

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{2x+1}{5} = \frac{5-x}{3}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

Câu 2 (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

2. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d'): y = 5x + 3$ và đi qua điểm $A(1;3)$.

Câu 3 (2,0 điểm)

1. Một đội công nhân phải trồng 96 cây xanh. Đội dự định chia đều số cây cho mỗi công nhân nhưng khi chuẩn bị trồng thì có 4 công nhân được điều đi làm việc khác nên mỗi công nhân còn lại phải trồng thêm 4 cây. Hỏi lúc đầu đội công nhân có bao nhiêu người ?

2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = m + 3$.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và các đường cao AF, BD, CE cắt nhau tại H .

1. Chứng minh rằng: $\widehat{DAH} = \widehat{DEH}$.

2. Gọi O và M lần lượt là trung điểm của BC và AH . Chứng minh rằng: tứ giác $MDOE$ nội tiếp.

3. Gọi K là giao điểm của AH và DE . Chứng minh rằng: $AH^2 = 2MK(AF + HF)$.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

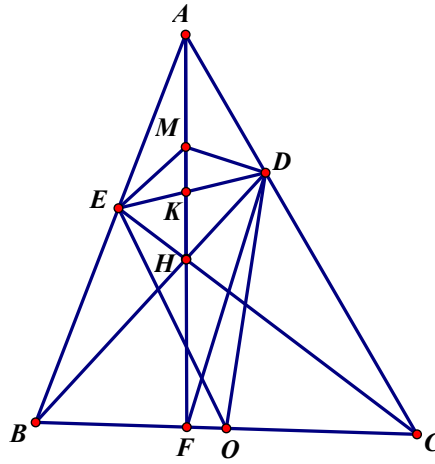
-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1 Cán bộ coi thi số 2

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (2 điểm)	1	Giải phương trình: $\frac{2x+1}{5} = \frac{5-x}{3}$	
		Phương trình tương đương: $3(2x+1) = 5(5-x)$	0,25
		$\Leftrightarrow 6x+3 = 25-5x$	0,25
		$\Leftrightarrow 11x = 22$	0,25
		$\Leftrightarrow x = 2$	0,25
	2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x+y=5 & (1) \\ 2x+5y=12 & (2) \end{cases}$	
		Từ (1) ta có: $y = 5 - 3x$	0,25
		Thay vào (2) ta được: $2x + 5(5 - 3x) = 12$	0,25
		$\Leftrightarrow 2x + 25 - 15x = 12$ $\Leftrightarrow -13x = -13$	0,25
		$\Leftrightarrow x = 1$ Với $x = 1$ thì $y = 2$.	0,25
2 (2 điểm)	1	Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.	
		$A = \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$	0,25
		$= \sqrt{x} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$	
		$= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$	0,25
		$= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1}$	0,25
		$= \sqrt{x}-1$	0,25
	2	Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d'): y = 5x + 3$ và đi qua điểm $A(1;3)$.	
		Vì (d) song song (d') nên $a = 5$ ($b \neq 3$)	0,25
		Thay tọa độ điểm $A(1;3)$ vào phương trình (d) ta được: $a + b = 3$	0,25
		Với $a = 5$ ta có $5 + b = 3$ $\Leftrightarrow b = -2$ (thỏa mãn điều kiện).	0,25

3 (2 điểm)		Một đội công nhân phải trồng 96 cây xanh. Đội dự định chia đều số cây cho mỗi công nhân nhưng khi chuẩn bị trồng thì có 4 công nhân được điều đi làm việc khác nên mỗi công nhân còn lại phải trồng thêm 4 cây. Hỏi lúc đầu đội công nhân có bao nhiêu người ?	
		Gọi $x(x \in \mathbb{N}^*, x > 4)$ là số công nhân lúc đầu.	
		Số cây mỗi công nhân dự định phải trồng là $\frac{96}{x}$.	0,25
		Số cây mỗi công nhân còn lại phải trồng sau khi 4 người đi làm việc khác là $\frac{96}{x-4}$.	0,25
	1	Theo bài ta có phương trình: $\frac{96}{x-4} - \frac{96}{x} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{24}{x-4} - \frac{24}{x} = 1$ $\Leftrightarrow 24x - 24(x-4) = x(x-4)$ $\Leftrightarrow 96 = x^2 - 4x$ $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -8 \end{cases}$ Kết hợp điều kiện ta có $x = 12$.	0,25
		Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = m + 3$.	
		Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 = 3x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x - m = 0 (*)$ Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt \Leftrightarrow phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt. Ta có $\Delta = 9 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-9}{4}$	0,25
	2	Theo Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 & (1) \\ x_1 x_2 = -m & (2) \end{cases}$ Theo đề bài ta có $x_1 + 2x_2 = m + 3$ (3)	0,25
		Từ (1) và (3) ta có $\begin{cases} x_1 = 3 - m \\ x_2 = m \end{cases}$	0,25
	Thay vào phương trình (2) ta được $(3-m)m = -m \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$ Đối chiếu điều kiện ta có $m = 0$ và $m = 4$.	0,25	
4 (3 điểm)	1	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và các đường cao AF, BD, CE cắt nhau tại H . 1. Chứng minh rằng: $\widehat{DAH} = \widehat{DEH}$.	



