ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Năm học 2021-2022
Môn thi : TOÁN (chuyên)
Thời gian làm bài : 150 phút , không kể thời gian phát đề

Câu 1.(1,5 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}=2\\ x+y=m\end{cases}$

a) Giải hệ với m = 7 .
b) Tìm m sao cho hệ đã cho có nghiệm (x,y).

Câu 2.(1,5 điểm) Cho các số a,b,c sao cho a,b,c, a+b, b+c ,c+a đều khác 0.
Đặt $M=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $N=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$, $K=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$
a) Chứng minh rằng nếu $MK=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ thì $N=0$.
b) Cho M = K = 4, N = 1. Tính tích abc.

Câu 3.(1,5 điểm) Cho dãy n số thực : $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ($n \geq 5$) thỏa mãn :
$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \text{ và } x_1+x_2+\ldots+x_n=1.$$
a) Chứng minh rằng nếu $x_n \geq \frac{1}{3}$ thì $x_1+x_2 \leq x_n$.
b)Chứng minh rằng nếu $x_n \leq \frac{2}{3}$ thì tìm được số nguyên dương $k < n$ sao cho
$$\frac{1}{3} \leq x_1+x_2+\ldots+x_k \leq \frac{2}{3}.$$

Bài 4.(1,5 điểm)a)Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3+1$ chia hết cho 2^{2021}.
b) Tìm tất cả số tự nhiên n và số nguyên tố p sao cho $\frac{2n+2}{p}$ và $\frac{4n^2+2n+1}{p}$ là các số nguyên. Chứng minh rằng với n và p tìm được, các số nguyên ở trên không thể đồng thời là số chính phương.

Bài 5.(3 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A .Các điểm E , F lần lượt thay đổi trên các cạnh AB ,AC sao cho EF // BC. Gọi D là giao điểm của BF với CE và H là hình chiếu vuông góc của D lên EF. Đường tròn (I) đường kính EF cắt BF,CE tương ứng tại M,N (M khác F, N khác E)
a) Chứng minh rằng AD và đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN cùng đi qua tâm I của đường tròn (I).
b) Gọi K,L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E,F lên BC và P,Q tương ứng là giao điểm của EM, FN với BC. Chứng minh các tứ giác AEPL, AFQK nội tiếp và $\frac{BP.BL}{CQ.CK}$ không đổi khi E,F thay đổi.
c) Chứng minh rằng nếu EL và FK cắt nhau trên đường tròn (I) thì EM và FN cắt nhau trên đường thẳng BC.

Bài 6.(1 điểm) Cho N tập hợp ($N \geq 6$), mỗi tập hợp gồm 5 chữ cái khác nhau được lấy từ 26 chữ cái a,b,c,…,x,y,z.
a) Biết rằng trong N tập hợp đã cho, hai tập hợp bất kỳ có chung đúng một chữ cái và không có chữ cái nào có mặt trong tất cả N tập hợp này.
Chứng minh rằng không có chữ cái nào có mặt trong 6 tập hợp từ N tập hợp đã cho.
b) Biết rằng trong số N tập hợp đã cho, hai tập hợp bất kỳ có chung đúng hai chữ cái và không có hai chữ cái nào cùng có mặt trong tất cả N tập hợp này.
Hỏi trong số N tập hợp đã cho, có nhiều nhất là bao nhiêu tập hợp có chung đúng hai chữ cái ?

- HẾT –

Ghi chú: ***Thí sinh không được sử dụng tài liệu - Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.***

