chính nó ta thu được

$$f(x+y) = \frac{x}{c} + f(y) = \frac{y}{c} + f(x) \quad \forall x, y > 0.$$

hay $f(x) = \frac{x}{c} + a, \forall x > 0$. Thay vào phương trình ban đầu ta tìm được $f(x) \equiv x$.
Vậy tất cả hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x, \forall x > 0$. □

**Bình luận 1.10.** Việc sử dụng bổ đề không giải quyết hoàn toàn bài toán này, nhưng nó đã giúp đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn.

### Bài toán 1.11

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(x + f(x) + y\right) = 2f(x) + f(y)$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Áp dụng bổ đề (1.1) ta suy ra ngay

$$2f(x) = c(x + f(x)) \quad \forall x > 0 \Rightarrow f(x)(c-2) = -cx \quad \forall x > 0$$

với $c > 0$ là hằng số. Nếu $c = 2$ thì $-2x = 0, \forall x > 0$, vô lý. Do đó $c \neq 2$, suy ra $f(x) = ax, \forall x > 0$. Thay vào ta tìm được $a = 1$. Vậy $f(x) = x \quad \forall x > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

**Bình luận 1.12.** Một hướng tiếp cận khác cho bài toán để bạn đọc có thể thấy được "độ mạnh" của bổ đề:

**Nhận xét 1.13 —** $f(x + f(x)) = 2f(x), \forall x > 0$.

*Chứng minh.* Từ $P(x, 1 + f(1))$ ta suy ra

$$f(x + f(x) + 1 + f(1)) = 2f(x) + f(1 + f(1)) \quad \forall x > 0.$$

Mặt khác, từ $P(1, x + f(x))$ ta suy ra

$$f(1 + f(1) + x + f(x)) = 2f(1) + f(x + f(x)) \quad \forall x > 0.$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra

$$f(x + f(x)) = 2f(x) + c \quad \forall x > 0$$

với $c = f(1 + f(1)) - 2f(1) \in \mathbb{R}$. Ta chứng minh $c = 0$. Với $x, y, z > 0$ và $y + c > 0$ từ $P(x + f(x) + z, y + c)$ ta suy ra

$$f(z + f(z) + x + 3f(x) + y + c) = f(y + c) + 2f(z) + 4f(x).$$

Từ $P(z, x + 3f(x) + y + c)$ ta suy ra

$$f(z + f(z) + x + 3f(x) + y + c) = f(x + 3f(x) + y + c) + 2f(z).$$

Kết hợp hai đẳng thức trên ta suy ra

$$f(x + 3f(x) + y + c) = f(y + c) + 4f(x).$$

Mặt khác từ $P(x + f(x), y)$ ta thu được

$$f(x + 3f(x) + y + c) = f(y) + 4f(x) + 2c.$$

Do đó $f(x + c) = f(x) + 2c, \forall x > 0$ thỏa $x + c > 0$. Từ $P(x + c, y)$ ta suy ra$f(x + f(x) + y) + 6c = 2f(x) + f(y) + 4c \Rightarrow c = 0$.

□

**Nhận xét 1.14 —** $f$ là đơn ánh.

*Chứng minh.* Giả sử tồn tại $a > b > 0$ sao cho $f(a) = f(b) = d$.
Từ $P(a, x)$ và $P(b, x + a - b)$ ta suy ra $f(x + a - b) = f(x) \quad \forall x > 0$. Từ đây bằng quy nạp ta chứng minh được $f(x) = f(x + n(a - b)) \quad \forall x > 0$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Với $x > 0$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $n(a - b) > f(x)$, từ $P(x, n(a - b) - f(x))$ ta suy ra

$$f(x + n(a - b)) = f(n(a - b) - f(x)) + 2f(x)$$

hay

$$f\left(n\left(a-b\right)-f\left(x\right)\right)+f\left(x\right)=0,$$

vô lý. Vậy $f$ là đơn ánh.

□

**Nhận xét 1.15 —** $f(x)=x$ với mọi số thực dương $x$.

*Chứng minh.* Ký hiệu $Q(x)$ chỉ khẳng định $f\left(x+f(x)\right)=2f(x) \quad \forall x>0$.
Từ $P\left(x,x+f(x)\right)$ ta suy ra

$$f\left(2x+2f\left(x\right)\right)=4f\left(x\right), \forall x>0.$$

Từ $Q\left(x+f(x)\right)$ ta thu được

$$f\left(x+3f\left(x\right)\right)=4f\left(x\right) \quad \forall x>0.$$

Do đó

$$f\left(x+3f\left(x\right)\right)=f\left(2x+2f\left(x\right)\right) \quad \forall x>0.$$

Kết hợp với $f$ là đơn ánh ta suy ra $f(x)=x \quad \forall x>0$. □

### Bài toán 1.16

Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(f\left(x\right)f\left(f\left(x\right)\right)+y\right)=xf\left(x\right)+f\left(y\right)$$

với mọi số thực dương $x,y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f\left(f\left(x\right)f\left(f\left(x\right)\right)+y\right)=xf\left(x\right)+f\left(y\right) \quad \forall x,y>0$.

