MỤC LỤC

A	Giới thiệu phương pháp thêm biến	1
B	Một số kết quả cơ bản	3
C	Phương pháp thêm biến đối với phương trình hàm có tính đối xứng	7
D	Phương pháp thêm biến trong lớp hàm đơn điệu	11
E	Phương pháp thêm biến trong lớp hàm liên tục	16
F	Bài tập	21

Tài liệu tham khảo 59

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP THÊM BIẾN

A. GIỚI THIỆU PHƯƠNG PHÁP THÊM BIẾN

Vào năm 2012, tôi có viết chuyên đề "Giải phương trình hàm bằng phương pháp thêm biến" (tài liệu tham khảo [1]). Trong quá trình giảng dạy tôi có sưu tầm thêm một số bài tập mới, và gần đây có tham khảo thêm bài viết "Phương pháp thêm biến trong giải phương trình hàm" của tác giả Võ Quốc Bá Cẩn (tài liệu tham khảo [3]). Ý tưởng của phương pháp này rất đơn giản như sau: Khi gặp những phương trình hàm với cặp biến tự do x, y, bằng cách thêm biến mới z (hoặc thêm một vài biến mới), ta sẽ tính một biểu thức nào đó chứa x, y, z theo hai cách khác nhau, từ đây ta thu được một phương trình hàm theo ba biến x, y, z, sau đó chọn z bằng những giá trị đặc biệt hoặc biến đổi, rút gọn phương trình hàm theo ba biến x, y, z để thu được những phương trình hàm mới, hướng tới kết quả bài toán. Về mặt ý tưởng thì đơn giản, vì thực ra nó là phương pháp thế khi giải phương trình hàm. Tuy nhiên công dụng của phương pháp này lại mạnh mẽ, giải quyết được nhiều bài toán; việc thêm một vài biến mới sẽ giúp phép thế trở nên linh hoạt, uyển chuyển và có nhiều lựa chọn hơn, từ đó phát hiện được nhiều tính chất thú vị của hàm số cần tìm.

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x) + y) = x + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{Q}$, sử dụng (1) ta được

$$f(f(x) + y + z) = x + f(y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Mặt khác cũng với mọi số hữu tỉ x, y, z thì $f(f(z) + x) = z + f(x)$, do đó

$$f(y + (z + f(x)) = f(y + f(f(z) + x)) = f(z) + x + f(y). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(y + z) = f(y) + f(z), \ \forall y, z \in \mathbb{Q}. \tag{4}$$

Tương tự như bài toán 4 ở trang 3, suy ra $f(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{Q}$. Thay vào (1) ta rút ra

$$a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Thử lại thấy $f(x) \equiv x$ và $f(x) \equiv -x$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Chú ý 1. Cũng có thể lập luận tương tự như sau: Để sử dụng lại được "kiểu truy hồi" trong (1), ta thay x bởi $f(x) + z$ (tức là thêm biến $z \in \mathbb{Q}$) và sử dụng (1) ta được

$$\begin{aligned} & f(x + y + f(z)) = f(x) + f(y) + z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \\ \Rightarrow & z + f(x + y) = f(x) + f(y) + z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \\ \Rightarrow & f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

và cũng thu được kết quả. Tổng quát hơn, khi đề bài có dạng $f(x + g(y))$ thì ta có thể thêm biến bằng cách thay y bởi $y + g(z)$ và biến đổi hai vế rồi so sánh. Bên cạnh đó, chúng ta cũng hay sử dụng tính đối xứng của các biến.

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta thêm biến mới z như sau: Theo (1) ta có

$$xf(x) - zf(z) = (x-z)f(x+z), \forall x, z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} xf(x) - zf(z) &= [xf(x) - yf(y)] + [yf(y) - zf(z)] \\ &= (x-y)f(x+y) + (y-z)f(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$(x-z)f(x+z) = (x-y)f(x+y) + (y-z)f(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Với mọi $u \in \mathbb{R}$, xét hệ $\begin{cases} x+z = u \\ x+y = 1 \\ y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = \left(\dfrac{u+1}{2}; \dfrac{1-u}{2}; \dfrac{u-1}{2}\right)$. Do đó (4) trở thành

$$f(u) = f(1)u + f(0)(1-u),\ \forall u \in \mathbb{R}$$

hay $f(x) = ax + b,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (1) thấy thỏa mãn.

Bài toán 3. Tìm các hàm số $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn: g là đơn ánh và

$$f(g(x) + y) = g(f(y) + x),\ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. Ta thêm biến mới z như sau:

$$\begin{aligned} & f(g(x) + y) = g(f(y) + x),\ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \\ \Leftrightarrow & f(g(x) + y) + z = g(f(y) + x) + z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & g(f(g(x) + y) + z) = g(g(f(y) + x) + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & f(g(z) + g(x) + y) = g(g(f(y) + x) + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & f(g(x) + g(z) + y) = g(g(f(y) + x) + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & g(f(g(z) + y) + x) = g(g(f(y) + x) + z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & f(g(z) + y) + x = g(f(y) + x) + z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & g(f(y) + z) + x = g(f(y) + x) + z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2) cho $z = -f(y)$ ta được

$$\begin{aligned} & g(0) + x = g(f(y) + x) - f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & g(0) + x + f(y) = g(f(y) + x),\ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (3) cho $x = -f(y) + t$ ta được $g(0) + t = g(t),\ \forall t \in \mathbb{Z}$. Vậy

$$g(x) = x + c,\ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Thay vào (1) ta được

$$f(x + y + c) = f(y) + x + c,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Từ (4) lấy $x = -y - c$ ta được $f(y) = y + d,\ \forall y \in \mathbb{Z}$ (với $d = f(0)$). Vậy

$$g(x) = x + c,\ \forall x \in \mathbb{Z} \text{ và } f(x) = x + d,\ \forall x \in \mathbb{Z},$$

với c và d là những hằng số nguyên tùy ý. Thử lại thấy đúng.

Chú ý 2. Như vậy, chỉ cần trải qua vài ba bài toán là bạn đọc đã nắm được phương pháp thêm biến khi giải phương trình hàm. Tuy nhiên trong chuyên đề này tôi vẫn đưa vào một số lượng lớn các bài toán để bạn đọc luyện tập, củng cố thêm phương pháp thêm biến cũng như phương pháp giải phương trình hàm nói chung. Tất cả các bài toán đều được giải chi tiết, có bài được giải bằng vài ba cách, trong đó có cách thêm biến.

B. MỘT SỐ KẾT QUẢ CƠ BẢN

Trong mục này ta sẽ phát biểu và chứng minh một số kết quả (thông qua các bài toán) sẽ được sử dụng trong chuyên đề này. Lưu ý rằng đây là những bài toán rất cơ bản, cần thiết cho những ai muốn tìm hiểu về phương trình hàm (cả kết quả và lời giải), chẳng hạn như bài toán 4, 5, khi đi thi học sinh giỏi là được phép sử dụng mà không cần chứng minh lại.

Bài toán 4 (Phương trình hàm Cauchy).
Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài, khi đó ta có (1). Trong (1) lấy $y=x$ ta được

$$f(2x)=2f(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x=0$ ta được $f(0)=0$. Từ (1) và (2) và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(nx)=nf(x), \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Trong (1) lấy $y=-x$ và sử dụng $f(0)=0$ ta được

$$f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Bởi vậy khi $n=-1,-2,\ldots,$ sử dụng (3) và (4) ta có

$$f(nx)=f(-n(-x))=-nf(-x)=nf(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (3) và (5) suy ra

$$f(nx)=nf(x), \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{6}$$

Với mọi $n=1,2,\ldots,$ sử dụng (3) ta có

$$f(x)=f\left(n.\frac{1}{n}x\right)=nf\left(\frac{1}{n}x\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x), \forall x\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Với mọi $m,n\in\mathbb{Z}$ và $n>0$, sử dụng (7) và (6) ta có

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=f\left(m.\frac{1}{n}x\right)=mf\left(\frac{1}{n}x\right)=m.\frac{1}{n}f(x)=\frac{m}{n}f(x), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bởi vậy

$$f(rx)=rf(x), \forall x\in\mathbb{R}, \forall r\in\mathbb{Q}. \tag{8}$$

Trong (8) lấy $x=1$ ta được

$$f(r)=rf(1), \forall r\in\mathbb{Q}. \tag{9}$$

Với mỗi $x\in\mathbb{R}$ tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=x$. Vì f liên tục nên

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right)=\lim_{n\to+\infty} f(r_n)=\lim_{n\to+\infty} r_nf(1)=f(1)\lim_{n\to+\infty} r_n=f(1)x.$$

Vậy

$$f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}\ \text{(với C là hằng số tùy ý)}. \tag{10}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận: tất cả các hàm số cần tìm đều có dạng như ở (10).

Bài toán 5. Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Giải. Dễ thấy hàm $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn (1). Tiếp theo xét $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Theo (1) ta có

$$f(x_0) = f\left(x + (x_0 - x)\right) = f(x).f(x_0 - x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy đặt

$$\ln f(x) = g(x) \ \left(f(x) = e^{g(x)}\right).$$

Khi đó hàm g liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} &e^{g(x+y)} = e^{g(x)}.e^{g(y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &e^{g(x+y)} = e^{g(x)+g(y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &g(x+y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Theo kết quả bài toán 4 suy ra $g(x) = bx, \forall x \in \mathbb{R}$ $\left(b \text{ là hằng số}\right)$. Vậy $f(x) = e^{bx} = a^x$, với $a > 0$ tùy ý. Các hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x) \equiv 0, \ f(x) \equiv a^x \ (a \text{ là hằng số dương}).$$

Lưu ý. Phương trình hàm (1) của bài toán 5 cũng được gọi là phương trình hàm Cauchy. Kết quả bài toán 5 được phép sử dụng mà không cần chứng minh lại.

Bài toán 6. Cho hàm số f là đơn ánh và liên tục trên một khoảng nào. Chứng minh rằng hàm số f đơn điệu thực sự trên khoảng đó.

Giải. Giả sử f đơn ánh và liên tục trên khoảng $(a; b)$. Lấy hai giá trị cố định $\alpha, \beta \in (a; b)$ mà $\alpha < \beta$. Với mọi $x, y \in (a; b), x < y$ ta xét hàm số $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$g(t) = f\left((1-t)\beta + ty\right) - f\left((1-t)\alpha + tx\right), \forall t \in [0; 1].$$

Khi đó g là hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và

$$g(0) = f(\beta) - f(\alpha), \ g(1) = f(y) - f(x).$$

Nếu $g(0).g(1) = [f(\beta) - f(\alpha)]\,[f(y) - f(x)] < 0$ thì tồn tại $\gamma \in (0; 1)$ sao cho $g(\gamma) = 0$. Nghĩa là

$$\begin{aligned} &f\left((1-\gamma)\beta + \gamma y\right) - f\left((1-\gamma)\alpha + \gamma x\right) = 0 \\ \Rightarrow &f\left((1-\gamma)\beta + \gamma y\right) = f\left((1-\gamma)\alpha + \gamma x\right). \end{aligned}$$

Vì f là đơn ánh nên

$$(1-\gamma)\beta + \gamma y = (1-\gamma)\alpha + \gamma x \Leftrightarrow (1-\gamma)(\beta - \alpha) = \gamma(x - y).$$

Điều này là vô lí vì vế phải âm còn vế trái dương. Bởi vậy

$$g(0).g(1) = [f(\beta) - f(\alpha)]\,[f(y) - f(x)] \geq 0$$

Nhưng nếu $[f(\beta) - f(\alpha)]\,[f(y) - f(x)] = 0$ thì $f(\beta) = f(\alpha)$ hoặc là $f(y) = f(x)$. Điều này mâu thuẫn với f là đơn ánh. Bởi vậy

$$[f(\beta) - f(\alpha)]\,[f(y) - f(x)] > 0.$$

Suy ra $f(\beta) - f(\alpha)$ luôn cùng dấu với $f(y) - f(x)$. Do đó f đơn điệu thực sự.

Bài toán 7. Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, đơn điệu trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

- Trường hợp 1: f là hàm tăng. Tương tự như bài toán 4 ở trang 3 ta chứng minh được

  $$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

  Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

  $$u_n \le x \le v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

  Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (2) ta có

  $$f(u_n) \le f(x) \le f(v_n) \Rightarrow ku_n \le f(x) \le kv_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

  Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

  $$kx \le f(x) \le kx \Rightarrow f(x) = kx.$$

  Vậy $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì). Thử lại thấy thỏa mãn.

- Trường hợp 2: f là hàm giảm. Tương tự như bài toán 4 ở trang 3 ta chứng minh được

  $$f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

  Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

  $$u_n \le x \le v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

  Vì f là hàm giảm nên kết hợp với (2) ta có:

  $$f(u_n) \ge f(x) \ge f(v_n) \Rightarrow ku_n \ge f(x) \ge kv_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

  Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

  $$kx \ge f(x) \ge kx \Rightarrow f(x) = kx.$$

  Vậy $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì). Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$ (k là hằng số bất kì).

Bài toán 8. Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \; \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $x = y$ ta được:

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x), \; \forall x \in (0; +\infty).$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được:

$$f(nx) = nf(x), \; \forall x \in (0; +\infty), \; n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Đặt $c = f(1) > 0$. Với mọi $n = 1, 2, \ldots$, ta có:

$$c = f(1) = f(n.\frac{1}{n}) \overset{\text{do }(2)}{=} nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = c.\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Giả sử $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, khi đó $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $r = \dfrac{m}{n}$. Ta có:

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m.\frac{1}{n}\right) \overset{\text{do }(2)}{=} mf\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\text{do }(3)}{=} \frac{cm}{n} = cr. \tag{4}$$

Từ giả thiết suy ra: $f(x+y) > f(x)$, $\forall x, y \in (0; +\infty)$, do đó f là hàm tăng trên $(0; +\infty)$. Với mọi số thực $x > 0$, khi đó tồn tại hai dãy số hữu tỉ dương (α_n), (β_n) sao cho:

$$\alpha_n \leq x \leq \beta_n, \ \forall n = 1, 2, \ldots \ \text{ và } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = x = \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$

Do (4) và do f tăng nghiêm ngặt trên $(0; +\infty)$ nên:

$$\begin{aligned} & f(\alpha_n) \leq f(x) \leq f(\beta_n), \ \forall n = 1, 2, \ldots \\ \Rightarrow & c\alpha_n \leq f(x) \leq c\beta_n, \ \forall n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Từ (5) cho $n \to +\infty$ và sử dụng nguyên lí kẹp ta được:

$$cx \leq f(x) \leq cx, \ \forall x > 0.$$

Vậy $f(x) = cx$, $\forall x > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Chú ý 3. Tương tự, ta cũng thu được kết quả: Nếu hàm số $f : (0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thỏa mãn:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in (0; +\infty)$$

thì $f(x) = cx$, $\forall x > 0$, với c là hằng số không âm.

Bài toán 9. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
$$f(xy) = f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giải. Từ (1), tiến hành tương tự như ở lời giải bài toán 4 ở trang 3 ta chứng minh được các kết quả sau:

$$\begin{cases} f(rx) = rf(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q} & (3) \\ f(0) = 0, \ f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. & (4) \end{cases}$$

Từ (2) cho $y = x$ ta được $f(x^2) = [f(x)]^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$. Từ (2) và (3) ta được: $rf(x) = f(rx) = f(r)f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}$. (5)
Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Xét $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (5) cho $x = x_0$, ta được

$$f(r) = r, \ \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{6}$$

Tiếp theo ta chứng minh f là hàm đồng biến. Giả sử $x < y$. Khi đó

$$y - x > 0 \Rightarrow f(y-x) \geq 0.$$

Sử dụng (1) ta được

$$f(y) = f((y-x)+x) = f(y-x) + f(x) \geq f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Vậy hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1,2,\ldots; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

Vì f là hàm tăng nên kết hợp với (6) ta có

$$f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n) \Rightarrow u_n \leq f(x) \leq v_n (\forall n = 1,2,\ldots).$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$x \leq f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x.$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

C. PHƯƠNG PHÁP THÊM BIẾN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH HÀM CÓ TÍNH ĐỐI XỨNG

Đối với những phương trình hàm có tính đối xứng theo cặp biến x và y, khi ta thay cặp $(x;y)$ bởi cặp $(y;x)$ thì phương trình hàm vẫn không đổi, tức là ta không thu được gì cả. Những trường hợp như vậy ta thường thêm biến z để tạo ra sự bất đối xứng và thu được những phương trình hàm khác.

Bài toán 10. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy),\ \forall x,y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Sử dụng (1), ta thêm biến mới z như sau:

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x)f(y+z)f(xy+xz) \\ &= f(x)f(y)f(z)f(yz)f(xy)f(xz)f(x^2yz),\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}. \quad (2) \\ f(x+y+z) &= f(y)f(x+z)f(xy+yz) \\ &= f(x)f(y)f(z)f(xz)f(xy)f(yz)f(xy^2z),\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f(x^2yz) = f(xy^2z),\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Với $x \neq 0, y \neq 0$, từ (4) lấy $z = \dfrac{1}{xy}$ ta được $f(x) = f(y),\ \forall x,y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hay f là hàm hằng trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Giả sử $f(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (c là hằng số). Từ (1) lấy $x = y = 1$ ta được

$$c = c^3 \Leftrightarrow c \in \{0,1,-1\}.$$

Từ (1) lấy $y = -x \neq 0$ ta được $f(0) = c^3 = c$. Vậy $f(x) \equiv c,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó tất cả các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) \equiv 0,\ f(x) \equiv 1,\ f(x) \equiv -1$.

Bài toán 11. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Ta sẽ thêm biến mới z như sau: Với mọi số thực x, y, z, theo (1) ta có

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x+y)\cos z + f(z)\cos(x+y) \\ &= [f(x)\cos y + f(y)\cos x]\cos z + f(z)\cos(x+y) \\ &= [f(x)\cos y + f(y)\cos x]\cos z + f(z)(\cos x\cos y - \sin x \sin y). \end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x)\cos(y+z) + f(y+z)\cos x \\ &= f(x)\cos(y+z) + [f(y)\cos z + f(z)\cos y]\cos x \\ &= f(x)(\cos y\cos z - \sin y\sin z) + [f(y)\cos z + f(z)\cos y]\cos x. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) thu được

$$\begin{aligned} &[f(x)\cos y + f(y)\cos x]\cos z + f(z)(\cos x\cos y - \sin x\sin y) \\ =&f(x)(\cos y\cos z - \sin y\sin z) + [f(y)\cos z + f(z)\cos y]\cos x \end{aligned}$$

Dễ dàng rút gọn được

$$f(z)\sin x\sin y = f(x)\sin y\sin z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) lấy $y = \dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$\begin{aligned} & f(z)\sin x = f(x)\sin z, \ \forall x, z \in \mathbb{R} \qquad (5) \\ \Rightarrow & \frac{f(x)}{\sin x} = \frac{f(z)}{\sin z}, \ \forall x \neq m\pi, \ z \neq n\pi \ (m, n \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow & \frac{f(x)}{\sin x} \equiv c \Rightarrow f(x) \equiv c\sin x. \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = c\sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.
Lưu ý. Đến (5) ta có thể lí luận như sau: Từ (5) lấy $z = \dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$f(x) = c\sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ c = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

và cũng được kết quả tương tự. Từ lời giải bằng phương pháp thêm biến như trên ta suy ra một lời giải khác, rất ngắn gọn như sau: Trong (1) lấy $y = \dfrac{\pi}{2}$, ta được

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Đặt $x + \dfrac{\pi}{2} = t$, thay vào (6) ta được

$$f(t) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$$

và cũng được kết quả tương tự.

