

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Ngày thi: 03/6/2016

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

(Đề thi gồm có: 02 trang)

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$ (với $x, y > 0; x \neq y$)

b) Giải phương trình: $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$

Câu 2: (1,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ y + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

b) Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho đường thẳng $(d): y = mx + n$ (m, n là tham số) và parabol $(P): y = 2x^2$. Trên đồ thị (P) lấy hai điểm M, N có hoành độ tương ứng là 1 và 2. Xác định các giá trị của m, n để đường thẳng (d) tiếp xúc parabol (P) và song song đường thẳng MN .

Câu 3: (1,5 điểm)

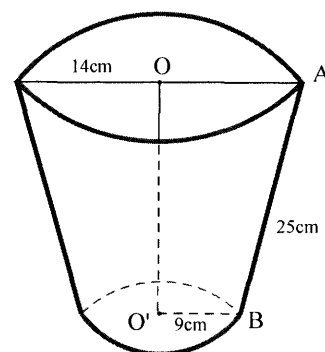
a) Cho a, b, c, d là các số thực phân biệt. Biết rằng a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 1 = 0$. Chứng minh hệ thức sau: $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) = (m-n)^2$

b) Cho a, b, c là ba số dương bất kỳ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}$

Câu 4: (2,0 điểm)

a) Một ca nô chạy trên sông xuôi dòng 81km và ngược dòng 108km với tổng thời gian là 8 giờ. Một lần khác, ca nô ấy cũng chạy trên sông vừa nêu trên, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km với tổng thời gian là 4 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước. Biết rằng, vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước không đổi.

b) Người thợ cần làm một cái xô bằng nhôm hình nón cụt (hình vẽ), có bán kính đường tròn miệng xô là 14cm, bán kính đáy xô là 9cm và chiều dài đường sinh là 25cm. Gọi S là tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của xô. Tính S và thể tích của xô (tính theo đơn vị lít). (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).



(Hình vẽ)

Câu 5: (3,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh $AB = 12\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$ và $BC = 18\text{cm}$. Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC (D thuộc cạnh BC).

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Gọi M, N, P, I lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CA, AB và OC .

b₁) Tính \widehat{BON} , chứng minh ba điểm A, M, I thẳng hàng.

b₂) Chứng minh P là trực tâm của tam giác OMN .

--HẾT--

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký GT1: _____

Chữ ký GT2: _____

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

Ngày thi: 03/6/2016

(Hướng dẫn chấm gồm có: 06 trang)

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1: (2, 0 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2}{\sqrt{xy}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$ (với $x, y > 0; x \neq y$)	1,0
	$H = \frac{2}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{xy}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$	0,25
	$= \frac{2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} - \frac{x+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$	0,25
	$= -\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$	0,25
	$= -\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = -1$	0,25
b)	Giải phương trình: $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$.	1,0
	Đặt $t = x - 2 \Leftrightarrow x = t + 2$ thế vào pt được: $t^4 + (t-1)^4 = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow 2t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow t(t-1)(t^2-t+2) = 0$ (*)	0,25
	Vì $t^2 - t + 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall t \in R$ nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$	0,25
	Vậy nghiệm phương trình: $x=2$ và $x=3$.	

Câu 2: (1,5 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ y + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases}$	0,75
	Hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ y + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy+1}{y} = \frac{7}{2} & (1) \\ \frac{xy+1}{x} = \frac{7}{3} & (2) \end{cases}$	0,25
	(1) chia (2) ta được: $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}y + \frac{1}{y} = \frac{7}{2} & (3) \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases}$	0,25
	Giải (3): $3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình: $(3; 2), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$	0,25
b)	Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho đường thẳng $(d): y = mx + n$ (m, n là tham số) và parabol $(P): y = 2x^2$. Trên đồ thị (P) lấy hai điểm M, N có hoành độ tương ứng là 1 và 2. Xác định các giá trị của m, n để đường thẳng (d) tiếp xúc parabol (P) và song song đường thẳng MN .	0,75
	Phương trình đường thẳng $MN: y = 6x - 4$ Vì (d) song song MN nên $m = 6$	0,25
	Để (d) tiếp xúc (P) thì pt hoành độ giao điểm: $2x^2 = 6x + n$ hay $2x^2 - 6x - n = 0$ có nghiệm kép.	0,25
	Tức là, $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9 + 2n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-9}{2}$. Vậy đường thẳng (d) tiếp xúc parabol (P) khi $m = 6, n = \frac{-9}{2}$.	0,25