**Nhận xét 1.17 —** $f\left(f(x)\right)=x \quad \forall x>0$.

*Chứng minh.* Sử dụng bổ đề (1.1) ta suy ra

$$f\left(x\right)f\left(f\left(x\right)\right)=cxf\left(x\right)\Rightarrow f\left(f(x)\right)=cx \quad \forall x>0$$

với $c>0$ là hằng số. Từ đó ta suy ra $f$ là song ánh và

$$cf\left(x\right)=f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=f\left(cx\right) \quad \forall x>0.$$

Chú ý rằng $P(x,y)$ có thể viết lại thành $f(cxf(x)+y)=xf(x)+f(y) \quad \forall x,y>0$.
Từ phương trình ban đầu, tác động $f$ hai vế ta thu được

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=f\left(f\left(f\left(x\right)f\left(f\left(x\right)\right)+y\right)\right)=c^2xf(x)+cy \quad \forall x,y>0.$$

Do $f$ là toàn ánh nên từ đẳng thức trên ta thay $y=f\left(\frac{z}{c}\right)$ với $z>0$ nào đó thì được

$$f\left(xf(x)+z\right)=cxf(cx)+f(z)=f\left(c^3xf(x)+z\right).$$

Từ đây, do $f$ là đơn ánh nên ta suy ra $c=1$ hay $f\left(f(x)\right)=x \quad \forall x>0$. Khi đó $P(x,y)$ viết lại thành

$$f\left(xf\left(x\right)+y\right)=xf\left(x\right)+f\left(y\right), \forall x,y>0.$$

□

**Nhận xét 1.18 —** $f(y) \geqslant y - xf(x) \quad \forall x, y > 0.$

*Chứng minh.* Từ $P(x, y)$ bằng quy nạp ta chứng minh được

$$Q(x, y, n) : f(y + nxf(x)) = f(y) + nxf(x) \quad \forall x, y > 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

Giả sử tồn tại $x, y > 0$ sao cho $\frac{y}{xf(x)} > \frac{f(y)}{xf(x)} + 1$. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\frac{y}{xf(x)} > n > \frac{f(y)}{xf(x)}$$

khi đó $y - nxf(x) > 0$ và $f(y) < nxf(x)$. Từ $Q(x, y - nxf(x), n)$ ta suy ra

$$f(y) = f(y - nxf(x)) + nxf(x) > nxf(x),$$

mâu thuẫn. Vậy $\frac{y}{xf(x)} \leqslant \frac{f(y)}{xf(x)} + 1$ hay $f(y) \geqslant y - xf(x) \quad \forall x, y > 0.$ □

Từ đánh giá trên, ta thay $y$ bởi $f(y)$ thì được

$$y \geqslant f(y) - xf(x) \quad \forall x, y > 0.$$

Do đó

$$y + xf(x) \geqslant f(y) \geqslant y - xf(x) \quad \forall x, y > 0. \tag{*}$$

Chú ý rằng ta có

$$0 < yf(y) \leqslant y^2 + xyf(x) \quad \forall x, y > 0.$$

Từ đây ta suy ra $\lim\limits_{y \to 0^+} yf(y) = 0$. Khi đó, từ (*) cho $x \to 0^+$, suy ra $f(y) = y, \forall y > 0$.
Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy tất cả hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x \quad \forall x > 0.$

□

**Bài toán 1.19** (Balkan MO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x)$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x) \quad \forall x, y > 0.$

**Nhận xét 1.20 —** Hàm $f$ tăng nghiêm ngặt.

*Chứng minh.* Với hai số thực $y > x > 0$, từ $P\left(x, \frac{y-x}{f(x)^3}\right)$ ta suy ra

$$f(y) = x^3 f\left(\frac{y - x}{f(x)^3}\right) + f(x) > f(x),$$

chứng minh hoàn tất. □

**Nhận xét 1.21** — $f(1) = 1$.

*Chứng minh.* Giả sử $f(1) < 1$, khi đó từ $P\left(1, \frac{1}{1-f(1)^3}\right)$ ta suy ra $f(1) = 0$, vô lý.
Như vậy $f(1) \geqslant 1$.
Giả sử $f(1) > 1$, từ $P(1,1)$ suy ra $f\left(1 + f(1)^3\right) = 2f(1)$. Khi đó từ $P\left(1 + f(1)^3, 1\right)$ ta được

$$f\left(9f(1)^3 + 1\right) = f(1)\left(f(1)^3 + 1\right)^3 + 2f(1).$$

Mặt khác, từ $P(1,9)$ ta cũng có $f\left(9f(1)^3 + 1\right) = f(9) + f(1)$. Như vậy

$$f(9) = f(1)\left(f(1)^3 + 1\right)^3 + f(1) = f(1)\left(\left(f(1)^3 + 1\right)^3 + 1\right) > f(1)\left((1+1)^3 +\right) = 9f(1).$$

Từ $P(1,y)$ suy ra $f(y) + f(1) = f\left(yf(1)^3 + 1\right) > f(y+1) \Rightarrow f(9) < 9f(1)$, mâu thuẫn.
Vậy $f(1) = 1$.

