SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM	KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2019 – 2020
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi : **TOÁN (Toán chuyên)** Thời gian : **150 phút** (*không kể thời gian giao đề*) Khóa thi ngày : **10-12/6/2019**

Câu 1 (*2,0 điểm*).

a) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với $x\geq 0$.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A=6$.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019$ chia hết cho 20.

Câu 2 (*1,0 điểm*).

Cho parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+m-2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2<3$.

Câu 3 (*2,0 điểm*).

a) Giải phương trình $x^2-\sqrt{x^2-4x}=4\left(x+3\right)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y=3 \\ x^2+7y^2-4xy+6y=13. \end{cases}$

Câu 4 (*2,0 điểm*).

Cho hình bình hành ABCD có góc A nhọn. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên các đường thẳng AB, AD.

a) Chứng minh $\mathrm{AB.AH}+\mathrm{AD.AK}=\mathrm{AC}^2$.

b) Trên hai đoạn thẳng BC, CD lần lượt lấy hai điểm M, N (M khác B, M khác C) sao cho hai tam giác ABM và ACN có diện tích bằng nhau; BD cắt AM và AN lần lượt tại E và F. Chứng minh $\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BC}}+\dfrac{\mathrm{DN}}{\mathrm{DC}}=1$ và $\mathrm{BE}+\mathrm{DF}>\mathrm{EF}$.

Câu 5 (*2,0 điểm*).

Cho tam giác nhọn ABC $(\mathrm{AB}<\mathrm{AC})$ nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Ba điểm D, E, F lần lượt là chân các đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, P là giao điểm của EF và BC. Đường thẳng DF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh $\mathrm{PB.PC}=\mathrm{PE.PF}$ và KE song song với BC.

b) Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh tứ giác BIQF nội tiếp đường tròn.

Câu 6 (*1,0 điểm*).

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

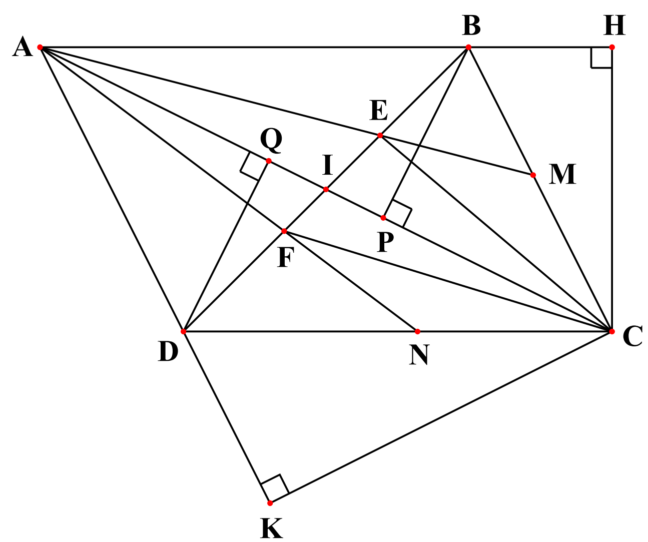
$$P=\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}.$$