Bài toán 12 (Chọn đội tuyển Ấn Độ năm 2004).
Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) f(y) - c\sin x \sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

trong đó c là hằng số lớn hơn 1.
Giải. Bằng cách thêm biến mới z ta có

$$\begin{aligned} & f(x+y+z) = f(x) f(y+z) - c\sin x \sin(y+z) \\ =& f(x)\left[f(y) f(z) - c\sin y \sin z\right] - c\sin x(\sin y\cos z + \cos y \sin z) \\ =& f(x) f(y) f(z) - cf(x)\sin y\sin z - c\sin x \sin y\cos z - c\sin x\cos y\sin z. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned} & f(y+x+z) \\ =& f(x) f(y) f(z) - cf(y)\sin x\sin z - c\sin y\sin x\cos z - c\sin y\cos x\sin z. \end{aligned}$$

Mà $f(x+y+z) = f(y+x+z)$ nên

$$\begin{aligned} & cf(x)\sin y\sin z + c\sin x\sin y\cos z + c\sin x\cos y\sin z \\ =& cf(y)\sin x\sin z + c\sin y\sin x\cos z + c\sin y\cos x\sin z. \end{aligned}$$

Suy ra: $\sin z\left[f(x)\sin y - f(y)\sin x\right] = \sin z(\sin y\cos x - \cos y\sin x)$.
Thế $z = \dfrac{\pi}{2}$, ta nhận được:

$$f(x)\sin y - f(y)\sin x = \sin y\cos x - \cos y\sin x. \tag{2}$$

Trong (2) lấy $x = \pi$, ta được: $f(\pi)\sin y = -\sin y$. (3)
Trong (3), lấy $y = \dfrac{\pi}{4}$, ta được: $f(\pi)\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f(\pi) = -1$.
Trong (1), lấy $x = y = \dfrac{\pi}{2}$, ta được:

$$f(\pi) = f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - c \Leftrightarrow f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = c - 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm\sqrt{c-1}.$$

Trong (1), lấy $y = \pi$, ta được

$$f(x+\pi) = f(x) f(\pi) \Rightarrow f(x+\pi) = -f(x). \tag{4}$$

Từ (4) và (1) ta có

$$\begin{aligned} -f(x) = f(x+\pi) &= f\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) f\left(\frac{\pi}{2}\right) - c\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} \\ &= f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) f\left(\frac{\pi}{2}\right) - c\cos x = \left[f(x) f\left(\frac{\pi}{2}\right) - c\sin x\right] f\left(\frac{\pi}{2}\right) - c\cos x. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & f(x)\left[f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right] = cf\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x + c\cos x \\ \Rightarrow & cf(x) = cf\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x + c\cos x \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x + \cos x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm\sqrt{c-1}\sin x + \cos x.$$

Sau khi thử lại, ta kết luận: Có hai hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = \sqrt{c-1}\sin x + \cos x,\ \forall x, y \in \mathbb{R};\ f(x) = -\sqrt{c-1}\sin x + \cos x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lưu ý. Nếu hai vế của phương trình hàm đối xứng giữa các biến thì bằng cách tăng số biến, chúng ta có thể sử dụng được tính đối xứng.

Bài toán 13. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) \neq 0$ và

$$f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - \sin^2 y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Trong (1) cho $x = y$ ta được

$$f(2x)f(0) = f^2(x) - \sin^2 x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $b = f(0) \neq 0$. Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} f(x+y)f(x-y) &= f(2x)f(0) + \sin^2 x - \sin^2 y \\ &= bf(2x) + \sin(x+y)\sin(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Đặt $u = x + y$, $v = x - y$, thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned} &f(u)f(v) = bf(u+v) + \sin u \sin v,\ \forall u, v \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow &bf(u+v) = f(u)f(v) - \sin u \sin v,\ \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Với mọi u, v, $w \in \mathbb{R}$, sử dụng (4) ta được

$$\begin{aligned} &bf(u+v+w) = f(u+v)f(w) - \sin(u+v)\sin w \\ =&\frac{1}{b}\left[f(u)f(v) - \sin u \sin v\right] f(w) - (\sin u \cos v + \cos u \sin v)\sin w \\ =&\frac{1}{b}f(u)f(v)f(w) - \frac{1}{b}f(w)\sin u \sin v - \sin u \cos v \sin w - \cos u \sin v \sin w. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} &bf(u+v+w) = f(u)f(v+w) - \sin u \sin(v+w) \\ =&\frac{1}{b}\left[f(v)f(w) - \sin v \sin w\right] f(u) - (\sin v \cos w + \cos v \sin w)\sin u \\ =&\frac{1}{b}f(u)f(v)f(w) - \frac{1}{b}f(u)\sin v \sin w - \sin u \sin v \cos w - \sin u \cos v \sin w. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b}f(w)\sin u \sin v + \cos u \sin v \sin w \\ =&\frac{1}{b}f(u)\sin v \sin w + \sin u \sin v \cos w,\ \forall u, v, w \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Từ (5) cho $v = \dfrac{\pi}{2}$ ta được

$$\frac{1}{b}f(w)\sin u + \cos u \sin w = \frac{1}{b}f(u)\sin w + \sin u \cos w,\ \forall u, w \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{b}f(w)-\cos w\right]\sin u=\left[\frac{1}{b}f(u)-\cos u\right]\sin w,\ \forall u,w\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Trong (6) cho $u=\frac{\pi}{2}$ ta được

$$\frac{1}{b}f(w)-\cos w=\frac{1}{b}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin w,\ \forall w\in\mathbb{R}.$$

Vậy hàm f có dạng $f(x)=b\cos x+c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned}&[b\cos(x+y)+c\sin(x+y)]\,[b\cos(x-y)+c\sin(x-y)]\\ =&(b\cos x+c\sin x)^2-\sin^2 y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Trong (7) cho $x=0,\ y=\frac{\pi}{2}$ ta được $-c^2=b^2-1\Leftrightarrow b^2+c^2=1$. Thử lại thấy hàm số $f(x)=b\cos x+c\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với b,c là các hằng số, $b\neq 0$ và $b^2+c^2=1$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

D. PHƯƠNG PHÁP THÊM BIẾN TRONG LỚP HÀM ĐƠN ĐIỆU

Bài toán 14 (Đề thi Olympic 30/04/2011).
Hãy tìm tất cả các hàm số $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y))=yf(x),\ \forall x,y\in[1;+\infty). \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới $z\geq 1$ như sau: Với mọi x,y,z thuộc $[1;+\infty)$, sử dụng (1) ta có $f(xyf(z))=zf(xy)$, mặt khác

$$f(xyf(z))=f(xf(zf(y)))=zf(y)f(x).$$

Do đó

$$zf(xy)=zf(y)f(x),\ \forall x,y,z\in[1;+\infty).$$

Từ đây cho $z=1$ ta được

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in[1;+\infty). \tag{2}$$

Trong (2) cho $x=y=1$ ta được $f(1)=f^2(1)\overset{\text{do } f(1)\geq 1}{\Rightarrow} f(1)=1$. Trong (1) cho $x=1$ được

$$f(f(y))=y,\ \forall y\in[1;+\infty). \tag{3}$$

Vì $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ nên nếu $f(y)=1$ thì

$$y=f(f(y))=f(1)=1\Rightarrow y=1.$$

Suy ra $f(y)>1$ với mọi $y>1$. Cho $x>y\geq 1$ thì từ (2) ta được

$$f(x)=f\left(\frac{x}{y}.y\right)\overset{\text{do (2)}}{\Rightarrow}=f(y).f\left(\frac{x}{y}\right)>f(y),$$

suy ra hàm f đồng biến trên $[1;+\infty)$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x)=x,\forall x\in[1;+\infty).$$

Giả sử có $x_0 \in [1;+\infty)$ sao cho $f(x_0) \neq x_0$. Nếu $f(x_0) > x_0$ thì

$$f\left(f(x_0)\right) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0), \text{ mâu thuẫn với } f(x_0) > x_0.$$

Nếu $f(x_0) < x_0$ thì

$$f\left(f(x_0)\right) < f(x_0) \Rightarrow x_0 < f(x_0), \text{ mâu thuẫn với } f(x_0) < x_0.$$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in [1;+\infty)$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Chú ý 4. Chắc hẳn bạn đọc đã và sẽ nhận ra sự tương tự trong một số bài toán mà ta đã trải qua và sẽ đề cập tiếp trong chuyên đề này.

- Đối với bài toán 1 ở trang 1: với phương trình hàm

$$f\left(f(x)+y\right) = x + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

ta thấy rằng với "phép toán cộng" này thì thêm biến bằng cách thay x bởi $x + f(z)$; thay x bởi $f(x) + z$.

- Đối với bài toán 14 ở trang 11: với phương trình hàm

$$f\left(xf(y)\right) = yf(x), \ \forall x, y \in [1;+\infty)$$

ta thấy rằng với "phép toán nhân" này thì thêm biến bằng cách thay y bởi $yf(z)$; thay y bởi $zf(y)$.

- Bạn đọc hãy liên hệ hai bài toán nói trên với các bài toán 18, 19, 25 trong chuyên đề này.

Bài toán 15 (Đề nghị IMO 2005). Tìm tất cả các hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x)f(y) = 2f\left(x + yf(x)\right), \ \forall x, y > 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ thêm biến mới $z > 0$ như sau: Với mọi số dương x, y, z, sử dụng (1) nhiều lần ta được

$$\begin{aligned} f(x)f(y)f(z) &= 2f(z)f\left(x + yf(x)\right) = 4f\left(z + (x + yf(x))f(z)\right) \\ &= 4f\left(z + xf(z) + yf(z)f(x)\right) \\ &= 4f\left(z + xf(z) + 2yf(z + xf(z))\right) \\ &= 2f\left(z + xf(z)\right)f(2y) = f(z)f(x)f(2y). \end{aligned} \tag{2}$$

Do $f(x) > 0$, $f(z) > 0$ nên từ (2) thu được

$$f(y) = f(2y), \ \forall y > 0. \tag{3}$$

Nếu tồn tại hai số dương x_1, x_2 sao cho $x_1 > x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta xét số dương

$$y = \frac{x_1 - x_2}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Khi đó

$$\begin{gathered} yf(x_2) - yf(x_1) = x_1 - x_2 \Rightarrow yf(x_2) + x_2 = yf(x_1) + x_1 \\ \Rightarrow f\left(x_2 + yf(x_2)\right) = f\left(x_1 + yf(x_1)\right) \overset{\text{do } (1)}{\Rightarrow} f(x_2)f(y) = f(x_1)f(y). \end{gathered}$$

Do $f(y) > 0$ nên suy ra $f(x_2) = f(x_1)$, đến đây ta gặp mâu thuẫn. Do đó với mọi số dương x_1, x_2 sao cho $x_1 > x_2$ ta luôn có $f(x_1) \geq f(x_2)$, kết hợp với (3) ta sẽ chứng minh f là hàm hằng. Giả sử x_1, x_2 là hai phần tử bất kì của khoảng $(0;+\infty)$ và $x_1 < x_2$. Do $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n x_1 = +\infty$ nên tồn tại số tự nhiên n đủ lớn sao cho $2^n x_1 > x_2$. Vì thế, do (3) và do f là hàm tăng trên khoảng $(0;+\infty)$ nên f là hàm hằng trên đoạn $[x_1; 2^n x_1]$, lại do $x_2 \in [x_1; 2^n x_1]$ nên $f(x_1) = f(x_2)$, suy ra suy ra f là hàm hằng trên khoảng $(0;+\infty)$: $f(y) = C, \forall y > 0$. Thay vào (1) được $C = 2$. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 2, \forall x > 0.$$

Bài toán 16. Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x+y) = x^{2020} f\left(\frac{1}{x^{2019}}\right) + y^{2020} f\left(\frac{1}{y^{2019}}\right), \forall x, y > 0. \tag{1}$$

Giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) cho $y = x$, ta được:

$$f(2x) = 2x^{2020} f\left(\frac{1}{x^{2019}}\right), \forall x > 0. \tag{2}$$

Do (2) nên (1) viết lại: $f(x+y) = \dfrac{f(2x) + f(2y)}{2}, \forall x, y > 0.$ (3)

Từ (2) cho $x = 1$, ta được: $f(2) = 2f(1)$. Phương trình hàm (3) là đối xứng, từ (3) ta sẽ tạo ra những phương trình hàm không đối xứng bằng cách thêm biến z như sau:

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &\overset{\text{do}}{\underset{(3)}{=}} \frac{f(2x+2y) + f(2z)}{2} = \frac{\frac{f(4x)+f(4y)}{2} + f(2z)}{2} \\ &= \frac{f(4x) + f(4y) + 2f(2z)}{4}, \forall x, y, z > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (4) đổi chỗ y và z, ta được:

$$f(x+y+z) = \frac{f(4x) + f(4z) + 2f(2y)}{4}, \forall x, y, z > 0. \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$\begin{aligned} &\frac{f(4x) + f(4y) + 2f(2z)}{4} = \frac{f(4x) + f(4z) + 2f(2y)}{4}, \forall x, y, z > 0 \\ \Leftrightarrow &f(4y) + 2f(2z) = f(4z) + 2f(2y), \forall y, z > 0 \\ \Leftrightarrow &f(2y) + 2f(z) = f(2z) + 2f(y), \forall y, z > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Từ (6) chọn $z = 1$, ta được: $f(2y) = 2f(y), \forall y > 0.$ (7)

Từ (7) và (3), ta có: $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y > 0.$ (8)

Do hàm số f đơn điệu nên từ (8) ta được: $f(x) = ax, \forall x > 0$. Thử lại, ta thấy:

$$f(x) = ax, \forall x > 0 \text{ (}a\text{ là hằng số).}$$

Bài toán 17. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Từ (1) cho $x=y=0$ ta được

$$f^2(0)-2f(0)+1=0\Leftrightarrow [f(0)-1]^2=0\Leftrightarrow f(0)=1.$$

Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi số thực x, y, z ta có

$$\begin{aligned} f(xyz)&=f(x)f(yz)-f(x+yz)+1\\ &=f(x)\left[f(y)f(z)-f(y+z)+1\right]-f(x+yz)+1\\ &=f(x)f(y)f(z)-f(x)f(y+z)+f(x)-f(x+yz)+1. \end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f(xyz)&=f(z)f(xy)-f(z+xy)+1\\ &=f(z)\left[f(x)f(y)-f(x+y)+1\right]-f(z+xy)+1\\ &=f(x)f(y)f(z)-f(z)f(x+y)+f(z)-f(z+xy)+1. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi số thực x,y,z ta có

$$f(x)f(y+z)-f(x)+f(x+yz)=f(z)f(x+y)-f(z)+f(z+xy). \tag{4}$$

Từ (1) cho $x=1$ và $y=-1$ được

$$f(-1)=f(1)f(-1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1)=0\\ f(1)=1. \end{array}\right.$$

- ☑ Trường hợp $f(-1)=0$. Từ (4) cho $z=-1$ và $x=1$ được

$$f(1)f(y-1)-f(1)+f(1-y)=f(y-1),\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5) cho $y=2$ được

$$f^2(1)-f(1)=f(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1)=0\\ f(1)=2. \end{array}\right.$$

  - Xét $f(1)=0$. Khi đó (5) trở thành $f(1-y)=f(y-1),\ \forall y\in\mathbb{R}$. Từ đây thay y bởi $y+1$ ta được

$$f(-y)=f(y),\ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (1) thay y bởi $-y$ và sử dụng (6) được

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x-y)+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ (7) và (1) suy ra $f(x+y)=f(x-y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Từ đây cho $x=y$ và lưu ý $f(0)=1$ được $f(2x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, từ đây lấy $x=0,5$ được $f(1)=1$, mâu thuẫn với $f(1)=0$.

- Xét $f(1) = 2$. Khi đó (5) trở thành

$$\begin{aligned}&2f(y-1) - 2 + f(1-y) = f(y-1),\ \forall y \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &f(y-1) = 2 - f(1-y),\ \forall y \in \mathbb{R}. \quad (8)\end{aligned}$$

Từ (8) thay y bởi $y+1$ được

$$\begin{aligned}&f(y) = 2 - f(-y),\ \forall y \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &1 - f(y) = -[1 - f(-y)],\ \forall y \in \mathbb{R}. \quad (9)\end{aligned}$$

Đặt $1 - f(x) = g(x)$. Từ (9) suy ra hàm số g thỏa mãn $g(-x) = -g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ và (1) trở thành

$$\begin{aligned}&1 - g(xy) = [1 - g(x)][1 - g(y)] - 1 + g(x+y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &g(xy) = g(x) + g(y) - g(x)g(y) - g(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (10)\end{aligned}$$

Từ (10) thay y bởi $-y$ được

$$-g(xy) = g(x) - g(y) + g(x)g(y) - g(x-y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Cộng (10) và (11) ta được

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Từ (12) cho $y = x$ được $g(2x) = 2g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ (do $g(0) = 0$), (12) trở thành

$$g(x+y) + g(x-y) = g(2x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Với mọi số thực u và v, đặt $\dfrac{u+v}{2} = x,\ \dfrac{u-v}{2} = y$. Khi đó theo (13) ta được

$$\begin{aligned}&g(u) + g(v) = g(u+v),\ \forall u, v \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &g(x+y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (14)\end{aligned}$$

Từ (10) và (14) suy ra

$$g(xy) = -g(x)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Từ (14), tiến hành tương tự như ở lời giải bài toán 4 ở trang 3 ta chứng minh được:

$$g(rx) = rg(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}. \quad (16)$$

Từ (15) cho $y = x$ ta được $g(x^2) = -[g(x)]^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \le 0,\ \forall x \ge 0$. Từ (15) và (16) ta được

$$rg(x) = g(rx) = -g(r)g(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}. \quad (17)$$

Dễ thấy $g(x) \equiv 0$ thỏa mãn (10). Xét $g(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x_0) \ne 0$. Từ (17) cho $x = x_0$, ta được

$$g(r) = -r,\ \forall r \in \mathbb{Q}. \quad (18)$$

Tiếp theo ta chứng minh g là hàm nghịch biến. Giả sử $x < y$. Khi đó $y - x > 0$, suy ra $g(y-x) \le 0$. Sử dụng (14) ta được

$$g(y) = g((y-x)+x) = g(y-x) + g(x) \le g(x) \Rightarrow g(x) \ge g(y).$$

Vậy hàm g nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta chọn hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \ldots ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x.$$

Vì g là hàm giảm nên kết hợp với (18) ta có

$$g(u_n) \geq g(x) \geq g(v_n) \Rightarrow -u_n \geq g(x) \geq -v_n (\forall n = 1, 2, \ldots).$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được:

$$-x \geq g(x) \geq -x \Rightarrow g(x) = -x.$$

Do đó: $f(x) \equiv 1 + x$.