□

**Nhận xét 1.22** — $f(y+n) = f(y) + n \quad \forall y > 0, n \in \mathbb{N}$.

*Chứng minh.* Từ $P(1,y)$ ta suy ra $f(y+1) = f(y) + 1 \quad \forall y > 0$. Từ đây bằng quy nạp ta chứng minh được $f(y+n) = f(y) + n \quad \forall y > 0$ với mọi $n$ nguyên dương. □

**Nhận xét 1.23** — $f\left(y + f(x)^3\right) = f(y) + x^3 \quad \forall x, y > 0$.

*Chứng minh.* Từ $P(x, y+1)$ ta thu được

$$f\left(yf(x)^3 + x + f(x)^3\right) = x^3 f(y) + f(x) + x^3 = f\left(yf(x)^3 + x\right) + x^3 \quad \forall x, y > 0.$$

Với hai số thực $y > x > 0$ ta thay $y$ bởi $\frac{y-x}{f(x)^3}$ thì được

$$f\left(y + f(x)^3\right) = f(y) + x^3.$$

Với $x, y > 0$ bất kỳ, ta chọn số nguyên dương $n$ đủ lớn sao cho $y + n > x$, khi đó

$$f\left(y + n + f(x)^3\right) = f(y+n) + x^3 \Rightarrow f\left(y + f(x)^3\right) = f(y) + x^3.$$

□

Áp dụng bổ đề (1.1) ta suy ra $f(x)^3 = kx^3 \Rightarrow f(x) = ax \quad \forall x > 0$. Thay lại vào ta dễ dàng tìm được $f(x) = x \quad \forall x > 0$, thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.
□

**Bình luận 1.24.** Bạn đọc có thể so sánh với cách giải 2 của bài toán này ở phần 2 của bài viết.

## §2 Bổ đề 2 - $f(x+A)+B=f(x+C)+D$

**Bổ đề 2.1**

Cho hàm số $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ và các số thực dương $a_i,b_i,c_i,d_i$ với $i=1,2$ thỏa mãn

$$g(x+a_1)+b_1=g(x+c_1)+d_1$$

và

$$g(x+a_2)+b_2=g(x+c_2)+d_2$$

với mọi $x>0$. Khi đó tồn tại số thực $\lambda\geqslant 0$ sao cho $d_i-b_i=\lambda(a_i-c_i)$ với $i\in\{1;2\}$.

*Chứng minh.* Nếu $a_1=c_1$ thì $b_1=d_1$, $a_2=c_2$ thì $b_2=d_2$. Ta xét trường hợp $a_i\neq c_i$ với $i=1,2$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $a_i>c_i$ với $i=1,2$.
Ta chứng minh $d_i\geqslant b_i$ với $i=1,2$.
Giả sử $d_1<b_1$, từ giả thiết, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$g(x+N(a_1-c_1)=g(x)+N(b_1-d_1)\quad \forall x>0,\in\mathbb{N}^*.$$

Cố định $x>0$ và cho $N\to+\infty$ thì $N(b_1-d_1)\to-\infty$ điều này mâu thuẫn với $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$.
Ta chứng minh bằng phản chứng, không giảm tính tổng quát ta giả sử

$$\frac{d_1-b_1}{a_1-c_1}>\frac{d_2-b_2}{a_2-c_2}\geqslant 0.$$

Nếu $d_2=b_2$ thì $g(x+a_2)=g(x+c_2)\quad\forall x>0$. Khi đó, bằng quy nạp ta chỉ ra được

$$g(x)=g(x+N(a_2-a_2))=g(x+N(a_2-c_2)-M(a_1-c_1))+M(d_1-b_1)>M(d_1-b_1)$$

với $M,N$ là các số nguyên dương sao cho $x+N(a_2-c_2)-M(a_1-c_1)>0$.
Chú ý rằng với $M>0$ thì ta có thể chọn $N$ đủ lớn sao cho $x+N(a_2-c_2)-M(a_1-c_1)>0$.
Khi đó, cố định $x$ đủ lớn và cho $M\to+\infty$ thì $g(x)\to+\infty$, điều này mâu thuẫn.
Như vậy $d_2>b_2$.
Lúc đó, ta có $\frac{d_1-b_1}{d_2-b_2}>\frac{a_1-c_1}{a_2-c_2}>0$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương $m,n$ sao cho

$$\frac{d_1-b_1}{d_2-b_2}>\frac{m}{n}>\frac{a_1-c_1}{a_2-c_2}>0.$$

Điều này dẫn đến với $x>0$ đủ lớn thì

$$g(x)=g(x+m(a_2-c_2))-m(d_2-b_2)=g(x+m(a_2-c_2)-n(a_1-c_1))+n(d_1-b_1)-m(d_2-b_2).$$