Họ và tên thí sinh: ______________________ SBD: __________

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10

ĐÁP ÁN TUYỂN SINH LỚP 10

Năm học: 2021-2022

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Câu	ĐÁP ÁN	Điểm
1a (0,75đ)	Điều kiện: $x \geq 2; y \geq 1$. Đặt $u = \sqrt{x-2}$, $v = \sqrt{y-1}$, suy ra $u, v \geq 0$. Khi $m = 7$, hệ trở thành $\begin{cases} u+v=2 \\ u^2+v^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ 2uv=(u+v)^2-(u^2+v^2)=0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0, v=2 \\ u=2, v=0 \end{array}\right.$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=5 \\ x=6, y=1. \end{array}\right.$ (thỏa mãn)	0,25
1b (0,75đ)	Với điều kiện và cách đặt như trên, hệ trở thành $\begin{cases} u+v=2 \\ u^2+v^2=m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ uv=\dfrac{7-m}{2} \end{cases}$	0,25
	Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ trên có nghiệm không âm. Áp dụng Định lý Viete đảo, ta được $\begin{cases} \Delta = 2^2 - 4\left(\dfrac{7-m}{2}\right) \geq 0 \\ S = 2 \geq 0 \\ P = \dfrac{7-m}{2} \geq 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow 5 \leq m \leq 7$.	0,25
2a (0,75đ)	Ta có $KM = \left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}\right)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$ $= \dfrac{a}{b+c}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{b+c}{bc}\right) + \dfrac{b}{c+a}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{c+a}{ca}\right) + \dfrac{c}{a+b}\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{c+a}{ca}\right)$	0,25
	$= N + \left(\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab}\right) = N + \dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$.	0,25
	Do đó $MK = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc} \Leftrightarrow N = 0$.	0,25
2b (0,75đ)	Từ $M = 4$ ta được $ab + bc + ca = 4abc$. Từ câu a) ta được $a^2 + b^2 + c^2 = 15abc$.	0,25
	Ta có $K+3 = \left(\dfrac{a}{b+c}+1\right) + \left(\dfrac{b}{c+a}+1\right) + \left(\dfrac{c}{a+b}+1\right) = (a+b+c).N$, nên $a+b+c = 7$.	0,25
	Suy ra $49 = (a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca) = 15abc + 8abc = 23abc$. Do đó $abc = \dfrac{49}{23}$.	0,25
3a (0,75đ)	Giả sử $x_1 + x_2 > x_n$, suy ra $x_1 + x_2 \geq \dfrac{1}{3}$, nên $x_2 > 0$. Do đó $x_k > 0$ với mọi $k \geq 2$.	0,25
	Suy ra $1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq (x_1 + x_2) + (x_{n-2} + x_{n-1}) + x_n \geq 2(x_1 + x_2) + x_n > 3x_n$.	0,25
	Suy ra $x_n < \dfrac{1}{3}$-mâu thuẫn. Vậy $x_1 + x_2 \leq x_n$.	0,25

Câu	ĐÁP ÁN	Điểm
3b (0,75đ)	Giả sử không tồn tại số k như trên. Khi đó, tồn tại $m < n$ sao cho $x_1 + \cdots + x_m < \frac{1}{3}$ và $x_1 + \cdots + x_{m+1} > \frac{2}{3}$. Suy ra $x_{m+1} > \frac{1}{3}$. Do đó $x_n > \frac{1}{3}$.	0,25
	• Nếu $m < n - 1$, nghĩa là $m \leq n - 2$ thì $1 = x_1 + \ldots + x_n > (x_1 + \ldots + x_{m+1}) + x_n > \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$-mâu thuẫn.	0,25
	• Nếu $m = n - 1$ thì $1 = (x_1 + \ldots + x_m) + x_n < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$-mâu thuẫn. Kết hợp hai trường hợp trên ta được điều giả sử là sai, nghĩa là ta được kết quả.	0,25
4a (0,75đ)	Ta có $(2n+1)^3 + 1 = (2n+2)(4n^2+2n+1)$, mà $4n^2+2n+1$ lẻ	0,25
	nên $(2n+1)^3 + 1 \vdots 2^{2021} \Leftrightarrow 2n+2 \vdots 2^{2021} \Leftrightarrow n+1 \vdots 2^{2020}$.	0,25
	$\Leftrightarrow n = 2^{2020}k - 1$, với $k \in \mathbb{Z}^+$.	0,25
4b (0,75đ)	Ta có $4n^2+2n+1 \vdots p$ nên p lẻ, mà $2n+2 \vdots p$ nên $n+1 \vdots p$. Ta có $4n^2+2n+1 = (4n-2)(n+1)+3$, nên $3 \vdots p$. Do đó $p = 3$.	0,25
	Giả sử cả hai số đã cho đều là số chính phương, suy ra tồn tại $m \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $\frac{2n+2}{3}.\frac{4n^2+2n+1}{3} = m^2$, nghĩa là $(2n+1)^3 = (3m)^2 - 1 = (3m-1)(3m+1)$. Dễ thấy m chẵn nên $3m-1$ và $3m+1$ là hai số lẻ liên tiếp, dẫn đến $(3m-1; 3m+1) = 1$. Do đó tồn tại $r, s \in \mathbb{Z}$ sao cho $3m-1 = r^3$ và $3m+1 = s^3$.	0,25
	Suy ra $2 = s^3 - r^3 = (s-r)(s^2+rs+r^2)$. Do s và r cùng lẻ, $s > r$ nên từ đây ta được $s - r = 2$ và $s^2 + rs + r^2 = 1$. Suy ra $r = -1, s = 1$. Do đó $m = 0$-mâu thuẫn.	0,25
5a (1,0đ)	Theo Bổ đề hình thang thì AD đi qua trung điểm của EF,	0,25
	do đó AD đi qua I.	0,25
	Gọi $J = EM \cap FN$, suy ra đường tròn (HMN) là đường tròn Euler trong ΔEFJ,	0,25
	do đó đường tròn (HMN) đi qua I.	0,25
5b (1,0đ)	Các tứ giác $AEMF$ và $MFLP$ nội tiếp nên $BA.BE = BF.BM = BL.BP$.	0,25
	Suy ra $AEPL$ nội tiếp.	0,25
	Chứng minh tương tự ta được $AFQK$ nội tiếp.	0,25
	Ta có $\frac{BP.BL}{CQ.CK} = \frac{BA.BE}{CA.CF} = \left(\frac{BA}{CA}\right)^2$-không đổi.	0,25