- ☑ Trường hợp $f(1) = 1$. Từ (4) cho $z = 1$ được

$$\begin{aligned} & f(x)f(y+1) - f(x) + f(x+y) = f(x+y) - 1 + f(1+xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(x)f(y+1) - f(x) = -1 + f(1+xy),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{19}$$

Từ (19) lấy $y = -1$ được $f(1-x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sau khi thử lại ta kết luận: Các hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) \equiv 1,\ f(x) \equiv x + 1.$$

Lưu ý. Nếu đặt $f(x) - 1 = g(x)$ thì ta thu được

$$\begin{aligned} & 1 + g(xy) = [1 + g(x)][1 + g(y)] - 1 - g(x+y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & g(xy) = g(x) + g(y) + g(x)g(y) - g(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10}$$

Cũng tương tự như trên ta chứng minh được

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ g(xy) = g(x)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Từ đây, sử dụng bài toán 9 ở trang 6 ta được $g(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv x$.

E. PHƯƠNG PHÁP THÊM BIẾN TRONG LỚP HÀM LIÊN TỤC

Trong mục này chúng ta sẽ xem xét một số phương trình hàm có giả thiết hàm số liên tục, được giải bằng phương pháp thêm biến. Lưu ý rằng kết quả bài toán 4 ở trang 3 tiếp tục được sử dụng nhiều.

Bài toán 18. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) = 2y + f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$, sử dụng (1) ta được

$$f(x + y + f(z)) = 2z + f(x+y),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Mặt khác cũng với mọi số thực x, y, z thì

$$f\left(x+y+f(z)\right)=f\left(x+f\left(z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right)\right)=2\left[z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right]+f(x). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$2z+f(x+y)=2\left[z+f\left(\frac{y}{2}\right)\right]+f(x),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+2f\left(\frac{y}{2}\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Từ (4) cho $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Từ (4) cho $x=0$ và sử dụng $f(0)=0$ ta được $f(y)=2f\left(\frac{y}{2}\right),\ \forall y\in\mathbb{R}$. Vậy (4) trở thành

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán 4 ở trang 3 ta được $f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}$, với a là hằng số thực. Thay vào (1) ta được

$$a\left(x+ay\right)=2y+ax,\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Từ (6) cho $x=y=1$ ta được $a(1+a)=2+a\Leftrightarrow a^2=2\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{2}$. Vậy

$$f(x)=\sqrt{2}x,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ; f(x)=-\sqrt{2}x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hai hàm số này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Bài toán 19 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2004).
Tìm tất cả các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(xf(y)\right)=yf(x), \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử f là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Trong (1) lấy $x=y=0$ ta được $f(0)=0$. Ta thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$, sử dụng (1) ta có $f\left(xyf(z)\right)=zf(xy)$, mặt khác

$$f\left(xyf(z)\right)=f\left(xf\left(zf(y)\right)\right)=zf(y)f(x).$$

Do đó $zf(xy)=zf(y)f(x),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$. Từ đây cho $z=1$ ta được

$$f(xy)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) lấy $y=1$ được

$$f(x)\left[1-f(1)\right]=0,\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Nếu $f(1)\neq 1$ thì từ (3) suy ra $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm $f(x)\equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Tiếp theo xét $f(1)=1$. Từ (1) cho $x=1$ được

$$f\left(f(y)\right)=y,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra f là đơn ánh, kết hợp giả thiết f liên tục suy ra f đơn điệu thực sự. Từ $f(0)=0<1=f(1)$ suy ra f là hàm tăng thực sự. Nếu $f(y)<y$ thì do f tăng thực sự nên

$$f\left(f(y)\right)<f(y)\Rightarrow y<f(y),$$

mâu thuẫn. Nếu $f(y)>y$ thì $y=f\left(f(y)\right)>f(y)$, mâu thuẫn. Vậy

$$f(y)=y, \forall y\in\mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Ta kết luận: có hai hàm số thỏa mãn đề bài là

$$f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R} \text{ và } f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 20. Tìm các hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: g là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm f đơn điệu thực sự trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hai hàm f và g thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta sẽ thêm biến mới z như sau: Với mọi x, y, z, sử dụng (1) ta được

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x+y)g(z) + f(z) = [f(x)g(y) + f(y)]\, g(z) + f(z) \\ &= f(x)g(y)g(z) + f(y)g(z) + f(z). \end{aligned} \tag{2}$$

Mặt khác cũng theo (1) ta có

$$f(x+y+z) = f(x)g(y+z) + f(y+z) = f(x)g(y+z) + f(y)g(z) + f(z). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra với mọi số thực x, y, z ta có

$$f(x)g(y)g(z) + f(y)g(z) + f(z) = f(x)g(y+z) + f(y)g(z) + f(z).$$

Hay

$$f(x)g(y)g(z) = f(x)g(y+z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dễ thấy $f(x) \not\equiv 0$, tức là tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$. Từ (4) lấy $x = x_0$ ta được

$$g(y+z) = g(y)g(z), \ \forall y, z \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Từ (5), sử dụng kết quả bài toán 5 ở trang 4 ta được

$$g(x) \equiv 0, \ g(x) \equiv a^x \ (a \text{ là hằng số dương}).$$

- Nếu $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì từ (1) ta được $f(x+y) = f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đây lấy $y = 1$ suy ra f là hàm hằng, gặp mâu thuẫn.
- Nếu $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì từ (1) ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

  Do f đơn điệu thực sự nên từ (6), sử dụng bài toán 7 ở trang 5 ta được

$$f(x) = kx, \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ (k \text{ là hằng số khác } 0).$$

- Nếu $g(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (với a là hằng số, $0 < a \neq 1$). Thế vào (1) được

$$f(x+y) = f(x)a^y + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{7}$$
$$f(y+x) = f(y)a^x + f(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

  Từ (7) và (8) dẫn đến

$$\begin{aligned} & f(x)a^y + f(y) = f(y)a^x + f(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & f(x)\left[a^y - 1\right] = f(y)\left[a^x - 1\right], \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

  Từ (7) lấy $y = 0$ được $f(0) = 0$. Từ (9) suy ra

$$\frac{f(x)}{a^x - 1} = \frac{f(y)}{a^y - 1}, \ \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

  Vậy $\dfrac{f(x)}{a^x - 1}$ là hàm hằng, kết hợp với $f(0) = 0$ ta được

$$f(x) = b\left(a^x - 1\right), \ \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{với } b \text{ là hằng số khác không}).$$

Sau khi thử lại ta kết luận: Các cặp hàm f và g thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$g(x) \equiv 1 \text{ và } f(x) = kx \ \ (k \text{ là hằng số})$$
$$g(x) \equiv a^x \text{ và } f(x) \equiv b\left(a^x - 1\right) \ \ (a, b \text{ là hằng số } 0 < a \neq 1, b \neq 0).$$

Bài toán 21. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) - g(xy) = h(x) + h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử (f, g, h) là một bộ ba hàm thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Từ (1) cho $y = 0$ ta được $f(x) = h(x) + h(0) + g(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Vì thế

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow h(x+y) + h(0) + g(0) - g(xy) = h(x) + h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow h(x+y) = h(x) + h(y) + k(xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

với k là hàm số: $k(x) = g(x) - g(0) - h(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Sử dụng (2), ta thêm biến mới z như sau:

$$\begin{aligned}h(x+y+z) &= h(x+y) + h(z) + k(xz+yz)\\ &= h(x) + h(y) + h(z) + k(xy) + k(yz+zx), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tương tự ta được:

$$\begin{aligned}h(x+y+z) &= h(x) + h(y) + h(z) + k(yz) + k(zx+xy)\\ &= h(x) + h(y) + h(z) + k(zx) + k(xy+yz).\end{aligned}$$

Như vậy, với mọi số thực x, y, z ta có

$$k(xy) + k(yz+zx) = k(yz) + k(zx+xy) = k(zx) + k(xy+yz). \tag{3}$$

Giả sử a, b là hai số thực bất kì.

- Trường hợp $a > 0$ và $b > 0$. Xét $c > 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được
$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b), \ \forall a, b, c > 0. \tag{4}$$
Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (4) cho $c \to 0^+$ ta được
$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0), \ \forall a > 0, b > 0. \tag{5}$$

- Trường hợp $a < 0$ và $b < 0$. Xét $c > 0$. Chọn $x = \sqrt{\dfrac{bc}{a}}, y = \sqrt{\dfrac{ca}{b}}, z = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, thay vào (3) được
$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b), \ \forall a < 0, b < 0, c > 0. \tag{6}$$
Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (6) cho $c \to 0^+$ ta được
$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0), \ \forall a < 0, b < 0. \tag{7}$$

- Trường hợp $a < 0$ và $b > 0$. Xét $c < 0$. Chọn $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}$, $y = \sqrt{\frac{ca}{b}}, z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$, thay vào (3) được
$$k(a) + k(b+c) = k(b) + k(c+a) = k(c) + k(a+b), \ \forall a < 0, b > 0, c < 0. \tag{8}$$
Vì g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên k liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó từ (8) cho $c \to 0^-$ ta được
$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0), \ \forall a < 0, b > 0. \tag{9}$$
- Trường hợp $a > 0$ và $b < 0$, tương tự ta cũng thu được
$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0), \ \forall a > 0, b < 0. \tag{10}$$
- Nếu ít nhất một trong hai số a, b bằng 0 thì $k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0)$ cũng đúng.

Do đó từ (5), (7), (9), (10) ta có
$$k(a) + k(b) = k(a+b) + k(0), \ \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{11}$$
Xét hàm số $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ như sau: $t(x) = k(x) - k(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ (11) ta có
$$t(x+y) = t(x) + t(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{12}$$
Do hàm số t liên tục nên từ (12), sử dụng kết quả bài toán 4 ở trang 3 ta thu được
$$t(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R},$$
với a là hằng số thực. Vì thế hàm số k có dạng $k(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm g có dạng $g(x) = ax + \alpha, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được
$$\begin{aligned}
&h(x+y) = h(x) + h(y) + axy + \alpha, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &h(x+y) - \frac{a}{2}(x+y)^2 = \left[h(x) - \frac{a}{2}x^2\right] + \left[h(y) - \frac{a}{2}y^2\right] + \alpha = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &h(x) - \frac{a}{2}x^2 = mx + n, \ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$
Vậy hàm số h có dạng $h(x) = \frac{a}{2}x^2 + mx + n, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Tóm lại:
$$f(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + p, g(x) \equiv ax + b, h(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + m.$$
Thay vào (1) ta được
$$\frac{a}{2}(x+y)^2 + m(x+y) + p - axy - b = \frac{a}{2}x^2 + mx + n + \frac{a}{2}y^2 + my + n, \forall x, y \in \mathbb{R},$$
hay $p - b = 2n$. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là
$$f(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + b + 2n, \ g(x) \equiv ax + b, \ h(x) \equiv \frac{a}{2}x^2 + mx + n.$$
Lưu ý. Trong một số trường hợp, phép thế
$$(x; y; z) = \left(\sqrt{\frac{bc}{a}}; \sqrt{\frac{ca}{b}}; \sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$
làm cho phương trình hàm trở nên đơn giản hơn, quen thuộc hơn. Phép thế này và phương pháp thêm biến đã được thực hiện ở bài toán **??** ở trang **??**.

Bài toán 22. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(xy+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Giả sử hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Xét hàm số g như sau:

$$g(x)=f(x+1)-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó g liên tục trên $\mathbb{R}$ và (1) trở thành:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+g(xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Sử dụng (2), ta thêm biến mới z tương tự như bài toán 21, thu được kết quả: Hàm g có dạng $g(x)=2ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}
&f(x+y)=f(x)+f(y)+2axy+b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow &f(x+y)-a(x+y)^2=\left[h(x)-ax^2\right]+\left[h(y)-ay^2\right]+b=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\
\Rightarrow &f(x)-ax^2=mx+n,\ \forall x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Thay $f(x)=ax^2+mx+n,\ \forall x\in\mathbb{R}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&a(x+y)^2+m(x+y)+n+ax^2y^2+mxy+n\\
=&ax^2+mx+n+ay^2+my+n+a(xy+1)^2+m(xy+1)+n,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Rút gọn ta được $a+m+n=0\Leftrightarrow n=-a-m$. Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x)=ax^2+mx-a-m,\ \forall x\in\mathbb{R}$, với a, m là những hằng số tùy ý.

F. BÀI TẬP

1. Đề bài

Bài toán 23. Tìm tất cả hàm số $f\colon (0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y>0.$$

Bài toán 24 (Đề nghị thi Olympic 30/04/2009).
Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1+f(2x)}+\dfrac{1}{1+f(4x)}+\dfrac{1}{1-f(6x)}>2.$

Bài toán 25 (Gặp gỡ Toán học 2019).
Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=2y+f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Bài toán 26. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chú ý 5. Đối với những phương trình hàm mà có giả thiết $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thì phương pháp thêm biến tỏ ra rất hữu hiệu, loạt bài toán sau đây thể hiện điều đó.

Bài toán 27. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(2x+2f(y))=x+f(x)+2y,\ \forall x,y>0.$$

Bài toán 28. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=f(x)-x+f(x+y),\forall x,y>0.$$

Bài toán 29 (Chọn đội tuyển Hà Nam 2019).
Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(y)f\left(\frac{1}{y}+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1+\frac{f(y)}{x},\ \forall x,y>0.$$

Bài toán 30 (Romania 2014). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+3f(y))=f(x)+f(y)+2y,\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Bài toán 31 (TST 2020 Đại học Vinh ngày 2).
Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(f(xy)+2xy\right)=3xf(y)+3yf(x),\ \forall x,y\in(0;+\infty).$$

Bài toán 32 (Đề thi Olympic Áo năm 2018, vòng chung kết, phần 2, ngày 1).
Tìm tất cả các số thực $\alpha\neq 0$ sao cho tồn tại hàm số $f:\ (0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f(f(x)+y)=\alpha x+\frac{1}{f\left(\frac{1}{y}\right)},\forall x,y\in(0;+\infty).$$

Bài toán 33 (IMO Shortlist 2007). Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn:

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x+y)+f(y),\forall x,y\in(0;+\infty).$$

Bài toán 34. Tìm tất cả hàm số $f\colon\ (0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(x+f(x+y)\right)=f(2x)+f(y),\quad\forall x,y>0.$$

Bài toán 35. Tìm tất cả các hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + 2f(xy) + f(y)^2,\ \forall x, y \in (0;+\infty).$$

Bài toán 36. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) = f(xf(x)) - f(xf(y)), \quad \forall x > y > 0.$$

Bài toán 37. Tìm tất cả các hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f(xf(y)) f(y) = f(x+y), \forall x, y \in (0;+\infty).$$

Bài toán 38 (Turkish TST 2014). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(y) + x^2 + 1\right) + 2x = y + f^2(x+1), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 39. Tìm các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^3 + 2y) + f(x+y) = g(x+2y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 40 (Đề nghị thi IMO-2011).
Tìm tất cả các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 41 (APMO 2016, problem 5).
Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 42. Tìm tất cả các hàm số $f : (1;+\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) - f(y) = (y-x) f(xy), \forall x > 1, y > 1.$$

Bài toán 43. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(xy) + 1 = f(x) + f(y) + f(xy+1),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 44 (Trường Đông toán học - Trung Trung Bộ (Đà Nẵng)-Năm học 2017-2018).
Cho f là hàm số xác định trên tập các số thực và nhận giá trị trên tập các số thực thỏa mãn điều kiện

(i) Nếu $a+b+c \geq 0$ thì $f\left(a^3\right)+f\left(b^3\right)+f\left(c^3\right) \geq 3f\left(abc\right)$.

(ii) Nếu $a+b+c \leq 0$ thì $f\left(a^3\right)+f\left(b^3\right)+f\left(c^3\right) \leq 3f\left(abc\right)$.

Chứng minh rằng

(a) Nếu $f\left(0\right)=0$ thì f là hàm lẻ;

(b) f là hàm tăng;

(c) $f\left(x\right)+f\left(y\right)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Từ đó hãy tìm tất cả các hàm $f\left(x\right)$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài toán 45. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x+f(y)\right)=f(y^2+3)+2xf(y)+f(x)-3,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 46. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)},\ \forall x\neq y.$$

2. Lời giải, hướng dẫn

Bài toán 23. Giả sử tồn tại hàm số $f\colon\ (0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y>0. \tag{1}$$

Với mọi $x>0, y>0, z>0$, theo (1) ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y+z}{2}\right)&=\frac{f(x)+f(y+z)}{2}=\frac{f(x)+\dfrac{f(2y)+f(2z)}{2}}{2}\\ &=\frac{2f(x)+f(2y)+f(2z)}{4}. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), ta đảo vị trí của x và y thì vế trái không đổi, trong khi đó vế phải thay đổi, nên ta thu được $2f(x)+f(2y)=2f(y)+f(2x)$, hay

$$f(2x)-2f(x)=f(2y)-2f(y),\quad \forall x,y>0.$$

Suy ra, tồn tại hằng số c sao cho $f(2x)-2f(x)=c$ với mọi $x>0$. Từ đó, phương trình hàm (1) đã cho có thể được viết lại thành

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+c,\quad \forall x,y>0$$

hay

$$\left[f(x+y)+c\right]=\left[f(x)+c\right]+\left[f(y)+c\right],\quad \forall x,y>0.$$

Đặt $g(x) = f(x) + c$ thì ta có g cộng tính. Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$g(nx) = ng(x), \quad \forall x > 0$$

với mọi n nguyên dương. Do $g(nx) = f(nx) + c > c$ nên

$$g(x) > \frac{c}{n}, \ \forall x > 0, \ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Từ (3) cho $n \to +\infty$, ta được $g(x) \geq 0$ với mọi $x > 0$. Đến đây, tương tự như bài toán 8 (ở trang 5), ta thu được kết quả $g(x) = kx$ với mọi $x > 0$ (k là hằng số không âm). Suy ra

$$f(x) = kx - c, \ \forall x > 0. \tag{4}$$

Do $f(x) > 0$ với mọi x nên từ (4) suy ra $c \leq 0$ và k, c không cùng bằng 0. Sau khi thử lại, ta kết luận: hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = kx - c, \ \forall x > 0,$$

với k là hằng số không âm, c là hằng số không dương, k và c không cùng bằng 0.
Chú ý 6.

① Bạn đọc hãy so sánh, liên hệ bài toán 23 này với bài toán **??** ở trang **??**.

② Lời giải bài toán 23 cũng rất điển hình, cơ bản, được lặp lại nhiều lần trong cuốn sách này. Chẳng hạn như việc chứng minh

$$g(x) \geq 0, \ \forall x \in (0; +\infty)$$

là tương tự như việc chứng minh (6) trong lời giải của bài toán 31 ở trang 22.

③ Kỹ thuật thêm biến ở bài toán 23 này là tương tự như kỹ thuật thêm biến ở bài toán 16 ở trang 13.

