

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực x, y khác 0, thỏa mãn $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$ và $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 10$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

b) Cho đa thức bậc ba $P(x)$ thỏa mãn khi chia $P(x)$ cho $x-1; x-2; x-3$ đều được số dư là 6 và $P(-1) = -18$. Tìm đa thức $P(x)$.

c) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 8; a + b + c = 26; abc = 144.$$

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{bc} - \sqrt{a} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ca} - \sqrt{b} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ab} - \sqrt{c} + 9}$.

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $3x^2 + x - 6 = 4x(\sqrt{5x-6} - 1)$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - 6y = 0 \\ (x+y)(x+2y) = 3(xy+2) \end{cases}$$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = c, AC = b$. Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính AB và đường tròn tâm O_2 đường kính AC . Gọi H là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1) và (O_2) . Đường thẳng (d) thay đổi luôn đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm D, E (không trùng với A) sao cho A nằm giữa D và E .

a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng (d) thay đổi.

b) Xác định vị trí của đường thẳng (d) để diện tích tứ giác $BDEC$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo b, c .

c) Kẻ đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn DE và vuông góc với BC tại điểm K . Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(7-p)(7+p)$ chia hết cho 24.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} - x^2 - 28y^2 - 28z^2.$$

--- HẾT ---