Câu 3: (1,5 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Cho a, b, c, d là các số thực phân biệt. Biết rằng a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 1 = 0$. Chứng minh hệ thức sau: $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) = (m-n)^2$	0,75
	Theo Viet, ta có: $a + b = -m, ab = 1; c + d = -n, cd = 1$. Do đó: $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$ $= [a^2 - a(c+d) + cd] \cdot [b^2 - b(c+d) + cd]$	0,25

	$= (a^2 + an + 1)(b^2 + bn + 1)$ $= [a^2 + am + 1 + a(n - m)] \cdot [b^2 + bm + 1 + b(n - m)]$	0,25
	$= ab(m - n)^2 = (m - n)^2 \quad (\text{đpcm})$	0,25
b)	<p>Cho a, b, c là ba số dương bất kỳ thỏa: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}$.</p>	0,75
	<p>Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên $\frac{a}{b^2 + c^2} = \frac{a}{1 - a^2} = \frac{a^2}{a(1 - a^2)}$</p>	0,25
	<p>Ta có:</p> $a^2(1 - a^2)^2 = \frac{1}{2} 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$ $a^2(1 - a^2)^2 \leq \frac{4}{27} \Leftrightarrow a(1 - a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1 - a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$	0,25
	<p>Tương tự: $\frac{b^2}{b(1 - b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2$; $\frac{c^2}{c(1 - c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2$</p> <p>Cộng theo vế ta được: $P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$</p>	0,25

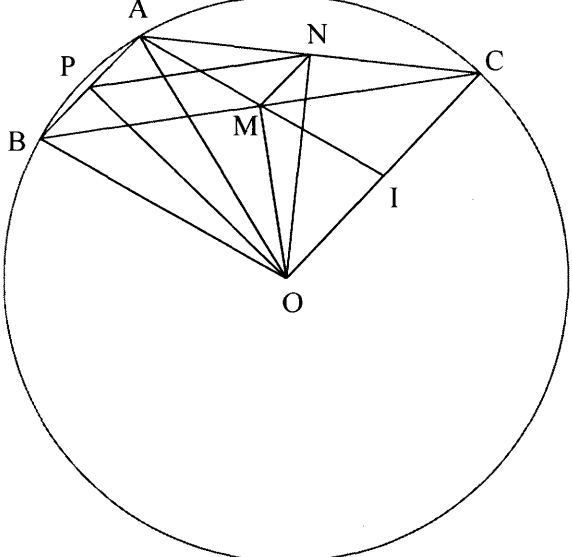
Câu 4: (2,0 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	<p>Một ca nô chạy trên sông xuôi dòng 81km và ngược dòng 108km với tổng thời gian là 8 giờ. Một lần khác, ca nô ấy cũng chạy trên sông vừa nêu trên, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km với tổng thời gian là 4 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước. Biết rằng, vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước không đổi.</p>	1,0
	<p>Gọi vận tốc riêng của ca nô là: x (km/h, x > 0); vận tốc riêng của dòng nước: y (km/h, y > 0), (x > y).</p> <p>Suy ra, vận tốc xuôi dòng và ngược dòng của ca nô tương ứng: (x + y) và (x - y) (km/h).</p>	0,25
	<p>Theo gt, ta có: $\begin{cases} \frac{81}{x + y} + \frac{105}{x - y} = 8 \\ \frac{54}{x + y} + \frac{42}{x - y} = 4 \end{cases} \quad (*)$</p>	0,25
	<p>Giải hệ (*), ta được hpt: $\begin{cases} \frac{1}{x + y} = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{x - y} = \frac{1}{21} \end{cases} \quad (**)$</p>	0,25