Câu	ĐÁP ÁN	Điểm
5c (1,0đ)	Gọi $G = EL \cap FK$. Khi đó G là tâm hình chữ nhật $EFLK$. Nếu $G \in (I)$ thì $EL \perp FK$ nên $EFLK$ là hình vuông.	0,25
	Đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ và $d = EK$. Ta có $\Delta BEK \backsim \Delta BCA$ nên $\dfrac{EB}{EK} = \dfrac{CB}{CA}$. Suy ra $EB = \dfrac{ad}{b}$. Lại có $\dfrac{KB}{KE} = \dfrac{AB}{AC}$, nên $KB = \dfrac{cd}{b}$.	0,25
	Suy ra $BP = \dfrac{BA.BE}{BL} = \dfrac{ac}{b+c}$.	0,25
	Tương tự ta cũng có $CQ = \dfrac{ab}{b+c}$. Từ đó $PP + CQ = a = BC$. Vậy $P \equiv Q \equiv J$, nghĩa là EM và FN cắt nhau tại J trên BC.	0,25
6a (0,5đ)	Giả sử tồn tại phần tử x_1 thuộc cả sáu tập $A_1, \ldots, A_6$ từ N tập hợp đã cho. Do không có phần tử nào thuộc cả N tập hợp nên $N \geq 7$ và tồn tại tập A_7 sao cho $x_1 \notin A_7$.	0,25
	Do A_7 có chung đúng một phần tử a_i với A_i $(i = 1, \ldots 6)$ và do các A_i đã có chung x_1 nên các phần tử a_i này là khác nhau. Do đó A_7 có ít nhất 6 phần tử-mâu thuẫn.	0,25
6b (0,5đ)	Giả sử có nhiều nhất k tập hợp $A_1, \ldots, A_k$ có chung đúng hai chữ cái x_1, x_2. Do không có hai chữ cái nào thuộc cả N tập hợp nên $N \geq k+1$ và tồn tại tập A_{k+1} sao cho $x_1 \notin A_{k+1}$ hoặc $x_2 \notin A_{k+1}$. • Nếu $x_1 \notin A_{k+1}$ và $x_2 \notin A_{k+1}$ thì $k \leq 2$, vì nếu $k \geq 3$ thì A_{k+1} có chung hai phần tử a_1, a_2 với A_1; có chung hai phần tử a_3, a_4 với A_2; có chung hai phần tử a_5, a_6 với A_3, mà sáu phần tử $a_1, \ldots, a_6$ là khác nhau nên A_{k+1} có ít nhất 6 phần tử-mâu thuẫn. • Nếu $x_1 \in A_{k+1}$ và $x_2 \notin A_{k+1}$ thì $k \leq 4$, vì nếu $k \geq 5$ thì A_{k+1} có chung một phần tử a_i (khác x_1) với A_i $(i = 1, \ldots, 5)$, mà sáu phần tử $x_1, a_1, \ldots, a_5$ là khác nhau nên A_{k+1} có ít nhất 6 phần tử-mâu thuẫn.	0,25
	Kết hợp hai trường hợp trên ta được $k \leq 4$. Ví dụ sau chứng tỏ $k = 4$ thỏa mãn. Đó là xét bộ 6 tập hợp $A_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $A_2 = \{a, b, f, g, h\}$, $A_3 = \{a, b, i, j, k\}$, $A_4 = \{a, b, l, m, n\}$, $A_5 = \{a, c, f, i, l\}$, $A_6 = \{b, d, g, j, m\}$.	0,25