Do $u=m(a_2-c_2)-n(a_1-c_1)>0, v=n(d_1-b_1)-m(d_2-b_2)>0$ nên ta suy ra

$$g(x)=g(x+u)+v\quad\forall x>0.$$

Khi đó, bằng quy nạp ta chỉ ra được $g(x)=g(x+nu)+nv>nv$ với mọi số nguyên dương $n$. Từ đây, cố định $x>0$ và cho $n\to+\infty$ ta thấy ngay điều vô lý. Như vậy, tồn tại $\lambda\geqslant 0$ sao cho $d_i-b_i=\lambda(a_i-c_i)$ với $i\in\{1;2\}$. Chứng minh hoàn tất. □

Như vậy, bổ đề (2.1) cũng mang "hình dáng" $g(x+A)=g(x)+B$ và có cách chứng minh tương tự như (1.1) khi phát hiện được số hữu tỷ dương $\frac{m}{n}$ từ đó vận dụng các tính chất của hàm "nửa tuần hoàn" ($f(x+a) = f(x) + b$). Trong các bài toán phương trình hàm sử dụng bổ đề này, ta tập trung chỉ ra phương trình

$$f(x+a) + b = f(x+c) + d$$

với $a, b, c, d$ có thể là biểu thức theo $y, z, f(y), f(z), f(y+z), \ldots$ Khi đó áp dụng bổ đề ta suy ra $a - c = k(d-b)$, đây có thể là công cụ mấy chốt để ta giải quyết được bài toán. Để chỉ ra phương trình kể trên thường sử dụng phương pháp thêm biến, chú ý tính đối xứng, bán đối xứng,...
Ta xét một số bài toán minh họa:

**Bài toán 2.2**

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \forall x, y > 0$.
Từ $P(x, y)$ và $P(x, z)$ ta suy ra

$$f(x + f(y)) + z = f(x + f(z)) + y \quad \forall x, y, z > 0.$$

Áp dụng bổ đề (2.1) ta suy ra tồn tại số thực $k \geqslant 0$ sao cho

$$f(y) - f(z) = k(y - z) \quad \forall y, z > 0.$$

Thay $z = 1$ ta suy ra ngay $f(y) = Ay + B \quad \forall y > 0$, với $A, B$ là các hằng số. Chú ý rằng $A \geqslant 0$ và $B \geqslant 0$ (vì nếu không thì $f(x) \to B < 0$ khi $x \to 0^+$).
Thay lại vào phương trình ban đầu thì dễ dàng tìm được $f(x) = x \quad \forall x > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. □

**Bài toán 2.3**

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x) + 3x + yf(y)$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(f(x) + y) = f(x) + x + yf(y) \quad \forall x, y > 0$.
Từ $P(x, y)$ và $P(z, y)$ ta suy ra

$$f(y + f(x)) + f(z) + z = f(y + f(z)) + f(x) + x \quad \forall x, y, z > 0.$$

Sử dụng bổ đề (2.1) ta suy ra tồn tại số thực $k \geqslant 0$ sao cho

$$f(x) - f(z) = k(f(x) + x - f(z) - z) \quad \forall y, z > 0.$$

Nếu $k = 1$ thì $x - z = 0 \quad \forall x, z > 0$, vô lý. Do đó $k \neq 1$. Thay $z = 1$ ta suy ra $f(x) = Ax + B$ với $A, B$ là các hằng số không âm (vì nếu $A, B < 0$ thì lần lượt cho $x \to 0^+$ và $x \to +\infty$ ta thấy ngay điều vô lý).
Thay lại vào phương trình ban đầu ta thấy không tồn tại hàm số nào thỏa mãn. □

**Bình luận 2.4.** Với hai bài toán trên, ta đã thu được phương trình mong muốn chỉ với thao tác thêm biến và cộng đại số đơn giản.
Đối với **Bài toán 2.2** ta có thể sử dụng bổ đề (1.1) để suy ra ngay $f(x) = kx$. Tuy nhiên, ở bài này phương trình ban đầu lại có dạng $f(y + A) = g(y) + B$ nên không thể sử dụng bổ đề ở phần 1.
Một cách tương tự, ta cũng có thể giải các phương trình hàm có dạng

$$f(x + A) = g(x) + B$$

với $A, B$ là các biểu thức theo biến $y, z$.