Theo bài ta có $\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$	0,25
$\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$	0,25
Suy ra tứ giác ADHE nội tiếp.	0,25
Suy ra $\widehat{DAH} = \widehat{DEH}$.	0,25

2	2. Gọi O và M lần lượt là trung điểm của BC và AH . Chứng minh rằng: tứ giác $MDOE$ nội tiếp.	
	Tam giác vuông ADH có $MD = \frac{AH}{2} = MH \Rightarrow \widehat{MDH} = \widehat{MHD}$ (1)	0,25
	Tam giác vuông BDC có $OD = \frac{BC}{2} = OB \Rightarrow \widehat{ODB} = \widehat{OBD} \Rightarrow \widehat{ODB} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{HAD}$ (2)	0,25
	Cộng vế (1) và (2) ta có $\widehat{MDH} + \widehat{ODB} = \widehat{MHD} + \widehat{HAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MDO} = 90^\circ$	0,25
	Chứng minh tương tự ta có $\widehat{MEO} = 90^\circ$ Vậy $\widehat{MDO} + \widehat{MEO} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $MDOE$ nội tiếp.	0,25
3	3. Gọi K là giao điểm của AH và DE . Chứng minh rằng: $AH^2 = 2MK(AF + HF)$.	
	Ta có $AF + HF = (AM + MF) + (MF - MH) = 2MF$ Lại có $AH = 2MD$ Nên đẳng thức cần chứng minh trở thành $AH^2 = 2MK(AF + HF) \Leftrightarrow 4MD^2 = 4MK.MF \Leftrightarrow MD^2 = MK.MF$ (*)	0,25
	Theo ý 2 ta có $\widehat{MDO} = \widehat{MEO} = 90^\circ$. Mặt khác $\widehat{MFO} = 90^\circ$. Suy ra 5 điểm M, D, O, F, E cùng thuộc đường tròn đường kính MO . Vậy $\widehat{MFD} = \widehat{MED}$ (3).	0,25
	Lại có: $ME = MD = \frac{AH}{2} \Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{MDE} = \widehat{MDK}$ (4)	
	Từ (3) và (4) ta có $\widehat{MFD} = \widehat{MDK}$. Do đó $\triangle MDK$ đồng dạng với $\triangle MFD$ (g-g)	0,25
Suy ra $\frac{MD}{MF} = \frac{MK}{MD} \Rightarrow MD^2 = MK.MF$. Vậy (*) được chứng minh.	0,25	

5 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

(1 điểm)	$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$	
	Trong 3 số $a-1, b-1, c-1$ luôn tồn tại ít nhất hai số cùng dấu.	0,25
	Giả sử $a-1$ và $b-1$ cùng dấu. Suy ra $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b$ $\Leftrightarrow 2abc+2c \geq 2ac+2bc \Leftrightarrow 2ab+2abc+2c \geq 2(ab+bc+ca)$ (1)	0,25
	Ta sẽ chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2ab + 2abc + 2c$ (2) Thật vậy $(2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2ab + 2c \Leftrightarrow (a-b)^2 + (c-1)^2 \geq 0$ (Luôn đúng) Từ (1) và (2) ta được điều phải chứng minh.	0,25
Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} (a-1)(b-1) = 0 \\ (a-b)^2 + (c-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$	0,25	

Lưu ý: Học sinh giải theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.