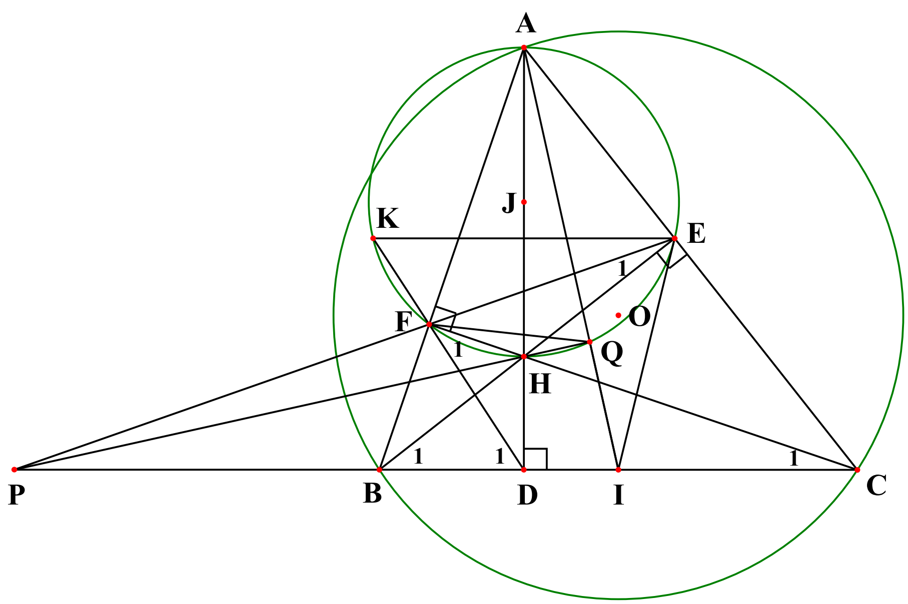
--------------- HẾT---------------

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ BIỂU ĐIỂM DỰ KIẾN:

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
Câu 1 **(*2,0đ*)**	a)	Với $x \ge 0$, ta có: $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}+8}{x\sqrt{x}+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ $=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)-2\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}\cdot\dfrac{x\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+3}$ $=\dfrac{x+3\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-8}{x\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{\left(x\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+3}$ $=\left(x+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ $=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ $=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ $=x-3\sqrt{x}+2$ $A=6 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=6 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-4=0$ $\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}-4=0$ $\left(\text{vì } \sqrt{x}+1>0\ \forall x \ge 0\right)$ $\Leftrightarrow x=16$ (TMĐK) Vậy với $x=16$ thì $A=6$.	1.0
	b)	$M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019=9.81^n-8.16^n+2019$ Ta có: $81\equiv 1(\text{mod}\,4)\Rightarrow 81^n\equiv 1(\text{mod}\,4)\Rightarrow 9.81^n\equiv 9\equiv 1(\text{mod}\,4)$ $8.16^n\equiv 0(\text{mod}\,4)$ $\Rightarrow M\equiv 1-0+2019\equiv 2020\equiv 0(\text{mod}\,4)$ hay $M\,\vdots\,4$ (1) Lại có: $81\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 81^n\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 9.81^n\equiv 9\equiv 4(\text{mod}\,5)$ $16\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 16^n\equiv 1(\text{mod}\,5)\Rightarrow 8.16^n\equiv 8\equiv 3(\text{mod}\,5)$ $\Rightarrow M\equiv 4-3+2019\equiv 2020\equiv 0(\text{mod}\,5)$ hay $M\,\vdots\,5$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow M\,\vdots\,BCNN(4,5)$ hay $M\,\vdots\,20$ (đpcm)	1.0
Câu 2 **(*1,0đ*)**		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $-x^2=x+m-2 \Leftrightarrow x^2+x+m-2=0$ (1) Ta có: $\Delta=1-4(m-2)=9-4m$ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt	1.0

<table>
<tr><td></td><td></td><td>$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$ (2)
Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$
Theo đề bài:
$x_1^2 + x_2^2 < 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3$
$\Rightarrow 1 - 2(m-2) < 3 \Leftrightarrow 5 - 2m < 3 \Leftrightarrow m > 1$ (3)
Từ (2) và (3) $\Rightarrow 1 < m < \dfrac{9}{4}$ là giá trị cần tìm.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Câu 3
(2,0đ)</td><td>a)</td><td>$x^2 - \sqrt{x^2 - 4x} = 4\left(x+3\right) \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x\right) - \sqrt{x^2 - 4x} - 12 = 0$ (1)
Đặt $\sqrt{x^2 - 4x} = y$ $\left(y \geq 0\right)$. Phương trình (1) trở thành:
$y^2 - y - 12 = 0$ (2)
Giải phương trình (2) được:
$y_1 = 4$ (TMĐK) ; $y_2 = -3$ (loại)
Với $y = 4$ thì:
$\sqrt{x^2 - 4x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 16 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 20 \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{5}$
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2 \pm 2\sqrt{5}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y = 3 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 13 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 8 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 3y^2 + 6y + 3 = 16 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 = 8 & (1) \\ (x-2y)^2 + 3(y+1)^2 = 16 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2 + 2(y+1)^2 = 16 \\ (x-2y)^2 + 3(y+1)^2 = 16 \end{cases}$
$\Rightarrow 2(x+2)^2 - (x-2y)^2 - (y+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)^2 - (x-2y)^2 + (x+2)^2 - (y+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (2x-2y+2)(2y+2) + (x+y+3)(x-y+1) = 0$
$\Leftrightarrow (x-y+1)(4y+4) + (x+y+3)(x-y+1) = 0$
$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+5y+7) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y - 1 & (2) \\ x = -5y - 7 & (3) \end{array}\right.$
Thay (2) vào (1) được:
$(y-1+2)^2 + (y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow 2(y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 4$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = -3 \Rightarrow x = -4 \end{array}\right.$</td><td></td></tr>
</table>