**Bài toán 2.5**

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 2y$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(x + f(y)) = f(x + y) + 2y \quad \forall x, y > 0$.
Từ $P(x + z, y)$ ta thu được

$$f(x + z + f(y)) = f(x + y + z) + 2y \quad \forall x, y, z > 0. \tag{1}$$

Thay đổi $y, z$ trong phương trình (1) ta suy ra

$$f(x + y + f(z)) = f(x + y + z) + 2z \quad \forall x, y, z > 0. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$f(x + z + f(y)) + 2z = f(x + y + f(z)) + 2y \quad \forall x, y, z > 0.$$

Áp dụng bổ đề (2.1), khi đó tồn tại $k \geqslant 0$ sao cho

$$(z + f(y) - y - f(z)) = k(2y - 2z) \quad \forall y, z > 0.$$

Thay $z = 1$ ta suy ra ngay $f(y) = Ax + B \quad \forall x > 0$ với $A, B$ là các hằng số. Chú ý rằng $A \geqslant 0$ và $B \geqslant 0$ (vì nếu không thì $f(x) \to B < 0$ khi $x \to 0^+$).
Thay lại vào phương trình ban đầu ta tìm được $f(x) = 2x \quad \forall x > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. □

**Bình luận 2.6.** Ta thấy rằng nếu tiến hành như **Bài toán 2.2** thì không thể tạo ra phương trình có dạng $f(x + a) + b = f(x + c) + d$. Tuy nhiên ta đã giải quyết được vấn đề trên bằng cách thêm biến $z$ mới để tạo ra biểu thức đối xứng $f(x + y + z)$ (thường dùng trong thêm biến), từ đó tiến hành cộng đại số để thu được phương trình mong muốn.

**Bài toán 2.7**

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x) + 2y) = f(2x + y) + 2y$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f(f(x)+2y) = f(2x+y)+2y \quad \forall x,y>0$.
Từ $P\left(z, \frac{f(y)}{2}+x\right)$ ta suy ra

$$f(2x+f(z)+f(y)) = f\left(x+2z+\frac{f(y)}{2}\right)+f(y)+2x \quad \forall x,y,z>0.$$

Thay đổi vai trò của $y,z$ trong phương trình trên và đối chiếu với chính nó, ta suy ra

$$f\left(x+2z+\frac{f(y)}{2}\right)+f(y) = f\left(x+2y+\frac{f(z)}{2}\right)+f(z) \quad \forall x,y,z>0.$$

Áp dụng bổ đề (2.1) ta suy ra tồn tại $k \geqslant 0$ sao cho

$$2y+\frac{f(z)}{2}-2z-\frac{f(y)}{2} = k(f(y)-f(z)) \quad \forall y,z>0.$$

Thay $z=1$ ta suy ra ngay $f(y) = Ax+B \quad \forall x>0$ với $A,B$ là các hằng số. Chú ý rằng $A \geqslant 0$ và $B \geqslant 0$ (vì nếu không thì $f(x) \to B < 0$ khi $x \to 0^+$).
Thay lại vào phương trình ban đầu ta tìm được $f(x) = 2x \quad \forall x>0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. □

> **Bình luận 2.8.** Ở bài này, một lần nữa ta lại sử dụng kỹ thuật thêm biến để tạo ra vế đối xứng $f(2x+f(z)+f(y))$, từ đó thu được phương trình mong muốn.
> Ta hoàn toàn có thể giải bài này bằng phương pháp thêm biến nhưng khá phức tạp. Ngoài ra, cũng có thể khai thác tính chất $f(x) \geqslant x$ để giải quyết bài toán theo hướng sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

**Bài toán 2.9** (Balkan MO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(yf(x)^3+x\right) = x^3f(y)+f(x)$$

với mọi số thực dương $x,y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x,y)$ chỉ khẳng định $f\left(yf(x)^3+x\right) = x^3f(y)+f(x) \quad \forall x,y>0$.
Từ $P(1,y)$ suy ra $f\left(yf(1)^3+1\right) = f(y)+f(1) \quad \forall y>0$. Nếu $f(1)<1$ thì từ đây, ta thay $y$ bởi $\frac{1}{1-f(1)^3}$ thì được $f(1)=0$, vô lý. Vậy $f(1) \geqslant 1$.
Từ $P\left(x, yf(z)^3+z\right)$ và $P(z,y)$ ta suy ra với mọi số thực $x,y,z$ thì

$$f\left(yf(z)^3f(x)^3+zf(x)^3+x\right) = x^3z^3f(y)+x^3f(z)+f(x). \tag{1}$$

Từ (1), ta thay đổi vai trò $x,z$ thì được

$$f\left(yf(x)^3f(z)^3+xf(z)^3+z\right) = z^3x^3f(y)+z^3f(x)+f(z). \tag{2}$$

Từ hai đẳng thức (1), (2) ta suy ra với mọi $x, y, z > 0$ thì

$$f\left(yf(x)^3f(z)^3 + xf(z)^3 + z\right)+x^3f(z)+f(x) = f\left(yf(z)^3f(x)^3 + zf(x)^3 + x\right)+z^3f(x)+f(z)$$

từ đây thay $y$ bởi $\frac{y}{f(x)^3f(z)^3}$ thì được

$$f\left(y+\underbrace{xf(z)^3+z}_{a}\right)+\underbrace{x^3f(z)+f(x)}_{b} = f\left(y+\underbrace{zf(x)^3+x}_{c}\right)+\underbrace{z^3f(x)+f(z)}_{d}.$$