④ Từ bài toán 23 này, ta thu được kết quả (kết quả này được xem như một dạng của phương trình hàm Jensen, cũng hay được sử dụng trong giải toán phương trình hàm) sau: Nếu hàm số $f : (A; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \ \forall x, y \in (A; +\infty)$$

thì $f(x) = ax + b, \ \forall x \in (A; +\infty)$, với a và b là hằng số, $a \geq 0, aA + b \geq 0, a + b + aA > 0$. Thật vậy, đặt $g(x) = f(x + A)$. Khi đó $g : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ và

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2} + A\right) = f\left(\frac{(x+A) + (y+A)}{2}\right) \\ &= \frac{f(x+A) + f(y+A)}{2} \\ &= \frac{g(x) + g(y)}{2}, \ \forall x, y \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Vậy áp dụng bài toán 23 ta được

$$f(x + A) = ax + c, \ \forall x \in (0; +\infty) \ \ (\text{với } a \geq 0, c \geq 0, a + c > 0)$$

Từ đây thay x bởi $x - A$ ta được

$$f(x) = ax + c - aA, \ \forall x \in (A; +\infty).$$

Đặt $b = c - aA$, khi đó $aA + b \geq 0$, $a + b + aA > 0$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 24. Giả sử tồn tại hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x)f(y) - \sin x \sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tiến hành tương tự như bài toán 12 ở trang 9 ta thu được

$$\sin z \left[f(x)\sin y - f(y)\sin x\right] = \sin z\left(\sin y \cos x - \cos y \sin x\right),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Thế $z = \dfrac{\pi}{2}$, ta nhận được

$$\begin{aligned} & f(x)\sin y - f(y)\sin x = \sin y \cos x - \cos y \sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \left[f(x) - \cos x\right]\sin y = \left[f(y) - \cos y\right]\sin x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Trong (2) cho $y = \dfrac{\pi}{2}$ ta được $f(x) - \cos x = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \cos x + a \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left(\text{với } a = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} & \cos(x+y) + a\sin(x+y) \\ = & \left(\cos x + a \sin x\right)\left(\cos y + a \sin y\right) - \sin x \sin y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (3) cho $x = y = \dfrac{\pi}{4}$, ta được

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(a+1)^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy $f(x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, thử lại thấy thỏa mãn (1). Ta có

$$\begin{aligned} & 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 - \cos 6x = 3 + \cos 4x + \cos 2x - \cos 6x \\ = & 4 - 2\sin^2 2x + 2\sin 4x \sin 2x \\ = & \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(\sin 4x - 2\sin 2x)^2 - \frac{1}{2}\cos^2 4x \le \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+f(2x)} + \frac{1}{1+f(4x)} + \frac{1}{1-f(6x)} = \frac{1}{1+\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 4x} + \frac{1}{1-\cos 6x} \\ \ge & \frac{9}{3 + \cos 2x + \cos 4x - \cos 6x} \ge \frac{9}{\frac{9}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 + \cos 2x = 1 + \cos 4x = 1 - \cos 6x \\ \sin 4x = 2\sin 2x \\ \cos 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \cos 4x = -\cos 6x \\ \sin 4x = 2\sin 2x \\ \cos 4x = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này vô nghiệm, do đó dấu bằng không xảy ra được, từ đó suy ra

$$\frac{1}{1+f(2x)} + \frac{1}{1+f(4x)} + \frac{1}{1-f(6x)} > 2.$$

Lưu ý. Giả thiết hàm số f liên tục trong bài toán này là không cần thiết.

Bài toán 25. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(y)) = 2y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Giả sử có $a > 0$ và $b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$, khi đó

$$2a + f(x) \overset{(1)}{=} f(x+f(a)) = f(x+f(b)) \overset{(1)}{=} 2b + f(x) \Rightarrow a = b.$$

Vậy f là đơn ánh. Ta sẽ thêm biến $z > 0$ như sau: từ (1) ta có

$$\begin{aligned} f(x+f(y+z)) &= 2(y+z) + f(x) \\ &= [2y + f(x)] + 2z \\ &= f(x+f(y)) + 2z \\ &= f(x+f(y)+f(z)), \end{aligned} \tag{2}$$

với mọi số dương x, y, z. Mà f là đơn ánh nên từ (2) suy ra

$$f(z+y) = f(z) + f(y), \forall z, y > 0. \tag{3}$$

Từ (3), sử dụng bài toán 8 ở trang 5, ta được $f(x) = ax$ với mọi $x > 0$. Thử lại, ta nhận $f(x) = \sqrt{2}x$ làm nghiệm duy nhất của phương trình hàm đã cho.

Bài toán 26. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Cách 1 (phương pháp thêm biến). Dễ thấy f khác hằng. Đặt $a = f(0)$. Từ (1) cho $y = 0$ ta được

$$f\big(f(x)\big) - f(x) = af(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1i}$$

Từ đó, ta có

$$af(x+y) = f(x)f(y) - xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2i}$$

Bây giờ, từ (2i), với mọi số thực x, y, z, ta có

$$\begin{aligned} a^2 f(x+y+z) &= af(x)f(y+z) - ax(y+z) \\ &= f(x)[f(y)f(z) - yz] - axy - azx \\ &= f(x)f(y)f(z) - z[yf(x) + ax] - axy. \end{aligned}$$

Đảo vị trí của x, y trong dãy biến đổi trên và đối chiếu ta được

$$yf(x) + ax = xf(y) + ay,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đây, cho $y = 1$, ta được

$$f(x) = [f(1) - a]x + a,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3i}$$

Từ đây, rõ ràng $f(1)$ khác a vì nếu không f sẽ là hằng. Suy ra f là song ánh. Kết hợp với (1i), ta được

$$f(x) = (1+a)x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4i}$$

Đối chiếu hai kết quả (3i) và (4i), ta được $a = 0$ và $f(x) = x$. Thử lại ta thấy hàm số

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Cách 2. Rõ ràng f không phải là hàm hằng. Trong (1) lấy $y=0$ ta được

$$f\left(f(x)\right)=[1+f(0)]f(x),\forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (2) thay x bởi $x+y$ ta được

$$\begin{aligned}&[1+f(0)]f(x+y)=f\left(f(x+y)\right)=f(x+y)+f(x)f(y)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow&f(0)f(x+y)=f(x)f(y)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Từ (3) cho $y=1$ được: $f(0)f(x+1)=f(x)f(1)-x,\forall x\in\mathbb{R}$. (4)
Từ (3) thay $y=-1$ và thay x bởi $x+1$ được

$$f(0)f(x)=f(x+1)f(-1)+x+1,\forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

- Nếu $f(0)=0$ thì từ (4) suy ra $f(x)f(1)=x,\forall x\in\mathbb{R}$, dẫn tới $f(1)\neq 0$ và $f(x)\equiv ax$. Thay vào (3) được $a^2xy=xy,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Lấy $x=y=1$ dẫn tới $a=\pm 1$. Thử lại thấy chỉ có $f(x)\equiv x$ thỏa mãn (1).

- Xét $f(0)\neq 0$. Từ (4) rút ra $f(x+1)=\dfrac{f(x)f(1)-x}{f(0)}$, thay vào (5) được

$$\begin{aligned}&f(0)f(x)=\frac{f(x)f(1)-x}{f(0)}f(-1)+x+1,\forall x\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&\left[f^2(0)-f(1)f(-1)\right]f(x)=\left[f(0)-f(-1)\right]x+f(0),\forall x\in\mathbb{R}. \qquad (6)\end{aligned}$$

  Từ (5) lấy $x=0$ được $f^2(0)=f(1)f(-1)+1$, kết hợp với (6) suy ra kết quả

$$f(x)=ax+b,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

  Thay vào (1) được

$$\begin{aligned}&a\left[a(x+y)+b\right]+b=a(x+y)+b+(ax+b)(ay+b)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow&a\left[a(x+y)+b\right]=a(x+y)+(ax+b)(ay+b)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad (7)\end{aligned}$$

  Từ (7) cho $x=y=0$ được $ab=b^2$. Mà $b=f(0)\neq 0$ nên suy ra $a=b$, lúc này (7) trở thành

$$a\left[a(x+y)+a\right]=a(x+y)+(ax+a)(ay+a)-xy,\forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

  Từ (8) cho $x=1$ và $y=0$ ta được $2a^2=a+2a^2\Leftrightarrow a=0$, suy ra $f(x)\equiv 0$, không thỏa mãn.

Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài toán 27. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(2x+2f(y))=x+f(x)+2y,\ \forall x,y>0. \tag{1}$$

Từ (1) thay y bởi $2y+2f(z)$ ta được

$$f\left(2x+2f\left(2y+2f(z)\right)\right)=x+f(x)+2\left(2y+2f(z)\right),\ \forall x,y,z>0. \tag{2}$$

Do (1) nên

$$\begin{aligned} f\left(2x+2f\left(2y+2f(z)\right)\right) &= f\left(2x+2(y+f(y)+2z)\right)\\ &= f\left(2x+2y+4z+2f(y)\right)\\ &= x+y+2z+f\left(x+y+2z\right)+2y. \end{aligned}$$

Vì vậy (2) trở thành

$$\begin{aligned} & x+y+2z+f\left(x+y+2z\right)+2y = x+f(x)+4y+4f(z),\ \forall x,y,z>0\\ \Rightarrow & 2z+f\left(x+y+2z\right) = f(x)+y+4f(z),\ \forall x,y,z>0. \end{aligned}$$

Từ đây đổi vai trò của x và y ta thu được

$$f(x)+y=f(y)+x, \forall x,y>0. \tag{3}$$

Từ (3) cho $y=1$ ta được $f(x)=x+c$, với mọi $x>0$ $(c=f(1)-1)$. Thay lại vào đề bài, ta suy ra $f(x)=x$ là nghiệm duy nhất của bài toán.
Lưu ý. Từ (1) ta có thể "đối xứng hóa bộ phận" bằng cách thay x bởi $f(x)$ thì được

$$\begin{aligned} & f(2f(x)+2f(y)) = f(x)+f(f(x))+2y,\ \forall x,y>0\\ \Rightarrow & f(x)+f(f(x))+2y = f(y)+f(f(y))+2x,\ \forall x,y>0\\ \Rightarrow & f(f(x))+f(x)-2x = f(f(y))+f(y)-2y,\ \forall x,y>0\\ \Rightarrow & f(f(x))+f(x)-2x = c,\ \forall x>0. \end{aligned}$$

Đến đây, sử dụng lời giải của bài toán **??** ở trang **??** ta cũng thu được kết quả.

Bài toán 28. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=f(x)-x+f(x+y), \forall x,y>0.$$

Thay x bởi $x+f(z)$ ta được

$$\begin{aligned} f(x+f(y)+f(z)) = & f(x)-x+f(x+z)-x-f(z)+f(x+y)-x-y\\ & +f(x+y+z), \forall x,y,z>0. \end{aligned}$$

Đổi vai trò của y và z cho nhau ta có

$$-f(z)-y=-f(y)-z, \forall y,z>0.$$

Vậy $f(x)=x+c, \forall x>0$, trong đó $c\geq 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.
Lưu ý.

- ☑ Ngay từ đầu ta thấy f đơn ánh (**kỹ thuật hàm tuần hoàn**).
- ☑ Tiếp theo, dùng tính đơn ánh ta thu được $f(x+y)\neq x, \forall x,y>0$ (vì nếu ngược lại thì $f(x+f(y))=f(x)$ suy ra $f(y)=0$, vô lý). Như vậy,

$$f(x)\geq x, \forall x>0.$$

- ☑ Tuy nhiên sau đó ta dùng kỹ thuật thêm biến thì mọi việc trở nên rõ ràng và không cần dùng đến 2 kết quả mạnh vừa thu được ở trên.

Bài toán 29. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(y)f\left(\frac{1}{y}+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1+\frac{f(y)}{x},\ \forall x,y>0. \tag{1}$$

Từ (1), thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta được

$$f\left(\frac{1}{y}+f(x)\right)=x+\frac{1}{f(y)},\ \forall x,y>0. \tag{2}$$

Giả sử có $a>0$, $b>0$ sao cho $f(a)=f(b)$, khi đó

$$a+\frac{1}{f(y)}\overset{(2)}{=}f\left(\frac{1}{y}+f(a)\right)=f\left(\frac{1}{y}+f(b)\right)\overset{(2)}{=}b+\frac{1}{f(y)},$$

suy ra $a=b$. Như vậy f là đơn ánh. Từ (2) thay x bởi $\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{z}\right)$, ta được

$$f\left(\frac{1}{y}+f\left(\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{f(y)},\ \ \forall x,y,z>0.$$

Từ đây, lại sử dụng (2) ta được

$$f\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{x}+f\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{f(y)},\ \ \forall x,y,z>0. \tag{3}$$

Từ (3), đổi chỗ y và z suy ra

$$f\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{f(y)}=f\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{f(z)},\ \ \forall y,z>0. \tag{4}$$

Từ (4) cho $z=1$ ta được $f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{f(y)}+c$, với mọi $y>0$, trong đó $c=f(1)-\frac{1}{f(1)}$. (5)
Như vậy, với mọi $x>0$, sử dụng (5) ta có

$$f(x)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}+c=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}+c}+c=\frac{f(x)}{1+cf(x)}+c=\frac{f(x)+c+c^2f(x)}{1+cf(x)}$$
$$\Rightarrow f(x)+cf(x)^2=f(x)+c+c^2f(x)\Rightarrow c\left(f(x)^2-cf(x)-1\right)=0. \tag{6}$$

Từ (2) cho $y=1$ ta được $f\left(1+f(x)\right)=x+\frac{1}{f(1)}\to+\infty$ khi $x\to+\infty$, suy ra hàm f không bị chặn trên. Do đó tồn tại $x>0$ sao cho $f(x)^2-cf(x)-1>0$, kết hợp điều này với (6) ta được $c=0$. Như thế (5) trở thành

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)},\ \forall x>0.$$

Từ (2) thay y bởi $\frac{1}{y}$ ta được

$$f(y+f(x))=x+f(y),\ \forall x,y>0.$$

Tiếp tục thay y bởi $y+f(z)$, ta suy ra

$$f(y+f(z)+f(x))=x+f(y+f(z))=x+z+f(y)=f(y+f(x+z)),$$

với mọi $x>0, y>0, z>0$. Sử dụng tính đơn ánh, ta suy ra

$$f(x)+f(z)=f(x+z),\ \forall x,z>0.$$

Như vậy f cộng tính trên $\mathbb{R}^+$. Kéo theo $f(x)=ax$ với mọi $x>0$ (do sử dụng bài toán 8 ở trang 5). Thay vào (1) ta suy ra $f(x)=x$ là nghiệm duy nhất của phương trình hàm đã cho.

Bài toán 30. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+3f(y))=f(x)+f(y)+2y,\forall x,y\in\mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Ta sẽ thêm biến z bằng cách thay y bởi $y+3f(z)$ vào (1), khi đó

$$f\Big(x+3f(y+3f(z))\Big)=f(x)+f\Big(y+3f(z)\Big)+2\Big(y+3f(z)\Big),\forall x,y,z\in\mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Sử dụng (1) ta có

$$\begin{aligned}
f\Big(x+3f(y+3f(z))\Big)&=f\Big(x+3f(y)+3f(z)+6z\Big)\\
&=f\Big(x+3f(y)+6z\Big)+f(z)+2z\\
&=f(x+6z)+f(y)+2y+f(z)+2z;\\
f(x)+f\Big(y+3f(z)\Big)+2\Big(y+3f(z)\Big)&=f(x)+f\Big(y+3f(z)\Big)+2y+6f(z)\\
&=f(x)+f(y)+f(z)+2z+2y+6f(z).
\end{aligned}$$

Do đó (2) trở thành

$$f(x+6z)=f(x)+6f(z),\forall x,z\in\mathbb{R}^+. \tag{3}$$

Từ (3) ta có

$$\begin{cases} f(6x+6z)=f(6x)+6f(z)\\ f(6z+6x)=f(6z)+6f(x),\end{cases}$$

suy ra $f(6x)+6f(z)=f(6z)+6f(x),\forall x,z>0$; từ đây lấy $x=1$ ta được

$$6f(z)=f(6z)+c,\ \forall z>0\quad (c=6f(1)-f(6)).$$

Như vậy (3) trở thành

$$\begin{aligned}
&f\,(x+6z)=f(x)+f(6z)+c,\forall x,z>0\\
\Leftrightarrow &f\,(x+z)=f(x)+f(z)+c,\forall x,z>0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Đặt $g(x)=f(x)+c$, $\forall x>0$, thay vào (4), ta được:

$$g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{5}$$

Từ (5), bằng quy nạp ta suy ra

$$g(nx)=ng(x),\ \forall x>0,\ n=1,2,\ldots$$

Do đó $g(x)=\dfrac{g(nx)}{n}=\dfrac{f(nx)+c}{n}>\dfrac{c}{n},\ \forall x>0,\ n=1,2,\ldots$
Vậy $g(x)>\dfrac{c}{n},\ \forall x>0,\ n=1,2,\ldots$ Cho $n\to+\infty$ ta được

$$g(x)\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\,. \tag{6}$$

Từ (5), (6), sử dụng bài toán 8 (ở trang 5), ta được $g(x)=ax,\ \forall x>0$ (a là hằng số không âm). Do đó $f(x)=ax-c,\ \forall x>0$. Do $f(x)>0$ với mọi $x>0$ và $\lim\limits_{x\to0^+}ax=0$ nên $c\leq 0$. Thay vào (1), ta được:

$$\begin{aligned}
&a\left[x+3(ay-c)\right]-c=ax-c+ay-c+2y,\ \forall x,y>0\\
\Leftrightarrow &ax+3a^2y-3ac-c=ax+(a+2)y-2c,\ \forall x,y>0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}3a^2=a+2\\ 3ac+c=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ c=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy có duy nhất hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=x,\ \forall x>0$.

Bài toán 31. Giả sử tồn tại hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(f(xy)+2xy\right)=3xf(y)+3yf(x),\ \forall x,y\in(0;+\infty)\,. \tag{1}$$

Trong (1) thay x bởi xy và thay y bởi 1, rồi kết hợp với (1) ta thu được

$$\begin{aligned}
&3xyf(1)+3f(xy)=3xf(y)+3yf(x),\ \forall x,y\in(0;+\infty)\\
\Leftrightarrow&\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}=\frac{f(xy)}{xy}+f(1),\ \forall x,y\in(0;+\infty)\\
\Leftrightarrow&g(x)+g(y)=g(xy)+g(1),\ \forall x,y\in(0;+\infty)\ \left(g(x)=\frac{f(x)}{x},\ \forall x>0\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2) thay x bởi e^x và thay y bởi e^y ta được

$$\begin{aligned}
&g\left(e^x\right)+g\left(e^y\right)=g\left(e^{x+y}\right)+g(1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow&h(x)+h(y)=h(x+y)+g(1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ \left(h(x)=g\left(e^x\right),\forall x\in\mathbb{R}\right)\\
\Leftrightarrow&\left[h(x)-c\right]+\left[h(y)-c\right]=h(x+y)-c,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ \left(c=g(1)\right)\\
\Leftrightarrow&\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ \left(\varphi(x)=h(x)-c,\ \forall x\in\mathbb{R}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$\varphi(x)=h(x)-g(1)=g\left(e^x\right)-g(1)=\frac{f\left(e^x\right)}{e^x}-f(1)>-f(1). \tag{4}$$

Từ (3), bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được: $\varphi(nx)=n\varphi(x)$, với mọi số thực x và với mọi số nguyên dương n. Kết hợp điều này với (4) ta được

$$n\varphi(x)=\varphi(nx)>-f(1)\Rightarrow\varphi(x)>-\frac{f(1)}{n},\ \forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*. \tag{5}$$

Từ (5) cho $n\to+\infty$, ta được $\varphi(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (6)
Từ (3) và (6), suy ra hàm φ không giảm. Như vậy hàm φ không giảm và cộng tính nên sử dụng kết quả bài toán 7 (ở trang 5), ta được

$$\varphi(x)=ax,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đây kết hợp với (6) ta có $ax \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ hay $a = 0$. Vậy

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\\ \Rightarrow &h(x) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}\\ \Rightarrow &g\left(e^x\right) = c,\ \forall x \in \mathbb{R}\\ \Rightarrow &\frac{f\left(e^x\right)}{e^x} = c,\ \forall x \in \mathbb{R}\\ \Rightarrow &f\left(e^x\right) = ce^x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{7}$$

Mà $\{e^x | x \in \mathbb{R}\} = (0; +\infty)$ nên từ (7) suy ra

$$f(x) = cx,\ \forall x \in (0; +\infty).$$

Thay vào (1) ta được $c = 4$. Vậy có duy nhất hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài là

$$f(x) = 4x,\ \forall x \in (0; +\infty).$$

Lưu ý.