		Thay (3) vào (1) được: $(-5y-7+2)^2+(y+1)^2=8 \Leftrightarrow 26(y+1)^2=8 \Leftrightarrow (y+1)^2=\dfrac{4}{13}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1+\dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x=-2-\dfrac{10}{\sqrt{13}} \\ y=-1-\dfrac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x=-2+\dfrac{10}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$ Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)\in\left\{(0;1),(-4;-3),\left(-2-\dfrac{10}{\sqrt{13}};-1+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right),\left(-2+\dfrac{10}{\sqrt{13}};-1-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)\right\}.$	
Câu 4 ***(2,0đ)***			
	a)	Kẻ $BP \perp AC$, $DQ \perp AC$ Dễ chứng minh $\Delta AQD = \Delta CPB$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AQ = CP \Rightarrow AQ + AP = AC$ (1) $\Delta APB \backsim \Delta AHC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AP}{AH} \Rightarrow AB.AH = AC.AP$ (2) Tương tự: $AD.AK = AC.AQ$ (3) Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow AB.AH + AD.AK = AC.AP + AC.AQ = AC(AP+AQ) = AC^2$	1.0
	b)	Hai tam giác ADN và ADC có chung chiều cao kẻ từ A $\Rightarrow \dfrac{DN}{DC}=\dfrac{S_{ADN}}{S_{ADC}}$ Tương tự: $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{S_{ABM}}{S_{ABC}}$ Mà $S_{ABM} = S_{ACN}$ (GT) và $S_{ABC} = S_{ADC}$ (vì ABCD là hình bình hành) $\Rightarrow \dfrac{BM}{BC}=\dfrac{S_{ACN}}{S_{ADC}}$ $\Rightarrow \dfrac{BM}{BC}+\dfrac{DN}{DC}=\dfrac{S_{ACN}}{S_{ADC}}+\dfrac{S_{ADN}}{S_{ADC}}=\dfrac{S_{ACN}+S_{ADN}}{S_{ADC}}=1$	0.5

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Gọi I là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow$ IA = IC
Ta có:
$S_{AMCN} = S_{ACM} + S_{ACN} = S_{ACM} + S_{ABM} = S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD}$
Vì IA = IC nên:
$S_{AEF} = S_{AIE} + S_{AIF} = S_{CIE} + S_{CIF} = S_{CEF} < S_{EMCNF}$
$\Rightarrow S_{AEF} < \frac{1}{2}S_{AMCN} \Rightarrow S_{AEF} < \frac{1}{2}S_{ABD}$
$\Rightarrow EF < \frac{1}{2}BD$
Mà BE + DF + EF = BD
$\Rightarrow BE + DF > EF$ (đpcm).</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Câu 5
(2,0đ)</td><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">a)</td><td>Tứ giác BCEF có:
$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^o$ (GT)
$\Rightarrow$ BCEF là tứ giác nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$
ΔPBE và ΔPFC có: $\widehat{EPC}$ chung ; $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$
$\Rightarrow \Delta PBE \backsim \Delta PFC$ (g-g)
$\Rightarrow \frac{PB}{PF} = \frac{PE}{PC} \Rightarrow PB.PC = PE.PF$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Tứ giác BDHF có:
$\widehat{BDH} = \widehat{BFH} = 90^o$ (GT)
$\Rightarrow \widehat{BDH} + \widehat{BFH} = 180^o$
$\Rightarrow$ BDHF là tứ giác nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{F}_1$
Gọi J là trung điểm của AH. Dễ thấy ΔHEF nội tiếp đường tròn $\left(J;\frac{AH}{2}\right)$
Tứ giác HEKF nội tiếp đường tròn (J)</td><td>0.5</td></tr>
</table>