Áp dụng bổ đề (2.1) ta suy ra tồn tại số thực $\alpha \geqslant 0$ sao cho

$$\left(z^3f(x)+f(z)\right)-\left(x^3f(z)+f(x)\right) = \alpha\left(xf(z)^3+z-zf(x)^3-x\right) \quad \forall x, z > 0. \quad (3)$$

Nếu $\alpha = 0$ từ (3), thay $z = 1$ ta được $f(1) - x^3f(1) = 0 \quad \forall x > 0$, vô lý. Như vậy $\alpha \neq 0$, khi đó đặt $a = \frac{1}{\alpha}$ và thay $z = 1$ vào (3) ta suy ra với mọi $x > 0$ thì

$$af(1) - af(1)x^3 = xf(1)^3 + 1 - f(x)^3 - x$$

$$\Rightarrow f(x)^3 = af(1)x^3 + x\left(f(1)^3-1\right) + 1 - af(1).$$

Giả sử $1 - af(1) < 0$, khi đó cho $x \to 0^+$ thì $f(x)^3 \to 1 - af(1) < 0$, vô lý. Vậy $1 - af(1) \geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt[3]{1-af(1)} = k$. Hiển nhiên $f$ liên tục $\mathbb{R}^+$, từ $P(x, y)$ ta cố định $x > 0$ và cho $y \to 0^+$ thì được $f(x) = x^3k + f(x)$ hay $k = 0$. Như vậy $af(1) = 1$. Thay vào ta được $f(x)^3 = x^3 + \left(f(1)^3-1\right)x \quad \forall x > 0$. Đặt $f(1) = b \geqslant 1$. Từ $P(1, 1)$ suy ra $f\left(1+b^3\right) = 2b$. Chú ý rằng ta cũng có

$$f(1+b^3)^3 = b^9 + 4b^6 + 3b^3,$$

khi đó

$$b^9 + 4b^6 + 3b^3 = 8b^3 \Leftrightarrow b^3\left(b^6+4b^3-5\right) = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

Điều này dẫn đến $f(x)^3 = x^3$ hay $f(x) = x \quad \forall x > 0$. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x) = x \quad \forall x > 0$. □

**Bình luận 2.10.** Ở bài toán trên, bằng việc vận dụng khéo léo các thao tác thêm biến và khai thác tính đối xứng, ta đã thu được phương trình dạng $f(x+a)+b = f(x+b)+c$. Việc áp dụng bổ đề là mấu chốt để giải quyết hoàn toàn bài toán. Tuy nhiên, ta vẫn chưa chỉ ra ngay được hàm $f$ mà phải qua nhiều bước tính toán, lập luận để tìm các hệ số.

**Bình luận 2.11.** Ta vẫn có thể sử dụng bổ đề (1.1) trong bài toán này (đã trình bày lời giải ở phần trước). Dù phương trình hàm ban đầu đã có dạng $f(x+A) = f(x)+B$ nhưng ta không thể suy ra $A = kB$ do $A, B$ ở đây là các hàm số theo biến $x, y$.

Với ý tưởng tương tự, ta xét bài toán sau được mở rộng từ VMO 2022:

**Bài toán 2.12** (Mở rộng VMO 2022)
Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(xy + \frac{f(y)}{y}\right) = f(x)f(y) + 1$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f\left(xy + \frac{f(y)}{y}\right) = f(x)f(y) + 1 \quad \forall x, y > 0.$
Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \forall x > 0$. Khi đó $P(x, y)$ trở thành

$$f(xy + g(y)) = f(x)f(y) + 1 \quad \forall x, y > 0.$$

Từ $P(xz + g(z), y)$ và $P(x, z)$ ta suy ra

$$f(xyz + yg(z) + g(y)) = (f(x)f(z) + 1)f(y) + 1 \qquad \forall x, y.z > 0$$

hay

$$f(xyz + (yg(z) + g(y))) = f(x)f(y)f(z) + f(y) + 1 \quad \forall x, y, z > 0.$$

Thay đổi vai trò $y, z$ trong đẳng thức trên thì được

$$f(xyz + (zg(y) + g(z))) = f(x)f(y)f(z) + f(z) + 1 \quad \forall x, y, z > 0.$$

Kết hợp hai đẳng thức trên, suy ra với mọi $x, y, z > 0$ thì

$$f\left((yz)x + \underbrace{(yg(z) + g(y))}_{a}\right) + \underbrace{f(z)}_{b} = f\left((yz)x + \underbrace{(zg(y) + g(z))}_{c}\right) + \underbrace{f(y)}_{d}.$$