① Đối với những bài toán phương trình hàm có giả thiết $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thì trong quá trình tìm lời giải, chúng ta phải luôn chú ý đến điều này. Việc sử dụng giới hạn đã giúp ta nhanh chóng chứng minh được (6), kỹ thuật này cũng được sử dụng ở bài toán 23 ở trang 21.

② Có thể tìm được (2) bằng phương pháp thêm biến như sau: Thay y bởi yz ta được

$$f(f(xyz) + 2xyz) = 3xf(yz) + 3yzf(x), \forall x, y, z > 0.$$

Đổi vai trò của x và y cho nhau thì được

$$3xf(yz) + 3yzf(x) = 3yf(xz) + 3xzf(y), \forall x, y, z > 0.$$

Chia cả 2 vế cho $3xyz$, phương trình trên trở thành

$$\frac{f(yz)}{yz} + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(xz)}{xz} + \frac{f(y)}{y}, \forall x, y, z > 0.$$

Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, lúc này

$$g(yz) + g(x) = g(xz) + g(y), \forall x, y, z > 0.$$

Cho $y = 1$ thì $g(xz) + g(1) = g(x) + g(z), \forall x, z > 0$. Đây chính là (2).

Bài toán 32. Giả sử

$$f(f(x) + y) = \alpha x + \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{y}\right)},\ \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{1}$$

Nếu $\alpha < 0$ thì khi cố định $y > 0$, cho x đủ lớn, vế phải nhận giá trị âm, trong khi vế trái nhận giá trị dương, vô lí, vậy $\alpha > 0$. Theo cách xác định hàm f ta có f là một đơn ánh. Từ (1), thay y bởi $f(y)$ ta được

$$f(f(x) + f(y)) = \alpha x + \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{f(y)}\right)},\ \forall x, y > 0. \tag{2}$$

Thay đổi vai trò của x và y, ta suy ra

$$\begin{aligned}&\alpha x+\frac{1}{f\left(\dfrac{1}{f(y)}\right)}=\alpha y+\frac{1}{f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)},\ \forall x,y>0\\ \Rightarrow&\frac{1}{f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}-\alpha x=\frac{1}{f\left(\dfrac{1}{f(y)}\right)}-\alpha y=c,\ \forall x,y>0.\end{aligned}$$

Thay $\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}=\alpha x+c$ vào (2) ta được

$$f(f(x)+f(y))=\alpha x+\alpha y+c,\ \forall x,y>0. \tag{2}$$

Do (2) nên với các số dương x,y,z,t thỏa mãn $x+y=z+t$, ta có

$$f(f(x)+f(y))=f(f(z)+f(t)).$$

Theo tính đơn ánh ta suy ra $f(x)+f(y)=f(z)+f(t)$ với mọi $x+y=z+t$. Đặc biệt

$$f(x+1)+f(y+1)=f(x+y+1)+f(1),\ \forall x,y>0.$$

Đặt $g(x)=f(x+1)-f(1)$ thì hàm số g bị chặn dưới, cộng tính trên $(0,+\infty)$ nên $g(x)=ax$ (tham khảo lời giải bài toán 31 ở trang 22, bài toán 23 ở trang 21). Suy ra $f(x+1)=ax+b$. Do đó $f(x)=cx+d$ với mọi $x>1$. Thay vào (1), ta được

$$\begin{aligned}&c[(cx+d)+y]+d=\alpha x+\frac{1}{\dfrac{c}{y}+d}\\ \Leftrightarrow&c^2x+cy+cd+d=\alpha x+\frac{y}{dy+c}\\ \Rightarrow&(dy+c)\left(c^2x+cy+cd+d\right)=\alpha x(dy+c)+y.\end{aligned}$$

Do cả vế phải và vế trái đều là những đa thức nên đồng nhất hệ số hai vế ta được $d=0$, $c=\alpha=1$. Điều này chứng tỏ $f(x)=x$ với mọi $x>1$. Mặt khác, với $x\le 1$, ta có

$$f(x)+f(3)=f(x+1)+f(2)\Rightarrow f(x)=x,\ \forall x>0.$$

Vậy số thực cần tìm là $\alpha=1$, lúc đó hàm số thỏa mãn (1) là $f(x)=x,\ \forall x>0$.

Bài toán 33. Giả sử tồn tại hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn:

$$f\left(x+f(y)\right)=f(x+y)+f(y),\ \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Cách 1. Trước hết, ta sẽ chứng minh $f(x)>x,\ \forall x\in(0;+\infty)$. Giả sử tồn tại $y>0$ sao cho $f(y)<y$, khi đó từ (1) thay x bởi $y-f(y)$, ta được $0=f(2y-f(y))$, mâu thuẫn với giả thiết $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$. Nếu tồn tại $z>0$ sao cho $f(z)=z$ thì từ (1) lấy $y=z$, ta được $f(z)=0$, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $f(x)>x,\ \forall x\in(0;+\infty)$. Tiếp theo ta chứng minh $f(x)-x$ là đơn ánh. Giả sử tồn tại $x>0$, $y>0$, $x\neq y$ sao cho $f(x)-x=f(y)-y$, khi đó

$$x+f(y)=y+f(x)\Rightarrow f\left(x+f(y)\right)=f\left(x+f(y)\right),$$

từ đây sử dụng (1) suy ra

$$f(x+y)+f(y)=f(x+y)+f(x)\Rightarrow f(y)=f(x)\Rightarrow x=y,$$

đến đây ta lại gặp mâu thuẫn. Vậy $f(x)-x$ là đơn ánh. Từ (1) thay x bởi $f(x)$, ta được:

$$\begin{aligned}
&f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(f(x)+y\right)+f(y),\ \forall x,y\in(0;+\infty)\\
\Rightarrow &f\left(f(x)+f(y)\right)=f(x+y)+f(x)+f(y),\ \forall x,y\in(0;+\infty)\\
\Rightarrow &f\left(f(x)+f(y)\right)-[f(x)+f(y)]=f(x+y),\ \forall x,y\in(0;+\infty).
\end{aligned}$$

Với các số dương x,y,x',y' sao cho $x+y=x'+y'$, ta có $f(x+y)=f(x'+y')$, suy ra:

$$f\left(f(x)+f(y)\right)-[f(x)+f(y)]=f\left(f(x')+f(y')\right)-\left[f(x')+f(y')\right],$$

mà $f(x)-x$ là đơn ánh nên $f(x)+f(y)=f(x')+f(y')$. Như vậy:

$$f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right),\ \forall x,y\in(0;+\infty).$$

Tiếp theo ta chứng minh f là đơn ánh. Giả sử tồn tại số dương h sao cho $f(x)=f(x+h)$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
&f(x)+f(x+2h)=2f(x+h)=2f(x)\\
\Rightarrow &f(x)=f(x+2h)=f(x+3h)=\cdots=f(x+nh),\ \forall n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Như vậy:

$$\begin{aligned}
0<f(x+nh)-(x+nh)&=f(x)-(x+nh)\\
&=f(x)-x-nh,\ \forall n=1,2,\ldots
\end{aligned}\tag{2}$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x)-(x+nh))=-\infty$ nên khi n đủ lớn thì $f(x)-(x+nh)<0$, do đó (2) là điều vô lí. Như thế f là đơn ánh. Bây giờ, sử dụng các kết quả ở trên ta có: Với mọi số dương x,y thì

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}
f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(f(x)+y\right)+f(y)=2f\left(\dfrac{f(x)}{2}+y\right)\\
f\left(f(y)+f(x)\right)=f\left(f(y)+x\right)+f(x)=2f\left(\dfrac{f(y)}{2}+x\right)
\end{cases}\\
\Rightarrow &f\left(\frac{f(x)}{2}+y\right)=f\left(\frac{f(y)}{2}+x\right),
\end{aligned}$$

mà f là đơn ánh nên

$$\frac{f(x)}{2}+y=\frac{f(y)}{2}+x\Rightarrow\frac{f(x)}{2}-x=\frac{f(y)}{2}-y.$$

Như vậy:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)}{2}-x=\frac{f(y)}{2}-y,\ \forall x,y\in(0;+\infty)\\
\Rightarrow &\frac{f(x)}{2}-x=b,\ \forall x\in(0;+\infty)\ (b\text{ là hằng số})\\
\Rightarrow &f(x)=2x+c,\ \forall x\in(0;+\infty)\ (c\text{ là hằng số}).
\end{aligned}\tag{3}$$

Thay (3) vào (1), ta được
$$2(2y+x+c)+c=2x+2y+c+2y+c,,\ \forall x,y\in(0;+\infty).$$
Như vậy $c=0$, hay có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:
$$f(x)=2x,\forall x\in(0;+\infty).$$
Cách 2 (phương pháp thêm biến). Giả sử $t>z>0$. Khi đó tồn tại $x>0$, $y>0$ sao cho $x+y+z=t$. Trong (1) thay y bởi $y+f(z)$, ta được:
$$\begin{aligned}&f\left(x+f\big(y+f(z)\big)\right)=f\big(x+y+f(z)\big)+f\big(y+f(z)\big)\\ \Rightarrow&f\big(x+f(y+z)+f(z)\big)=f(x+y+z)+f(z)+f(y+z)+f(z)\\ \Rightarrow&f\big(x+z+f(y+z)\big)+f(z)=f(t)+f(y+z)+2f(z).\end{aligned}$$
Do đó:
$$\begin{aligned}f(t+z)&=f((x+y+z)+z)=f((x+z)+(y+z))\\&=f(x+z+f(y+z))-f(y+z)=f(t)+f(z).\end{aligned}$$
Như vậy ta đã chứng minh được: Nếu $t>z$ thì
$$f(t+z)=f(t)+f(z).\tag{4}$$
Với $x>0$, chọn số dương y đủ nhỏ sao cho $2y<x$, khi đó:
$$f(x)=f\left((x-y)+y\right)=f(x-y)+f(y)\Rightarrow f(x-y)=f(x)-f(y).$$
Giả sử $x>0$, chọn số dương y đủ nhỏ sao cho $2y<x$. Khi đó:
$$\begin{aligned}f(2x)&=f\left((x+y)+(x-y)\right)=f(x+y)+f(x-y)\\&=f(x)+f(y)+f(x)-f(y)=2f(x).\end{aligned}\tag{5}$$
Từ (4) và (5) suy ra:
$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y>0.\tag{6}$$
Từ (6) suy ra với $x>y$, ta có:
$$f(x)=f\left((x-y)+y\right)=f(x-y)+f(y)\Rightarrow f(x-y)=f(x)-f(y).$$
Ta sẽ chứng minh f là đơn ánh. Giả sử có $a>b>0$ sao cho $f(a)=f(b)$, khi đó
$$f(a-b)=f(a)-f(b)=0,$$
mâu thuẫn với giả thiết $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$. Vậy f là đơn ánh. Do
$$f(x)>x,\ \forall x\in(0;+\infty)$$
nên ta có:
$$\begin{aligned}f(x+y)+f(y)&=f\left(x+f(y)\right)=f\Big((x+y)+\big(f(y)-y\big)\Big)\\&=f(x+y)+f\big(f(y)-y\big),\ \forall x,y>0.\end{aligned}$$
Suy ra $f(y)=f\big(f(y)-y\big)$, $\forall y>0$. Mà f là đơn ánh nên
$$\begin{aligned}&f(y)-y=y,\ \forall y>0\\ \Leftrightarrow&f(y)=2y,\ \forall y>0.\end{aligned}\tag{7}$$
Thử lại thấy hàm số f xác định bởi (7) thỏa mãn các yêu cầu đề bài.
Lưu ý. Sau khi có (6), có thể sử dụng kết quả bài toán 8 (ở trang 5) để suy ra kết quả.

Bài toán 34. Giả sử tồn tại hàm số $f\colon (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(x + f(x+y)\right) = f(2x) + f(y), \quad \forall x, y > 0. \tag{1}$$

Trong (1), thay y bởi $y + f(y+z)$ với $y > 0$, $z > x > 0$ ta được

$$f\left(x + f(x + y + f(y+z))\right) = f(2x) + f\left(y + f(y+z)\right) = f(2x) + f(2y) + f(z),$$

mà

$$f\left(x + y + f(y+z)\right) = f\left(x + y + f\left((y+x) + (z-x)\right)\right) = f(2x+2y) + f(z-x)$$

nên

$$f\left(x + f(x + y + f(y+z))\right) = f\left(x + f(2x+2y) + f(z-x)\right),$$

do đó

$$f\left(x + f(2x+2y) + f(z-x)\right) = f(2x) + f(2y) + f(z), \quad \forall y > 0, z > x > 0.$$

Trong phương trình này, thay $z = 3x$, ta được

$$f(x + f(2x) + f(2x+2y)) = f(2x) + f(2y) + f(3x), \quad \forall x, y > 0. \tag{2}$$

Thay y bởi $f(x+y+z)$ vào phương trình đã cho, ta cũng có

$$f(x + f(x + f(x+y+z))) = f(2x) + f(f(x+y+z)),$$

hay

$$f(x + f(2x) + f(y+z)) = f(2x) + f(f(x+y+z)), \quad \forall x, y, z > 0.$$

Trong phương trình này, thay $z = 2x + y$, ta được

$$f(x + f(2x) + f(2x+2y)) = f(2x) + f(f(3x+2y)), \quad \forall x, y > 0. \tag{3}$$

Kết hợp hai phương trình (2) và (3) lại, ta được

$$f(f(3x+2y)) = f(3x) + f(2y), \quad \forall x, y > 0.$$

Suy ra

$$f\left[f(x+y)\right] = f(x) + f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Thay $x = y$ vào phương trình trên, ta được

$$f\left(f(2x)\right) = 2f(x), \quad \forall x > 0.$$

Từ đó, suy ra

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(f(x+y))}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \forall x, y > 0.$$

Đến đây, sử dụng bài toán 23 ở trang 21 ta được nghiệm của phương trình này là

$$f(x) = ax + b, \ \forall x > 0$$

với a, b là các hằng số thực không âm thỏa mãn $a + b > 0$. Bằng cách thử trực tiếp, ta tìm được $a = 1$. Do đó, các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x) = x + b$ với $b \geq 0$.
Lưu ý. Trong đề thi Trường Đông Toán Học Bắc Trung Bộ 2019-2020 có bài toán sau: *Xét hàm số $f\colon (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

① $f\left(x+f(x+y)\right)=f(2x)+f(y), \quad \forall x,y>0;$

② *Không tồn tại các số dương* x, y *sao cho* $x<y<2x$ *mà* $f(x)=f(y)$.

a) Chứng minh rằng f *là hàm số đơn ánh;*

b) Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.

Qua lời giải của bài toán 34, ta thấy ngay rằng để giải bài toán của Trường Đông Toán Học Bắc Trung Bộ 2019-2020 ta chỉ cần giả thiết

$$f\left(x+f(x+y)\right)=f(2x)+f(y), \quad \forall x,y>0$$

là đủ.

Bài toán 35. Giả sử tồn tại hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f(x+y)^2=f(x)^2+2f(xy)+f(y)^2,\ \forall x,y\in(0;+\infty). \tag{1}$$

Từ (1) thay y bởi $y+z$, ta được

$$\begin{aligned} f(x+y+z)^2&=f(x)^2+2f(x(y+z))+f(y+z)^2\\ &=f(x)^2+f(y)^2+f(z)^2+2f(x(y+z))+2f(yz), \end{aligned} \tag{2}$$

với mọi số dương x,y,z. Từ (2) thay (x,y,z) bởi những hoán vị của nó ta thu được

$$f(x(y+z))+f(yz)=f(y(z+x))+f(zx)=f(z(x+y))+f(xy), \tag{3}$$

với mọi số dương x,y,z. Giả sử a, b, c là ba số dương bất kỳ. Chọn

$$x=\sqrt{\frac{bc}{a}},y=\sqrt{\frac{ca}{b}},z=\sqrt{\frac{ab}{c}},$$

thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} &f(a)+f(b+c)=f(b)+f(c+a)=f(c)+f(a+b),\ \forall a,b,c>0\\ \Rightarrow &f(a+c)-f(a)=f(b+c)-f(b),\ \forall a,b>0\\ \Rightarrow &f(x+c)=f(x)+\left(f(b+c)-f(b)\right),\ \forall x,b,c>0. \end{aligned} \tag{4}$$

Xét hàm số $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ như sau $g(c)=f(b+c)-f(b)$. Từ (4) ta có

$$f(x+y)=f(x)+g(y),\ \forall x,y>0. \tag{5}$$

Ta tiếp tục dùng phương pháp thêm biến. Từ (5) ta có

$$\begin{aligned} &f(x+y+z)=f(x+y)+g(z)=f(x)+g(y)+g(z),\ \forall x,y,z>0\\ &f(x+y+z)=f(x)+g(y+z),\ \forall x,y,z>0. \end{aligned}$$

Suy ra $g(y+z)=g(y)+g(z),\ \forall y,z>0.$ (6)
Từ (6) bằng quy nạp ta được $g(nx)=ng(x),\ \forall x>0,\ n=1,2,\ldots$ Như vậy

$$\begin{aligned} &ng(x)=g(nx)=f(b+nx)-f(b)>-f(b)\\ \Rightarrow &g(x)>\frac{-f(b)}{n},\ \forall x>0,\ n=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Từ (7), cho $n \to +\infty$ ta được $g(x) \geq 0,\ \forall x > 0.$ (8)
Từ (8) và (6), tương tự như bài toán 8 (ở trang 5), ta thu được kết quả $g(x) = kx$ với mọi $x > 0$ (k là hằng số không âm). Như vậy

$$\begin{aligned} & f(b+c) - f(b) = kc,\ \forall b, c > 0 \\ \Leftrightarrow & f(x+y) = f(x) + ky,\ \forall x, y > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Từ (9) ta đổi vị trí của x và y với nhau thì vế phải thay đổi, trong khi đó vế trái không thay đổi nên ta thu được

$$\begin{aligned} & f(x) + ky = f(y) + kx,\ \forall x, y > 0 \\ \Rightarrow & f(x) - kx = f(y) - ky,\ \forall x, y > 0 \\ \Rightarrow & f(x) - kx = C,\ \forall x > 0 \\ \Rightarrow & f(x) = kx + C,\ \forall x > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

với C là hằng số. Do $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ nên $C \geq 0$. Thay (10) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & (kx + ky + C)^2 = (kx + C)^2 + 2(kxy + C) + (ky + C)^2,\ \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow & 2k^2xy = 2kxy + 2C + C^2,\ \forall x, y \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} k^2 = k \\ 2C + C^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right. \\ C = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ nên ta loại $k = 0$.
Vậy có duy nhất hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x) = x,\ \forall x \in (0; +\infty)$.
Lưu ý. Từ (9) ta đã sử dụng một kỹ thuật cơ bản, đó là: Sử dụng tính chất đối xứng của các biến (mục **??** ở trang **??**).