	Giải hệ pt (**), được: $\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases}$	0,25
	Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24km/h, vận tốc riêng của dòng nước là 3km/h.	
b)	Người thợ cần làm một cái xô bằng nhôm hình nón cụt (hình vẽ), có bán kính đường tròn miệng xô là 14cm, bán kính đáy xô là 9cm và chiều dài đường sinh là 25cm. Gọi S là tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của xô. Tính S và thể tích của xô (tính theo đơn vị lít). (Lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).	1,0
	Diện tích xung quanh của chiếc xô: $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2) \cdot l = \pi(14 + 9) \cdot 25 = 575\pi (cm^2)$	0.25
	Diện tích đáy của chiếc xô: $S_d = \pi R_2^2 = \pi \cdot 9^2 = 81\pi (cm^2)$	
	Tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy xô: $S = 575\pi + 81\pi = 656\pi (cm^2) \approx 2059,84 (cm^2)$.	0.25
	Trong mặt phẳng OABO' vẽ: BH vuông góc OA, ta được: OH=O'B=9cm, AH=5cm, OO'=BH. Ta có, $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 600 \Rightarrow BH = 10\sqrt{6}$ (cm)	0.25
	Thể tích của xô: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) = \frac{4030\pi\sqrt{6}}{3} \approx 10332,11 (cm^3) \approx 10,33 (dm^3) = 10,33$ (lít). Vậy thể tích xô là 10,33 lít.	0.25

Câu 5: (3,0 điểm)

Ý	NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh $AB = 12cm$, $AC = 15cm$ và $BC = 18cm$. Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC (D thuộc cạnh BC).	1,0

	<p>Theo tính chất phân giác trong tam giác, ta có: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.</p> $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{9} \Rightarrow DB = \frac{18.4}{9} = 8(\text{cm})$	0,25
	<p>Đặt $BH = x$, ta có: $AB^2 - x^2 = AC^2 - (BC - x)^2$ Hay $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 \Leftrightarrow 2ax = a^2 + c^2 - b^2$ $\Leftrightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{27}{4} = 6,75(\text{cm})$ $HD = BD - BH = 8 - 6,75 = 1,25(\text{cm})$.</p>	0,25
	<p>Trong tam giác vuông ADH và AHB, áp dụng Pytago có: $AD^2 = AH^2 + HD^2 = AH^2 + (1,25)^2$ (1) $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = 12^2 - (6,75)^2$ (2)</p>	0,25
	<p>Từ (1) và (2) ta được: $AD^2 = 12^2 - (6,75)^2 + (1,25)^2 = 100$ Vậy $AD = 10(\text{cm})$</p>	0,25
b)	<p>b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 15^\circ$. Gọi M, N, P, I lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CA, AB và OC.</p>	2,0
		
	<p>b₁) Tính \widehat{BON}, chứng minh ba điểm A, M, I thẳng hàng.</p> $\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AC} = 2 \widehat{ABC} = 60^\circ$ $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB} = 2 \widehat{ACB} = 30^\circ$ $\text{sđ } \widehat{BAC} = \text{sđ } \widehat{AC} + \text{sđ } \widehat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = \text{sđ } \widehat{BC} = 90^\circ$	0,5
	<p>Tam giác OAB cân tại O ($OA = OB$), OP là trung tuyến nên OP là phân giác. Do đó: $\widehat{POA} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$</p>	0,5

<p>Tương tự: $\widehat{AON} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$</p> $\widehat{PON} = \frac{1}{2} (\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = 45^\circ$	
<p>Tam giác cân tại O (OA=OB=R), có: $\widehat{AOC} = \text{sđ } \widehat{AC} = 60^\circ$ nên tam giác OAC là tam giác đều.</p>	0,25
<p>Mà AI là đường trung tuyến nên AI là đường cao. $BO \perp OC$ ($\widehat{BOC} = 90^\circ$), $AI \perp OC \Rightarrow AI \parallel BO$</p>	0,25
<p>Mặt khác: MI//BO (MI là đường trung bình của tam giác OBC)</p>	0,25
<p>Theo tiên đề Ôclit thì A, M, I thẳng hàng (đpcm)</p>	0,25
<p>b₂) Chứng minh P là trực tâm của tam giác OMN. $OM \perp BC$ (Vì M là trung điểm BC) NP//BC (NP là đường trung bình của tam giác ABC). Suy ra : $NP \perp OM$</p>	0,25
<p>$OP \perp AB$ (Vì P là trung điểm AB) MN//AB (MN là đường trung bình của tam giác ABC). Suy ra : $OP \perp MN$</p>	0,25
<p>Tam giác OMN có NP và OP là hai đường cao cắt nhau tại P. Do đó P là trực tâm của tam giác OMN (đpcm)</p>	0,5

-----HẾT-----