Thay $x$ bởi $\frac{x}{yz}$ vào đẳng thức trên và áp dụng bổ đề (2.1), khi đó tồn tại $\lambda \geqslant 0$ sao cho

$$f(y) - f(z) = \lambda\left((yg(z) + g(y)) - (zg(y) + g(z))\right) = \lambda\left(g(z)(y - 1) + g(y)(1 - z)\right).$$

Thay $z = 1$ vào đẳng thức trên và thu gọn thì được

$$f(y) = \lambda f(1)y - \lambda f(1) + f(1) \quad \forall y > 0.$$

Đến đây ta dễ dàng tìm được $f(x) = x \quad \forall x > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.
Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x) = x \quad \forall x > 0$. □

**Bình luận 2.13.** Với ý tưởng hoàn toàn tương tự, ta có thể giải các phương trình có dạng

$$f(A(y)x + B(y)) = C(x)f(x) + D(x),$$

với $A, B, C, D : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Tuy nhiên, việc tìm ra hàm $f$ cụ thể đôi khi sẽ rất phức tạp tùy thuộc vào các hàm $A, B, C, D$.

**Bài toán 2.14**

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xy + f(y)^2) = f(x)f(y) + yf(y)$$

với mọi số thực dương $x, y$.

*Lời giải.* Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Ký hiệu $P(x, y)$ chỉ khẳng định $f(xy + f(y)^2) = f(x)f(y) + yf(y) \quad \forall x, y > 0$.
Từ $P(xz + f(z)^2, y)$ và $P(x, z)$ ta suy ra

$$f((xz + f(z)^2)y + f(y)^2) = (f(x)f(z) + zf(z))f(y) + yf(y) \quad \forall x, y > 0$$

hay

$$f((yz)x + (f(y)^2 + yf(z)^2)) = (f(y)f(z))f(x) + (yf(y) + zf(z)f(y)) \quad \forall x, y, z > 0.$$

Thay đổi vai trò $y, z$ trong đẳng thức trên thì được

$$f((yz)x + (f(z)^2 + zf(y)^2)) = (f(y)f(z))f(x) + (zf(z) + yf(y)f(z)) \quad \forall x, y, z > 0.$$

Kết hợp hai đẳng thức trên, suy ra với mọi $x, y, z > 0$ thì

$$\begin{aligned} &f\left((yz)x + \underbrace{(f(y)^2 + yf(z)^2)}_{a}\right) + \left(\underbrace{zf(z) + yf(y)f(z)}_{b}\right) \\ &= f\left((yz)x + \underbrace{(f(z)^2 + zf(y)^2)}_{c}\right) + \left(\underbrace{yf(y) + zf(z)f(y)}_{d}\right). \end{aligned}$$

Thay $x$ bởi $\frac{x}{yz}$ và áp dụng bổ đề (2.1), khi đó tồn tại $\lambda \geqslant 0$ sao cho

$$(yf(y) + zf(z)f(y)) - (zf(z) + yf(y)f(z)) = \lambda\left(\left(f(y)^2 + yf(z)^2\right) - \left(f(z)^2 + zf(y)^2\right)\right)$$

với mọi $y, z > 0$. Thay $z = 1$ vào phương trình trên và thu gọn thì được

$$f(y) = \frac{(\lambda f(1)^2)y + (f(1) - \lambda f(1)^2)}{(1 - f(1))y + f(1)} \quad \forall y > 0.$$

**Trường hợp 1.** $f(1) \neq 1, \lambda \neq 0$. Khi đó cho $y \to +\infty$ thì $f(y) \to L = \frac{\lambda f(1)^2}{1-f(1)} \neq 0$. Từ $P(x, y)$ ta cố định $x > 0$ và cho $y \to +\infty$, khi đó do $L \neq 0$ nên $VT \to L$ và $VP \to \infty$, điều này mâu thuẫn.
**Trường hợp 2.** $f(1) \neq 1, \lambda = 0$. Khi đó $f(y) = \frac{f(1)}{(1-f(1))y+f(1)} \to 0$ khi $y \to +\infty$. Từ $P(x, y)$, cho $x = y \to +\infty$ thì $VT \to 0$ và $VP \to \frac{f(1)}{1-f(1)} \neq 0$, điều này không thể xảy ra.
**Trường hợp 3.** $f(1) = 1$. Thay vào ta suy ra $f(x) = \lambda x + (1 - \lambda) \quad \forall x > 0$.
Từ $P(1, 1)$ suy ra $f(2) = 2$, khi đó $2 = 2\lambda + (1 - \lambda)$ hay $\lambda = 1$. Tóm lại $f(x) = x \quad \forall x > 0$.
Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.
Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(x) = x \quad \forall x > 0$.