Bài toán 36. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) = f(xf(x)) - f(xf(y)), \quad \forall x > y > 0. \tag{1}$$

Nếu có $a > b > 0$ sao cho $f(a) = f(b)$ thì ta có

$$f\left(\frac{a}{a-b}\right) = f(af(a)) - f(af(b)) = 0,$$

mâu thuẫn. Do đó f là đơn ánh. Từ giả thiết, ta suy ra

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) + f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{x-z}\right) + f(xf(z)) = f(xf(x))$$

với mọi $x > \max\{y, z\} > 0$. Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $y \geq z > 0$. Trong phương trình trên, chọn $x = z + \dfrac{1}{f(y)}$ thì $xf(y) = \dfrac{x}{x-z}$. Suy ra

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right) = f(xf(z)).$$

Do f đơn ánh nên ta có $\dfrac{x}{x-y} = xf(z)$ hay $x = y + \dfrac{1}{f(z)}$. Từ đó suy ra

$$z + \frac{1}{f(y)} = y + \frac{1}{f(z)}, \quad \forall z \geqslant y > 0.$$

Như thế, ta có $f(x) = \dfrac{1}{x+c}$ (c là hằng số thực nào đó) với mọi $x > 0$. Vì $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$ nên $c \geq 0$. Thay trở lại phương trình hàm (1), ta được

$$\frac{x-y}{x+c(x-y)} = \frac{x+c}{x+c(x+c)} - \frac{y+c}{x+c(y+c)}, \quad \forall x > y > 0.$$

Cho $x = y+1$, ta được

$$\frac{1}{y+1+c} = \frac{y+1+c}{y+1+c(y+1+c)} - \frac{y+c}{y+1+c(y+c)}, \quad \forall y > 0.$$

Trong phương trình trên, cho $y \to 0^+$, ta được

$$\frac{1}{1+c} = \frac{1+c}{1+c+c^2} - \frac{c}{1+c^2}.$$

Giải phương trình này, ta được $c = 0$. Từ đó suy ra $f(x) = \dfrac{1}{x}$ với mọi $x > 0$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0.$$

Bài toán 37. Giả sử tồn tại hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(xf(y)\right)f(y) = f(x+y), \ \forall x, y \in (0; +\infty). \tag{1}$$

Cách 1. Giả sử có $y > 0$ mà $f(y) > 1$. Khi đó, từ (1), chọn $x = \dfrac{y}{f(y)-1}$, ta được $f(y) = 1$, mâu thuẫn. Vậy với mỗi $y > 0$ ta có $0 < f(y) \leq 1$. Từ đó:

$$f(x+y) = f\left(xf(y)\right)f(y) \leq f(y), \ \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Suy ra f là hàm không giảm trên $(0; +\infty)$ vì với $0 < x < y$ thì

$$f(y) = f\left((y-x)+x\right) \leq f(x).$$

- Trường hợp 1: Tồn tại $a > 0$ sao cho $f(a) = 1$. Khi đó:

$$f(y) = f\left(yf(a)\right)f(a) = f(y+a), \ \forall y \in (0; +\infty). \tag{2}$$

Từ (2), tiến hành tương tự như bài toán **??** (ở trang **??**), ta được f là hàm hằng. Vậy

$$f(x) = 1, \ \forall x \in (0; +\infty).$$

- Trường hợp 2: $0 < f(x) < 1$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Với $0 < x < y$, ta có:

$$f(y) = f\left((y-x)+x\right) = f\left((y-x)f(x)\right)f(x) < f(x).$$

Suy ra f là hàm giảm thực sự trên khoảng $(0; +\infty)$. Đặt $f(1) = a$. Từ (1) cho $y = 1$, ta được:

$$\begin{aligned} f(xa)a &= f\left(xf(1)\right)f(1) = f(x+1) \\ &= f\left(ax+1+x-ax\right) = f(ax)f\left((1+x-ax)f(ax)\right). \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
&f\left((1+x-ax)f(ax)\right)=a=f(1),\ \forall x\in(0;+\infty)\\
\Rightarrow&(1+x-ax)f(ax)=1,\ \forall x\in(0;+\infty)\ \text{(do hàm } f \text{ giảm thực sự)}\\
\Leftrightarrow&f(ax)=\frac{1}{1+x-ax},\ \forall x\in(0;+\infty)\\
\Leftrightarrow&f(x)=\frac{a}{a+x-ax},\ \forall x\in(0;+\infty).
\end{aligned}$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$f(x)=1,\ \forall x\in(0;+\infty);\ \ f(x)=\frac{a}{a+(1-a)x},\ \forall x\in(0;+\infty).$$

Cách 2 (Phương pháp thêm biến). Trong (1) thay x bởi y và thay y bởi x ta được

$$f(x+y)=f(x)f(yf(x)),\quad \forall x,y>0. \tag{3}$$

Thay y bởi $y+z$ vào phương trình (3), ta được

$$f(x+y+z)=f(x)f((y+z)f(x)),\quad \forall x,y,z>0.$$

Thay x bởi $x+z$ vào phương trình (3), ta được

$$f(x+y+z)=f(x+z)f(yf(x+z)),\quad \forall x,y,z>0.$$

Từ hai kết quả trên, ta suy ra

$$f(x+z)f(yf(x+z))=f(x)f((y+z)f(x)),\quad \forall x,y,z>0.$$

Giả sử tồn tại $x_0>0$, $z_0>0$ sao cho $f(x_0+z_0)>f(x_0)$. Trong phương trình trên, ta thay $x=x_0, z=z_0$ và $y=\dfrac{z_0f\left(x_0\right)}{f\left(x_0+z_0\right)-f\left(x_0\right)}$ thì được $f\left(x_0+z_0\right)=f\left(x_0\right)$, mâu thuẫn. Do đó

$$f(x+z)\leqslant f(x),\ \forall x,z>0.$$

Hay f không tăng. Chỉ có các trường hợp sau là có thể xảy ra:

- Trường hợp 1: f giảm ngặt. Thay y bởi $\dfrac{y}{f(x)}$ vào phương trình (3), ta được

$$f\left(x+\frac{y}{f(x)}\right)=f(x)f(y),\quad \forall x,y>0.$$

Đảo vị trí của x và y trong phương trình trên với chú ý f giảm ngặt, ta được

$$x+\frac{y}{f(x)}=y+\frac{x}{f(y)},\quad \forall x,y>0.$$

Thay $y=1$ vào phương trình trên, ta được

$$x+\frac{1}{f(x)}=1+\frac{x}{f(1)}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{kx+1},\ \forall x>0$$

trong đó $k=\dfrac{1}{f(1)}-1$. Do f giảm ngặt từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$ nên dễ thấy $k>0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x)=\dfrac{1}{kx+1}$, $\forall x>0$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

- Trường hợp 2: Tồn tại $0 < a < b$ sao cho $f(a) = f(b)$. Lần lượt thay $x = a$ và $x = b$ vào phương trình (3), ta được

$$f(y+a) = f(a)f(yf(a)) = f(b)(yf(b)) = f(y+b), \quad \forall y > 0.$$

Từ đó suy ra $f(y) = f(y+b-a)$ với mọi $y > a$. Do f không giảm nên từ đây, tiến hành tương tự như bài toán **??** ở trang **??**, ta suy ra $f(x) = C$ (C là hằng số dương nào đó) với mọi $x > a$. Bây giờ, trong phương trình hàm (3), ta cố định $x > 0$ và cho $y > \max\left\{a, \dfrac{a}{f(x)}\right\}$ thì có

$$C = f(x+y) = f(x)f(yf(x)) = Cf(x),$$

suy ra $f(x) = 1$ với mọi $x > 0$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Tóm lại, các hàm số thỏa mãn yêu cầu có dạng $f(x) = \dfrac{1}{kx+1}$, $\forall x > 0$ với $k \geq 0$ là hằng số nào đó.

Bài toán 38. Giả sử tồn tại hàm số $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(y) + x^2 + 1\right) + 2x = y + f^2(x+1), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ giả thiết, dễ thấy f là một toàn ánh. Giả sử có α và β sao cho $f(\alpha) = f(\beta)$, khi đó

$$\alpha + f(x+1)^2 = f\left(f(\alpha) + x^2 + 1\right) + 2x = f\left(f(\beta) + x^2 + 1\right) + 2x = \beta + f(x+1)^2,$$

suy ra $\alpha = \beta$, do đó f là đơn ánh. Như vậy f là một song ánh. Đặt $a = f(0)$ và $b = f(1)$. Thay $x = 0$ vào phương trình đã cho ta được

$$y = f\left(f(y) + 1\right) - b^2, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Thay kết quả này trở lại phương trình ta được

$$f\left(f(y) + 1 + x^2\right) + 2x + b^2 = f\left(f(y) + 1\right) + f^2(x+1), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Do f là song ánh nên $\{f(y) + 1 | y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, do đó từ $(*)$ ta có

$$f\left(x^2 + y\right) + 2x + b^2 = f(y) + f^2(x+1), \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Bây giờ thay $y = 0$ vào phương trình (1), ta được

$$f^2(x+1) = f\left(x^2\right) + 2x + b^2 - a, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Kết hợp (1) và (2) ta được $f\left(x^2 + y\right) = f\left(x^2\right) + f(y) - a$. Từ đó suy ra

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0. \tag{3}$$

Ta sẽ thêm biến z và sử dụng (3) để thiết lập một tính chất tốt hơn (3). Giả sử $x, y \in \mathbb{R}$, chọn $z \geq 0$ và đủ lớn sao cho $x + z \geq 0$, khi đó sử dụng (3) ta có

$$f(z + x + y) = f(z) + f(x+y) - a$$

và
$$f(z+x+y)=f(z+x)+f(y)-a=f(z)+f(x)+f(y)-2a.$$
Do đó
$$f(x+y)=f(x)+f(y)-a, \forall x,y\in\mathbb{R}.$$
Thay $(x;y)$ bởi $\left(\frac{x+y}{2};\frac{x+y}{2}\right)$ vào phương trình trên và đối chiếu, ta suy ra hàm f thỏa mãn phương trình Jensen. Mặt khác, trong (2), xét $x<M=\min\left\{\frac{a-b^2}{2};0\right\}$ thì ta có
$$0\le f^2(x+1)=f\left(x^2\right)+2x+b^2-a<f\left(x^2\right).$$
Như vậy $f(x^2)>0$ với mọi $x<M$. Với $x>0$, ta có sự tương đương
$$x>M^2\Leftrightarrow x>(-M)^2\Leftrightarrow \sqrt{x}>-M\Leftrightarrow -\sqrt{x}<M.$$
Do đó, nếu $x>M^2$ thì $-\sqrt{x}<M$ nên theo trên ta có
$$f\left((-\sqrt{x})^2\right)>0\Rightarrow f(x)>0.$$
Như thế $f(x)>0$ với mọi $x>M^2$. Do đó tồn tại các hằng số thực m, n với $m\ge 0$ và $mM^2+n\ge 0$ sao cho $f(x)=mx+n$ với mọi $x>M^2$. Do f là đơn ánh nên hiển nhiên $m>0$. Xét $x>M^2$ và $y>M^2$ ở phương trình đã cho thì có
$$m\left(x^2+1+my+n\right)+n+2x=y+(mx+m+n)^2, \forall x,y>M^2.$$
So sánh hệ số của y ở hai vế, ta được $m=1$. So sánh hệ số của x ở hai vế, ta được $n=0$. Do đó $f(x)=x, \forall x>M^2$. Đến đây, ở phương trình đã cho, ta cố định $y\in\mathbb{R}$ và chọn $x>M^2$ sao cho $x^2+f(y)+1>M^2$ thì phương trình viết lại thành
$$f(y)+x^2+1+2x=y+(x+1)^2.$$
Suy ra $f(y)=y, \forall y\in\mathbb{R}$. Rõ ràng hàm số $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài toán 39. Giả sử tồn tại các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn
$$f(x^3+2y)+f(x+y)=g(x+2y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (1)$$
Cách 1. Nhận thấy, nếu cặp hàm $(f;g)$ thỏa mãn (1) thì cặp hàm $(f+c;g+2c)$ cũng thỏa mãn (1), do đó có thể giả sử $f(0)=0$. Từ (1) cho $y=0$ ta được $g(x)=f(x)+f(x^3),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy (1) trở thành
$$P(x,y): f(x^3+2y)+f(x+y)=f(x+2y)+f\left((x+2y)^3\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (2)$$
Từ (1) cho $x=-y$ ta được $f(2y-y^3)=g(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$. Do đó
$$g(x+2y)=f\left(2(x+2y)-(x+2y)^3\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$
Thay vào (1) dẫn tới
$$Q(x,y): f(x^3+2y)+f(x+y)=f\left(2(x+2y)-(x+2y)^3\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$ (4)

$$P\left(1,x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f(x+\frac{1}{2})=f\left((2x)^3\right)\ ;\ P(0,x)\Rightarrow f(x)=f\left((2x)^3\right).$$

Vậy (4) được chứng minh. Tiếp theo chứng minh $f(x)=0,\ \forall x\in[0;1].$ (5)
Xét $y\in(0;1]$. Thực hiện $Q(x,y-x)$ ta được

$$f(x^3-2x+2y)+f(y)=f\left(2(2y-x)-(2y-x)^3\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Xét phương trình

$$\begin{aligned}&x^3-2x+2y=2(2y-x)-(2y-x)^3 &(7)\\ \Leftrightarrow &x^3=2y-\left(8y^3-12y^2x+6yx^2-x^3\right)\Leftrightarrow 8y^3-12y^2x+6yx^2-2y=0\\ \Leftrightarrow &4y^2-6yx+3x^2-1=0\Leftrightarrow (x-y)^2=\frac{1-y^2}{3}. &(8)\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng với $y\in(0;1]$ thì (8), tức là (7) luôn có nghiệm. Vậy với x là nghiệm của (8) thì từ (6) suy ra $f(y)=0,\ \forall y\in(0;1]$, do đó (5) được chứng minh. Từ (4) và (5) suy ra $f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $f(x)=c,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=2c,\ \forall x\in\mathbb{R}$, trong đó c là hằng số thực tùy ý.
Lưu ý. Nhận xét nếu cặp hàm $(f;g)$ thỏa mãn (1) thì cặp hàm $(f+c;g+2c)$ cũng thỏa mãn (1), từ nhận xét này ta có thể giả sử $f(0)=0$. Đây là một kĩ thuật rất hay, ta còn sử dụng kĩ thuật này ở bài toán **??** ở trang **??**, bài toán **??** ở trang **??**.
Cách 2 (Phương pháp thêm biến). Từ giả thiết, ta cũng có

$$f\left(z^3+2t\right)+f(z+t)=g(z+2t),\quad \forall z,t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Ta sẽ chứng minh rằng, với mọi $a,b\in\mathbb{R}$, hệ phương trình sau luôn có nghiệm (x,y,z,t) với x, y, z, $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}x+2y=a\\ z+2t=b\\ x^3+2y=z+t\\ x+y=z^3+2t\end{cases}$$

Từ các phương trình thứ nhất và thứ hai, ta lần lượt có $x=a-2y$ và $z=b-2t$. Thay vào phương trình thứ ba, ta được $(a-2y)^3+2y=b-t$, suy ra

$$t=b-2y-(a-2y)^3.$$

Thay $x=a-2y, z=b-2t, t=b-2y-(a-2y)^3$ vào phương trình thứ tư của hệ, ta được

$$a-y=(b-2t)^3+2t=\left(b-2\left[b-2y-(a-2y)^3\right]\right)^3+2\left[b-2y-(a-2y)^3\right].$$

Đây là phương trình đa thức bậc 9 (bậc lẻ) ẩn y nên luôn có ít nhất một nghiệm thực y_0. Từ đó suy ra hệ luôn có ít nhất một nghiệm thực (x_0,y_0,z_0,t_0) với

$$x_0=a-2y_0, z_0=b-2t_0,\ t_0=b-2y_0-(a-2y_0)^3.$$

Khẳng định được chứng minh. Từ khẳng định vừa chứng minh và các phương trình (9), (1), ta dễ dàng suy ra $g(a)=g(b)$ với mọi $a,b\in\mathbb{R}$. Do đó $g(x)\equiv C$. Thay trở lại (1), ta được

$$f\left(x^3+2y\right)+f(x+y)=C,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thay $y = x - x^3$ vào phương trình trên, ta được

$$f\left(2x - x^3\right) = \frac{C}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do $2x - x^3$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ (do $2x - x^3$ là đa thức bậc lẻ) nên từ đây, ta có $f(x) = \frac{C}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy $f(x) = \frac{C}{2}$ và $g(x) = C$ thỏa mãn yêu cầu. Vậy có duy nhất một cặp hàm số f, g thỏa mãn yêu cầu là $f(x) = \frac{C}{2}$ và $g(x) = C$ (C là một hằng số thực nào đó).

Bài toán 40. Giả sử tồn tại các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$g\left(f(x+y)\right) = f(x) + (2x+y)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Cách 1. Trong (1) thay y bởi $-2x$ ta được: $g\left(f(-x)\right) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. (2)
Do (2) nên (1) trở thành: $f(-x-y) = f(x) + (2x+y)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. (3)
Từ (1) thay x bởi y và thay y bởi x ta được

$$g\left(f(x+y)\right) = f(y) + (2y+x)g(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Lấy (1) trừ (4) theo vế ta được

$$f(x) - f(y) = (2y+x)g(x) - (2x+y)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Trong (5) lần lượt lấy $(x; y) = (x; 0), \ (x; y) = (1; x), \ (x; y) = (0; 1)$ ta được

$$f(x) - f(0) = xg(x) - 2xg(0), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$
$$f(1) - f(x) = (2x+1)g(1) - (x+2)g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Cộng (6) và (7) ta được

$$f(1) - f(0) = -2g(x) - 2xg(0) + (2x+1)g(1), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Từ (8) suy ra hàm g có dạng $g(x) = Ax + B, \ \forall x \in \mathbb{R}$, với A và B là hằng số. Đặt $C = f(0)$. Trong (3) thay $(x; y)$ bởi $(0; -y)$ ta được

$$\begin{aligned} & f(y) = C - yg(-y), \ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & f(y) = C - y\left(-Ay + B\right), \ \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & f(x) = Ax^2 - Bx + C, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

Thay (9) vào (2) và so sánh hệ số của x^2 ở hai vế ta được $A^2 = A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ A = 1. \end{array}\right.$

- Nếu $A = 0$ thì $g(x) \equiv B, \ f(x) \equiv -Bx + C$, thay vào (2) được

  $$B = -Bx + C, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

  do đó $B = C = 0$, suy ra $f(x) \equiv 0, \ g(x) \equiv 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

- Nếu $A = 1$ thì $g(x) \equiv x + B, \ f(x) \equiv x^2 - Bx + C$, thay vào (2) được

  $$x^2 + Bx + C + B = x^2 - Bx + C, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

  hay $2Bx + B = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, nghĩa là $B = 0$.
  Vậy $f(x) \equiv x^2 + C, \ g(x) \equiv x$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: $f(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv 0$; $f(x) \equiv x^2 + C$ và $g(x) \equiv x$.
Cách 2 (tiếp nối từ (6): Phương pháp thêm biến. Đặt $f(0) = b$, $g(0) = a$. Từ (6) ta có

$$f(x) = xg(x) + b - 2ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ, thay x bởi $x + z$ vào phương trình hàm (1), ta được

$$\begin{aligned} g(f(x+y+z)) &= f(x+z) + (2x+2z+y)g(y) \\ &= (x+z)g(x+z) + b - 2a(x+z) + (2x+2z+y)g(y). \end{aligned}$$

Thay y bởi $y + z$ vào phương trình hàm (1), ta cũng có

$$\begin{aligned} g(f(x+y+z)) &= f(x) + (2x+y+z)g(y+z) \\ &= xg(x) + b - 2ax + (2x+y+z)g(y+z). \end{aligned}$$

Đối chiếu hai kết quả trên, ta được

$$xg(x) + b - 2ax + (2x+y+z)g(y+z) = (x+z)g(x+z) + b - 2a(x+z) + (2x+2z+y)g(y).$$

Trong phương trình này, cho $x = y$ và rút gọn thành

$$xg(x+z) = (x+z)g(x) - az, \quad \forall x, z \in \mathbb{R}.$$

Trong phương trình này, thay $x = 1$ và $z = x - 1$, ta được

$$g(x) = xg(1) - a(x-1) = Ax + B, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đến đây ta làm tương tự như cách 1.