		$\Rightarrow \hat{F}_1 = \widehat{HEK}\ \left(=180^o - \widehat{HFK}\right)$ Mà $\hat{B}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = \widehat{HEK}$ $\Rightarrow$ KE // BC	
	b)	Trước hết, ta chứng minh DIEF là tứ giác nội tiếp *Cách 1:* Tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow \hat{B}_1 = \widehat{HFE}$ Mà $\hat{B}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow \widehat{DFE} = 2\hat{B}_1$ (1) ΔEBC vuông tại E, đường trung tuyến EI $\Rightarrow IB = IE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta IBE$ cân tại I $\Rightarrow \hat{I}_1 = 2\hat{B}_1$ (tính chất góc ngoài của tam giác) (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \hat{I}_1 = \widehat{DFE}$ $\Rightarrow$ DIEF là tứ giác nội tiếp *Cách 2:* Chứng minh được $\widehat{IEH} = \hat{B}_1 = \widehat{HFE} \Rightarrow \widehat{IEH} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{HE}$ $\Rightarrow$ EI là tiếp tuyến của (J) $\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{EAF} = \widehat{BHF} = \hat{D}_1$ $\Rightarrow$ DIEF là tứ giác nội tiếp	0.25
		Dễ chứng minh $\Delta PDF \backsim \Delta PEI$ (g-g) $\Rightarrow$ PD.PI = PE.PF Dễ chứng minh $\Delta PHE \backsim \Delta PFQ$ (g-g) $\Rightarrow$ PE.PF = PH.PQ $\Rightarrow PD.PI = PH.PQ \Rightarrow \frac{PD}{PQ} = \frac{PH}{PI}$ $\Rightarrow \Delta PDH \backsim \Delta PQI$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{PHD} = \widehat{PIQ}$ Lại có $\widehat{PHD} = \widehat{AHQ} = \widehat{AFQ}$ $\Rightarrow \widehat{AFQ} = \widehat{PIQ}$ $\Rightarrow$ BIQF là tứ giác nội tiếp.	0.75
Câu 6 (*1,0đ*)		Dễ chứng minh các bất đẳng thức: $x^2 + y^2 \ge 2xy$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$ Áp dụng các bất đẳng thức trên, ta có: $\frac{(1+a)^2 + b^2 + 5}{ab+a+4} = \frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4} \ge \frac{2ab+2a+6}{ab+a+4} = \frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4}$ $= 2 - \frac{2}{ab+a+4} = 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{(ab+a+1)+3} \ge 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{3}\right)$ $= \frac{11}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{ab+a+1}$ Tương tự:	

		$\dfrac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4} \ge \dfrac{11}{6} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{bc+b+1}$ $\dfrac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4} \ge \dfrac{11}{6} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{ca+c+1}$ $\Rightarrow P \ge \dfrac{11}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{ab+a+1} + \dfrac{1}{bc+b+1} + \dfrac{1}{ca+c+1}\right)$ Vì $abc=1$ nên: $\dfrac{1}{bc+b+1} = \dfrac{a}{abc+ab+a} = \dfrac{a}{ab+a+1}$ $\dfrac{1}{ca+c+1} = \dfrac{ab}{a^2bc+abc+ab} = \dfrac{ab}{ab+a+1}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{ab+a+1} + \dfrac{1}{bc+b+1} + \dfrac{1}{ca+c+1} = \dfrac{1}{ab+a+1} + \dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{ab}{ab+a+1}$ $=1$ $\Rightarrow P \ge \dfrac{11}{2} - \dfrac{1}{2} = 5$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ ab+a+1=bc+b+1=ca+c+1=3 \\ abc=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$ Vậy $\min P = 5 \Leftrightarrow a=b=c=1$	