□

**Bình luận 2.15.** Ta cũng có thể tiếp cận theo hướng sau: Đặt $c = f(1)$. Từ $P(x, 1)$ ta suy ra

$$f\left(x + c^2\right) = cf(x) + c \quad \forall x > 0. \quad (1)$$

Từ $P\left(x + \frac{c^2}{y}, y\right)$ suy ra

$$f\left(xy + f(y)^2 + c^2\right) = f\left(x + \frac{c^2}{y}\right) f(y) + yf(y) \quad \forall x, y > 0.$$

Mặt khắc, từ đẳng thức (1) ta cũng có

$$f\left(xy + f(y)^2 + c^2\right) = cf\left(xy + f(y)^2\right) + c = cf(x)f(y) + cyf(y) + c \quad \forall x, y > 0.$$

Đối chiếu hai đẳng thức trên ta suy ra

$$f\left(x + \frac{c^2}{y}\right) = cf(x) + (c-1)y + \frac{c}{f(y)} \quad \forall x, y > 0.$$

Ký hiệu mệnh đề trên là $Q(x, y)$. Từ $Q\left(x + c^2, y\right)$ thu được

$$f\left(x + \frac{c^2}{y} + c^2\right) = cf\left(x + c^2\right) + (c-1)y + \frac{c}{f(y)} = c^2 f(x) + c^2 + (c-1)y + \frac{c}{f(y)} \quad \forall x, y > 0.$$

Mặt khác, từ (1) ta cũng có

$$f\left(x + \frac{c^2}{y} + c^2\right) = cf\left(x + \frac{c^2}{y}\right) + c = c^2 f(x) + \left(c^2 - c\right) y + \frac{c^2}{f(y)} + c \quad \forall x, y > 0.$$

So sánh hai đẳng thức trên ta suy ra

$$c^2 f(x) + c^2 + (c-1)y + \frac{c}{f(y)} = c^2 f(x) + \left(c^2 - c\right) y + \frac{c^2}{f(y)} + c \quad \forall x, y > 0$$

Suy ra $(c-1)^2 y + \frac{c^2 - c}{f(y)} = c^2 - c \quad \forall y > 0$. Nếu $c \neq 1$ thì $(c-1)y + \frac{c}{f(y)} = c$ hay $f(y) = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)y} \quad \forall y > 0$. Thử lại ta thấy hàm số này không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó $c = 1$. Khi đó $Q(x, y)$ trở thành

$$R(x, y): \quad f\left(x + \frac{1}{y}\right) = f(x) + \frac{1}{f(y)} \quad \forall x, y > 0.$$

Từ $R(1, y)$ kết hợp với đẳng thức (1) ta thu được $f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)} \quad \forall y > 0$. Thay lại vào $R(x, y)$ thì được $\left(x + \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ hay

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y > 0.$$

Suy ra $f(x) = x \quad \forall x > 0$ (chú ý rằng $f(1) = c = 1$). Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.

# §3 Bài tập rèn luyện

**Bài toán 3.1.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + 2022f(y)) = f(x) + 2022y \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.2.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(x + \frac{y}{f(y)}\right) = f(x) + 1 \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.3.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + \frac{1}{y} \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.4.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xy + f(y)^3) = f(x)f(y) + y^2 f(y) \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.5.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xy + yf(y)) = f(x)f(y) + f(y)^2 \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.6.** Tìm hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ và đa thức $P(x)$ hệ số không âm thỏa mãn

$$f(xy + f(x)) = f(x)f(y) + P(x) \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.7.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y) \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.8.** Với $n \in \mathbb{Z}^+$ cho trước, tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x + yf(x)^n) = f(x) + x^n f(y) \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.9.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x) \quad \forall x, y > 0.$$

**Bài toán 3.10.** Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xf(y) + f(y)^3) = yf(x) + f(y)^3 \quad \forall x, y > 0.$$

# §4 Tài liệu tham khảo

## Tài liệu

[1] **Diễn đàn Art of Problem Solving.**
https://artofproblemsolving.com/community

[2] **Nhóm Hướng tới Olympic VN.**
https://www.facebook.com/groups/vmo.tst

[3] **Một góc nhìn tổng quát cho bài phương trình hàm thi HSG QG 2022 - Nguyễn Huy Trung.**
https://drive.google.com/file/d/198Zpm2mFCKH1jkNuXYlu1znGWfC3zLSQ/view?usp=sharing.

[4] **Hai bổ đề trong bài toán phương trình hàm trên tập số thực dương - Đoàn Quang Đăng.**
https://drive.google.com/file/d/1lzjZrld35aC_mha997ibycwd4KcQyVt9/view?fbclid=IwAR2Q09UmGQyCRMeUFFslKR6s0UwfTOjXcKhn3x3KWM6GYyizD5erYFPxmhU.

[5] **Vietnamese Mathematical Competitions 2022 Booklet.**
https://drive.google.com/file/d/1-QjNSyvfz18jq1h5Rx-5UhN6S4fm9BSZ/view?fbclid=IwAR0-AIYwl0hJw3AUCuhyI0xtXyYvqPR8mn5wP0fKJOPVYVCtlNw6jCpgXA0