Bài toán 41. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Ta cho $x = y = 1$ vào (1) ta được

$$(z+1)f(2) = 2f(f(z)+1), \ \forall z \in \mathbb{R}^+. \tag{2}$$

Do $\lim\limits_{z \to +\infty} (z+1)f(2) = +\infty$ nên từ (2) suy ra hàm f không bị chặn trên. Ta sẽ chứng minh

$$f(a) + f(b) = f(c) + f(d) \tag{3}$$

với mọi số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b = c + d$. Thật vậy, xét bốn số thực dương a, b, c và d bất kì thỏa mãn $a + b = c + d$. Vì f không bị chặn trên nên tồn tại số thực dương e sao cho

$$f(e) > \max\left\{1, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{d}, \frac{d}{c}\right\}.$$

Khi đó, ta có thể tìm được các số thực dương u, v, w, t thỏa mãn

$$\begin{cases} f(e)u + v = a \\ u + f(e)v = b \\ f(e)w + t = c \\ w + f(e)t = d \end{cases}$$

$\left(\text{thực vậy: } u = \dfrac{af(e)-b}{f(e)^2-1}, v = \dfrac{bf(e)-a}{f(e)^2-1}, w = \dfrac{cf(e)-d}{f(e)^2-1}, t = \dfrac{df(e)-c}{f(e)^2-1}\right)$.
Từ $a+b=c+d$, ta suy ra $u+v=w+t$. Ta cho $x=u$, $y=v$ và $z=e$ vào (1) ta được

$$(e+1)f(u+v) = f(a)+f(b).$$

Còn khi cho $x=w$, $y=t$ và $z=e$ vào (1), ta lại được

$$(e+1)f(w+t) = f(c)+f(d).$$

Từ đó, ta thu được $f(a)+f(b)=f(c)+f(d)$, nghĩa là khẳng định (3) được chứng minh. Tiếp theo, ta thay x và y bởi $\dfrac{x}{2}$ trong (1) thì được

$$(z+1)f(x) = f\left(\frac{x}{2}f(z)+\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}f(z)+\frac{x}{2}\right),\ \forall x,z\in\mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Theo (3) ta có

$$f\left(\frac{x}{2}f(z)+\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}f(z)+\frac{x}{2}\right) = f(xf(z))+f(x),\ \forall x,z\in\mathbb{R}^+. \tag{5}$$

Kết hợp (4) và (5) ta được $zf(x)=f(xf(z))$ với mọi số thực dương x,z. $\quad (6)$
Đặt $a=f\left(\dfrac{1}{f(1)}\right)$. Ta cho $x=1$ và $z=\dfrac{1}{f(1)}$ vào (6) thì thu được kết quả $f(a)=1$. Cho $x=z=a$ vào (6) ta được

$$af(a)=f(af(a)) \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(1)=1.$$

Từ (6) cho $x=1$ ta được $z=f(f(z))$ với mọi số thực dương z. $\quad (7)$
Mặt khác, từ (3), ta thu được

$$f(x+y)+f(1)=f(x)+f(y+1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

và

$$f(y+1)+f(1)=f(y)+f(2),\ \forall y\in\mathbb{R}^+.$$

Do đó $f(x+y)=f(x)+f(y)+C$ với mọi số thực dương x,y $(C=f(2)-2)$. $\quad (8)$
Thay $x=y=f(2)$ vào (8) ta được $f(2f(2))=2f(f(2))+C$. $\quad (9)$
Từ (6) và (7) ta thu được $\begin{cases} f(2f(2))=2f(2)=2(C+2)\\ f\left(f(2)\right)=2\end{cases}$ $\quad (10)$
Từ (9) và (10) ta có $2(C+2)=4+C \Rightarrow C=0$. Do đó (8) trở thành

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

Vì vậy, $f(x)=x$ với mọi số thực dương x. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vậy bài toán có nghiệm hàm duy nhất là

$$f(x)=x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Bài toán 42. Giả sử tồn tại hàm số $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)-f(y)=(y-x)f(xy),\ \forall x>1, y>1. \tag{1}$$

Lời giải 1. Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{2f(2)}{x}$, $\forall x>1$. Khi đó: $g(2)=0$ và

$$g(x)-g(y)=f(x)-f(y)-2f(2)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$\begin{aligned}&= (y-x)\,f(xy) - \frac{2f(2)(y-x)}{xy}\\ &= (y-x)\left[f(xy) - \frac{2f(2)}{xy}\right] = (y-x)g(xy).\end{aligned}$$

Như vậy $g(x) - g(y) = (y-x)g(xy)$, $\forall x, y > 1$. (i)
Từ (i) cho $y = 2$, ta được: $g(x) = (2-x)g(2x)$, $\forall x > 1$. $(2i)$
Từ (i) cho $y = zx$, ta được:

$$g(x) - g(zx) = (zx - x)\,g\left(zx^2\right),\ \forall x, z > 1.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}&(x-z)\,g(x) - (x-z)\,g(zx) = (x-z)\,(zx-x)\,g\left(zx^2\right),\ \forall x, z > 1\\ \Rightarrow\ &(x-z)\,g(x) - [g(z) - g(x)] = (x-z)\,(zx-x)\,g\left(zx^2\right),\ \forall x, z > 1\\ \Rightarrow\ &(x-z+1)\,g(x) - g(z) = (x-z)\,(zx-x)\,g\left(zx^2\right),\ \forall x, z > 1.\end{aligned}$$

Như vậy với $x > 1, z > 1$, ta có

$$\begin{aligned}\left(x^2 - z\right)[(x-z+1)\,g(x) - g(z)] &= (x-z)\,(zx-x)\left(x^2-z\right)g\left(zx^2\right)\\ &= (x-z)\,(zx-x)\left[g(z) - g\left(x^2\right)\right]. \qquad (3i)\end{aligned}$$

Từ $(3i)$ cho $x = 2$, ta được:

$$\begin{aligned}&(4-z)\,(-g(z)) = (2-z)\,(2z-2)\,[g(z) - g(4)],\ \forall z > 1\\ \Rightarrow &(4-z)g(z) + 2\,(2-z)\,(z-1)\,g(z) = 2\,(2-z)\,(z-1)\,g(4),\ \forall z > 1\\ \Rightarrow\ &\left(4 - z - 2z^2 + 6z - 4\right)g(z) = 2\,(2-z)\,(z-1)\,g(4),\ \forall z > 1\\ \Rightarrow &g(z) = \frac{2\,(2-z)\,(z-1)\,g(4)}{z(5-2z)},\ \forall z > 1, z \neq \frac{5}{2}\\ \Rightarrow &g(2z) = \frac{(2-2z)\,(2z-1)\,g(4)}{z(5-4z)},\ \forall z > \frac{1}{2}, z \neq \frac{5}{4}\\ \Rightarrow &g(2z) = \frac{(2-2z)\,(2z-1)\,g(4)}{z(5-4z)},\ \forall z > 1, z \neq \frac{5}{4}. \qquad (4i)\end{aligned}$$

Nếu $g(4) \neq 0$ thì kết hợp với $(2i)$ ta được:

$$\begin{aligned}&\frac{2\,(2-z)\,(z-1)\,g(4)}{z(5-2z)} = \frac{2\,(z-2)\,(2-2z)\,(2z-1)\,g(4)}{2z(5-4z)}\\ \Rightarrow &\frac{1}{5-2z} = \frac{2z-1}{5-4z},\ \forall z > 1, z \neq \frac{5}{4}, z \neq \frac{5}{2}, z \neq 2. \qquad (5i)\end{aligned}$$

Mà $(5i)$ là điều vô lí nên $g(4) = 0$, do đó $g(z) = 0, \forall z > 1, z \neq \frac{5}{2}$.
Từ $(2i)$ có $g\left(\frac{5}{2}\right) = 0$. Do đó:

$$g(z) = 0, \forall z > 1$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{a}{x}, \forall x>1 \ \left(\text{với } a=2f(2) \text{ là hằng số}\right). \tag{6i}$$

Thử lại ta thấy hàm số xác định bởi $(6i)$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Vậy các hàm số cần tìm là $f(x)=\frac{a}{x}, \forall x>1$, với a là hằng số.

Lời giải 2. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn các yêu cầu đề bài. Ta có:

$$(1) \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=-f(xy), \forall x>1, y>1, x\neq y. \tag{2}$$

Ta thấy nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn (1) thì hàm số $-f(x)$ cũng thỏa mãn (1) nên không mất tính tổng quát, giả sử $f(2)=\frac{a}{2}$, $a\geq 0$. Giả sử tồn tại $x_0\in(1;+\infty)$ sao cho $f(x_0)>\frac{a}{x_0}$. (3)

- Trường hợp 1: $x_0>2$. Ta có:

$$-f\left(2x_0\right)=\frac{f\left(x_0\right)-f(2)}{x_0-2}\overset{\text{do }(3)}{>}\frac{\frac{a}{x_0}-\frac{a}{2}}{x_0-2}=\frac{-a}{2x_0}\Rightarrow f\left(2x_0\right)<\frac{a}{2x_0}. \tag{4}$$

  Ta có: $-f\left(2^2x_0\right)=\frac{f\left(2x_0\right)-f(2)}{2x_0-2}\overset{\text{do }(4)}{<}\frac{\frac{a}{2x_0}-\frac{a}{2}}{2x_0-2}=\frac{-a}{2^2x_0}$.

  Suy ra $f\left(2^2x_0\right)>\frac{a}{2^2x_0}$.

  Lại có: $-f\left(2^3x_0^2\right)=\frac{f\left(2^2x_0\right)-f(2x_0)}{2^2x_0-2x_0}>\frac{\frac{a}{2^2x_0}-\frac{a}{2x_0}}{2^2x_0-2x_0}=\frac{-a}{2^3x_0^2}$.

  Suy ra $f\left(2^3x_0^2\right)<\frac{a}{2^3x_0^2}$. (5)

  Lại có: $-f\left(2^3x_0\right)=\frac{f\left(2^2x_0\right)-f(2)}{2^2x_0-2}>\frac{\frac{a}{2^2x_0}-\frac{a}{2}}{2^2x_0-2}=\frac{-a}{2^3x_0}$.

  Suy ra: $f\left(2^3x_0\right)<\frac{a}{2^3x_0}$. (6)

  Lại có: $-f\left(2^3x_0^2\right)=\frac{f\left(2^3x_0\right)-f(x_0)}{2^3x_0-x_0}\overset{\text{do }(3)}{<}\frac{\frac{a}{2^3x_0}-\frac{a}{x_0}}{2^3x_0-x_0}=\frac{-a}{2^3x_0^2}$.

  Suy ra $f\left(2^3x_0^2\right)>\frac{a}{2^3x_0^2}$, mâu thuẫn với (5).

- Trường hợp 2: $x_0<2$. Ta có:

$$-f\left(2x_0\right)=\frac{f\left(x_0\right)-f(2)}{x_0-2}<\frac{\frac{a}{x_0}-\frac{a}{2}}{x_0-2}=\frac{-a}{2x_0}\ \left(\text{do } x_0-2<0 \text{ và } (3)\right).$$

  Suy ra $f\left(2x_0\right)>\frac{a}{2x_0}$. Đặt $x_1=2x_0>2$, khi đó: $f\left(x_1\right)>\frac{a}{x_1}$. Đến đây, sử dụng kết quả ở trường hợp 1, ta cũng dẫn tới mâu thuẫn.

Tiếp theo giả sử tồn tại $x_0\in(1;+\infty)$ sao cho $f(x_0)<\frac{a}{x_0}$. (7)

Nếu $x_0>2$ thì

$$-f\left(2x_0\right)=\frac{f\left(x_0\right)-f(2)}{x_0-2}\overset{\text{do }(7)}{<}\frac{\frac{a}{x_0}-\frac{a}{2}}{x_0-2}=\frac{-a}{2x_0}\Rightarrow f\left(2x_0\right)>\frac{a}{2x_0}.$$

Đặt $\alpha = 2x_0 > 1$, khi đó $f(\alpha) > \frac{a}{\alpha}$, sử dụng các kết quả ở trên ta dẫn tới mâu thuẫn. Nếu $1 < x_0 < 2$ thì

$$-f(2x_0) = \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0 - 2} \overset{\text{do }(7)}{>} \frac{\frac{a}{x_0} - \frac{a}{2}}{x_0 - 2} = \frac{-a}{2x_0} \Rightarrow f(2x_0) < \frac{a}{2x_0}.$$

Đặt $\beta = 2x_0 > 2$, khi đó $f(\beta) < \frac{a}{\beta}$, sử dụng các kết quả ở trên ta dẫn tới mâu thuẫn. Như vậy tất cả các trường hợp đều dẫn tới mâu thuẫn. Do đó $f(x) = \frac{a}{x}$, $\forall x > 1$ (a là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Lưu ý.

- Các phép thế "thông dụng" như $x = y$, $y = 0$, $y = 1$ trong bài toán này hoặc dẫn đến điều hiển nhiên, hoặc không được phép. Trong những tình huống "hạn chế" như vậy, thêm biến là một giải pháp khả dĩ mà ta có thể nghĩ đến.

- Có một lời giải cũng bằng phương pháp thêm biến khá là ngắn gọn. Việc nhận xét về tính đúng sai của lời giải này xin nhường cho bạn đọc. Xét $x > y > z > 1$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) - f(z) &= (z-x)f(xz) = [(z-y)+(y-x)]\,f(xz) \\ &= (y-x)f(xz) + (z-y)f(xz). \end{aligned}$$

Mặt khác thì

$$f(x) - f(z) = f(x) - f(y) + f(y) - f(z) = (y-x)f(xy) + (z-y)f(yz).$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} &(y-x)f(xz) + (z-y)f(xz) = (y-x)f(xy) + (z-y)f(yz) \\ \Leftrightarrow &(y-x)[f(xz) - f(xy)] = (z-y)[f(yz) - f(xz)] \\ \Leftrightarrow &(y-x)(xy-xz)f\left(x^2yz\right) = (z-y)(xz-yz)f\left(xyz^2\right) \\ \Leftrightarrow &(y-x)x(y-z)f\left(x^2yz\right) = (z-y)z(x-y)f\left(xyz^2\right) \\ \Leftrightarrow &xf\left(x^2yz\right) = zf\left(xyz^2\right) \\ \Leftrightarrow &x(xyz)f\left(x^2yz\right) = z(xyz)f\left(xyz^2\right). \end{aligned}$$

Suy ra $x^2yzf\left(x^2yz\right) = xyz^2f\left(xyz^2\right)$ với mọi $x > y > z > 1$.

Giả sử $a > b > 1$. Đặt $x = \sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}, y = \sqrt[8]{ab}, z = \sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$. Khi đó

$$x^2yz = \sqrt[8]{\frac{a^{10}}{b^6}} \cdot \sqrt[8]{ab} \cdot \sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}} = a, xyz^2 = \sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}} \cdot \sqrt[8]{ab} \cdot \sqrt[8]{\frac{b^{10}}{a^6}} = b, zx = y^2.$$

Ta có $\begin{cases} \frac{x}{y} = \sqrt[8]{\frac{a^4}{b^4}} = \sqrt{\frac{a}{b}} > 1 \\ \frac{y}{z} = \sqrt[8]{\frac{a^4}{b^4}} = \sqrt{\frac{a}{b}} > 1 \end{cases} \Rightarrow x > y > z > 1$. Theo trên ta có

$$af(a) = x^2yzf\left(x^2yz\right) = xyz^2f\left(xyz^2\right) = bf(b).$$

Như vậy $af(a) = bf(b)$, $\forall a > b > 1$. Từ đó suy ra $f(x) = \frac{c}{x}$, $\forall x > 1$ (c là hằng số). Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài toán 43. Giả sử tồn tại hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(xy) + 1 = f(x) + f(y) + f(xy+1), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Xét hàm số $g(x) = f(x+1) - f(x) - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) + g(xy), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Vậy ta thêm biến mới z tương tự như bài toán 21, thu được kết quả: Hàm g có dạng

$$g(x) = 2ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}
&f(x+y) = f(x) + f(y) + 2axy + b, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow &f(x+y) - a(x+y)^2 = \left[h(x) - ax^2\right] + \left[h(y) - ay^2\right] + b = 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow &f(x) - ax^2 = mx + n, \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Thay $f(x) = ax^2 + mx + n$, $\forall x \in \mathbb{R}$ vào (1) ta được

$$\begin{aligned}
&a(x+y)^2 + m(x+y) + n + ax^2y^2 + mxy + n + 1 \\
=&ax^2 + mx + n + ay^2 + my + n + a(xy+1)^2 + m(xy+1) + n, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Rút gọn ta được $a + m + n = 1 \Leftrightarrow n = 1 - a - m$. Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $f(x) = ax^2 + mx + 1 - a - m$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với a, m là những hằng số tùy ý.

