

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Gồm 01 trang)

* Môn thi: Toán (Không Chuyên)

* Ngày thi: 10/6/2022

* Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

ĐỀ

Câu 1: (4 điểm) Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45}$.

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+1}} \right) (a\sqrt{a} + a)$, với $a > 0$.

Câu 2: (4 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

b) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x - 2$. Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng (d) bằng phép tính.

Câu 3: (6 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 5x + m + 2 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 - 4$.

Câu 4: (6 điểm)

Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E .

a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

c) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi tam giác COH đạt giá trị lớn nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4 điểm) Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45}$.

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) (a\sqrt{a} + a)$, với $a > 0$.

Lời giải

Câu 1. (4 điểm) Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45}$.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45} \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 5} \\ &= \sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) (a\sqrt{a} + a)$, với $a > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) (a\sqrt{a} + a) \\ &= \left[\frac{\sqrt{a}+1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \right] (a\sqrt{a} + a) \\ &= \frac{a\sqrt{a} + a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \\ &= \frac{a(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \\ &= \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Câu 2. (4 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

b) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x - 2$. Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

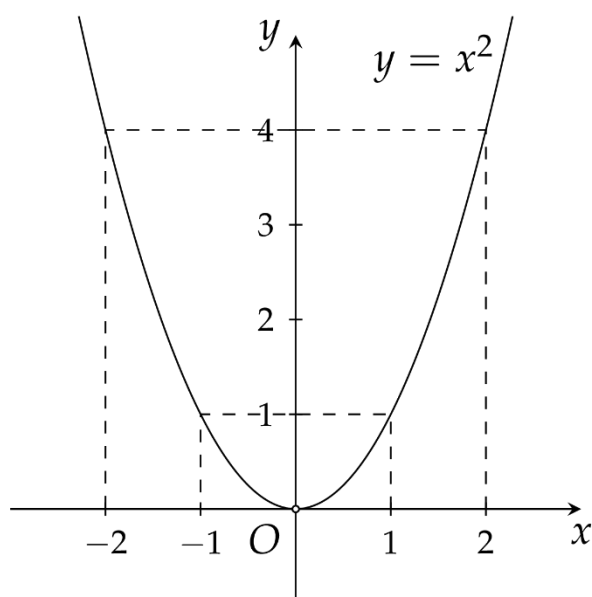
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

Tập xác định: \mathbb{R}

b) Bảng giá trị của (P)

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vẽ đồ thị hàm số (P)



Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) :

$$x^2 = 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ hay } x = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 = 1$$

Vậy tọa độ giao điểm của (D) và (P) là: $(2;4)$ và $(1;1)$

Câu 3. (6 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 5x + m + 2 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 - 4.$$

Lời giải

a) Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta được $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Do $a + b + c = 1 + (-5) + 4 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 4$.

b) Ta có $\Delta = 17 - 4m$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow 17 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{17}{4}$.

c) Theo câu b, phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m < \frac{17}{4}$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2. \end{cases} \quad (1)$$

Theo đề ta có

$$P = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 - 4 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - (x_1 x_2)^2 - 4.$$

Thay (1) vào ta được

$$\begin{aligned} P &= 5(m + 2) - (m + 2)^2 - 4 \\ &= 5m + 10 - m^2 - 4m - 8 \\ &= -m^2 + m + 2 \\ &= -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$$P_{\max} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Câu 4. (6 điểm)

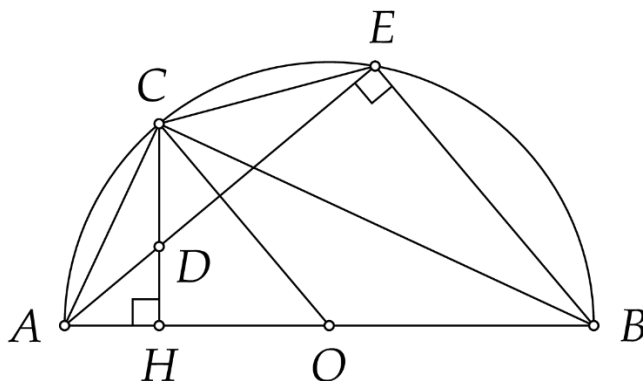
Trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, lấy điểm C (C khác A và B), từ C kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Gọi D là điểm bất kì trên đoạn CH (D khác C và H), đường thẳng AD cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai là E .

a) Chứng minh tứ giác $BHDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.

c) Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi ΔCOH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) **Chứng minh tứ giác BHDE nội tiếp.**

Xét tứ giác BHDE, ta có

$$CH \perp AB(gt) \Rightarrow \widehat{BHD} = 90^\circ.$$

và \widehat{AEB} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{BED} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{BHD} + \widehat{BED} = 180^\circ$ (tổng hai góc đối bằng 180°).

Do đó tứ giác BHDE nội tiếp (đpcm)

b) **Chứng minh $AD \cdot EC = CD \cdot AC$.**

$$\text{và } \widehat{ACD} + \widehat{CAH} = \widehat{ABC} + \widehat{CAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ABC}.$$

Mặt khác, ta có $\widehat{ABC} = \widehat{CEA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CA).

$$\text{Suy ra } \widehat{ACD} = \widehat{AEC}.$$

Xét ΔACD và ΔAEC , ta có

$$\widehat{CAD} = \widehat{EAC} \text{ (góc chung)}$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{AEC} \text{ (chứng minh trên)}$$

suy ra $\Delta ACD \sim \Delta AEC$ (g-g).

$$\text{Suy ra } \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{EC} \Rightarrow AD \cdot EC = CD \cdot AC \text{ (đpcm)}.$$

c) **Khi điểm C di động trên nửa đường tròn (C khác A, B và điểm chính giữa cung AB), xác định vị trí của điểm C sao cho chu vi ΔCOH đạt giá trị lớn nhất.**

Gọi P chu vi tam giác COH, ta có

$$P = CO + OH + CH = \frac{AB}{2} + OH + CH.$$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ với các đoạn thẳng OH , CH , ta có

$$(OH+CH)^2 \leq 2(OH^2+CH^2) = 2OC^2.$$

$$\text{Suy ra } OH+CH \leq OC\sqrt{2} = \frac{AB}{2}\sqrt{2} = R\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó, } P = \frac{AB}{2} + OH + CH \leq \frac{AB}{2} + R\sqrt{2} = R + R\sqrt{2}.$$

Chu vi tam giác COH lớn nhất khi $OH = CH$.

Vậy C nằm trên nửa đường tròn sao cho tam giác COH là tam giác vuông cân.

_____ **THCS.TOANMATH.com** _____