Bài toán 44. Ta khẳng định mọi nghiệm có dạng $f(x) = cx + d$ với $c \geq 0$ nào đó. Dễ dàng kiểm tra các hàm số này thỏa mãn điều kiện vì ta có hằng đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right).$$

a) Theo giả thiết ta có $f(0) = 0$. Chú ý rằng từ điều kiện đề bài suy ra: "Nếu ba số thực a, b, c thỏa $a + b + c = 0$ thì $f\left(a^3\right) + f\left(b^3\right) + f\left(c^3\right) = 3f(abc)$". Ta gọi khẳng định này là $P(a, b, c)$. Khẳng định $P\left(\sqrt[3]{a}, -\sqrt[3]{a}, 0\right)$ cho ta $f(a) + f(-a) = 0$ với mọi số thực a, suy ra f là hàm lẻ.

b) Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} + 0 + 0 > 0$ nên điều kiện (i) suy ra $f(a) \geq 0$.
Bây giờ nếu $a > b$ thì $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$. Suy ra $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{-b} + 0 > 0$.
Do đó $f(a) + f(-b) \geq 0$, suy ra $f(a) \geq f(b)$. Vậy f là hàm tăng.

c) Bây giờ xét $P(a, b, -(a+b))$. Vì f lẻ nên ta có thể biến đổi thành

$$f\left(a^3\right) + f\left(b^3\right) + 3f\left(ab(a+b)\right) = f\left((a+b)^3\right)$$

Áp dụng đẳng thức này nhiều lần, ta có

$$f\left((a+b+c)^3\right) = f\left((a+b)^3\right) + f\left(c^3\right) + 3f\left((a+b)c(a+b+c)\right)$$

$$= f\left(a^3\right) + f\left(b^3\right) + 3f\left(ab\left(a+b\right)\right) + f\left(c^3\right) + 3f\left(\left(a+b\right)c\left(a+b+c\right)\right).$$

Hoàn toàn tương tự, thay đổi vai trò của b và c, ta được

$$f\left((a+b+c)^3\right) = f\left(a^3\right) + f\left(b^3\right) + f\left(c^3\right) + 3f\left(ac\left(a+c\right)\right) + 3f\left(\left(a+c\right)b\left(a+b+c\right)\right).$$

So sánh hai đẳng thức cuối cùng, ta thu được

$$f\left(ab\left(a+b\right)\right) + f\left(\left(a+b\right)c\left(a+b+c\right)\right) = f\left(ac\left(a+c\right)\right) + f\left(\left(a+c\right)b\left(a+b+c\right)\right). \quad (*)$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned} c\left(a+b\right)\left(a+b+c\right) - b\left(a+c\right)\left(a+b+c\right) &= (a+b+c)(ca+cb-ba-bc) \\ &= (a+b+c)(c-b)a \\ &= a(c^2-b^2) + a^2(c-b) \\ &= ac^2 + a^2c - (ab^2 + a^2b) \\ &= ac\left(a+c\right) - ab\left(a+b\right). \end{aligned} \quad (2*)$$

Với hai số thực dương $x < y$ bất kì, ta xét hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a^2c - abc = a^2b + ab^2 & (1) \\ a^2b + ab^2 = x & (2) \\ a^2c + ac^2 = y. & (3) \end{cases}$$

Ta khẳng định rằng hệ có nghiệm thực $a \neq 0$, $b \neq$, $c \neq 0$. Thật vậy, đặt $b = qa$, $c = ra$ thì (1) trở thành

$$r - rq = q + q^2 \Rightarrow r = \frac{q+q^2}{1-q}.$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{x}{y} = \frac{q\left(q+1\right)}{r\left(r+1\right)} = \frac{q\left(q+1\right)}{\dfrac{q^2+q}{1-q}.\dfrac{q^2+1}{1-q}} = \frac{\left(1-q\right)^2}{q^2+1}.$$

Hàm số $h\left(q\right) = \dfrac{\left(1-q\right)^2}{1+q^2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $h\left(0\right) = 1$. Vì $\dfrac{x}{y} \in (0;1)$ nên tồn tại q thuộc $[0;1]$ sao cho $h\left(q\right) = \dfrac{x}{y}$. Chọn q này và tương ứng $r = \dfrac{q\left(q+1\right)}{1-q}$. Nhân q và r cho a để nhận được b, c thỏa mãn (2); còn (3) và (1) sẽ tự nhiên được thỏa mãn. Vậy tồn tại a, b, c; rõ ràng là $a \neq 0$. Như vậy ta đã chọn được a, b, c thích hợp. Chú ý rằng

$$\begin{aligned} & a^2c - abc = a^2b + ab^2 \Rightarrow b\left(a+b+c\right) = ac \\ \Rightarrow & b\left(a+c\right)\left(a+b+c\right) = ac\left(a+c\right) = y \end{aligned}$$

và $ab\left(a+b\right) = x$. Từ đó

$$c\left(a+b\right)\left(a+b+c\right) = b\left(a+c\right)\left(a+b+c\right) + ac\left(a+c\right) - ab\left(a+b\right) = 2y - x.$$

Sử dụng những điều này và $(*)$, ta suy ra

$$f\left(2y-x\right) + f\left(x\right) = 2f\left(y\right)$$

với mọi $0 < x \leq y$. Đặt $z = 2y - x \Leftrightarrow y = \dfrac{x+z}{2}$, điều này trở thành

$$f(x) + f(z) = 2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

với mọi $0 < x \leq z$.

Vậy f thỏa mãn phương trình hàm Jensen trên tập số dương. Như chứng minh ở trên, f là hàm số tăng, suy ra $f(x) = cx$ (trong điều kiện $f(0) = 0$) với $x > 0$ (với $c \geq 0$). Do hàm f lẻ nên ta có $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Và bỏ điều kiện $f(0) = 0$ thì ta được nghiệm của bài toán là $f(x) = cx + d$ với $c \geq 0$.

Lưu ý.

① Dễ thấy rằng nếu f là hàm số thỏa mãn điều kiện thì (i) và (ii) thì hàm số $f + k$ với k là hằng số cũng thỏa mãn hai điều kiện này. Vì thế ta có thể giả sử $f(0) = 0$. Như thế giả thiết (a) (giả thiết $f(0) = 0$) là không cần thiết.

② Ở lời giải trên, ta đã dùng tính chất của hàm liên tục để chứng minh hệ phương trình có nghiệm. Sau đây ta sẽ dùng một cách khác, sơ cấp hơn để chứng minh hệ phương trình có nghiệm. Giả sử $0 < x < y$ bất kì. Ta sẽ chứng minh hệ phương trình sau có nghiệm (a, b, c) với $a > 0, b > 0, c > 0$ (thậm chí là ta còn chỉ ra được nghiệm cụ thể):

$$\begin{cases} ab(a+b) = x \\ c(a+b)(a+b+c) = y \\ ac(a+c) = b(a+c)(a+b+c). \end{cases} \tag{3*}$$

Hệ này tương đương với $\begin{cases} ab(a+b) = x \\ c(a+b)(a+b+c) = y \\ ac = b(a+b+c). \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai và thứ ba ta có

$$\frac{y}{c(a+b)} = \frac{ac}{b} \Rightarrow by = ac^2(a+b).$$

Kết hợp với phương trình thứ nhất ta được

$$\frac{x}{ab} = \frac{by}{ac^2} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{by}{c^2} \Rightarrow b^2 = \frac{x}{y}c^2 \Rightarrow b = kc,$$

với $k = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Từ phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai ta có

$$\begin{aligned} &\frac{x}{ab} = \frac{y}{c(a+b+c)} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{ab}{c(a+b+c)} = \frac{kac}{c(a+kc+c)} \\ &\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{ka}{a+c(k+1)} \Rightarrow k = \frac{a}{a+c(k+1)} \Rightarrow ka + ck(k+1) = a \\ &\Rightarrow a = \frac{ck(k+1)}{1-k}. \end{aligned}$$

Thay $b = kc$ và $a = \dfrac{ck(k+1)}{1-k}$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$\frac{c^2k^2(k+1)}{1-k}\left(\frac{ck(k+1)}{1-k} + kc\right) = x \Leftrightarrow \frac{c^2k^2(k+1)}{1-k} \cdot \frac{2ck}{1-k} = x$$

$$\Leftrightarrow 2c^3k^3(k+1) = (1-k)^2x \Leftrightarrow c = \sqrt[3]{\frac{(1-k)^2x}{2k^3(k+1)}}.$$

Như vậy với mọi $0 < x < y$ thì luôn tồn tại các số dương a, b, c thỏa mãn hệ $(3*)$. Do đó, kết hợp điều này với đẳng thức $(2*)$ ta thu được kết quả

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \ \forall x > 0, y > 0, x < y. \qquad (4*)$$

Dễ thấy rằng $f(x) + f(x) = 2f\left(\frac{x+x}{2}\right), \ \forall x > 0. \qquad (5*)$

Từ $(4*)$ và $(5*)$ ta có $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \ \forall x > 0, y > 0. \qquad (6*)$

Mặt khác, ở b) ta đã chứng minh $f(a) \geq 0, \ \forall a \geq 0$. Kết hợp điều này với $(6*)$, lặp lại quy trình của lời giải bài toán 23 (ở trang 21) ta được

$$f(x) = \ell x, \ \forall x \geq 0$$

với ℓ là hằng số không âm nào đó. Mà f là hàm lẻ nên suy ra

$$f(x) = \ell x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$f(x) = \ell x + C, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

với ℓ, C là hằng số, $\ell \geq 0$.

Bài toán 45. Giả sử tồn tại hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(y)) = f\left(y^2 + 3\right) + 2xf(y) + f(x) - 3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho nên tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_0) \neq 0$. Thay $y = y_0$ vào phương trình (1), ta được

$$f\left(x + f\left(y_0\right)\right) - f(x) = 2xf\left(y_0\right) + f\left(y_0^2 + 3\right) - 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vế phải của phương trình trên là một hàm bậc nhất ẩn x nên nó có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Từ đó suy ra hiệu $f(u) - f(v)$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Bây giờ, thay x bởi $x - f(y)$ vào phương trình đã cho, ta được

$$f(x - f(y)) = f(x) - f\left(y^2 + 3\right) - 2(x - f(y))f(y) + 3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong phương trình trên, ta thay x bởi $x + f(z)$ thì được

$$\begin{aligned} f(x + f(z) - f(y)) &= f(x + f(z)) - f\left(y^2 + 3\right) - 2[x + f(z) - f(y)]f(y) + 3 \\ &= f(x) + f\left(z^2 + 3\right) + 2xf(z) - f\left(y^2 + 3\right) - 2[x + f(z) - f(y)]f(y) \\ &= f(x) + 2x[f(z) - f(y)] + f\left(z^2 + 3\right) - f\left(y^2 + 3\right) + 2f(y)[f(y) - f(z)]. \end{aligned}$$

Đảo vị trí của y và z trong phương trình trên rồi cộng phương trình thu được và phương trình trên lại theo vế, ta được

$$f(x+f(z)-f(y))+f(x+f(y)-f(z))=2f(x)+2[f(y)-f(z)]^2.$$

Do hiệu $f(y)-f(z)$ có thể nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên từ đây ta có

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2y^2,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Đặt $f(0)=a$ và $g(x)=f(x)-x^2-a$ thì ta có $g(0)=0$ và

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Thay $x=y$ vào phương trình này, ta được $g(2x)=2g(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên ta có

$$g(x+y)+g(x-y)=g(2x),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Lần lượt thay x, y bởi $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}$ vào phương trình trên, ta suy ra g là hàm cộng tính. Tiếp theo, thay $x=0$ vào phương trình (1), ta được

$$f(f(y))=f\left(y^2+3\right)+a-3,\quad \forall y\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Thay $f(y)=g(y)+y^2+a$ vào (2) và rút gọn với chú ý g cộng tính, ta được

$$\begin{aligned}
0&=f\left(f(y)\right)-f\left(y^2+3\right)-a+3\\
&=g\left(f(y)\right)+f^2(y)+a-g\left(y^2+3\right)-\left(y^2+3\right)^2-a-a+3\\
&=g\left(f(y)\right)+f^2(y)-g\left(y^2+3\right)-\left(y^2+3\right)^2-a+3\\
&=g\left(g(y)+y^2+a\right)+\left(g(y)+y^2+a\right)^2-g\left(y^2+3\right)-\left(y^2+3\right)^2-a+3\\
&=g\left(g(y)\right)+g\left(y^2\right)+g(a)+g^2(y)+2\left(y^2+a\right)g(y)+\left(y^2+a\right)^2\\
&\quad -g\left(y^2+3\right)-\left(y^2+3\right)^2-a+3\\
&=g\left(g(y)\right)+g\left(y^2\right)+g(a)+g^2(y)+2\left(y^2+a\right)g(y)+\left(y^2+a\right)^2\\
&\quad -g\left(y^2\right)-g(3)-\left(y^2+3\right)^2-a+3\\
&=g\left(g(y)\right)+g\left(y^2\right)+g^2(y)+2\left(y^2+a\right)g(y)\\
&\quad +\left[\left(y^2+a\right)^2-\left(y^2+3\right)^2\right]+[g(a)-g(3)]-g\left(y^2\right)-a+3\\
&=g\left(g(y)\right)+g^2(y)+2\left(y^2+a\right)g(y)\\
&\quad +(a-3)(2y^2+a+3)+[g(a)-g(3)]-a+3\\
&=g\left(g(y)\right)+g^2(y)+2\left(y^2+a\right)g(y)+(a-3)\left(2y^2+a+2\right)+g(a)-g(3).
\end{aligned}$$

Thay $y=0$ vào phương trình trên, ta được

$$(a-3)(a+2)+g(a)-g(3)=0.$$

Từ đó suy ra

$$g(g(y))+g^2(y)+2\left(y^2+a\right)g(y)+2(a-3)y^2=0,\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Thay y bởi ny $(n\in\mathbb{N}^*)$ vào phương trình trên và sử dụng tính cộng tính của g, ta được

$$ng(g(y))+n^2g^2(y)+2n\left(n^2y^2+a\right)g(y)+2n^2(a-3)y^2=0,\quad \forall y\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*.$$

Ta xem vế trái là một đa thức ẩn n. Đa thức này có giá trị bằng 0 tại vô hạn giá trị của n nên nó phải đồng nhất bằng 0. Từ đó suy ra hệ số của n^3 phải bằng 0, hay ta có $2y^2g(y)=0$ với mọi $y\in\mathbb{R}$. Kết hợp với $g(0)=0$, ta suy ra $g(y)=0$ với mọi $y\in\mathbb{R}$. Từ đây với chú ý

$$(a-3)(a+2)+g(a)-g(3)=0,$$

ta tính được $a=3$ hoặc $a=-2$. Suy ra $f(x)=x^2+3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x^2-2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy chỉ có hàm $f(x)=x^2+3$ thỏa mãn yêu cầu. Vậy có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu là

$$f(x)=x^2+3,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lưu ý. Bạn đọc hãy xem thêm bài toán **??** ở trang **??** (Đầy đủ hơn, có thể xem cả mục **??** ở trang **??**: Sử dụng đa thức) để tìm hiểu và củng cố thêm phương pháp vận dụng đa thức vào việc giải phương trình hàm).

Bài toán 46. Giả sử tồn tại hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)},\ \forall x\neq y. \tag{1}$$

Từ (1) ta thấy ngay rằng, nếu $x\neq y$ thì $f(x)\neq f(y)$. (2)
Từ (1) cho $y=0$ ta được

$$\begin{aligned}&f(1)=\frac{f(x)+f(0)}{f(x)-f(0)},\ \forall x\neq 0\\ \Rightarrow &f(1)f(x)-f(1)f(0)=f(x)+f(0),\ \forall x\neq 0\\ \Rightarrow &f(x)\left[f(1)-1\right]=f(0)\left[f(1)+1\right],\ \forall x\neq 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Nếu $f(1)\neq 1$ thì từ (3) suy ra f là hàm hằng, mâu thuẫn với (2), do đó $f(1)=1$, từ đây suy ra $f(0)=0$. Từ (1) thay y bởi $x-2$ ta được

$$f(x-1)=\frac{f(x)+f(x-2)}{f(x)-f(x-2)}. \tag{4}$$

Từ (1) thay x bởi $x-1$ và thay y bởi 1 và sử dụng $f(1)=1$ ta được

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1}. \tag{5}$$

Thay (4) vào (5) ta được

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{f(x)}{f(x-2)}. \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$f(x)=f(x-2)\cdot\frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1}. \tag{7}$$

Từ (5) cho $x = 3$ ta được $f(3) = \dfrac{f(2)+1}{f(2)-1}$. Từ (6) cho $x = 4$ ta được $f(4) = f(2)^2$. Từ (7) cho $x = 5$ ta được

$$f(5) = f(3) \cdot \frac{f(4)+1}{f(4)-1} = \frac{f(2)+1}{f(2)-1} \cdot \frac{f(2)^2+1}{f(2)^2-1} = \frac{f(2)^2+1}{[f(2)-1]^2}.$$

Mặt khác, theo (1) ta có

$$f(5) = f\left(\frac{3+2}{3-2}\right) = \frac{f(3)+f(2)}{f(3)-f(2)} = \frac{\dfrac{f(2)+1}{f(2)-1} + f(2)}{\dfrac{f(2)+1}{f(2)-1} - f(2)} = \frac{f(2)^2+1}{-f(2)^2+2f(2)+1}.$$

Như thế

$$[f(2)-1]^2 = -f(2)^2 + 2f(2) + 1 \Leftrightarrow 2f(2)^2 - 4f(2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2) = 0 \\ f(2) = 2. \end{array}\right.$$

Do $f(0) = 0$ và do (2) nên $f(2) \neq 0$. Vậy $f(2) = 2$. Từ đây ta có ngay $f(3) = 3$ và $f(4) = 4$. Giả sử $f(k) = k$ với mọi số tự nhiên $k \leq n$, với n là số tự nhiên cho trước. Từ (7) cho $x = n$ ta được

$$f(n+1) = f(n-1) \cdot \frac{f(n)+1}{f(n)-1} = (n-1) \cdot \frac{n+1}{n-1} = n+1.$$

Như vậy theo nguyên lý qui nạp ta được

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Từ (1) cho $y = -x$ ta được

$$f(0) = \frac{f(x)+f(-x)}{f(x)-f(-x)} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

hay f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Do đó kết hợp với (8) ta được

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Tiếp theo, ta thêm biến z bằng cách thay y bởi zx ta được

$$f\left(\frac{x+xz}{x-xz}\right) = \frac{f(x)+f(xz)}{f(x)-f(xz)}.$$

Mà $f\left(\dfrac{x+xz}{x-xz}\right) = f\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1+f(z)}{1-f(z)}$ nên

$$\frac{1+f(z)}{1-f(z)} = \frac{f(x)+f(xz)}{f(x)-f(xz)}.$$

Thực hiện nhân chéo rồi rút gọn ta được

$$f(xz) = f(x)f(z), \ \forall x \neq 0, z \neq 0.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ta được

$$f(xz) = f(x)f(z), \ \forall x, z \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Giả sử $n \in \mathbb{Z}^*$, khi đó

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \overset{(10)}{=} f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Giả sử r là số hữu tỉ, khi đó $r = \dfrac{m}{n}$ với m, n là số nguyên và $n \neq 0$. Ta có

$$f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} = r.$$

Như vậy $f(r) = r, \forall r \in \mathbb{Q}$. (11)
Từ (10) cho $z = x$ ta được

$$f\left(x^2\right) = f(x)^2 \Rightarrow f(x) \geq 0, \ \forall x \geq 0.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ và (2) ta được $f(x) > 0, \ \forall x > 0$. Tiếp theo ta chứng minh hàm f tăng nghiêm ngặt. Giả sử $x > y$, khi đó chỉ có các trường hợp sau có thể xảy ra:

- Trường hợp 1: $x > y \geq 0$. Khi đó

$$\frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)} = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) > 0 \Rightarrow f(x) > f(y).$$

- Trường hợp 2: $y < 0 < x$. Khi đó $f(x) > 0$, $f(y) < 0$ nên $f(x) > f(y)$.

- Trường hợp 3: $y < x < 0$. Khi đó

$$0 < -x < -y \Rightarrow f(-x) < f(-y) \Rightarrow -f(x) < -f(y) \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Như vậy, nếu $x > y$ thì ta luôn có $f(x) > f(y)$. Giả sử $x \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sao cho

$$u_n \leq x \leq v_n, \forall n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = x.$$

Vì f là hàm tăng nên $f(u_n) \leq f(x) \leq f(v_n)$. Kết hợp với (11) ta được

$$u_n \leq f(x) \leq v_n, \ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Cho $n \to +\infty$ trong bất đẳng thức trên ta được

$$x \leq f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x.$$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Tài Chung, 2012, *Giải phương trình hàm bằng phương pháp thêm biến*, Kỷ yếu Gặp gỡ toán học lần 4: Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic.

[2] Nguyễn Tài Chung, 2014, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.

[3] Võ Quốc Bá Cẩn, Tạp chí Epsilon, Số 14 - 12/2018, *Phương pháp thêm biến trong giải phương trình hàm* (từ trang 66 đến trang 78).

[4] Các tài liệu trên Internet.